

JAERI - M
89-021

半陰解法による3次元非線形抵抗性MHDコード

1989年3月

山口 祐司*・栗田 源一・竹田 辰興

JAERI-M レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）
あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城
県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department
of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun,
Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1989

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 山田軽印刷所

半陰解法による3次元非線形抵抗性MHDコード

日本原子力研究所那珂研究所核融合研究部

山口 祐司^{*}・栗田 源一・竹田 辰興

(1989年2月1日受理)

抵抗性磁気流体(MHD)方程式の完全系に基づく3次元非線形抵抗性MHDコードを開発した。本コードは抵抗性MHD方程式の完全系を簡約化せずに直接,半陰解法を用いて円柱配位で解くものである。これにより簡約方程式系では表わせなかったトカマクプラズマにおける巨視的現象を表わすMHD計算を効率よく実施することができる。 $m/n=2/1$ 及び $m/n=1/1$ ヘリシティの非線形抵抗性計算を行い妥当な結果を得た。

3-Dimensional Non-Linear Resistive MHD Code
Using Semi-Implicit Method

Yuji YAMAGUCHI*, Gen-ichi KURITA and Tatsuoki TAKEDA

Department of Thermonuclear Fusion Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received February 1, 1989)

The 3-dimensional non-linear resistive MHD code based on full set of resistive MHD equations is developed. The code solves full set of resistive MHD equations without reducing directly by means of semi-implicit method in cylindrical geometry. Effective MHD computation can be performed and macroscopic phenomena in tokamak plasma that cannot be expressed by reduced set of MHD equations can be seen. Non-linear calculations of $m=2/n=1$ and $m=1/n=1$ resistive modes are carried out and reasonable results are obtained.

Keywords: Non-Linear MHD Code, Resistive MHD Equations, Tokamak Plasma,
Semi-Implicit Method, Cylindrical Geometry

* On leave from MEITEC Co., Ltd.

目 次

1. はじめに	1
2. 基礎方程式	2
3. 数値計算法	4
3.1 空間離散化	4
3.2 時間離散化	5
4. テスト計算	7
4.1 線形成長率	7
4.2 非線形抵抗性MHD計算	7
5. ま と め	8
謝 辞	9
参 考 文 献	9

Contents

1. Introduction	1
2. Basic Equations	2
3. Numerical Methods	4
3.1 Spatial Discretization	4
3.2 Temporal Discretization	5
4. Numerical Test Calculations	7
4.1 Linear Growth Rate	7
4.2 Non-Linear Resistive MHD Calculations	7
5. Summary	8
Acknowledgements	9
References	9

1. は じ め に

磁場閉込による核融合研究において、プラズマの巨視的挙動を表現するのに適している磁気流体力学方程式（以下、MHD方程式）を使ったシミュレーションが広く行われている。特にトカマクにおけるテアリング不安定性をそれに伴うディスラプション等の現象に対する非線形ダイナミックスの研究は一層、重要となっている。

従来、トカマクの非線形シミュレーションではMHD方程式は簡約化されたものが多く用いられてきた。^[1, 2, 3] しかし、簡約方程式では逆アスペクト比（ ϵ ）の2乗の項が解析的に取除かれており、そのため早い圧縮性モードと共に音波が含まれていない為、より詳細な物理現象を記述するのに適していない。また、逆アスペクト比による展開を用いる為、トーラス効果を正確に取り入れることが困難である。後者の問題を解決するためには逆アスペクト比の展開を使わず、非圧縮性のみを仮定した新簡約MHD方程式を使う方法^[4, 5] が考えられているが、簡約化を行わない元の圧縮性の抵抗性MHD方程式を時間発展方程式として直接解くことができれば両者の問題の解決となる。

圧縮性の抵抗性MHD方程式を使う場合、方程式中に多くの波動を含み、広く分散するタイム・スケールを持つ為、陽解法による差分スキームでは早い圧縮性モードによって課せられる Courant - Friedrichs - Lewy (CFL) 条件により、かなり小さい時間ステップ幅を採用しなければならず効率的ではない。将来的には、この陽解法によるコードを使ったシミュレーションが可能であるかもしれないが、現在の計算機的能力を考えれば今のところ不可能である。そこで、このCFL条件を取り除く為、圧縮性モードを何らかの形で陰解法で解くことが必要となる。

この方法として、圧縮波を別の方程式で記述し、陽解法で解かれる元のMHD方程式と連立させて、その圧縮波の方程式のみを陰解法で解く方法^[6, 7]、また、元のMHD方程式の運動方程式の両辺に圧縮波及びシアールフヴェン波に相当する項を強制的につけ加え、その項のみを陰解法で解く方法“半陰解法”^[8]がある。前者は、方程式の数が増え、かつ、トーラス配位にした場合、コードがより複雑になるのに対し、後者の方法はつけ加える項が比較的単純な形をしており、しかも圧縮性のみならずシアールフヴェン波によるCFL条件も取り除くことができるという利点を持つ。

我々は、最終的には3次元圧縮性MHD方程式をトーラス配位で解くことを目的としているが、ここではその第1段階として、上述の半陰解法を用いて3次元圧縮性MHD方程式を円柱配位で解くコードを開発する。以下、第2章に基礎方程式、第3章に数値計算法を述べ、第4章に計算結果の例を示す。また、第5章はまとめにあてる。

2. 基礎方程式

我々の対象とするトカマクプラズマは図1のように円柱座標 (R, Z, φ) をとると、 Z 軸を対称軸とするトーラス状をしている。この装置は φ 方向（トロイダル方向）に強いトロイダル磁場 (B^φ) をかけ、同時に同方向に大きなプラズマ電流 (J^φ) を流して θ 方向（ポロイダル方向）にポロイダル磁場 (B^θ) をつくり、この2つの磁場によってプラズマを安定に閉込める。ポロイダル磁場による磁気面は $\psi = \text{const.}$ (ψ はポロイダル磁束を表す) の面で表わされ、磁気軸 ($R=R_0$) を中心とする入れ子状の曲線群を作る。 $r = \text{const.}$ がこの磁気面に一致するように、また、磁力線が直線になるようにポロイダル角 (θ) をとって、曲線座標 (r, θ, φ) を作る。一般に円柱座標 (R, Z, φ) と曲線座標 (r, θ, φ) の関係は以下のようになる。

$$R = R(r, \theta), \quad (2.1)$$

$$Z = Z(r, \theta), \quad (2.2)$$

$$\varphi = \varphi, \quad (2.3)$$

ここで、 $R(r, \theta)$ 及び $Z(r, \theta)$ の具体的な形は下記の平衡条件を解いて決まる。

$$\vec{\nabla} P = \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.4)$$

ここでは、円柱配位であるので逆アスペクト比 ($\epsilon = a/R_0$) が無限小 ($\epsilon \rightarrow 0$) の極限をとるから、(2.1) 及び (2.2) 式は下記のようになる。

$$R(r, \theta) = r \cos \theta, \quad (2.5)$$

$$Z(r, \theta) = r \sin \theta. \quad (2.6)$$

これらは、 R_0 を中心とする同心円で長さ $2\pi R_0$ の円柱プラズマとなる。ただし、 a はプラズマ小半径、 R_0 はプラズマ大半径である。

抵抗性MHD方程式の完全系を無次元化することで下記の方程式系を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} P + \Gamma P \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{B} - \eta \vec{J}), \quad (2.10)$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (2.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.12)$$

ここで、 ρ はプラズマ密度、 \vec{V} は速度、 \vec{B} は磁場、 P は圧力、 \vec{J} はプラズマ電流、 η は抵抗、 I' は比熱比である。無次元化のための変換は下記のとおりである。

$$\frac{r}{a} \rightarrow r, \quad \frac{\vec{B}}{a B^{\theta}(a)/R_0} \rightarrow \vec{B}, \quad \frac{\vec{V}}{V_A} \rightarrow \vec{V},$$

$$V_A = \frac{a B^{\theta}(a)/R_0}{\sqrt{\rho(0)}} \quad (\text{アルフヴェン速度})$$

トーラスプラズマの解析を行うには、平衡方程式を解いて曲線座標を定め、これに基づいて、(2.7)～(2.12)式を解けばよい。ここでは簡単の為に円柱プラズマについて解くこととし、座標系としては(2.5)，(2.6)式に示したものを使う。更に、プラズマ密度 ρ の分布はMHD現象のみを見る場合、本質的な影響を与えないことから、 $\rho \equiv 1$ とおいて、(2.1)式を消去する。またプラズマ抵抗 η は、

$$\eta = \eta(r) = \frac{E}{J_0^{\varphi}(t=0)} \quad (2.13)$$

とおいて、小半径 r のみの関数とする。ここで J_0^{φ} は $m/n=0/0$ のモードの φ 方向の電流を E は一周電圧を表わす。

$r=1$ における境界は導電壁であるとし、全プラズマ電流が一定である条件を課すことによって \vec{B} , \vec{V} , P の境界条件は、次のとおり表わすことができる。

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.14)$$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.15)$$

$$P = 0 \quad (2.16)$$

$$\oint B^{\theta} d\theta = I_p \quad (2.17)$$

ここで、 \vec{n} は境界上での法線ベクトル、 I_p は全プラズマ電流を表わす。

本コードにおいては平衡量は以下の式により計算する。

$$B_0^{\varphi} = R_0 \quad (2.18)$$

$$B_0^{\theta} = \frac{r}{q(r)} \quad (2.19)$$

$$J_0^{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_0^{\theta})}{\partial r} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} = - \frac{B_0^{\theta}}{r} \frac{\partial (r B_0^{\theta})}{\partial r} \quad (2.21)$$

ここで (2.20) 式は, $\vec{J}_0 = \nabla \times \vec{B}_0$ より, (2.21) 式は, $\nabla P = \vec{J}_0 \times \vec{B}_0$ より導出し, また安全係数 $q(r)$ は以下の様に与える。

$$q(r) = q_0 [1 + (r/r_0)^{2\lambda}]^{1/\lambda} \quad (2.22)$$

q_0 は磁気軸 ($r=0$) での安全係数の値を, λ はプラズマ電流の集中度を表わす。また, r_0 は電流チャンネルの幅を表わすパラメータである。この q の分布より B^θ が決まり, (2.21) 式を解いて $P_0(r)$ が求まる。

3. 数 値 計 算 法

3.1 空間離散化

トカマク装置はポロイダル及びトロイダル方向に周期的な特質を持っているので, すべての変数を次の様にフーリエ展開する。

$$f(r, \theta, \varphi; t) = \sum_{m,n} f_{mn}(r; t) e^{i(m\theta - n\varphi)} \quad (3.1)$$

ここで, m, n はそれぞれポロイダル, トロイダル方向の波数を表す。小半径 r 方向には, グリッドを切って離散化する。グリッドは非等間隔にも切れ, あるグリッド上の r に関する 1 階微分及び 2 階微分は隣りの 2 つのグリッドを含めた 3 点での関数値を使って, 関数を r の 2 次の多項式で近似して求める。等間隔グリッドの場合, 通常を中心差分と一致する。

フーリエ展開した各成分について境界条件は次のように表わせる。

(1) $m=0$ モードについて

$r=0; B^r=0$	$r=a; B^r=0$
$B^\theta=0$	$B^\theta=B^\theta(t=0)$
$\frac{\partial B^\varphi}{\partial r}=0$	$\frac{\partial B^\varphi}{\partial r}=0$
$V^r=0$	$V^r=0$
$V^\theta=0$	$\frac{\partial V^\theta}{\partial r}=0$
$V^\varphi=0$	$\frac{\partial V^\varphi}{\partial r}=0$
$\frac{\partial P}{\partial r}=0$	$P=0$

(2) $m=1$ モードについて

$r=0; \frac{\partial B^r}{\partial r}=0$	$r=a; B^r=0$
--	--------------

ここで (2.20) 式は, $\vec{J}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{B}_0$ より, (2.21) 式は, $\vec{\nabla} P = \vec{J}_0 \times \vec{B}_0$ より導出し, また安全係数 $q(r)$ は以下の様に与える。

$$q(r) = q_0 \{1 + (r/r_0)^{2\lambda}\}^{1/\lambda} \quad (2.22)$$

q_0 は磁気軸 ($r=0$) での安全係数の値を, λ はプラズマ電流の集中度を表わす。また, r_0 は電流チャンネルの幅を表わすパラメータである。この q の分布より B^θ が決まり, (2.21) 式を解いて $P_0(r)$ が求まる。

3. 数 値 計 算 法

3.1 空間離散化

トカマク装置はポロイダル及びトロイダル方向に周期的な特質を持っているので, すべての変数を次の様にフーリエ展開する。

$$f(r, \theta, \varphi; t) = \sum_{m,n} f_{mn}(r; t) e^{i(m\theta - n\varphi)} \quad (3.1)$$

ここで, m, n はそれぞれポロイダル, トロイダル方向の波数を表す。小半径 r 方向には, グリッドを切って離散化する。グリッドは非等間隔にも切れ, あるグリッド上の r に関する 1 階微分及び 2 階微分は隣りの 2 つのグリッドを含めた 3 点での関数値を使って, 関数を r の 2 次の多項式で近似して求める。等間隔グリッドの場合, 通常を中心差分と一致する。

フーリエ展開した各成分について境界条件は次のように表わせる。

(1) $m=0$ モードについて

$r=0; B^r=0$	$r=a; B^r=0$
$B^\theta=0$	$B^\theta=B^\theta(t=0)$
$\frac{\partial B^\varphi}{\partial r}=0$	$\frac{\partial B^\varphi}{\partial r}=0$
$V^r=0$	$V^r=0$
$V^\theta=0$	$\frac{\partial V^\theta}{\partial r}=0$
$V^\varphi=0$	$\frac{\partial V^\varphi}{\partial r}=0$
$\frac{\partial P}{\partial r}=0$	$P=0$

(2) $m=1$ モードについて

$r=0; \frac{\partial B^r}{\partial r}=0$	$r=a; B^r=0$
--	--------------

$$\begin{array}{ll}
B^\theta = -B_r & \frac{\partial B^\theta}{\partial r} = 0 \\
B^\varphi = 0 & \frac{\partial B^\varphi}{\partial r} = 0 \\
\frac{\partial V^r}{\partial r} = 0 & V^r = 0 \\
V^\theta = V^r & \frac{\partial V^\theta}{\partial r} = 0 \\
V^\varphi = 0 & \frac{\partial V^\varphi}{\partial r} = 0 \\
P = 0 & P = 0
\end{array}$$

(3) $m \geq 2$ モードについて

$$\begin{array}{ll}
r = 0 ; B^r = 0 & r = a ; B^r = 0 \\
B^\theta = 0 & \frac{\partial B^\theta}{\partial r} = 0 \\
B^\varphi = 0 & \frac{\partial B^\varphi}{\partial r} = 0 \\
V^r = 0 & V^r = 0 \\
V^\theta = 0 & \frac{\partial V^\theta}{\partial r} = 0 \\
V^\varphi = 0 & \frac{\partial V^\varphi}{\partial r} = 0 \\
P = 0 & P = 0
\end{array}$$

上記の方程式系について時間積分を行う際に磁場に対する条件式((2.12)式) が常に満されていることが必要である。この式が数値的に成り立つためには $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}) \equiv 0$ より \vec{B} 及び \vec{B} の変化分がベクトルの回転の形で計算されなければならない。本コードでは \vec{B} の摂動及び時間発展による変化分の計算はベクトルの回転の形で行う。従って $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ の条件は数値誤差の範囲でいつも成立する。

3.2 時間離散化

半陰解法による予測修正子差分スキームを以下に示す。

(FIRST STEP)

$$\vec{V}^* = \vec{V}^n + \alpha \Delta t [(\vec{V}^n \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^n + \vec{J}^n \times \vec{B}^n - \vec{\nabla} P^n + V_s \Delta \vec{V}] \quad (3.2)$$

$$\vec{B}^* = \vec{B}^n + \alpha \Delta t [\vec{\nabla} \times (\vec{V}^n \times \vec{B}^n)] \quad (3.3)$$

$$P^* - \frac{1}{2} \alpha \Delta t D_f \Delta P^* = P^n - \alpha \Delta t (\vec{V}^n \cdot \vec{\nabla} P^n + \Gamma P^n \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^n) + \frac{1}{2} \alpha \Delta t D_f \Delta P^n, \quad (3.4)$$

$$\vec{J}^* = \vec{\nabla} \times \vec{B}^*, \quad (3.5)$$

(SECOND STEP)

$$\begin{aligned} \vec{V}^{n+1} &= (\Delta t)^2 \{ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} (\vec{V}^{n+1} \times \vec{C}_0) \} \times \vec{C}_0 - \frac{1}{2} \Delta t V_s \Delta \vec{V}^{n+1} \\ &= \vec{V}^n + \Delta t [(\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^* + \vec{J}^* \times \vec{B}^* - \vec{\nabla} P^*] - \Delta t^2 \{ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{V}^n \times \vec{C}_0) \} \times \vec{C}_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta t V_s \Delta \vec{V}^n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\vec{B}^{**} = \vec{B}^n + \frac{1}{2} \Delta t \{ \vec{\nabla} \times [(\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n) \times \vec{B}^*] \}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} P^{n+1} - \frac{1}{2} \Delta t D_f \Delta P^{n+1} &= P^n - \frac{1}{2} \Delta t [(\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n) \cdot \vec{\nabla} P^* + \Gamma P^* \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}^{n+1} + \vec{V}^n)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta t D_f \Delta P^*, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\vec{B}^{n+1} = \vec{B}^{**} - \Delta t \vec{\nabla} \times [\eta(r) \vec{\nabla} \times \vec{B}^{**}], \quad (3.9)$$

$$\vec{J}^{n+1} = \vec{\nabla} \times \vec{B}^{n+1}. \quad (3.10)$$

ここで、 V_s は粘性係数、 D_f は拡散係数、 Δt は時間ステップ幅、 α は予測子係数、 \vec{C}_0 は半陰解項係数ベクトル、 n 及び $n+1$ は時間を表わす肩文字、 $*$ 及び $**$ は予測時間を表わす肩文字、 Δ はラプラシアン演算子である。この差分スキームにおいて、早い圧縮性モードに対する CFL 条件を満足する為、加えられた半陰解項を以下に示す。

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{V}^{n+1} \times \vec{C}_0)] \times \vec{C}_0; C_{ij} = \delta_{ij} C_{ij} \quad (3.11)$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。この項は MHD 基礎方程式を線形化し、一様な磁場・密度・圧力を仮定することで得られる。 \vec{C}_0 は各時間ステップにおいて定義されるベクトルで \vec{B} の最大の絶対値を持つモードの間の最大値とする。即、

$$\vec{C}_0 = \vec{C}_0(r) = \text{MAX} (\vec{B}(r)_{m,n}) \quad (3.12)$$

この条件は、方程式 (3.2) ~ (3.9) 式を単純化したものの増幅要素行列の固有値が 1 以下でなければならないという数値安定条件からでてくる^[8]。

基礎方程式 (2.8), (2.9) 式を数値的に解く際、高い m/n モードの関数の特異点付近のふるまいをなめらかにする為に (3.2) 式及び (3.6) 式に、 $V_s \Delta \vec{V}$ の項を (3.4) 式及び (3.8) 式に $D_f \Delta P$ の項を人為的に加える。実際の値としては、 η_0 と同じオーダーの値を用いた。

4. テ ス ト 計 算

4.1 線形成長率

非線形計算に入る前に線形計算の範囲内での成長率が固有値解析法による結果に等しいことを確認するために以下の2ケースについて計算を行った。径方向グリッド数は201でまた時間ステップ幅は $\Delta t = 0.01$ とした。

まず、一様電流で理想MHDの場合について線形計算を行った。計算パラメータは $q \equiv 1.96$, $R_0 = 5$, $m/n = 2/1$ 及び $I' = 5/3$ とした。得られた線形成長率は $\gamma = 6.85 \times 10^{-2}$ となり、別の固有値解析法によるコードで計算された値 $\gamma = 6.74 \times 10^{-2}$ とほぼ一致した。

次に、プラズマの有限抵抗を考慮した抵抗性MHDのテアリングモードの計算を行った。 $m \geq 2$ のテアリングモードの線形成長率は次式で与えられる^[9]。

$$\gamma = 0.5 \left[m \Delta'^2 \frac{q'}{q} \right]^{2/5} \eta^{3/5} \Big|_{r=r_s} \quad (4.1)$$

ここで、

$$\Delta' = \frac{\psi_{r_s+\delta} - \psi_{r_s-\delta}}{\psi} \Big|_{\delta \rightarrow 0} \quad (4.2)$$

(4.1)及び(4.2)式で、 r_s は特異点を表わし、 ψ はポロイダル磁束を表わす。テアリングモードの計算パラメータは、(2.22)式で $q_0 = 1.38$, $\lambda = 4$, $r_0 = 0.6$ とし、 $R_0 = 5$ を選んだ。図2に計算された成長率の η 依存性(○印)及び(4.1)式による解析的な成長率(破線)を示す。 η が大きな領域では両者はよく一致している。 η がある程度小さくなるに従って計算値は理論値よりも若干高い値をとるが、これは η が小さくなると固有関数が特異点の付近で局在化し、径方向のグリッド数が少なすぎて、この固有関数を充分よく表現できないためと思われる。

以上のように理想MHD及び抵抗性MHD計算におけるシミュレーションの結果得られた成長率は、固有値解析法による数値解析成長率及び解析的な値にほぼ等しく線形計算の範囲内で数値解析コードは原方程式を正しく記述していることが確認できた。

4.2 非線形抵抗性MHD計算

非線形計算の例として $m/n = 2/1$ ヘリシティの時間発展及び $m/n = 1/1$ ヘリシティの時間発展の計算を行った。

(1) $m/n = 2/1$ ヘリシティの非線形時間発展

平衡は4.1の線形抵抗性MHD計算と同じもの($q_0 = 1.38$, $\lambda = 4$, $r_0 = 0.6$, $R_0 = 5$, $\eta = 5 \times 10^{-6}$)を使い、 $m/n = 0/0, 2/1, 4/2, 6/3, 8/4$ の5モードの時間発展を計算し

図3に(a)磁気エネルギー及び(b)運動エネルギーの時間変化を示す。破線は $m/n=0/0$, 実線はその他のモードの和のエネルギーを示す。ただし $m/n=0/0$ は変動分の時間変化を示す。簡約系での計算とは異なって圧縮性の効果で $m/n=0/0$ の運動エネルギーの時間変化が観察される。 $t=350$ 付近で磁気エネルギーの飽和がみられる。図4, 図5にそれぞれ等ヘリカル磁束面及び磁気島幅の時間変化を示す。図5より $t=300$ 付近で磁気島の幅がオーバーシュートしているが, これはモード数が少ないためで, 飽和した磁気島の幅は約 $0.35a$, Δ' コードで求めたもの($0.38a$)とほぼ一致している。

(2) $m/n=1/1$ ヘリシティの非線形時間発展

平衡は, $q_0=0.5$, $\lambda=2$, $r_0=0.50$, $R_0=10$, $\eta=1\times 10^{-4}$ とし, $m/n=0/0, 1/1, 2/2, 3/3, 4/4$ の5モードの時間発展を計算した。

図6に(a)磁気エネルギー及び(b)運動エネルギーの時間変化を示す。線形成長している領域($t<100$)から求めた成長率は $\gamma=0.0796$ となり, これはB. Coppiによる $m=1$ 抵抗性モードの解析的な式^[10]によって求めたもの($\gamma=0.0804$)とほぼ一致する。このことは, この平衡及びプラズマ抵抗の値に対してはモードが理想MHDではなくて抵抗性MHDモード($\gamma\propto\eta^{1/3}$)であることを示している。図7, 図8に等ヘリカル磁束面及び磁気島の時間変化を示す。図7より初期に与えた $m=1$ の磁気島が次第に大きくなり, 最初, 中心付近にあったヘリカル磁束を追出して, 特異点内部のヘリカル磁束を平坦化して同心円に近いヘリカル磁束分布にもどって, Kadomtsevが最初に提案した内部デイスラプション^[11]を起していることがわかる。

5. ま と め

完全系の抵抗性MHD方程式を直接解く非線形MHDコードを開発した。圧縮波のCFL条件を取除く半陰解法を用いて陽解法の時間ステップ幅に比べて充分大きな時間ステップ幅で数値時間積分を安定に実行できた。

数値微分のとりの問題で磁場拡散の項を陰解法あるいは半陰解法で解くことができなかった。しかし, 理想MHDの場合にシア・アルフヴェン波を越えた大きな時間ステップ幅をとると, 線形成長率が充分良く表現できないため時間ステップ幅はある値以下に制限される。

ここで開発したコードは, 円形断面の円柱配位のものであるが, 今後はこれをトーラス配位, 更に非円形断面にしてより実際あるいは複雑な形状のトカマクに対して, 非線形MHD計算ができるようにしていく予定である。

図3に(a)磁気エネルギー及び(b)運動エネルギーの時間変化を示す。破線は $m/n=0/0$, 実線はその他のモードの和のエネルギーを示す。ただし $m/n=0/0$ は変動分の時間変化を示す。簡約系での計算とは異なって圧縮性の効果で $m/n=0/0$ の運動エネルギーの時間変化が観察される。 $t=350$ 付近で磁気エネルギーの飽和がみられる。図4, 図5にそれぞれ等ヘリカル磁束面及び磁気島幅の時間変化を示す。図5より $t=300$ 付近で磁気島の幅がオーバーシュートしているが, これはモード数が少ないためで, 飽和した磁気島の幅は約 $0.35a$, Δ' コードで求めたもの($0.38a$)とほぼ一致している。

(2) $m/n=1/1$ ヘリシティの非線形時間発展

平衡は, $q_0=0.5$, $\lambda=2$, $r_0=0.50$, $R_0=10$, $\eta=1\times 10^{-4}$ とし, $m/n=0/0, 1/1, 2/2, 3/3, 4/4$ の5モードの時間発展を計算した。

図6に(a)磁気エネルギー及び(b)運動エネルギーの時間変化を示す。線形成長している領域($t<100$)から求めた成長率は $\gamma=0.0796$ となり, これはB. Coppiによる $m=1$ 抵抗性モードの解析的な式^[10]によって求めたもの($\gamma=0.0804$)とほぼ一致する。このことは, この平衡及びプラズマ抵抗の値に対してはモードが理想MHDではなくて抵抗性MHDモード($\gamma\propto\eta^{1/3}$)であることを示している。図7, 図8に等ヘリカル磁束面及び磁気島の時間変化を示す。図7より初期に与えた $m=1$ の磁気島が次第に大きくなり, 最初, 中心付近にあったヘリカル磁束を追出して, 特異点内部のヘリカル磁束を平坦化して同心円に近いヘリカル磁束分布にもどって, Kadomtsevが最初に提案した内部デイスラプション^[11]を起していることがわかる。

5. ま と め

完全系の抵抗性MHD方程式を直接解く非線形MHDコードを開発した。圧縮波のCFL条件を取除く半陰解法を用いて陽解法の時間ステップ幅に比べて充分大きな時間ステップ幅で数値時間積分を安定に実行できた。

数値微分のとりの問題で磁場拡散の項を陰解法あるいは半陰解法で解くことができなかった。しかし, 理想MHDの場合にシア・アルフヴェン波を越えた大きな時間ステップ幅をとると, 線形成長率が充分良く表現できないため時間ステップ幅はある値以下に制限される。

ここで開発したコードは, 円形断面の円柱配位のものであるが, 今後はこれをトーラス配位, 更に非円形断面にしてより実際あるいは複雑な形状のトカマクに対して, 非線形MHD計算ができるようにしていく予定である。

謝

辞

本報告書を作成するにあたって有益な議論と御教示をいただいた安積正史主任研究員また津田孝主任研究員をはじめとする核融合研究部理論解析研究室の方々に深く感謝いたします。また、終始一貫して御激励をいただいた田中正俊核融合研究所所長に感謝いたします。

参 考 文 献

- [1] H.R. Strauss, Phys. Fluids 19 (1976) 134.
- [2] M.N. Rosenbluth, D.A. Monticello, H.R. Strauss, Phys. Fluids 19 (1976) 1987.
- [3] B.V. Waddell, B. Carreras, H.R. Hicks, J.A. Holmes, Phys. Fluids 22 (1979) 896.
- [4] M. Azumi, et al., in "Proc. of the U.S.-Japan Workshop on 3-D MHD Simulation" Nagoya, Japan, (1983) IPPJ-632 1.
- [5] L.A. Charlton, J.A. Holmes, H.R. Hicks, V.E. Lynch, B.A. Carreras, J. Comput. Phys. 63 (1986) 107.
- [6] S.C. Jardin, J.L. Johnson, J.M. Greene, R.C. Grimm, J. Comput. Phys. 29 (1978) 101.
- [7] A.Y. Aydemir, D.C. Barnes, J. Comput. Phys. 59 (1985) 108.
- [8] D.S. Harned, D.D. Schnack, J. Comput. Phys. 65 (1986) 57.
- [9] H.P. Furth, P.H. Rutherford, H. Selberg, Phys. Fluids 16 (1973) 1054.
- [10] B. Coppi, R. Galvão, R. Pellat, M.N. Rosenbluth, P.H. Rutherford, Sov. J. Plasma. Phys. 2 (1976) 533.
- [11] B.B. Kadomtsev, Sov. J. Plasma. Phys. 1 (1975) 389.

謝

辞

本報告書を作成するにあたって有益な議論と御教示をいただいた安積正史主任研究員また津田孝主任研究員をはじめとする核融合研究部理論解析研究室の方々に深く感謝いたします。また、終始一貫して御激励をいただいた田中正俊核融合研究所所長に感謝いたします。

参 考 文 献

- [1] H.R. Strauss, Phys. Fluids 19 (1976) 134.
- [2] M.N. Rosenbluth, D.A. Monticello, H.R. Strauss, Phys. Fluids 19 (1976) 1987.
- [3] B.V. Waddell, B. Carreras, H.R. Hicks, J.A. Holmes, Phys. Fluids 22 (1979) 896.
- [4] M. Azumi, et al., in "Proc. of the U.S.-Japan Workshop on 3-D MHD Simulation" Nagoya, Japan, (1983) IPPJ-632 1.
- [5] L.A. Charlton, J.A. Holmes, H.R. Hicks, V.E. Lynch, B.A. Carreras, J. Comput. Phys. 63 (1986) 107.
- [6] S.C. Jardin, J.L. Johnson, J.M. Greene, R.C. Grimm, J. Comput. Phys. 29 (1978) 101.
- [7] A.Y. Aydemir, D.C. Barnes, J. Comput. Phys. 59 (1985) 108.
- [8] D.S. Harned, D.D. Schnack, J. Comput. Phys. 65 (1986) 57.
- [9] H.P. Furth, P.H. Rutherford, H. Selberg, Phys. Fluids 16 (1973) 1054.
- [10] B. Coppi, R. Galvão, R. Pellat, M.N. Rosenbluth, P.H. Rutherford, Sov. J. Plasma. Phys. 2 (1976) 533.
- [11] B.B. Kadomtsev, Sov. J. Plasma. Phys. 1 (1975) 389.

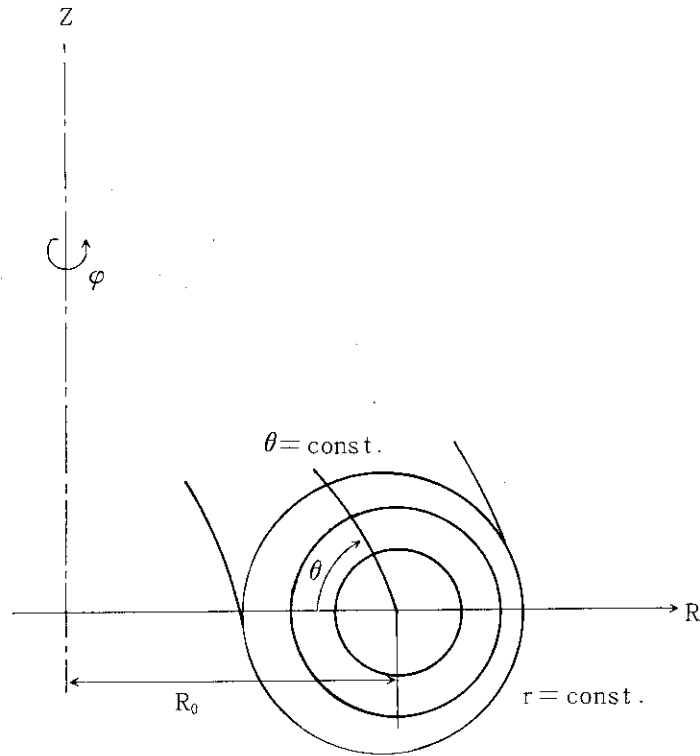
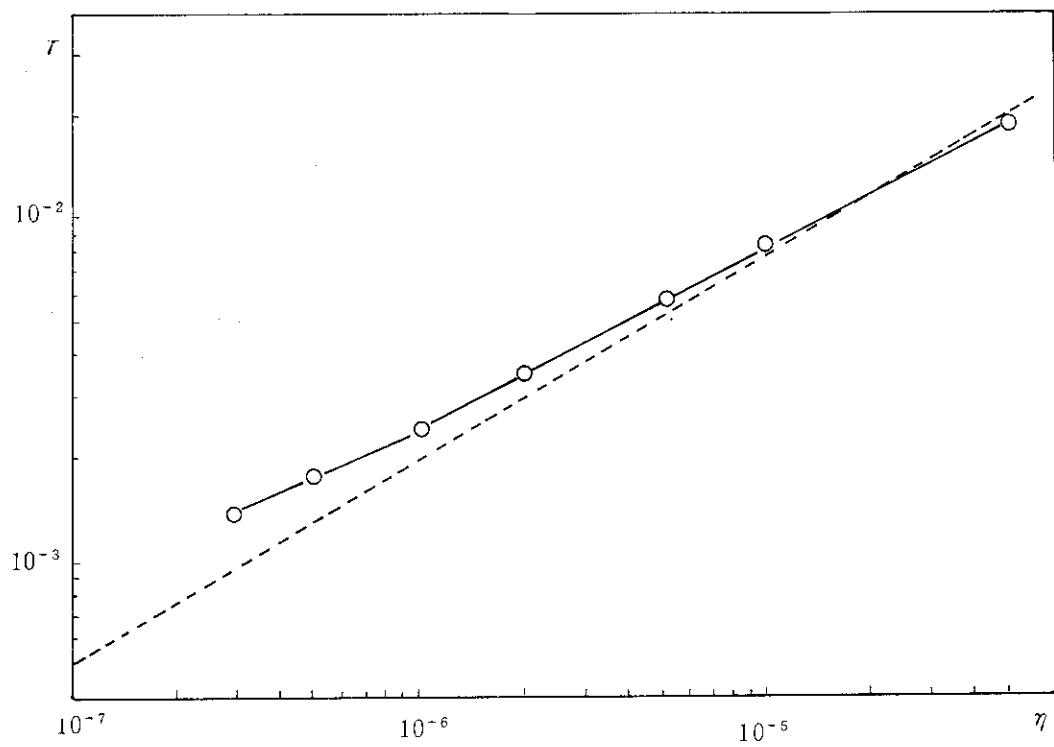


図1 円筒座標と曲線座標

図2 成長率の η 依存性, 破線は〔4.1〕式による成長率

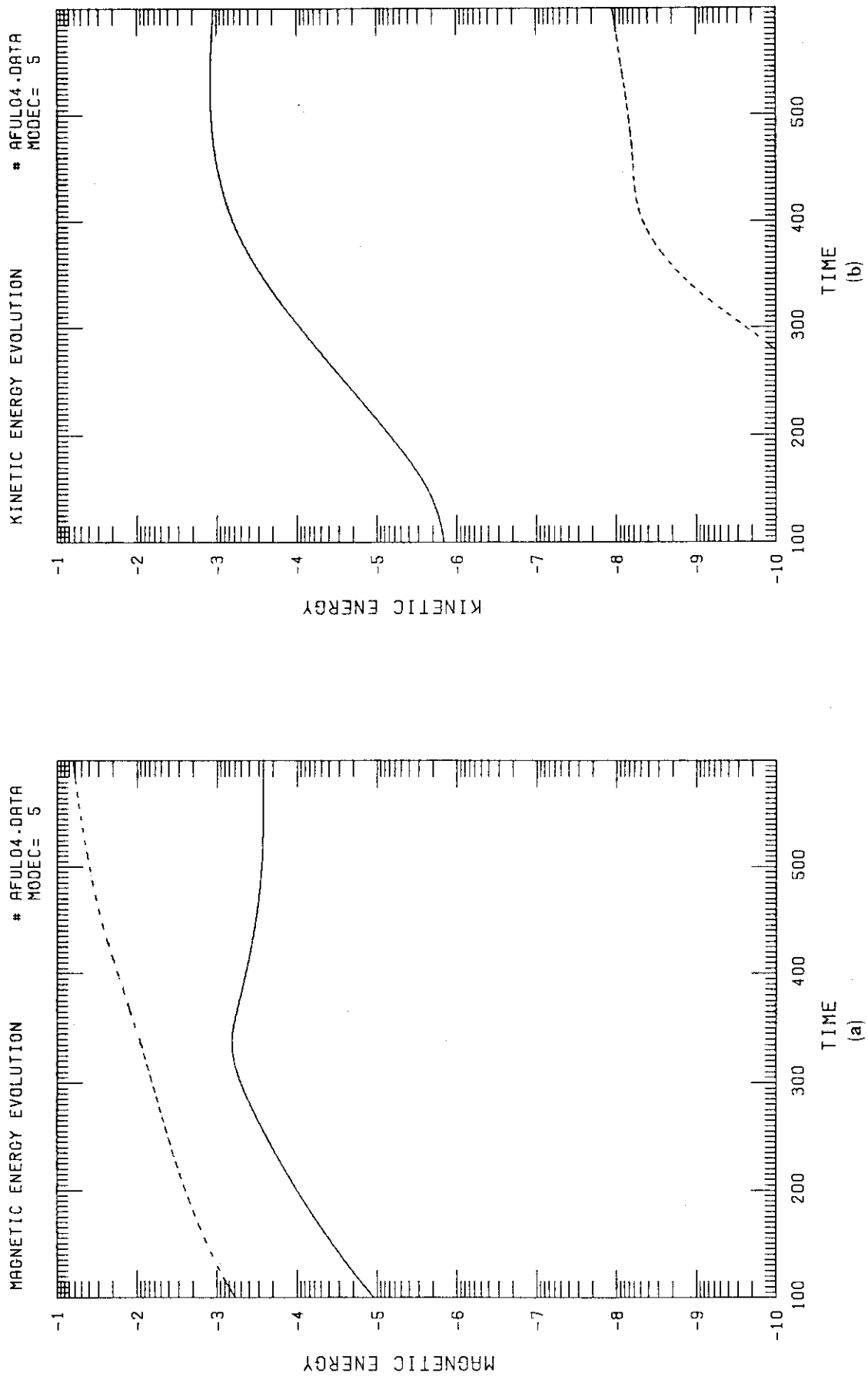
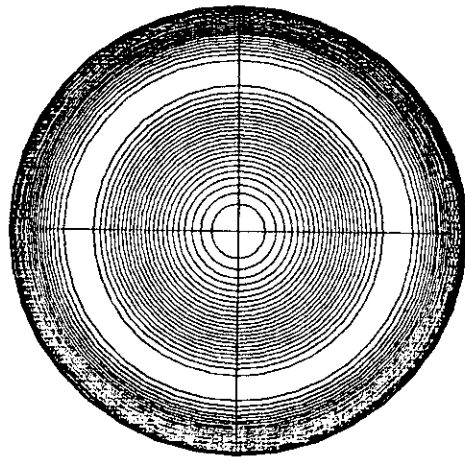
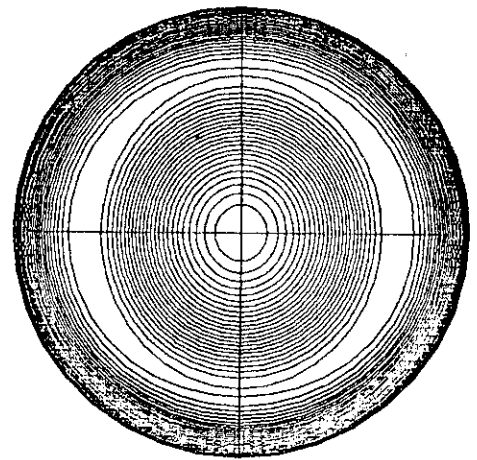


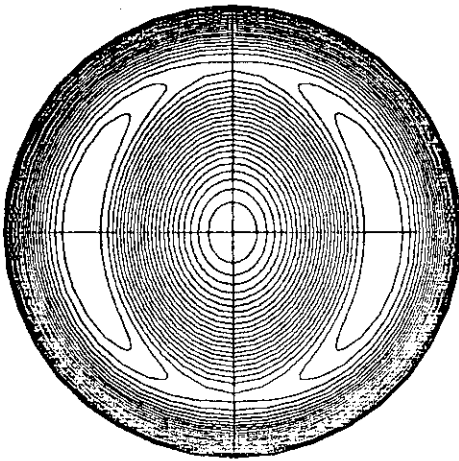
図 3 $m/n = 2/1$ の (a) 磁気及び (b) 運動エネルギーの時間変化



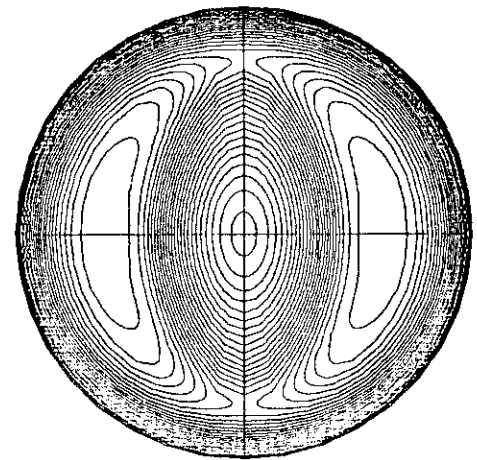
$t=0$



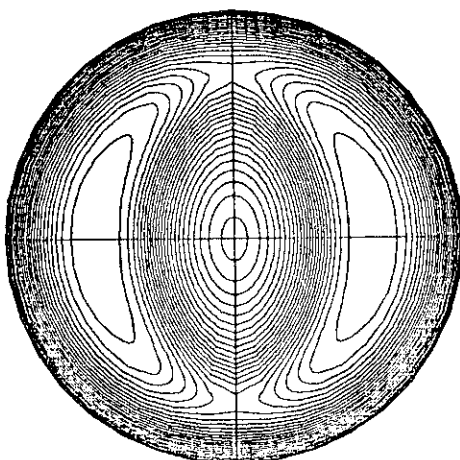
$t=100$



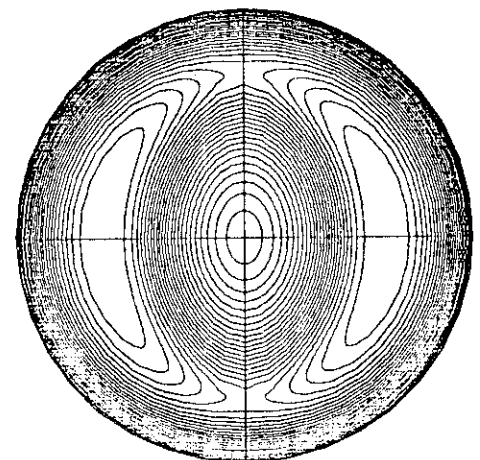
$t=200$



$t=300$



$t=400$



$t=500$

図4 $m/n = 2/1$ の等ヘリカル磁束面の時間変化

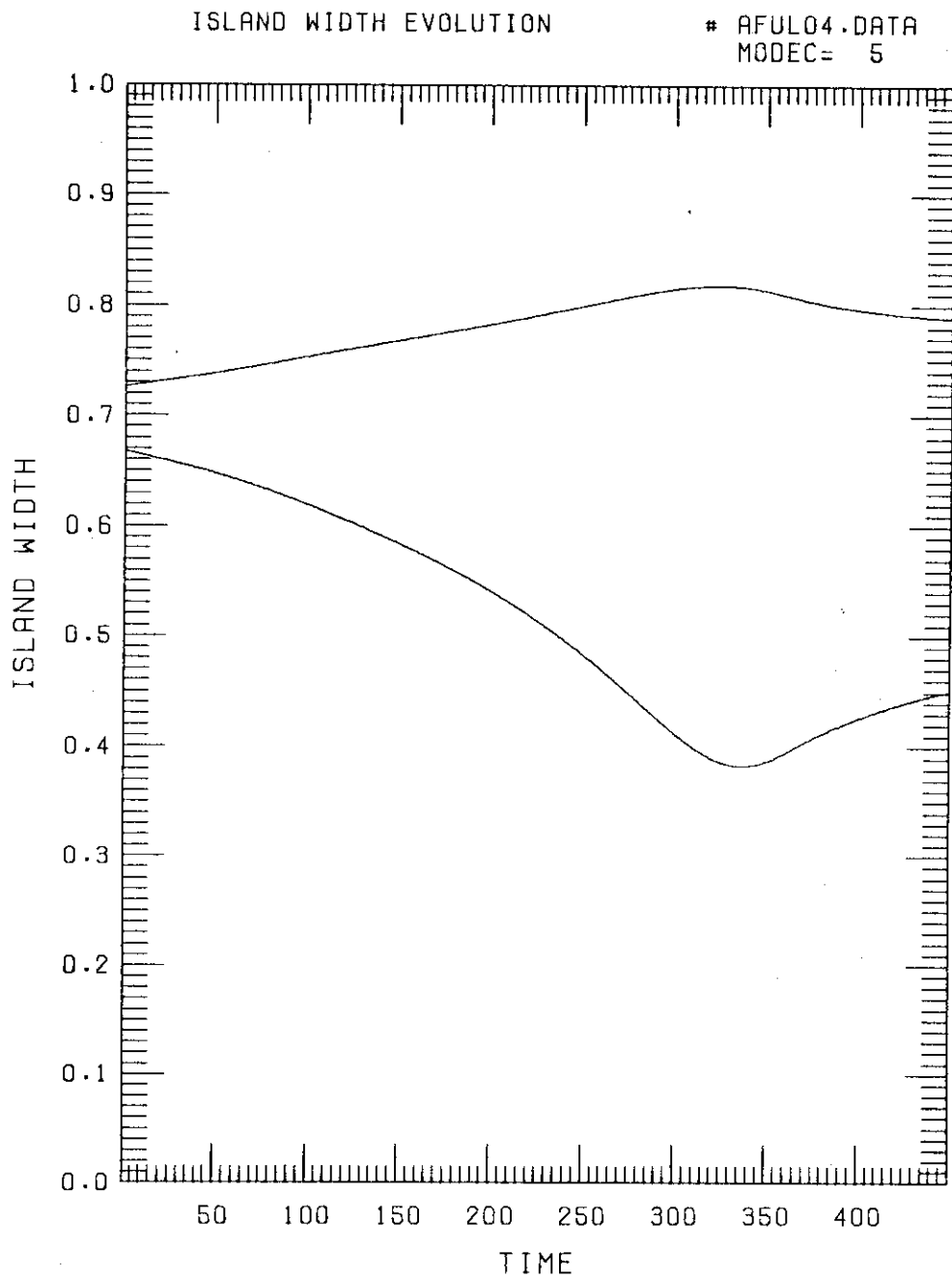


図5 $m/n = 2/1$ の磁気島幅の時間変化

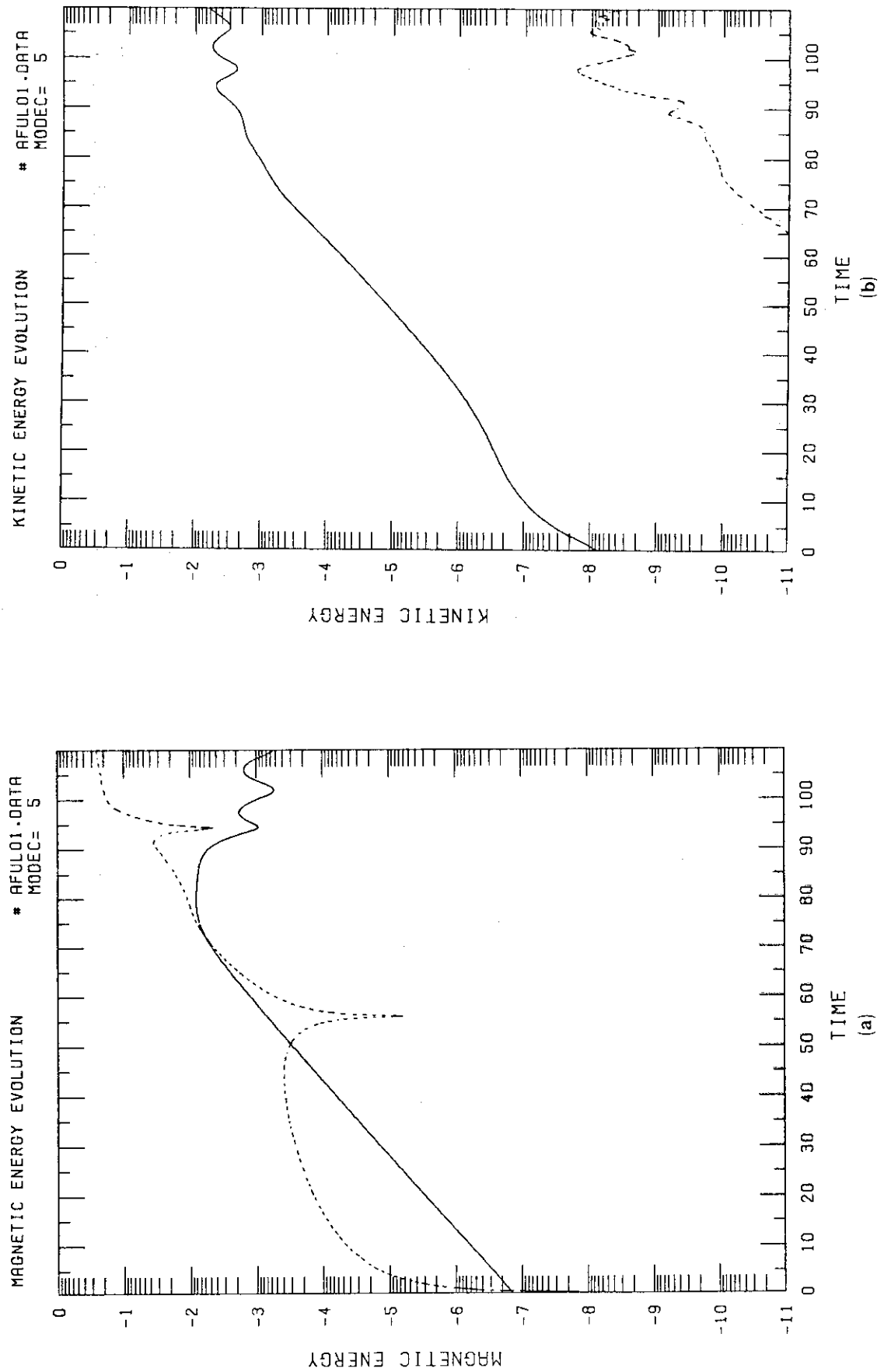


図6 $m/n = 1/1$ の(a)磁気及び(b)運動エネルギーの時間変化

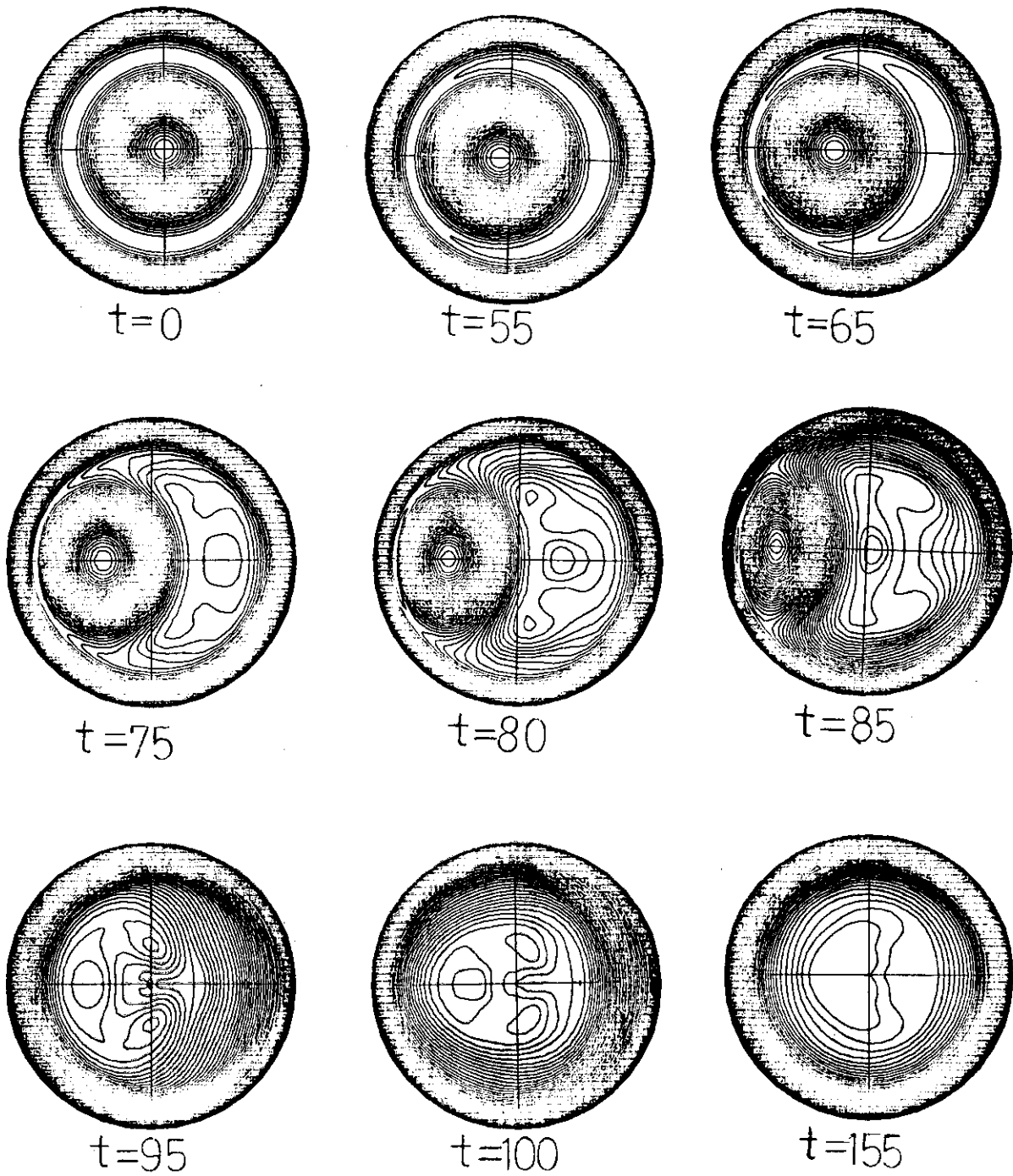


図7 $m/n = 2/1$ の等ヘリカル磁束面の時間変化

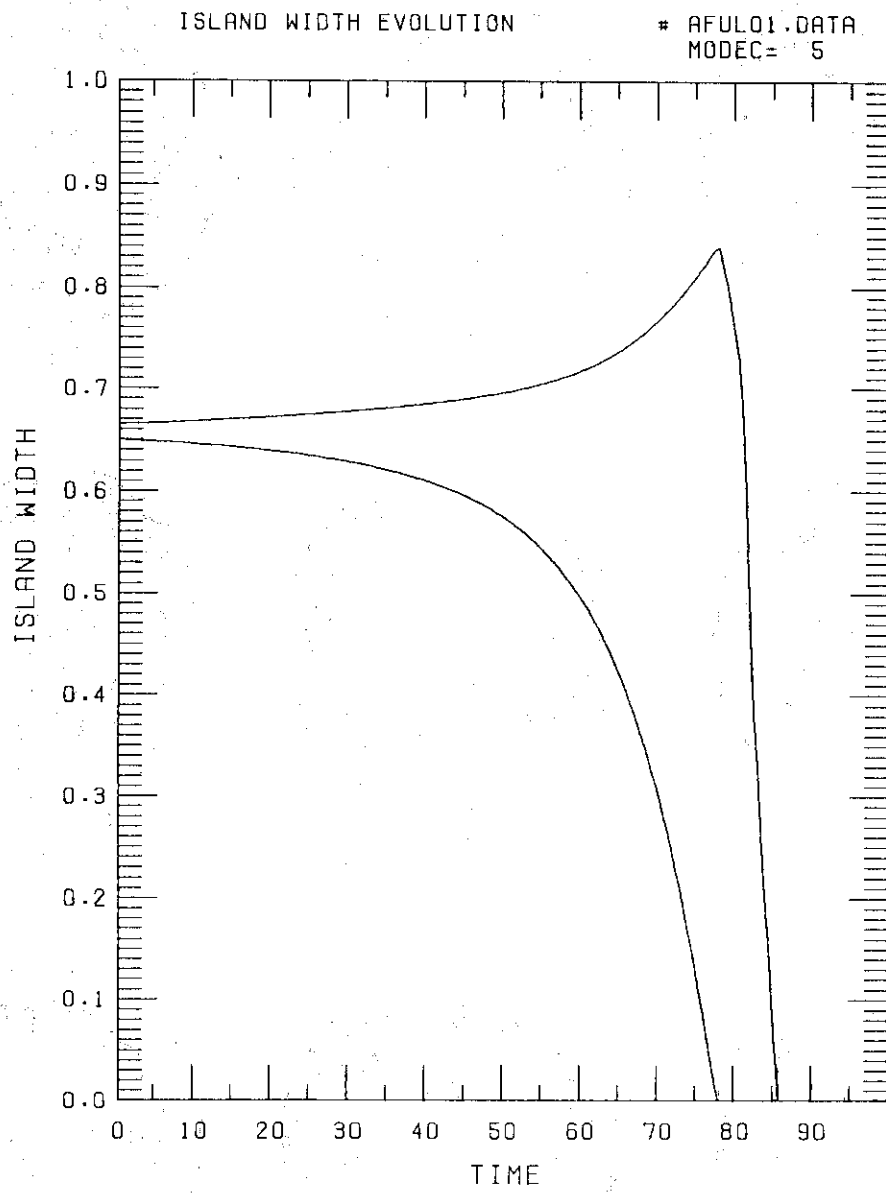


図8 $m/n = 1/1$ の磁気島幅の時間変化