

JAERI - M

88-087

ヤコビ行列の一般的表現とその簡易計算法
(マニピュレータの指先速度と関節速度の関係)

1988年5月

佐々木 忍

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1988

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 いばらき印刷株

ヤコビ行列の一般的表現とその簡易計算法
(マニピュレータの指先速度と関節速度の関係)

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1988年4月14日受理)

本報では、マニピュレータの位置制御等でしばしば利用されるヤコビ行列の計算法をマニピュレータの指先速度と関節速度間の関係に着目して理論的に導き出した。さらに、先に報告した運動学の一般式と併用すると任意のマニピュレータに対するヤコビ行列が計算機で自動的に作り出せ、ヤコビ行列を得るのに必要な従来の複雑な手計算の処理過程を取除くことができる。このような漸化式表現による簡易な記述は計算の高速化にも結びつき、十分に実用可能なアルゴリズムであることが明らかになった。

A General Expression of Jacobian Matrix
and Its Simplified Computation Method

(Relationships between the Velocities)
of Manipulator Hand and Joints

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received April 14, 1988)

In this paper, the computation method of the Jacobian matrix, which is frequently utilized in the manipulator control such as the position, is theoretically derived turning our eyes to relationships between the velocities of manipulator hand and joints. In addition, the combined use of general formulation for manipulator kinematics reported in the preceding paper leads to an automatic generation by computer of the Jacobian matrix for any type of manipulators, with the consequence that we are set free from the conventional cumbersome hand precalculation necessary for obtaining the Jacobian elements.

As such, the present simple approach based on the recursive expression is proved to be of sufficiently practical use for the requirement of high-speed computation.

Keywords: Hand Velocity, Joint Velocity, Jacobian Matrix, Resolved Motion Rate Control, Direction Cosine, Relative Motion, Homogeneous Transformation Matrix, Recursive Algorithm

目 次

1. まえがき	1
2. マニピュレータの指先速度と関節速度間の関係	2
2.1 ヤコビ行列の基本概念	2
2.2 回転角速度の計算とヤコビ行列	3
2.3 リンク速度の計算とヤコビ行列	11
3. 6リンク・マニピュレータへの適用	15
4. あとがき	17
謝 辞	17
参考文献	18
付 録	19

Contents

1. Introduction	1
2. Relationships between Manipulator Hand Velocities and Joint Rates	2
2.1 Fundamentals of Jacobian Matrix	2
2.2 Calculation of Angular Velocity and Its Jacobian Matrix ...	3
2.3 Calculation of Link Velocity and Its Jacobian Matrix	11
3. Application to a Six-Link Manipulator	15
4. Concluding Remarks	17
Acknowledgement	17
References	18
Appendixes	19

記号表 1

A	変換行列 (3×3, 4×4)
A _i	変換行列 (4×4)
A _{i,j}	座標系 i から座標系 j への変換行列
a	マニピュレータ指先の基準系 z 軸への方向余弦, ベクトル (a _x , a _y , a _z)
a _i	関節 i と i+1 の間の共通法線距離
a _{ij}	変換行列 A の要素
a _{lmj}	$\left(- \frac{\partial a_{lm}}{\partial \theta_j} \right)$
c _i	関節角 θ_i の余弦 $\cos \theta_i$
c _{ij}	関節角 θ_i と θ_j の和の余弦 $\cos(\theta_i + \theta_j)$
d _i	z_{i-1} 方向に測った x_{i-1} と x_i 間の距離
δ_{ij}	kronecker の記号
e _{j-1}	関節軸 j の単位ベクトル
f	マニピュレータの運動学を表す非線形関数
i, j, k	絶対座標系 Σ の基本 (単位) ベクトル
i [*] , j [*] , k [*]	回転する座標系 Σ^* の基本 (単位) ベクトル
J	ヤコビ行列 ($\in R^{m \times n}$)
J _p	ヤコビ行列 ($\in R^{3 \times n}$)
J _c	ヤコビ行列 ($\in R^{3 \times n}$)
ⁱ J _p	J _p の i 列要素
ⁱ J _c	J _c の i 列要素
n	マニピュレータ指先の基準系 x 軸への方向余弦, ベクトル (n _x , n _y , n _z)
o	マニピュレータ指先の基準系 y 軸への方向余弦, ベクトル (o _x , o _y , o _z)
P _x , P _y , P _z	マニピュレータ先端の位置座標
p _{s,t} ^{i,j}	座標変換行列 A _{i,j} の s 行 t 列要素
p ^{i,j}	位置を示す A _{i,j} の 3 列目のベクトル
R ⁿ	n-次元ユークリッド空間
r _{i-1,i}	端点 T _i と T _{i+1} 間の距離ベクトル
S _i	関節 i のインデックス S _i = 1 ; 回転関節 S _i = 0 ; 直動関節
s _i	関節角 θ_i の正弦 $\sin \theta_i$
s _{ij}	関節角 θ_i と θ_j の和の正弦 $\sin(\theta_i + \theta_j)$

記号表 2

T	行列の転置記号
T_i	リンク $i-1$ の端点
T_6	ベースに関する6自由度マニピュレータの先端の行列表示
v_i	関節 i の速度
v_n	指先速度
v	6自由度マニピュレータの指先速度
x	位置・姿勢ベクトル $x = (x_1, \dots, x_m)^T$
\dot{x}	マニピュレータの指先速度
x_p, \dot{x}_p	マニピュレータの指先位置と速度
x_c, \dot{x}_c	マニピュレータの指先方向と角速度
X	m -次元作業空間
α_i	軸 z_{i-1} と z_i 間のねじれ角度
Σ	絶対座標系 ($o-xyz$)
Σ^*	回転する座標系 ($o^*-x^*y^*z^*$)
θ	関節座標のベクトル $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$
θ_i	関節 i の関節角
$\dot{\theta}_i$	関節 i の関節速度
Θ	n -次元関節座標空間
ω_i	リンク i の角速度
Ω^*	回転する座標系 Σ^* の角速度 ($\in R^3$)
Ω	Ω^* を絶対座標系に換算した角速度 ($\in R^3$)

1. ま え が き

マニピュレータの運動学の記述は、同次座標変換行列やベクトル幾何学の概念を使って系統的に求められる^{(1), (4), (9)~(11)}。一方、この逆問題の解析解は運動学方程式が非線形であるために一般的に求めることが不可能である。実用上関節変数と指先の変位との関係を線形近似式で表し、ヤコビ行列を使って計算を行っているのが普通である。ただ、その場合、アルゴリズムが単純なこの手法にも解の特異性、初期値依存性など考慮すべき問題点が多々存在することを忘れてはならない。

本報では、このヤコビ行列を基準点近傍の微小変化として与えるかわりに回転と相対運動の立場から速度の関係をを用いて表現することを提唱する。すなわち、マニピュレータの指先速度（本報では、最終リンクの速度と角速度を一括してこう呼ぶことにする）と関節角の時間変化つまり関節速度の関係に注目すると、それが運動学に対する解決手法となるばかりか、関節速度 θ を制御することにより作業空間での指先速度を制御できるといったいわゆる動的制御技術への足掛りを与える。

特に、注目すべき点として、これまでヤコビ行列の要素は複雑な三角関数の計算となるため多くの計算時間を要していたが、ここでは先に報告した漸化式表現による運動学モデル⁽⁹⁾と併用すると複雑な行列要素の計算をまったく行わずに、ヤコビ行列の高速計算ができる。

このように、本報告ではヤコビ行列の取り扱いのなかで、計算の能率向上をキーポイントにおいて議論を展開したことから、例えばリンクの自由度が増えていわゆる冗長性をもつマニピュレータの一般化逆行列による解法モデルや多関節アームの機構的特徴を示す量の研究については触れない。

2. マニピュレータの指先速度と関節速度間の関係

2.1 ヤコビ行列の基本概念^{(1)~(6)}

マニピュレータの運動学の本質は、関節座標（または関節変数）のベクトル θ を与えたとき、マニピュレータの指先の位置と姿勢を表すベクトル \mathbf{x} が

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\theta) \quad (2.1.1)$$

なる関数関係で一意的に決定できる点にある。ここに、関節座標ベクトル θ は機構の自由度を n とした場合、要素 $\theta_1, \dots, \theta_n$ から構成される n 次元ベクトル ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$) であり、マニピュレータの各関節の物理的制御条件 $\theta_{i\min}, \theta_{i\max}$ で決まる θ の集合に対して関節座標空間 $\Theta = \{\theta : \theta_{i\min} \leq \theta_i \leq \theta_{i\max}\}$ を形成する。一方、マニピュレータの指先位置と姿勢を表すベクトル \mathbf{x} (作業座標ベクトルまたは外部座標ベクトルと呼ぶ) を x_1, \dots, x_m なる m 個の外部座標で記述すると、これは m -次元作業空間 $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{f}(\theta), \theta \in \Theta\}$ の要素と考えられる。(2.1.1) 式の運動学を記述する非線形関数 \mathbf{f} は任意の θ に対して連続微分可能とする。この関数の決定いわゆる順問題は、 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ への写像問題と考えられ、解析上の問題点は残されていない。しかし、集合 X を集合 Θ へ写像する逆問題は、解の一意性が保証されないばかりか一般解を解析的に導出することすら困難である。そこで、指先の位置と方向を与えそれを実現する関節角の決定を関節変数の微小変位から写像の変換行列（以下、ヤコビ行列と呼ぶ）に基づいて反復法で解を導くのが実際的なアプローチである。

すなわち、 \mathbf{f} の第 1 近似でもって

$$\Delta \mathbf{x} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \right) \Delta \theta = \mathbf{J} \Delta \theta \quad (2.1.2)$$

と表す。ここで $\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\theta)}{\partial \theta} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が偏導関数のヤコビ行列である。

この方法は、ハンドリング対象物に近づいて、これからハンドリング動作を行おうとする時に利用できる。しかし、実際には初期推定値近傍の微小変化のかわりに、途中の運動を手先の移動方向と移動速度で表現することも考えられる。

そこで、(2.1.2) 式を書き換えて、(2.1.1) 式の時間に関する微分

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\theta)}{\partial \theta} \right) \frac{d\theta}{dt}$$

すなわち、 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\theta}$ (2.1.3)

と記述することも可能である。（以下、ドットのついた記号は微分操作を表す）この場合の行列 \mathbf{J} は、関節速度（関節の駆動速度）と指先の速度間を関連づけるものである。

指先のこの移動速度を入力として与え、各関節の駆動速度を計算する方法の原案は MIT の Whitney が提唱したいわゆる分離速度制御法 (Resolved Motion Rate Control Method) の中に見られる^{(7),(8)}。ところで、(2.1.2)、(2.1.3) 式のヤコビ行列は見かけ上同じ形であるが、

取り扱う変数の性質が異なるとより簡潔な形のマトリクスの計算が可能となり、特に運動学を漸化式で誘導するアルゴリズムを利用すれば⁽⁹⁾、ヤコビ行列が複雑な計算をせずに引出せる。このことを2.3章で示す。

まず、取り扱うヤコビ行列の大きさについて定める。実用的な産業用マニピュレータにおいて、ベクトル \mathbf{x} の次元は $m=6$ の場合が最も一般的であるから、これに対するヤコビ行列の計算を考える。そこで、指先の位置と姿勢を $\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_c$ とし、それぞれ3つの座標で記述する。したがって、(2.1.3) 式を

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{vmatrix} = \mathbf{J} \dot{\theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_c \end{vmatrix} \dot{\theta} \quad (2.1.4)$$

と表現する。ここにベクトル $\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^3$ は、最終リンクの速度と角速度を表し、また $\mathbf{J}_p, \mathbf{J}_c \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ はそれぞれ $\dot{\mathbf{x}}_p, \dot{\mathbf{x}}_c$ に対するヤコビ行列とする。 $\mathbf{J}_p, \mathbf{J}_c$ を導くために、次節以降で座標系の回転および相対運動から、角速度とリンク速度を導出する。その結果に基づいて2つのヤコビ行列を求め、さらに座標変換行列の性質を利用してヤコビ行列の計算を簡潔な記述として完成させる。

尚、ヤコビ行列は仮想仕事の原理に基づき、外力、モーメントおよび電動機に働くトルクの関係を結びつけるものと考えられるがその詳細についてはここでは割愛する。

2.2 回転角速度の計算とヤコビ行列

Fig. 2.1 に示すように、空間に1つの直交座標系 $0-xyz$ を固定し、これを Σ で表す。 Σ と原点 0 を共有し 0 のまわりに回転する直交座標系 $0-x^*y^*z^*$ をとり、これを Σ^* で表す。 Σ を絶対座標系（マニピュレータの機構解析では、基準座標系、ワールド座標系とも呼ぶ）とし、その基本ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする。一方、 Σ^* の基本ベクトルを $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$ とすれば、 $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$ は時間 t の関数である。時間を止めた場合の座標変換と同様に、 Σ と Σ^* の間の座標変換は、

$$(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \mathbf{A}(t) \quad (2.2.1)$$

と記述できる。ただし、変換行列 $\mathbf{A}(t)$ をつぎの 3×3 マトリクスで表現する。

$$\mathbf{A}(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} \quad (2.2.2)$$

(2.2.1) 式の微分を行うと、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{i}^*}{dt}, \frac{d\mathbf{j}^*}{dt}, \frac{d\mathbf{k}^*}{dt} \right) &= (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = (\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*) \mathbf{A}^{-1}(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \\ &= (\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*) \mathbf{A}^T(t) \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

となる。ここで、 $\mathbf{A}(t)$ が直交行列であるからその逆行列は転置行列に置き換えられた。

つづいて、(2.2.3) 式の行列演算を行う。

$$A^T(t) \frac{dA(t)}{dt} = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{21}(t) & a_{31}(t) \\ a_{12}(t) & a_{22}(t) & a_{32}(t) \\ a_{13}(t) & a_{23}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{a}_{11}(t) & \dot{a}_{12}(t) & \dot{a}_{13}(t) \\ \dot{a}_{21}(t) & \dot{a}_{22}(t) & \dot{a}_{23}(t) \\ \dot{a}_{31}(t) & \dot{a}_{32}(t) & \dot{a}_{33}(t) \end{vmatrix}$$

以下、時間の陽的表示 (t) を省略して

$$A^T \dot{A} = \begin{vmatrix} a_{11} \dot{a}_{11} + a_{21} \dot{a}_{21} + a_{31} \dot{a}_{31} & a_{11} \dot{a}_{12} + a_{21} \dot{a}_{22} + a_{31} \dot{a}_{32} & a_{11} \dot{a}_{13} + a_{21} \dot{a}_{23} + a_{31} \dot{a}_{33} \\ a_{12} \dot{a}_{11} + a_{22} \dot{a}_{21} + a_{32} \dot{a}_{31} & a_{12} \dot{a}_{12} + a_{22} \dot{a}_{22} + a_{32} \dot{a}_{32} & a_{12} \dot{a}_{13} + a_{22} \dot{a}_{23} + a_{32} \dot{a}_{33} \\ a_{13} \dot{a}_{11} + a_{23} \dot{a}_{21} + a_{33} \dot{a}_{31} & a_{13} \dot{a}_{12} + a_{23} \dot{a}_{22} + a_{33} \dot{a}_{32} & a_{13} \dot{a}_{13} + a_{23} \dot{a}_{23} + a_{33} \dot{a}_{33} \end{vmatrix} \quad (2.2.4)$$

を得る。A, \dot{a}_{ij} は時間 t に関する A, a_{ij} の微分記号である。

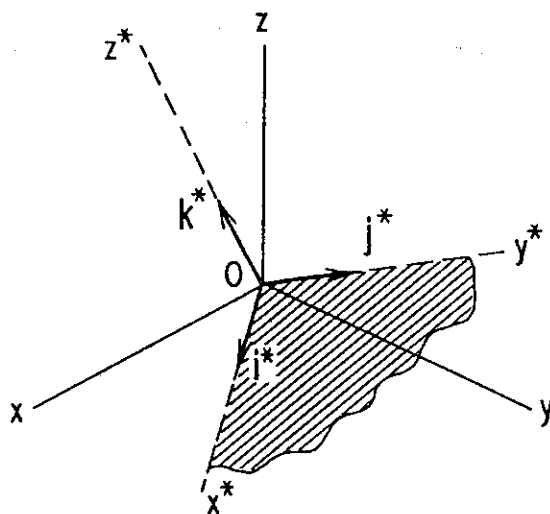


Fig.2.1 Rotational Co-ordinate System and Reference Co-ordinate System

さて、(2.2.2) 式で定めた行列 A の要素 (a_{ij}) は座標変換における方向余弦を表すもので、

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \quad (2.2.5)$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \quad (2.2.6)$$

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \quad (2.2.7)$$

$$a_{12} a_{13} + a_{22} a_{23} + a_{32} a_{33} = 0 \quad (2.2.8)$$

$$a_{11} a_{13} + a_{21} a_{23} + a_{31} a_{33} = 0 \quad (2.2.9)$$

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} = 0 \quad (2.2.10)$$

なる性質を有している。(2.2.5) ~ (2.2.10) 式を時間 t で微分すると、

$$\frac{d}{dt} (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) = 2 (a_{11} \dot{a}_{11} + a_{21} \dot{a}_{21} + a_{31} \dot{a}_{31}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) = 2 (a_{12} \dot{a}_{12} + a_{22} \dot{a}_{22} + a_{32} \dot{a}_{32}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}) = (a_{13}\dot{a}_{12} + a_{23}\dot{a}_{22} + a_{33}\dot{a}_{32}) + (a_{12}\dot{a}_{13} + a_{22}\dot{a}_{23} + a_{32}\dot{a}_{33}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33}) = (a_{11}\dot{a}_{13} + a_{21}\dot{a}_{23} + a_{31}\dot{a}_{33}) + (a_{13}\dot{a}_{11} + a_{23}\dot{a}_{21} + a_{33}\dot{a}_{31}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) = (a_{11}\dot{a}_{12} + a_{21}\dot{a}_{22} + a_{31}\dot{a}_{32}) + (a_{12}\dot{a}_{11} + a_{22}\dot{a}_{21} + a_{32}\dot{a}_{31}) = 0,$$

となる。この関係を利用すると、(2.2.4)式はつぎのような交代行列の計算となる。

$$A^T \dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & -N & M \\ N & 0 & -L \\ -M & L & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

$$\text{ここに, } L = a_{13}\dot{a}_{12} + a_{23}\dot{a}_{22} + a_{33}\dot{a}_{32},$$

$$M = a_{11}\dot{a}_{13} + a_{21}\dot{a}_{23} + a_{31}\dot{a}_{33}, \quad (2.2.12)$$

$$N = a_{12}\dot{a}_{11} + a_{22}\dot{a}_{21} + a_{32}\dot{a}_{31},$$

こうして導き出した(2.2.11)式を再び(2.2.3)式に代入すると、回転運動による基本ベクトルの微分がつぎのように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}^*}{dt} &= N\mathbf{j}^* - M\mathbf{k}^* \\ \frac{d\mathbf{j}^*}{dt} &= -N\mathbf{i}^* + L\mathbf{k}^* \\ \frac{d\mathbf{k}^*}{dt} &= M\mathbf{i}^* - L\mathbf{j}^* \end{aligned} \right\} \quad (2.2.13)$$

さて、基本ベクトル \mathbf{i}^* のスカラー積 $\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i}^* = 1$ の両辺を微分して

$$\left(\frac{d\mathbf{i}^*}{dt} \right) \cdot \mathbf{i}^* = 0 \quad (2.2.14)$$

となることから、 $\frac{d\mathbf{i}^*}{dt}$ は \mathbf{i}^* に垂直であることがわかる。そこで、 \mathbf{j}^* を $\frac{d\mathbf{i}^*}{dt}$ 方向の基本ベクトル

とすると、 $\frac{d\mathbf{i}^*}{dt}$ はつぎのように記述できる。

$$\frac{d\mathbf{i}^*}{dt} = \lambda \mathbf{j}^* \quad (2.2.15)$$

われわれが考察の対象としている座標系は右手系であるから、基本ベクトル \mathbf{k}^* は $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*$ を使って

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{i}^* \times \mathbf{j}^* \quad (2.2.16)$$

と選べる。そのとき、

$$\frac{d\mathbf{k}^*}{dt} = \frac{d(\mathbf{i}^* \times \mathbf{j}^*)}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{i}^*}{dt} \right) \times \mathbf{j}^* + \mathbf{i}^* \times \left(\frac{d\mathbf{j}^*}{dt} \right) = \mathbf{i}^* \times \left(\frac{d\mathbf{j}^*}{dt} \right) \quad (2.2.17)$$

ここに、 $\frac{d\mathbf{j}^*}{dt}$ は \mathbf{j}^* に垂直であるから、 $\mathbf{i}^* \times \left(\frac{d\mathbf{j}^*}{dt} \right)$ すなわち、 $\frac{d\mathbf{k}^*}{dt}$ は \mathbf{i}^* にも \mathbf{k}^* にも垂直と

なる。したがって、

$$\frac{d\mathbf{k}^*}{dt} = \mu \mathbf{j}^* \quad (2.2.18)$$

と書ける。さらに、右手系の定義から、

$$\mathbf{j}^* = \mathbf{k}^* \times \mathbf{i}^* \quad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned} \text{を使って, } \frac{d\mathbf{j}^*}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{k}^*}{dt}\right) \times \mathbf{i}^* + \mathbf{k}^* \times \left(\frac{d\mathbf{i}^*}{dt}\right) = \mu \mathbf{j}^* \times \mathbf{i}^* + \mathbf{k}^* \times \lambda \mathbf{j}^* \\ &= (\lambda \mathbf{k}^* - \mu \mathbf{i}^*) \times \mathbf{j}^* \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

が導かれる。 $\mathcal{Q}^* = \lambda \mathbf{k}^* - \mu \mathbf{i}^*$ とおくと、 \mathbf{i}^* 、 \mathbf{j}^* 、 \mathbf{k}^* の微分係数は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}^*}{dt} &= \lambda \mathbf{j}^* = \lambda (\mathbf{k}^* \times \mathbf{i}^*) = \lambda \mathbf{k}^* \times \mathbf{i}^* = (\mathcal{Q}^* + \mu \mathbf{i}^*) \times \mathbf{i}^* = \mathcal{Q}^* \times \mathbf{i}^* \\ \frac{d\mathbf{j}^*}{dt} &= \mathcal{Q}^* \times \mathbf{j}^* \\ \frac{d\mathbf{k}^*}{dt} &= \mu \mathbf{j}^* = \mu (\mathbf{k}^* \times \mathbf{i}^*) = \mathbf{k}^* \times \mu \mathbf{i}^* = \mathbf{k}^* \times (\lambda \mathbf{k}^* - \mathcal{Q}^*) = -\mathbf{k}^* \times \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}^* \times \mathbf{k}^* \end{aligned}$$

と計算できる。この結果、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}^*}{dt} &= \mathcal{Q}^* \times \mathbf{i}^* \\ \frac{d\mathbf{j}^*}{dt} &= \mathcal{Q}^* \times \mathbf{j}^* \\ \frac{d\mathbf{k}^*}{dt} &= \mathcal{Q}^* \times \mathbf{k}^* \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

が得られる。

このように、(2.2.21)式に表れたベクトル \mathcal{Q}^* は回転する座標系 Σ^* の角速度(回転速度とも呼ぶ)を表し、 x^* 、 y^* 、 z^* 各軸へのその成分 \mathcal{Q}_x^* 、 \mathcal{Q}_y^* 、 \mathcal{Q}_z^* を使ってつぎのように表す。

$$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}_x^* \mathbf{i}^* + \mathcal{Q}_y^* \mathbf{j}^* + \mathcal{Q}_z^* \mathbf{k}^* = (\mathcal{Q}_x^*, \mathcal{Q}_y^*, \mathcal{Q}_z^*)^T \quad (2.2.22)$$

そこで、この成分を使うと、(2.2.21)式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}^*}{dt} &= \mathbf{j}^* \mathcal{Q}_z^* - \mathbf{k}^* \mathcal{Q}_y^* , \\ \frac{d\mathbf{j}^*}{dt} &= \mathbf{k}^* \mathcal{Q}_x^* - \mathbf{i}^* \mathcal{Q}_z^* , \\ \frac{d\mathbf{k}^*}{dt} &= \mathbf{i}^* \mathcal{Q}_y^* - \mathbf{j}^* \mathcal{Q}_x^* , \end{aligned} \right\} \quad (2.2.23)$$

と書き換えられる。これを(2.2.13)式と比較すると、角速度の成分 \mathcal{Q}_x^* 、 \mathcal{Q}_y^* 、 \mathcal{Q}_z^* が丁度L、M、Nに相当することが明らかである。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q}_x^* &= L = a_{13} \dot{a}_{12} + a_{23} \dot{a}_{22} + a_{33} \dot{a}_{32} \\ \mathcal{Q}_y^* &= M = a_{11} \dot{a}_{13} + a_{21} \dot{a}_{23} + a_{31} \dot{a}_{33} \\ \mathcal{Q}_z^* &= N = a_{12} \dot{a}_{11} + a_{22} \dot{a}_{21} + a_{32} \dot{a}_{31} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.24)$$

によって、角速度ベクトルが計算可能となった。しかし、この角速度は移動系で定めたものであるから、静止した絶対座標系でのベクトルに換算したほうが便利である。そのベクトル \mathcal{Q} は、成

分を $\mathcal{Q}_x, \mathcal{Q}_y, \mathcal{Q}_z$ とすると,

$$\mathcal{Q} = A \mathcal{Q}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{Q}_x^* \\ \mathcal{Q}_y^* \\ \mathcal{Q}_z^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \mathcal{Q}_x^* + a_{12} \mathcal{Q}_y^* + a_{13} \mathcal{Q}_z^* \\ a_{21} \mathcal{Q}_x^* + a_{22} \mathcal{Q}_y^* + a_{23} \mathcal{Q}_z^* \\ a_{31} \mathcal{Q}_x^* + a_{32} \mathcal{Q}_y^* + a_{33} \mathcal{Q}_z^* \end{vmatrix} \quad (2.2.25)$$

なる座標変換で実現できる。

以下, (2.2.25) 式を適用して角速度ベクトル \mathcal{Q} の計算に入る。まず, \mathcal{Q}_x の計算を

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_x &= a_{11} \mathcal{Q}_x^* + a_{12} \mathcal{Q}_y^* + a_{13} \mathcal{Q}_z^* = a_{11} (a_{13} \dot{a}_{12} + a_{23} \dot{a}_{22} + a_{33} \dot{a}_{32}) \\ &\quad + a_{12} (a_{11} \dot{a}_{13} + a_{21} \dot{a}_{23} + a_{31} \dot{a}_{33}) - a_{13} (a_{12} \dot{a}_{11} + a_{22} \dot{a}_{21} + a_{32} \dot{a}_{31}) \end{aligned}$$

のようにそのまま代入しても, 式の上でこれ以上簡単化は期待できない。そこで下記のような工夫を行う。

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_x &= a_{11} \mathcal{Q}_x^* + a_{12} \mathcal{Q}_y^* + a_{13} \mathcal{Q}_z^* = \frac{1}{2} a_{11} \{ a_{13} \dot{a}_{12} + a_{23} \dot{a}_{22} + a_{33} \dot{a}_{32} - a_{12} \dot{a}_{13} - a_{22} \dot{a}_{23} - a_{32} \dot{a}_{33} \} \\ &\quad + \frac{1}{2} a_{12} \{ a_{11} \dot{a}_{13} + a_{21} \dot{a}_{23} + a_{31} \dot{a}_{33} - a_{13} \dot{a}_{11} - a_{23} \dot{a}_{21} - a_{33} \dot{a}_{31} \} \\ &\quad + \frac{1}{2} a_{13} \{ a_{12} \dot{a}_{11} + a_{22} \dot{a}_{21} + a_{32} \dot{a}_{31} - a_{11} \dot{a}_{12} - a_{21} \dot{a}_{22} - a_{31} \dot{a}_{32} \} \\ &= \frac{1}{2} (a_{11} a_{23} - a_{13} a_{21}) \dot{a}_{22} + \frac{1}{2} (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) \dot{a}_{32} + \frac{1}{2} (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) \dot{a}_{23} \\ &\quad + \frac{1}{2} (a_{12} a_{31} - a_{11} a_{32}) \dot{a}_{33} + \frac{1}{2} (a_{13} a_{22} - a_{12} a_{23}) \dot{a}_{21} + \frac{1}{2} (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}) \dot{a}_{31} \\ &= -\frac{1}{2} a_{32} \dot{a}_{22} + \frac{1}{2} a_{22} \dot{a}_{32} - \frac{1}{2} a_{33} a_{23} + \frac{1}{2} a_{23} \dot{a}_{33} - \frac{1}{2} a_{31} \dot{a}_{21} + \frac{1}{2} a_{21} \dot{a}_{31} \\ &= \frac{1}{2} \{ a_{21} \dot{a}_{31} + a_{22} \dot{a}_{32} + a_{23} \dot{a}_{33} - \dot{a}_{21} a_{31} - \dot{a}_{22} a_{32} - \dot{a}_{23} a_{33} \} \\ &= a_{21} \dot{a}_{31} + a_{22} \dot{a}_{32} + a_{23} \dot{a}_{33}, \end{aligned}$$

同様に $\mathcal{Q}_y, \mathcal{Q}_z$ に対しても,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_y &= a_{21} \mathcal{Q}_x^* + a_{22} \mathcal{Q}_y^* + a_{23} \mathcal{Q}_z^* = \frac{1}{2} a_{21} \{ a_{13} \dot{a}_{12} + a_{23} \dot{a}_{22} + a_{33} \dot{a}_{32} - a_{12} \dot{a}_{13} - a_{22} \dot{a}_{23} - a_{32} \dot{a}_{33} \} \\ &\quad + \frac{1}{2} a_{22} \{ a_{11} \dot{a}_{13} + a_{21} \dot{a}_{23} + a_{31} \dot{a}_{33} - a_{13} \dot{a}_{11} - a_{23} \dot{a}_{21} - a_{33} \dot{a}_{31} \} \\ &\quad + \frac{1}{2} a_{23} \{ a_{12} \dot{a}_{11} + a_{22} \dot{a}_{21} + a_{32} \dot{a}_{31} - a_{11} \dot{a}_{12} - a_{21} \dot{a}_{22} - a_{31} \dot{a}_{32} \} \\ &= \frac{1}{2} (a_{21} a_{13} - a_{23} a_{11}) \dot{a}_{12} + \frac{1}{2} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) \dot{a}_{32} + \frac{1}{2} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \dot{a}_{13} \\ &\quad + \frac{1}{2} (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{32}) \dot{a}_{33} + \frac{1}{2} (a_{23} a_{12} - a_{13} a_{22}) \dot{a}_{11} + \frac{1}{2} (a_{23} a_{32} - a_{22} a_{33}) \dot{a}_{31} \\ &= \frac{1}{2} \{ a_{31} \dot{a}_{11} + a_{32} \dot{a}_{12} + a_{33} \dot{a}_{13} - \dot{a}_{31} a_{11} - \dot{a}_{32} a_{12} - \dot{a}_{33} a_{13} \} \\ &= a_{13} \dot{a}_{11} + a_{32} \dot{a}_{12} + a_{33} \dot{a}_{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{Q}}_z &= a_{31}\dot{\mathcal{Q}}_x^* + a_{32}\dot{\mathcal{Q}}_y^* + a_{33}\dot{\mathcal{Q}}_z^* = \frac{1}{2}a_{31}\{a_{13}\dot{a}_{12} + a_{23}\dot{a}_{22} + a_{33}\dot{a}_{32} - a_{12}\dot{a}_{13} - a_{22}\dot{a}_{23} - a_{32}\dot{a}_{33}\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}a_{32}\{a_{11}\dot{a}_{13} + a_{21}\dot{a}_{23} + a_{31}\dot{a}_{33} - a_{13}\dot{a}_{11} - a_{23}\dot{a}_{21} - a_{33}\dot{a}_{31}\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}a_{33}\{a_{12}\dot{a}_{11} + a_{22}\dot{a}_{21} + a_{32}\dot{a}_{31} - a_{11}\dot{a}_{12} - a_{21}\dot{a}_{22} - a_{31}\dot{a}_{32}\} \\
 &= \frac{1}{2}(a_{31}a_{13} - a_{11}a_{33})\dot{a}_{12} + \frac{1}{2}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33})\dot{a}_{22} + \frac{1}{2}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\dot{a}_{13} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\dot{a}_{23} + \frac{1}{2}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})\dot{a}_{11} + \frac{1}{2}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\dot{a}_{21} \\
 &= \frac{1}{2}\{a_{11}\dot{a}_{21} + a_{12}\dot{a}_{22} + a_{13}\dot{a}_{23} - \dot{a}_{11}a_{21} - \dot{a}_{12}a_{22} - \dot{a}_{13}a_{23}\} \\
 &= a_{11}\dot{a}_{21} + a_{12}\dot{a}_{22} + a_{13}\dot{a}_{23},
 \end{aligned}$$

最終的な計算式をまとめて記述すると、

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\mathcal{Q}}_x &= a_{21}\dot{a}_{31} + a_{22}\dot{a}_{32} + a_{23}\dot{a}_{33}, \\
 \dot{\mathcal{Q}}_y &= a_{31}\dot{a}_{11} + a_{32}\dot{a}_{12} + a_{33}\dot{a}_{13}, \\
 \dot{\mathcal{Q}}_z &= a_{11}\dot{a}_{21} + a_{12}\dot{a}_{22} + a_{13}\dot{a}_{23},
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.26)$$

となる。

以上、回転座標系 Σ^* で評価した角速度ベクトル $\dot{\mathcal{Q}}^* = (\dot{\mathcal{Q}}_x^*, \dot{\mathcal{Q}}_y^*, \dot{\mathcal{Q}}_z^*)^T$ から静止した座標系 Σ に換算したベクトル $\dot{\mathcal{Q}} = (\dot{\mathcal{Q}}_x, \dot{\mathcal{Q}}_y, \dot{\mathcal{Q}}_z)^T$ を導き出した。ところで、(2.2.2) 式で与えた A をマニピュレータのベースからみた指先の姿勢行列とすると、結局 (2.2.26) 式は関節変数を含む時間関数となる。そのため、微分演算を関節速度 θ に置き換え整理すれば、ヤコビ行列 J_c が決まる。6 リンク・マニピュレータに適用した計算結果の詳細は、付録 A に示す。

尚、上の 2 つのベクトル $\dot{\mathcal{Q}}^*$, $\dot{\mathcal{Q}}$ は回転移動だけであるから、(2.2.25) 式により

$$(\dot{\mathcal{Q}}_x^*)^2 + (\dot{\mathcal{Q}}_y^*)^2 + (\dot{\mathcal{Q}}_z^*)^2 = \dot{\mathcal{Q}}_x^2 + \dot{\mathcal{Q}}_y^2 + \dot{\mathcal{Q}}_z^2$$

となり、その大きさ (絶対値) は当然のことながら等しい。

ところで、(2.2.26) 式はマニピュレータのベースから指先にいたる変換行列 A を回転運動学により導き出したもので、関節速度 θ の一次結合としてヤコビ行列の計算を行った。しかしながら、その計算結果はヤコビ行列として比較的コンパクトになるものの、途中のアルゴリズムは手計算で導くかぎり準備がやっかいである。この複雑な過程は一気に指先までの行列を処理した点にあるので、以下ではマニピュレータを構成する各関節 (またはリンク) に立ち戻って考える。

まず、 n 個のリンクと n 個の関節からなる直列開ループのマニピュレータを Fig. 2.2 に与える。回転による角速度ベクトルは回転軸に拘束されているのでこの点に着目してベクトル的アプローチを試みる。すなわち、Fig. 2.2 の各関節軸の単位ベクトルを第 1 関節から順に $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ と与えると、関節駆動により生じた関節軸上の相対的角速度ベクトルは、 $\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_0, \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_1, \dots, \dot{\theta}_n \mathbf{e}_{n-1}$ となる。

そこで、これらの値をベクトル的に合成したものがリンク系全体 (今の場合、最終リンク) の角速度と見做せる^{(5), (13)}。それを $\dot{\mathcal{Q}}$ とするとつぎのように表現できる。

$$\dot{Q} = \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j \mathbf{e}_{j-1} \quad (2.2.27)$$

直動関節の場合、リンク間の相対的角速度の寄与はないので隣り合うリンクの角速度は等しい。(2.2.27)式にこのことを取入れると

$$\dot{Q} = \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j \mathbf{e}_{j-1} S_j \quad (2.2.28)$$

となる。ここで、 $S_i = 1$ は関節 i が回転関節を、また $S_i = 0$ は直動関節を示す。 $(i=1, \dots, n)$ すなわち、

$$\dot{Q} = J_c \dot{\theta} \quad (2.2.29)$$

$$J_c = [\mathbf{e}_0 S_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} S_n] \in R^{3 \times n} \quad (2.2.30)$$

ここで、関節軸ベクトル \mathbf{e}_{i-1} ($i=1, \dots, n$) を基準系に関して表しておけば、(2.2.29)式 の \dot{Q} も基準系に関する最終リンクの角速度となる。

つぎに、導出した J_c に対して、各関節軸ベクトルの計算法を考える。その前に、付録Bの最初に定めた変換行列 $A_{i,j}$ について、方向余弦を表す 3×3 行列と位置ベクトルをそれぞれ

$$\bar{A}_{i,j} = \begin{bmatrix} p_{11}^{i,j} & p_{12}^{i,j} & p_{13}^{i,j} \\ p_{21}^{i,j} & p_{22}^{i,j} & p_{23}^{i,j} \\ p_{31}^{i,j} & p_{32}^{i,j} & p_{33}^{i,j} \end{bmatrix} \quad (2.2.31)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_{i,j} = (p_{14}^{i,j}, p_{24}^{i,j}, p_{34}^{i,j})^T \quad (2.2.32)$$

と定義する。これより、もとの変換行列 $A_{i,j}$ は便宜的に

$$A_{i,j} = \left| \begin{array}{c|c} \bar{A}_{i,j} & \bar{\mathbf{p}}_{i,j} \\ \hline \dots & \dots \\ \hline 0 \ 0 \ 0 & 1 \end{array} \right| \quad (2.2.33)$$

と記述できる。

再び (2.2.30) 式に戻って、 ${}^0 \mathbf{e}_{i-1}$ を基準座標系で考えた関節 i の単位ベクトルと記述すると、それは基準系から i 番目の座標系 Σ_{i-1} までの座標変換に、 Σ_{i-1} の系で考えた単位軸ベクトル \mathbf{e}_{i-1} を乗じて

$${}^0 \mathbf{e}_{i-1} = A_{0,i-1} \mathbf{e}_{i-1} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.2.34)$$

と書ける。さらに、Denavit - Hartenberg の記法を適用すると関節軸 i はリンク座標系 Σ_{i-1} の z_{i-1} 軸と一致する⁽¹²⁾。すなわち

$$\mathbf{e}_{i-1} = \mathbf{z}_{i-1} = (0, 0, 1)^T \quad (2.2.35)$$

であるから、

$${}^0 \mathbf{e}_{i-1} = A_{0,i-1} \mathbf{e}_{i-1} = A_{0,i-1} (0, 0, 1)^T \quad (2.2.36)$$

となる。これに (2.2.31) 式で導入した記法を使って、

$${}^0 \mathbf{e}_{i-1} = (p_{13}^{0,i-1}, p_{23}^{0,i-1}, p_{33}^{0,i-1})^T \quad (2.2.37)$$

を得る。従ってヤコビ行列 J_c の i 列を ${}^i J_c$ と表現すると、

回転関節の場合 $S_i = 1$ として

$${}^i J_c = (p_{13}^{0,i-1}, p_{23}^{0,i-1}, p_{33}^{0,i-1})^T \quad (2.2.38)$$

直動関節の場合 $S_i = 0$ として

$${}^i J_c = (0, 0, 0)^T \quad (2.2.39)$$

となる。(2.2.38)式の各要素は付録Bに示した漸化式法で体系的に求められているので、その一部をメモリーに格納すれば、ヤコビ部分行列の計算に対しては呼出し操作のみで新たな計算は必要としない。ただし、これはベースを基準とした指先の角速度と関節速度間のヤコビ行列についていえることである。

もし、 \mathbf{e}_i を最終リンクの座標系に関して表現しておけば、式(2.2.29)の \mathcal{Q} はその座標系で表した最終リンクの角速度を与える。

2.3 リンク速度の計算とヤコビ行列

マニピュレータのリンク速度(以下では単に速度と呼ぶ)を考える。リンクは直線運動以外に回転運動をするので、同じリンク上の異なる2点の速度は同じでない。点Qの速度は点Pの速度とこの点のまわりの相対的回転の和に等しいことが剛体運動学からよく知られている。すなわち、回転角速度を ω 、PQ間の距離ベクトルを \mathbf{r}_{PQ} として次式を得る。

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \omega \times \mathbf{r}_{PQ} \quad (2.3.1)$$

この式をマニピュレータのリンク機構に適用して、関節*i*の速度 \mathbf{v}_{i-1} ($i=1, \dots, n+1$)を決定する。(ただし、マニピュレータのベースの速度は $\mathbf{v}_0 = 0$ とする。)

回転関節に対して(2.2.28)で表した*n*個の総和 \mathcal{Q} を便宜的に \mathcal{Q}_n で記すと、リンク*i*の角速度 \mathcal{Q}_i に対して、

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \mathcal{Q}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \quad (2.3.2)$$

なる関係を得る。ここで、ベクトル \mathbf{v}_i はリンク*i*の端点 T_{i+1} (つまり、関節軸*i+1*)の速度、 \mathbf{v}_{i-1} はリンク*i-1*の端点 T_i (関節軸*i*)における速度、また、 $\mathbf{r}_{i-1,i}$ は点 T_i と T_{i+1} 間の距離表すベクトルである。(Fig.2.3参照)

直動関節の場合、関節座標それ自体の変化から起こる付随項が含まれる。

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \mathcal{Q}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \dot{\theta}_i \mathbf{e}_{i-1} \quad (2.3.3)$$

(2.3.2)、(2.3.3)式を一括すると

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \mathcal{Q}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} + \dot{\theta}_i \mathbf{e}_{i-1} (1 - S_i) \quad (2.3.4)$$

$i = 1, \dots, n$

となる。

したがって、(2.3.4)式を加え合わせた最終リンク先端の速度は、

$$\mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^n \{ \mathcal{Q}_j \times \mathbf{r}_{j-1,j} + \dot{\theta}_j \mathbf{e}_{j-1} (1 - S_j) \} \quad (2.3.5)$$

と表せる。さらに(2.2.28)式の表現を利用すると

$$\mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{t=1}^j (\mathbf{e}_{t-1} \times \mathbf{r}_{j-1,t}) S_t \dot{\theta}_t + \dot{\theta}_j \mathbf{e}_{j-1} (1 - S_j) \right\} \quad (2.3.6)$$

を得る。すなわち、

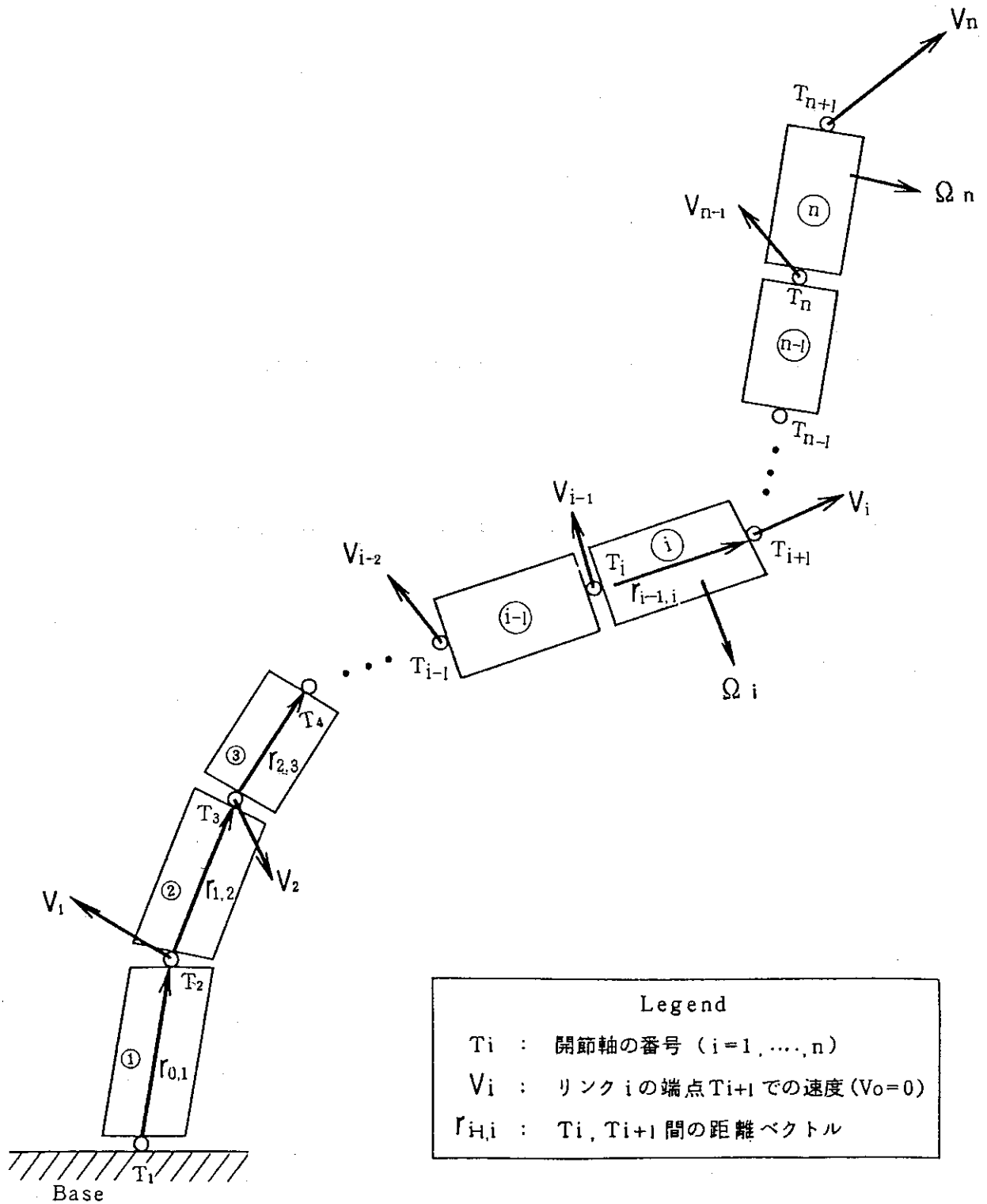


Fig.2.3 Definition of Link Co-ordinate Systems 2

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_n &= \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^j (\mathbf{e}_{t-1} \times \mathbf{r}_{j-1, j}) S_t \dot{\theta}_t + \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j \mathbf{e}_{j-1} (1-S_j) \\
 &= (\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}_{0,1} + \mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}_{1,2} + \dots + \mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}_{n-1, n}) \dot{\theta}_1 S_1 \\
 &\quad + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{1,2} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{2,3} + \dots + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{n-1, n}) \dot{\theta}_2 S_2 \\
 &\quad + (\mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1, i} + \mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i, i+1} + \dots + \mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{r}_{n-1, n}) \dot{\theta}_i S_i \\
 &\quad \dots \quad + (\mathbf{e}_{n-1} \times \mathbf{r}_{n-1, n}) \dot{\theta}_n S_n + \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j \mathbf{e}_{j-1} (1-S_j) \tag{2.3.7}
 \end{aligned}$$

ここで、Fig. 2.3 に示した距離ベクトルをつぎのようにまとめると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{0,1} + \mathbf{r}_{1,2} + \dots + \mathbf{r}_{n-1, n} &= \mathbf{r}_{0, n} \\
 \mathbf{r}_{1,2} + \mathbf{r}_{2,3} + \dots + \mathbf{r}_{n-1, n} &= \mathbf{r}_{1, n} \\
 &\dots\dots \\
 \mathbf{r}_{i-1, i} + \mathbf{r}_{i, i+1} + \dots + \mathbf{r}_{n-1, n} &= \mathbf{r}_{i-1, n} \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_n &= (\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}_{0, n}) \dot{\theta}_1 S_1 + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_{1, n}) \dot{\theta}_2 S_2 \\
 &\quad \dots \quad + (\mathbf{e}_{n-1} \times \mathbf{r}_{n-1, n}) \dot{\theta}_n S_n + \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j \mathbf{e}_{j-1} (1-S_j) \tag{2.3.8}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n \{ (\mathbf{e}_{j-1} \times \mathbf{r}_{j-1, n}) S_j + \mathbf{e}_{j-1} (1-S_j) \} \dot{\theta}_j \tag{2.3.9}$$

と簡潔な表現を引出すことができる。これをさらに行列形式で記述すると

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{J}_p \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{J}_p \in \mathbb{R}^{3 \times n} \tag{2.3.10}$$

となる。ここで、

$$\mathbf{J}_p = [(\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}_{0, n}) S_1 + \mathbf{e}_0 (1-S_1), \dots, (\mathbf{e}_{n-1} \times \mathbf{r}_{n-1, n}) S_n + \mathbf{e}_{n-1} (1-S_n)] \tag{2.3.11}$$

と置いたこの式が求めるヤコビ行列の計算式である。

ベクトル $\mathbf{r}_{j-1, n}$ は関節 j とマニピュレータ先端との距離ベクトルで、 \mathbf{e}_{j-1} は関節軸 j の単位ベクトルである。 $\mathbf{r}_{j-1, n}$, \mathbf{e}_{j-1} ; $j = 1, \dots, n$ を基準座標系に関して表すと、(2.3.10) 式は基準系に対するマニピュレータの指先速度 $\mathbf{v}_n = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ を算出する。

ここで (2.2.34) 式と同様に基準系に関する関節軸ベクトルの表示を ${}^0\mathbf{e}_{i-1}$ とすると、(2.3.11) 式の i 列 ${}^i\mathbf{J}_p$ は

$${}^i\mathbf{J}_p = ({}^0\mathbf{e}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1, n}) S_i + {}^0\mathbf{e}_{i-1} (1-S_i) \tag{2.3.12}$$

と記述できる。さらに、 ${}^0\mathbf{e}_{i-1}$ に対しては (2.2.37) 式が、また、 $\mathbf{r}_{i-1, n}$ に対しては (2.2.32) 式で定義した位置ベクトル $\bar{\mathbf{p}}_{i-1, n}$ が適用できる。

したがって、これを要約するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{J}_p &= \bar{A}_{0, i-1} (0, 0, 1)^T \times \bar{\mathbf{p}}_{i-1, n} \quad \dots\dots\dots \text{回転関節に対して} \\
 &= \bar{A}_{0, i-1} (-p_{24}^{i-1, n}, p_{14}^{i-1, n}, 0)^T
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -p_{11}^{0,(i-1)} p_{24}^{i-1,n} + p_{12}^{0,(i-1)} p_{14}^{i-1,n} \\ -p_{21}^{0,(i-1)} p_{24}^{i-1,n} + p_{22}^{0,(i-1)} p_{14}^{i-1,n} \\ -p_{31}^{0,(i-1)} p_{24}^{i-1,n} + p_{32}^{0,(i-1)} p_{14}^{i-1,n} \end{bmatrix} \quad (2.3.13)$$

${}^i J_p = \bar{A}_{0,i-1} (0, 0, 1)^T \dots\dots\dots$ 直動関節に対して

$$= \begin{bmatrix} p_{13}^{0,(i-1)} \\ p_{23}^{0,(i-1)} \\ p_{33}^{0,(i-1)} \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

一方、Whitney が行った最終リンクに取り付けた座標系に関するマニピュレータの指先速度と関節速度間のヤコビ行列も同様にして導ける。

3. 6リンク・マニピュレータへの適用

前章で求めた角速度とリンク速度に対するヤコビ行列を6リンク・マニピュレータにあてはめ具体的に求めてみる。文献(9)で報告した漸化式モデルから誘導される計算値を利用することにより、自動的にその要素が決定できる。

(1) ヤコビ行列 J_p の決定

2.3節のリンク速度と関節速度との関係(2.3.13)式

$${}^i J_p = \begin{vmatrix} -p_{11}^{0,(i-1)} p^{(i-1),n}_{24} + p_{12}^{0,(i-1)} p^{(i-1),n}_{14} \\ -p_{21}^{0,(i-1)} p^{(i-1),n}_{24} + p_{22}^{0,(i-1)} p^{(i-1),n}_{14} \\ -p_{31}^{0,(i-1)} p^{(i-1),n}_{24} + p_{32}^{0,(i-1)} p^{(i-1),n}_{14} \end{vmatrix}$$

に基づき、ヤコビ行列 J_p の各要素は付録Bに示した値をそのまま利用する。ここで、行列 J_p の i 行 j 列の要素を $J_{p_{ij}}$ ($i=1, 2, 3$; $j=1 \sim 6$) と記すと生成プログラムは、すなわち、

$$\begin{aligned} J_{p_{11}} &= -p_{24}^{0,6}, & (\rightarrow P_{x_1}) \\ J_{p_{21}} &= p_{14}^{0,6}, & (\rightarrow P_{y_1}) \\ J_{p_{31}} &= 0, & (\rightarrow P_{z_1}) \\ J_{p_{12}} &= -c_1 p_{24}^{1,6}, & (\rightarrow P_{x_2}) \\ J_{p_{22}} &= -s_1 p_{24}^{1,6}, & (\rightarrow P_{y_2}) \\ J_{p_{32}} &= -p_{14}^{1,6}, & (\rightarrow P_{z_2}) \\ J_{p_{13}} &= -p_{11}^{0,2} p_{24}^{2,6} + p_{12}^{0,2} p_{14}^{2,6}, & (\rightarrow P_{x_3}) \\ J_{p_{23}} &= -p_{21}^{0,2} p_{24}^{2,6} + p_{22}^{0,2} p_{14}^{2,6}, & (\rightarrow P_{y_3}) \\ J_{p_{33}} &= -p_{31}^{0,2} p_{24}^{2,6} + p_{32}^{0,2} p_{14}^{2,6}, & (\rightarrow P_{z_3}) \\ J_{p_{14}} &= -p_{11}^{0,3} p_{24}^{3,6} + p_{12}^{0,3} p_{14}^{3,6}, & (\rightarrow P_{x_4}) \\ J_{p_{24}} &= -p_{21}^{0,3} p_{24}^{3,6} + p_{22}^{0,3} p_{14}^{3,6}, & (\rightarrow P_{y_4}) \\ J_{p_{34}} &= -p_{31}^{0,3} p_{24}^{3,6}, & (\rightarrow P_{z_4}) \\ J_{p_{15}} &= -p_{11}^{0,4} p_{24}^{4,6} + p_{12}^{0,4} p_{14}^{4,6}, & (\rightarrow P_{x_5}) \\ J_{p_{25}} &= -p_{21}^{0,4} p_{24}^{4,6} + p_{22}^{0,4} p_{14}^{4,6}, & (\rightarrow P_{y_5}) \\ J_{p_{35}} &= -p_{31}^{0,4} p_{24}^{4,6} + p_{32}^{0,4} p_{14}^{4,6}, & (\rightarrow P_{z_5}) \\ J_{p_{16}} &= -p_{11}^{0,5} p_{24}^{5,6} + p_{12}^{0,5} p_{14}^{5,6}, & (\rightarrow P_{x_6}) \\ J_{p_{26}} &= -p_{21}^{0,5} p_{24}^{5,6} + p_{22}^{0,5} p_{14}^{5,6}, & (\rightarrow P_{y_6}) \\ J_{p_{36}} &= -p_{31}^{0,5} p_{24}^{5,6} + p_{32}^{0,5} p_{14}^{5,6}, & (\rightarrow P_{z_6}) \end{aligned}$$

となる。右側の括弧内 \rightarrow は行列の各要素を計算した結果が、指先の位置・姿勢の関節変数に関する偏微分と一致していることを示す。ここに、記号 P_{x_i} は $\left(\frac{\partial P_x}{\partial \theta_i}\right)$ を表す。(付録のBとCを参照)

(2) ヤコビ行列 J_c の決定

2.2 節の角速度と関節速度間の関係式 (2.2.38) 式

$${}^i J_c = \begin{bmatrix} p^{0, (i-1)}_{13} \\ p^{0, (i-1)}_{23} \\ p^{0, (i-1)}_{33} \end{bmatrix}$$

からヤコビ行列の各列を計算すると,

$$\begin{aligned} J_{c11} &= p^{0,0}_{13} (= 0), \\ J_{c21} &= p^{0,0}_{23} (= 0), \\ J_{c31} &= p^{0,0}_{33} (= 1), \\ J_{c12} &= p^{0,1}_{13} (= -s_1), \\ J_{c22} &= p^{0,1}_{23} (= c_1), \\ J_{c32} &= p^{0,1}_{33} (= 0), \\ J_{c13} &= p^{0,2}_{13} (= -s_1), \\ J_{c23} &= p^{0,2}_{23} (= c_1), \\ J_{c33} &= p^{0,2}_{33} (= 0), \\ J_{c14} &= p^{0,3}_{13} (= s_{23} c_1), \\ J_{c24} &= p^{0,3}_{23} (= s_{23} s_1), \\ J_{c34} &= p^{0,3}_{33} (= c_{23}), \\ J_{c15} &= p^{0,4}_{13} (= -s_4 c_{23} c_1 - c_4 s_1), \\ J_{c25} &= p^{0,4}_{23} (= -s_4 c_{23} s_1 + c_4 c_1), \\ J_{c35} &= p^{0,4}_{33} (= s_4 s_{23}), \\ J_{c16} &= p^{0,5}_{13} (= -s_5 c_4 c_{23} c_1 + s_5 s_4 s_1 - c_5 s_{23} c_1), \\ J_{c26} &= p^{0,5}_{23} (= -s_5 c_4 c_{23} s_1 - c_5 s_4 c_1 - c_5 s_{23} s_1), \\ J_{c36} &= p^{0,5}_{33} (= s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23}), \end{aligned}$$

となる。この結果は、付録のAで得たヤコビ行列 (a.7) 式と一致することがわかる。

以上、(1)、(2)の J_p 、 J_c を結びつけば、6-自由度のマニピュレータの指先速度 $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ と関節速度 $\dot{\theta}$ 間を記述するヤコビ行列 J が得られる。

$$(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z, \boldsymbol{\omega}_x, \boldsymbol{\omega}_y, \boldsymbol{\omega}_z)^T = J \dot{\theta} = \begin{bmatrix} J_p \\ J_c \end{bmatrix} (\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_6)^T$$

4. あ と が き

マニピュレータの運動学をベースにして、指先速度と関節速度の関係に着目したヤコビ行列の計算方法を考案した。このために、指先速度をリンク速度と角速度に分解して、それと関節速度との個別の関係から2つの変換行列を求め、それを合成して目的のヤコビ行列に到達した。その成果を要約すると、

- 1) 時間依存の回転運動に対して姿勢（方向余弦）行列の時間微分から角速度ベクトルを誘導し、関節速度との関連づけたヤコビ行列を算出した。
- 2) 各関節軸に拘束された角速度ベクトル、軸間距離ベクトルなどを座標変換の概念と結びつけることによりヤコビ行列を導きだした。ヤコビ行列の要素決定を運動学の漸化式モデルと併用させたことで、計算処理の簡素化、高速化が可能である。

速度関係から引出したこのアルゴリズムは、今後、マニピュレータの速度制御に役立つものと考えられる。

謝 辞

本研究を行う機会を与え、また本報の査読に対して原子炉制御研究室篠原慶邦室長に感謝の意を表す。

4. あ と が き

マニピュレータの運動学をベースにして、指先速度と関節速度の関係に着目したヤコビ行列の計算方法を考案した。このために、指先速度をリンク速度と角速度に分解して、それと関節速度との個別の関係から2つの変換行列を求め、それを合成して目的のヤコビ行列に到達した。その成果を要約すると、

- 1) 時間依存の回転運動に対して姿勢（方向余弦）行列の時間微分から角速度ベクトルを誘導し、関節速度との関連づけたヤコビ行列を算出した。
- 2) 各関節軸に拘束された角速度ベクトル、軸間距離ベクトルなどを座標変換の概念と結びつけることによりヤコビ行列を導きだした。ヤコビ行列の要素決定を運動学の漸化式モデルと併用させたことで、計算処理の簡素化、高速化が可能である。

速度関係から引出したこのアルゴリズムは、今後、マニピュレータの速度制御に役立つものと考えられる。

謝 辞

本研究を行う機会を与え、また本報の査読に対して原子炉制御研究室篠原慶邦室長に感謝の意を表す。

参考文献

- (1) Paul, R.P. : "Robot Manipulators ; Mathematics, Programming and Control", The MIT Press (1981).
- (2) Coiffet, P. : "Robot Technology -- Modelling and Control", Vol.1, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ07632 (1983).
- (3) Liegeois, A. : "Robot Technology -- Performance and Computer-aided Design", Vol.7, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliff, NJ07632 (1985).
- (4) 中野 : " ロボット工学入門 ", オーム社 (1983).
- (5) 若松他 : " ロボットの制御 ", 計測自動制御学会 (1985).
- (6) " ロボットアームの制御 ", 計測と制御, 25-1 (1986).
- (7) Whitney, D.E. : "The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators", Trans. of the ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, 303/309 (1972).
- (8) Whitney, D.E. : "Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses", IEEE Trans. on Man-Machine Systems, Vol. MMS-10, No.2, 47/53 (1969).
- (9) 佐々木 : " マニピュレータ運動学の一般式 ", JAERI-M 88-018 (1988).
- (10) 佐々木, 篠原 : " ベクトル・幾何学および多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの機構解析 ", JAERI-M 87-175 (1987).
- (11) 佐々木 : " マニピュレータ構造に依存した行列による運動学の表現とその逆問題の解法 ", JAERI-M 87-039 (1987).
- (12) Denavit, J. and Hartenberg, R.S. : "A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanism Based on Matrices", Trans. ASME, J. of Applied Mechanics, 215/221 (1955).
- (13) 日本機械学会編 : " 機械工学便覧 ", 第6版 (1977).

付録A 6リンク・マニピュレータのヤコビ行列 J_c の計算

2.2節で導いた角速度に対して具体的な計算を実施する。まず、 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ に含まれる各要素 a_{ij} をマニピュレータの根元-指先間の方向余弦と考えると、付録Cの運動学方程式(c.9)式が利用できる。そして、その時間微分 \dot{a}_{ij} を6つの関節変数の偏微分に直せば、角速度が関節速度 $\dot{\theta}_1 \sim \dot{\theta}_6$ の一次結合として表すことができる。

そこで、(2.2.26)式の Ω_x は

$$\begin{aligned}\Omega_x &= a_{21} \dot{a}_{31} + a_{22} \dot{a}_{32} + a_{23} \dot{a}_{33} = a_{21} \sum_{j=1}^6 a_{31j} \dot{\theta}_j + a_{22} \sum_{j=1}^6 a_{32j} \dot{\theta}_j + a_{23} \sum_{j=1}^6 a_{33j} \dot{\theta}_j \\ &= \sum_{j=1}^6 \sigma_j \dot{\theta}_j\end{aligned}\quad (a.1)$$

と定まる。

$$\text{ただし, } a_{1mj} = \frac{\partial a_{1m}}{\partial \theta_j}, \quad \sigma_j = a_{21} a_{31j} + a_{22} a_{32j} + a_{23} a_{33j}\quad (a.2)$$

つづいて、付録Cの変換行列の要素と偏微分の結果を引用すると、

$$\begin{aligned}a_{31} &= n_z = -C_6 C_5 C_4 S_{23} - S_6 S_4 S_{23} - C_6 S_5 C_{23}, \\ a_{311} &= 0, \\ a_{312} &= -C_6 C_5 C_4 C_{23} - S_6 S_4 C_{23} + C_6 S_5 S_{23}, \\ a_{313} &= a_{312}, \\ a_{314} &= C_6 C_5 S_4 S_{23} - S_6 C_4 S_{23}, \\ a_{315} &= C_6 S_5 C_4 S_{23} - C_6 C_5 C_{23}, \\ a_{316} &= S_6 C_5 C_4 S_{23} - C_6 S_4 S_{23} + S_6 S_5 C_{23}, \\ a_{32} &= o_z = S_6 (C_5 C_4 S_{23} + S_5 C_{23}) - C_6 S_4 S_{23}, \\ a_{321} &= 0, \\ a_{322} &= S_6 (C_5 C_4 C_{23} - S_5 S_{23}) - C_6 S_4 C_{23}, \\ a_{323} &= a_{322}, \\ a_{324} &= S_6 (-C_5 S_4 S_{23}) - C_6 C_4 S_{23}, \\ a_{325} &= S_6 (-S_5 C_4 S_{23} + C_5 C_{23}), \\ a_{326} &= C_6 (C_5 C_4 S_{23} - S_5 C_{23}) + S_6 S_4 S_{23}, \\ a_{33} &= a_z = S_5 C_4 S_{23} - C_5 C_{23}, \\ a_{331} &= 0, \\ a_{332} &= S_5 C_4 C_{23} + C_5 S_{23}, \\ a_{333} &= a_{332}, \\ a_{334} &= -S_5 S_4 S_{23}, \\ a_{335} &= C_5 C_4 S_{23} + S_5 C_{23}, \\ a_{336} &= 0,\end{aligned}$$

が得られ、 $\dot{\theta}_j$ の係数 σ_j が以下のように決定する。

$$I-1) \quad \sigma_1 = a_{21} a_{311} + a_{22} a_{321} + a_{23} a_{331} = 0,$$

I-2) (a.2) 式に従って σ_2 を求める際、 a_{312} 、 a_{322} などは複雑な計算の要因となるため、付録Cの(c.7)式で導入したA、B、U、Vなどのパラメータを利用して式の簡略化を行うことが望ましい。同様のことは以後の計算でもいえる。すなわち、

$$\begin{aligned} a_{312} &= -c_6(Ac_1 + Us_1) - s_6(Bc_1 + Vs_1) = -(Ac_6 + Bs_6)c_1 - (Uc_6 + Vs_6)s_1 = -n_x c_1 - n_y s_1, \\ a_{322} &= s_6(Ac_1 + Us_1) - c_6(Bc_1 + Vs_1) = (-Bc_6 + As_6)c_1 + (-Vc_6 + Us_6)s_1 = -o_x c_1 - o_y s_1, \\ a_{332} &= -(a_x c_1 + a_y s_1), \end{aligned}$$

から係数 σ_2 が

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= n_y(-n_x c_1 - n_y s_1) + o_y(-o_x c_1 - o_y s_1) + a_y(-a_x c_1 - a_y s_1) = -(n_x n_y + o_x o_y + a_x a_y)c_1 \\ &\quad - (n_y^2 + o_y^2 + a_y^2)s_1 = -s_1, \end{aligned}$$

として容易に求まる。

同じようにして、 σ_3 以降の計算は

$$I-3) \quad \sigma_3 = \sigma_2$$

$$I-4) \quad \sigma_4 = (Uc_6 + Vs_6)(c_6 c_5 s_4 s_{23} - s_6 c_4 s_{23}) + (-Us_6 - Vc_6)(-s_6 c_5 s_4 s_{23} - c_6 c_4 s_{23}) - a_y s_5 s_4 s_{23} = s_{23} c_1,$$

$$I-5) \quad \sigma_5 = (Uc_6 + Vs_6)a_z c_6 - (-Us_6 + Vc_6)a_z s_6 + (-M)a_y = a_z U - a_y M = -c_4 s_1 - s_4 c_{23} c_1,$$

$$I-6) \quad \sigma_6 = (Uc_6 + Vs_6)(-Ms_6 + Nc_6) + (-Us_6 + Vc_6)(-Mc_6 - Ns_6) = (UN - MV)c_6^2 + (UN - MV)s_6^2 = UN - MV = a_x = -s_5 c_4 c_{23} c_1 - c_5 s_{23} c_1 + s_5 s_4 s_1,$$

となる。これで、 \mathcal{Q}_x が関節速度 $\dot{\theta}_1 \sim \dot{\theta}_6$ の一次結合として表現できた。

\mathcal{Q}_y も同様な手順で計算する。

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_y &= a_{31} \dot{a}_{11} + a_{32} \dot{a}_{12} + a_{33} \dot{a}_{13} = a_{31} \sum_{j=1}^6 a_{11j} \dot{\theta}_j + a_{32} \sum_{j=1}^6 a_{12j} \dot{\theta}_j + a_{33} \sum_{j=1}^6 a_{13j} \dot{\theta}_j \\ &= \sum_{j=1}^6 \tau_j \dot{\theta}_j \end{aligned} \tag{a.3}$$

$$\text{ただし、} \quad \tau_j = a_{31} a_{11j} + a_{32} a_{12j} + a_{33} a_{13j} \tag{a.4}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= n_x = c_6(c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) + s_6(s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1), \\ a_{111} &= c_6(-c_5 c_4 c_{23} s_1 + s_5 s_{23} s_1 - c_5 s_4 c_1) + s_6(-s_4 c_{23} s_1 + c_4 c_1), \\ a_{112} &= c_6(-c_5 c_4 s_{23} c_1 - s_5 c_{23} c_1) + s_6(-s_4 s_{23} c_1), \\ a_{113} &= a_{112}, \\ a_{114} &= c_6(-c_5 s_4 c_{23} c_1 - c_5 c_4 s_1) + s_6(c_4 c_{23} c_1 - s_4 s_1), \\ a_{115} &= c_6(-s_5 c_4 c_{23} c_1 - c_5 s_{23} c_1 + s_5 s_4 s_1), \\ a_{116} &= -s_6(c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) - c_6(s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1), \\ a_{12} &= o_x = -s_6(c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) + c_6(s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1), \\ a_{121} &= -s_6(-c_5 c_4 c_{23} s_1 + s_5 s_{23} s_1 - c_5 s_4 c_1) + c_6(-s_4 c_{23} s_1 + c_4 c_1), \\ a_{122} &= -s_6(-c_5 c_4 s_{23} c_1 - s_5 c_{23} c_1) + c_6(-s_4 s_{23} c_1), \\ a_{123} &= a_{122}, \\ a_{124} &= -s_6(-c_5 s_4 c_{23} c_1 - c_5 c_4 s_1) + c_6(c_4 c_{23} c_1 - s_4 s_1), \\ a_{125} &= -s_6(-s_5 c_4 c_{23} c_1 - c_5 s_{23} c_1 + s_5 s_4 s_1), \\ a_{126} &= -c_6(c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) - s_6(s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= a_x = -s_5 c_4 c_{23} c_1 - c_5 s_{23} c_1 + s_5 s_4 s_1, \\
 a_{131} &= s_5 c_4 c_{23} s_1 - c_5 s_{23} s_1 + s_5 s_4 c_1, \\
 a_{132} &= s_5 c_4 s_{23} c_1 - c_5 c_{23} c_1, \\
 a_{133} &= a_{132}, \\
 a_{134} &= s_5 s_4 c_{23} c_1 + s_5 c_4 s_1, \\
 a_{135} &= -c_5 c_4 c_{23} c_1 + s_5 s_{23} c_1 + c_5 s_4 s_1, \\
 a_{136} &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II-1)} \quad \tau_1 &= n_z (-Uc_6 - Vs_6) + o_z (Us_6 - Vc_6) + a_z (-a_y) = -n_z n_y - o_z o_y - a_z a_y = 0, \\
 a_{112} &= (Mc_6 + Ns_6)c_1 = n_z c_1, \\
 a_{122} &= (-Ms_6 + Nc_6)c_1 = o_z c_1, \\
 a_{132} &= a_z c_1, \\
 \text{II-2)} \quad \tau_2 &= n_z (n_z c_1) + o_z (o_z c_1) + a_z (a_z c_1) = c_1, \\
 \text{II-3)} \quad \tau_3 &= \tau_2, \\
 \text{II-4)} \quad \tau_4 &= s_{23} s_1, \\
 \text{II-5)} \quad \tau_5 &= -(s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1), \\
 \text{II-6)} \quad \tau_6 &= -(s_5 c_4 c_{23} + c_5 s_4 c_1 + c_5 s_{23} s_1),
 \end{aligned}$$

よって、 Q_y と θ の関係もこれで明らかとなった。

最後に、 Q_z について

$$\begin{aligned}
 Q_z &= a_{11} \dot{a}_{21} + a_{12} \dot{a}_{22} + a_{13} \dot{a}_{23} = a_{11} \sum_{j=1}^6 a_{21j} \dot{\theta}_j + a_{12} \sum_{j=1}^6 a_{22j} \dot{\theta}_j + a_{13} \sum_{j=1}^6 a_{23j} \dot{\theta}_j \\
 &= \sum_{j=1}^6 \zeta_j \dot{\theta}_j
 \end{aligned} \tag{a.5}$$

$$\text{ただし、} \quad \zeta_j = a_{11} a_{21j} + a_{12} a_{22j} + a_{13} a_{23j} \tag{a.6}$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= n_y = c_6 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) + s_6 (s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1), \\
 a_{211} &= c_6 (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) + s_6 (s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1), \\
 a_{212} &= c_6 (-c_5 c_4 s_{23} s_1 - s_5 c_{23} s_1) + s_6 (-s_4 s_{23} s_1), \\
 a_{213} &= a_{212} \\
 a_{214} &= c_6 (-c_5 s_4 c_{23} s_1 + c_5 c_4 c_1) + s_6 (c_4 c_{23} s_1 + s_4 c_1), \\
 a_{215} &= c_6 (-s_5 c_4 c_{23} s_1 - c_5 s_{23} s_1 - s_5 s_4 c_1), \\
 a_{216} &= -s_6 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) + c_6 (s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1), \\
 a_{22} &= o_y = -s_6 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) + c_6 (s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1), \\
 a_{221} &= -s_6 (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) + c_6 (s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1), \\
 a_{222} &= -s_6 (-c_5 c_4 s_{23} s_1 - s_5 c_{23} s_1) + c_6 (-s_4 s_{23} s_1), \\
 a_{223} &= a_{222}, \\
 a_{224} &= -s_6 (-c_5 s_4 c_{23} s_1 + c_5 c_4 c_1) + c_6 (c_4 c_{23} s_1 + s_4 c_1), \\
 a_{225} &= -s_6 (-s_5 c_4 c_{23} s_1 - c_5 s_{23} s_1 - s_5 s_4 c_1), \\
 a_{226} &= -c_6 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) - s_6 (s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1), \\
 a_{23} &= a_y = -(s_5 c_4 c_{23} + c_5 s_{23}) s_1 - s_5 s_4 c_1
 \end{aligned}$$

$$a_{231} = -(s_5 c_4 c_{23} + c_5 s_{23}) c_1 + s_5 s_4 s_1 ,$$

$$a_{232} = -(-s_5 c_4 s_{23} + c_5 c_{23}) s_1 ,$$

$$a_{233} = a_{232} ,$$

$$a_{234} = -(-s_5 s_4 c_{23}) s_1 - s_5 c_4 c_1 ,$$

$$a_{235} = -(c_5 c_4 c_{23} - s_5 s_{23}) s_1 - c_5 s_4 c_1 ,$$

$$a_{236} = 0 ,$$

$$\text{III-1)} \quad \zeta_1 = n_x (Ac_6 + Bs_6) + o_x (-As_6 + Bc_6) + a_x a_x = n_x^2 + o_x^2 + a_x^2 = 1$$

$$a_{212} = (Mc_6 + Ns_6) s_1 = n_z s_1 ,$$

$$a_{222} = (-Ms_6 + Nc_6) s_1 = o_z s_1 ,$$

$$a_{232} = a_z s_1 ,$$

$$\text{III-2)} \quad \zeta_2 = n_x (n_z s_1) + o_x (o_z s_1) + a_x (a_z s_1) = 0 ,$$

$$\text{III-3)} \quad \zeta_3 = \zeta_2 ,$$

$$\text{III-4)} \quad \zeta_4 = (s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1)(c_4 c_{23} s_1 + s_4 c_1) - (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1)(c_5 s_4 c_{23} s_1 - c_5 c_4 c_1) + (s_5 s_4 c_{23} s_1 - s_5 c_4 c_1)(-s_5 c_4 c_{23} c_1 - c_5 s_{23} c_1 + s_5 s_4 s_1) = c_{23} ,$$

$$\text{III-5)} \quad \zeta_5 = n_x (c_6 a_y) + o_x (-s_6 a_y) + a_x (-U) = a_y A - a_x U = s_4 s_{23} ,$$

$$\text{III-6)} \quad \zeta_6 = n_x (-Us_6 + Vc_6) + o_x (-Uc_6 - Vs_6) = n_x o_y - o_x n_y = a_z = s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23} ,$$

と算出できる。

これより、角速度 Ω と関節速度 $\dot{\theta}$ を関連づけるヤコビ行列 J_c は

$$J_c = \begin{pmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 & s_{23} c_1 & -(s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1) & -(s_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_4 s_1 + c_5 s_{23} c_1) \\ 0 & c_1 & c_1 & s_{23} s_1 & -(s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1) & -(s_5 c_4 c_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1 + c_5 s_{23} s_1) \\ 1 & 0 & 0 & c_{23} & s_4 s_{23} & s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{a.7})$$

と決定した。各行列要素が比較的扱いやすいことから計算の負担は小さい。この結果は、3章の(2)の漸化式表現で求めたヤコビ行列の結果と一致している。

付録B 運動学の漸化式表現と6リンク・マニピュレータに適用した計算手順⁽⁹⁾

今、座標系 Σ_i を基準にした座標系 Σ_j の変換行列をつぎのように定義する。

$$A_{i,j} = \begin{cases} \begin{vmatrix} p_{11}^{i,j} & p_{12}^{i,j} & p_{13}^{i,j} & p_{14}^{i,j} \\ p_{21}^{i,j} & p_{22}^{i,j} & p_{23}^{i,j} & p_{24}^{i,j} \\ p_{31}^{i,j} & p_{32}^{i,j} & p_{33}^{i,j} & p_{34}^{i,j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & (i < j) \\ E \text{ (単位行列)} & (i = j) \end{cases} \quad (b.1)$$

B.1 アルゴリズム 1

Σ_{i-1} からみた最終リンク n の先端にいたる変換行列を $A_{i-1,n}$ として、これを隣接座標系間の変換行列 $A_{i-1,i}$ と $A_{i,n}$ の行列積とみなして関係式を導く。すなわち、回転関節の場合運動学方程式を決定する漸化式が次式で表現される。

$$p_{1k}^{i-1,n} = p_{1k}^{i,n} \cos \theta_i - Q_k^{i,n} \sin \theta_i \quad (k=1, 2, 3) \quad (b.2.1)$$

$$p_{2k}^{i-1,n} = p_{1k}^{i,n} \sin \theta_i + Q_k^{i,n} \cos \theta_i \quad (k=1, 2, 3) \quad (b.2.2)$$

$$p_{3k}^{i-1,n} = p_{2k}^{i,n} \sin \alpha_i + p_{3k}^{i,n} \cos \alpha_i \quad (k=1, 2, 3) \quad (b.2.3)$$

$$p_{14}^{i-1,n} = R_i^{i,n} \cos \theta_i - Q_4^{i,n} \sin \theta_i \quad (b.2.4)$$

$$p_{24}^{i-1,n} = R_i^{i,n} \sin \theta_i + Q_4^{i,n} \cos \theta_i \quad (b.2.5)$$

$$p_{34}^{i-1,n} = p_{24}^{i,n} \sin \alpha_i + p_{34}^{i,n} \cos \alpha_i + d_i \quad (b.2.6)$$

ただし、 $i = n, \dots, 1$

$$Q_k^{i,n} = (p_{2k}^{i,n} \cos \alpha_i - p_{3k}^{i,n} \sin \alpha_i) \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (b.2.7)$$

$$R_i^{i,n} = (p_{14}^{i,n} + a_i) \quad (b.2.8)$$

$$p_{ij}^{n,n} = [\delta_{ij}] = \begin{cases} = 1 & (i = j) \\ = 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (\delta_{ij} : \text{kroncker の記号})$$

θ_i : 関節 i に関して軸 x_{i-1} と x_i の間を測った回転角度

α_i : 軸 x_i の正方向に測った関節軸 z_{i-1} と z_i の間のねじれ角度

a_i : 関節 i と $(i+1)$ の間の共通法線距離

d_i : 軸 z_{i-1} と z_i 間の共通法線と軸 z_{i-1} の交点を座標系 Σ_{i-1} の原点から z_{i-1} 軸方向に沿って測った距離

一方、直動関節の場合は、

$$p_{kt}^{i-1,n} = p_{k1}^{i-1,i} p_{1t}^{i,n} - p_{k2}^{i-1,i} p_{2t}^{i,n} - p_{k3}^{i-1,i} p_{3t}^{i,n} \quad (k=1, 2, 3; t=1, 2, 3) \quad (b.3.1)$$

$$p_{k4}^{i-1,n} = p_{k1}^{i-1,i} p_{14}^{i,n} + p_{k2}^{i-1,i} p_{24}^{i,n} + p_{k3}^{i-1,i} p_{34}^{i,n} \quad (k=1, 2) \quad (b.3.2)$$

$$p_{34}^{i-1,n} = p_{31}^{i-1,i} p_{14}^{i,n} + p_{32}^{i-1,i} p_{24}^{i,n} + p_{33}^{i-1,i} p_{34}^{i,n} + q_i \quad (b.3.3)$$

と記述できる。

B.2 アルゴリズム 2

基準系に対して Σ_i の変換行列を $A_{0,i}$ とし, $A_{0,i-1}$ と $A_{i-1,i}$ の関係から下記の漸化式が回転関節に対して得られる。

$$p_{k1}^{0,i} = p_{k1}^{0,i-1} \cos \theta_i + p_{k2}^{0,i-1} \sin \theta_i \quad (k=1, 2, 3) \quad (b.4.1)$$

$$p_{k2}^{0,i} = -Q_k^{0,i-1} \cos \alpha_i + p_{k3}^{0,i-1} \sin \alpha_i \quad (k=1, 2, 3) \quad (b.4.2)$$

$$p_{k3}^{0,i} = Q_k^{0,i-1} \sin \alpha_i + p_{k4}^{0,i-1} \cos \alpha_i \quad (k=1, 2, 3) \quad (b.4.3)$$

$$p_{k4}^{0,i} = a_i p_{k1}^{0,i-1} + d_i p_{k3}^{0,i-1} + p_{k4}^{0,i-1} \quad (k=1, 2, 3) \quad (b.4.4)$$

$$\text{ただし, } Q_k^{0,i-1} = p_{k1}^{0,i-1} \sin \theta_i - p_{k2}^{0,i-1} \cos \theta_i \quad (k=1, 2, 3) \quad (b.4.5)$$

$$p_{ij}^{0,0} = [\delta_{ij}]$$

直動関節に対しては,

$$p_{kt}^{0,i} = p_{it}^{i-1,i} p_{kt}^{0,i-1} + p_{2t}^{i-1,i} p_{kt}^{0,i-1} + p_{3t}^{i-1,i} p_{kt}^{0,i-1} \quad (k=1, 2, 3; t=1, 2, 3) \quad (b.5)$$

$$p_{t4}^{0,i} = p_{t3}^{0,i-1} + p_{t4}^{0,i-1} \quad (t=1, 2, 3)$$

と簡潔に表現できる。

B.3 6リンク・マニピュレータに適用したアルゴリズム

B.1 と B.2 に基づくアルゴリズムを具体的に 6 リンク・マニピュレータに適用して, 運動学方程式を計算機で自動生成させる手順 (プログラム) を記述する。漸化式を展開していく過程で計算される値, つまり変換行列の要素が, 本文 2 章で説明したようにヤコビ行列の要素決定に直接寄与するので, その内容を計算機で最も効率良い処理ができる形にまとめる。できるだけ前に定義した変数を使うことで式の簡潔化, 計算時間の短縮化を図った。計算プログラムの各段階で書き加えた行列はコード化した変数の値を確認するためである。

尚, マニピュレータの関節変数を与えそれに対応した指先の位置・姿勢は既報 (9) でも説明したようにアルゴリズムの 1 か 2 のどちらからでも求められるが, ヤコビ行列の計算に適用する場合両アルゴリズムを同時に使う必要がある。

計算の対象となった 6 リンク・マニピュレータを Fig. a.1 に, また A 行列指定のためのリンク座標系を Fig. a.2 に与える。計算上必要なリンクパラメータと各関節変数は, Table a.1 にまとめて示す。以下の展開式のなかでは, $\sin \theta_i = s_i$, $\cos \theta_i = c_i$, $\sin(\theta_i + \theta_j) = s_{ij}$, $\cos(\theta_i + \theta_j) = c_{ij}$, $\sin \alpha_j = s\alpha_j$, $\cos \alpha_j = c\alpha_j$ 等通常の略記法に従う。

B.3.1 アルゴリズム 1 による行列要素の決定

1) $A_{5,6}$ の要素の算出

$$Q_1^{6,6} = 0,$$

$$Q_2^{6,6} = 1,$$

$$Q_3^{6,6} = 0,$$

$$Q_4^{6,6} = 0,$$

$$R_6^{6,6} = a_6,$$

$$p_{11}^{5,6} = c_6,$$

$$p_{21}^{5,6} = s_6,$$

$$p_{31}^{5,6} = 0,$$

$$p_{12}^{5,6} = -s_6,$$

$$p_{22}^{5,6} = c_6,$$

$$p_{32}^{5,6} = 0,$$

$$p_{13}^{5,6} = 0,$$

$$p_{23}^{5,6} = 0,$$

$$p_{33}^{5,6} = 1,$$

$$p_{14}^{5,6} = a_6 c_6,$$

$$p_{24}^{5,6} = a_6 s_6,$$

$$p_{34}^{5,6} = d_6,$$

$$A_{5,6} = \begin{vmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2) $A_{4,6}$ の要素の算出

$$Q_1^{5,6} = 0,$$

$$Q_2^{5,6} = 0,$$

$$Q_3^{5,6} = 1,$$

$$Q_4^{5,6} = d_6,$$

$$R_5^{5,6} = p_{14}^{5,6} + a_5,$$

$$p_{11}^{4,6} = p_{11}^{5,6} c_5,$$

$$p_{21}^{4,6} = p_{11}^{5,6} s_5,$$

$$p_{31}^{4,6} = -p_{21}^{5,6},$$

$$p_{12}^{4,6} = p_{12}^{5,6} c_5,$$

$$p_{22}^{4,6} = p_{12}^{5,6} s_5,$$

$$p_{32}^{4,6} = -p_{22}^{5,6},$$

$$p_{13}^{4,6} = -s_5,$$

$$p_{23}^{4,6} = c_5,$$

$$p_{33}^{4,6} = 0,$$

$$p_{14}^{4,6} = R_5^{5,6} c_5 - Q_4^{5,6} s_5,$$

$$p_{24}^{4,6} = R_5^{5,6} s_5 + Q_4^{5,6} c_5,$$

$$p_{34}^{4,6} = -p_{24}^{5,6},$$

$$A_{4,6} = \begin{vmatrix} c_6 c_5 & -s_6 c_5 & -s_5 & (a_6 c_6 + a_5) c_5 - d_6 s_5 \\ c_6 s_5 & -s_6 s_5 & c_5 & (a_6 c_6 + a_5) s_5 + d_6 c_5 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & -a_5 s_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3) $A_{3,6}$ の要素の算出

$$\begin{aligned}
 Q_{1,6}^{4,6} &= p_{31}^{4,6}, \\
 Q_{2,6}^{4,6} &= p_{32}^{4,6}, \\
 Q_{3,6}^{4,6} &= 0, \\
 Q_{4,6}^{4,6} &= -p_{24}^{5,6}, \\
 R_{4,6}^{4,6} &= p_{14}^{4,6} + a_4, \\
 p_{11}^{3,6} &= p_{11}^{4,6} c_4 - Q_{1,6}^{4,6} s_4, \\
 p_{21}^{3,6} &= p_{11}^{4,6} s_4 + Q_{1,6}^{4,6} c_4, \\
 p_{31}^{3,6} &= -p_{21}^{4,6}, \\
 p_{12}^{3,6} &= p_{12}^{4,6} c_4 - Q_{2,6}^{4,6} s_4, \\
 p_{22}^{3,6} &= p_{12}^{4,6} s_4 + Q_{2,6}^{4,6} c_4, \\
 p_{32}^{3,6} &= -p_{22}^{4,6}, \\
 p_{13}^{3,6} &= p_{13}^{4,6} c_4, \\
 p_{23}^{3,6} &= p_{13}^{4,6} s_4, \\
 p_{33}^{3,6} &= -p_{23}^{4,6}, \\
 p_{14}^{3,6} &= p_{14}^{4,6} c_4 + p_{24}^{5,6} s_4, \\
 p_{24}^{3,6} &= p_{14}^{4,6} s_4 - p_{24}^{5,6} c_4, \\
 p_{34}^{3,6} &= -p_{24}^{4,6} + d_4,
 \end{aligned}$$

$$A_{3,6} = A_4 A_5 A_6$$

$$= \begin{vmatrix}
 c_6 c_5 c_4 + s_6 s_4 & -s_6 c_5 c_4 + c_6 s_4 & -s_5 c_4 & (a_6 c_6 + a_5) c_5 c_4 - d_6 s_5 c_4 + a_6 s_6 s_4 \\
 c_6 c_5 s_4 - s_6 c_4 & -s_6 c_5 s_4 - c_6 c_4 & -s_5 s_4 & (a_6 c_6 + a_5) c_5 s_4 - d_6 s_5 s_4 - a_6 s_6 c_4 \\
 -c_6 s_5 & s_6 s_5 & -c_5 & -(a_6 c_6 + a_5) s_5 - d_6 c_5 + d_4 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{vmatrix}$$

4) $A_{2,6}$ の要素の算出

$$\begin{aligned}
 Q_{1,6}^{3,6} &= -p_{31}^{3,6}, \\
 Q_{2,6}^{3,6} &= -p_{32}^{3,6}, \\
 Q_{3,6}^{3,6} &= -p_{33}^{3,6}, \\
 Q_{4,6}^{3,6} &= -p_{34}^{3,6}, \\
 R_{3,6}^{3,6} &= p_{14}^{3,6} + a_3, \\
 p_{11}^{2,6} &= p_{11}^{3,6} c_3 - Q_{1,6}^{3,6} s_3, \\
 p_{12}^{2,6} &= p_{12}^{3,6} c_3 - Q_{2,6}^{3,6} s_3, \\
 p_{13}^{2,6} &= p_{13}^{3,6} c_3 - Q_{3,6}^{3,6} s_3, \\
 p_{14}^{2,6} &= R_{3,6}^{3,6} c_3 - Q_{4,6}^{3,6} s_3, \\
 p_{21}^{2,6} &= p_{11}^{3,6} s_3 + Q_{1,6}^{3,6} c_3, \\
 p_{22}^{2,6} &= p_{12}^{3,6} s_3 + Q_{2,6}^{3,6} c_3, \\
 p_{23}^{2,6} &= p_{13}^{3,6} s_3 + Q_{3,6}^{3,6} c_3, \\
 p_{24}^{2,6} &= R_{3,6}^{3,6} s_3 + Q_{4,6}^{3,6} c_3, \\
 p_{31}^{2,6} &= p_{21}^{3,6},
 \end{aligned}$$

$$p_{32}^{2,6} = p_{22}^{3,6},$$

$$p_{33}^{2,6} = p_{23}^{3,6},$$

$$p_{34}^{2,6} = p_{24}^{3,6},$$

$$A_{2,6} = A_3 A_4 A_5 A_6$$

$$= \begin{vmatrix} (C_6 C_5 C_4 + S_6 S_4) C_3 - C_6 S_5 S_3 & (-S_6 C_5 C_4 + C_6 S_4) C_3 + S_6 S_5 S_3 & -S_5 C_4 C_3 - C_5 S_3 \\ (C_6 C_5 C_4 + S_6 S_4) S_3 - C_6 S_5 C_3 & (-S_6 C_5 C_4 + C_6 S_4) S_3 - S_6 S_5 C_3 & -S_5 C_4 S_3 + C_5 C_3 \\ C_6 C_5 S_4 - S_6 C_4 & -(S_6 C_5 S_4 + C_6 C_4) & -S_5 S_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \{(a_6 c_6 + a_5) c_5 c_4 - d_6 s_5 c_4 + a_6 s_6 s_4\} c_3 - \{(a_6 c_6 + a_5) s_5 + d_6 c_5 - d_4\} s_3 & & \\ \{(a_6 c_6 + a_5) c_5 c_4 - d_6 s_5 c_4 + a_6 s_6 s_4\} s_3 + \{(a_6 c_6 + a_5) s_5 + d_6 c_5 - d_4\} c_3 & & \\ (a_6 c_6 + a_5) c_5 s_4 - d_6 s_5 s_4 - a_6 s_6 c_4 & & \\ 1 & & \end{vmatrix}$$

5) $A_{1,6}$ の要素の算出

$$Q_1^{2,6} = p_{21}^{2,6},$$

$$Q_2^{2,6} = p_{22}^{2,6},$$

$$Q_3^{2,6} = p_{23}^{2,6},$$

$$Q_4^{2,6} = p_{24}^{2,6},$$

$$R_2^{2,6} = p_{14}^{2,6} + a_2,$$

$$p_{11}^{1,6} = p_{11}^{2,6} c_2 - Q_1^{2,6} s_2,$$

$$p_{12}^{1,6} = p_{12}^{2,6} c_2 - Q_2^{2,6} s_2,$$

$$p_{13}^{1,6} = p_{13}^{2,6} c_2 - Q_3^{2,6} s_2,$$

$$p_{14}^{1,6} = R_2^{2,6} c_2 - Q_4^{2,6} s_2,$$

$$p_{21}^{1,6} = p_{11}^{2,6} s_2 + Q_1^{2,6} c_2,$$

$$p_{22}^{1,6} = p_{12}^{2,6} s_2 + Q_2^{2,6} c_2,$$

$$p_{23}^{1,6} = p_{13}^{2,6} s_2 + Q_3^{2,6} c_2,$$

$$p_{24}^{1,6} = R_2^{2,6} s_2 + Q_4^{2,6} c_2,$$

$$p_{31}^{1,6} = p_{31}^{2,6},$$

$$p_{32}^{1,6} = p_{32}^{2,6},$$

$$p_{33}^{1,6} = p_{33}^{2,6},$$

$$p_{34}^{1,6} = p_{34}^{2,6},$$

$$A_{1,6} = A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

$$= \begin{vmatrix} (C_6 C_5 C_4 + S_6 S_4) C_{23} - C_6 S_5 S_{23} & (-S_6 C_5 C_4 + C_6 S_4) C_{23} + S_6 S_5 S_{23} & -S_5 C_4 C_{23} - C_5 S_{23} \\ (C_6 C_5 C_4 + S_6 S_4) S_{23} + C_6 S_5 C_{23} & (-S_6 C_5 C_4 + C_6 S_4) S_{23} - S_6 S_5 C_{23} & -S_5 C_4 S_{23} + C_5 C_{23} \\ C_6 C_5 S_4 - S_6 C_4 & -(S_6 C_5 S_4 + C_6 C_4) & -S_5 S_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \{(a_6 c_6 + a_5) c_5 c_4 - d_6 s_5 c_4 + a_6 s_6 s_4\} c_{23} - \{(a_6 c_6 + a_5) s_5 + d_6 c_5 - d_4\} s_{23} + a_2 c_2 & & \\ \{(a_6 c_6 + a_5) c_5 c_4 - d_6 s_5 c_4 + a_6 s_6 s_4\} s_{23} + \{(a_6 c_6 + a_5) s_5 + d_6 c_5 - d_4\} c_{23} + a_2 s_2 & & \\ (a_6 c_6 + a_5) c_5 s_4 - d_6 s_5 s_4 - a_6 s_6 c_4 & & \\ 1 & & \end{vmatrix}$$

6) $A_{0,6}$ の要素の算出

$$\begin{aligned}
 Q_{1,6}^{1,6} &= p_{31}^{1,6}, \\
 Q_{2,6}^{1,6} &= p_{32}^{1,6}, \\
 Q_{3,6}^{1,6} &= p_{33}^{1,6}, \\
 Q_{4,6}^{1,6} &= p_{34}^{1,6}, \\
 R_{1,6}^{1,6} &= p_{14}^{1,6} + a_1, \\
 p_{11}^{0,6} &= p_{11}^{1,6} c_1 - Q_{1,6}^{1,6} s_1, \\
 p_{12}^{0,6} &= p_{12}^{1,6} c_1 - Q_{2,6}^{1,6} s_1, \\
 p_{13}^{0,6} &= p_{13}^{1,6} c_1 - Q_{3,6}^{1,6} s_1, \\
 p_{14}^{0,6} &= R_{1,6}^{1,6} c_1 - Q_{4,6}^{1,6} s_1, \\
 p_{21}^{0,6} &= p_{11}^{1,6} s_1 + Q_{1,6}^{1,6} c_1, \\
 p_{22}^{0,6} &= p_{12}^{1,6} s_1 + Q_{2,6}^{1,6} c_1, \\
 p_{23}^{0,6} &= p_{13}^{1,6} s_1 + Q_{3,6}^{1,6} c_1, \\
 p_{24}^{0,6} &= R_{1,6}^{1,6} s_1 + Q_{4,6}^{1,6} c_1, \\
 p_{31}^{0,6} &= -p_{21}^{1,6}, \\
 p_{32}^{0,6} &= -p_{22}^{1,6}, \\
 p_{33}^{0,6} &= -p_{23}^{1,6}, \\
 p_{34}^{0,6} &= -p_{24}^{1,6} + d_1,
 \end{aligned}$$

$$A_{0,6} = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

$$= \left[\begin{array}{ccc}
 \{(C_6 C_5 C_4 + S_6 S_4) C_{23} - C_6 S_5 S_{23}\} C_1 & \{(-S_6 C_5 C_4 + C_6 S_4) C_{23} + S_6 S_5 S_{23}\} C_1 & -(S_5 C_4 C_{23} + C_5 S_{23}) C_1 \\
 -(C_6 C_5 S_4 - S_6 C_4) S_1 & + (S_6 C_5 S_4 + C_6 C_4) S_1 & + S_5 S_4 S_1 \\
 \{(C_6 C_5 C_4 + S_6 S_4) C_{23} - C_6 S_5 S_{23}\} S_1 & \{(-S_6 C_5 C_4 + C_6 S_4) C_{23} + S_6 S_5 S_{23}\} S_1 & -(S_5 C_4 C_{23} + C_5 S_{23}) S_1 \\
 + (C_6 C_5 S_4 - S_6 C_4) C_1 & -(S_6 C_5 S_4 + C_6 C_4) C_1 & - S_5 S_4 C_1 \\
 -\{(C_6 C_5 C_4 + S_6 S_4) S_{23} + C_6 S_5 C_{23}\} & -\{(-S_6 C_5 C_4 + C_6 S_4) S_{23} - S_6 S_5 C_{23}\} & -\{-S_5 C_4 S_{23} + C_5 C_{23}\} \\
 0 & 0 & 0 \\
 [\{(a_6 c_6 + a_5) c_5 c_4 - d_6 s_5 c_4 + a_6 s_6 s_4 \} c_{23} - \{(a_6 c_6 + a_5) s_5 + d_6 c_5 - d_4 \} s_{23} + a_2 c_2] c_1 & & \\
 - \{(a_6 c_6 + a_5) c_5 s_4 - d_6 s_5 s_4 - a_6 s_6 c_4 \} s_1 & & \\
 [\{(a_6 c_6 + a_5) c_5 c_4 - d_6 s_5 c_4 + a_6 s_6 s_4 \} c_{23} - \{(a_6 c_6 + a_5) s_5 + d_6 c_5 - d_4 \} s_{23} + a_2 c_2] s_1 & & \\
 + \{(a_6 c_6 + a_5) c_5 s_4 - d_6 s_5 s_4 - a_6 s_6 c_4 \} c_1 & & \\
 - [\{(a_6 c_6 + a_5) c_5 c_4 - d_6 s_5 c_4 + a_6 s_6 s_4 \} s_{23} + \{(a_6 c_6 + a_5) s_5 + d_6 c_5 - d_4 \} c_{23} + a_2 s_2] + d_1 & & \\
 1 & &
 \end{array} \right]$$

B.3.2 アルゴリズム 2 による行列要素の決定

1) $A_{0,1}$ の要素の算出

$$\begin{aligned}
 Q_{1,1}^{0,0} &= s_1, \\
 Q_{2,1}^{0,0} &= -c_1, \\
 Q_{3,1}^{0,0} &= 0, \\
 p_{11}^{0,1} &= c_1,
 \end{aligned}$$

$$p_{21}^{0,1} = s_1 ,$$

$$p_{31}^{0,1} = 0 ,$$

$$p_{12}^{0,1} = 0 ,$$

$$p_{22}^{0,1} = 0 ,$$

$$p_{32}^{0,1} = -1 ,$$

$$p_{13}^{0,1} = -s_1 ,$$

$$p_{23}^{0,1} = c_1 ,$$

$$p_{33}^{0,1} = 0 ,$$

$$p_{14}^{0,1} = 0 ,$$

$$p_{24}^{0,1} = 0 ,$$

$$p_{34}^{0,1} = d_1 ,$$

$$A_{0,1} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2) $A_{0,2}$ の要素の算出

$$Q_{1,1}^{0,1} = p_{11}^{0,1} s_2 ,$$

$$Q_{2,2}^{0,1} = p_{21}^{0,1} s_2 ,$$

$$Q_{3,3}^{0,1} = c_2 ,$$

$$p_{11}^{0,2} = p_{11}^{0,1} c_2 ,$$

$$p_{21}^{0,2} = p_{21}^{0,1} c_2 ,$$

$$p_{31}^{0,2} = -s_2 ,$$

$$p_{12}^{0,2} = -Q_{1,1}^{0,1} ,$$

$$p_{22}^{0,2} = -Q_{2,2}^{0,1} ,$$

$$p_{32}^{0,2} = -Q_{3,3}^{0,1} ,$$

$$p_{13}^{0,2} = -s_1 ,$$

$$p_{23}^{0,2} = c_1 ,$$

$$p_{33}^{0,2} = 0 ,$$

$$p_{14}^{0,2} = a_2 p_{11}^{0,2} ,$$

$$p_{24}^{0,2} = a_2 p_{21}^{0,2} ,$$

$$p_{34}^{0,2} = a_2 p_{31}^{0,2} + p_{34}^{0,1} ,$$

$$A_{0,2} = \begin{vmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & a_2 s_1 c_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & -a_2 s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3) $A_{0,3}$ の要素の算出

$$Q_{1,1}^{0,2} = c_1 s_{23} ,$$

$$Q_{2,2}^{0,2} = s_1 s_{23} ,$$

$$\begin{aligned}
 Q_{3}^{0,2} &= c_{23} , \\
 p_{11}^{0,3} &= c_1 c_{23} , \\
 p_{21}^{0,3} &= s_1 c_{23} , \\
 p_{31}^{0,3} &= -s_{23} , \\
 p_{12}^{0,3} &= -s_1 , \\
 p_{22}^{0,3} &= c_1 , \\
 p_{32}^{0,3} &= 0 , \\
 p_{13}^{0,3} &= Q_1^{0,2} , \\
 p_{23}^{0,3} &= Q_2^{0,2} , \\
 p_{33}^{0,3} &= Q_3^{0,2} , \\
 p_{14}^{0,3} &= p_{14}^{0,2} , \\
 p_{24}^{0,3} &= p_{24}^{0,2} , \\
 p_{34}^{0,3} &= p_{34}^{0,2} ,
 \end{aligned}$$

$$A_{0,3} = \begin{vmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & a_2 s_1 c_2 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & -a_2 s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4) $A_{0,4}$ の要素の算出

$$\begin{aligned}
 Q_1^{0,3} &= p_{11}^{0,3} s_4 - p_{12}^{0,3} c_4 , \\
 Q_2^{0,3} &= p_{21}^{0,3} s_4 - p_{22}^{0,3} c_4 , \\
 Q_3^{0,3} &= p_{31}^{0,3} s_4 , \\
 p_{11}^{0,4} &= p_{11}^{0,3} c_4 + p_{12}^{0,3} s_4 , \\
 p_{21}^{0,4} &= p_{21}^{0,3} c_4 + p_{22}^{0,3} s_4 , \\
 p_{31}^{0,4} &= p_{31}^{0,3} c_4 , \\
 p_{12}^{0,4} &= -p_{13}^{0,3} , \\
 p_{22}^{0,4} &= -p_{23}^{0,3} , \\
 p_{32}^{0,4} &= -p_{33}^{0,3} , \\
 p_{13}^{0,4} &= -Q_1^{0,3} , \\
 p_{23}^{0,4} &= -Q_2^{0,3} , \\
 p_{33}^{0,4} &= -Q_3^{0,3} , \\
 p_{14}^{0,4} &= d_4 p_{13}^{0,3} + p_{14}^{0,3} , \\
 p_{24}^{0,4} &= d_4 p_{23}^{0,3} + p_{24}^{0,3} , \\
 p_{34}^{0,4} &= d_4 p_{33}^{0,3} + p_{34}^{0,3} ,
 \end{aligned}$$

$$A_{0,4} = \begin{vmatrix} c_1 c_{23} c_4 - s_1 s_4 & -c_1 s_{23} & -(c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4) & d_4 c_1 s_{23} + a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} c_4 + c_1 s_4 & -s_1 s_{23} & -(s_1 c_{23} s_4 - c_1 c_4) & d_4 s_1 s_{23} + a_2 s_1 c_2 \\ -s_{23} c_4 & -c_{23} & s_{23} s_4 & d_4 c_{23} - a_2 s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5) $A_{0,5}$ の要素の算出

$$\begin{aligned}
 Q_{1}^{0,4} &= p_{11}^{0,4} s_5 - p_{12}^{0,4} c_5, \\
 Q_{2}^{0,4} &= p_{21}^{0,4} s_5 - p_{22}^{0,4} c_5, \\
 Q_{3}^{0,4} &= p_{31}^{0,4} s_5 - p_{32}^{0,4} c_5, \\
 p_{11}^{0,5} &= p_{11}^{0,4} c_5 + p_{12}^{0,4} s_5, \\
 p_{21}^{0,5} &= p_{21}^{0,4} c_5 + p_{22}^{0,4} s_5, \\
 p_{31}^{0,5} &= p_{31}^{0,4} c_5 + p_{32}^{0,4} s_5, \\
 p_{12}^{0,5} &= -p_{13}^{0,4}, \\
 p_{22}^{0,5} &= -p_{23}^{0,4}, \\
 p_{32}^{0,5} &= -p_{33}^{0,4}, \\
 p_{13}^{0,5} &= -Q_{1}^{0,4}, \\
 p_{23}^{0,5} &= -Q_{2}^{0,4}, \\
 p_{33}^{0,5} &= -Q_{3}^{0,4}, \\
 p_{14}^{0,5} &= a_5 p_{11}^{0,5} + p_{14}^{0,4}, \\
 p_{24}^{0,5} &= a_5 p_{21}^{0,5} + p_{24}^{0,4}, \\
 p_{34}^{0,5} &= a_5 p_{31}^{0,5} + p_{34}^{0,4},
 \end{aligned}$$

$$A_{0,5} = \begin{vmatrix}
 (C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) C_5 - C_1 S_{23} S_5 & C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4 \\
 (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) C_5 - S_1 S_{23} S_5 & S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4 \\
 -S_{23} C_4 C_5 - C_{23} S_5 & -S_{23} S_4 \\
 0 & 0 \\
 -(C_1 C_{23} C_4 S_5 - S_1 S_4 S_5 + C_1 S_{23} C_5) & a_5 (C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_4 C_5 - C_1 S_{23} S_5) + d_4 C_1 S_{23} + a_2 C_1 C_2 \\
 -(S_1 C_{23} C_4 S_5 + C_1 S_4 S_5 + S_1 S_{23} C_5) & a_5 (S_1 C_{23} C_4 C_5 + C_1 S_4 C_5 - S_1 S_{23} S_5) - d_4 S_1 S_{23} + a_2 S_1 C_2 \\
 S_{23} C_4 S_5 - C_{23} C_5 & -a_5 (S_{23} C_4 C_5 + C_{23} S_5) + d_4 C_{23} - a_2 S_2 + d_1 \\
 0 & 1
 \end{vmatrix}$$

6) $A_{0,6}$ の要素の算出

$$\begin{aligned}
 Q_{1}^{0,5} &= p_{11}^{0,5} s_6 - p_{12}^{0,5} c_6, \\
 Q_{2}^{0,5} &= p_{21}^{0,5} s_6 - p_{22}^{0,5} c_6, \\
 Q_{3}^{0,5} &= p_{31}^{0,5} s_6 - p_{32}^{0,5} c_6, \\
 p_{11}^{0,6} &= p_{11}^{0,5} c_6 + p_{12}^{0,5} s_6, \\
 p_{21}^{0,6} &= p_{21}^{0,5} c_6 + p_{22}^{0,5} s_6, \\
 p_{31}^{0,6} &= p_{31}^{0,5} c_6 + p_{32}^{0,5} s_6, \\
 p_{12}^{0,6} &= -Q_{1}^{0,5}, \\
 p_{22}^{0,6} &= -Q_{2}^{0,5}, \\
 p_{32}^{0,6} &= -Q_{3}^{0,5}, \\
 p_{13}^{0,6} &= p_{13}^{0,5}, \\
 p_{23}^{0,6} &= p_{23}^{0,5}, \\
 p_{33}^{0,6} &= p_{33}^{0,5},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{14}^{0,6} &= a_6 p_{11}^{0,6} + d_6 p_{13}^{0,5} + p_{14}^{0,5}, \\ p_{24}^{0,6} &= a_6 p_{21}^{0,6} + d_6 p_{23}^{0,5} + p_{24}^{0,5}, \\ p_{34}^{0,6} &= a_6 p_{31}^{0,6} + d_6 p_{33}^{0,5} + p_{34}^{0,5}, \end{aligned}$$

付録C 6リンク・マニピュレータの運動学方程式と偏微分

C.1 運動学方程式の展開図

Fig. a.1 に示した 6 リンク・マニピュレータの運動学方程式を A_i 行列の一般式を用いて誘導する⁽¹¹⁾。計算した各変換行列は今後のリンク機構の性質究明に役立つのでここにまとめて記載しておく。尚、各リンクに設定した座標系は、Fig. a.2 で与え、マニピュレータのリンク・パラメータは Table a.1 に示す。式の中に用いられる角度 θ の正弦と余弦をつぎのように略記する。

$$\sin \theta_i = s_i, \quad \cos \theta_i = c_i, \quad \sin(\theta_i + \theta_j) = s_{ij}, \quad \cos(\theta_i + \theta_j) = c_{ij}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (c. 1)$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (c. 2)$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (c. 3)$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (c. 4)$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & a_5 c_5 \\ s_5 & 0 & c_5 & a_5 s_5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (c. 5)$$

$$A_6 = \begin{vmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (c. 6)$$

$$A_1 A_2 = \begin{vmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & a_2 s_1 c_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & -a_2 s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 A_2 A_3 &= \begin{vmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & d_1 - a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 A_1 A_2 A_3 A_4 &= \begin{vmatrix} C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4 & -C_1 S_{23} & -C_1 C_{23} S_4 - S_1 C_4 & d_4 C_1 S_{23} + a_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4 & -S_1 S_{23} & -S_1 C_{23} S_4 + C_1 C_4 & d_4 S_1 S_{23} + a_2 S_1 C_2 \\ -S_{23} C_4 & -C_{23} & S_{23} S_4 & d_4 C_{23} + d_1 - a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 &= \begin{vmatrix} C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_4 C_5 - C_1 S_{23} S_5 & C_1 C_{23} S_4 + S_1 C_4 \\ S_1 C_{23} C_4 C_5 + C_1 S_4 C_5 - S_1 S_{23} S_5 & S_1 C_{23} S_4 - C_1 C_4 \\ -S_{23} C_4 C_5 - C_{23} S_5 & -S_{23} S_4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -C_1 C_{23} C_4 S_5 + S_1 S_4 S_5 - C_1 S_{23} C_5 & a_5 (C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_1 S_4 C_5 - C_1 S_{23} S_5) + d_4 C_1 S_{23} + a_2 C_1 C_2 \\ -S_1 C_{23} C_4 S_5 - C_1 S_4 S_5 - S_1 S_{23} C_5 & a_5 (S_1 C_{23} C_4 C_5 + C_1 S_4 C_5 - S_1 S_{23} S_5) + d_4 S_1 S_{23} + a_2 S_1 C_2 \\ S_{23} C_4 S_5 - C_{23} C_5 & -a_5 (S_{23} C_4 C_5 + C_{23} S_5) + d_4 C_{23} + d_1 - a_2 S_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} A & B & D & X_1 \\ U & V & E & Y_1 \\ M & N & F & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

ここに、各パラメータは、

$$\begin{aligned}
 A &= C_5 C_4 C_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1 - S_5 S_{23} C_1, \\
 B &= S_4 C_{23} C_1 + C_4 S_1, \\
 U &= C_5 C_4 C_{23} S_1 + C_5 S_4 C_1 - S_5 S_{23} S_1, \\
 V &= S_4 C_{23} S_1 - C_4 C_1, \\
 M &= -C_5 C_4 S_{23} - S_5 C_{23}, \\
 N &= -S_4 S_{23}, \\
 D &= UN - VM = -S_5 C_4 C_{23} C_1 + S_5 S_4 S_1 - C_5 S_{23} C_1 = a_x, \\
 E &= BM - AN = -S_5 C_4 C_{23} S_1 - S_5 S_4 C_1 - C_5 S_{23} S_1 = a_y, \\
 F &= AV - BU = S_5 C_4 S_{23} - C_5 C_{23} = a_z, \\
 X_1 &= a_5 (C_5 C_4 C_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1 - S_5 S_{23} C_1) + d_4 S_{23} C_1 + a_2 C_2 C_1, \\
 Y_1 &= a_5 (C_5 C_4 C_{23} S_1 + C_5 S_4 C_1 - S_5 S_{23} S_1) + d_4 S_{23} S_1 + a_2 C_2 S_1, \\
 Z_1 &= -a_5 (C_5 C_4 S_{23} + S_5 C_{23}) + d_4 C_{23} + d_1 - a_2 S_2,
 \end{aligned} \tag{c. 7}$$

となる。これは式全体の簡略化と解を引出す見通しを与えるために便宜的に導入したもので、その物理的意味は第5関節の位置・姿勢を表す。そこで、ベースに関するマニピュレータ先端の行列表示 T_6 はこのパラメータを用いて、

$$\begin{aligned}
 T_6 &= A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\
 &= \begin{vmatrix} A & B & D & X_1 \\ U & V & E & Y_1 \\ M & N & F & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{c. 8}
 \end{aligned}$$

と表現できる。

ここに,

$$\begin{aligned}
 n_x &= -c_6(C_5 S_{23} S_1 + S_5 S_4 C_1 + S_5 C_4 C_{23} S_1) + s_6(C_4 C_1 - S_4 C_{23} S_1), \\
 o_x &= c_6(C_4 C_1 - S_4 C_{23} S_1) + s_6(C_5 S_{23} S_1 + S_5 S_4 C_1 + S_5 C_4 C_{23} S_1), \\
 a_x &= S_5 S_{23} S_1 - C_5 C_4 C_{23} S_1 - C_5 S_4 C_1, \\
 P_x &= -a_6 c_6(C_5 S_{23} S_1 + S_5 S_4 C_1 + S_5 C_4 C_{23} S_1) + a_6 s_6(C_4 C_1 - S_4 C_{23} S_1) \\
 &\quad - a_5(C_5 S_{23} S_1 + S_5 S_4 C_1 + S_5 C_4 C_{23} S_1) - (a_3 + a_4) S_{23} S_1 - a_2 S_2 S_1 \\
 &\quad - b(S_5 S_{23} S_1 - C_5 S_4 C_1 - C_5 C_4 C_{23} S_1), \\
 n_y &= c_6(C_5 S_{23} C_1 - S_5 S_4 S_1 + S_5 C_4 C_{23} C_1) + s_6(C_4 S_1 + S_4 C_{23} C_1), \\
 o_y &= c_6(C_4 S_1 + S_4 C_{23} C_1) - s_6(C_5 S_{23} C_1 - S_5 S_4 S_1 + S_5 C_4 C_{23} C_1), \\
 a_y &= C_5 C_4 C_{23} C_1 - S_5 S_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1, \\
 P_y &= a_6 c_6(C_5 S_{23} C_1 - S_5 S_4 S_1 + S_5 C_4 C_{23} C_1) + a_6 s_6(C_4 S_1 + S_4 C_{23} C_1) \\
 &\quad + a_5(C_5 S_{23} C_1 - S_5 S_4 S_1 + S_5 C_4 C_{23} C_1) + (a_3 + a_4) S_{23} C_1 + a_2 S_2 C_1 \\
 &\quad - b(C_5 C_4 C_{23} C_1 - S_5 S_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1), \\
 n_z &= c_6(C_5 C_{23} - S_5 C_4 S_{23}) - s_6 S_4 S_{23}, \\
 o_z &= c_6(S_4 S_{23}) + s_6(S_5 C_4 S_{23} - C_5 C_{23}), \\
 a_z &= -(C_5 C_4 S_{23} + S_5 C_{23}), \\
 P_z &= a_6 c_6(C_5 C_{23} - S_5 C_4 S_{23}) + a_6 s_6(-S_4 S_{23}) + a_5(C_5 C_{23} - S_5 C_4 S_{23}) \\
 &\quad + (a_3 + a_4) C_{23} + a_2 C_2 + a_1 + b S_5(C_{23} + C_5 C_4 S_{23}),
 \end{aligned} \tag{c. 9}$$

C.2 変換行列の偏微分

上で求めたベース-指先間の関係式 T_6 に対して、行列各要素の関節変数に関する微分を算出する。これらの値は通常のコピ行列の計算に必要なもので、今後の機構解析においても使用頻度が高いことからここにまとめて記載する。ただし、以下で用いる記号例えば、 n_{xj} は $\left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_j}\right)$ を意味する。($j = 1 \sim 6$)

$$\begin{aligned}
 1) \quad n_x &= C_6 (C_5 C_4 C_{23} C_1 - S_5 S_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1) + S_6 (S_4 C_{23} C_1 + C_4 S_1), \\
 n_{x1} &= -C_6 (C_5 C_4 C_{23} S_1 - S_5 S_{23} S_1 + C_5 S_4 C_1) + S_6 (-S_4 C_{23} S_1 + C_4 C_1), \\
 n_{x2} &= C_6 (-C_5 C_4 S_{23} C_1 - S_5 C_{23} C_1) + S_6 (-S_4 S_{23} C_1) = n_{x3}, \\
 n_{x4} &= -C_6 (C_5 S_4 C_{23} C_1 + C_5 C_4 S_1) + S_6 (C_4 C_{23} C_1 - S_4 S_1), \\
 n_{x5} &= C_6 (-S_5 C_4 C_{23} C_1 - C_5 S_{23} C_1 + S_5 S_4 S_1), \\
 n_{x6} &= -S_6 (C_5 C_4 C_{23} C_1 - S_5 S_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1) + C_6 (S_4 C_{23} C_1 + C_4 S_1),
 \end{aligned} \tag{c. 10}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad n_y &= C_6 (C_5 C_4 C_{23} S_1 - S_5 S_{23} S_1 + C_5 S_4 C_1) + S_6 (S_4 C_{23} S_1 - C_4 C_1), \\
 n_{y1} &= C_6 (C_5 C_4 C_{23} C_1 - S_5 S_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1) + S_6 (S_4 C_{23} C_1 + C_4 S_1), \\
 n_{y2} &= -C_6 (C_5 C_4 S_{23} S_1 + S_5 C_{23} S_1) + S_6 (-S_4 S_{23} S_1) = n_{y3}, \\
 n_{y4} &= C_6 (-C_5 S_4 C_{23} S_1 + C_5 C_4 C_1) + S_6 (C_4 C_{23} S_1 + S_4 C_1), \\
 n_{y5} &= C_6 (-S_5 C_4 C_{23} S_1 - C_5 S_{23} S_1 - S_5 S_4 C_1), \\
 n_{y6} &= -S_6 (C_5 C_4 C_{23} S_1 - S_5 S_{23} S_1 + C_5 S_4 C_1) + C_6 (S_4 C_{23} S_1 - C_4 C_1),
 \end{aligned} \tag{c. 11}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad n_z &= -C_6 (C_5 C_4 S_{23} + S_5 C_{23}) - S_6 S_4 S_{23}, \\
 n_{z1} &= 0, \\
 n_{z2} &= -C_6 (C_5 C_4 C_{23} - S_5 S_{23}) - S_6 S_4 C_{23} = n_{z3}, \\
 n_{z4} &= C_6 C_5 S_4 S_{23} - S_6 C_4 S_{23}, \\
 n_{z5} &= -C_6 (-S_5 C_4 S_{23} + C_5 C_{23}), \\
 n_{z6} &= S_6 (C_5 C_4 S_{23} + S_5 C_{23}) - C_6 S_4 S_{23},
 \end{aligned} \tag{c. 12}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad o_x &= -S_6 (C_5 C_4 C_{23} C_1 - S_5 S_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1) + C_6 (S_4 C_{23} C_1 + C_4 S_1), \\
 o_{x1} &= S_6 (C_5 C_4 C_{23} S_1 - S_5 S_{23} S_1 + C_5 S_4 C_1) + C_6 (-S_4 C_{23} S_1 + C_4 C_1), \\
 o_{x2} &= S_6 (C_5 C_4 S_{23} C_1 + S_5 C_{23} C_1) + C_6 (-S_4 S_{23} C_1) = o_{x3}, \\
 o_{x4} &= S_6 (C_5 S_4 C_{23} C_1 + C_5 C_4 S_1) + C_6 (C_4 C_{23} C_1 - S_4 S_1), \\
 o_{x5} &= S_6 (S_5 C_4 C_{23} C_1 + C_5 S_{23} C_1 - S_5 S_4 S_1), \\
 o_{x6} &= -C_6 (C_5 C_4 C_{23} C_1 - S_5 S_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1) - S_6 (S_4 C_{23} C_1 + C_4 S_1),
 \end{aligned} \tag{c. 13}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad o_y &= -S_6 (C_5 C_4 C_{23} S_1 - S_5 S_{23} S_1 + C_5 S_4 C_1) + C_6 (S_4 C_{23} S_1 - C_4 C_1), \\
 o_{y1} &= -S_6 (C_5 C_4 C_{23} C_1 - S_5 S_{23} C_1 - C_5 S_4 S_1) + C_6 (S_4 C_{23} C_1 + C_4 S_1), \\
 o_{y2} &= S_6 (C_5 C_4 S_{23} S_1 + S_5 C_{23} S_1) + C_6 (-S_4 S_{23} S_1) = o_{y3}, \\
 o_{y4} &= S_6 (C_5 S_4 C_{23} S_1 - C_5 C_4 C_1) + C_6 (C_4 C_{23} S_1 + S_4 C_1), \\
 o_{y5} &= S_6 (S_5 C_4 C_{23} S_1 + C_5 S_{23} S_1 + S_5 S_4 C_1), \\
 o_{y6} &= -C_6 (C_5 C_4 C_{23} S_1 - S_5 S_{23} S_1 + C_5 S_4 C_1) - S_6 (S_4 C_{23} S_1 - C_4 C_1),
 \end{aligned} \tag{c. 14}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad o_z &= S_6 C_5 C_4 S_{23} - C_6 S_4 S_{23} + S_6 S_5 C_{23}, \\
 o_{z1} &= 0, \\
 o_{z2} &= S_6 C_5 C_4 C_{23} - C_6 S_4 C_{23} - S_6 S_5 S_{23} = o_{z3}, \\
 o_{z4} &= -S_6 C_5 S_4 S_{23} - C_6 C_4 S_{23}, \\
 o_{z5} &= -S_6 S_5 C_4 S_{23} + S_6 C_5 C_{23}, \\
 o_{z6} &= C_6 C_5 C_4 S_{23} + S_6 S_4 S_{23} + C_6 S_5 C_{23},
 \end{aligned} \tag{c. 15}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad a_x &= -(S_5 C_4 C_{23} + C_5 S_{23}) C_1 + S_5 S_4 S_1, \\
 a_{x1} &= (S_5 C_4 C_{23} - C_5 S_{23}) S_1 + S_5 S_4 C_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{x2} &= -(-s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23}) c_1 = a_{x3} , \\
 a_{x4} &= s_5 s_4 c_{23} c_1 + s_5 c_4 s_1 , \\
 a_{x5} &= -(c_5 c_4 c_{23} - s_5 s_{23}) c_1 + c_5 s_4 s_1 , \\
 a_{x6} &= 0 , \\
 8) \quad a_y &= -(s_5 c_4 c_{23} + c_5 s_{23}) s_1 - s_5 s_4 c_1 , \\
 a_{y1} &= -(s_5 c_4 c_{23} + c_5 s_{23}) c_1 + s_5 s_4 s_1 , \\
 a_{y2} &= (s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23}) s_1 = a_{y3} , \\
 a_{y4} &= s_5 s_4 c_{23} s_1 - s_5 c_4 c_1 , \\
 a_{y5} &= -(c_5 c_4 c_{23} - s_5 s_{23}) s_1 - c_5 s_4 c_1 , \\
 a_{y6} &= 0 , \\
 9) \quad a_z &= s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23} , \\
 a_{z1} &= 0 , \\
 a_{z2} &= s_5 c_4 c_{23} + c_5 s_{23} = a_{z3} , \\
 a_{z4} &= -s_5 s_4 s_{23} , \\
 a_{z5} &= c_5 c_4 s_{23} + s_5 c_{23} , \\
 a_{z6} &= 0 ,
 \end{aligned}
 \tag{c.16}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad P_x &= a_6 c_6 (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) + a_6 s_6 (s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1) \\
 &\quad - d_6 (s_5 c_4 c_{23} c_1 + c_5 s_{23} c_1 - s_5 s_4 s_1) + a_5 (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) \\
 &\quad + d_4 s_{23} c_1 + a_2 c_2 c_1 , \\
 P_{x1} &= -a_6 c_6 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) - a_6 s_6 (s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1) \\
 &\quad + d_6 (s_5 c_4 c_{23} s_1 + c_5 s_{23} s_1 + s_5 s_4 c_1) - a_5 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) \\
 &\quad - d_4 s_{23} s_1 - a_2 c_2 s_1 , \\
 P_{x2} &= -a_6 c_6 (c_5 c_4 s_{23} c_1 + s_5 c_{23} c_1) + a_6 s_6 (-s_4 s_{23} c_1) + d_6 (s_5 c_4 s_{23} c_1 - c_5 c_{23} c_1) \\
 &\quad - a_5 (c_5 c_4 s_{23} c_1 + s_5 c_{23} c_1) + d_4 c_{23} c_1 - a_2 s_2 c_1 , \\
 P_{x3} &= P_{x2} + a_2 s_2 c_1 , \\
 P_{x4} &= -a_6 c_6 (c_5 s_4 c_{23} c_1 + c_5 c_4 s_1) + a_6 s_6 (c_4 c_{23} c_1 - s_4 s_1) - d_6 (s_5 s_4 c_{23} c_1 + s_5 c_4 s_1) \\
 &\quad - a_5 (c_5 s_4 c_{23} c_1 + c_5 c_4 s_1) , \\
 P_{x5} &= -a_6 c_6 (s_5 c_4 c_{23} c_1 + c_5 s_{23} c_1 - s_5 s_4 s_1) - d_6 (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) \\
 &\quad - a_5 (c_5 s_{23} c_1 - s_5 s_4 s_1 + s_5 c_4 c_{23} c_1) , \\
 P_{x6} &= -a_6 s_6 (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) + a_6 c_6 (s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1) , \\
 11) \quad P_y &= a_6 c_6 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) + a_6 s_6 (s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1) , \\
 &\quad + a_5 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) - d_6 (s_5 c_4 c_{23} s_1 + c_5 s_{23} s_1 + s_5 s_4 c_1) \\
 &\quad + d_4 s_{23} s_1 + a_2 c_2 s_1 , \\
 P_{y1} &= a_6 c_6 (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) + a_6 s_6 (s_4 c_{23} c_1 + c_4 s_1) \\
 &\quad + a_5 (c_5 c_4 c_{23} c_1 - s_5 s_{23} c_1 - c_5 s_4 s_1) - d_6 (s_5 c_4 c_{23} c_1 + c_5 s_{23} c_1 - s_5 s_4 s_1) \\
 &\quad + d_4 s_{23} c_1 + a_2 c_2 c_1 , \\
 P_{y2} &= -a_6 c_6 (c_5 c_4 s_{23} s_1 + s_5 c_{23} s_1) + a_6 s_6 (-s_4 s_{23} s_1) - a_5 (c_5 c_4 s_{23} s_1 + s_5 c_{23} s_1) \\
 &\quad - d_6 (-s_5 c_4 s_{23} s_1 + c_5 c_{23} s_1) + d_4 c_{23} s_1 - a_2 s_2 s_1 ,
 \end{aligned}
 \tag{c.17}$$

$$\begin{aligned}
 &\tag{c.18} \\
 &\tag{c.19}
 \end{aligned}$$

$$P_{y3} = P_{y2} + a_2 s_2 s_1, \quad (c.20)$$

$$P_{y4} = -a_6 c_6 (c_5 s_4 c_{23} s_1 - c_5 c_4 c_1) + a_6 s_6 (c_4 c_{23} s_1 + s_4 c_1) - a_5 (c_5 s_4 c_{23} s_1 - c_5 c_4 c_1) - d_5 (-s_5 s_4 c_{23} s_1 + s_5 c_4 c_1),$$

$$P_{y5} = -a_6 c_6 (s_5 c_4 c_{23} s_1 + c_5 s_{23} s_1 + s_5 s_4 c_1) - a_5 (s_5 c_4 c_{23} s_1 + c_5 s_{23} s_1 + s_5 s_4 c_1) - d_6 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1),$$

$$P_{y6} = -a_6 s_6 (c_5 c_4 c_{23} s_1 - s_5 s_{23} s_1 + c_5 s_4 c_1) + a_6 c_6 (s_4 c_{23} s_1 - c_4 c_1),$$

$$12) P_z = -a_6 c_6 (c_5 c_4 s_{23} + s_5 c_{23}) - a_6 s_6 (s_4 s_{23}) + d_6 (s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23}) - a_5 (c_5 c_4 s_{23} + s_5 c_{23}) + d_4 c_{23} - a_2 s_2 + d_1,$$

$$P_{z1} = 0,$$

$$P_{z2} = -a_6 c_6 (c_5 c_4 c_{23} - s_5 s_{23}) - a_6 s_6 (s_4 c_{23}) + d_6 (s_5 c_4 c_{23} + c_5 s_{23}) - a_5 (c_5 c_4 c_{23} - s_5 s_{23}) - d_4 s_{23} - a_2 c_2, \quad (c.21)$$

$$P_{z3} = P_{z2} + a_2 c_2,$$

$$P_{z4} = a_6 c_6 c_5 s_4 s_{23} - a_6 s_6 c_4 s_{23} - d_6 s_5 s_4 s_{23} + a_5 c_5 s_4 s_{23},$$

$$P_{z5} = -a_6 c_6 (-s_5 c_4 s_{23} + c_5 c_{23}) + d_6 (c_5 c_4 s_{23} + s_5 c_{23}) - a_5 (-s_5 c_4 s_{23} + c_5 c_{23}),$$

$$P_{z6} = a_6 s_6 (c_5 c_4 s_{23} + s_5 c_{23}) - a_6 c_6 s_4 s_{23},$$

Table a.1 Link Parameters for a Six-Link Manipulator

関節	関節角	ねじれ角 α_i		リンク長さ a_i		x 軸間の距離 d_i	
		α_i					
1	θ_1	α_1	-90°	a_1	0 (mm)	d_1	700 (mm)
2	θ_2	α_2	0°	a_2	500 (mm)	d_2	0 (mm)
3	θ_3	α_3	90°	a_3	0 (mm)	d_3	0 (mm)
4	θ_4	α_4	-90°	a_4	0 (mm)	d_4	350 (mm)
5	θ_5	α_5	-90°	a_5	150 (mm)	d_5	0 (mm)
6	θ_6	α_6	0°	a_6	280 (mm)	d_6	-115 (mm)

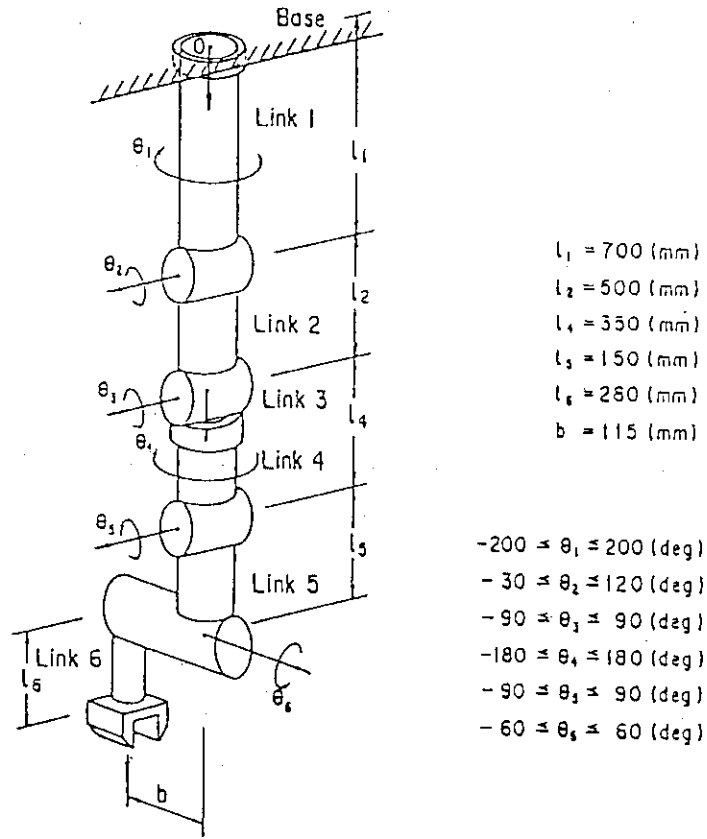


Fig.a.1 A Six-Link Manipulator Studied

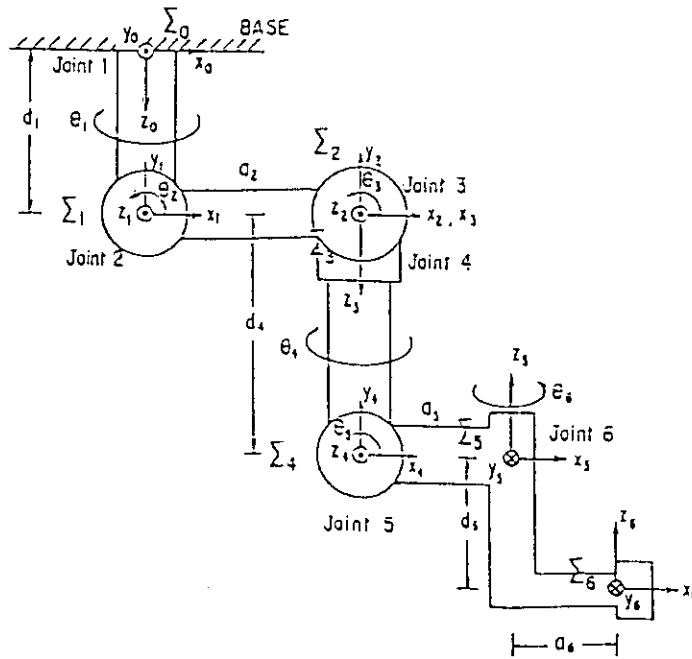


Fig.a.2 A Six-Link Manipulator with Arbitrary Link Co-ordinate Systems