

JAERI - M
89-067

最適化手法を用いた6リンク・マニピュレータの
逆問題に関する新しい方法

1989年6月

佐々木 忍

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1989

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 いばらき印刷(株)

最適化手法を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題
に関する新しい方法

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1989年5月2日受理)

本報では、マニピュレータの指先位置や姿勢に関する表現を最適化手法と結びつけて、マニピュレータの逆運動学を解く1つの有効な方法を紹介する。そのキーポイントは、与えられたすべての関節変数を同時に取扱う固定観念から脱却し、その内の3変数にのみ着目することである。残り3変数は、最初の変数と従属関係にあるとみなす。この3つの変数から構成された評価関数の線形化モデルが解を決定するうえで重要な役割を演じる。

計算機シミュレーションの結果は、その数値解の信頼性が高いことを示した。本法は、原理的に回転・旋回関節から構成されるあらゆるタイプの6リンク・マニピュレータに適用可能である。

A New Approach to the Inverse Problem of Six-link
Manipulators via the Optimization Technique

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received May 2, 1989)

In this paper, a powerful approach is presented to solve the inverse kinematics of manipulators by associating an expression as to manipulator hand position and orientation with an optimization technique. The key point in this approach is to depart from the fixed and customary idea of dealing with all given articulated variables at a time and to pay attention to only three of them, while the remaining three variables are considered to have dependent relationships with the first three variables. The linearized model of a specified performance index composed of these three variables plays an important role in determining the desired solutions.

The results of computer simulation showed that numerical solutions were sufficiently reliable. Theoretically, this approach is applicable to all types of six link manipulators with rotational and/or revolute joints.

Keywords: Optimization Technique, Separation of Variables, Performance Index, Six-Link Manipulator, Inverse Kinematics

目 次

1. はじめに	1
2. 逆問題の解法	2
3. 結果と要約	9
4. おわりに	12
謝 辞	12
参考文献	12
付 録	13

Contents

1. Introduction	1
2. New Idea for Inverse Problem	2
3. Results and Discussion	9
4. Concluding Remarks	12
Acknowledgement	12
References	12
Appendices	13

1. はじめに

3次元空間内を運動するカムや歯車、それにリンクなどいわゆる3次元空間機構のなかで、その固定端から機構の構成要素を関節（対偶）により直列に連結させ、開ループ構造としたロボット・マニピュレータは、比較的新しいタイプの空間機構であり、その運動学の研究はマニピュレータの制御を効果的に達成させるための基礎となる。解析的研究を行う上でマニピュレータの運動学は、各関節座標を与えて指先の位置・姿勢を求める順運動学と、逆に指先の位置・姿勢を与えてマニピュレータの各関節角を求める逆運動学に分けられる。前者は座標変換法やベクトル法などの数学的手法を用いて一般的かつ容易に解が求まる。

一方、逆問題については、順運動学で確立する位置・姿勢の定式化の結果が回転角の正弦、余弦を多数含む連立非線形方程式となるため、解析解を求めることが困難であるばかりかその数値計算も極めて複雑である。特定の構造をもったマニピュレータについては解析解も期待でき、Paul⁽¹⁾らも視察による容易な計算方法を提案している。

このように逆運動学では非線形超越方程式の解を求めることが中心となり、位置・姿勢を含めた6変数に対する関節解を線形近似したいわゆるヤコビ行列による逐次反復法がよく利用されてきた。この方法は計算機処理の観点からそのアルゴリズムが単純なため今日一般的に利用されているものの、解の初期値依存性やヤコビ行列の特異点存在の可能性など、解を導く上で考慮すべき点がある。

こうした事情から、これまで新しい方法が筆者らにより提案されてきた。すなわち、所要の解を厳密かつ網羅的に解く多項式法^{(2), (3), (6)}をはじめとして、数理計画に基づく実時間処理の可能な最小化手法^{(4), (6)}、さらにベクトルや幾何学的概念を取入れ直感的理解が容易なモデル^{(5), (6)}などである。これらは、すべての実現可能解の摘出や、ヤコビ法で遭遇しがちな特異点の回避などとともに、精度よい解が期待できる。

本報では、開発したこれらの手法の見直しから、1つの新しい考え方に到達した。すなわち、関節変数を2つのグループに分け、一方を他方の変数で表現したのち、最小化探索問題に帰着させて解を誘導する。とくに、6つの独立変数から構成された関係式を同時に扱うかわりに、変数を減らし適当な評価関数を導入して計算機処理するところが新しいポイントとなる。以前報告した最小化手法による考え方は根元の構造に着目して定式化を行ったが、本報で提案する方法は多関節形6リンクのマニピュレータであれば原理的にすべての場合に適用可能という大きな特徴を備えている。

2. 逆問題の解法

最初に、考察の対象としてとりあげた6リンク・マニピュレータの構成をFig. 1に、また、運動学方程式を式(1)～(12)にまとめて記載する。(導出過程の詳細は文献(7)等を参照のこと。)

$$n_x = -(s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) c_6 + s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) \quad (1)$$

$$n_y = (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) c_6 + s_6 (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) \quad (2)$$

$$n_z = (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) c_6 - s_{23} s_4 s_6 \quad (3)$$

$$o_x = (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) c_6 + s_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) \quad (4)$$

$$o_y = (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) c_6 - s_6 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) \quad (5)$$

$$o_z = -(s_{23} s_4) c_6 + s_6 (s_{23} s_5 c_4 - c_{23} c_5) \quad (6)$$

$$a_x = s_1 s_{23} s_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 - s_4 c_1 c_5 \quad (7)$$

$$a_y = c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1 - s_1 s_4 c_5 \quad (8)$$

$$a_z = -(s_{23} c_4 c_5 + s_5 c_{23}) \quad (9)$$

$$P_x = -a_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) c_6 + a_6 s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) - a_5 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) - (a_3 + a_4) s_1 s_{23} - a_2 s_1 s_2 \quad (10)$$

$$P_y = a_6 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) c_6 + a_6 s_6 (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) + a_5 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) + (a_3 + a_4) s_{23} c_1 + a_2 s_2 c_1 \quad (11)$$

$$P_z = a_6 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) c_6 + a_6 (-s_{23} s_4) s_6 + a_5 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) + (a_3 + a_4) c_{23} + a_2 c_2 + a_1 \quad (12)$$

ここで、使用する記号について下記の約束をしておく。

$s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$, $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$, $n = (n_x, n_y, n_z)^T$, $o = (o_x, o_y, o_z)^T$, $a = (a_x, a_y, a_z)^T$; マニピュレータの指先姿勢を決定する3方向単位ベクトル (Tは転置記号とする。),

P_x, P_y, P_z ; 基準座標系における指先の位置座標

(1)～(12)式に含まれる各項は、正弦関数を先に、続いて余弦関数を記述した。添字は若い番号から整理してある。

さて、一般的に言って、運動学方程式を構成する独立変数は θ_1 から θ_6 の6個であり、解を求めるには当然6個の式が必要である。すなわち、3次元空間内で剛体の位置を決定するための3つの式と、方向を決定するための3式である。このことを実際のマニピュレータに照し合せてみると、例えば、球形関節 (spherical joint) はマニピュレータの指先姿勢を決定する理想的な3自由度対偶 (kinematic pair) であり、指先位置の決定は残り3つの関節が受持つことから関節の機能を別々に切り離して扱うことが可能である。しかしながら、一般的には各関節角 (関節変数ともいい、本報では区別しないで用いる。) の動きが指先位置・姿勢の動きに大きく影響するため、解の導出も勢い複雑となる。つまり、位置を決める3自由度と姿勢を決める3自由度とはなるべく独立であることが望ましいが、一般には位置を変えようとするれば姿勢も変り、姿勢を変えようとするれば位置も変ることになり各関節が複雑に関係し合っている。本研究で取上げた

- $a_1 = 700(\text{mm})$
- $a_2 = 500(\text{mm})$
- $a_3 + a_4 = 350(\text{mm})$
- $a_5 = 150(\text{mm})$
- $a_6 = 280(\text{mm})$

- $-200 \leq \theta_1 \leq 200(\text{deg})$
- $-30 \leq \theta_2 \leq 120(\text{deg})$
- $-90 \leq \theta_3 \leq 90(\text{deg})$
- $-180 \leq \theta_4 \leq 180(\text{deg})$
- $-90 \leq \theta_5 \leq 90(\text{deg})$
- $-60 \leq \theta_6 \leq 60(\text{deg})$

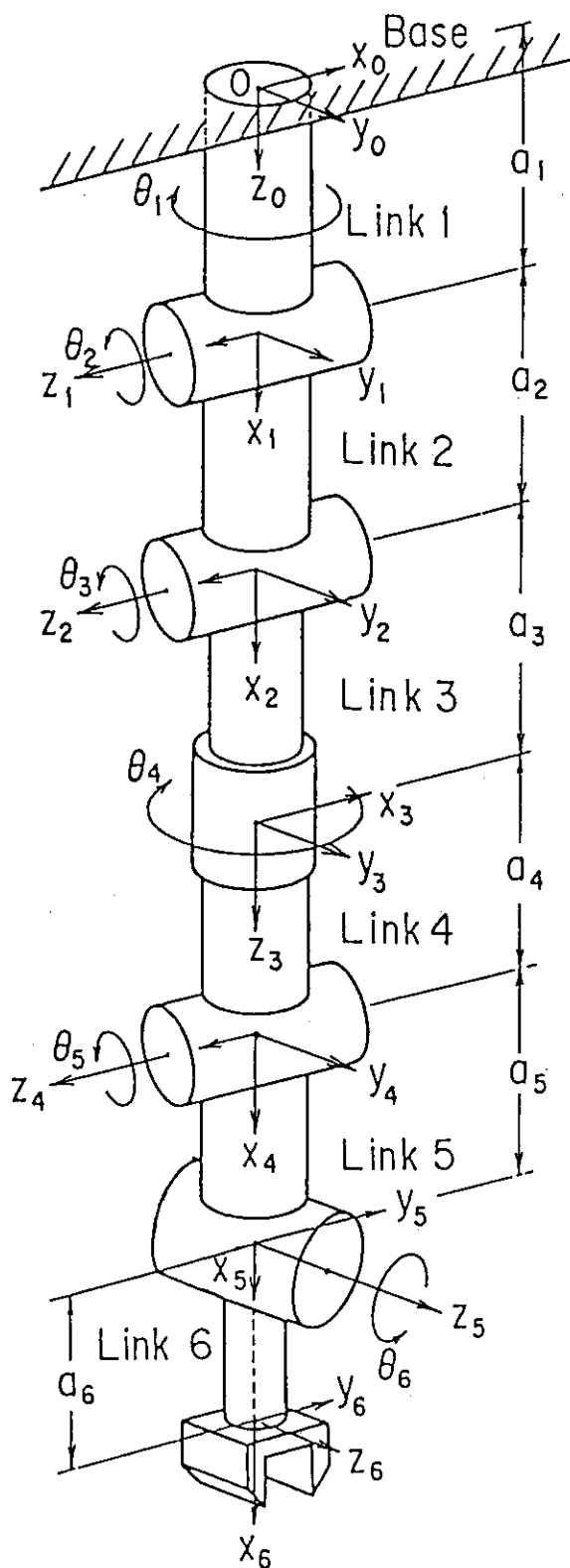


Fig. 1 A Six-Link Manipulator Studied

マニピュレータの関節構成も、位置と方向を定めるのにそれぞれ3つの関節角で独立に決定できる単純なものではないが、以下では数値解法上便宜的に6つの関節変数を3つずつに分けて考える。その場合、方向については9個から3つを選ぶという任意性があるが、位置については3個の式が確定するので、まず、それに着目する。(10), (11), (12)の3式に含まれた独立変数の内、3つの変数を残り3つの変数で表すことが本章でのねらいである。ここでは、仮に $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を固定したうえで残りの関節変数をこの3つで表現することを考える。そして、この $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を本報では基準変数と呼ぶことにする。

まず、3式の煩雑さを軽減するために、次のように書換える。(但し、 $a_{34} = a_3 + a_4$ と略記する。)

$$P_x = a_6 n_x - a_5 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) - (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) s_1 \quad (13)$$

$$P_y = a_6 n_y + a_5 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) + (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) c_1 \quad (14)$$

$$P_z = a_6 n_z + a_5 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) + (a_{34} c_{23} + a_2 c_2) + a_1 \quad (15)$$

比較的簡潔な上の表現式を出発点として、各々を既知の項と未知の項に分けると(基準変数および P_x, P_y, P_z, n_x 等は既知とする。)

$$-a_5 \{s_1 (s_{23} c_5 + s_5 c_{23} c_4) + s_4 s_5 c_1\} = P_x - a_6 n_x + (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) s_1 \quad (16)$$

$$\underline{\Delta} w_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

$$a_5 \{c_1 (s_{23} c_5 + s_5 c_{23} c_4) - s_4 s_5 s_1\} = P_y - a_6 n_y - (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) c_1 \quad (17)$$

$$\underline{\Delta} w_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

$$a_5 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) = P_z - a_6 n_z - a_1 - (a_{34} c_{23} + a_2 c_2) \quad (18)$$

$$\underline{\Delta} w_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

となる。(16)~(18)の関数 $w_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 等は基準変数を与えた場合に計算できる項をまとめたものである。(16), (17)の共通項は、

$$-p s_1 - q c_1 = w_1$$

$$p c_1 - q s_1 = w_2$$

なる式により、 $p = -w_1 s_1 + w_2 c_1$, $q = -(w_1 c_1 + w_2 s_1)$ となる。

すなわち、関節角 θ_4, θ_5 と既知の関節角との関係が導き出せる。

$$a_5 (s_{23} c_5 + s_5 c_{23} c_4) = -w_1 s_1 + w_2 c_1 \quad (19)$$

$$a_5 s_4 s_5 = -(w_1 c_1 + w_2 s_1) \quad (20)$$

さらに、(18), (19)から直ちに

$$a_5 c_5 = (-w_1 s_1 + w_2 c_1) s_{23} + w_3 c_{23} \quad (21)$$

$$a_5 s_5 c_4 = (-w_1 s_1 + w_2 c_1) c_{23} - w_3 s_{23} \quad (22)$$

が得られる。したがって、(20), (22)から

$$\begin{aligned} \tan \theta_4 &= \frac{a_5 s_4 s_5}{a_5 s_5 c_4} = \frac{-(w_1 c_1 + w_2 s_1)}{(-w_1 s_1 + w_2 c_1) c_{23} - w_3 s_{23}} \\ &= \frac{(w_1 c_1 + w_2 s_1)}{(w_1 s_1 - w_2 c_1) c_{23} + w_3 s_{23}} \\ &= \frac{X_1}{X_2 c_{23} + w_3 s_{23}} = \frac{X_1}{X_3} \end{aligned} \quad (23)$$

$$(但し, X_3 = X_2 C_{23} + w_3 S_{23} \neq 0) \quad (24)$$

が決定する。さらに、この値と (21), (22) から

$$\begin{aligned} \tan \theta_5 &= \frac{(-w_1 S_1 + w_2 C_1) C_{23} - w_3 S_{23}}{\{w_3 C_{23} + (-w_1 S_1 + w_2 C_1) S_{23}\} C_4} = \frac{(w_1 S_1 - w_2 C_1) C_{23} + w_3 S_{23}}{\{w_3 C_{23} + (-w_1 S_1 + w_2 C_1) S_{23}\} C_4} \\ &= \frac{-X_3}{(w_3 C_{23} - X_2 S_{23}) C_4} = \frac{-X_3}{X_6 C_4} \end{aligned} \quad (25)$$

$$(但し, X_6 C_4 = (w_3 C_{23} - X_2 S_{23}) C_4 \neq 0) \quad (26)$$

が求まる。これで θ_4, θ_5 が基準変数 $\theta_1 \sim \theta_3$ で記述できた。残るは θ_6 のみである。

さて、最初の式に戻って、(13), (15) に代る (10), (12) に対して

$$A = S_1 S_{23} C_5 + S_4 S_5 C_1 + S_1 S_5 C_{23} C_4 \quad (27)$$

$$B = C_1 C_4 - S_1 S_4 C_{23} \quad (28)$$

$$C = C_{23} C_5 - S_{23} S_5 C_4 \quad (29)$$

$$D = -S_{23} S_4 \quad (30)$$

と整理すると、 θ_6 に関係した式が得られる。

$$-(a_6 C_6 + a_5) A - (a_{34} S_{23} + a_2 S_2) S_1 + a_6 S_6 B = P_x \quad (31)$$

$$(a_6 C_6 + a_5) C + (a_{34} C_{23} + a_2 C_2) + a_6 S_6 D = P_z - a_1 \quad (32)$$

すなわち、

$$-(a_6 C_6 + a_5) A + a_6 S_6 B = P_x + (a_{34} S_{23} + a_2 S_2) S_1 \triangleq F_1 \quad (33)$$

$$(a_6 C_6 + a_5) C + a_6 S_6 D = P_z - a_1 - (a_{34} C_{23} + a_2 C_2) \triangleq F_2 \quad (34)$$

これより

$$a_6 C_6 + a_5 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & B \\ F_2 & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -A & B \\ C & D \end{vmatrix}} = \frac{F_1 D - F_2 B}{-AD - BC} = \frac{F_2 B - F_1 D}{AD + BC} \quad (35)$$

$$a_6 S_6 = \frac{-AF_2 - CF_1}{-AD - BC} = \frac{AF_2 + CF_1}{AD + BC} = \frac{AF_2 + CF_1}{\Delta} \quad (36)$$

$$a_6 C_6 = \frac{F_2 B - F_1 D - a_5 (AD + BC)}{AD + BC} = \frac{F_2 B - F_1 D - a_5 \Delta}{\Delta} \quad (37)$$

が計算されて、最終軸における関節角はつぎのように定まる。

$$\tan \theta_6 = \frac{AF_2 + CF_1}{\{F_2 B - F_1 D - a_5 \Delta\}} \quad (38)$$

但し、 $\Delta = AD + BC = (S_1 S_{23} C_5 + S_4 S_5 C_1 + S_1 S_5 C_{23} C_4)(-S_{23} S_4)$

$$\begin{aligned} &+ (C_1 C_4 - S_1 S_4 C_{23})(C_{23} C_5 - S_{23} S_5 C_4) \\ &= C_1 (C_{23} C_4 C_5 - S_{23} S_5) - S_1 S_4 C_5, \end{aligned} \quad (39)$$

$$F_2 B - F_1 D - a_5 \Delta \neq 0 \quad (40)$$

以上で、われわれの最初の目的であった第 4, 第 5, 第 6 の関節変数が最初の 3 つの変数により

$$\begin{aligned} \theta_4 &= H_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ \theta_5 &= H_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ \theta_6 &= H_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{aligned} \quad (41)$$

と記述されたことになる。

位置の方程式から関節変数を陰関数表示したので、つぎにこれを姿勢に関する方程式に適用する。姿勢を決定する3変数として、 n_x , n_y , n_z を選び、(41)の関係から、 θ_1 , θ_2 , θ_3 の関数とみなして話を進める。

今、 n_x , n_y および o_x が与えられた初期値 θ_0 から微小変位した場合の変化は、2次以上の微分項を省略して

$$n_x(\theta_0 + \Delta\theta) = n_x(\theta_0) + \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_i} \right) \Delta\theta_i$$

等と書ける。(41)で求めた関係をこれに直接代入せず、陰関数表示された θ_4 , θ_5 , θ_6 に対してはつぎのような合成関数の導関数記述を行う。

(i) 姿勢 n_x の全微分

$$\begin{aligned} n_x(\theta_0 + \Delta\theta) - n_x(\theta_0) &= \Delta n_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) = \\ &\left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_3} \right) \Delta\theta_3 + \\ &\left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_4} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) \Delta\theta_3 \right\} + \\ &\left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_5} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) \Delta\theta_3 \right\} + \\ &\left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_6} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3} \right) \Delta\theta_3 \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1} \right) \right\} \Delta\theta_1 + \\ &\left\{ \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2} \right) \right\} \Delta\theta_2 + \\ &\left\{ \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3} \right) \right\} \Delta\theta_3 \\ &= L_1 \Delta\theta_1 + L_2 \Delta\theta_2 + L_3 \Delta\theta_3 \end{aligned} \tag{42}$$

(ii) 姿勢 n_y の全微分

$$\begin{aligned} n_y(\theta_0 + \Delta\theta) - n_y(\theta_0) &= \Delta n_y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) = \\ &\left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_3} \right) \Delta\theta_3 + \\ &\left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_4} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) \Delta\theta_3 \right\} + \\ &\left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_5} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) \Delta\theta_3 \right\} + \\ &\left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_6} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1} \right) \Delta\theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2} \right) \Delta\theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3} \right) \Delta\theta_3 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1} \right) \right\} \Delta \theta_1 + \\
 &\quad \left\{ \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2} \right) \right\} \Delta \theta_2 + \\
 &\quad \left\{ \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3} \right) \right\} \Delta \theta_3 \\
 &= M_1 \Delta \theta_1 + M_2 \Delta \theta_2 + M_3 \Delta \theta_3 \tag{43}
 \end{aligned}$$

(iii) 姿勢 o_x の全微分

$$\begin{aligned}
 o_x(\theta_o + \Delta \theta) - o_x(\theta_o) &= \Delta o_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) = \\
 &\quad \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_1} \right) \Delta \theta_1 + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_2} \right) \Delta \theta_2 + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_3} \right) \Delta \theta_3 \\
 &\quad \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_4} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) \Delta \theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) \Delta \theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) \Delta \theta_3 \right\} + \\
 &\quad \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_5} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) \Delta \theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) \Delta \theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) \Delta \theta_3 \right\} + \\
 &\quad \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_6} \right) \left\{ \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1} \right) \Delta \theta_1 + \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2} \right) \Delta \theta_2 + \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3} \right) \Delta \theta_3 \right\} \\
 &= \left\{ \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1} \right) \right\} \Delta \theta_1 + \\
 &\quad \left\{ \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2} \right) \right\} \Delta \theta_2 + \\
 &\quad \left\{ \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3} \right) \right\} \Delta \theta_3 \\
 &= N_1 \Delta \theta_1 + N_2 \Delta \theta_2 + N_3 \Delta \theta_3 \tag{44}
 \end{aligned}$$

すなわち、線形化された姿勢に関する3つの関係式が得られた。

$$\begin{aligned}
 n_x(\theta_o + \Delta \theta) &= n_x(\theta_o) + L_1 \Delta \theta_1 + L_2 \Delta \theta_2 + L_3 \Delta \theta_3 \\
 n_y(\theta_o + \Delta \theta) &= n_y(\theta_o) + M_1 \Delta \theta_1 + M_2 \Delta \theta_2 + M_3 \Delta \theta_3 \\
 o_x(\theta_o + \Delta \theta) &= o_x(\theta_o) + N_1 \Delta \theta_1 + N_2 \Delta \theta_2 + N_3 \Delta \theta_3
 \end{aligned} \tag{45}$$

(但し、 $\theta_o = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ とする。)

基準変数の微小変位にかかる各係数は、(41)式の陰関数微分を計算して求めることができる。各値は付録に詳しく示してある。

$$L_1 = \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1} \right) \tag{46}$$

$$L_2 = \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2} \right) \tag{47}$$

$$L_3 = \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_4} \right) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_5} \right) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) + \left(\frac{\partial n_x}{\partial \theta_6} \right) \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3} \right) \tag{48}$$

$$M_1 = \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_1}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_4}\right)\left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_5}\right)\left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_6}\right)\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1}\right) \quad (49)$$

$$M_2 = \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_2}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_4}\right)\left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_5}\right)\left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_6}\right)\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2}\right) \quad (50)$$

$$M_3 = \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_3}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_4}\right)\left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_5}\right)\left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3}\right) + \left(\frac{\partial n_y}{\partial \theta_6}\right)\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3}\right) \quad (51)$$

$$N_1 = \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_1}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_4}\right)\left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_5}\right)\left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_6}\right)\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1}\right) \quad (52)$$

$$N_2 = \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_2}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_4}\right)\left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_5}\right)\left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_6}\right)\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2}\right) \quad (53)$$

$$N_3 = \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_3}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_4}\right)\left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_5}\right)\left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3}\right) + \left(\frac{\partial o_x}{\partial \theta_6}\right)\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3}\right) \quad (54)$$

以上でマニピュレータの指先方向を決定する関係式の線形化が記述できた。そこで、(45)の各値と与えられた指先方向の目標値との隔たりをみるために、評価関数として2乗ノルムをとり、その値の更新操作を続け1つの収束判定基準を満たす解に到達させる。

いま、評価関数の値を最小すなわち零（つまり、指定した方向に漸近する。）にする $\Delta\theta_i$ ($i = 1, 2, 3$)を逐次反復的に求めることにより、 θ_i の初期値からの是正すべき偏差分が明確になる。具体的な処理は評価関数の微分操作により以下のように決まる。まず、線形操作(45)に基づく目的の評価関数がつぎのように記述できる。

$$\begin{aligned} J &= \{n_x(\theta_0 + \Delta\theta) - N_x\}^2 + \{n_y(\theta_0 + \Delta\theta) - N_y\}^2 + \{o_x(\theta_0 + \Delta\theta) - O_x\}^2 \\ &= (m_1 + L_1\Delta\theta_1 + L_2\Delta\theta_2 + L_3\Delta\theta_3)^2 + (m_2 + M_1\Delta\theta_1 + M_2\Delta\theta_2 + M_3\Delta\theta_3)^2 + \\ &\quad (m_3 + N_1\Delta\theta_1 + N_2\Delta\theta_2 + N_3\Delta\theta_3)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + (L_1^2 + M_1^2 + N_1^2)\Delta\theta_1^2 + (L_2^2 + M_2^2 + N_2^2)\Delta\theta_2^2 + \\ &\quad (L_3^2 + M_3^2 + N_3^2)\Delta\theta_3^2 + 2(L_2L_3 - M_2M_3 + N_2N_3)\Delta\theta_2\Delta\theta_3 + \\ &\quad 2(L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2)\Delta\theta_1\Delta\theta_2 + 2(L_1L_3 + M_1M_3 + N_1N_3)\Delta\theta_1\Delta\theta_3 + \\ &\quad 2(m_1L_1 + m_2M_1 + m_3N_1)\Delta\theta_1 + 2(m_1L_2 + m_2M_2 + m_3N_2)\Delta\theta_2 + \\ &\quad 2(m_1L_3 + m_2M_3 + m_3N_3)\Delta\theta_3 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\text{ここに, } m_1 = n_x(\theta_0) - N_x$$

$$m_2 = n_y(\theta_0) - N_y \quad (56)$$

$$m_3 = o_x(\theta_0) - O_x$$

N_x, N_y, O_x は与えられた方向余弦とする。

関数 J を極小にする各関節変数の微小変位は、(55)の導関数を零におくこと($\partial J / \partial \Delta\theta_i$)
 $= 0$, ($i = 1, 2, 3$)で容易に決定する。それはつぎの3元連立方程式の解に帰結できる。

$$\begin{aligned} R_{11}\Delta\theta_1 + R_{12}\Delta\theta_2 + R_{13}\Delta\theta_3 &= b_1 \\ R_{21}\Delta\theta_1 + R_{22}\Delta\theta_2 + R_{23}\Delta\theta_3 &= b_2 \\ R_{31}\Delta\theta_1 + R_{32}\Delta\theta_2 + R_{33}\Delta\theta_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (57)$$

但し、

$$R_{11} = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2,$$

$$\begin{aligned}
R_{12} &= L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2, \\
R_{13} &= L_1 L_3 + M_1 M_3 + N_1 N_3, \\
R_{21} &= R_{12}, \\
R_{22} &= L_2^2 + M_2^2 + N_2^2, \\
R_{23} &= L_2 L_3 + M_2 M_3 + N_2 N_3, \\
R_{31} &= R_{13}, \\
R_{32} &= R_{23}, \\
R_{33} &= L_3^2 + M_3^2 + N_3^2, \\
b_1 &= -(m_1 L_1 + m_2 M_1 + m_3 N_1), \\
b_2 &= -(m_1 L_2 + m_2 M_2 + m_3 N_2), \\
b_3 &= -(m_1 L_3 + m_2 M_3 + m_3 N_3), \tag{58}
\end{aligned}$$

方程式の係数は対称行列を構成し、掃きだし法で精度よく求めることができる。このようにして決定した各増分値 $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$ を最初の関節角に加えて

$$\theta_i = \theta_{i0} + \Delta\theta_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

を再計算し、残りの関節角も(41)から求まる。さらに、この関節解を(55)で線形化しない式(つまり、 $\Delta\theta = 0$ とみなした式)に代入してノルムの大きさを確認する。その大きさが指定された収束半径内であれば解として採択され、そうでない場合は一連の操作を最初に戻って繰り返す。本アルゴリズムの内容を Fig. 2 に示す。

3. 結果と要約

開発したアルゴリズムにより数値実験を行った。その一例として、指先位置・姿勢を $(-100, 350, 1630)$ (mm); $N_x = 0$, $N_y = 0$, $O_x = 1$ として計算を実行し、その結果を Fig. 3 に示す。初期推定値として $\theta_1 = 2.0$, $\theta_2 = 1.0$, $\theta_3 = 80.0$ (deg) を与えた場合、残りの関節角が2行目に書き出され、それらの値を使って指先位置・姿勢、目標値からの偏差等が出力される。これを何回か繰返して解にいたるが、計算では3回で目標値に収束している。導き出した各関節解の精度は、Fig. 3 に示すように指先位置および方向の精度が 0.1 (mm), 10^{-3} で再現される程度のものである。必要ならば、反復回数を増やすことにより厳密解に十分接近させることは可能である。アルゴリズムを導く過程で陰関数が求まる条件として(24), (26), (40) をあげたが、初期値を与えて計算する場合もこの条件に注意することが必要である。

$$\begin{aligned}
R_{12} &= L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2, \\
R_{13} &= L_1 L_3 + M_1 M_3 + N_1 N_3, \\
R_{21} &= R_{12}, \\
R_{22} &= L_2^2 + M_2^2 + N_2^2, \\
R_{23} &= L_2 L_3 + M_2 M_3 + N_2 N_3, \\
R_{31} &= R_{13}, \\
R_{32} &= R_{23}, \\
R_{33} &= L_3^2 + M_3^2 + N_3^2, \\
b_1 &= -(m_1 L_1 + m_2 M_1 + m_3 N_1), \\
b_2 &= -(m_1 L_2 + m_2 M_2 + m_3 N_2), \\
b_3 &= -(m_1 L_3 + m_2 M_3 + m_3 N_3), \tag{58}
\end{aligned}$$

方程式の係数は対称行列を構成し、掃きだし法で精度よく求めることができる。このようにして決定した各増分値 $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$ を最初の関節角に加えて

$$\theta_i = \theta_{i0} + \Delta\theta_i \quad (i=1, 2, 3)$$

を再計算し、残りの関節角も(41)から求まる。さらに、この関節解を(55)で線形化しない式(つまり、 $\Delta\theta=0$ とみなした式)に代入してノルムの大きさを確認する。その大きさが指定された収束半径内であれば解として採択され、そうでない場合は一連の操作を最初に戻って繰返す。本アルゴリズムの内容を Fig. 2 に示す。

3. 結果と要約

開発したアルゴリズムにより数値実験を行った。その一例として、指先位置・姿勢を $(-100, 350, 1630)$ (mm); $N_x=0, N_y=0, O_x=1$ として計算を実行し、その結果を Fig. 3 に示す。初期推定値として $\theta_1=2.0, \theta_2=1.0, \theta_3=80.0$ (deg) を与えた場合、残りの関節角が2行目に書き出され、それらの値を使って指先位置・姿勢、目標値からの偏差等が出力される。これを何回か繰返して解にいたるが、計算では3回で目標値に収束している。導き出した各関節解の精度は、Fig. 3 に示すように指先位置および方向の精度が0.1 (mm), 10^{-3} で再現される程度のものである。必要ならば、反復回数を増やすことにより厳密解に十分接近させることは可能である。アルゴリズムを導く過程で陰関数が求まる条件として(24), (26), (40) をあげたが、初期値を与えて計算する場合もこの条件に注意することが必要である。

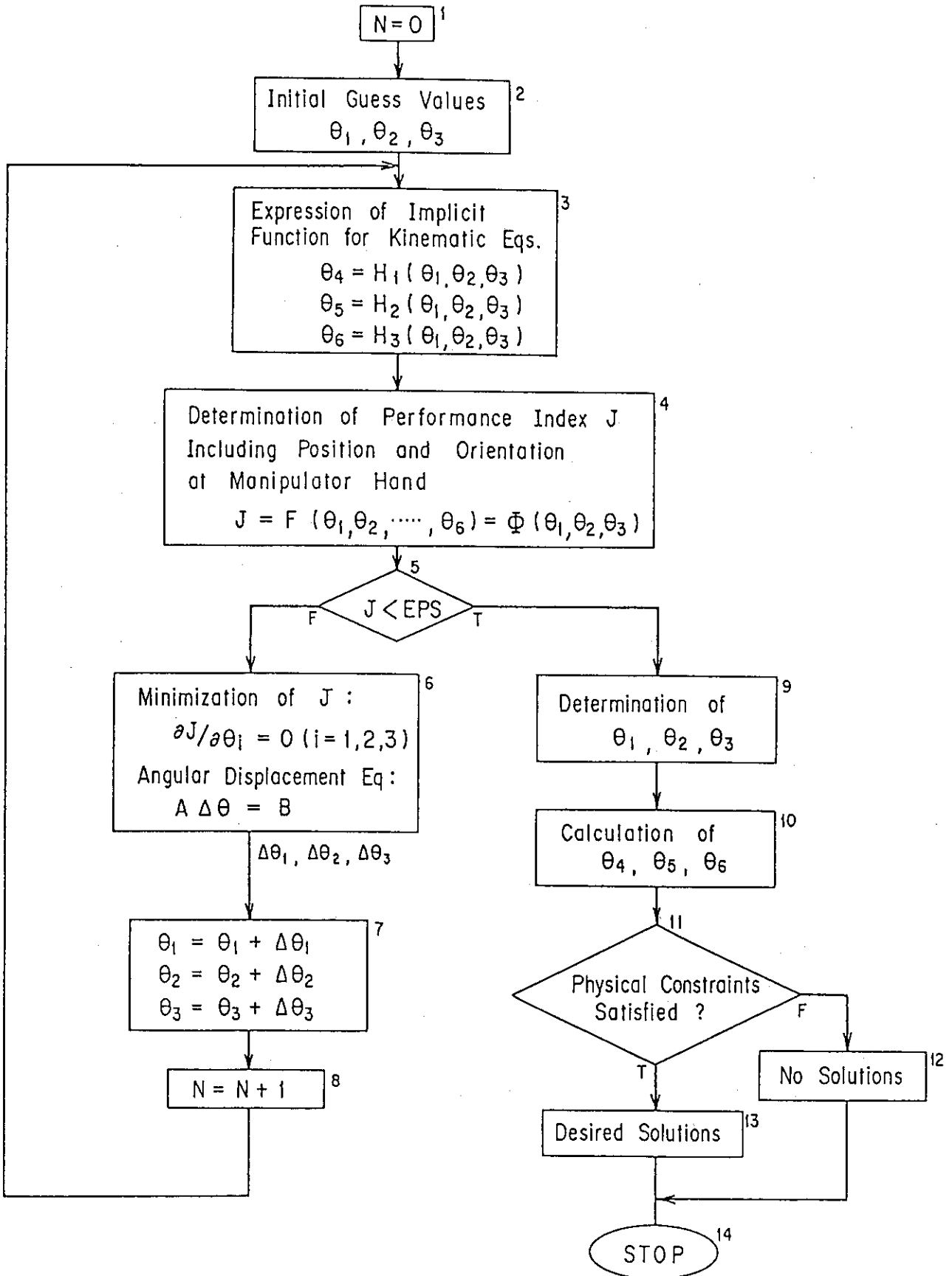


Fig. 2 Computational Algorithm

4. お わ り に

マニピュレータの逆運動学に対する解は、非線形超越方程式を解く問題と考えられ、数値計算の分野で扱われる手法（傾斜法、制約条件付非線形計画法、ペナルティ法など）は解探索に有効なアプローチを提供することもあるが、一般には三角関数が双一次形式で記述されているために原式をそのままの形で計算に適用することは、煩雑な式のため極めて探索に時間を要し、あまり適切でない。従って、マニピュレータ運動学にはこれに適した解法を考える必要がある。提案した新しい方法は、独立変数を分離し評価関数とカップリングさせ、簡単な最適化問題に置き換えたことが原問題の解への糸口となる。これは線形法に立脚した近似的手法ではあるが、すべての6リンク・マニピュレータの解発見に有効と考えられる。本計算では評価関数が解を導く上で精度や収束速度（回数）に大きく影響するため、今後より効率的な関数選択の研究が必要である。

謝 辞

本報を作成する上で原子炉制御研究室篠原慶邦室長に有益なコメントをいただき深謝いたします。

参 考 文 献

1. R.C. Paul: Robot Manipulators-Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
2. 佐々木: "多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題計算法", 計測自動制御学会論文集, vol. 23, No. 5 pp 485/490 (1987).
3. 佐々木: "改良された多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題計算法", 計測制御自動学会論文集, vol. 24, No. 2 pp 204/206 (1988).
4. 佐々木: "多関節形ロボット・マニピュレータの逆運動学方程式に最小化手法を適用した新しい解法", 計測自動制御学会論文集, vol. 23, No. 3 pp 274/280 (1987).
5. 佐々木, 篠原: "ベクトル幾何学および多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題解法", 計測自動制御学会論文集, vol. 24, No. 5 pp 540/542 (1988).
6. S. Sasaki and Y. Shinohara: "Studies of Manipulator Kinematics at JAERI", Proceedings of 1st International Meeting on Advances in Robot Kinematics, Ljubljana (Yugoslavia) pp 14/24 (1988).
7. S. Sasaki: "A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm", JAERI-M 86-018, Feb. (1986).

4. お わ り に

マニピュレータの逆運動学に対する解は、非線形超越方程式を解く問題と考えられ、数値計算の分野で扱われる手法（傾斜法、制約条件付非線形計画法、ペナルティ法など）は解探索に有効なアプローチを提供することもあるが、一般には三角関数が双一次形式で記述されているために原式をそのままの形で計算に適用することは、煩雑な式のため極めて探索に時間を要し、あまり適切でない。従って、マニピュレータ運動学にはこれに適した解法を考える必要がある。提案した新しい方法は、独立変数を分離し評価関数とカップリングさせ、簡単な最適化問題に置き換えたことが原問題の解への糸口となる。これは線形法に立脚した近似的手法ではあるが、すべての6リンク・マニピュレータの解発見に有効と考えられる。本計算では評価関数が解を導く上での精度や収束速度(回数)に大きく影響するため、今後より効率的な関数選択の研究が必要である。

謝 辞

本報を作成する上で原子炉制御研究室篠原慶邦室長に有益なコメントをいただき深謝いたします。

参 考 文 献

1. R.C. Paul: Robot Manipulators-Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
2. 佐々木: "多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題計算法", 計測自動制御学会論文集, vol. 23, No. 5 pp 485/490 (1987).
3. 佐々木: "改良された多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題計算法", 計測制御自動学会論文集, vol. 24, No. 2 pp 204/206 (1988).
4. 佐々木: "多関節形ロボット・マニピュレータの逆運動学方程式に最小化手法を適用した新しい解法", 計測自動制御学会論文集, vol. 23, No. 3 pp 274/280 (1987).
5. 佐々木, 篠原: "ベクトル幾何学および多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題解法", 計測自動制御学会論文集, vol. 24, No. 5 pp 540/542 (1988).
6. S. Sasaki and Y. Shinohara: "Studies of Manipulator Kinematics at JAERI", Proceedings of 1st International Meeting on Advances in Robot Kinematics, Ljubljana (Yugoslavia) pp 14/24 (1988).
7. S. Sasaki: "A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm", JAERI-M 86-018, Feb. (1986).

4. お わ り に

マニピュレータの逆運動学に対する解は、非線形超越方程式を解く問題と考えられ、数値計算の分野で扱われる手法（傾斜法、制約条件付非線形計画法、ペナルティ法など）は解探索に有効なアプローチを提供することもあるが、一般には三角関数が双一次形式で記述されているために原式をそのままの形で計算に適用することは、煩雑な式のため極めて探索に時間を要し、あまり適切でない。従って、マニピュレータ運動学にはこれに適した解法を考える必要がある。提案した新しい方法は、独立変数を分離し評価関数とカップリングさせ、簡単な最適化問題に置き換えたことが原問題の解への糸口となる。これは線形法に立脚した近似的手法ではあるが、すべての6リンク・マニピュレータの解発見に有効と考えられる。本計算では評価関数が解を導く上で精度や収束速度(回数)に大きく影響するため、今後より効率的な関数選択の研究が必要である。

謝 辞

本報を作成する上で原子炉制御研究室篠原慶邦室長に有益なコメントをいただき深謝いたします。

参 考 文 献

1. R.C. Paul: Robot Manipulators-Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
2. 佐々木: "多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題計算法", 計測自動制御学会論文集, vol. 23, No. 5 pp 485/490 (1987).
3. 佐々木: "改良された多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題計算法", 計測制御自動学会論文集, vol. 24, No. 2 pp 204/206 (1988).
4. 佐々木: "多関節形ロボット・マニピュレータの逆運動学方程式に最小化手法を適用した新しい解法", 計測自動制御学会論文集, vol. 23, No. 3 pp 274/280 (1987).
5. 佐々木, 篠原: "ベクトル幾何学および多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題解法", 計測自動制御学会論文集, vol. 24, No. 5 pp 540/542 (1988).
6. S. Sasaki and Y. Shinohara: "Studies of Manipulator Kinematics at JAERI", Proceedings of 1st International Meeting on Advances in Robot Kinematics, Ljubljana (Yugoslavia) pp 14/24 (1988).
7. S. Sasaki: "A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm", JAERI-M 86-018, Feb. (1986).

付録 微分係数の計算

〔1〕 関節変数 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ の微分値

評価関数の最小化を計算するために、以下、陰関数 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ の基準変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ に関する偏導関数を算出する。

最初に、(16)~(18) をつぎのように記述する。

$$w_1 = g_1 + (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) s_1, \quad (\text{A.1})$$

$$w_2 = g_2 - (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) c_1, \quad (\text{A.2})$$

$$w_3 = g_3 - (a_{34} c_{23} + a_2 c_2), \quad (\text{A.3})$$

但し、

$$g_1 = p_x - a_6 n_x, \quad (\text{A.4})$$

$$g_2 = p_y - a_6 n_y, \quad (\text{A.5})$$

$$g_3 = p_z - a_6 n_z - a_1, \quad (\text{A.6})$$

つぎに、(23), (25) で使った X_1, X_2, X_3 等を (A.7)~(A.10) で表しておく。

$$\begin{aligned} X_1 &= w_1 c_1 + w_2 s_1 = \{g_1 + (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) s_1\} c_1 + \{g_2 - (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) c_1\} s_1 \\ &= g_1 c_1 + g_2 s_1 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} X_2 &= (w_1 s_1 - w_2 c_1) = \{g_1 + (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) s_1\} s_1 - \{g_2 - (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) c_1\} c_1 \\ &= (g_1 s_1 - g_2 c_1) + (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$X_3 = -(w_1 s_1 - w_2 c_1) c_{23} + w_3 s_{23} = X_2 c_{23} + w_3 s_{23} = (g_1 s_1 - g_2 c_1) c_{23} + g_3 s_{23} - a_2 s_3 \quad (\text{A.9})$$

$$X_6 = w_3 c_{23} - (w_1 s_1 - w_2 c_1) s_{23} = g_3 c_{23} - (g_1 s_1 - g_2 c_1) s_{23} - a_{34} - a_2 c_3 \quad (\text{A.10})$$

これより、基準変数についての微分が容易に求まる。

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{d\theta_1} &= -g_1 s_1 + g_2 c_1, & \frac{dX_1}{d\theta_2} &= 0, & \frac{dX_1}{d\theta_3} &= 0 \\ \frac{dX_2}{d\theta_1} &= (g_1 c_1 + g_2 s_1), & \frac{dX_2}{d\theta_2} &= a_{34} c_{23} + a_2 c_2, & \frac{dX_2}{d\theta_3} &= a_{34} c_{23} \\ \frac{dX_3}{d\theta_1} &= (g_1 c_1 + g_2 s_1) c_{23} = X_1 c_{23}, \\ \frac{dX_3}{d\theta_2} &= -(g_1 s_1 - g_2 c_1) s_{23} + g_3 c_{23} = X_6 + a_{34} + a_2 c_3, \\ \frac{dX_3}{d\theta_3} &= -(g_1 s_1 - g_2 c_1) s_{23} + g_3 c_{23} - a_2 c_3 = X_6 + a_{34} \\ \frac{dX_6}{d\theta_1} &= -(g_1 c_1 + g_2 s_1) s_{23} = -X_1 s_{23}, \\ \frac{dX_6}{d\theta_2} &= -g_3 s_{23} - (g_1 s_1 - g_2 c_1) c_{23} = -X_3 - a_2 s_3, \\ \frac{dX_6}{d\theta_3} &= -g_3 s_{23} - (g_1 s_1 - g_2 c_1) c_{23} + a_2 s_3 = -X_3 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

こうした準備に続いて(23)の微分計算に移る。

$$\tan \theta_4 = \frac{(w_1 c_1 + w_2 s_1)}{\{(w_1 s_1 - w_2 c_1) c_{23} + w_3 s_{23}\}} = \frac{X_1}{(X_2 c_{23} + w_3 s_{23})} = \frac{X_1}{X_3} \quad (\text{A.12})$$

(A.12)式を直接微分すると煩雑になるため両辺の対数を取り、上で導いた結果(A.11)を利用する。すなわち、

$$\begin{aligned} \log(\tan \theta_4) &= \log X_1 - \log X_3 \\ \frac{1}{\tan \theta_4} \cdot \frac{1}{c_4^2} \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) &= \frac{1}{X_1} \frac{dX_1}{d\theta_1} - \frac{1}{X_3} \frac{dX_3}{d\theta_1} \\ &= \frac{(-g_1 s_1 + g_2 c_1)}{X_1} - \frac{\{(g_1 c_1 + g_2 s_1) c_{23}\}}{X_3} \\ \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) &= s_4 c_4 \left[\frac{\{(a_{34} s_{23} + a_2 s_2) - X_2\}}{X_1} - \frac{X_1 c_{23}}{X_3} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

同様に、 θ_4 の θ_2 、 θ_3 に関する微分演算を行う。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \theta_4} \cdot \frac{1}{c_4^2} \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) &= \frac{1}{X_1} \frac{dX_1}{d\theta_2} - \frac{1}{X_3} \frac{dX_3}{d\theta_2} \\ \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) &= s_4 c_4 \left[\frac{(g_1 s_1 - g_2 c_1) s_{23} - g_3 c_{23}}{X_3} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \theta_4} \cdot \frac{1}{c_4^2} \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) &= \frac{1}{X_1} \frac{dX_1}{d\theta_3} - \frac{1}{X_3} \frac{dX_3}{d\theta_3} \\ \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) &= s_4 c_4 \left[\frac{(g_1 s_1 - g_2 c_1) s_{23} - g_3 c_{23} + a_2 c_3}{X_3} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

θ_5 の基準変数についての微分も同様にして算出する。

$$\begin{aligned} \tan \theta_5 &= \frac{-X_3}{X_6 c_4} \\ \log \tan \theta_5 &= \log X_3 - \log X_6 - \log c_4 \\ \frac{1}{\tan \theta_5} \cdot \frac{1}{c_5^2} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) &= \frac{1}{X_3} \frac{dX_3}{d\theta_1} - \frac{1}{X_6} \frac{dX_6}{d\theta_1} + \tan \theta_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) \\ \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1} \right) &= s_5 c_5 \left[\frac{X_1 c_{23}}{X_3} + \frac{X_1 s_{23}}{X_6} + \tan \theta_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \theta_5} \cdot \frac{1}{c_5^2} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) &= \frac{1}{X_3} \frac{dX_3}{d\theta_2} - \frac{1}{X_6} \frac{dX_6}{d\theta_2} + \tan \theta_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) \\ \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2} \right) &= s_5 c_5 \left[\frac{(X_6 + a_{34} + a_2 c_3)}{X_3} + \frac{(X_3 + a_2 s_3)}{X_6} + \tan \theta_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \theta_5} \cdot \frac{1}{c_5^2} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) &= \frac{1}{X_3} \frac{dX_3}{d\theta_3} - \frac{1}{X_6} \frac{dX_6}{d\theta_3} + \tan \theta_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) \\ \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3} \right) &= s_5 c_5 \left[\frac{(X_6 + a_{34})}{X_3} + \frac{X_3}{X_6} + \tan \theta_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$\left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1}\right)$ などは上で計算した (A.13)~(A.15) を利用する。

最後に、 θ_6 についての計算も (38) を使って行う。

$$\begin{aligned} \log \tan \theta_6 &= \log (AF_2 + CF_1) - \log \{F_2 B - F_1 D - a_5 \Delta\} \\ \frac{1}{\tan \theta_6} \cdot \frac{1}{c_6^2} \left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1}\right) &= \frac{1}{X_7} \frac{dX_7}{d\theta_1} - \frac{1}{X_8} \frac{dX_8}{d\theta_1} \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned}$$

但し、 $X_7 = AF_2 + CF_1$, $X_8 = F_2 B - F_1 D - a_5 \Delta$

これより、基準変数に関する微分値がつぎのように定まる。

$$\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_1}\right) = s_6 c_6 (h_1 - h_2) \tag{A.19}$$

$$\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_2}\right) = s_6 c_6 (h_3 - h_4) \tag{A.20}$$

$$\left(\frac{\partial \theta_6}{\partial \theta_3}\right) = s_6 c_6 (h_5 - h_6) \tag{A.21}$$

各項の計算値は以下にまとめて記述する。

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{AF_2 + CF_1} \left[F_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_1}\right) + A \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_1}\right) + F_1 \left(\frac{\partial C}{\partial \theta_1}\right) + C \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_1}\right) \right] \\ h_2 &= \left[B \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_1}\right) + F_2 \left(\frac{\partial B}{\partial \theta_1}\right) - D \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_1}\right) - F_1 \left(\frac{\partial D}{\partial \theta_1}\right) - a_5 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \theta_1}\right) \right] \\ h_3 &= \frac{1}{AF_2 + CF_1} \left[F_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_2}\right) + A \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_2}\right) + F_1 \left(\frac{\partial C}{\partial \theta_2}\right) + C \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_2}\right) \right] \\ h_4 &= \left[B \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_2}\right) + F_2 \left(\frac{\partial B}{\partial \theta_2}\right) - D \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_2}\right) - F_1 \left(\frac{\partial D}{\partial \theta_2}\right) - a_5 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \theta_2}\right) \right] \\ h_5 &= \frac{1}{AF_2 + CF_1} \left[F_1 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_3}\right) + A \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_3}\right) + F_1 \left(\frac{\partial C}{\partial \theta_3}\right) + C \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_3}\right) \right] \\ h_6 &= \left[B \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_3}\right) + F_2 \left(\frac{\partial B}{\partial \theta_3}\right) - D \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_3}\right) - F_1 \left(\frac{\partial D}{\partial \theta_3}\right) - a_5 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \theta_3}\right) \right] \end{aligned} \tag{A.22}$$

ここに、

$$\begin{aligned} A &= s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4 \\ B &= c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23} \\ C &= c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4 \\ D &= -s_{23} s_4 \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_1}\right) &= c_1 (s_{23} c_5 + s_5 c_{23} c_4) - s_1 s_4 s_5 + \{s_1 (c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5) + c_1 (s_4 c_5)\} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1}\right) + \\ &\quad (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) s_5 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_2}\right) &= S_1 (C_{23} C_5 - S_{23} S_5 C_4) + \{S_1 (C_{23} C_4 C_5 - S_{23} S_5) + C_1 (S_4 C_5)\} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2}\right) + \\ &\quad (C_1 C_4 - S_1 S_4 C_{23}) S_5 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2}\right) \end{aligned} \quad (A.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_3}\right) &= S_1 (C_{23} C_5 - S_{23} S_5 C_4) + \{S_1 (C_{23} C_4 C_5 - S_{23} S_5) + C_1 (S_4 C_5)\} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3}\right) + \\ &\quad (C_1 C_4 - S_1 S_4 C_{23}) S_5 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta_1}\right) &= -(S_1 C_4 + S_4 C_1 C_{23}) - (S_4 C_1 + S_1 C_{23} C_4) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1}\right) \\ \left(\frac{\partial B}{\partial \theta_2}\right) &= S_1 S_{23} S_4 - (S_4 C_1 + S_1 C_{23} C_4) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2}\right) \end{aligned} \quad (A.25)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta_3}\right) &= S_1 S_{23} S_4 - (S_4 C_1 + S_1 C_{23} C_4) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3}\right) \\ \left(\frac{\partial C}{\partial \theta_1}\right) &= -(S_5 C_{23} + S_{23} C_4 C_5) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1}\right) + S_{23} S_4 S_5 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C}{\partial \theta_2}\right) &= -(S_{23} C_5 + S_5 C_{23} C_4) - (S_5 C_{23} + S_{23} C_4 C_5) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2}\right) + S_{23} S_4 S_5 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2}\right) \\ \left(\frac{\partial C}{\partial \theta_3}\right) &= -(S_{23} C_5 + S_5 C_{23} C_4) - (S_5 C_{23} + S_{23} C_4 C_5) \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3}\right) + S_{23} S_4 S_5 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3}\right) \end{aligned} \quad (A.26)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D}{\partial \theta_1}\right) &= -S_{23} C_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1}\right) \\ \left(\frac{\partial D}{\partial \theta_2}\right) &= -S_4 C_{23} - S_{23} C_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2}\right) \end{aligned} \quad (A.27)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D}{\partial \theta_3}\right) &= -S_4 C_{23} - S_{23} C_4 \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3}\right) \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_1}\right) &= (a_{34} S_{23} + a_2 S_2) C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_2}\right) &= (a_{34} C_{23} + a_2 C_2) S_1 \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_3}\right) &= a_{23} C_{23} S_1 \end{aligned} \quad (A.28)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_1}\right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_2}\right) &= a_{34} S_{23} + a_2 S_2 \end{aligned} \quad (A.29)$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_3}\right) = a_{34} S_{23}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_1}\right) &= - \{S_1 (C_{23} C_4 C_5 - S_{23} S_5) + C_1 S_4 C_5\} + \{S_1 S_4 S_5 - C_1 (S_5 C_{23} C_4 + S_{23} C_5)\} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_1}\right) - \\
 &\quad C_5 (S_1 C_4 + C_1 S_4 C_{23}) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_1}\right) \\
 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_2}\right) &= - C_1 (S_5 C_{23} + S_{23} C_4 C_5) + \{S_1 S_4 S_5 - C_1 (S_5 C_{23} C_4 + S_{23} C_5)\} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_2}\right) - \\
 &\quad C_5 (S_1 C_4 + C_1 S_4 C_{23}) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_2}\right) \tag{A.30} \\
 \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_3}\right) &= - C_1 (S_5 C_{23} + S_{23} C_4 C_5) + \{S_1 S_4 S_5 - C_1 (S_5 C_{23} C_4 + S_{23} C_5)\} \left(\frac{\partial \theta_5}{\partial \theta_3}\right) - \\
 &\quad C_5 (S_1 C_4 + C_1 S_4 C_{23}) \left(\frac{\partial \theta_4}{\partial \theta_3}\right)
 \end{aligned}$$

(2) 方向余弦の微分値

方向余弦の微分値も、今後各種評価関数を導入するさいに役立つので簡潔な形で以下にまとめて記載する。

$$\begin{aligned}
 \frac{dn_x}{d\theta_1} &= k_{10} C_6 + k_8 S_6 = -n_y \\
 \frac{dn_x}{d\theta_2} &= -S_1 (k_2 C_6 - k_{04} S_6) = -n_z S_1 \\
 \frac{dn_x}{d\theta_3} &= \frac{dn_x}{d\theta_2} \\
 \frac{dn_x}{d\theta_4} &= -k_7 S_5 C_6 - k_9 S_6 \\
 \frac{dn_x}{d\theta_5} &= -k_{11} C_6 \\
 \frac{dn_x}{d\theta_6} &= A S_6 + B C_6 = 0_x \\
 \frac{dn_y}{d\theta_1} &= -A C_6 + B S_6 = n_x \\
 \frac{dn_y}{d\theta_2} &= (k_2 C_6 - k_{04} S_6) C_1 = n_z C_1 \\
 \frac{dn_y}{d\theta_3} &= \frac{dn_y}{d\theta_2} \\
 \frac{dn_y}{d\theta_4} &= -k_8 S_5 C_6 - S_6 (S_1 S_4 - C_1 C_{23} C_4) \\
 \frac{dn_y}{d\theta_5} &= (k_1 C_1 - k_{09} S_1) C_6 = a_y C_6
 \end{aligned}$$

$$\frac{dn_y}{d\theta_6} = -k_{10}S_6 + k_8C_6 = 0_y$$

$$\frac{dn_z}{d\theta_1} = 0$$

$$\frac{dn_z}{d\theta_2} = -k_4C_6 - s_6(s_4C_{23})$$

$$\frac{dn_z}{d\theta_3} = \frac{dn_z}{d\theta_2}$$

$$\frac{dn_z}{d\theta_4} = k_{06}C_6 - k_{05}S_6$$

$$\frac{dn_z}{d\theta_5} = -k_3C_6$$

$$\frac{dn_z}{d\theta_6} = -k_2S_6 - k_{04}C_6 = 0_z$$

$$\frac{do_x}{d\theta_1} = -k_8C_6 + k_{10}S_6 = -0_y$$

$$\frac{do_x}{d\theta_2} = s_1(k_{04}C_6 + k_2S_6) = -0_zs_1$$

$$\frac{do_x}{d\theta_3} = \frac{do_x}{d\theta_2}$$

$$\frac{do_x}{d\theta_4} = -k_9C_6 + k_7s_5S_6$$

$$\frac{do_x}{d\theta_5} = k_{11}S_6$$

$$\frac{do_x}{d\theta_6} = -Bs_6 + Ac_6 = -n_x$$

$$\frac{do_y}{d\theta_1} = Bc_6 + As_6 = 0_x$$

$$\frac{do_y}{d\theta_2} = -(k_{04}C_6 + k_2S_6)c_1 = 0_zc_1$$

$$\frac{do_y}{d\theta_3} = \frac{do_y}{d\theta_2}$$

$$\frac{do_y}{d\theta_4} = k_8s_5S_6 - (s_1s_4 - c_1c_{23}c_4)C_6$$

$$\frac{do_y}{d\theta_5} = s_6(k_{09}s_1 - k_1c_1) = -a_ys_6$$

$$\frac{do_y}{d\theta_6} = -k_8S_6 - k_{10}S_6 = -n_y$$

$$\frac{do_z}{d\theta_1} = 0$$

$$\frac{do_z}{d\theta_2} = -(s_4 c_{23})c_6 + k_4 s_6$$

$$\frac{do_z}{d\theta_3} = \frac{do_z}{d\theta_2}$$

$$\frac{do_z}{d\theta_4} = -(s_{23} c_4)c_6 - (s_{23} s_4 s_5) s_6$$

$$\frac{do_z}{d\theta_5} = k_3 s_6$$

$$\frac{do_z}{d\theta_6} = k_{04} s_6 - k_2 c_6 = -n_z$$

$$\frac{da_x}{d\theta_1} = -k_1 c_1 + k_{09} s_1 = -a_y$$

$$\frac{da_x}{d\theta_2} = k_3 s_1$$

$$\frac{da_x}{d\theta_3} = \frac{da_x}{d\theta_2}$$

$$\frac{da_x}{d\theta_4} = -k_7 c_5$$

$$\frac{da_x}{d\theta_5} = A$$

$$\frac{da_x}{d\theta_6} = 0$$

$$\frac{da_y}{d\theta_1} = -k_{11} = a_x$$

$$\frac{da_y}{d\theta_2} = -k_3 c_1$$

$$\frac{da_y}{d\theta_3} = \frac{da_y}{d\theta_2}$$

$$\frac{da_y}{d\theta_4} = -k_8 c_5$$

$$\frac{da_y}{d\theta_5} = -k_{10}$$

$$\frac{da_y}{d\theta_6} = 0$$

$$\frac{da_z}{d\theta_1} = 0$$

$$\frac{da_z}{d\theta_2} = -k_1$$

$$\frac{da_z}{d\theta_3} = \frac{da_z}{d\theta_2}$$

$$\frac{da_z}{d\theta_4} = k_{09} s_{23}$$

$$\frac{da_z}{d\theta_5} = -k_2$$

$$\frac{da_z}{d\theta_6} = 0$$

$$k_{01} = c_{23} c_5$$

$$k_{02} = s_{23} c_5$$

$$k_{03} = s_4 s_5$$

$$k_{04} = s_{23} s_4$$

$$k_{05} = s_{23} c_4$$

$$k_{06} = k_{04} s_5$$

$$k_{07} = s_{23} s_5$$

$$k_{08} = s_5 c_{23}$$

$$k_{09} = s_4 c_5$$

$$k_1 = k_{01} c_4 - k_{07}$$

$$k_2 = k_{01} - k_{07} c_4$$

$$k_3 = k_{02} c_4 + k_{08}$$

$$k_4 = k_{02} + k_{08} c_4$$

$$k_7 = c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}$$

$$k_8 = s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}$$

$$k_9 = s_4 c_1 + s_1 c_{23} c_4$$

$$k_{10} = k_4 c_1 - k_{03} s_1$$

$$k_{11} = k_1 s_1 + k_{09} c_1$$

$$A = k_4 s_1 + k_{03} c_1$$

$$B = k_7$$