

JAERI - M  
89-137

マニピュレータ逆運動学に対する  
計算アルゴリズムの開発

1989年10月

佐々木 忍

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division  
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-  
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1989

---

編集兼発行 日本原子力研究所  
印刷 いばらき印刷株

マニピュレータ逆運動学に対する計算アルゴリズムの開発

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1989年9月8日受理)

多関節形ロボット・マニピュレータに対する逆運動学の解法は、多くの三角関数を含む非線形性のために取扱いが極めて困難であると考えられている。もっとも一般的な接近方法は線形化を前提としたヤコビ行列を利用することである。しかしながら、この反復法には、解の初期値依存性や特異性といった解の特性に重要な影響を及ぼす数値問題がつねに伴う。

こうした事実を考慮に入れて、これとは異なる観点からのアプローチが新しく提案されてきた。それらは、運動学モデルの多項式変換、数理計画の最小化技法、ベクトルと幾何学的考え方、最適化問題と関連づけた関節変数の分離などが基礎になっている。計算機シミュレーションにより、それぞれの手法は、複雑な逆問題を精確に解く有用なアルゴリズムと確認できた。

このように、遠隔操作技術の研究開発計画におけるマニピュレータの逆問題に関する短期的な研究目標は首尾よく達成されたので、本件についてのこれまでの基礎研究の成果を本報において総括する。

The Development of Computational Algorithms  
for Manipulator Inverse Kinematics

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering  
Tokai Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received September 8, 1989)

A solution technique of the inverse kinematics for multi-joint robot manipulators has been considered to be one of the most cumbersome treatment due to non-linearity properties inclusive of trigonometric functions. The most traditional approach is to use the Jacobian matrix on linearization assumptions. This iterative technique, however, is attended with numerical problems having significant influences on the solution characteristics such as initial guess dependence and singularities.

Taking these facts into consideration, new approaches have been proposed from different standpoints, which are based on a polynomial transformation of kinematic model, the minimization technique in mathematical programming, vector-geometrical concept, and the separation of joint variables associated with the optimization problem. In terms of computer simulations, each approach was identified to be a useful algorithm which leads to theoretically accurate solutions to complicated inverse problems.

In this way, the short-term goal of our studies on manipulator inverse problem in the R&D project of remote handling technology was accomplished with success, and consequently the present report sums up the results of basic studies on this matter.

Keywords : Inverse Kinematics, Polynomial Model, Minimization Technique,  
Six-Link Manipulator, Jacobian Method

## 目 次

1. はじめに .....	1
2. 解析モデル総説 .....	3
2.1 序 論 .....	3
2.2 変換多項式を用いた手法 (その1) .....	7
2.3 変換多項式を用いた手法 (その2) .....	21
2.4 仮想マニピュレータを用いた最適化手法 .....	29
2.5 空間ベクトルと幾何学的概念による計算法 .....	39
2.6 変数分離による手法 .....	45
3. サンプル計算と結果 .....	51
4. おわりに .....	74
謝 辞 .....	75
参考文献 .....	76
付 録 .....	78

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Description of mathematical models .....	3
2.1 Introductory remarks .....	3
2.2 Approach I based on a transformed polynomial .....	7
2.3 Approach II based on a transformed polynomial .....	21
2.4 Optimization method using an imaginary manipulator .....	29
2.5 Approach based on vector-geometrical concept .....	39
2.6 Approach based on the separation of joint variables .....	45
3. Examples of sample problem and results .....	51
4. Concluding remarks .....	74
References .....	75
Acknowledgements .....	76
Appendices .....	78

## List of Tables

Table 1	List of Computer Codes for Manipulator Inverse Kinematics
Table 2	Convergence Characteristics 2
Table A.1	Link Parameters for a Six-Link Manipulator

## List of Figures

Fig. 1	Schematic Representation of an Articulated Robot Manipulator
Fig. 2	A Six-link Manipulator with Arbitrary Link Co-ordinates Systems
Fig. 3	Definition of Link Co-ordinates Systems
Fig. 4	Kinematic Analysis with Imaginary Links
Fig. 5	Kinematic Structure of Imaginary Link 6 to 5
Fig. 6	Kinematic Structure of Imaginary Link 5 to 4
Fig. 7	Kinematic Structure of Imaginary Link 4 to 3
Fig. 8	Kinematic Structure of Imaginary Link 3 to 2
Fig. 9	Kinematic Structure to End-point of Imaginary Link 2
Fig. 10	Six-link Manipulator and Link Co-ordinates Systems
Fig. 11	Geometrical Illustration of Links Between Joints 2 and 5
Fig. 12	Computational Algorithm
Fig. 13	Trajectories Used in the Calculations
Fig. 14	Behavior of Joint Angle $\theta_6$ (Sample Problem 1 - case 1)
Fig. 15	Behavior of Joint Angle $\theta_5$ (Sample Problem 1 - case 1)
Fig. 16	Behavior of Joint Angle $\theta_4$ (Sample Problem 1 - case 1)
Fig. 17	Behavior of Joint Angle $\theta_3$ (Sample Problem 1 - case 1)
Fig. 18	Behavior of Joint Angle $\theta_2$ (Sample Problem 1 - case 1)
Fig. 19	Behavior of Joint Angle $\theta_1$ (Sample Problem 1 - case 1)
Fig. 20	Behavior of Joint Angle $\theta_6$ (Sample Problem 1 - case 2)
Fig. 21	Behavior of Joint Angle $\theta_5$ (Sample Problem 1 - case 2)
Fig. 22	Behavior of Joint Angle $\theta_4$ (Sample Problem 1 - case 2)
Fig. 23	Behavior of Joint Angle $\theta_3$ (Sample Problem 1 - case 2)
Fig. 24	Behavior of Joint Angle $\theta_2$ (Sample Problem 1 - case 2)
Fig. 25	Behavior of Joint Angle $\theta_1$ (Sample Problem 1 - case 2)
Fig. 26	Calculated Results of Joints Variables (Sample Problem 2)
Fig. 27	Behavior of Joint Angle $\theta_1$ (Sample Problem 3)
Fig. 28	Behavior of Joint Angle $\theta_2$ (Sample Problem 3)
Fig. 29	Behavior of Joint Angle $\theta_3$ (Sample Problem 3)

- Fig. 30 Behavior of Joint Angle  $\theta_4$  (Sample Problem 3)
- Fig. 31 Behavior of Joint Angle  $\theta_5$  (Sample Problem 3)
- Fig. 32 Behavior of Joint Angle  $\theta_6$  (Sample Problem 3)
- Fig. 33 Convergence Characteristics 1
- Fig. A.1 Kinematic Relation Between Link  $i-1$  and  $i$

## 1. はじめに

一定の拘束条件下で運動を行うカムや歯車それにリンクなどの空間リンク機構は、機構学の分野で古くから研究がなされてきたが、リンク先端にハンドをもち対象物のマニピュレーションを行う目的で設計されたロボット・マニピュレータは、制御を前提とした比較的新しいタイプの機構である。その制御を確実に実行させるために、開ループ・直列連鎖構造をとるこの機構各部と指先との幾何学的・機構学的関係や特徴を十分に把握しておくことが必要不可欠である。

ところで、多関節形マニピュレータの解析研究にとり、もっとも基本となる運動記述は、各関節変位(回転または旋回)を与えて指先の位置・姿勢を求めるいわゆる順運動学(direct/forward kinematics)と、逆に指先・姿勢から各関節の変位を決定する逆運動学(inverse kinematics)に分類できる。定式化にあたって、まず、本報で取扱うマニピュレータは6自由度であることを念願におかねばならない。一般に、それ以下の自由度であれば3次元空間内で所望の位置と姿勢のいずれかを満足することができず、また過剰であれば解が確定しないので問題解決に対してなんらかの条件を付加した取扱いが必要となる。これら運動学の解析方法はいろいろあるが、一般的に論ずるには座標変換行列を利用するのが便利である。順問題の方は、Denavit-Hartenbergの考えを基にPaulによる同次座標変換法を用いると関節角と指先位置・姿勢との対応関係が統一的に記述できる。<sup>(1),(2)</sup>

一方、逆問題については、回転角の正弦、余弦を多数含む連立非線形方程式を構成するため、解析解を求めることが困難であるばかりか、その数値計算も非常に複雑である。特定の構造をもったアーム(例えば、Stanford-Arm)に対して、視察により行列要素の計算を簡略化する方法がPaulらにより提案されているが、定石的なものとはいえない。<sup>(2)</sup>

このように、マニピュレータの逆問題に対する解は非線形超越方程式の解を求めることが中心となることから、数値計算の分野でよく扱われる手法(降下法、制約条件付非線形計画法、ペナルティ法など)<sup>(3)</sup>が有効なアルゴリズムと考えられる。しかしながら、三角関数を双一次形式で表現した極めて長たらしく複雑な運動学の原式をそのままの形で計算に適用することは、解の探索に多くの時間を要しあまり適切でない。むしろ、マニピュレータの機構解析にはこれに適した効率的な解法を考え適用するのが自然である。

在来法として、位置と姿勢に関する関節解を線形近似したヤコビ行列から逐次反復計算で解を求めるアプローチが定着化している。この方法は計算機処理の観点からそのアルゴリズムが単純なため今日一般的に利用されているものの、解の初期値依存性やヤコビ行列の特異点存在の可能性など、解を導く上で考慮すべき点がある。また、指定されたマニピュレータの指先位置・姿勢を表現する解が実際には幾通りか存在する場合でも、ヤコビ法による繰返し計算では与えられた初期値に対して(収束した場合においても)1つの解しか求まらないという不満が残る。<sup>(2)~(11)</sup>

こうした状況が動機となって、これまでヤコビ法に代る新しいアプローチをいくつか提案してきた。<sup>(13~20)</sup>本報は、遠隔操作の研究の一環として継続して行ってきたマニピュレータ逆運動学の解析的な研究成果を集約するとともに当該コードの自主開発を総括することが目的である。開発



したモデルは、所要の解を厳密かつ網羅的に解くためのアルゴリズムをはじめとして、実時間で高精度な計算を可能とする手法、幾何学的な直感に訴えた解法、変数分離による最適化手法など多岐にわたっており、従来法の弱点克服にそれぞれのモデルが重要な役割を演じていると考えられる。オンラインでマニピュレータの関節計算が必要な場合を中心に、作業空間のなかで指先の位置姿勢を実現する最適な形状を知りたい場合や、幾何学的取扱いによるリンク機構へのよりよい理解を得る手段として利用できる。条件の与え方次第で6自由度以上の冗長性をもったマニピュレータにも適用が可能である。

以上のアプローチはいずれも正攻法的な考え方から離れて機構本来の性質や方程式の特徴を違った角度から掘り下げ追及した結果生み出されたもので、ここに本研究の意義がある。とりわけ、マニピュレータのリンク関係式は、自由度が1つ増える毎に指数的に煩雑化する傾向がある。その取扱いを容易にするには簡潔な式の記述やモデル化が最も重要である。本研究で取入れた多くの簡略化の考え方や技法は、他の異なるタイプのマニピュレータに遭遇しても解決への有力な糸口を与えるであろう。

本報の構成としては、つぎの第2章で理論の展開を全般にわたって紹介する。とくに、運動学の関係式を多項式表現に変換して解くケースは、初期のモデルから次数を低減化した改良モデルまで完全に記述した。さらに、隣接リンク間の一般的な機構表現（つまり、Denavit-Hartenberg記法に基づく  $A_i$  行列）により演繹したマニピュレータ逆運動学をこの多項式モデルで解くために、計算コードの整備を今回追加した。この表現法は、関節の構造・組合せがいかに複雑であろうと機構関係を一定の手順で組織的に引出せるうえに、慣性座標系での動特性アルゴリズムの開発にも都合が良く、加えて種々の座標系を自由に選択した場合に生じる混乱からも解放されるなどの利点をもつ。第3章では、これら計算コードによる解析結果を例示する。

## 2. 解析モデル総説

### 2.1 序 論

本研究では、マニピュレータの逆運動学に対する従来法(ヤコビ法)のウイーク・ポイントを考慮しながらこれに代るつぎの新しい考え方を提案する。すなわち、それらは、

- 1) 変換多項式を用いた手法
- 2) 仮想マニピュレータを用いた最適化手法
- 3) ベクトル幾何を用いた手法
- 4) 変数分離と最小化技法を取入れた手法

などに分類され、モデルの内容を以下に続く各節で紹介する。その特徴を要約すれば、最初に取り上げた方法はリンク機構の関係を一旦代数的処理で1変数の代数方程式に変換(以下ではこの代数方程式を変換多項式または変換方程式と呼ぶ)し、その実根から関節解を算出するものである。この変換された方程式を解くことにより、マニピュレータの指定された指先位置と姿勢を実現するあらゆる可能な関節解が、厳密かつ網羅的に引出せることになる。続くモデルはベースに回転ジョイントが結合された構造に着目し、指先を起点とする幾何学的に等価な仮想的マニピュレータを考え、それと実在のマニピュレータの根元近くでの物理的接続条件が一致するように適当な評価関数を導入した上で、数理計画の最小化問題に置き換えて解を導き出す。実際の計算で定式化が必要なのは4変数のみで、残り2変数が従属的に決定できることから、演算処理の高速化につながった。第3番目の方法は、リンク機構の関係を作業空間、つまり、ユークリッド3次元空間のなかで直接議論することを試み、ベクトルと初等幾何学の基礎的事項で十分解決できることが判明した。解を引出す過程において、機構の姿勢と数学的解との関係が明白になり、直感と視覚に訴えた解決方法は単に式の追跡から解を導く方法に比べて、有益な場合もあることを示唆した。リンク機構の特徴をさらに探ってみると、現存する6自由度の産業用ロボットのなかには、位置と姿勢の決定機構が分離されたもの(つまり、最初の3自由度が手首位置の決定に、また、残り3自由度がその方向決定に寄与する機構)が多々みられる。関節の機能が単純化する上に、逆問題を容易に解決できることが特徴といえる。こうした事実がヒントとなって、一般的な形状のマニピュレータ、つまり位置決定機構と姿勢決定機構が切り離せない構造に対しても関節変数を形式的に分離し、例えば、独立3変数系からなる評価関数の最適化問題に帰着させ解を導くことを考えた。このように、取扱う関節変数を減らす工夫は、モデルの簡潔な記述、計算時間の短縮、収束精度の向上に大きく反映される。

以上、従来のヤコビ法に代わる逆問題のアプローチを4つ提案したが、その優位性は実際の計算により確認する。定石的なアプローチであるヤコビ法(あるいは一般化逆行列法)を離れて議論する場合、取組むうえでの一貫した考え方は、複雑で取扱いづらい関係式を如何にコンパクトに整理し、効率よい演算方法を開発するかにかかっており、発見的手法(Heuristics)が一連の解決の鍵を握っているようである。

さて、本研究では多関節形ロボットの典型である6リンク・マニピュレータを考察の対象として選び、その概観図をFig. 1に与える。マニピュレータ・アームの運動は各リンクの空間的相対運動によって決る。この運動の解析的研究を行う場合、各リンクの運動を調べる必要がある。このため個々のリンクとリンクの結合部、いわゆる関節部分に固定した座標系を定めその動きについて考察するのが基本的である。本研究では、主としてFig. 2の座標系を用いる。これを基に導き出された運動学方程式が下記の式(2.1.1)～(2.1.12)である(導出過程は付録A.1に示す)。

$$n_x = -(s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) c_6 + s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) \quad (2.1.1)$$

$$n_y = (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) c_6 + s_6 (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) \quad (2.1.2)$$

$$n_z = (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) c_6 - s_{23} s_4 s_6 \quad (2.1.3)$$

$$o_x = (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) c_6 + s_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) \quad (2.1.4)$$

$$o_y = (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) c_6 - s_6 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) \quad (2.1.5)$$

$$o_z = -(s_{23} s_4) c_6 + s_6 (s_{23} s_5 c_4 - c_{23} c_5) \quad (2.1.6)$$

$$a_x = s_1 s_{23} s_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 - s_4 c_1 c_5 \quad (2.1.7)$$

$$a_y = c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1 - s_1 s_4 c_5 \quad (2.1.8)$$

$$a_z = -(s_{23} c_4 c_5 + s_5 c_{23}) \quad (2.1.9)$$

$$P_x = -a_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) c_6 + a_6 s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) - a_5 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) - (a_3 + a_4) s_1 s_{23} - a_2 s_1 s_2 \quad (2.1.10)$$

$$P_y = a_6 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) c_6 + a_6 s_6 (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) + a_5 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) + (a_3 + a_4) s_{23} c_1 + a_2 s_2 c_1 \quad (2.1.11)$$

$$P_z = a_6 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) c_6 + a_6 (-s_{23} s_4) s_6 + a_5 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) + (a_3 + a_4) c_{23} + a_2 c_2 + a_1 \quad (2.1.12)$$

ここで、本報で使用する記号について下記の約束をしておく。

$$(i) \quad s_i = \sin \theta_i, \quad c_i = \cos \theta_i, \quad s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j), \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j),$$

(ii)  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ ,  $\mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z)^T$ ,  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ ; マニピュレータの指先姿勢を決定するための座標軸上の単位ベクトルである( $T$ は転置記号とする)。各関節軸に対しては、 $\mathbf{n}_i = (n_{ix}, n_{iy}, n_{iz})^T$ ,  $\mathbf{o}_i = (o_{ix}, o_{iy}, o_{iz})^T$ ,  $\mathbf{a}_i = (a_{ix}, a_{iy}, a_{iz})^T$  ( $i=0, 1, \dots, 6$ ) で表す。但し、 $i=0$ はベース(基準となる台座)を、また、 $i=6$ は指先を意味する。このことから、例えば、 $n_x, n_y, o_z$ などは、それぞれ指先座標系の  $x_6$  方向単位ベクトルと基準系  $x_0$  方向の単位ベクトルとの方向余弦、指先座標系の  $x_6$  方向単位ベクトルと基準系  $y_0$  方向の単位ベクトルとの方向余弦、指先座標系の  $y_6$  方向単位ベクトルと基準系  $z_0$  の単位ベクトルとの方向余弦を表す。

(iii)  $P_x, P_y, P_z$ ; 基準座標系における指先の位置座標を示す。

$s_i, c_j$ を含むリンク関係式は、正弦関数を先に、続いて余弦関数を記述した。添字は若い番号から整理してある。

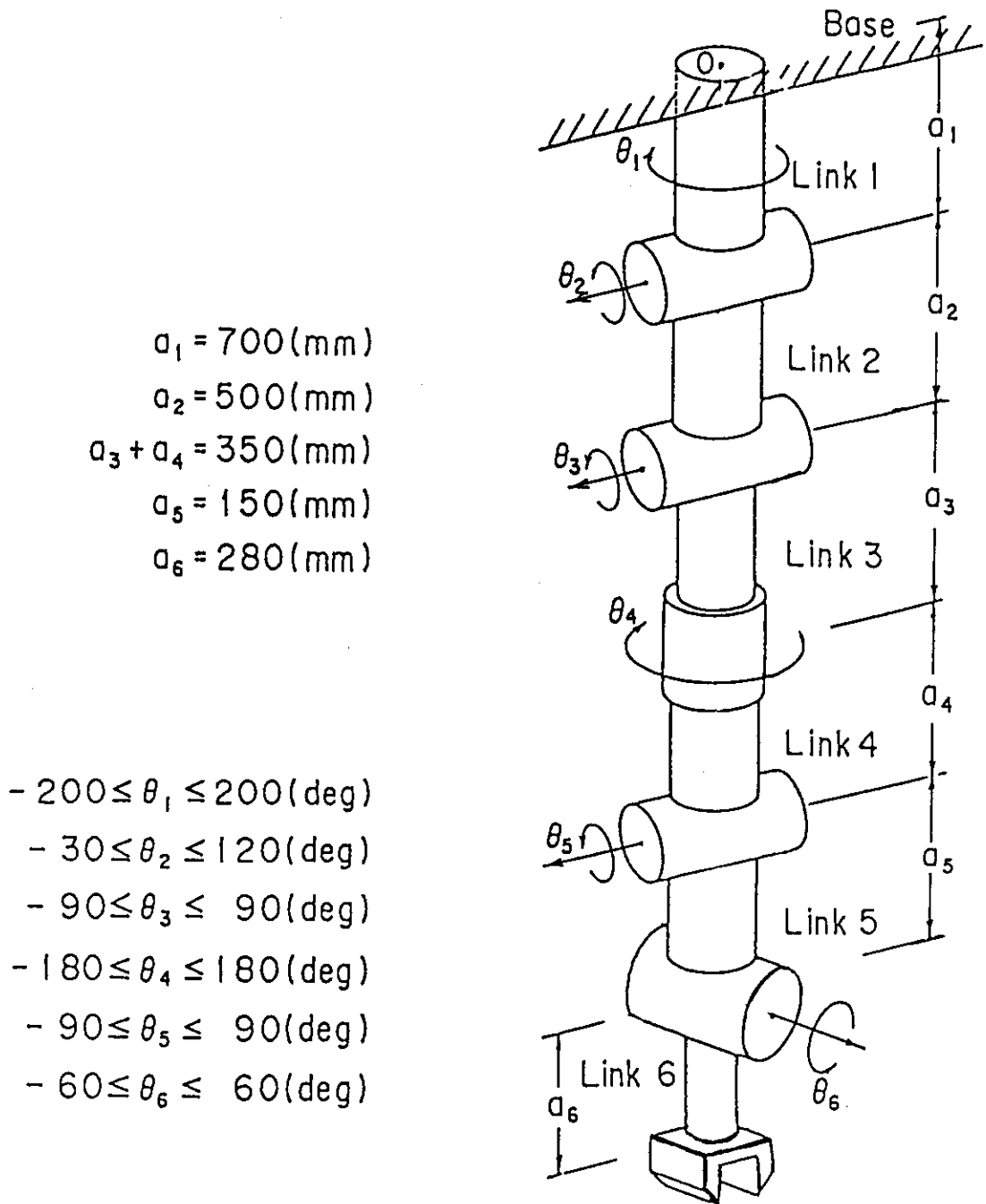


Fig. 1 Schematic Representation of an Articulated Robot Manipulator

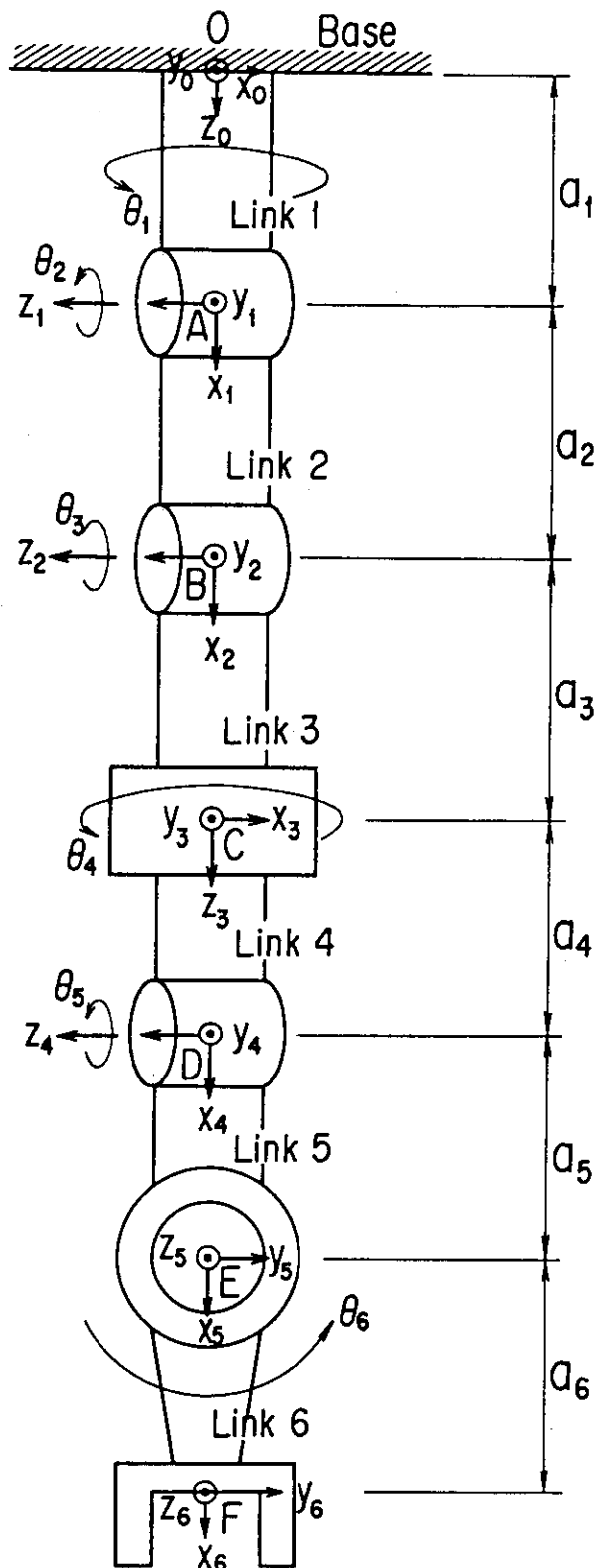


Fig. 2 A Six-link Manipulator with Arbitrary Link Co-ordinates Systems

## 2.2 変換多項式を用いた手法 (その1)

2.2.1 24次変換方程式のモデル<sup>(13, 14, 15, 16)</sup>

2.1節で与えたマニピュレータの指先位置・姿勢と関節角間の関係式の内、式(2.1.7)~(2.1.9)は姿勢ベクトルの直交関係  $\mathbf{a} = \mathbf{n} \times \mathbf{o}$  から一意的に決定されるのでこれを除く他の式から解へつながら糸口を発見する。各々の式は、指先に最も近い回転角の正弦・余弦で整理してある。そのなかで姿勢ベクトル(方向ベクトルや方向余弦ベクトルとも呼ぶ)の各要素は、一見複雑なようだが共通の因子を次のパラメータ

$$A = s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4 \quad (2.2.1.1)$$

$$B = c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23} \quad (2.2.1.2)$$

$$C = s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4 \quad (2.2.1.3)$$

$$D = s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23} \quad (2.2.1.4)$$

$$E = c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4 \quad (2.2.1.5)$$

$$F = -s_{23} s_4 \quad (2.2.1.6)$$

で置き換えることで、式全体が簡潔な記述となる。簡単な計算から、採用した新しいパラメータ A, B, C, …は  $c_6, s_6$  のみで表現でき、この結果、マニピュレータの指先位置が式(2.2.1.13)~(2.2.1.15)のように単純な形に整理される。パラメータはこのような目的で導入したものであるが、その物理的な意味は第6関節のひとつ手前、つまり基準座標系からみたときの第5関節の姿勢を表現している。

$$A = -n_x c_6 + o_x s_6 \quad (2.2.1.7)$$

$$B = n_x s_6 + o_x c_6 \quad (2.2.1.8)$$

$$C = n_y c_6 - o_y s_6 \quad (2.2.1.9)$$

$$D = n_y s_6 + o_y c_6 \quad (2.2.1.10)$$

$$E = n_z c_6 - o_z s_6 \quad (2.2.1.11)$$

$$F = -o_z c_6 + n_z s_6 \quad (2.2.1.12)$$

$$\begin{aligned} P_x &= -a_6 c_6 A + a_6 s_6 B - a_5 A - a_{34} s_1 s_{23} - a_2 s_1 s_2 \\ &= a_6 n_x - a_5 A - a_{34} s_1 s_{23} - a_2 s_1 s_2 \end{aligned} \quad (2.2.1.13)$$

$$\begin{aligned} P_y &= a_6 c_6 C + a_6 s_6 D + a_5 C + a_{34} s_{23} c_1 + a_2 s_2 c_1 \\ &= a_6 n_y + a_5 C + a_{34} s_{23} c_1 + a_2 s_2 c_1 \end{aligned} \quad (2.2.1.14)$$

$$\begin{aligned} P_z &= a_6 c_6 E + a_6 s_6 F + a_5 E + a_{34} c_{23} + a_2 c_2 + a_1 \\ &= a_6 n_z + a_5 E + a_{34} c_{23} + a_2 c_2 + a_1 \end{aligned} \quad (2.2.1.15)$$

但し、 $a_3 + a_4 = a_{34}$

最初に、演算  $(2.2.1.13) \times c_1 + (2.2.1.14) \times s_1$  を行い次の式を得る。

$$\frac{s_1}{c_1} = \frac{P_x - a_6 n_x + a_5 A}{a_6 n_y + a_5 C - P_y} = \frac{XX + a_5 A}{a_5 C - YY} \quad (2.2.1.16)$$

$$\text{但し、} \quad XX = P_x - a_6 n_x, \quad YY = P_y - a_6 n_y \quad (2.2.1.17)$$

ここで、分母子が  $s_6, c_6$  で表されているので、 $\tan(\theta_6/2)$  で整理できることがわかる。すなわち、 $\tan(\theta_6/2) = t$  とおくと、 $c_6 = (1-t^2)/(1+t^2)$ ,  $s_6 = 2t/(1+t^2)$ ,  $\tan\theta_6 = 2t/(1-t^2)$  が成立するか

ら、上の $\tan\theta_1$ が、

$$\tan\theta_1 = \frac{X_n + 2a_5o_x t + X_p t^2}{Y_n - 2a_5o_y t + Y_p t^2} = \frac{X}{Y} \quad (2.2.1.18)$$

と表せる。

$$\text{但し, } X_p = a_5 n_x + XX, \quad X_n = -a_5 n_x + XX \quad (2.2.1.19)$$

$$Y_p = -(a_5 n_y + YY), \quad Y_n = a_5 n_y - YY$$

続いて、 $P_x \times (-s_1) + P_y \times c_1$ を計算すると、

$$a_5 c_6 \{(n_y c_1 - n_x s_1) + (s_1 o_x - o_y c_1) \tan\theta_6\} - \{-P_x s_1 + P_y c_1 + a_6(n_x s_1 - n_y c_1)\} + a_{34} s_{23} = -a_2 s_2 \quad (2.2.1.20)$$

となり、また、 $P_z$ に関する式(2.2.1.15)を

$$a_5 c_6 (n_z - o_z \tan\theta_6) - ZZ + a_{34} c_{23} = -a_2 c_2 \quad (2.2.1.21)$$

と表しておく。

$$\text{但し, } ZZ = P_z - a_6 n_z - a_1 \quad (2.2.1.22)$$

ここで、新しい変数 $\phi$ と $\eta$

$$\phi = a_5 c_6 (n_z - o_z \tan\theta_6) - ZZ \quad (2.2.1.23)$$

$$\eta = a_5 c_6 \{(n_y c_1 - n_x s_1) + (s_1 o_x - o_y c_1) \tan\theta_6\} - \{-P_x s_1 + P_y c_1 + a_6(n_x s_1 - n_y c_1)\} \quad (2.2.1.24)$$

を導入して式(2.2.1.20)、(2.2.1.21)をつぎのように書換える。

$$\phi + a_{34} c_{23} = -a_2 c_2$$

$$\eta + a_{34} s_{23} = -a_2 s_2 \quad (2.2.1.25)$$

この2式から、

$$\phi^2 + \eta^2 - a = -2a_{34}(\phi c_{23} + \eta s_{23}) = -2a_{34} c_{23}(\phi + k\eta) \quad (2.2.1.26)$$

$$\text{但し, } a = a_2^2 - a_{34}^2, \quad k = \tan\theta_{23}$$

が導き出せる。以後、式(2.2.1.26)を逆運動学を解く基本式と定め、未知変数 $\phi$ 、 $\eta$ などの表現方法を考える(以下、巾級数の係数の詳細は付録A.2を参照のこと)。

まず、 $\tan\theta_1$ 、 $\tan\theta_6$ 、 $c_6$ の値を式(2.2.1.24)に代入して、 $t$ の有理関数を作ると、

$$\eta = \frac{c_1}{(1+t^2)(Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)} \sum_{i=0}^4 k_i t^i \quad (2.2.1.27)$$

と記述できる。また、式(2.2.1.23)の $\phi$ 及び $\phi^2$ を

$$\phi = a_5 c_6 (n_z - o_z \tan\theta_6) - ZZ = \frac{1}{(1+t^2)} \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \quad (2.2.1.28)$$

$$\phi^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2} \left\{ \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \right\}^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2} \sum_{i=0}^4 d_i t^i \quad (2.2.1.29)$$

と表現する。さらに、式(2.2.1.18)から $c_1^2$ がつぎのような $t$ の有理式となる。

$$c_1^2 = \frac{Y^2}{X^2 + Y^2} = \frac{(Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)^2}{\left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)} \quad (2.2.1.30)$$

これらを基本式(2.2.1.26)の左辺に代入・整理したものが式(2.2.1.31)である。

$$\begin{aligned}
 \phi^2 + \eta^2 - a &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \left\{ \sum_{i=0}^4 d_i t^i + \frac{\left( \sum_{i=0}^4 k_i t^i \right)^2}{\left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)} \right\} - a \\
 &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \frac{1}{\sum_{i=0}^4 f_i t^i} \left\{ \left( \sum_{i=0}^4 d_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right) + \sum_{i=0}^8 e_i t^i \right\} - a \\
 &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \frac{1}{\sum_{i=0}^4 f_i t^i} \left\{ \sum_{i=0}^8 g_i t^i + \sum_{i=0}^8 e_i t^i - a \sum_{i=0}^8 h_i t^i \right\} \\
 &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \frac{1}{\left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)} \left\{ \sum_{i=0}^8 J_i t^i \right\} \tag{2.2.1.31}
 \end{aligned}$$

但し,  $(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i = \sum_{i=0}^8 h_i t^i$  (2.2.1.32)

一方, 基本式(2.2.1.26)の右辺については, まず,  $\tan\theta_{23}$  の記述を考える。それは, 式 (2.2.1.2), (2.2.1.4), (2.2.1.6) の  $s_4 c_{23}$  と  $s_4 s_{23}$  から次のように決まる。

$$\tan\theta_{23} = \frac{-(n_z s_6 + o_z c_6)}{(-n_x s_1 + n_y c_1) s_6 + (o_y c_1 - o_x s_1) c_6} (=k) \tag{2.2.1.33}$$

また,  $k\eta$ ,  $c_{23}^2$ ,  $\phi + k\eta$  はつぎのようになる。

$$k\eta = - \frac{\sum_{i=0}^4 k_i t^i (o_z + 2n_z t - o_z t^2)}{(1+t^2) \left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)} \tag{2.2.1.34}$$

$$\begin{aligned}
 c_{23}^2 &= \frac{1}{1 + \tan^2\theta_{23}} = \frac{\left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)^2}{\left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)^2 + (o_z + 2n_z t - o_z t^2)^2 \left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i}{\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i - \left( \sum_{i=0}^4 (LL)_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i}{\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i + \sum_{i=0}^8 (PL)_i t^i} = \frac{\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i}{\sum_{i=0}^8 L_i t^i} \tag{2.2.1.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi + k\eta &= \frac{1}{(1+t^2)} \frac{1}{\sum_{i=0}^4 l_i t^i} \left\{ -(o_z + 2n_z t - o_z t^2) \left( \sum_{i=0}^4 k_i t^i \right) + \left( \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \right) \left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{(1+t^2) \sum_{i=0}^4 l_i t^i} \left\{ \sum_{i=0}^6 K_i t^i + \sum_{i=0}^6 (II)_i t^i \right\} = \frac{1}{(1+t^2) \sum_{i=0}^4 l_i t^i} \left\{ \sum_{i=0}^6 (PI)_i t^i \right\} \tag{2.2.1.36}
 \end{aligned}$$



従って、式(2.2.1.26)の右辺を2乗したものは、

$$4a_{34}^2 \frac{\left(\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i\right) \left(\sum_{i=0}^6 (Pl)_i t^i\right)^2}{\sum_{i=0}^8 L_i t^i (1+t^2)^2 \left(\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i\right)} = \frac{\left(\sum_{i=0}^{12} m_i t^i\right)}{\left(\sum_{i=0}^8 L_i t^i\right) (1+t^2)^2} \quad (2.2.1.37)$$

となり、左辺の2乗は式(2.2.1.31)を利用して

$$\frac{\left(\sum_{i=0}^8 J_i t^i\right)^2}{(1+t^2)^4 \left(\sum_{i=0}^4 f_i t^i\right)^2} = \frac{\sum_{i=0}^{16} N_i t^i}{\left(\sum_{i=0}^{12} W_i t^i\right) (1+t^2)^2} \quad (2.2.1.38)$$

を得る。

但し、
$$\sum_{i=0}^{12} W_i t^i = (1+t^2)^2 \left(\sum_{i=0}^4 f_i t^i\right)^2$$

式(2.2.1.37)、(2.2.1.38)の両式の分母を払って、

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{12} m_i t^i\right) \left(\sum_{i=0}^{12} W_i t^i\right) &= \sum_{i=0}^{24} P_i t^i \\ \left(\sum_{i=0}^8 L_i t^i\right) \left(\sum_{i=0}^{16} N_i t^i\right) &= \sum_{i=0}^{24} Q_i t^i \end{aligned} \quad (2.2.1.39)$$

と定義すると、ここに最終的な方程式が導き出せる。

$$\sum_{i=0}^{24} (P_i - Q_i) t^i = \sum_{i=0}^{24} R_i t^i = H(t) = 0 \quad (2.2.1.40)$$

以上、運動学の関係式は $\theta_6$ を独立変数とする式(2.2.1.40)に置き換えられた。その解法には、高次多項式 $H(t)$ を次々と2次式で割り全ての根を精度よく求めていくいわゆるBairstow法が適切であると考えられた。<sup>23)</sup>  $\theta_6$ の可動範囲が $\pm 60(\text{deg})$ 以内のため、 $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たすものを多項式の可能解として採択する。Bairstow法についての説明は付録A.3に記載する。

最後に $t$ の値から各関節角の決定を行う。

(1)  $\theta_6$ の計算

代数方程式(2.2.1.40)の実根から、容易に

$$\theta_6 = 2 \tan^{-1} t \quad (2.2.1.41)$$

が算出される。

(2)  $\theta_1$ の計算

$\theta_6$ が定まると式(2.2.1.16)から

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{P_x - a_6 n_x + a_5 A}{a_6 n_y + a_5 C - P_y} \right) \quad (2.2.1.42)$$

が求まる。

(3)  $\theta_{23}$  の計算

基本式(2.2.1.26)から

$$\begin{aligned}\phi^2 + \eta^2 - a &= -2a_{34}(\phi c_{23} + \eta s_{23}) \\ &= -2a_{34}\sqrt{\phi^2 + \eta^2} \sin(\theta_{23} + \epsilon)\end{aligned}$$

と整理して、次式を得る。

$$\theta_{23} = \tan^{-1} \left[ \frac{\pm(\phi^2 + \eta^2 - a)/(-2a_{34}\xi)}{\sqrt{1 - \{(\phi^2 + \eta^2 - a)/(-2a_{34}\xi)\}^2}} \right] - \epsilon \quad (2.2.1.43)$$

但し、 $\xi = \sqrt{\phi^2 + \eta^2}$ ,  $\epsilon = \tan^{-1}(\phi/\eta)$

(4)  $\theta_4$  の計算

式(2.2.1.2), (2.2.1.4)より

$$\begin{aligned}c_4 &= Bc_1 + Ds_1 \\ s_4 &= (-Bs_1 + Dc_1)/c_{23} && (c_{23} \neq 0) \\ &= -F/s_{23} && (c_{23} = 0)\end{aligned}$$

が導かれ B, D, F は,  $\theta_6$  で表現できることから

$$\theta_4 = \tan^{-1}(s_4/c_4) \quad (2.2.1.44)$$

となる。

(5)  $\theta_5$  の計算

式(2.2.1.1), (2.2.1.3)より

$$\begin{aligned}Ac_1 - Cs_1 &= s_4 s_5 \\ As_1 + Cc_1 &= s_{23} c_5 + s_5 c_{23} c_4\end{aligned} \quad (2.2.1.45)$$

を導きだし,  $s_5 = (Ac_1 - Cs_1)/s_4$  ( $s_4 \neq 0$ )

を得る。 $s_4 = 0$  ならば, (2.2.1.45)の2番目の式と式(2.2.1.5)から

$$s_5 = \{c_{23}(As_1 + Cc_1) - Es_{23}\}/c_4$$

と表される。

一方,  $c_5$  は  $c_5 = (As_1 + Cc_1)s_{23} + Ec_{23}$

故に, この表示を使って

$$\theta_5 = \tan^{-1}(s_5/c_5) \quad (2.2.1.46)$$

(6)  $\theta_2$  の計算

式(2.2.1.20), (2.2.1.21)から直ちに

$$\theta_2 = \tan^{-1}(s_2/c_2) \quad (2.2.1.47)$$

が得られる。

(7)  $\theta_3$  の計算

$$\theta_3 = \theta_{23} - \theta_2 \quad (2.2.1.48)$$

以上で, 代数方程式の根 t から関節変数の値を順番に決定したが, 残る問題はこの解の信頼性である。そのために, 正変換によるマニピュレータ先端位置・姿勢の再現性や解が予め指定された制約条件内におさまるかをチェックし, 目標値に十分近いものを実現可能解として採用する。

## 2.2.2 16次の変換方程式による改善モデル

前節 2.2.1 では、関節角  $\theta_6$  のみを含んだ 24 次の代数方程式を誘導した。この方法で算出された関節解は全く厳密に決定されるが、変換方程式の次数を低減化することが課題であった。そこで、より低次元の形で表現することを目的とした 2 つのアプローチを示す。

## (A) 解法 1

まず、式(2.2.1.14), (2.2.1.15)を次のようにならべかえる。

$$a_{34}s_{23} + a_2s_2 = \{P_y - a_6n_y - a_5C\} / c_1 = P_1/c_1 \quad (2.2.2.1)$$

$$a_{34}c_{23} + a_2c_2 = P_z - a_6n_z - a_5E - a_1 = P_2 \quad (2.2.2.2)$$

ここで、 $P_1$ ,  $P_2$  は  $\theta_6$  のみで表現した関数で、付録 A. 4 を参照のこと。

さて、式(2.2.2.1), (2.2.2.2)の左辺を

$$(a_{34}c_3 + a_2)s_2 + (a_{34}s_3)c_2 = P_1/c_1$$

$$(a_{34}c_3 + a_2)c_2 - (a_{34}s_3)s_2 = P_2$$

と書き換え  $c_3$ ,  $s_3$  を未知数として解くと、

$$a_{34}c_3 + a_2 = \frac{\begin{vmatrix} P_1/c_1 & c_2 \\ P_2 & -s_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_2 & c_2 \\ c_2 & -s_2 \end{vmatrix}} = - \begin{vmatrix} P_1/c_1 & c_2 \\ P_2 & -s_2 \end{vmatrix} = (P_1/c_1)s_2 + P_2c_2$$

$$a_{34}s_3 = (P_1/c_1)c_2 - P_2s_2$$

を得る。従って、未知数  $s_3$ ,  $c_3$  が  $s_2$ ,  $c_2$  を使って表示された。

$$a_{34}s_3 = (P_1/c_1)c_2 - P_2s_2 \quad (2.2.2.3)$$

$$a_{34}c_3 = (P_1/c_1)s_2 + P_2c_2 - a_2 \quad (2.2.2.4)$$

式(2.2.2.1), (2.2.2.2)より、 $\tan\theta_{23}$  がつぎのように表せる。

$$\frac{P_1/c_1 - a_2s_2}{P_2 - a_2c_2} = \frac{K}{c_1} \quad (2.2.2.5)$$

ここで、 $K$  は  $\tan\theta_{23}$  を  $\theta_6$  と  $\theta_1$  で表現した時の  $\theta_6$  のみの関係式で、これも付録 A. 4 に記載する。

式(2.2.5)を整理して

$$a_2s_2c_1 = P_1 - K(P_2 - a_2c_2) \quad (2.2.2.6)$$

を得る。

ところで、 $s_2$ ,  $c_2$  に関する他の関係式として、式(2.2.2.3), (2.2.2.4)の両辺を 2 乗して辺々加え合わせると、

$$P_1^2 + P_2^2c_1^2 - 2a_2c_2P_2c_1^2 - 2a_2P_1s_2c_1 = -ac_1^2 \quad (2.2.2.7)$$

但し、 $a = a_2^2 - a_{34}^2$  とする。

が導き出せる。勿論  $s_2$ ,  $c_2$  間の関係式(2.2.2.6)と  $s_2^2 + c_2^2 = 1$  から  $s_2$ ,  $c_2$  の解を決定することも考えられなくはないが、根号を含む複雑な形となるため式(2.2.2.7)と合わせ  $P_1$ ,  $P_2$  などを使った陽的表示を行う。すなわち、

$$a_2c_2 = \frac{P_2^2c_1^2 - P_1^2 + ac_1^2 + 2KP_1P_2}{2(KP_1 + P_2c_1^2)} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3} \quad (2.2.2.8)$$

$$a_2 s_2 = \frac{K(P_1^2 - P_2^2 c_1^2 + a c_1^2) + 2P_1 P_2 c_1^2}{2(KP_1 + P_2 c_1^2) c_1} = \frac{\Gamma_2}{c_1 \Gamma_3} \quad (2.2.2.9)$$

上の2式を結合して、1つの関係式(2.2.2.10)にまとめる。

$$(\Gamma_1/\Gamma_3)^2 + (\Gamma_2/c_1/\Gamma_3)^2 = a_2^2 \quad (2.2.2.10)$$

この式の中に、付録A.4に示した有理式 $P_1, P_2, K$ を代入すると、目的の代数方程式が得られる。

以下、式(2.2.2.10)の各項を計算すると、

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{Y^2}{(1+t^2)^2(X^2+Y^2)} \left\{ \left( \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \right)^2 - (X^2+Y^2) + a(1+t^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(X^2+Y^2)(o_z+2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i}{B} \right\} \\ &= \frac{Y^2}{(1+t^2)^2(X^2+Y^2)} \left\{ \sum_{i=0}^4 d_i t^i - \sum_{i=0}^4 f_i t^i + a(1+t^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i (o_z+2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i}{B} \right\} \\ &= \frac{Y^2}{(1+t^2)^2(X^2+Y^2)} \frac{\left\{ B \sum_{i=0}^4 g_i t^i - 2 \sum_{i=0}^6 h_i t^i \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \right\}}{B} \\ &= \frac{Y^2 \left\{ \sum_{i=0}^8 J_i t^i \right\}}{(1+t^2)^2(X^2+Y^2) \sum_{i=0}^4 b_i t^i} \quad (2.2.2.11) \end{aligned}$$

ここに、

$$\sum_{i=0}^4 g_i t^i = \sum_{i=0}^4 (d_i - f_i) t^i + a(1+t^2)^2 \quad (2.2.2.12)$$

$$\sum_{i=0}^4 d_i t^i = \left( \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \right)^2 \quad (2.2.2.13)$$

$$X^2 + Y^2 = \sum_{i=0}^4 f_i t^i \quad (2.2.2.14)$$

$$B = c_1 \sum_{i=0}^4 b_i t^i \quad (\text{係数は付録A.4参照}) \quad (2.2.2.15)$$

$$\sum_{i=0}^8 J_i t^i = \sum_{i=0}^4 g_i t^i \sum_{i=0}^4 b_i t^i - 2 \sum_{i=0}^6 h_i t^i \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \quad (2.2.2.16)$$

$$\sum_{i=0}^6 h_i t^i = \sum_{i=0}^4 f_i t^i (o_z + 2n_z t - o_z t^2) \quad (2.2.2.17)$$

次に、 $\Gamma_2$ は、

$$\Gamma_2 = \frac{Y^3}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 b_i t^i (X^2+Y^2)} \left\{ - (o_z + 2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (o_z + 2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^4 d_i t^i - a(1+t^2)^2 (o_z + 2n_z t - o_z t^2) + 2 \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \sum_{i=0}^4 b_i t^i \Big\} \\
 & = \frac{Y^3}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 b_i t^i (X^2 + Y^2)} \left\{ (o_z + 2n_z t - o_z t^2) \left( \sum_{i=0}^4 (GG)_i t^i \right) + 2 \sum_{i=0}^6 (BD)_i t^i \right\} \\
 & = \frac{Y^3}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 b_i t^i (X^2 + Y^2)} \sum_{i=0}^6 (LB)_i t^i \tag{2.2.2.18}
 \end{aligned}$$

となる。但し、

$$\sum_{i=0}^4 (GG)_i t^i = \sum_{i=0}^4 (d_i - f_i) t^i - a(1+t^2)^2 \tag{2.2.2.19}$$

$$\sum_{i=0}^6 (LB)_i t^i = \sum_{i=0}^6 L_i t^i + 2 \sum_{i=0}^6 (BD)_i t^i \tag{2.2.2.20}$$

$$\sum_{i=0}^6 L_i t^i = (o_z + 2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^4 (GG)_i t^i \tag{2.2.2.21}$$

$$\sum_{i=0}^6 (BD)_i t^i = \sum_{i=0}^4 b_i t^i \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \tag{2.2.2.22}$$

$\Gamma_3$  についても同様に簡略化を行うと、

$$\begin{aligned}
 \Gamma_3 & = \frac{2Y^2}{(1+t^2)^2} \left\{ \frac{(o_z + 2n_z t - o_z t^2)}{\sum_{i=0}^4 b_i t^i} - \frac{\sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i}{(X^2 + Y^2)} \right\} \\
 & = \frac{2Y^2}{(1+t^2)^2} \frac{(o_z + 2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^4 f_i t^i - \sum_{i=0}^4 b_i t^i \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i}{\sum_{i=0}^4 f_i t^i \sum_{i=0}^4 b_i t^i} \\
 & = \frac{2Y^2}{(1+t^2)^2} \frac{\sum_{i=0}^6 (HH)_i t^i}{\sum_{i=0}^4 f_i t^i \sum_{i=0}^4 b_i t^i} \tag{2.2.2.23}
 \end{aligned}$$

但し、  $\sum_{i=0}^6 (HH)_i t^i = \sum_{i=0}^6 h_i t^i - \sum_{i=0}^6 (BD)_i t^i$  (2.2.2.24)

が得られる。従って、式(2.2.2.11), (2.2.2.18), (2.2.2.23) から

$$(\Gamma_1/\Gamma_3)^2 = \frac{1}{4(1+t^2)^2} \frac{\left( \sum_{i=0}^8 J_i t^i \right)^2}{\left\{ \sum_{i=0}^6 (HH)_i t^i \right\}^2} \tag{2.2.2.25}$$

$$(\Gamma_2/c_1/\Gamma_3)^2 = \frac{Y^2}{4(1+t^2)^2} \frac{\left\{ \sum_{i=0}^6 (\text{LB})_i t^i \right\}^2}{\left\{ \sum_{i=0}^6 (\text{HH})_i t^i \right\}^2} \frac{(X^2+Y^2)}{Y^2} \quad (2.2.2.26)$$

となり、それぞれ  $t$  の有理式で記述された。両式を結びつけた最終的な多項式は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{16} n_i t^i + \sum_{i=0}^{16} m_i t^i &= 4a_2^2 (1+t^2)^2 \left\{ \sum_{i=0}^6 (\text{HH})_i t^i \right\}^2 \\ \sum_{i=0}^{16} Q_i t^i &= \sum_{i=0}^{16} P_i t^i \end{aligned} \quad (2.2.2.27)$$

で表される。

$$\text{ここに、} \quad \sum_{i=0}^{16} Q_i t^i = \sum_{i=0}^{16} (n_i + m_i) t^i \quad (2.2.2.28)$$

$$\sum_{i=0}^{16} P_i t^i = 4a_2^2 (1-t^2)^2 \left\{ \sum_{i=0}^6 (\text{HH})_i t^i \right\}^2 \quad (2.2.2.29)$$

$$\sum_{i=0}^{16} m_i t^i = \left\{ \sum_{i=0}^6 (\text{LB})_i t^i \right\}^2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i \quad (2.2.2.30)$$

$$\sum_{i=0}^{16} n_i t^i = \left( \sum_{i=0}^8 J_i t^i \right)^2 \quad (2.2.2.31)$$

(B) 解法 2

2.2.1 節の式(2.2.1.27)で示した  $\eta$  の有理関数表示は、

$$\frac{c_1}{(1+t^2)(Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)} \sum_{i=0}^4 k_i t^i \quad (2.2.2.32)$$

であった。ここで  $\sum k_i t^i$  の各係数に注意を向け再度整理し直すと、

$$\begin{aligned} k_0 &= a_5 (Y_n n_y - X_n n_x) + X_n X X - Y_n Y Y = X_n (X X - a_5 n_x) + Y_n (a_5 n_y - Y Y) \\ &= X_n^2 + Y_n^2 \end{aligned} \quad (2.2.2.33)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 2a_5 \{ (X_n o_x - Y_n o_y) - a_5 (n_x o_x + n_y o_y) + X X o_x + Y Y o_y \} \\ &= 2a_5 \{ X_n o_x - Y_n o_y + o_x (X X - a_5 n_x) + o_y (Y Y - a_5 n_y) \} \\ &= 2a_5 \{ X_n o_x - Y_n o_y + X_n o_x - Y_n o_y \} = 4a_5 (X_n o_x - Y_n o_y) \end{aligned} \quad (2.2.2.34)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= a_5 \{ (X_n n_x - Y_n n_y) + (Y_p n_y - n_x X_p) + 4a_5 (o_x^2 + o_y^2) \} \\ &\quad + X_n X X - Y_n Y Y + X_p X X - Y_p Y Y \\ &= X_n (X X + a_5 n_x) - Y_n (Y Y + a_5 n_y) + X_p (X X - a_5 n_x) + Y_p (a_5 n_y - Y Y) \\ &\quad + 4a_5^2 (o_x^2 + o_y^2) \\ &= X_n X_p + Y_n Y_p + X_p X_n + Y_p Y_n + 4a_5^2 (o_x^2 + o_y^2) \\ &= 2(X_n X_p + Y_n Y_p) + 4a_5^2 (o_x^2 + o_y^2) \end{aligned} \quad (2.2.2.35)$$

$$\begin{aligned} k_3 &= 2a_5 \{ (X_p o_x - Y_p o_y) + a_5 (n_x o_x + n_y o_y) + X X o_x + Y Y o_y \} \\ &= 2a_5 \{ X_p o_x - Y_p o_y + o_x (X X + a_5 n_x) + o_y (Y Y + a_5 n_y) \} \\ &= 2a_5 \{ X_p o_x - Y_p o_y + X_p o_x - Y_p o_y \} = 4a_5 (X_p o_x - Y_p o_y) \end{aligned} \quad (2.2.2.36)$$

$$k_4 = a_5 (X_p n_x - Y_p n_y) + X_p X X - Y_p Y Y = X_p (X X + a_5 n_x) - Y_p (Y Y + a_5 n_y)$$

$$=X_p^2+Y_p^2 \quad (2.2.2.37)$$

となる。この  $k_i$  を  $\Sigma f_i t^i$  の係数  $f_i$  と比較すると完全に一致していることがわかる。すなわち、 $\Sigma k_i t^i$  は  $\Sigma f_i t^i$  そのものである。このことから、2.2.1 節で取り扱った計算過程の一部が以下のように簡略化され次数の低下につながる。

まず、 $\phi^2+\eta^2$  を記述する過程で

$$\phi^2+\eta^2=\frac{1}{(1+t^2)^2}\left\{\frac{\left(\sum_{i=0}^4 k_i t^i\right)^2}{\left(\sum_{i=0}^4 f_i t^i\right)}+\sum_{i=0}^4 d_i t^i\right\}$$

の右辺第1項は約分できて、

$$=\frac{1}{(1+t^2)^2}\left\{\sum_{i=0}^4 f_i t^i+\sum_{i=0}^4 d_i t^i\right\} \quad (2.2.2.38)$$

となる。その結果は単に4次の有理式である。従って、

$$\phi^2+\eta^2-a=\frac{1}{(1+t^2)^2}\sum_{i=0}^4 G_i t^i \quad (2.2.2.39)$$

と表せる。但し、

$$\sum_{i=0}^4 G_i t^i=\sum_{i=0}^4 (d_i+f_i) t^i-a(1+t^2)^2 \quad (2.2.2.40)$$

ここで、式(2.2.2.39)の両辺を2乗した関係式(2.2.2.41)を作っておく。

$$(\phi^2+\eta^2-a)^2=\frac{1}{(1+t^2)^4}\left(\sum_{i=0}^4 G_i t^i\right)^2=\frac{1}{(1+t^2)^4}\sum_{i=0}^8 (GS)_i t^i \quad (2.2.2.41)$$

一方、 $4a_{34}^2 c_{23}^2 (\phi+k\eta)^2$  は、2.2.1 節の式(2.2.1.37)と同様に、

$$4a_{34}^2 c_{23}^2 (\phi+k\eta)^2=\frac{\sum_{i=0}^{12} m_i t^i}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^8 L_i t^i} \quad (2.2.2.42)$$

となる。式(2.2.2.41)と(2.2.2.42)を等しく置いて

$$\frac{1}{(1+t^2)^4}\sum_{i=0}^8 (GS)_i t^i=\frac{\sum_{i=0}^{12} m_i t^i}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^8 L_i t^i} \quad (2.2.2.43)$$

$$\sum_{i=0}^8 (GS)_i t^i \sum_{i=0}^8 L_i t^i=(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^{12} m_i t^i \quad (2.2.2.44)$$

を得る。これより、分母を払ってまとめた式が目的の多項式となる。

$$H(t)=\sum_{i=0}^{16} r_i t^i=0 \quad (2.2.2.45)$$

2.2.3 8次の変換方程式による改善モデル

2.2.1節で提案した変換方程式のモデルは、誘導過程で高次の要因となる不要な複素根が包含されているためにこの次数の低減化を2.2.2節で実現した。本節では、原式の不要因子を最初から因数分解法で分離・除外した結果、 $\theta_6$ の解を決定する8次の変換方程式を導き出すことに成功した。以下その計算過程を説明する。

前節の方程式

$$a_{34}s_{23} + a_2s_2 = P_1/c_1 \quad (2.2.3.1)$$

$$a_{34}c_{23} + a_2c_2 = P_2 \quad (2.2.3.2)$$

から一定の関数を引出すために

$$a_{34}s_3 = (P_1/c_1)c_2 - P_2s_2 \quad (2.2.3.3)$$

$$a_{34}c_3 = (P_1/c_1)s_2 + P_2c_2 - a_2 \quad (2.2.3.4)$$

なる関係に着目した。

$P_1, P_2$  は、付録 A. 4 に示すように

$$P_1 = -Y/(1+t^2), P_2 = -Z/(1+t^2) \quad (2.2.3.5)$$

但し、 $Y = Y_n - 2a_5o_yt + Y_p t^2, Z = Z_n - 2a_5o_zt + Z_p t^2$

$$Y_n = a_5n_y - YY, Y_p = -(a_5n_y + YY), YY = P_y - a_6n_y$$

$$Z_n = a_5n_z - ZZ, Z_p = -(a_5n_z + ZZ), ZZ = P_z - a_1 - a_6n_z \quad (2.2.3.6)$$

と表され、同時に、 $\tan\theta_{23}$  が

$$\begin{aligned} \tan\theta_{23} &= \frac{(P_1/c_1) - a_2s_2}{P_2 - a_2c_2} = \frac{Y(o_z + 2n_zt - o_zt^2)}{c_1\{X(o_x + 2n_xt - o_xt^2) - Y(o_y + 2n_yt - o_yt^2)\}} \\ &= \frac{K}{c_1} \end{aligned} \quad (2.2.3.7)$$

と表された。ここで  $K$  の表示について再度考察してみる。

まず、つぎの関数

$$\begin{aligned} \Phi_x(t) &= o_x + 2n_xt - o_xt^2 \\ \Phi_y(t) &= o_y + 2n_yt - o_yt^2 \\ \Phi_z(t) &= o_z + 2n_zt - o_zt^2 \end{aligned} \quad (2.2.3.8)$$

を便宜的に定義しよう。記述を簡潔化するため、以後  $\Phi_x(t)$ などを単に  $\Phi_x$ などと表現する。

この記号表現により、 $K$  が

$$K = Y\Phi_z/S, S = X\Phi_x - Y\Phi_y \quad (2.2.3.9)$$

と単純に記述できる。

次に式(2.2.3.1)~(2.2.3.4)より導いた次の2つの関係式

$$a_2s_2c_1 = P_1 - K(P_2 - a_2c_2) \quad (2.2.3.10)$$

$$P_1^2 + P_2^2c_1^2 - 2a_2c_2P_2c_1^2 - 2a_2P_1s_2c_1 = -ac_1^2 \quad (2.2.3.11)$$

但し、 $a = a_2^2 - a_{34}^2$

から  $s_2, c_2$  を定め、これを再び式(2.2.3.1), (2.2.3.2)へ代入して新たな関係式を見出す。

$$a_{34}s_{23} = P_1/c_1 - a_2s_2 = \frac{P_1}{c_1} - \frac{KP_1^2 + 2P_1P_2c_1^2 - KP_2^2c_1^2 + aKc_1^2}{2(KP_1 + P_2c_1^2)c_1}$$



$$= \frac{K(P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - ac_1^2)}{2(KP_1 + P_2 c_1^2) c_1} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3 c_1} \quad (2.2.3.12)$$

$$a_{34}c_{23} = P_2 - a_2 c_2 = P_2 - \frac{P_2 c_1^2 - P_1^2 + ac_1^2 + 2KP_1 P_2}{2(KP_1 + P_2 c_1^2)}$$

$$= \frac{P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - ac_1^2}{2(KP_1 + P_2 c_1^2)} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} \quad (2.2.3.13)$$

$P_1, P_2$  などの表現から、個々の  $\Lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の記号表現を行うと

$$\Lambda_1 = K(P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - ac_1^2) = K \left\{ \frac{Y^2}{(1+t^2)^2} + \frac{Z^2}{(1+t^2)^2} \frac{Y^2}{(X^2+Y^2)} - \frac{aY^2}{(X^2+Y^2)} \right\}$$

$$= \frac{KY^2}{(1+t^2)^2} \frac{\{X^2+Y^2+Z^2-a(1+t^2)^2\}}{(X^2+Y^2)} = \frac{Y^3 \Phi_z (J+Z^2-L)}{JST^2} \quad (2.2.3.14)$$

$$\Lambda_2 = P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - ac_1^2 = \frac{Y^2}{(1+t^2)^2} + \frac{Z^2}{(1+t^2)^2} \frac{Y^2}{(X^2+Y^2)} - \frac{aY^2}{(X^2+Y^2)}$$

$$= \frac{Y^2(J+Z^2-L)}{JT^2} \quad (2.2.3.15)$$

$$\Lambda_3 = 2(KP_1 + P_2 c_1^2) = -2 \left\{ \frac{Y \Phi_z}{S} \frac{Y}{(1+t^2)} + \frac{Z}{(1+t^2)} \frac{Y^2}{(X^2+Y^2)} \right\}$$

$$= -2Y^2 \left\{ \frac{\Phi_z}{S(1+t^2)} + \frac{Z}{(1+t^2)(X^2+Y^2)} \right\} = -\frac{2Y^2(SZ+J\Phi_z)}{JST} \quad (2.2.3.16)$$

但し、 $L = aT^2$ ,  $T = 1 + t^2$ ,  $J = X^2 + Y^2$

が得られる。これより、

$$a_{34}s_{23} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3 c_1} = -\frac{Y \Phi_z (J+Z^2-L)}{2T(SZ+J\Phi_z) c_1} \quad (2.2.3.17)$$

$$a_{34}c_{23} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} = -\frac{(J+Z^2-L)S}{2T(SZ+J\Phi_z)} \quad (2.2.3.18)$$

が簡潔に記述でき、それぞれ2乗して加えた式を整理すると、

$$\frac{(J+Z^2-L)^2(S^2+J\Phi_z^2)}{4(J\Phi_z+SZ)^2 T^2} = a_{34}^2 \quad (2.2.3.19)$$

となる。この変換多項式は分母分子とも  $t$  に関する16次の多項式で、2.2.2節の結果と同じ次数になり、本節ではこれをさらに各項について検討す。

### 1) $J+Z^2-L$ の簡略化

まず、 $J$  の各項  $X, Y$  などについては、 $\tan(\theta_6/2) = t$  の関係からつぎのような因数が発見される。

$$X = X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2 = -a_5 n_x + XX + 2a_5 o_x t + (a_5 n_x + XX) t^2$$

$$= (1+t^2) \left\{ XX - a_5 n_x \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + \frac{2a_5 o_x t}{(1+t^2)} \right\} = (1+t^2) \{XX - a_5 n_x c_6 + a_5 o_x s_6\}$$

$$(2.2.3.20)$$

同様に Y, Z についても

$$Y = Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2 = YY + a_5 n_y - 2a_5 o_y t + (YY - a_5 n_y) t^2 \\ = -(1+t^2) \{YY - a_5 n_y c_6 + a_5 o_y s_6\} \quad (2.2.3.21)$$

$$Z = Z_n - 2a_5 o_z t + Z_p t^2 = -(1+t^2) \{ZZ - a_5 n_z c_6 + a_5 o_z s_6\} \quad (2.2.3.22)$$

と表される。この3式から、 $J+Z^2-L$  は

$$J+Z^2-L = X^2 + Y^2 + Z^2 - a(1+t^2)^2 \\ = (1+t^2)^2 [XX^2 + YY^2 + ZZ^2 - 2a_5 XX(n_x c_6 - o_x s_6) \\ - 2a_5 YY(n_y c_6 - o_y s_6) - 2a_5 ZZ(n_z c_6 - o_z s_6) + a_5^2 (n_x c_6 - o_x s_6)^2 \\ + a_5^2 (n_y c_6 - o_y s_6)^2 + a_5^2 (n_z c_6 - o_z s_6)^2 - a]$$

と記述できる。大括弧を整理するために

$$n_x XX + n_y YY + n_z ZZ = R_1 \\ o_x XX + o_y YY + o_z ZZ = R_2 \\ a_x XX + a_y YY + a_z ZZ = R_3 \quad (2.2.3.23)$$

と置く。方向余弦の性質を使うと、

$$XX^2 + YY^2 + ZZ^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \quad (2.2.3.24)$$

の関係が導かれ、結局

$$J+Z^2-L = X^2 + Y^2 + Z^2 - a(1-t^2)^2 \\ = (1+t^2)^2 [R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - 2a_5 R_1 \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + 4a_5 R_2 \frac{t}{(1+t^2)} + a_5^2 - a] \\ = (1+t^2) [ \{ (R_1 - a_5)^2 - R_2^2 + R_3^2 - a \} + 4a_5 R_2 t \\ + \{ (R_1 + a_5)^2 + R_2^2 + R_3^2 - a \} t^2 ] \\ = (1+t^2) (r_0 + r_1 t + r_2 t^2) = (1+t^2) R(t) \quad (2.2.3.25)$$

と簡潔な表現に到達する。

## 2) $J\Phi_z + SZ, S^2 + J\Phi_z^2$ の簡略化

つぎに、式(2.2.3.19)の  $J\Phi_z + SZ, S^2 + J\Phi_z^2$  についてはいずれも X, Y と式(2.2.3.8)を使った表現に書き換え、因子分解を順次明らかにしていく。

$$J\Phi_z + SZ = (X^2 + Y^2)\Phi_z + (X\Phi_x - Y\Phi_y)Z \\ = X(X\Phi_z + Z\Phi_x) + Y(Y\Phi_z - Z\Phi_y) \quad (2.2.3.26)$$

$$S^2 + J\Phi_z^2 = (X\Phi_x - Y\Phi_y)^2 + (X^2 + Y^2)\Phi_z^2 \\ = (\Phi_x^2 + \Phi_y^2)X^2 + (\Phi_y^2 + \Phi_x^2)Y^2 - 2\Phi_x\Phi_yXY$$

ここで、新しく定義した関数  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$  間には

$$\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 = (1+t^2)^2 \quad (2.2.3.27)$$

なる単純な関係が存在するので、 $S^2 + J\Phi_z^2$  は

$$S^2 + J\Phi_z^2 = \{ (1+t^2)^2 - \Phi_y^2 \} X^2 + \{ (1+t^2)^2 - \Phi_x^2 \} Y^2 - 2\Phi_x\Phi_yXY \\ = (1+t^2)^2 (X^2 + Y^2) - (X\Phi_y + Y\Phi_x)^2 \quad (2.2.3.28)$$

と変形できる。

さて、式(2.2.3.26), (2.2.3.28)において、X または Y (または Z) と  $\Phi_x$  などとの双一次式は高々 4

次式なので、各項を展開して内容を調べる。

a)  $X\Phi_z + Z\Phi_x$  の因数分解

$X, Z, \Phi_x, \Phi_z$  の表現を代入すると

$$\begin{aligned} X\Phi_z + Z\Phi_x &= (X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2)(o_z + 2n_z t - o_z t^2) \\ &\quad + (Z_n - 2a_5 o_z t + Z_p t^2)(o_x + 2n_x t - o_x t^2) \\ &= (X_n o_z + Z_n o_x) + 2(X_n n_z + Z_n n_x)t + \{4a_5(o_x n_z - n_x o_z) \\ &\quad - (Z_n o_x + X_n o_z) + (X_p o_z + Z_p o_x)\} t^2 + 2(X_p n_z + Z_p n_x)t^3 - (Z_p o_x + \\ &\quad X_p o_z)t^4 \end{aligned}$$

が得られる。t に関する各項の係数を比較すると第2項と4項のそれは等しく、また、第1項と最終項の係数の和が丁度  $t^2$  の係数に一致することがわかる。これより、 $X\Phi_z + Z\Phi_x$  が  $(1+t^2)$  を因数として含むので結局4次式  $X\Phi_z + Z\Phi_x$  の表示は

$$X\Phi_z + Z\Phi_x = (1+t^2)(u_0 + u_1 t + u_2 t^2) = (1+t^2)U \quad (2.2.3.29)$$

となる。

( $U = u_0 + u_1 t + u_2 t^2$  の詳細は  $u_0 = X_n o_z + Z_n o_x$ ,  $u_1 = 2(X_n n_z + Z_n n_x)$ ,  $u_2 = -(Z_p o_x + X_p o_z)$  である。)

b)  $J\Phi_z + SZ$  の因数分解

次に、式(2.2.3.16)の  $Y\Phi_z - Z\Phi_y$  についても同様な操作で分離可能な因数  $(1+t^2)$  が見付き、それは

$$\begin{aligned} Y\Phi_z - Z\Phi_y &= (Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)(o_z + 2n_z t - o_z t^2) \\ &\quad - (Z_n - 2a_5 o_z t + Z_p t^2)(o_y + 2n_y t - o_y t^2) \\ &= (Y_n o_z - Z_n o_y) + 2(Y_n n_z - Z_n n_y)t + \{Z_n o_y - Y_n o_z + Y_p o_z - Z_p o_y \\ &\quad + 4a_5(o_z n_y - o_y n_z)\} t^2 + 2(Y_p n_z - Z_p n_y)t^3 + (Z_p o_y - Y_p o_z)t^4 \\ &= (1+t^2)(v_0 + v_1 t + v_2 t^2) = (1+t^2)V \end{aligned} \quad (2.2.3.30)$$

と書ける。

( $V = v_0 + v_1 t + v_2 t^2$  の詳細は  $v_0 = Y_n o_z - Z_n o_y$ ,  $v_1 = 2(Y_n n_z - Z_n n_y)$ ,  $v_2 = (Z_p o_y - Y_p o_z)$  である。)

従って、 $J\Phi_z + SZ$  に対する表現も  $W (= \sum w_i t^i)$  を使って、つぎのように簡略化できる。

$$\begin{aligned} J\Phi_z + SZ &= X(X\Phi_z + Z\Phi_x) + Y(Y\Phi_z - Z\Phi_y) \\ &= (1+t^2)\{XU + YV\} = (1+t^2)W \end{aligned} \quad (2.2.3.31)$$

ここに、

$$\begin{aligned} w_0 &= X_n u_0 + Y_n v_0, \quad w_1 = X_n u_1 + Y_n v_1 + 2a_5(u_0 o_x - v_0 o_y), \\ w_2 &= X_n u_2 + Y_n v_2 + X_p u_0 + Y_p v_0 + 2a_5(u_1 o_x - v_1 o_y), \\ w_3 &= X_p u_1 + Y_p v_1 + 2a_5(u_2 o_x - v_2 o_y), \quad w_4 = X_p u_2 + Y_p v_2 \end{aligned}$$

c)  $S^2 + J\Phi_z^2$  の因数分解

一方、式(2.2.3.28)の  $X\Phi_y + Y\Phi_x$  も全く同じ方法で

$$X\Phi_y + Y\Phi_x = (1+t^2)(m_0 + m_1 t + m_2 t^2) = (1+t^2)M \quad (2.2.3.32)$$

と整理できることから、式(2.2.3.28)は、

$$S^2 + J\Phi_z^2 = (1+t^2)^2(X^2 + Y^2) - (X\Phi_y + Y\Phi_x)^2 = (1+t^2)^2 \left\{ \sum_{i=0}^4 f_i t^i - \left( \sum_{i=0}^2 m_i t^i \right)^2 \right\}$$

$$= (1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 (f_i - n_i) t^i = (1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 g_i t^i \quad (2.2.3.33)$$

となる。M = m<sub>0</sub> + m<sub>1</sub>t + m<sub>2</sub>t<sup>2</sup> の記述は

$$m_0 = X_n o_y + Y_n o_x, \quad m_1 = 2(X_n n_y + Y_n n_x), \quad m_2 = -X_p o_y - Y_p o_x$$

よって、式(2.2.3.25), (2.2.3.31), (2.2.3.33)による因数分離手続きを通して、もとの式(2.2.3.19)は

$$R^2 \sum_{i=0}^4 g_i t^i = 4a_{34}^2 \left( \sum_{i=0}^4 w_i t^i \right)^2 \quad (2.2.3.34)$$

に到達する。これを

$$R^2 \sum_{i=0}^4 g_i t^i = \sum_{i=0}^8 Q_i t^i, \quad 4a_{34}^2 \left( \sum_{i=0}^4 w_i t^i \right)^2 = \sum_{i=0}^8 P_i t^i \quad (2.2.3.35)$$

と置いて整理したものがつぎの最終式である。

$$H(t) = \sum_{i=0}^8 (P_i - Q_i) t^i = \sum_{i=0}^8 \rho_i t^i \quad (2.2.3.36)$$

以上で、 $\theta_6$  を決定するための変換多項式 H(t) が簡単な 8 次式で実現できた。原モデルの  $\frac{1}{3}$  の次数で模擬できたことから、計算時間や丸め誤差の蓄積を排除できる点で有効なモデルである。 $\theta_6$  から残りの関節角を導出する手続きは同じなので省略する。

## 2.3 変換多項式を用いた手法 (その 2)

### 2.3.1 序 論

多関節形ロボット・マニピュレータの運動学は、解析者が自ら各リンク毎に任意な座標系を関節軸に設け、基準座標系との相対的位置関係から目的の機構関係を導くものである。2.2 節では、Fig. 2 に示した座標系で順問題および逆問題の解析を行った。

本節では、Denavit-Hartenberg に基づく簡便な記法(以下、DH 法と記す)<sup>(1),(2)</sup> を用いて同次座標変換行列(A 行列または A<sub>i</sub> 行列)の積演算を行い、指先までの機構学的関係式を誘導したうえで、その逆問題を取扱う。相対座標変換を行う点で、前節の座標系による記述とは双方基本的に類似しているが、DH 法は機構を組織的に解析できる点で優れている。すなわち、リンク座標の設定に関して若干のルールを設け、それに基づく隣接リンク間の関係を 4 つのパラメータ (リンクの距離 d<sub>i</sub> と角度 θ<sub>i</sub>: リンクの長さ a<sub>i</sub> とねじれ角 α<sub>i</sub>) を使って行列(仮に、一般化 A<sub>i</sub> 行列と呼ぼう)表示し、これを基に機構全体の運動学方程式へと展開を計る。この演繹方法は、どの関節をどの順序で並べるかといった形態の多様性やオフセット機構の存在など、関節構造の複雑な組合せに関係なく一定の手順で根元・指先間の関係を体系的に記述できる利点がある。隣接間の関係が一般的に表示されていることから、これを発展させてあらゆるタイプのマニピュレータ運動学方程式を漸化式で統一的に表現することも可能となった<sup>(3)</sup>。また、DH 法による統一した機構表現は、種々の座標系を任意に選択した結果生じる混乱や過ちがある程度回避でき、さらに、(力学系の)慣性座標系での指先挙動など、マニピュレータの運動解析全般を扱うのに都合がよい座標系である。そこで、本節ではこの座標系による機構の解析を行う。

ところで、Fig. 1 の機構に対して、座標系モデルを Fig. 3 のように設定する。一般化  $A_i$  行列の逐次計算から誘導した運動学方程式の子細は付録 A.5 にまわす。次の節 2.3.2 では、この方程式に対する解法を前節で提案した多項式法により厳密に求める。その計算機シミュレーションの結果は、例えば、2.1 の座標系で定めた運動学方程式の関節解と完全に一致していた。一般化  $A_i$  行列法による関節計算の注意事項などは付録 A.5 やサンプル計算のところでも触れる。

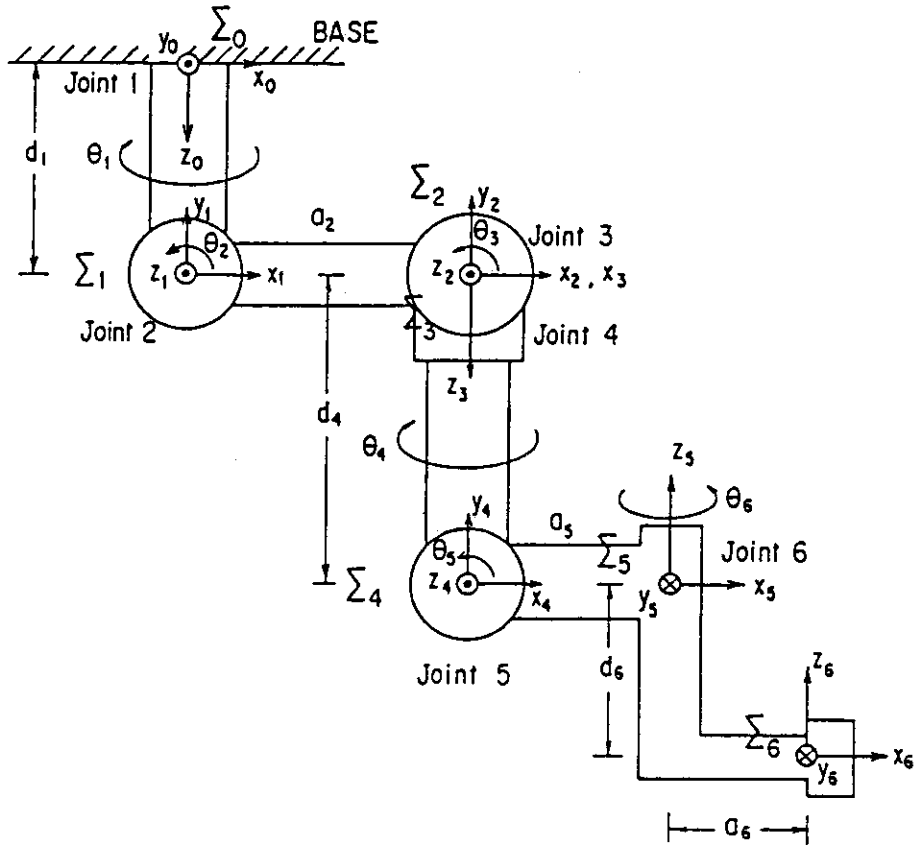


Fig. 3 Definition of Link Co-ordinates Systems

2.3.2 一般化  $A_i$  行列を利用した逆運動学の多項式モデル (24 次変換方程式)

解析対象のマニピュレータに対する運動学方程式を DH 法を使ってつぎのように表す。

$$n_x = Ac_6 + Bs_6 \tag{2.3.2.1}$$

$$n_y = Cc_6 + Ds_6 \tag{2.3.2.2}$$

$$n_z = Ec_6 + Fs_6 \tag{2.3.2.3}$$

$$o_x = -As_6 + Bc_6 \tag{2.3.2.4}$$

$$o_y = -Cs_6 + Dc_6 \tag{2.3.2.5}$$

$$o_z = -Es_6 + Fc_6 \tag{2.3.2.6}$$

$$a_x = CF - DE = -s_5c_1c_{23}c_4 + s_1s_4s_5 - s_{23}c_1c_5 \tag{2.3.2.7}$$

$$a_y = BE - AF = -s_1s_5c_{23}c_4 - s_4s_5c_1 - s_1s_{23}c_5 \tag{2.3.2.8}$$

$$a_z = AD - BC = s_{23}s_5c_4 - c_{23}c_5 \tag{2.3.2.9}$$

$$P_x = a_6(Ac_6 + Bs_6) + d_6a_x + Aa_5 + d_4s_{23}c_1 + a_2c_1c_2$$

$$= a_6 n_x + A a_5 + d_6 a_x + d_4 s_{23} c_1 + a_2 c_1 c_2 \quad (2.3.2.10)$$

$$P_y = a_6 (C c_6 + D s_6) + d_6 a_y + C a_5 + d_4 s_1 s_{23} + a_2 s_1 c_2 \\ = a_6 n_y + C a_5 + d_6 a_y + d_4 s_1 s_{23} + a_2 s_1 c_2 \quad (2.3.2.11)$$

$$P_z = a_6 (E c_6 + F s_6) + d_6 a_z + E a_5 + d_4 c_{23} + d_1 - a_2 s_2 \\ = a_6 n_z + E a_5 + d_6 a_z + d_4 c_{23} + d_1 - a_2 s_2 \quad (2.3.2.12)$$

但し,

$$A = c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_1 s_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1 (= n_x c_6 - o_x s_6) \quad (2.3.2.13)$$

$$B = s_4 c_1 c_{23} + s_1 c_4 (= n_x s_6 + o_x c_6) \quad (2.3.2.14)$$

$$C = s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_4 c_1 c_5 - s_1 s_{23} s_5 (= n_y c_6 - o_y s_6) \quad (2.3.2.15)$$

$$D = s_1 s_4 c_{23} - c_1 c_4 (= n_y s_6 + o_y c_6) \quad (2.3.2.16)$$

$$E = -s_{23} c_4 c_5 - s_5 c_{23} (= n_z c_6 - o_z s_6) \quad (2.3.2.17)$$

$$F = -s_{23} s_4 (= n_z s_6 + o_z c_6) \quad (2.3.2.18)$$

まず, 2.2節で行ったように, 位置に関する計算 (2.3.2.10) × s<sub>1</sub> - (2.3.2.11) × c<sub>1</sub> から

$$\tan \theta_1 = \frac{P_y - a_6 n_y - C a_5 - d_6 a_y}{P_x - a_6 n_x - A a_5 - d_6 a_x} = \frac{Y Y - a_5 n_y c_6 + a_5 o_y s_6}{X X - a_5 n_x c_6 + a_5 o_x s_6} \\ = \frac{Y_n + 2 a_5 o_y t + Y_p t^2}{X_n + 2 a_5 o_x t + X_p t^2} \quad (2.3.2.19)$$

が得られる。ここに

$$X_p = X X + a_5 n_x, X_n = X X - a_5 n_x, X X = P_x - a_6 n_x - d_6 a_x \quad (2.3.2.20)$$

$$Y_p = Y Y + a_5 n_y, Y_n = Y Y - a_5 n_y, Y Y = P_y - a_6 n_y - d_6 a_y \quad (2.3.2.21)$$

$$t = \tan(\theta_6/2) \quad (2.3.2.22)$$

一方, 式 (2.3.2.10) × c<sub>1</sub> + 式 (2.3.2.11) × s<sub>1</sub> の計算

$$P_x c_1 + P_y s_1 = a_6 (n_x c_1 + n_y s_1) + a_5 (A c_1 + C s_1) + d_6 (a_x c_1 + a_y s_1) \\ + d_4 s_{23} + a_2 c_2 \quad (2.3.2.23)$$

と式(2.3.2.12)は, つぎのパラメータ φ, η により

$$\phi + d_4 c_{23} = a_2 s_2 \\ \eta - d_4 s_{23} = a_2 c_2 \quad (2.3.2.24)$$

と整理できる。但し,

$$\phi = a_5 c_6 (n_z - o_z \tan \theta_6) - Z Z \quad (2.3.2.25)$$

$$\eta = P_x c_1 + P_y s_1 - a_6 (n_x c_1 + n_y s_1) - a_5 c_6 \{ n_x c_1 + n_y s_1 - (o_x c_1 + o_y s_1) \tan \theta_6 \} \\ - d_6 (a_x c_1 + a_y s_1) \quad (2.3.2.26)$$

$$Z Z = P_z - a_6 n_z - d_1 - d_5 a_z \quad (2.3.2.27)$$

さらに, 式(2.3.2.24)の両辺を2乗して加え合せると

$$\phi^2 + \eta^2 - a = 2 d_4 (\eta s_{23} - \phi c_{23}) = 2 d_4 c_{23} (\eta \tan \theta_{23} - \phi) \quad (2.3.2.28)$$

$$\text{但し, } a = a_2^2 - d_4^2$$

なる基本式を得る。この式における未知変数 φ, η, tan θ<sub>23</sub> などを t (= tan θ<sub>6</sub>/2) の有理関数に直すことがつぎの課題である。それらはずぎのようにまとめられる。

1)  $\phi$  の表示

$$\phi = \frac{\sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i}{1+t^2} \quad (2.3.2.29)$$

但し,  $d_{o1} = a_5 n_z - ZZ$ ,  $d_{o2} = -2 a_5 o_z$ ,  $d_{o3} = -(a_5 n_z + ZZ)$

2)  $\eta$  の表示

$$\eta = \frac{c_1 \left\{ \sum_{i=0}^4 b_i t^i + \sum_{i=0}^4 b_{i+5} t^i \right\}}{(1+t^2)(X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2)} = \frac{c_1 \sum_{i=0}^4 k_i t^i}{(1+t^2)(X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2)} \quad (2.3.2.30)$$

ここに,

$$\begin{aligned} b_0 &= -a_5 (X_n n_x + Y_n n_y) \\ b_1 &= 2a_5 \{X_n o_x + Y_n o_y - a_5 (n_x o_x + n_y o_y)\} \\ b_2 &= a_5 \{X_n n_x + Y_n n_y - (X_p n_x + Y_p n_y) + 4a_5 (o_x^2 + o_y^2)\} \\ b_3 &= 2a_5 \{X_p o_x + Y_p o_y + a_5 (n_x o_x + n_y o_y)\} \\ b_4 &= a_5 \{X_p n_x + Y_p n_y\} \\ b_5 &= X_n XX + Y_n YY \\ b_6 &= 2a_5 (XX o_x + YY o_y) \\ b_7 &= (X_n XX + Y_n YY) + (X_p XX + Y_p YY) \\ b_8 &= 2a_5 (XX o_x + YY o_y) \\ b_9 &= X_p XX + Y_p YY \\ k_i &= b_i + b_{i+5} \quad (i=0, \dots, 4) \end{aligned} \quad (2.3.2.31)$$

3)  $c_1^2$  の表示

$$c_1^2 = \frac{(X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2)^2}{\sum_{i=0}^4 f_i t^i} \quad (2.3.2.33)$$

但し,

$$\begin{aligned} f_0 &= X_n^2 + Y_n^2 \\ f_1 &= 4a_5 (X_n o_x + Y_n o_y) \\ f_2 &= 2 \{X_n X_p + Y_n Y_p + 2a_5^2 (o_x^2 + o_y^2)\} \\ f_3 &= 4a_5 (X_p o_x + Y_p o_y) \\ f_4 &= X_p^2 + Y_p^2 \end{aligned} \quad (2.3.2.34)$$

4)  $\phi^2 + \eta^2 - a$  の表示

$$\phi^2 + \eta^2 - a = \frac{\sum_{i=0}^8 J_i t^i}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i} \quad (2.3.2.35)$$

$$(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i = \sum_{i=0}^8 h_i t^i, \quad (2.3.2.36)$$

$$\sum_{i=0}^8 J_i t^i = \left( \sum_{i=0}^4 k_i t^i \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \right)^2 \left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right) - a \sum_{i=0}^8 h_i t^i \quad (2.3.2.37)$$

5)  $\eta \tan \theta_{23}$  の表示

$$\eta \tan \theta_{23} = \frac{-(o_z + 2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^4 k_i t^i}{(1+t^2) \left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)} \quad (2.3.2.38)$$

但し,  $l_0 = X_n o_x + Y_n o_y, l_1 = 2a_5(o_x^2 + o_y^2) + 2(X_n n_x + Y_n n_y)$   
 $l_2 = X_p o_x + Y_p o_y - (X_n o_x + Y_n o_y) + 4a_5(n_x o_x + n_y o_y)$  (2.3.2.39)  
 $l_3 = -2a_5(o_x^2 + o_y^2) + 2(X_p n_x + Y_p n_y), l_4 = -(X_p o_x + Y_p o_y)$

6)  $c_{23}^2$  の表示

$$c_{23}^2 = \frac{\left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)^2}{\left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)^2 + (o_z + 2n_z t - o_z t^2)^2 \left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)} = \frac{\sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i}{\sum_{i=0}^8 L_i t^i} \quad (2.3.2.40)$$

7)  $\eta \tan \theta_{23} - \phi$  の表示

$$\eta \tan \theta_{23} - \phi = \frac{1}{(1+t^2) \left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)} \left[ -(o_z + 2n_z t - o_z t^2) \sum_{i=0}^4 k_i t^i + \left( \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \right) \left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right) \right] \quad (2.3.2.41)$$

これらを式(2.3.2.28)の2乗式のなかに代入して代数方程式を導くが、これ以後の導出過程は、2章の2.2.1節と同じようになるため省略する。

最終的につぎのような代数方程式を得る。

$$H(t) = \sum_{i=0}^{24} R_i t^i = 0 \quad (2.3.2.42)$$

この方程式の解法は2.2節で説明したと同じBairstow法<sup>[3]</sup>を利用する。

実根  $t$  に基づき、各関節角はつぎのように定式化できる。

(1)  $\theta_6$  の解

代数方程式(2.3.2.42)の実根  $t$  から、

$$\theta_6 = 2 \tan^{-1} t \quad (2.3.2.43)$$

が決定する。

(2)  $\theta_1$  の解

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{Y_n + 2a_5 o_y t + Y_p t^2}{X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2} \right) \quad (2.3.2.44)$$



(3)  $\theta_{23}$  の解

$$\theta_{23} = \tan^{-1} \left\{ \frac{\pm (\phi^2 + \eta^2 - a) / 2d_4 \sqrt{\phi^2 + \eta^2}}{\sqrt{1 - \{(\phi^2 + \eta^2 - a) / 2d_4 \sqrt{\phi^2 + \eta^2}\}^2}} \right\} + \varepsilon \quad (2.3.2.45)$$

但し,  $\varepsilon = \tan^{-1}(\phi/\eta)$

(4)  $\theta_4$  の解

$$c_4 = Bs_1 - Dc_1 \quad (2.3.2.46)$$

$$\begin{aligned} s_4 &= (Bc_1 + Ds_1) / c_{23} \quad (c_{23} \neq 0) \\ &= -F / s_{23} \quad (c_{23} = 0) \end{aligned} \quad (2.3.2.47)$$

従って,

$$\theta_4 = \tan^{-1}(s_4/c_4) \quad (2.3.2.48)$$

(5)  $\theta_5$  の解

$$s_5 = -(Ac_1 + Cs_1)s_{23} - Ec_{23} \quad (2.3.2.49)$$

$$\begin{aligned} c_5 &= -(As_1 - Cc_1) / s_4 \quad (s_4 \neq 0) \\ &= \{(Ac_1 + Cs_1)c_{23} - Es_{23}\} / c_4 \quad (s_4 = 0) \end{aligned} \quad (2.3.2.50)$$

従って,

$$\theta_5 = \tan^{-1}(s_5/c_5) \quad (2.3.2.51)$$

(6)  $\theta_2$  の解

$$s_2 = \{a_5E - ZZ + d_4c_{23}\} / a_2 \quad (2.3.2.52)$$

$$c_2 = \{XXc_1 + YYs_1 - a_5(Ac_1 + Cs_1) - d_4s_{23}\} / a_2 \quad (2.3.2.53)$$

より,

$$\theta_2 = \tan^{-1}(s_2/c_2) \quad (2.3.2.54)$$

(7)  $\theta_3$  の解

$$\theta_3 = \theta_{23} - \theta_2 \quad (2.3.2.55)$$

### 2.3.3 一般化 $A_1$ 行列を利用した逆運動学の多項式モデル (8次変換方程式)

DH法によるリンク関係式を, 2.2節で行ったと同様にして8次の変換方程式に置き換える。以下, その計算過程を説明する(16次の方程式の誘導に対しては, 2.2節と類似の方法で実行でき付録A.6に譲る。)

前節の式(2.3.2.10), (2.3.2.12)から

$$d_4s_{23} + a_2c_2 = \{P_x - a_6n_x - Aa_5 - d_6a_x\} / c_1 = P_1 / c_1 \quad (2.3.3.1)$$

$$d_4c_{23} - a_2s_2 = P_z - a_6n_z - Ea_5 - d_6a_z - d_1 = P_2 \quad (2.3.3.2)$$

に変形後, 一定の関係を引出すために

$$d_4s_3 = (P_1/c_1)c_2 - P_2s_2 - a_2 \quad (2.3.3.3)$$

$$d_4c_3 = (P_1/c_1)s_2 + P_2c_2 \quad (2.3.3.4)$$

なる関係に着目する。また,  $\tan\theta_{23}$  は, 付録A.7の説明により

$$\begin{aligned} \tan\theta_{23} &= \frac{(P_1/c_1) - a_2c_2}{P_2 + a_2s_2} = \frac{-X(o_x + 2n_x t - o_x t^2)}{c_1 \{X(o_x + 2n_x t - o_x t^2) + Y(o_y + 2n_y t - o_y t^2)\}} \\ &= \frac{K}{c_1} \end{aligned} \quad (2.3.3.5)$$

と表される。ここで  $K$  の記号表示を

$$K = -X\Phi_z/S, \quad S = X\Phi_x + Y\Phi_y \quad (2.3.3.6)$$

とする。但し、

$$\begin{aligned} \Phi_x(t) &= o_x + 2n_x t - o_x t^2 \\ \Phi_y(t) &= o_y + 2n_y t - o_y t^2 \\ \Phi_z(t) &= o_z + 2n_z t - o_z t^2 \end{aligned} \quad (2.3.3.7)$$

$$P_1 = Y/(1+t^2), \quad P_2 = Z/(1+t^2) \quad (2.3.3.8)$$

$$\begin{aligned} Y &= Y_n + 2a_5 o_y t + Y_p t^2, \quad Z = Z_n + 2a_5 o_z t + Z_p t^2 \\ Y_n &= -a_5 n_y + YY, \quad Y_p = a_5 n_y + YY, \quad YY = P_y - a_6 n_y - d_6 a_y \\ Z_n &= -a_5 n_z + ZZ, \quad Z_p = a_5 n_z + ZZ, \quad ZZ = P_z - a_1 - a_6 n_z - d_6 a_z \end{aligned} \quad (2.3.3.9)$$

とする。

一方、式(2.3.3.1)~(2.3.3.4)により導いたつぎの2つの関係

$$a_2 c_1 c_2 = P_1 - K(P_2 + a_2 s_2) \quad (2.3.3.10)$$

$$P_1^2 + P_2^2 c_1^2 + 2a_2 s_2 P_2 c_1^2 - 2a_2 P_1 c_1 c_2 = -ac_1^2 \quad (2.3.3.11)$$

但し、 $a = a_2^2 - d_4^2$

を使って、つぎの関係式を見出す。

$$d_4 s_{23} = P_1/c_1 - a_2 c_2 = \frac{K(P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - ac_1^2)}{2(P_2 c_1^2 + KP_1)c_1} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3 c_1} \quad (2.3.3.12)$$

$$d_4 c_{23} = P_2 + a_2 s_2 = \frac{P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - ac_1^2}{2(P_2 c_1^2 + KP_1)} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} \quad (2.3.3.13)$$

付録 A. 7 に示した  $P_1, P_2$  などの表現を個々の  $\Lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) に適用して

$$\Lambda_1 = K(P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - ac_1^2) = -\frac{X^3 \Phi_z (J + Z^2 - L)}{JST^2} \quad (2.3.3.14)$$

$$\Lambda_2 = P_1^2 + P_2^2 c_1^2 - ac_1^2 = \frac{X^2 (J + Z^2 - L)}{JT^2} \quad (2.3.3.15)$$

$$\Lambda_3 = 2(P_2 c_1^2 + KP_1) = \frac{2X^2 (SZ - J\Phi_z)}{JST} \quad (2.3.3.16)$$

但し、 $L = aT^2, T = 1 + t^2, J = X^2 + Y^2$

を得る。これより、

$$d_4 s_{23} = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3 c_1} = -\frac{X\Phi_z (J + Z^2 - L)}{2T(SZ - J\Phi_z)c_1} \quad (2.3.3.17)$$

$$d_4 c_{23} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_3} = \frac{(J + Z^2 - L)S}{2T(SZ - J\Phi_z)} \quad (2.3.3.18)$$

が得られ、つぎの変換多項式が引出される。

$$(J + Z^2 - L)^2 (S^2 + J\Phi_z^2) = 4d_4^2 (J\Phi_z - SZ)^2 T^2 \quad (2.3.3.19)$$

以下、簡略化の過程を記す。

1) J+Z<sup>2</sup>-L の簡略化

(1+t<sup>2</sup>)の因数を発見するためにつぎの操作を行う。

$$\begin{aligned}
 J+Z^2-L &= X^2+Y^2+Z^2-a(1+t^2)^2 \\
 &= (1+t^2)^2 \left[ R_1^2+R_2^2+R_3^2-2a_5R_1 \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}+4a_5R_2 \frac{t}{(1+t^2)}+a_5^2-a \right] \\
 &= (1+t^2) \left[ \{(R_1-a_5)^2+R_2^2+R_3^2-a\}+4a_5R_2t+\{(R_1+a_5)^2 \right. \\
 &\quad \left. +R_2^2+R_3^2-a\}t^2 \right] \\
 &= (1+t^2)(r_0+r_1t+r_2t^2) = (1+t^2)R(t) \tag{2.3.3.20}
 \end{aligned}$$

ここに,

$$X = X_n + 2a_5o_x t + X_p t^2 = (1+t^2) \{XX - a_5n_x c_6 + a_5o_x s_6\} \tag{2.3.3.21}$$

$$Y = Y_n + 2a_5o_y t + Y_p t^2 = (1+t^2) \{YY - a_5n_y c_6 + a_5o_y s_6\} \tag{2.3.3.22}$$

$$Z = Z_n + 2a_5o_z t + Z_p t^2 = (1+t^2) \{ZZ - a_5n_z c_6 + a_5o_z s_6\} \tag{2.3.3.23}$$

$$\begin{aligned}
 R_1 &= n_x XX + n_y YY + n_z ZZ, \quad R_2 = o_x XX + o_y YY + o_z ZZ, \\
 R_3 &= a_x XX + a_y YY + a_z ZZ \tag{2.3.3.24}
 \end{aligned}$$

とする。

2) JΦ<sub>z</sub>-SZ, S<sup>2</sup>+JΦ<sub>z</sub><sup>2</sup> の簡略化

つぎに, 式(2.3.3.19)の JΦ<sub>z</sub>-SZ, S<sup>2</sup>+JΦ<sub>z</sub><sup>2</sup> についてはいずれも X, Y と式(2.3.3.7)を使った表  
現に書に換え, 分解因子を順次明らかにしていく。

$$\begin{aligned}
 J\Phi_z - SZ &= (X^2+Y^2)\Phi_z - (X\Phi_x+Y\Phi_y)Z = X(X\Phi_z-Z\Phi_x) + Y(Y\Phi_z-Z\Phi_y) \\
 &= (1+t^2) \{XU + YV\} = (1+t^2)W \tag{2.3.3.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S^2 + J\Phi_z^2 &= (X\Phi_x + Y\Phi_y)^2 + (X^2 + Y^2)\Phi_z^2 \\
 &= (\Phi_x^2 + \Phi_z^2)X^2 + (\Phi_y^2 + \Phi_z^2)Y^2 + 2\Phi_x\Phi_yXY \\
 &= \{(1+t^2)^2 - \Phi_y^2\}X^2 + \{(1+t^2)^2 - \Phi_x^2\}Y^2 + 2\Phi_x\Phi_yXY \\
 &= (1+t^2)^2(X^2+Y^2) - (X\Phi_y - Y\Phi_x)^2 \\
 &= (1+t^2)^2(X^2+Y^2) - (X\Phi_y - Y\Phi_x)^2 = (1+t^2)^2 \left\{ \sum_{i=0}^4 f_i t^i - \left( \sum_{i=0}^2 m_i t^i \right)^2 \right\} \\
 &= (1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 (f_i - n_i) t^i = (1+t^2)^2 \sum_{i=0}^4 g_i t^i \tag{2.3.3.26}
 \end{aligned}$$

と変形できる。

但し,

$$\begin{aligned}
 X\Phi_z - Z\Phi_x &= (X_n + 2a_5o_x t + X_p t^2)(o_z + 2n_z t - o_z t^2) \\
 &\quad - (Z_n + 2a_5o_z t + Z_p t^2)(o_x + 2n_x t - o_x t^2) \\
 &= (X_n o_z - Z_n o_x) + 2(X_n n_z - Z_n n_x)t + \{4a_5(o_x n_z - n_x o_z) \\
 &\quad + (Z_n o_x - X_n o_z) + (X_p o_z - Z_p o_x)\}t^2 + 2(X_p n_z - Z_p n_x)t^3 \\
 &\quad + (Z_p o_x - X_p o_z)t^4 \\
 &= (1+t^2)(u_0 + u_1 t + u_2 t^2) = (1+t^2)U \tag{2.3.3.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y\Phi_z - Z\Phi_y &= (Y_n + 2a_5o_yt + Y_pt^2)(o_z + 2n_zt - o_zt^2) \\
 &\quad - (Z_n + 2a_5o_zt + Z_pt^2)(o_y + 2n_yt - o_yt^2) \\
 &= (Y_no_z - Z_no_y) + 2(Y_nn_z - Z_nn_y)t + \{Z_no_y - Y_no_z + Y_po_z - Z_po_y \\
 &\quad + 4a_5(o_yn_z - o_zn_y)\}t^2 + 2(Y_pn_z - Z_pn_y)t^3 + (Z_po_y - Y_po_z)t^4 \\
 &= (1+t^2)(v_0 + v_1t + v_2t^2) = (1+t^2)V \quad (2.3.3.28)
 \end{aligned}$$

$$X\Phi_y - Y\Phi_x = (1+t^2)(m_0 + m_1t + m_2t^2) = (1+t^2)M \quad (2.3.3.29)$$

$$m_0 = X_no_y - Y_no_x, m_1 = 2(X_nn_y - Y_nn_x), m_2 = Y_po_x - X_po_y$$

$$W = XU + YV$$

$$\begin{aligned}
 w_0 &= X_nu_0 + Y_nv_0, w_1 = X_nu_1 + Y_nv_1 + 2a_5(u_0o_x + v_0o_y), \\
 w_2 &= X_nu_2 + Y_nv_2 + X_pu_0 + Y_pv_0 + 2a_5(u_1o_x + v_1o_y), \\
 w_3 &= X_pu_1 + Y_pv_1 + 2a_5(u_2o_x + v_2o_y), w_4 = X_pu_2 + Y_pv_2
 \end{aligned} \quad (2.3.3.30)$$

これより,

$$R^2 \sum_{i=0}^4 g_i t^i = 4a_{34}^2 \left( \sum_{i=0}^4 w_i t^i \right)^2 \quad (2.3.3.31)$$

に到達する。これを

$$R^2 \sum_{i=0}^4 g_i t^i = \sum_{i=0}^8 Q_i t^i, 4a_{34}^2 \left( \sum_{i=0}^4 w_i t^i \right)^2 = \sum_{i=0}^8 P_i t^i \quad (2.3.3.32)$$

と置いて整理したものがつぎの最終式である。

$$H(t) = \sum_{i=0}^8 (P_i - Q_i) t^i = \sum_{i=0}^8 \rho_i t^i \quad (2.3.3.33)$$

以上で、 $\theta_6$  を決定するための変換多項式  $H(t)$  が簡単な 8 次式で実現できた。 $\theta_6$  から残りの関節角を導出する手続きは同じなので省略する。

## 2.4 仮想マニピュレータを用いた最適化手法<sup>(6, 33)</sup>

### 2.4.1 序論

通常のマニピュレータは、その機構全体を支えるベースを起点にしていくつかのリンクが有機的に結合されたものである。特に、多関節形マニピュレータの場合、このベース支持機構と第 1 リンクの間には作業の領域を広く確保する目的から回転関節が多く利用されており、これに続くリンク間には旋回、回転機構を組合わせた動作形態が取られている。本研究では、このベースに回転関節が結合された Fig. 1 のアーム構造に対して、リンク関係を新しい観点から見直したときの表現とそれに基づく各関節角の決定方法について言及する。

まず、マニピュレータの逆問題では、マニピュレータの指先位置と方向が指定されていることが多いことから逆運動学の問題に対応して、マニピュレータをその先端から発して肩の方へと辿って考える。すなわち、ベースから順方向にマニピュレータ指先位置と方向を決定する場合とは逆に、マニピュレータ先端部位置が与えられ、肩の終端が自由である仮想マニピュレータを考える。そして、この仮想マニピュレータの終端位置と実際にそれがあるべき位置との偏差を最小

化し、零にもっていくことにより関節解を求める。この考え方をもとにして、さらに計算効率を改善するために、6関節マニピュレータの先端から数えて5リンク分(4関節角)をベースにつながる第1リンク(2関節角)と分離させて考える。そして、切り離れた第5リンク終端とベース側第1リンクのそれとの位置の差を最小(すなわち、零)にすることで、6リンク全体の連結を実現させる。そのとき、各リンクの物理的連結条件を満足するような関節角の決定がポイントになる。つまり、6変数体系を4変数と2変数に分け、前者については線形化を行った後、目標点と現在点との誤差の最小化の観点から、連立方程式の解として関節解を導き出す。そして、残り2変数については先に求めた解から、リンク構成の条件により一意的に決定する。このようにして、逆問題を効率よく解くことに成功した。当然のことながら、6変数からなる逆ヤコビ行列の演算に比べ計算時間が大幅に短縮した。なお、本法の基本的概念は関節変数に関する拘束条件さえ与えれば、より高次の体系に適用することも可能である。次に、関節角を求めるアルゴリズムの展開を詳しく説明する。

#### 2.4.2 計算アルゴリズム

Fig. 2 に示した座標系をもつマニピュレータに対して、指先から固定端へ逆に辿る計算過程を、指先  $P_1$  を基点として根元の支持機構までの間に仮想的なリンクで構成された別のマニピュレータを考えてみよう (Fig. 4 の点線部参照)。この仮想リンク  $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_5P_6})$  は実際の第2リンクから指先までの体系と幾何学的にまったく同一であるが、回転・旋回方向は順方向で定めた方向と逆になる座標系を定義する。図の実線部を含めた  $OMP_2P_1$  は実際のマニピュレータのある姿勢を示す。以下の解析で個々の変換行列を求める際の回転行列、並進行列は付録 A.1 で説明した記号を用いる。また、順方向に計算する座標変換行列  $A_n$  に対して、 $A_n^+$  を仮想リンク上の座標変換行列とする。

さて、指の部分の座標系  $\Sigma_6$  から逆に辿るためにこれを  $y_6$  軸のまわりに  $180(\text{deg})$  反転させ、新座標系  $\Sigma_6^+(x_6^+, y_6^-, z_6^+)$  を設定する。本節を通して、点線で示した回転および旋回方向は、順方向の座標変換計算で定義した回転角の正方向である。

(i) 仮想リンク上先端  $P_1$  から第6関節までの変換行列  $A_6^-$  (Fig. 5 参照)

手の中心 ( $\Sigma_6^+$  の原点) から  $x_6^+$  方向へ  $a_6$  だけ並進して、座標系  $\Sigma_5^+(x_5^+, y_5^+, z_5^+)$  を構成後、 $z_5^+$  軸のまわりに  $\theta_6$  だけ旋回する。この間の変換行列を  $A_6^+$  で表すと、

$$A_6^- = \text{Trans}(a_6, 0, 0)\text{Rot}(z_5^+, \theta_6)$$

$$= \begin{pmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.2.1)$$

となる。

(ii) 仮想リンク上第6関節から第5関節までの変換行列  $A_5^+$  (Fig. 6 参照)

次に  $x_5^+$  軸のまわりに  $-90(\text{deg})$  回転後  $x_5^+$  軸に沿って  $a_5$  だけ並進する。新座標系  $\Sigma_4^+(x_4^+, y_4^+, z_4^+)$  に対して  $z_4^+$  軸のまわりに  $\theta_5$  だけ旋回する。変換行列  $A_5^+$  は、式(2.4.2.2)で表される。

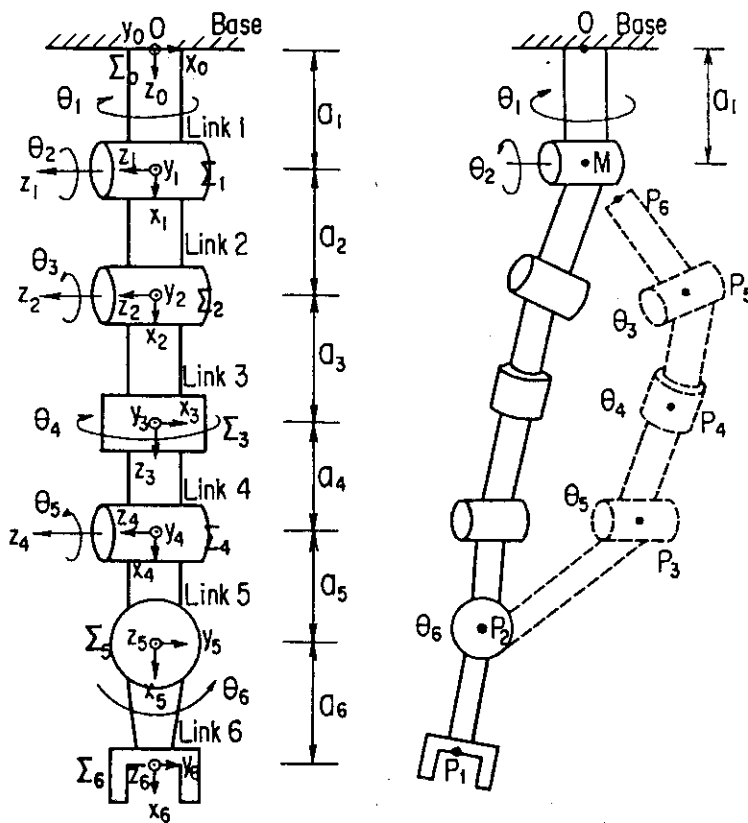


Fig. 4 Kinematic Analysis with Imaginary Links

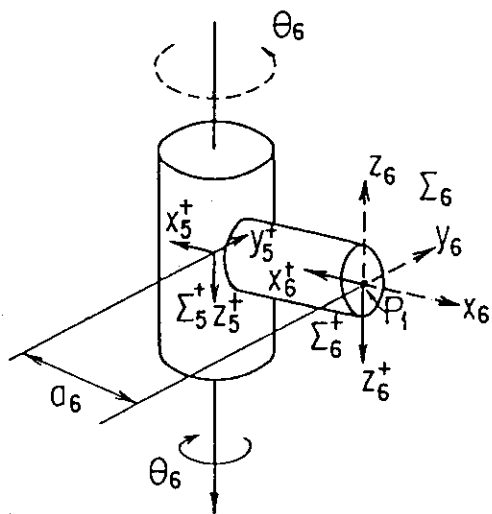


Fig. 5 Kinematic Structure of Imaginary Link 6 to 5

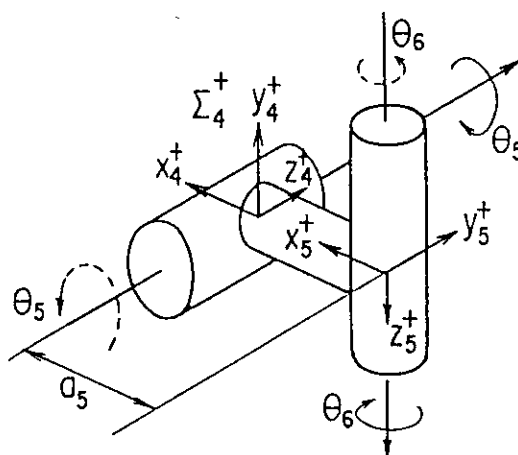


Fig. 6 Kinematic Structure of Imaginary Link 5 to 4

$$\begin{aligned}
 A_5 &= \text{Rot}(x_5^+, -\pi/2) \text{Trans}(a_5, 0, 0) \text{Rot}(z_4^+, \theta_5) \\
 &= \begin{vmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4.2.2)
 \end{aligned}$$

(iii) 仮想リンク上第5関節から第4関節までの変換行列  $A_4^+$  (Fig. 7 参照)

Fig. 7を参考に、 $y_4^+$ 軸のまわりに90(deg)の回転と、 $z_4^+$ 方向に $a_4$ の並進を与える。座標系 $\Sigma_3(x_3^+, y_3^+, z_3^+)$ を定めた後、さらに $z_3^+$ 軸を中心に $\theta_4$ だけ回転する。変換行列 $A_4^+$ はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 A_4^+ &= \text{Rot}(y_4^+, \pi/2) \text{Trans}(0, 0, a_4) \text{Rot}(z_3^+, \theta_4) \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ -c_4 & s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4.2.3)
 \end{aligned}$$

(iv) 仮想リンク上第4関節から第3関節までの変換行列  $A_3^+$  (Fig. 8 参照)

続いて $z_3^+$ 方向に $a_3$ 並進後、 $y_3^+$ 軸を $-90(\text{deg})$ 回転して新座標系 $\Sigma_2^+(x_2^+, y_2^+, z_2^+)$ を構成する。これを $z_2^+$ 軸のまわりに $\theta_3$ の旋回を与えて、変換行列 $A_3^+$ を求める。

$$\begin{aligned}
 A_3^+ &= \text{Trans}(0, 0, a_3) \text{Rot}(y_3^+, -\pi/2) \text{Rot}(z_2^+, \theta_3) \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ c_3 & -s_3 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4.2.4)
 \end{aligned}$$

(v) 仮想リンク上第3関節から第2関節までの変換行列  $A_2^+$  (Fig. 9 参照)

最後に Fig. 9 に示すように、 $x_2^+$ 方向へ $a_2$ だけ並進して座標系を $\Sigma_1^+(x_1^+, y_1^+, z_1^+)$ を構成し、変換行列 $A_2^+$ を得る。

$$A_2^+ = \text{Trans}(a_2, 0, 0) \quad (2.4.2.5)$$

さて、Fig. 4 から明らかなように、 $\overline{OM}$ 間の距離 $a_1$ はリンクの長さ(一定)であり回転 $\theta_1$ と次の旋回 $\theta_2$ の行列積は点Mの方向のみを決定する。順方向に支持ベースから第2関節までの同次変換 $A_1 A_2$ を決定する際に設定した座標系 $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ と仮想リンク最終点で定めた $\Sigma_1^+$ を対応させるためには、 $\Sigma_1^+$ を $y_1^+$ 軸のまわりに180(deg)反転させる必要がある。

以上、指先から出発した5個の仮想リンクの先端 $P_6$ における位置と方向は(i)~(v)の変換行列の積 $U$ としてつぎのように表現される( $a_{34}$ は $a_3 + a_4$ を意味する)。

すなわち、

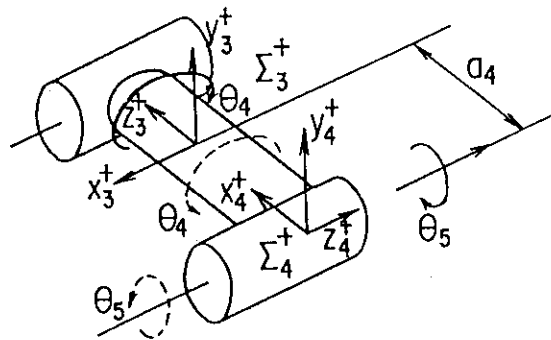


Fig. 7 Kinematic Structure of Imaginary Link 4 to 3

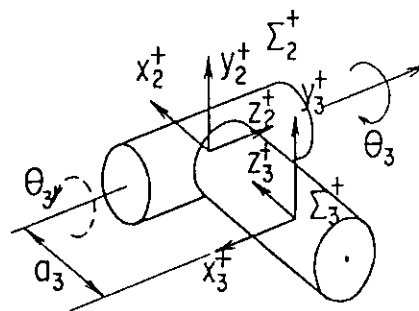


Fig. 8 Kinematic Structure of Imaginary Link 3 to 2

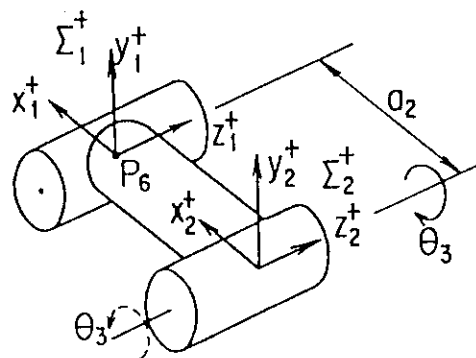


Fig. 9 Kinematic Structure to End-point of Imaginary Link 2



$$\begin{aligned}
 U = (u_{ij}) &= A_6^+ A_5^+ A_4^- A_3^+ A_2^+ \text{Rot}(y_1^+, \pi) \\
 &= \begin{vmatrix} -(c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6) & -(s_3c_5c_6 + s_5c_3c_4c_6 + s_4s_5c_3) \\ -(s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) & -(s_3s_6c_5 + s_5s_6c_3c_4 - s_4c_3c_6) \\ s_3c_3 + s_3c_4c_5 & s_3s_5 - c_3c_4c_5 \\ 0 & 0 \\ s_6c_4 - s_4s_5c_6 & a_2(c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4c_6) + a_{34}c_5c_6 + a_5c_6 + a_6 \\ -(s_4s_5s_6 + c_4c_6) & a_2(s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) + a_{34}s_6c_5 + a_5s_6 \\ -s_4c_5 & -a_2(s_5c_3 + s_3c_4c_5) - a_{34}s_5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & p_x^- \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & p_y^- \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & p_z^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4.2.6)
 \end{aligned}$$

$$(u_{14} = p_x^+, u_{24} = p_y^-, u_{34} = p_z^+, u_{41} = u_{42} = u_{43} = 0, u_{44} = 1)$$

一方, 基準座標系  $\Sigma_0$  でみた指先  $P_1$  の位置および方向を順方向変換  $T_6$  とし, つぎのように指定する。

$$T_6 = \begin{vmatrix} n_x^\circ & o_x^\circ & a_x^\circ & P_x \\ n_y^\circ & o_y^\circ & a_y^\circ & P_y \\ n_z^\circ & o_z^\circ & a_z^\circ & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4.2.7)$$

さらに, これを指先の座標系  $\Sigma_6$  から仮想リンク上の座標系  $\Sigma_6^- \sim 180$  (deg) 座標変換したものを  $\overline{T}_6$  とおく。

$$\begin{aligned}
 \overline{T}_6 &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = T_6 \text{Rot}(y_6, \pi) \\
 &= \begin{vmatrix} n_x^\circ & o_x^\circ & a_x^\circ & P_x \\ n_y^\circ & o_y^\circ & a_y^\circ & P_y \\ n_z^\circ & o_z^\circ & a_z^\circ & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4.2.8)
 \end{aligned}$$

従って, 点  $P_1$  を起点とする仮想リンクの終端  $P_6$  の空間的位置と方向は, 基準座標系  $\Sigma_0$  に関して上の座標変換の積  $I = (a_{ij}) = \overline{T}_6 U$  で求められる。

すなわち,

$$\begin{aligned}
 I &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & p_x^+ \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & p_y^- \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & p_z^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4.2.9)
 \end{aligned}$$

これにより、絶対座標空間 $\Sigma_0$ における点 $P_6$ の $x$ 方向、 $y$ 方向、 $z$ 方向の位置はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 p_x &= \alpha_{14} = n_x p_x^+ + o_x p_y^+ + a_x p_z^+ + P_x \\
 &= n_x \{a_2(c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6) + a_{34}c_5c_6 + a_5c_6 + a_6\} \\
 &\quad + o_x \{a_2(s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) + a_{34}s_6c_5 + a_5s_6\} \\
 &\quad + a_x \{-a_2(s_5c_3 + s_3c_4c_5) - a_{34}s_5\} + P_x \quad (2.4.2.10)
 \end{aligned}$$

$$p_y = \alpha_{24} = n_y p_x^+ + o_y p_y^- + a_y p_z^+ + P_y \quad (2.4.2.11)$$

$$p_z = \alpha_{34} = n_z p_x^+ + o_z p_y^+ + a_z p_z^+ + P_z \quad (2.4.2.12)$$

また、点 $P_6$ における仮想リンクの方向は式(2.4.2.9)の最初の3つの列ベクトルから求められる。

このことから、マニピュレータの与えられた位置と姿勢に対する逆問題は、仮想リンク先端 $P_6$ ( $p_x, p_y, p_z$ )が座標系 $\Sigma_1$ の原点 $M$ ( $\Sigma_0$ に関してその位置は $(0, 0, a_1)$ で $a_1$ は第1リンクの長さを表す)に一致する関節角度 $\theta_6, \theta_5, \theta_4, \theta_3$ を求める問題とみられる。

4つの独立変数からなる式(2.4.2.10)~(2.4.2.12)に姿勢の定式化を1つ加え、計4つの非線形方程式から関節角を陽に導くことは困難であるため、つぎのアルゴリズムを採用する。

いま、仮に点 $P_6$ が $M$ に十分近いと推定される $\theta_i$ の初期値を $\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30}$ とすると、式(2.4.2.10)~(2.4.2.12)

$$p_x(\theta_0) = p_x(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30})$$

$$p_y(\theta_0) = p_y(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30})$$

$$p_z(\theta_0) = p_z(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30})$$

から求まる値と座標系 $\Sigma_2$ の原点 $M$ との空間的位置の近さ(ユークリッド距離)を調べる。その距離が十分に接近していれば、 $\theta_0$ が解と考えられるが、離れている場合各関節をそれぞれ上の初期値を中心として微小変動( $\Delta\theta_6, \Delta\theta_5, \Delta\theta_4, \Delta\theta_3$ )させ、式(2.4.2.10)~(2.4.2.12)をつぎのように線形近似する。

$$\begin{aligned}
 p_x(\theta_0 + \Delta\theta) &= p_x(\theta_0) + (\partial p_x / \partial \theta_6)_0 \Delta\theta_6 + (\partial p_x / \partial \theta_5)_0 \Delta\theta_5 \\
 &\quad + (\partial p_x / \partial \theta_4)_0 \Delta\theta_4 + (\partial p_x / \partial \theta_3)_0 \Delta\theta_3 \quad (2.4.2.13)
 \end{aligned}$$

ここに $(\partial p_x / \partial \theta_i)_0$ は $p_x$ の角度 $\theta_i$ における変化率を初期値 $\theta_0$ について計算した値である。また、 $p_x(\theta_0 + \Delta\theta)$ は、 $p_x(\theta_{60} + \Delta\theta_6, \theta_{50} + \Delta\theta_5, \theta_{40} + \Delta\theta_4, \theta_{30} + \Delta\theta_3)$ を意味する。同様に、 $p_y, p_z$ に対してもつぎのように表現できる。

$$p_y(\theta_0 + \Delta\theta) = p_y(\theta_0) + \sum_{i=3}^6 (\partial p_y / \partial \theta_i)_0 \Delta\theta_i \quad (2.4.2.14)$$

$$p_z(\theta_0 + \Delta\theta) = p_z(\theta_0) + \sum_{i=3}^6 (\partial p_z / \partial \theta_i)_0 \Delta\theta_i \quad (2.4.2.15)$$

この近似表現に対する  $\overline{P_6M}$  間の Euclid 距離は容易に計算できることがわかる。

さて、われわれは原問題をまず 4 変数の決定問題に置き換えて式(2.4.2.10)~(2.4.2.12)を導いたが、解の決定には 1 自由度分の指定が残されている。事実、現在の議論では  $\overline{P_6M}$  の接合の仕方についてまったく任意である(すなわち、フリー・ジョイントを前提としている)ため、実際の関節機構に即した接合方法を指定する必要がある。後述の(2.4.2.24)式から  $A_1A_2$  の座標変換で第 3 列ベクトルの 1 成分(すなわち、接近ベクトル  $\mathbf{a}$  の  $z$  方向余弦)がつねに零 ( $A_z = 0$ ) であるため、この拘束条件を 2 点間のノルム(距離)のなかに追加することが必要である。

すなわち、最終的な目的関数として

$$J = \{p_x(\theta_0 + \Delta\theta)\}^2 + \{p_y(\theta_0 + \Delta\theta)\}^2 + \{p_z(\theta_0 + \Delta\theta) - a_1\}^2 + A_z^2 \quad (2.4.2.16)$$

が最小値をとるように  $\Delta\theta_i$  ( $i = 3 \sim 6$ ) を決定することがつぎの目標である。ここに、 $A_z$  は式(2.4.2.9)の  $\alpha_{33}$  に相当し、次式で表現される。

$$\begin{aligned} A_z &= n_z u_{13} + o_z u_{23} + a_z u_{33} \\ &= n_z (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_z (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_z (-s_4 c_5) \end{aligned} \quad (2.4.2.17)$$

式(2.4.2.16)の  $A_z$  にはこれを初期値のまわりで線形化して代入する。 $\Delta\theta_i = \phi_i$  ( $i = 3 \sim 6$ ) とおき以上の式を

$$\begin{aligned} p_x(\theta_0 + \Delta\theta) &= m_1 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_x / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\ p_y(\theta_0 + \Delta\theta) &= m_2 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_y / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\ p_z(\theta_0 + \Delta\theta) - a_1 &= m_3 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_z / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\ A_z(\theta_0 + \Delta\theta) &= m_4 + \sum_{i=3}^6 (\partial A_z / \partial \theta_i)_0 \phi_i \end{aligned} \quad (2.4.2.18)$$

と略記する。但し、 $m_1 = p_x(\theta_0)$ ,  $m_2 = p_y(\theta_0)$ ,  $m_3 = p_z(\theta_0) - a_1$ ,  $m_4 = A_z(\theta_0)$  式(2.4.2.18)の各微分値の計算は、つぎのように整理される。

$$\left. \begin{aligned} \partial p_x / \partial \theta_6 &= G(n_x, F_1, o_x, F_2, 0, 0) \\ \partial p_x / \partial \theta_5 &= G(n_x, F_3, o_x, F_4, a_x, F_5) \\ \partial p_x / \partial \theta_4 &= G(n_x, F_6, o_x, F_7, a_x, F_8) \\ \partial p_x / \partial \theta_3 &= G(n_x, F_9, o_x, F_{10}, a_x, F_{11}) \\ \partial p_y / \partial \theta_6 &= G(n_y, F_1, o_y, F_2, 0, 0) \\ \partial p_y / \partial \theta_5 &= G(n_y, F_3, o_y, F_4, a_y, F_5) \\ \partial p_y / \partial \theta_4 &= G(n_y, F_6, o_y, F_7, a_y, F_8) \\ \partial p_y / \partial \theta_3 &= G(n_y, F_9, o_y, F_{10}, a_y, F_{11}) \\ \partial p_z / \partial \theta_6 &= G(n_z, F_1, o_z, F_2, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2.19)$$

$$\begin{aligned}
 \partial p_z / \partial \theta_5 &= G(n_z, F_3, o_z, F_4, a_z, F_5) \\
 \partial p_z / \partial \theta_4 &= G(n_z, F_6, o_z, F_7, a_z, F_8) \\
 \partial p_z / \partial \theta_3 &= G(n_z, F_9, o_z, F_{10}, a_z, F_{11}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_6 &= G(n_z, F_{12}, o_z, F_{13}, 0, 0) \\
 \partial A_z / \partial \theta_5 &= G(n_z, F_{14}, o_z, F_{15}, a_z, F_{16}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_4 &= G(n_z, F_{17}, o_z, F_{18}, a_z, F_{19}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_3 &= 0
 \end{aligned}$$

ここに、関数 Gは、 $G(a, b, c, d, e, f) = ab + cd + ef$  と定める。また、式(2.4.2.19)の各パラメータは

$$\begin{aligned}
 F_1 &= a_2(-s_6c_3c_5 + s_3s_5s_6c_4 - s_3s_4c_6) - a_{34}s_6c_5 - a_5s_6 \\
 F_2 &= a_2(c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6) + a_{34}c_5c_6 + a_5c_6 \\
 F_3 &= a_2(-s_5c_3c_6 - s_3c_4c_5c_6) - a_{34}s_5c_6 \\
 F_4 &= a_2(-s_5s_6c_3 - s_3s_6c_4c_5) - a_{34}s_5s_6 \\
 F_5 &= -a_2(c_3c_5 - s_3s_5c_4) - a_{34}c_5 \\
 F_6 &= a_2(s_3s_4s_5c_6 - s_3s_6c_4) \\
 F_7 &= a_2(s_3s_4s_5s_6 + s_3c_4c_6) \\
 F_8 &= a_2s_3s_4c_5 \\
 F_9 &= -a_2(s_3c_5c_6 + s_5c_3c_4c_6 + s_4s_6c_3) \\
 F_{10} &= a_2(-s_3s_6c_5 - s_5s_6c_3c_4 + s_4c_3c_6) \\
 F_{11} &= a_2(s_3s_5 - c_3c_4c_5) \\
 F_{12} &= c_4c_6 + s_4s_5s_6 \\
 F_{13} &= -s_4s_5c_6 + s_6c_4 \\
 F_{14} &= -s_4c_5c_6 \\
 F_{15} &= -s_4s_6c_5 \\
 F_{16} &= s_4s_5 \\
 F_{17} &= -s_4s_6 - s_5c_4c_6 \\
 F_{18} &= -s_5s_6c_4 + s_4c_6 \\
 F_{19} &= -c_4c_5
 \end{aligned} \tag{2.4.2.20}$$

と表す。これらの値を使って目的関数は、

$$J = \left( m_1 + \sum_{i=3}^6 a_{xi} \phi_i \right)^2 + \left( m_2 + \sum_{i=3}^6 a_{yi} \phi_i \right)^2 + \left( m_3 + \sum_{i=3}^6 a_{zi} \phi_i \right)^2 + \left( m_4 + \sum_{i=3}^6 b_i \phi_i \right)^2$$

と表現される。但し、

$$\begin{aligned}
 a_{xi} &= (\partial p_x / \partial \theta_i)_o, \quad a_{yi} = (\partial p_y / \partial \theta_i)_o, \\
 a_{zi} &= (\partial p_z / \partial \theta_i)_o, \quad b_i = (\partial A_z / \partial \theta_i)_o.
 \end{aligned} \tag{2.4.2.21}$$

(i=3, 4, 5, 6)

Jの最小値を求めるために、 $\partial J / \partial \phi_i = 0$  を実行すると、 $\phi_i$  に関する連立方程式が形成されつぎのようになる。

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_4 & R_5 & R_6 \\ R_4 & R_1 & R_7 & R_8 \\ R_5 & R_7 & R_2 & R_9 \\ R_6 & R_8 & R_9 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{pmatrix} \quad (2.4.2.22)$$

方程式の各係数および定数項は、

$$\begin{aligned} R_0 &= G_1(a_{x3}, a_{y3}, a_{z3}, b_3) \\ R_1 &= G_1(a_{x4}, a_{y4}, a_{z4}, b_4) \\ R_2 &= G_1(a_{x5}, a_{y5}, a_{z5}, b_5) \\ R_3 &= G_1(a_{x6}, a_{y6}, a_{z6}, b_6) \\ R_4 &= G_2(a_{x3}, a_{x4}, a_{y3}, a_{y4}, a_{z3}, a_{z4}, b_3, b_4) \\ R_5 &= G_2(a_{x3}, a_{x5}, a_{y3}, a_{y5}, a_{z3}, a_{z5}, b_3, b_5) \\ R_6 &= G_2(a_{x3}, a_{x6}, a_{y3}, a_{y6}, a_{z3}, a_{z6}, b_3, b_6) \\ R_7 &= G_2(a_{x4}, a_{x5}, a_{y4}, a_{y5}, a_{z4}, a_{z5}, b_4, b_5) \\ R_8 &= G_2(a_{x4}, a_{x6}, a_{y4}, a_{y6}, a_{z4}, a_{z6}, b_4, b_6) \\ R_9 &= G_2(a_{x5}, a_{x6}, a_{y5}, a_{y6}, a_{z5}, a_{z6}, b_5, b_6) \\ K_3 &= -G_2(m_1, a_{x3}, m_2, a_{y3}, m_3, a_{z3}, m_4, b_3) \\ K_4 &= -G_2(m_1, a_{x4}, m_2, a_{y4}, m_3, a_{z4}, m_4, b_4) \\ K_5 &= -G_2(m_1, a_{x5}, m_2, a_{y5}, m_3, a_{z5}, m_4, b_5) \\ K_6 &= -G_2(m_1, a_{x6}, m_2, a_{y6}, m_3, a_{z6}, m_4, b_6) \end{aligned} \quad (2.4.2.23)$$

但し、 $G_1(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$G_2(a, b, c, d, e, f, g, h, ) = ab + cd + ef + gh$

と整理できて、初期値  $\theta_0$  から決定される。上の連立方程式を、 $\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$  について Gauss の掃き出し法で計算すると  $\partial J / \partial \phi_i = 0$  を満たす解が得られる。

以上のようにして  $\phi_i$  を決定した後、 $\theta_i = \theta_{i0} + \phi_i$  を線形化を行わない元の式(2.4.2.10)～(2.4.2.12)と(2.4.2.17)に代入して再び点 M との Euclid 距離に  $A_z$  を追加した 2 乗規範

$$J = p_x(\theta_i)^2 + p_y(\theta_i)^2 + \{p_z(\theta_i) - a_1\}^2 + A_z(\theta_i)^2$$

を計算する。仮想リンク先端  $P_6$  の位置決め精度として指定した収束判定条件

$$\sqrt{p_x(\theta_i)^2 + p_y(\theta_i)^2 + \{p_z(\theta_i) - a_1\}^2 + A_z(\theta_i)^2} < \epsilon; \quad \epsilon = 10^{-2}$$

を満たせば、 $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$  は目的関数を最小にするものとみなす。もしも、この条件を満足しない時は、 $\theta_i (= \theta_{i0} + \phi_i)$  を新しい初期値として、その近傍で線形化を行って適切な  $\phi_i$  を見つける上記手順を収束条件に到達するまで繰り返す。すなわち、目的関数の最小化(取りも直さず仮想リンクが実在のマニピュレータ・リンクと十分一致すること)で所要の関節変数  $\theta_6, \theta_5, \theta_4, \theta_3$  が決まる。

最後に、これら 4 変数が決定された後残りの関節角  $\theta_1, \theta_2$  を定める方法について述べる。基準座標系  $\Sigma_0$  から第 2 軸の  $\Sigma_1$  に至る座標変換は、Fig. 2 に示した座標系をもとに

$$\begin{aligned}
 & \text{Rot}(z_0, \theta_1) \text{Trans}(0, 0, a_1) \text{Rot}(y_0, -\pi/2) \text{Rot}(z_1, \theta_2) \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & -s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & -c_1 & 0 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & 0 \\ c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.4.2.24}
 \end{aligned}$$

と計算される。

一方、この行列を式(2.4.2.9)の変換行列 I と比較すると、第 1 関節の回転角はつぎのように定まる。

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{13} = -c_1, \quad \alpha_{23} = -s_1 \\
 \therefore \tan \theta_1 &= \frac{s_1}{c_1} = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}} = \frac{n_y u_{13} + o_y u_{23} + a_y u_{33}}{n_x u_{13} + o_x u_{23} + a_x u_{33}} \\
 &= \frac{n_y (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_y (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_y (-s_4 c_5)}{n_x (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_x (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_x (-s_4 c_5)} \tag{2.4.2.25}
 \end{aligned}$$

また、 $\alpha_{31} = c_2, \alpha_{32} = -s_2$

$$\begin{aligned}
 \therefore \tan \theta_2 &= \frac{s_2}{c_2} = -\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}} = -\frac{(n_z u_{12} + o_z u_{22} + a_z u_{32})}{(n_z u_{11} + o_z u_{21} + a_z u_{31})} \\
 &= \frac{n_z (s_3 c_5 c_6 + s_5 c_3 c_4 c_6 + s_4 s_6 c_3) + o_z (s_3 s_6 c_5 + s_5 s_6 c_3 c_4}{n_z (c_3 c_5 c_6 - s_3 s_5 c_4 c_6 - s_3 s_4 s_6) + o_z (s_6 c_3 c_5 - s_3 s_5 s_6 c_4} \\
 &\quad \frac{-s_4 c_3 c_6 - a_z (s_3 s_5 - c_3 c_4 c_5)}{+s_3 s_4 c_6 - a_z (s_5 c_3 + s_3 c_4 c_5)} \tag{2.4.2.26}
 \end{aligned}$$

が式(2.4.2.6)より求められる。すなわち、 $\theta_1, \theta_2$  は先に求めた  $\theta_3 \sim \theta_6$  の値を使って従属的に決定されたことになる。

このように抽出された関節角の値を、予め順方向に求めておいて変換行列  $T_6$  のなかに代入して計算値と最初に与えた位置・姿勢データとの一致度を検討し、マニピュレータの動作制限範囲との照合をもって最終的な解の採否を判断する。

## 2.5 空間ベクトルと幾何学的概念による計算法<sup>(17), (18)</sup>

### 2.5.1 序 論

これまで述べられたように、マニピュレータの運動学に対する逆問題の解析解は一般的手順では求められないので、複雑な非線形方程式をいかに効率よく解くかが課題となる。時として、根元から指先までの関係を座標変換法で一気に導出した結果、その複雑さゆえに解法で苦慮する

ことも多い。こうした場合、むしろリンク機構を構成する各関節の局所的な関係を幾何学的、物理的、かつ直感的な立場で扱うことを考え、各座標の単位ベクトル(以下、基ベクトルとも呼ぶ)のスカラ積や外積などの簡単なベクトル演算と平面幾何の性質を組み合わせることで、直接的に関節解が誘導できる。しかし、本研究で取扱ったマニピュレータは解析解を得ることは無理なため、導出したリンク関係を1変数 $\theta_6$ の代数方程式で統合化し、その根からの姿勢のすべてが再現できる厳密な関節解を導き出した。

### 2.5.2 ベクトル幾何による関節解の誘導

本研究で示す方法の基本的な考え方は一般のマニピュレータに対しても適用できるが、具体的な解析対象を Fig. 1 に示すマニピュレータを使って考える。その場合、任意座標系や DH 法による表示を使うよりも固定系に対して各座標系を同一方向に定めておけば、各ベクトルの追跡やまた平行移動・回転移動による幾何学的な取扱いが容易になることから、Fig. 2 に代る Fig. 10 の座標系でもって以下の議論を展開する。すなわち、関節上に固定した直交座標系 $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ ( $i=0, \dots, 6$ )の $x_i, y_i, z_i$ 各軸に沿う単位ベクトルを $\mathbf{n}_i, \mathbf{o}_i, \mathbf{a}_i$ とし、指先 $(x_h, y_h, z_h)$ のそれを $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ とする。但し、 $\mathbf{n}_0=\mathbf{n}_1=(1, 0, 0)^T, \mathbf{o}_0=\mathbf{o}_1=(0, 1, 0)^T, \mathbf{a}_0=\mathbf{a}_1=(0, 0, 1)^T$ とし、また成分で表したベクトルを $\mathbf{n}_i=(n_{ix}, n_{iy}, n_{iz})^T, \mathbf{a}_h=\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)^T$ などと記す(Tは転置記号)。尚、Fig. 1(または Fig. 2)に示したリンクの長さ $a_1, a_2, \dots$ は、本節で頻繁に使用する座標系の単位ベクトル $\mathbf{a}_i$ と区別するために、本節に限ってリンクの長さを $l_1, l_2, \dots$ と書換えて用いる。

まず最初に、指先 F とこれに隣接する関節について、基準座標系 $\Sigma_0$ からみた夫々の方向余弦行列を基ベクトルを使って

$$M = |\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}|, N = |\mathbf{n}_6, \mathbf{o}, \mathbf{a}_6|$$

とした場合、Fig. 10 のマニピュレータに対しては、N をベクトル $\mathbf{o}$ (すなわち、 $y_6$  軸)のまわりに $\theta_6$ だけ回転すると M が得られるので、逆に M を $\mathbf{o}$ のまわりに $-\theta_6$ だけ回転すれば N が得られる( $\mathbf{o}_6=\mathbf{o}$ )。

これより、指先直前の方向ベクトルの要素は、指定された指先方向と関節角変位 $\theta_6$ で表現すると式(2.5.2.1)となる。

$$\begin{aligned} n_{6x} &= n_x c_6 + a_x s_6, & a_{6x} &= a_x c_6 - n_x s_6 \\ n_{6y} &= n_y c_6 + a_y s_6, & a_{6y} &= a_y c_6 - n_y s_6 \\ n_{6z} &= n_z c_6 + a_z s_6, & a_{6z} &= a_z c_6 - n_z s_6 \end{aligned} \quad (2.5.2.1)$$

つぎに、 $\Sigma_0$ に対する指先、第6、第5関節の位置を順に $(P_x, P_y, P_z), (x_6, y_6, z_6), (x_5, y_5, z_5)$ ; 位置ベクトルを $\mathbf{p}, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_5$ と記すと、 $\mathbf{p}_6=\mathbf{p}-l_6\mathbf{a}, \mathbf{p}_5=\mathbf{p}_6-l_5\mathbf{a}_6$ から、第5関節 D の3次元的位置 $(x_5, y_5, z_5)$ は、

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} - l_5 \begin{pmatrix} a_x c_6 - n_x s_6 \\ a_y c_6 - n_y s_6 \\ a_z c_6 - n_z s_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x - l_6 a_x - l_5 (a_x c_6 - n_x s_6) \\ P_y - l_6 a_y - l_5 (a_y c_6 - n_y s_6) \\ P_z - l_6 a_z - l_5 (a_z c_6 - n_z s_6) \end{pmatrix} \quad (2.5.2.2)$$

と表せる。

さて、Fig. 10 に示すように、根元 0 から第5関節 D までの機構は $\theta_1$ のみで決定される同一平

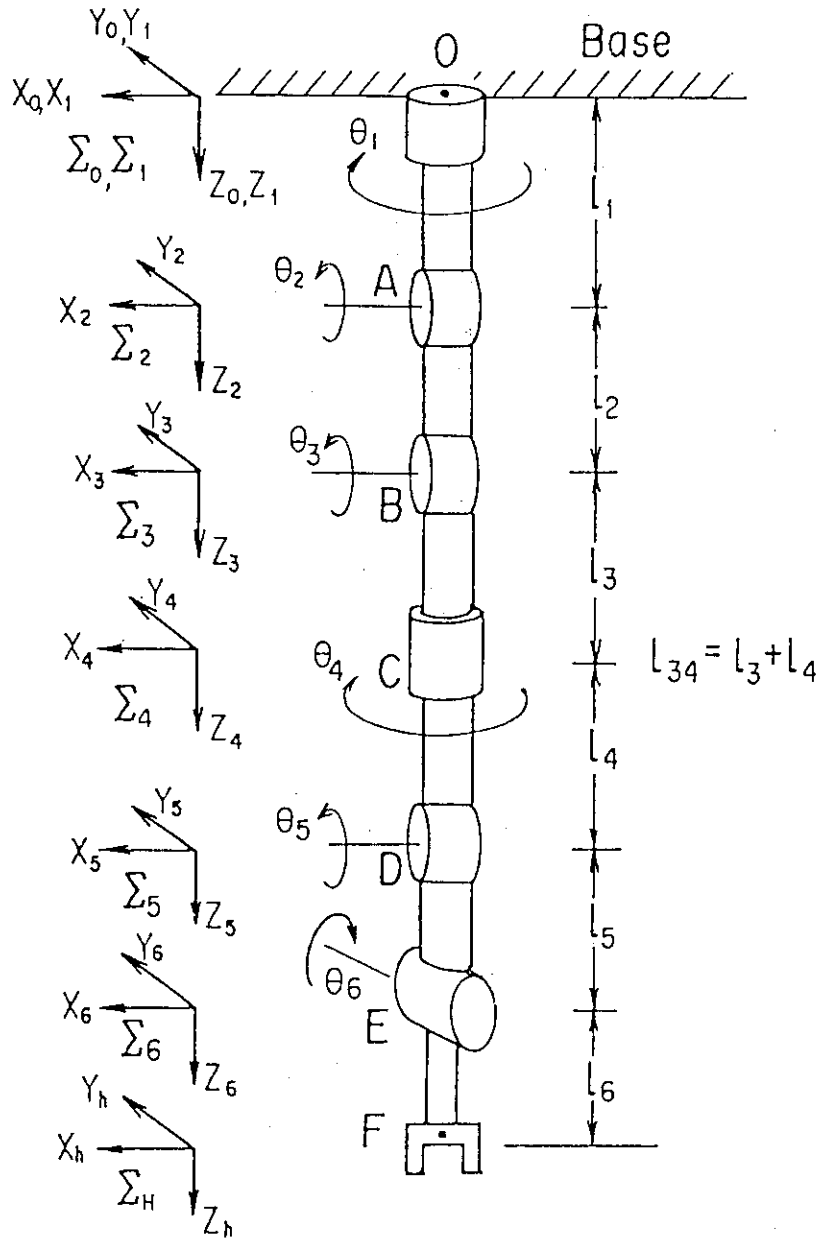


Fig. 10 Six-link Manipulator and Link Co-ordinates Systems



面を形成する。つまり、軸 OA を中心とする回転と 2 つの旋回 A, B とでつくられた回転体と D を中心、半径  $l_{34}$  の球面が交叉した状況に対して、同一平面上にある A, D の位置を固定しても関節 B が直線 AD に関して 2 つの異なった姿勢 - 2 通りの  $\theta_2$  (または  $\theta_3$ ) の解 - の存在を示している。解析の便宜上、上記平面の内 Fig. 11 に示すような A を原点とする  $\triangle ABD$  について考える。

反時計方向を正と定めた角度に対して、同図に示す  $\theta_2, \theta_3$  が同一方向の場合

$$\theta_2 + \alpha_1 = \omega_1, \quad \theta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (2.5.2.3)$$

となり、B が AD に対して反対側すなわち、 $\theta_2, \theta_3$  の符号が逆の場合、

$$\theta_2 = \omega_1 + \alpha_1, \quad -\theta_3 = \alpha_1 + \alpha_2$$

となる。これより、 $\theta_2, \theta_3$  の和を  $\theta_{23}$  とすると

$$\theta_{23} = \omega_1 \pm \alpha_2 \quad (2.5.2.4)$$

が定まる。但し、 $\omega_1$  は  $Z_2$  軸と辺 AD との交角とする。

ところで、Fig. 11 に記した説明から、式(2.5.2.2)で求めた点 D の座標は、

$$\begin{aligned} x_5 &= (l_2 s_2 + l_{34} s_{23}) s_1, \\ y_5 &= -(l_2 s_2 - l_{34} s_{23}) c_1, \\ z_5 - l_1 &= l_2 c_2 + l_{34} c_{23} \end{aligned} \quad (2.5.2.5)$$

とも書けることがわかり、 $\tan \omega_1, \tan \theta_1$  などがこの図から容易に求まる。すなわち、

$$\tan \omega_1 = \frac{\sqrt{x_5^2 + y_5^2}}{(z_5 - l_1)} = \frac{(-y_5/c_1)}{(z_5 - l_1)} \quad (2.5.2.6)$$

$$\tan \theta_1 = -\frac{x_5}{y_5} \quad (2.5.2.7)$$

また、式(2.5.2.3)の  $\theta_2, \theta_3$  に含まれた  $\alpha_1, \alpha_2$  は、簡単な計算の結果、つぎの式から求まる。

$$\tan \alpha_1 = \frac{h}{t_1} = \frac{4H}{(L^2 + b)}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{h}{t_2} = \frac{4H}{(L^2 - b)} \quad (2.5.2.8)$$

但し、 $4H = \sqrt{4L^2 l_2^2 - (L^2 + l_2^2 - l_{34}^2)^2} = \sqrt{4L^2 l_2^2 - (L^2 + b)^2}$ ,

$$b = l_2^2 - l_{34}^2, \quad L^2 = x_5^2 + y_5^2 + (z_5 - l_1)^2, \quad l_{34} = l_3 + l_4 \quad (2.5.2.9)$$

$\theta_1 \sim \theta_3$  の決定後、こんどは 4 軸 ~ 6 軸間の基ベクトルの性質を調べると  $\mathbf{n}_5 \perp \mathbf{a}_4, \mathbf{n}_5 \perp \mathbf{o}$  となることがわかる。

従って、 $\mathbf{n}_5$  を  $\mathbf{o}$  と  $\mathbf{a}_4$  の外積に平行な単位ベクトルとして、 $\mathbf{o} \times \mathbf{a}_4 / |\mathbf{o} \times \mathbf{a}_4|$  を計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_5 &= \mathbf{o} \times \mathbf{a}_4 / |\mathbf{o} \times \mathbf{a}_4| \\ &= [(c_{23} \mathbf{o}_y + s_{23} c_1 \mathbf{o}_z) \mathbf{n}_o + (s_1 s_{23} \mathbf{o}_z - c_{23} \mathbf{o}_x) \mathbf{o}_o \\ &\quad + (-s_1 s_{23} \mathbf{o}_y - s_{23} c_1 \mathbf{o}_x) \mathbf{a}_o] / P_a \end{aligned} \quad (2.5.2.10)$$

$$P_a = |\mathbf{o} \times \mathbf{a}_4| = \sqrt{1 - \{s_{23}(s_1 \mathbf{o}_x - c_1 \mathbf{o}_y) + c_{23} \mathbf{o}_z\}^2} \quad (2.5.2.11)$$

と記述できる。ここで、 $\mathbf{a}_4$  は Fig. 11 に描いた CD 方向の単位ベクトルを  $Z_1, X_1, Y_1$  軸へ射影させて求める。

$$\mathbf{a}_4 = (a_{4x}, a_{4y}, a_{4z})^T = (s_1 s_{23}, -s_{23} c_1, c_{23})^T \quad (2.5.2.12)$$

このベクトル  $\mathbf{n}_5$  が定まると第 4 関節について、

$$c_4 = \mathbf{n}_4 \cdot \mathbf{n}_5 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_5 = \{s_{23} \mathbf{o}_z + c_{23}(c_1 \mathbf{o}_y - s_1 \mathbf{o}_x)\} / P_a \quad (2.5.2.13)$$

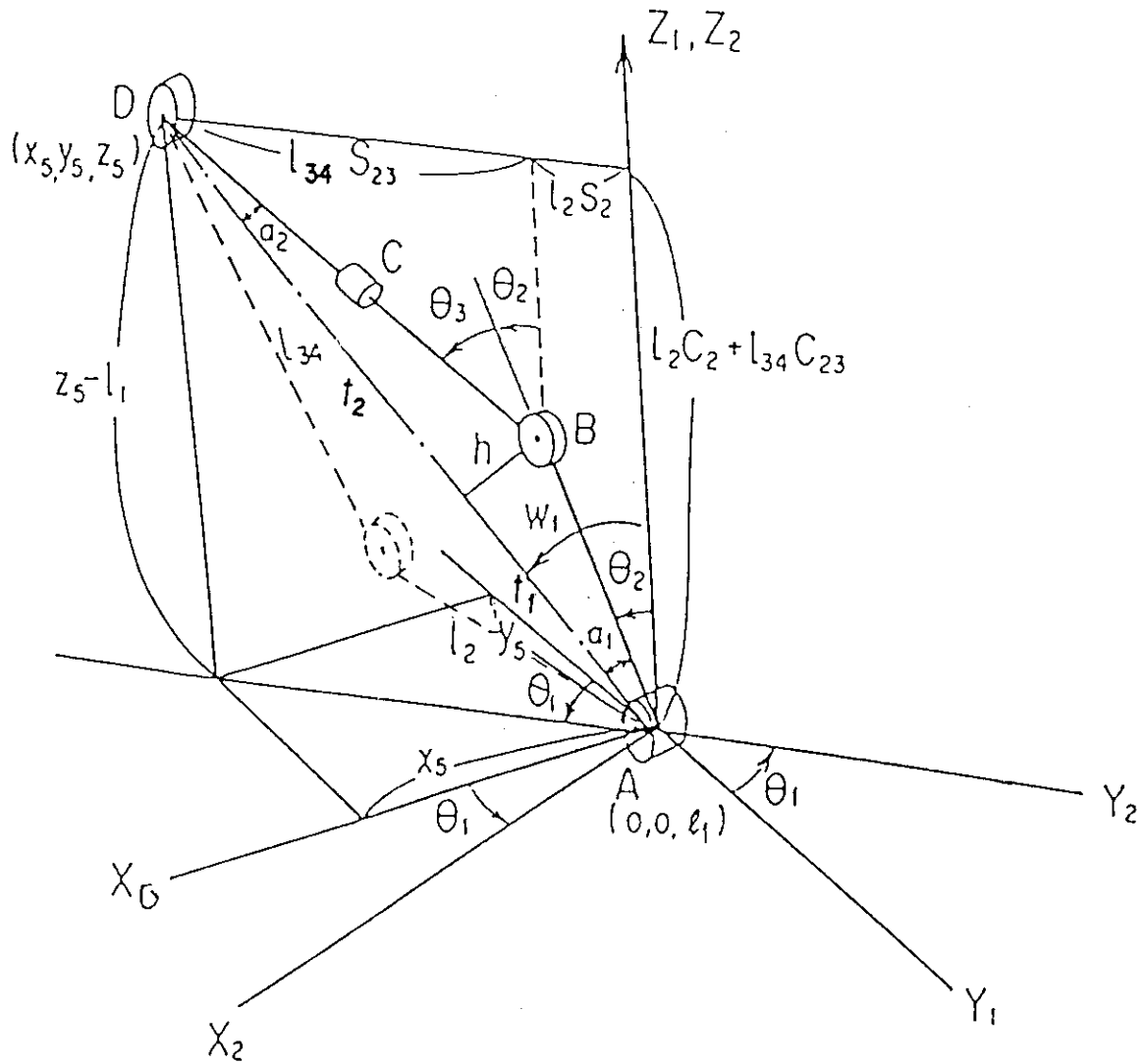


Fig. 11 Geometrical Illustration of Links Between Joints 2 and 5

が引出せる。(但し,  $\mathbf{n}_2 = (c_1, s_1, 0)^T$ )

さらに,  $(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_5, \mathbf{a}_4) = s_4$  であることから,

$$s_4 = -(c_1 o_x + s_1 o_y) / P_a \quad (2.5.2.14)$$

が定まる。式(2.5.2.13)とあわせて  $\theta_4$  が次式で決定する。

$$\tan \theta_4 = \frac{s_4}{c_4} = \frac{-(c_1 o_x + s_1 o_y)}{s_{23} o_z + c_{23} (c_1 o_y - s_1 o_x)} \quad (2.5.2.15)$$

続いて,  $\theta_5$  は, ベクトル  $\mathbf{a}_5 (= \mathbf{a}_4)$  と  $\mathbf{n}_5$  のベクトル外積  $\mathbf{o}_5 = \mathbf{a}_4 \times \mathbf{n}_5$  を計算し,  $\mathbf{o}$  とのスカラ積をとると,

$$c_5 = \mathbf{o}_5 \cdot \mathbf{o} = [1 - \{s_{23}(s_1 o_x - c_1 o_y) + c_{23} o_z\}^2] / P_a \quad (2.5.2.16)$$

と決る。一方,

$$s_5 = \mathbf{o} \cdot \mathbf{a}_4 = s_{23}(s_1 o_x - c_1 o_y) + c_{23} o_z (= f) \quad (2.5.2.17)$$

と合わせて,  $\theta_5$  が  $\theta_{23}$ ,  $\theta_1$  の関数として導きだせる。

$$\tan \theta_5 = \frac{s_5}{c_5} = \frac{f}{\sqrt{1-f^2}} \quad (2.5.2.18)$$

この結果, 式(2.5.2.3), (2.5.2.6)~(2.5.2.8)から  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  が, また, 式(2.5.2.15), (2.5.2.18)から  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  が  $\theta_6$  を含む形で表現できた。残る問題は指定された指先位置・姿勢とリンク機構の関係を結ぶ  $\theta_6$  の閉じた方程式を確立することである。

まず, 式(2.5.2.10)で求めたベクトル  $\mathbf{n}_5$  は  $\mathbf{a}_6$  に垂直なので, すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_5 \cdot \mathbf{a}_6 &= n_{5x} a_{6x} + n_{5y} a_{6y} + n_{5z} a_{6z} \\ &= [(c_{23} o_y + s_{23} c_1 o_z)(a_x c_6 - n_x s_6) + (s_1 s_{23} o_z - c_{23} o_x)(a_y c_6 - n_y s_6) \\ &\quad - (s_1 s_{23} o_y + s_{23} c_1 o_x)(a_z c_6 - n_z s_6)] / P_a = 0 \end{aligned}$$

に対して,  $c_6 = (1-t^2)/(1+t^2)$ ,  $s_6 = 2t/(1+t^2)$  と置き換え, つぎに導入する便宜的なパラメータ

$$\begin{aligned} N_x &= n_x + 2a_x t - a_x t^2 \\ N_y &= n_y + 2a_y t - a_y t^2 \\ N_z &= n_z + 2a_z t - a_z t^2 \end{aligned} \quad (2.5.2.19)$$

と付録 A.8, A.9から  $T_{23} (= \tan \theta_{23})$  を求める。すなわち,

$$T_{23} = \frac{N_z}{(N_y - N_x \tan \theta_1) c_1} \quad (2.5.2.20)$$

これが  $T_{23}$  を 2 変数  $t$  と  $\theta_1$  で表現したものである。

$T_{23}$  を結びつける他の関係式は,  $\theta_2$  と  $\theta_3$  の和を記述した式(2.5.2.4)から計算できる。すなわち,

$$\pm \tan \alpha_2 = \tan(\theta_{23} - \omega_1) \quad (2.5.2.21)$$

右辺を展開して式(2.5.2.20)と付録の A.9 を代入すると

$$\pm \tan \alpha_2 = - \frac{(X N_x + Y N_y + Z N_z)(X^2 + Y^2) c_1}{Y \{Z(X N_x + Y N_y) - (X^2 + Y^2) N_z\}} \quad (2.5.2.22)$$

となり, さらに両辺を 2 乗する。

$$\tan^2 \alpha_2 = \frac{(X N_x + Y N_y + Z N_z)^2 (X^2 + Y^2)}{\{Z(X N_x + Y N_y) - (X^2 + Y^2) N_z\}^2} \quad (2.5.2.23)$$

式(2.5.2.23)の右辺を簡略化し, 左辺に式(2.5.2.8)を適用して 8 次の  $t$  に関する代数方程式  $H(t) =$

0を得る。詳細は付録 A. 9に記載する。この方程式の実根を各関節角表示式に代入すれば拘束条件内のすべての解が与えられる。

## 2.6 変数分解による手法<sup>(13, 20)</sup>

### 2.6.1 序 論

これまでにマニピュレータ逆問題に対する2,3の有力な解法を提案してきたが、そこに含まれた独立変数の個数は、一括して取扱えば概して式の煩雑さや計算負担を伴うことから、つねに工夫を要する課題である。本節では2.4節で扱ったように、実際の関節構造とその役割分担を調べた結果、この問題への1つの新しい解答を発見した。マニピュレータの構造は、位置決め3自由度と姿勢3自由度が独立していることが望ましいが、一般には、位置を変えようとするれば姿勢も代り、姿勢を変えようとするれば位置も追隨して変る場合が多い。このことが上で述べた解析面での問題提起となったわけである。そこで、位置決めと姿勢決定機構が独立したマニピュレータにヒントを得て、取扱う方程式系に含まれた関節変数を2つのグループに分け、一方を他方の変数で表現したのち、最小化探索問題に帰着させて解を誘導する。取扱う変数の誤差2乗ノルムとその極値計算がアルゴリズムの基本である。さらに、導出過程における解の大きさの補正・改善により、本来適用外とされたモデルの枠を具体的な数値結果を通して拡大させたことは、安定な解を得る上で有用である。2.4節で報告した最小化手法は根元の構造に着目して定式化を行ったが、本手法はより少ない変数系で処理できるモデルとして一般的な多関節形6リンク・マニピュレータに適用可能な特徴を備えている。解の精度も実用上十分である。次節でその内容を説明する。

### 2.6.2 解析モデルの記述

6自由度を前提とする一般的なマニピュレータの運動学はつぎの方程式系で表される。

$$F_i = F_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (i=1, \dots, 6) \quad (2.6.2.1)$$

この内、6個の独立変数 $\theta_1 \sim \theta_6$ に対して3つの方程式 $F_1, F_2, F_3$ が指先の姿勢を、また残り3つが指先の位置を定める。指先の姿勢決定に対して例えば球関節は3つの軸の回転を表すための都合よい対偶であるが、単軸回転の駆動ができないために、実際は3つの回転関節を組合せて使用している。このような球関節を用いた場合の6リンク・マニピュレータでは、アームによる位置決め機構と手首から先の姿勢決定機構が分離できることから関節解の導出が容易になる。しかしながら、設計上の理由により通常は3つの関節が位置を決定し、残り3関節が独立に姿勢を決定するようなリンク機構は少なく、このことが逆問題の解法を困難にしている。3つの回転関節を組合せた構造については、関節軸が1点で交わるか、平行かなどの幾何学的要件が解を発見する鍵になる<sup>(21)</sup>。

本研究ではこうした6つの関節を単純に位置決定機構と姿勢決定機構とに分離できない一般的な構造((2.6.2.1)式)に対して、数値解法上便宜的に6つの関節変数を3つずつに分け、つまり、式(2.6.2.1)の3式に含まれた独立変数のなかから、3つの変数を取りだし残りを従属関係とみなしたうえで、これを式(2.6.2.1)の残り3式と関連づけて評価関数の最小値から関節解を決定する。

計算過程では、第1, 第2, 第3 関節変数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  (以下これを基準変数と呼ぶ。)を固定して残りの関節変数をこの3つで表現する。

さて、式(2.6.2.1)の左辺を既知として姿勢についての3式  $F_1, F_2, F_3$ を整理すると

$$\begin{aligned} \theta_4 &= H_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ \theta_5 &= H_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ \theta_6 &= H_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{aligned} \quad (2.6.2.2)$$

なる陰関数表示に到達する。(陰関数の存在定理を仮定する。)これを式(2.6.2.1)の  $F_4, F_5, F_6$ と関係づけると、指先位置が基準変数のみで表せる。この変数から構成される位置方程式に対して、解を決定するアプローチはいくつか考えられるが、ここでは現在位置と目標値との偏差に着目した下記の評価関数の極値探索から解を誘導する。

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=4}^6 \{F_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) - \underline{F}_j\}^2 \\ &= \sum_{j=4}^6 \{\Phi_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3) - \underline{F}_j\}^2 \end{aligned} \quad (2.6.2.3)$$

( $\underline{F}_j$ は指先目標値を示し、式(2.6.2.1)の左辺に等価である。)これにより原問題が3変数の最適化問題として置き換えられたので、つぎにその効率的な解法に進む。以下、二重添字で表記した記号の内、偏導関数は  $(\partial F_j / \partial \theta_k) = F_{jk}$ ,  $(\partial \theta_j / \partial \theta_k) = \theta_{jk}$ ,  $(\partial P_x / \partial \theta_i) = P_{xi}$  などと略記する。

さて、式(2.6.2.3)の誤差2乗和を最小、すなわち零にする関節解は、各因子  $\Phi_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を与えられた指先位置に十分近いと推定される関節変数の初期値  $\theta_1^\circ, \theta_2^\circ, \theta_3^\circ$ のまわりで線形近似して引出すのがもっとも簡単で実用的である。計算では、式(2.6.2.2)で求めた陰関数を直接代入せずに偏微分演算のみを行う。

$$\begin{aligned} &F_j(\theta_1^\circ + \Delta\theta_1, \dots, \theta_6^\circ + \Delta\theta_6) - F_j^\circ \\ &= F_{j1}\Delta\theta_1 + F_{j2}\Delta\theta_2 + F_{j3}\Delta\theta_3 + F_{j4}\{\theta_{41}\Delta\theta_1 + \theta_{42}\Delta\theta_2 + \theta_{43}\Delta\theta_3\} \\ &\quad + F_{j5}\{\theta_{51}\Delta\theta_1 + \theta_{52}\Delta\theta_2 + \theta_{53}\Delta\theta_3\} + F_{j6}\{\theta_{61}\Delta\theta_1 + \theta_{62}\Delta\theta_2 + \theta_{63}\Delta\theta_3\} \\ &= \{F_{j1} + F_{j4}\theta_{41} + F_{j5}\theta_{51} + F_{j6}\theta_{61}\}\Delta\theta_1 + \{F_{j2} + F_{j4}\theta_{42} + F_{j5}\theta_{52} + F_{j6}\theta_{62}\}\Delta\theta_2 \\ &\quad + \{F_{j3} + F_{j4}\theta_{43} + F_{j5}\theta_{53} + F_{j6}\theta_{63}\}\Delta\theta_3 \\ &= \Phi_j(\theta_1^\circ + \Delta\theta_1, \theta_2^\circ + \Delta\theta_2, \theta_3^\circ + \Delta\theta_3) - \Phi_j^\circ \\ &= \Phi_{j1}\Delta\theta_1 + \Phi_{j2}\Delta\theta_2 + \Phi_{j3}\Delta\theta_3 \quad (j=4, 5, 6) \end{aligned} \quad (2.6.2.4)$$

但し、 $F_j^\circ = F_j(\theta_1^\circ, \dots, \theta_6^\circ) = \Phi_j(\theta_1^\circ, \theta_2^\circ, \theta_3^\circ) = \Phi_j(\theta_0) = \Phi_j^\circ$  ( $j=4, 5, 6$ )

すなわち、式(2.6.2.4)の誤差2乗を最小にする  $\Delta\theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ )が連立方程式の解として反復操作により精度よく決定できる。それでは、こうした考えに基づいて実際の体系に適用を行ってみよう。

Fig. 1 に示した解析の対象とその運動学方程式(2.1.1)~(2.1.12)を参照しながら議論を進める。

まず、式(2.1.7), (2.1.8)から  $s_1, c_1$  について整理した共通項を基準変数でつぎのように記述する。

$$c_{23}c_4c_5 - s_{23}s_5 = a_y c_1 - a_x s_1 = w_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (2.6.2.5)$$

$$s_4c_5 = -(a_y s_1 + a_x c_1) = w_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) (= X_1) \quad (2.6.2.6)$$

この結果, 式(2.1.9), (2.6.2.5)から

$$c_4c_5 = w_1c_{23} - a_zs_{23} \quad (=X_2) \quad (2.6.2.7)$$

$$s_5 = -(a_zc_{23} + w_1s_{23}) \quad (=X_3) \quad (2.6.2.8)$$

が得られ, 関節角  $\theta_4, \theta_5$  と基準変数との関係が導き出せる。すなわち, 式(2.6.2.6) (2.6.2.7), (2.6.2.8) から

$$\tan\theta_4 = \frac{-(a_y s_1 + a_x c_1)}{w_1 c_{23} - a_z s_{23}} = \frac{X_1}{X_2} \quad (2.6.2.9)$$

$$\text{但し, } X_2 = w_1 c_{23} - a_z s_{23} \neq 0 \quad (2.6.2.10)$$

$$\begin{aligned} \tan\theta_5 &= \frac{-(a_z c_{23} + w_1 s_{23})}{(w_2/s_4)} = \frac{-s_4(a_z c_{23} + w_1 s_{23})}{w_2} \\ &= s_4 X_3 / X_1 \end{aligned} \quad (2.6.2.11)$$

$$\text{但し, } X_1 = -(a_y s_1 + a_x c_1) \neq 0 \quad (2.6.2.12)$$

が直ちに求まる。残るは  $\theta_6$  で, これを含む式として例えば式(2.1.1)の  $c_6, s_6$  の係数を選び,

$$A = s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4 \quad (2.6.2.13)$$

$$B = c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23} \quad (2.6.2.14)$$

とおく。この A, B は上で求めた関節角の値から計算できるが, また, 式(2.1.4)と関連づけると

$$A = -n_x c_6 + o_x s_6 \quad (2.6.2.15)$$

$$B = n_x s_6 + o_x c_6 \quad (2.6.2.16)$$

とも表現できることから,

$$\tan\theta_6 = \frac{Bn_x + Ao_x}{Bo_x - An_x} = \frac{X_4}{X_5} \quad (2.6.2.17)$$

$$\text{但し, } Bo_x - An_x \neq 0 \quad (2.6.2.18)$$

と表される。

このように, 姿勢の関係式から  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  が決ったので, つぎに式(2.6.2.4)に従って位置  $P_x, P_y, P_z$  を初期値  $\theta_0$  のまわりで線形近似する。すなわち,

$$\begin{aligned} P_x(\theta_0 + \Delta\theta) &= P_x(\theta_0) + L_1 \Delta\theta_1 + L_2 \Delta\theta_2 + L_3 \Delta\theta_3 \\ P_y(\theta_0 + \Delta\theta) &= P_y(\theta_0) + M_1 \Delta\theta_1 + M_2 \Delta\theta_2 + M_3 \Delta\theta_3 \\ P_z(\theta_0 + \Delta\theta) &= P_z(\theta_0) + N_1 \Delta\theta_1 + N_2 \Delta\theta_2 + N_3 \Delta\theta_3 \end{aligned} \quad (2.6.2.19)$$

但し,  $\theta_0 = (\theta_1^\circ, \theta_2^\circ, \theta_3^\circ)$  とする。

ここに, 微小変位の各係数  $L_i, M_i, N_i$  は, つぎのように定まり, また,  $(\partial P_x / \partial \theta_j)$  などは式(2.6.2.23)を用いる。 $\theta_{ki}$  ( $k=4, 5, 6; i=1, 2, 3$ ) については付録 A.10 にまわす。

$$L_i = P_{xi} + \sum_{k=4}^6 P_{xk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.6.2.20)$$

$$M_i = P_{yi} + \sum_{k=4}^6 P_{yk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.6.2.21)$$

$$N_i = P_{zi} + \sum_{k=4}^6 P_{zk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.6.2.22)$$

$$\begin{aligned}
 P_{x1} &= -P_y \\
 P_{x2} &= -G(d_3, k_2, -a_6s_6, s_{23}s_4, d_2, 1)s_1 \\
 P_{x3} &= P_{x2} + a_2s_1c_2 \\
 P_{x4} &= -G(d_3, k_5s_5, a_6s_6, k_7, 0, 0) \\
 P_{x5} &= -G(d_3, k_9, 0, 0, 0, 0) \\
 P_{x6} &= G(a_6, o_x, 0, 0, 0, 0) \\
 P_{y1} &= P_x \\
 P_{y2} &= -P_{x2}c_1/s_1 \\
 P_{y3} &= P_{y2} - a_2c_1c_2 \\
 P_{y4} &= -G(d_3, k_6s_5, a_6s_6, s_1s_4 - c_1c_{23}c_4, 0, 0) \\
 P_{y5} &= G(d_3, a_y, 0, 0, 0, 0) \\
 P_{y6} &= G(a_6, o_y, 0, 0, 0, 0) \\
 P_{z1} &= 0 \\
 P_{z2} &= -G(d_3, k_4, a_6s_6, s_4c_{23}, d_1, 1) \\
 P_{z3} &= P_{z2} + a_2s_2 \\
 P_{z4} &= G(d_3, s_4s_5, -a_6s_6, c_4, 0, 0)s_{23} \\
 P_{z5} &= -G(d_3, k_3, 0, 0, 0, 0) \\
 P_{z6} &= G(a_6, o_z, 0, 0, 0, 0)
 \end{aligned} \tag{2.6.2.23}$$

但し、関数 G はつぎのように定める。各パラメータは付録 A.10 に記載する。

$$G(a, b, c, d, e, f) = ab + cd - ef \tag{2.6.2.24}$$

以上でマニピュレータの指先位置の基準変数に関する線形化を行った。そこで、式(2.6.2.19)の各値と与えられた指先目標値との隔たりを 2 乗ノルムで表し、その値を 1 つの収束判定基準が満たされるまで更新を続け所要の関節解を導く。目的の評価関数は

$$J = \{P_x(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P}_x\}^2 + \{P_y(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P}_y\}^2 + \{P_z(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P}_z\}^2 \tag{2.6.2.25}$$

となり、これを展開してつぎのようになる。

$$J = \sum_{i,j=1}^3 R_{ij} \Delta\theta_i \Delta\theta_j - 2 \sum_{i=1}^3 b_i \Delta\theta_i + M \tag{2.6.2.26}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 m_1 &= P_x(\theta_0) - \underline{P}_x, m_2 = P_y(\theta_0) - \underline{P}_y, \\
 m_3 &= P_z(\theta_0) - \underline{P}_z, M = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2
 \end{aligned} \tag{2.6.2.27}$$

$\underline{P}_x, \underline{P}_y, \underline{P}_z$  は指先の目標位置。

したがって、関数 J を極小にする各関節変数の微小変位は、式(2.6.2.26)の導関数を零におくこと  $(\partial J / \partial \Delta\theta_i)_0 = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) でつぎの 3 元連立方程式の解として容易に求まる。

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \tag{2.6.2.28}$$

但し,

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= G(L_1, L_1, M_1, M_1, N_1, N_1) \\
 R_{12} &= G(L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2) = R_{21} \\
 R_{13} &= G(L_1, L_3, M_1, M_3, N_1, N_3) = R_{31} \\
 R_{22} &= G(L_2, L_2, M_2, M_2, N_2, N_2) \\
 R_{23} &= G(L_2, L_3, M_2, M_3, N_2, N_3) = R_{32} \\
 R_{33} &= G(L_3, L_3, M_3, M_3, N_3, N_3) \\
 b_1 &= -G(m_1, L_1, m_2, M_1, m_3, N_1) \\
 b_2 &= -G(m_1, L_2, m_2, M_2, m_3, N_2) \\
 b_3 &= -G(m_1, L_3, m_2, M_3, m_3, N_3)
 \end{aligned}
 \tag{2.6.2.29}$$

方程式の係数は対称行列を構成し、解はガウス・ザイデル法や掃きだし法<sup>23)</sup>などで簡単に求めることができる。このようにして算出された各増分値 $\Delta\theta_1$ ,  $\Delta\theta_2$ ,  $\Delta\theta_3$ により関節角の初期推定値 $\theta_i^\circ$ が

$$\theta_i = \theta_i^\circ + \Delta\theta_i \quad (i=1, 2, 3)
 \tag{2.6.2.30}$$

と更新されるとともに、式(2.6.2.9), (2.6.2.11), (2.6.2.17)から残りの関節角も決定する。この時点で、関節解を線形化しない原式(2.6.2.3)に代入してノルムの大きさを再計算する。その大きさが指定された収束半径内にあれば解として採択され、そうでない場合は、式(2.6.2.30)の $\theta_i$ を初期値として一連の操作を最初に戻って繰返す。以上が計算手順の概要である (Fig. 12 を参照)。



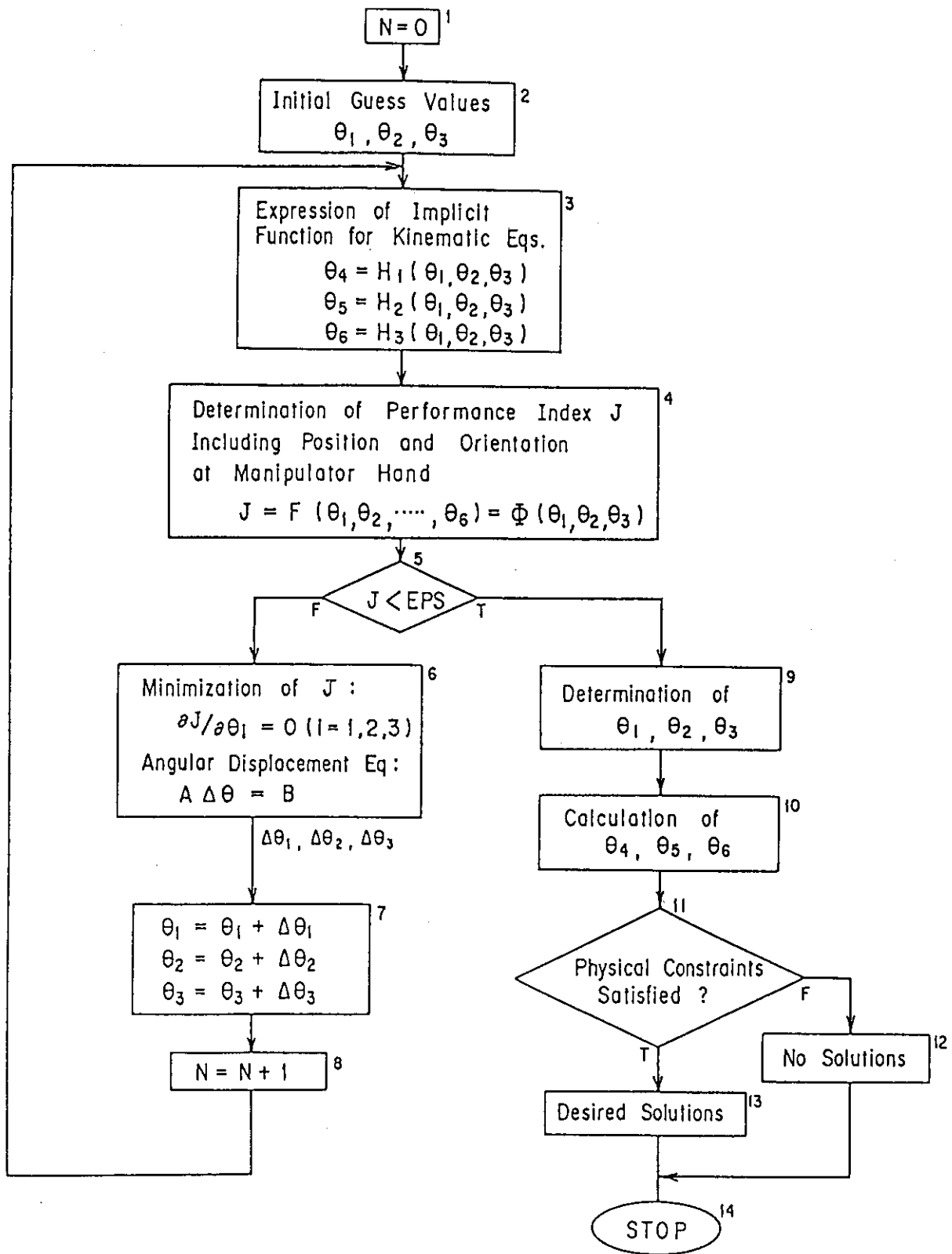


Fig. 12 Computational Algorithm

### 3. サンプル計算と結果

前章で述べた逆運動学の解法を計算機を用いて具体的に実行するために、計算コード ARM (Analysis of Robot Manipulators) をシリーズで開発してきた。Table 1 にその概要を示す。計算コードは、実現可能な厳密解をオフラインですべて引出すプログラムと、マニピュレータのサイクル時間に合わせてほぼ実時間処理が可能なプログラムに大別できる。これまで、いくつかのサンプル計算に適用したのでその一部をつぎに紹介する。

(1) 指先を下方にむけて水平方向への運動(Fig. 13 (a)参照)に対して、関節解の多値性が扱える多項式モデルを用いて計算を行った。出発点 A, 最終点 B の指先位置をそれぞれ  $(-0.10, 0.35, 1.63)$ ,  $(0.10, 0.35, 1.63)$  (単位 m), その姿勢を  $n_x=n_y=0, n_z=1, o_y=o_z=0, o_x=1$  に保持して直線軌道上を移動した場合の各関節角の挙動を求める。この計算では、2組(2ケース)の実現可能解が発見された。つまり、代数方程式が2つの異なる値を探索したことを物語っている。各関節角の挙動を Fig. 14 から Fig. 25 に示す。ケース 1 をみると、角度  $\theta_6$  の各値に対して  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  の解曲線が  $G_1$  から  $G_5$  の5種類存在した。 $G_2$  曲線を除いたすべての解曲線は、指先が目標位置に向かって移動するとき、中間区間で生じる部分的な実現可能解である。例えば、関節 1 の挙動に対して、解曲線  $G_3, G_4$  はみかけ上単一曲線かのように受取れるが、AB 間を等分割した途中の位置(ポジション番号 20, 21)で分離されたもので、それぞれこの点の前半、後半の挙動を示す部分解である。部分解が生じた理由は、第4関節角  $\theta_4$  の計算結果をみれば了解できる。すなわち、 $G_3, G_4$  が  $\theta_4$  の物理的制約の上限、下限をポジション 20, 21 で予測したためである。ポジション 20 までが解曲線  $G_3$  を生成し、その後が  $-180(\text{deg})$  を下限とする  $G_4$  である。

一方、 $\theta_6$  の別の根に対する計算は、各関節解を一意的に引出した(Fig. 20 ~ Fig. 25 参照)。本計算では、最初の 24 次モデル(ARM 1)の開発に続いて、16 次モデル(ARM 21 / 22), 8 次モデル(ARM 3)へと改良を行い、全く同じ正しい結果が確認できた。当然のことながら、次数低下に伴う誤差の伝播はより低く抑えられた。2.3 節で記述した DH 法から誘導された運動学方程式に対する多項式モデル(ARM 5, ARM 61 / 62, ARM 7)の計算結果も完全に一致していた。ただ、DH 法による計算と他の座標系で計算した結果との比較においては、座標系の設定に関して初期関節角の変更を伴うことがあるため(Fig. 3 参照)、最終結果を導くうえで補正する必要がある。例えば、Fig. 3 の座標系を採用した場合、Fig. 2 の座標系からマニピュレータのホーム・ポジションが変更したことになるため、つぎのような補正を行う。

$$\theta_2 \Rightarrow \theta_2 - 90$$

$$\theta_3 \Rightarrow \theta_3 + 90$$

$$\theta_5 \Rightarrow \theta_5 - 90$$

また、Fig. 3 に示した初期姿勢に基づき、指先が上のサンプル問題の軌道を追従するために、ある種の座標系変換を行う必要がある。Fig. 3 のベース座標系  $\Sigma_0^1$  と Fig. 2 のベース座標系  $\Sigma_0^0$  を比較してみると、 $\Sigma_0^0$  を  $z_0$  軸のまわりに  $-90(\text{deg})$  回転したものが  $\Sigma_0^1$  であることに気がつく。このことから、 $\Sigma_0^0$  の座標系でみた指先の位置・姿勢データ(例えば、 $\Sigma_0^0$  における出発点 A)は

$$\text{Rot}(z_0, -\pi/2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -0.10 \\ 0 & 0 & 1 & 0.35 \\ 1 & 0 & 0 & 1.63 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.35 \\ 0 & -1 & 0 & 0.10 \\ 1 & 0 & 0 & 1.63 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

と変換される。従って、基準座標系  $\Sigma_0$  に対して、新しく  $A(0.35, 0.10, 1.63)$ ,  $B(0.35, -0.10, 1.63)$ , (方向  $n_x=n_y=0$ ,  $n_z=1$ ;  $o_y=-1$ ,  $o_x=o_z=0$ ) が同一の軌道を実現する位置・姿勢入力データとなる。この指先位置・姿勢を満たす関節計算の結果は、Fig. 2 の座標系による多項式モデルの計算結果をと完全に一致した。

(2) 仮想的マニピュレータを用いた手法に対しても上と同じ問題を適用して解を求めた。AB 2点間を指先の方向を一定にした同一軌道に対するマニピュレータ各関節角の計算結果は Fig. 26 にまとめる。数値実験の結果は、従来よく利用されてきた線形化繰り返し法と比べて、精度、処理時間共に遙かに凌駕することが立証された。多項式モデルによる厳密解との比較から、4-桁の精度が保証された。ちなみに、実施した計算の処理時間は1繰り返し当りミニコンピュータ VAX-750 で 4.5 msec, SEL で 20 msec 以下と計測されている (通常 1~2 回で収束)。本計算に対する感度解析の結果、初期値が正解から約 14 (deg) 離れていると、つまり、仮想リンク先端  $P_6$  と M の距離が約 10 cm で 2 回以内、約 34 (deg) (約 25 cm) で 3~4 回、約 44 (deg) (35 cm) で 5 回の反復の後収束した。

(3) 垂直方向への移動 (Fig. 13 (b)参照) するサンプル問題に対して、変数分離による最小化技法を取入れたモデルで計算を実行した。問題は、2点  $A(-0.10, 0.35, 1.63)$ ,  $B(-0.10, 0.35, 1.63)$  (m) 間指先を一定姿勢 ( $n_z=o_x=a_y=1$ ) で移動した時の関節挙動を求めるものである。その結果を Fig. 27~Fig. 32 に示す。本計算では、まず、 $\theta_1=2.0$ ,  $\theta_2=1.0$ ,  $\theta_3=80.0$  (deg) を基準変数の初期値として出発点 A での関数解が反復回数 1 回で求まり、以後 1 つ前の時点における収束値を初期値として、AB 間を等分割した各点の関節解は終端 B まで繰返し 0~1 回で計算された。この場合、指先位置誤差が 0.1 (mm) 以内に到達すれば収束と判定した。本法は 3 変数の関数を線形化しているため微小変位に対する適用限界を把握しておく必要がある。そこで、点 A における厳密な関節解を基準として初期値がそこから変動する様子を検討した。すなわち、 $\theta_1=2.7533$ ,  $\theta_2=0.1502$ ,  $\theta_3=85.7259$  (deg) (以下これを基準値と呼ぶ) からのずれは最大 8 (deg) を許容範囲 (指先の位置と目標値との距離にして 10 cm 以内) に対して 4 回以内に収束した。勿論これは安定な挙動を与えた例であって指定する初期値や評価関数の非線形特性に依存して収束状況は変わり得る。線形理論をベースにした解探索法ではこのように適用範囲が規定されてしまうので、それを拡大することが実用上 1 つの関心事である。現在のアルゴリズムでも初期変位を大きくとれば当然数値的不安定性をきたし発散してしまふ。大きくずれた初期値に対して式 (2.6.2.28) の関節変位を計算すれば振動発散を促進するのみでなんの収穫もない。ただ、そうした線形領域から逸脱する値についても、いくつかのサンプル・ケースを調べた結果、最初のステップでの  $\Delta\theta$  が以後の挙動にとくに影響することは確かであるから、この段階での相対的大きさを適切に改善・補正すればそこを通過後は多小大きな  $\Delta\theta$  であっても最小化手法が有効に働いて距離が離れていることをさして障害とせず目標値へむけて急速に収束する傾向を示した。つまり、こうした補

正操作を導入することで、線形モデルが扱う領域から解の探索領域をある程度拡大させることが可能となる。具体的には、関節変位をつぎのように補正して計算を行った。

i) 初期変位が 300(mm)以内の場合 ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 1.5 \quad (|\Delta\theta_i| > 1(\text{deg}))$$

ii) それを越える場合 ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 1.5 \quad (10(\text{deg}) > |\Delta\theta_i| > 1(\text{deg}))$$

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 2.0 \quad (30(\text{deg}) > |\Delta\theta_i| > 10(\text{deg}))$$

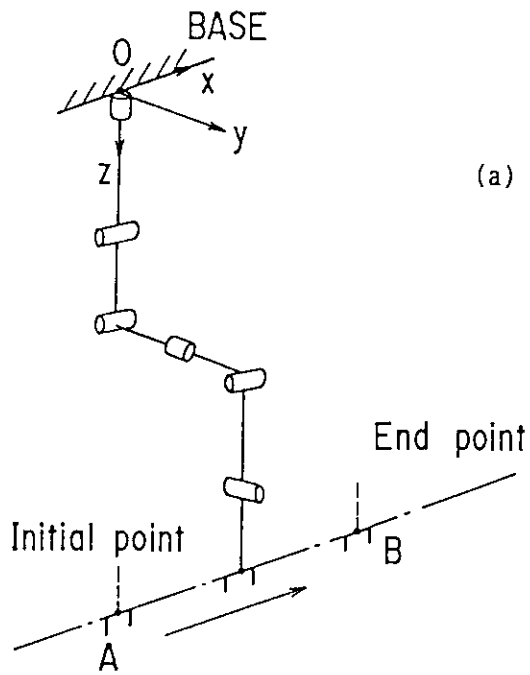
$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 3.0 \quad (|\Delta\theta_i| > 30(\text{deg}))$$

その結果を Fig. 33 にまとめる。初期推定値として図の A, B, C は、1つの関節値を変動させ他を基準値に固定した3つの計算カテゴリで、×, ●, □の印で表す。この印の上の数値は収束回数を示す。例えば、点Pは、基準値から $\theta_1$ を30(deg), 点Qは $\theta_2$ を-20(deg), 点Rは $\theta_3$ を-50(deg)変動させた時縦軸に目標値との偏差(mm)をとり、それぞれ4, 4, 6回で収束したことを示すものである。斜線は線形化が成立する領域である。□印のプラス方向への増分は90(deg)の物理的制限に近づくため描いてない。●印の-30(deg)以下も同様である。計算開始時、目標値との空間的隔たりが、約350 mmまではこの補正により単調収束、つまり評価関数の各項を構成する誤差が漸近的に零に近づくことを示した。それを越えるものとして、2軸のようにプラス方向へのわずかな変動に対しても指先位置と目標値との距離が大きき値(70 cm以上)を示し、関節解の発散はくいとどめたものの振動をしながら収束したケースは例外的である。この3点は特別としても、安定な収束を達成するには、せいぜい500 mmまでといえる。本アルゴリズムを導く過程で陰関数が求まる条件として、式(2.6.2.10), (2.6.2.12), (2.6.2.18)を与えたが、初期値設定や計算途中においてもこの条件を念頭におかないと解が得られないことになる。例えば、Fig. 2の計算に用いた姿勢に対して、 $\theta_1 = 0$ や90(deg)の近傍では特異状態となり、また、第2, 第3の関節角の和が90(deg)で陰関数が成立せず、近傍も正常解を与えない。尚、解の精度については収束したものは厳密解と対比して小数点以下3位まで一致していた。こうした個別の変動に続いて、各関節を同時に変化させた場合の様相は複雑である。これまでに述べた関節角に対する拘束条件を考慮して選定したサンプルでは、Table 2で示すように10回以内で安定な解が得られた。以上のように、線形近似を用いた最小化手法に関節角の変動巾を改善する補正操作を導入したことで適用範囲が大きく拡張できた。現在の限られたケースから全体的に傾向をくみ取るとは難しいが、線形領域を越えても適当な増分制御を与えれば正常解に到達できることが示唆された。例示したように、指先目標値と30~50 cmの隔たりに対して精度0.1 mm, 反復回数10回内で達成できれば十分実用に供すると考えられる。

この他、6リンク・マニピュレータの機構解析を基本単位ベクトルの回転と図形の性質から追跡したモデルの評価については、Fig. 1に示したマニピュレータの逆運動学が解析的に解けない構造であることから、代数方程式の根を介して間接的に関節解を誘導した。マニピュレータの空間姿勢について調べると、Fig. 11に示した関節Bの2通りの解にくわえ、 $\theta_1$ を180(deg)進め、 $\theta_2$ を $-\theta_2$ としても解の可能性となり、また、式(2.5.2.10)の $\mathbf{n}_5$ に対する逆向きなどが幾何的な考察から解の候補として引出されるが、付録A.9の式(A.9.15)で誘導した多項式はこれらすべてを組合わせた解を与える。例えば、サンプル問題1に適用した計算結果は、既に上で求めた結果と比較して、精度、多値性に関して完全に一致していることが確認できた。

Table I List of Computer Codes for Manipulator Inverse Kinematics

Code Name	Basic Features	Operation Precision	Used Language	Used Machine	Range of Application
ARM1	Manipulator joints calculation based on 24th order algebraic equation with Bairstow's solution technique Plotter routine involved	Double	Fortran 77	FACOM M780	off-line computation
ARM21/22	Manipulator joints calculation based on 16th order algebraic equation with Bairstow's solution technique Plotter routine involved	Double	Fortran 77	FACOM M780	off-line computation
ARM3	Manipulator joints calculation based on 8th order algebraic equation with Bairstow's solution technique Plotter routine involved	Double	Fortran 77	FACOM M780	off-line computation
ARM4	Manipulator joints calculation based on vector-geometrical concept, 8th order algebraic equation	Double	Fortran 77	FACOM M780	off-line computation
ARM5	Manipulator joints calculation based on 24th order algebraic equation induced by DH method Plotter routine involved	Double	Fortran 77	FACOM M780	off-line computation
ARM61/62	Manipulator joints calculation based on 16th order algebraic equation induced by DH method Plotter routine involved	Double	Fortran 77	FACOM M780	off-line computation
ARM7	Manipulator joints calculation based on 8th order algebraic equation induced by DH method Plotter routine involved	Double	Fortran 77	FACOM M780	off-line computation
ARM8	Optimal calculation of performance index prescribed between imaginary manipulator and actual one Gauss Seidel solution technique	Double (Single)	Fortran 77 (C)	Gould3297 VAX11-750 NEC-PC9801	on-line computation
ARM9	A decision problem of minimization criteria composed of three joint variables with Gauss Seidel solution technique	Double	MS-Fortran	NEC-PC9801	on-line computation



(a) Sample Problem No.1, No.2

(b) Sample Problem No.3

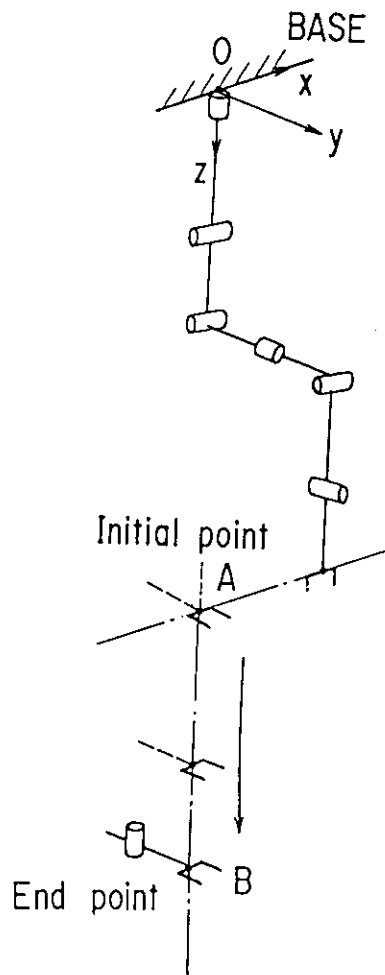


Fig. 13 Trajectories Used in the Calculations

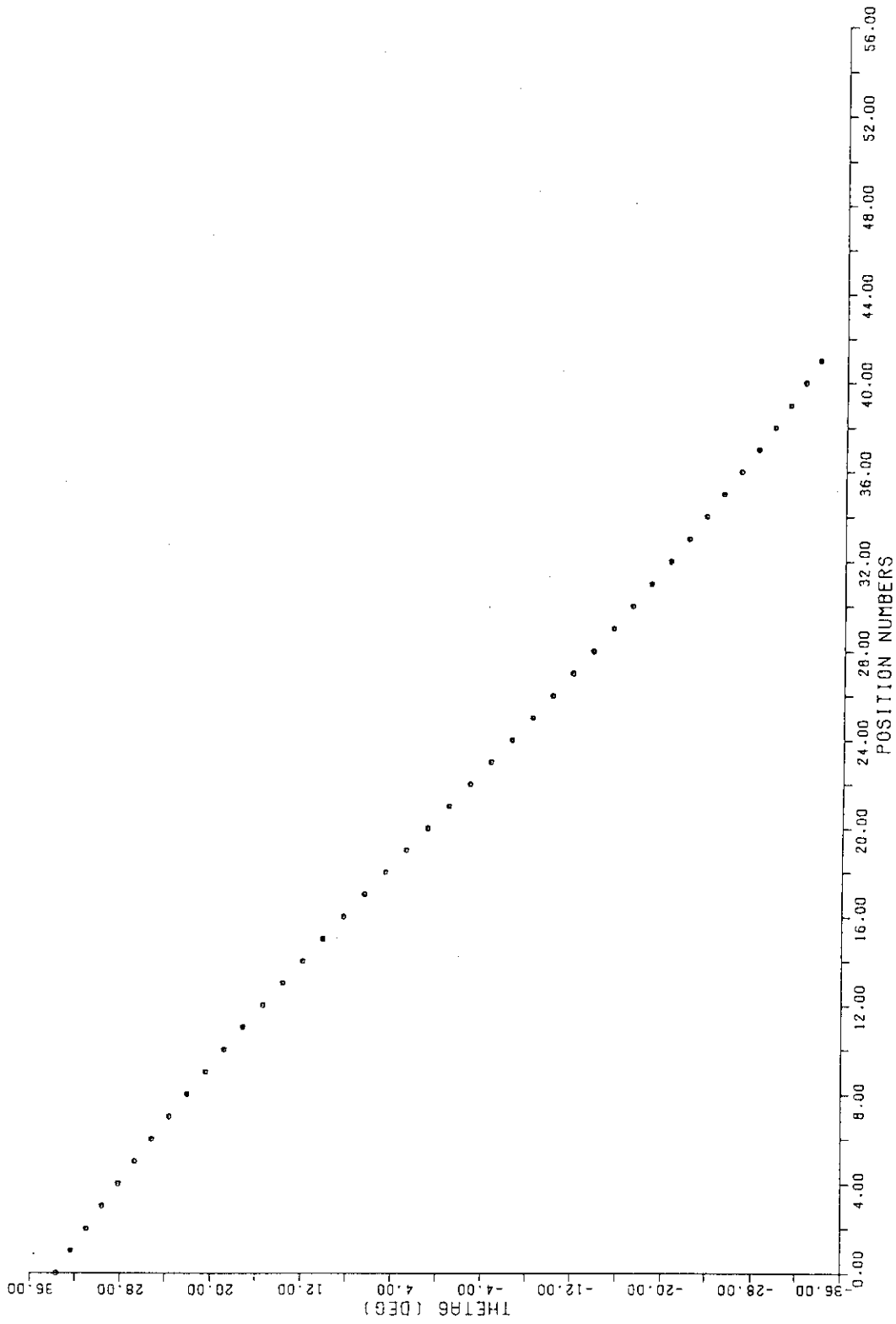


Fig. 14 Behavior of Joint Angle  $\theta_6$  (Sample Problem 1 - case 1)

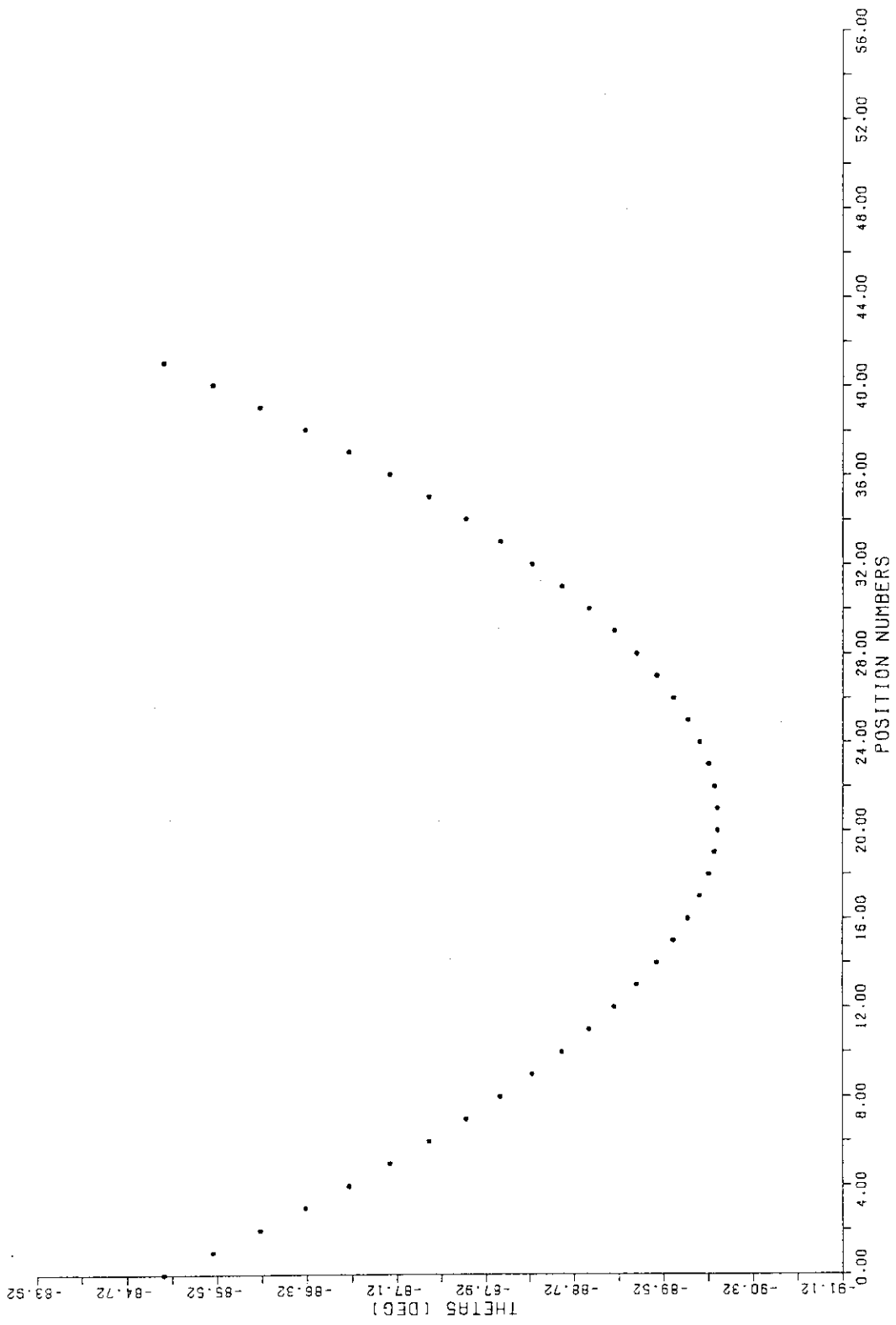


Fig. 15 Behavior of Joint Angle  $\theta_5$  (Sample Problem 1 - case 1)



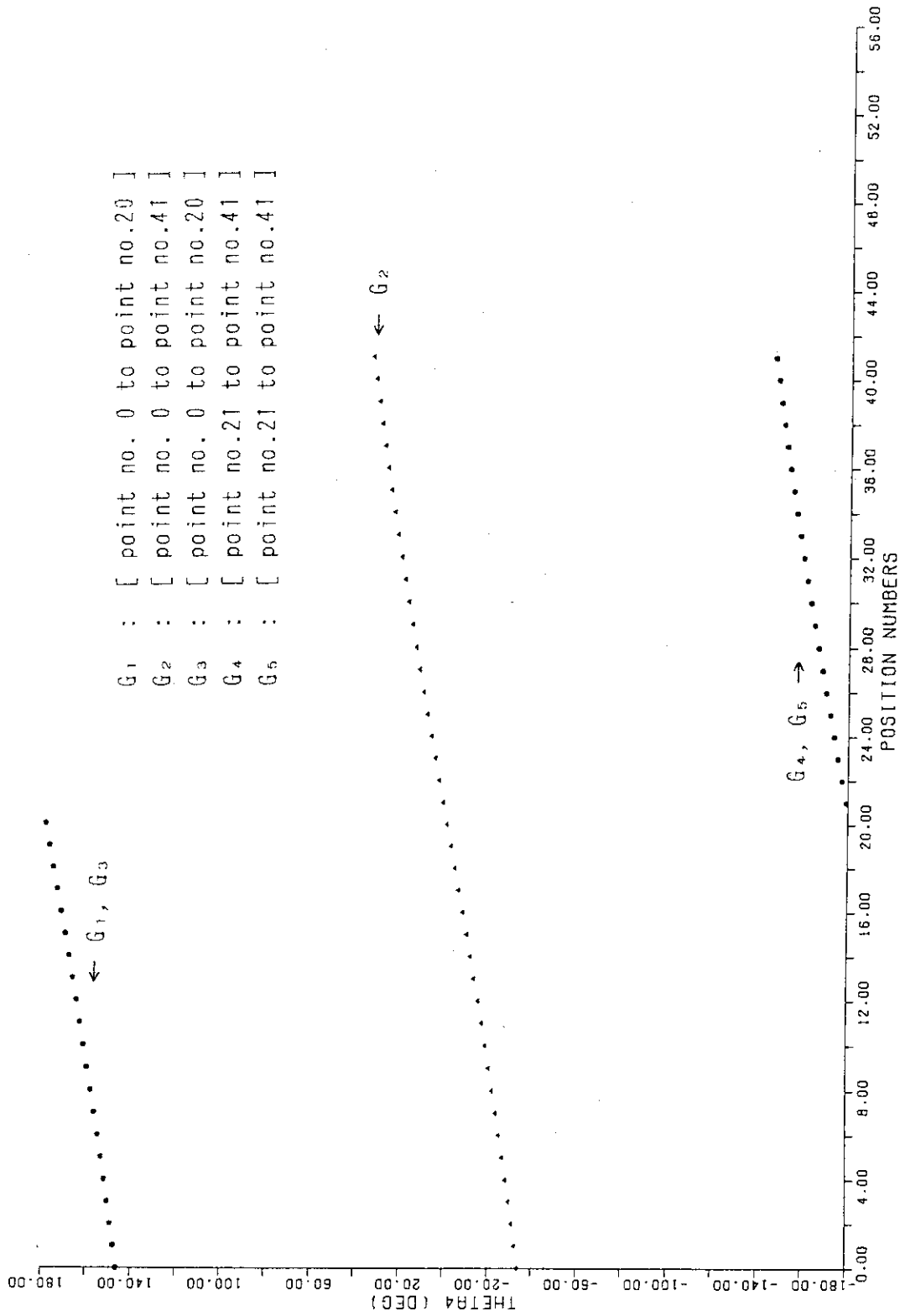


Fig. 16 Behavior of Joint Angle  $\theta_4$  (Sample Problem 1 - case I)

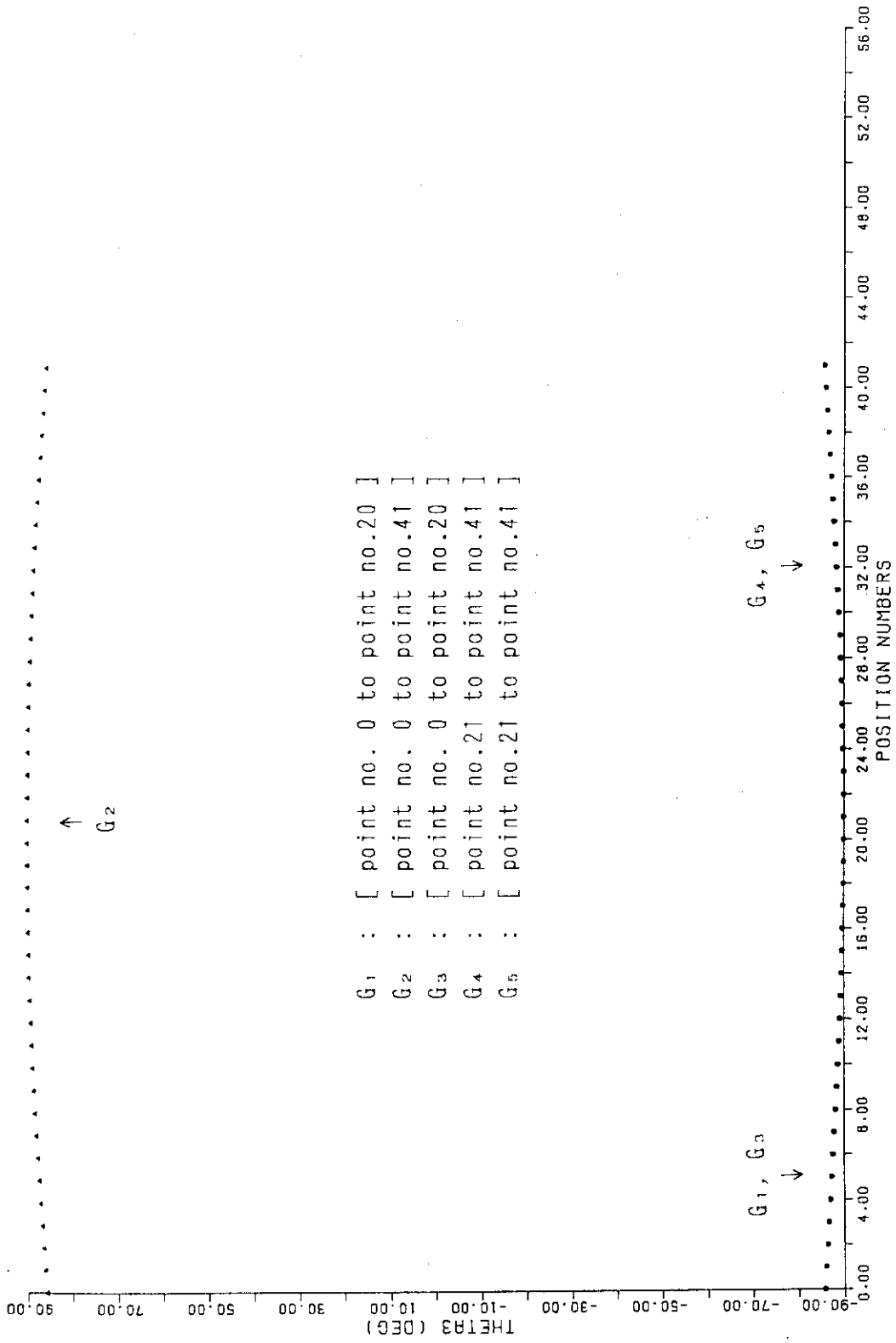


Fig. 17 Behavior of Joint Angle  $\theta_3$  (Sample Problem 1 - case 1)

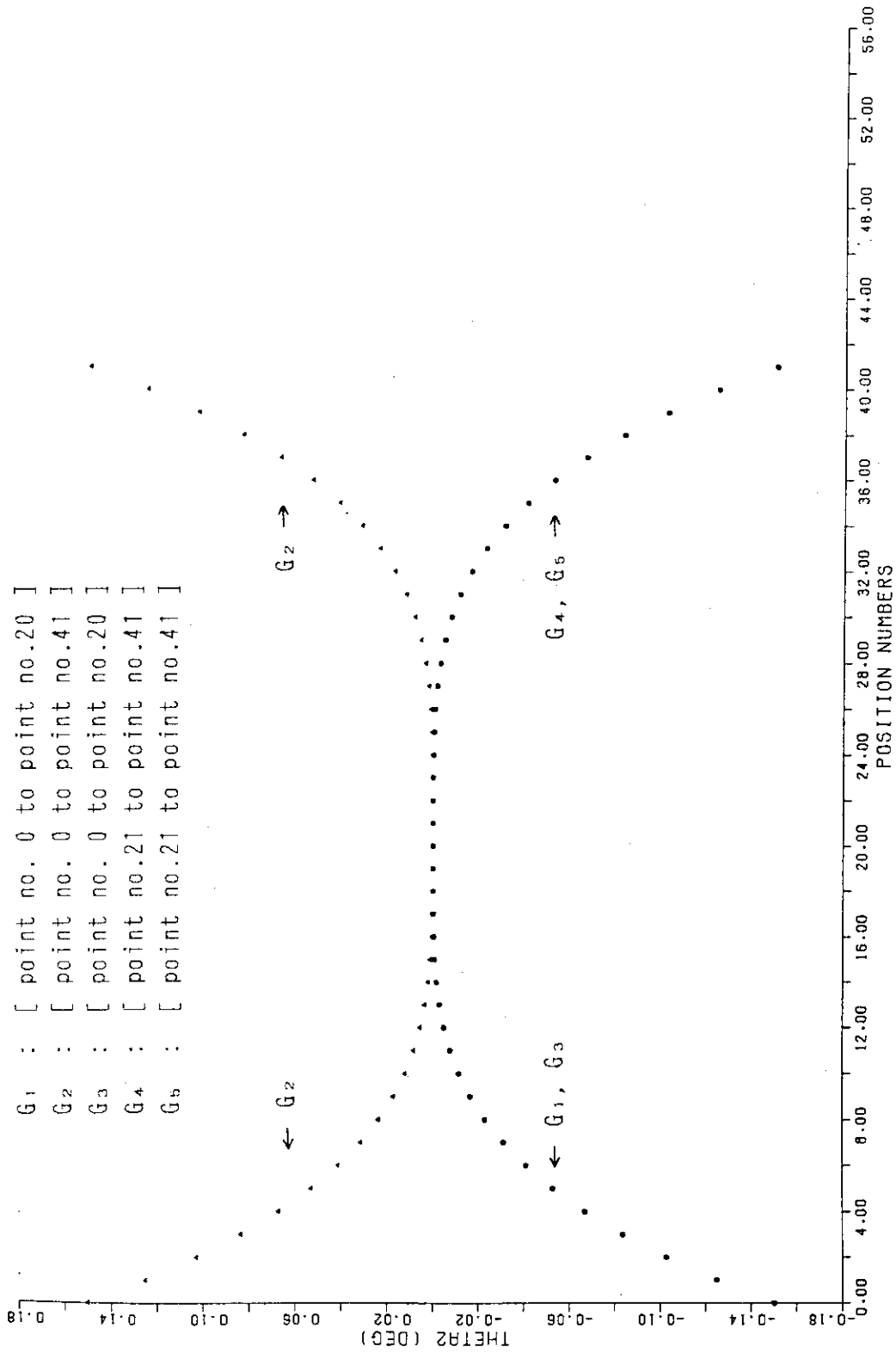


Fig. 18 Behavior of Joint Angle  $\theta_2$  (Sample Problem 1 -- case 1)

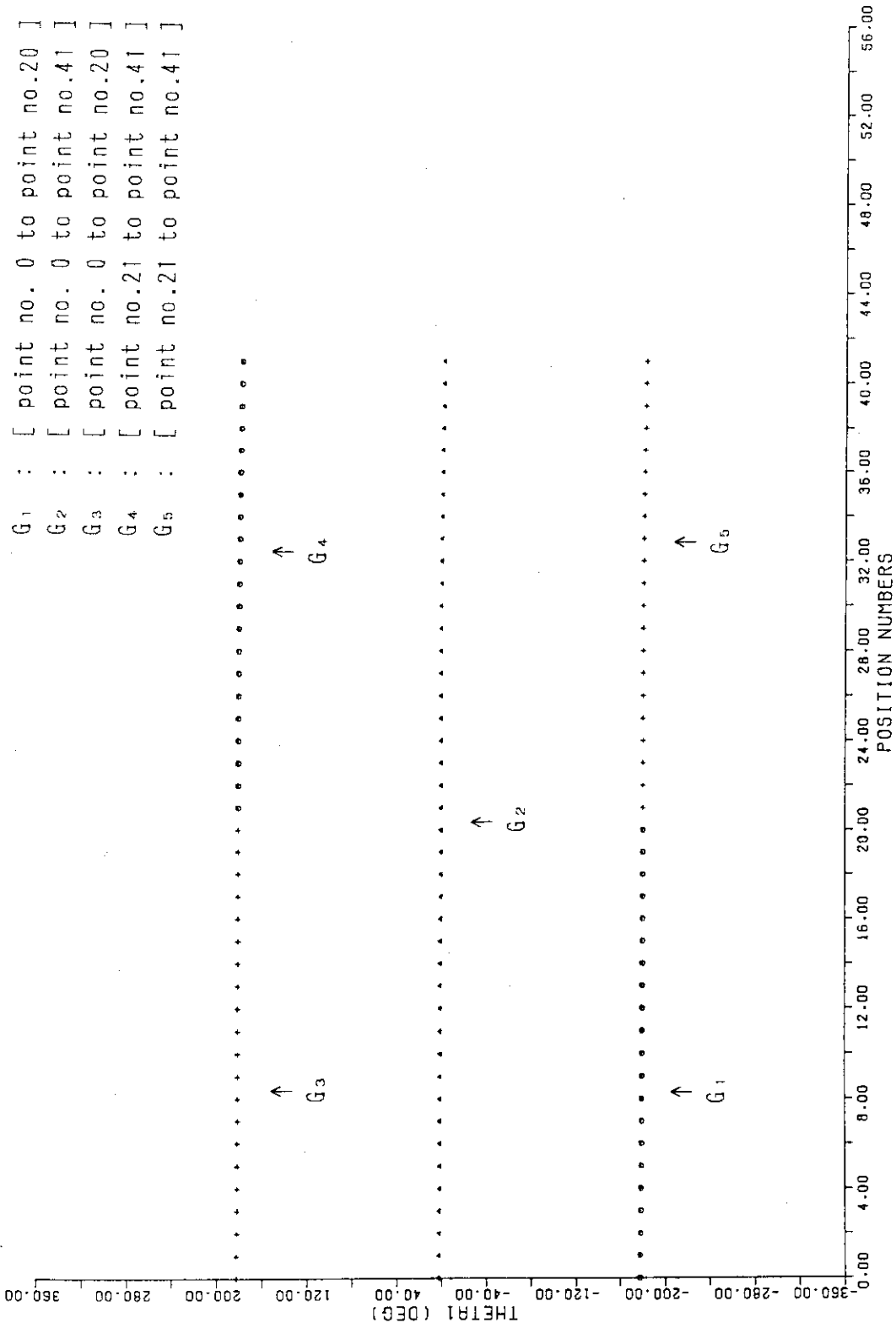


Fig. 19 Behavior of Joint Angle  $\theta_1$  (Sample Problem 1 -- case 1)

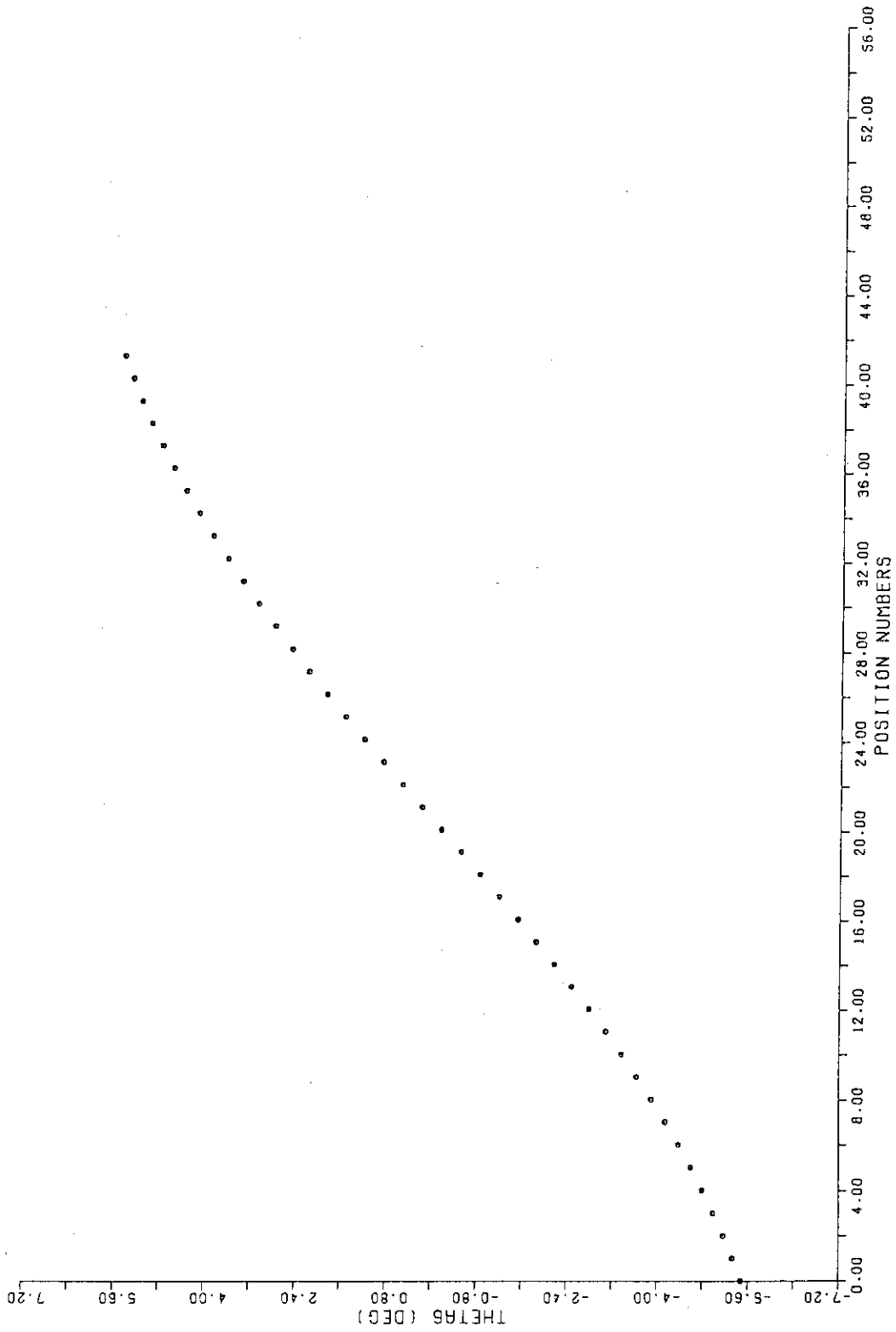


Fig. 20 Behavior of Joint Angle  $\theta_6$  (Sample Problem 1 - case 2)

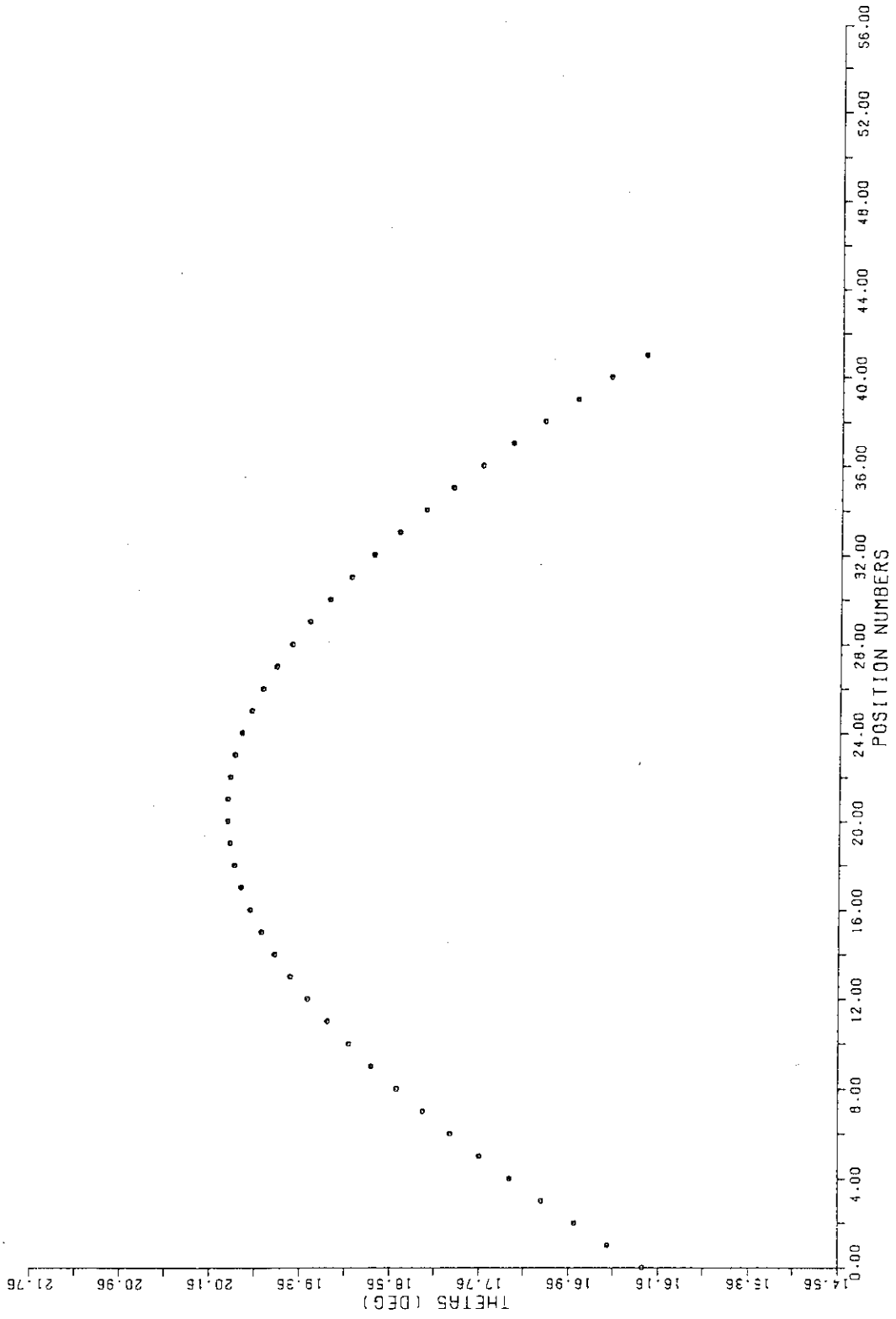


Fig. 21 Behavior of Joint Angle  $\theta_5$  (Sample Problem 1 - case 2)

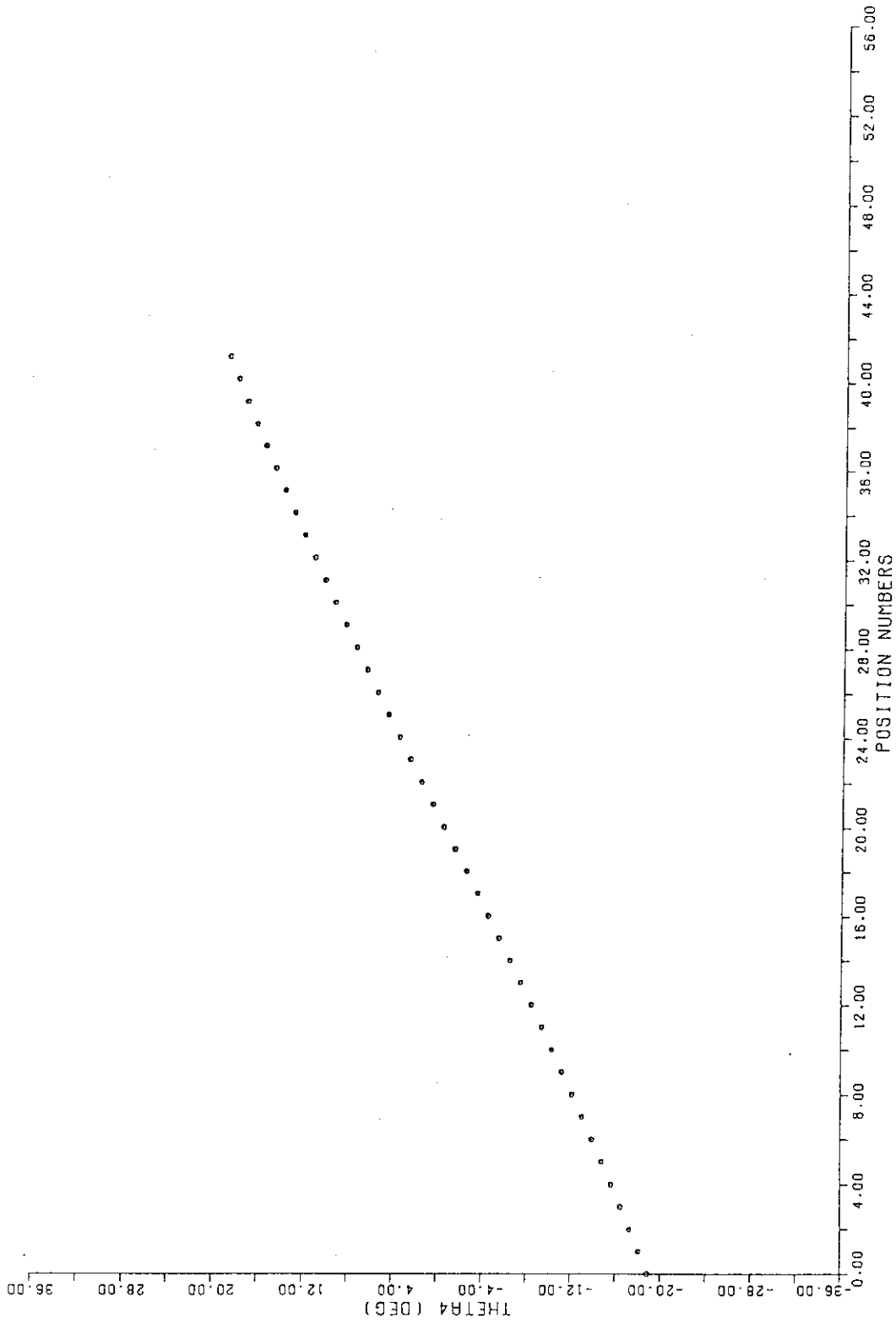


Fig. 22 Behavior of Joint Angle  $\theta_4$  (Sample Problem 1 - case 2)

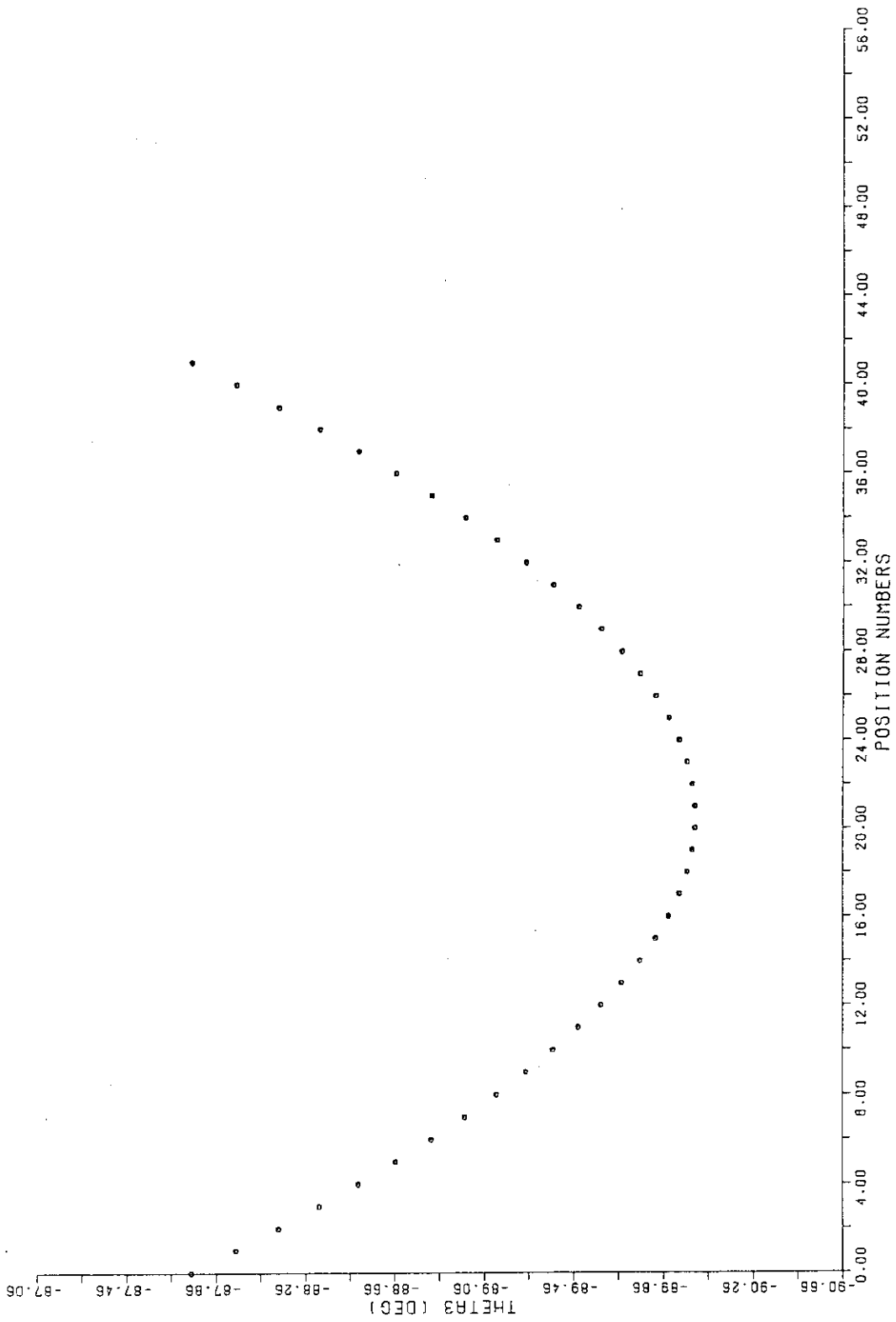


Fig. 23 Behavior of Joint Angle  $\theta_3$  (Sample Problem 1 - case 2)



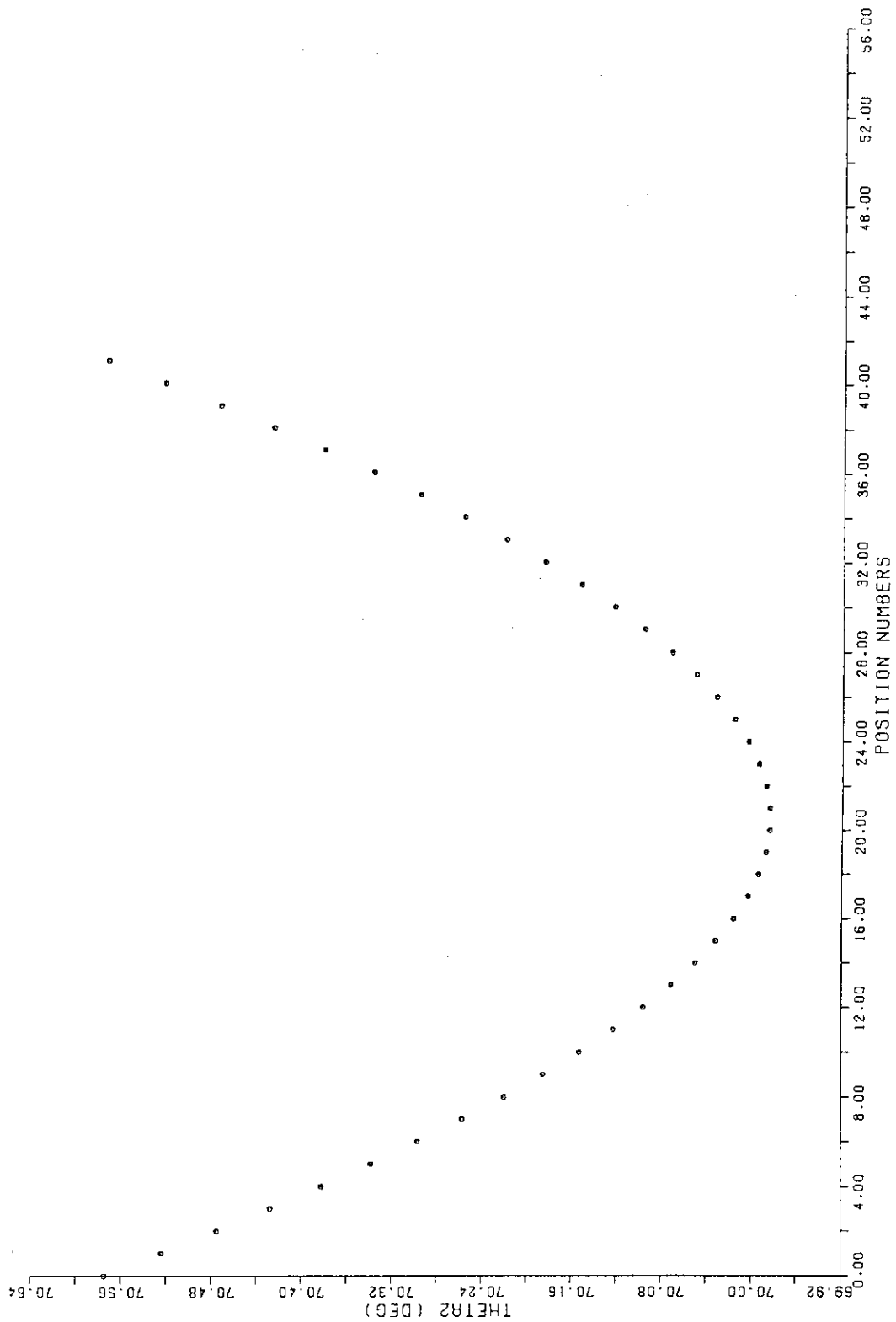


Fig. 24 Behavior of Joint Angle  $\theta_2$  (Sample Problem 1 - case 2)

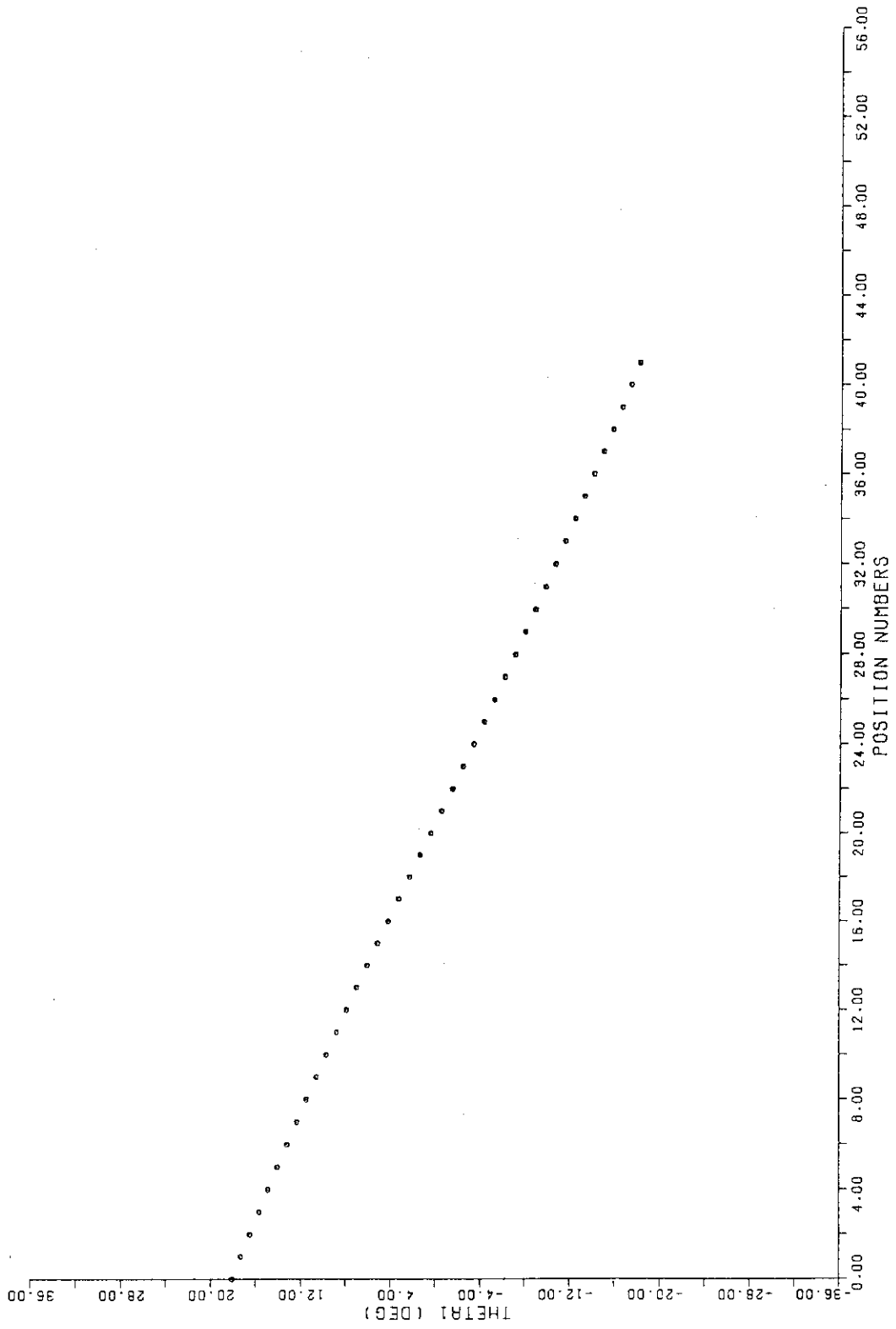


Fig. 25 Behavior of Joint Angle  $\theta_1$  (Sample Problem 1 - case 2)

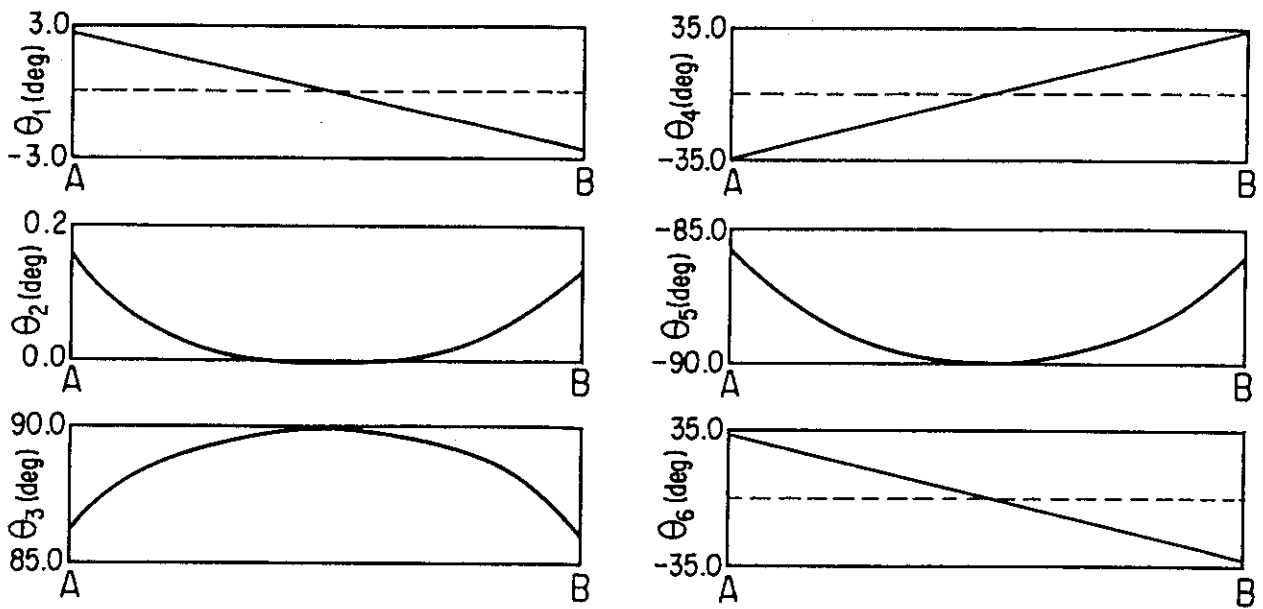


Fig. 26 Calculated Results of Joints Variables (Sample Problem 2)

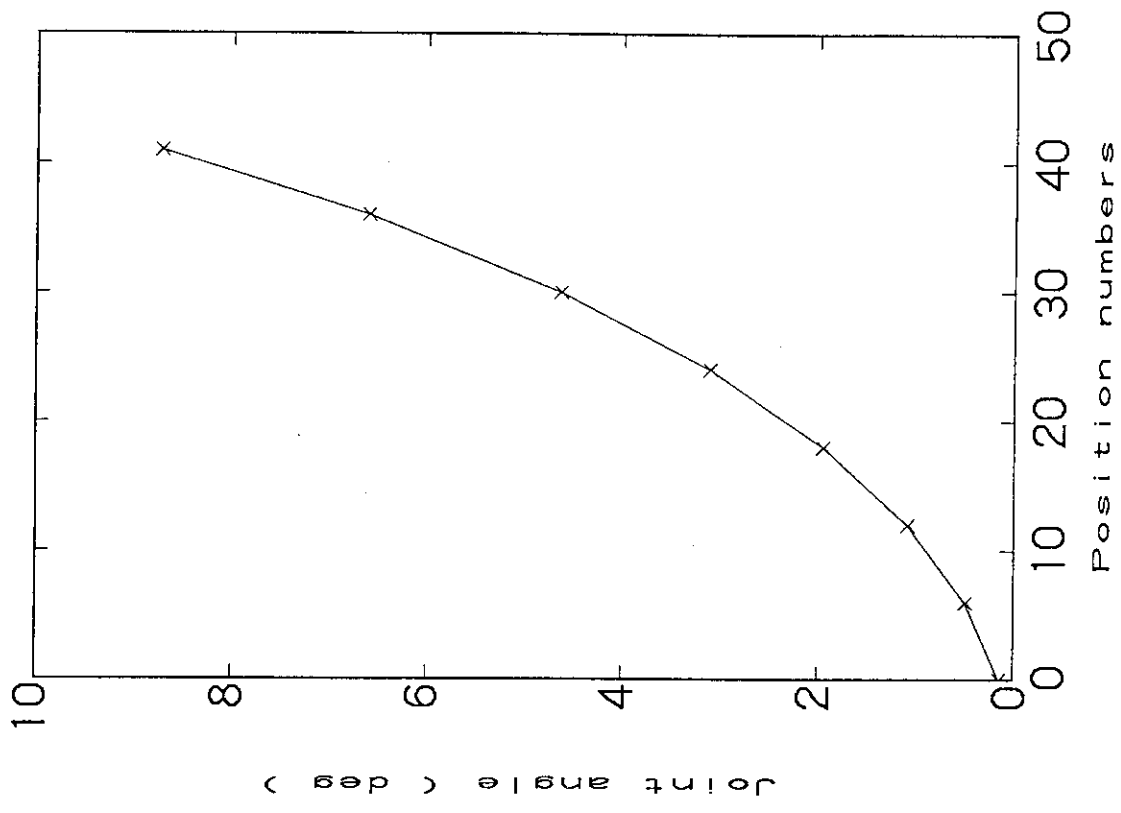


Fig. 28 Behavior of Joint Angle  $\theta_2$  (Sample Problem 3)

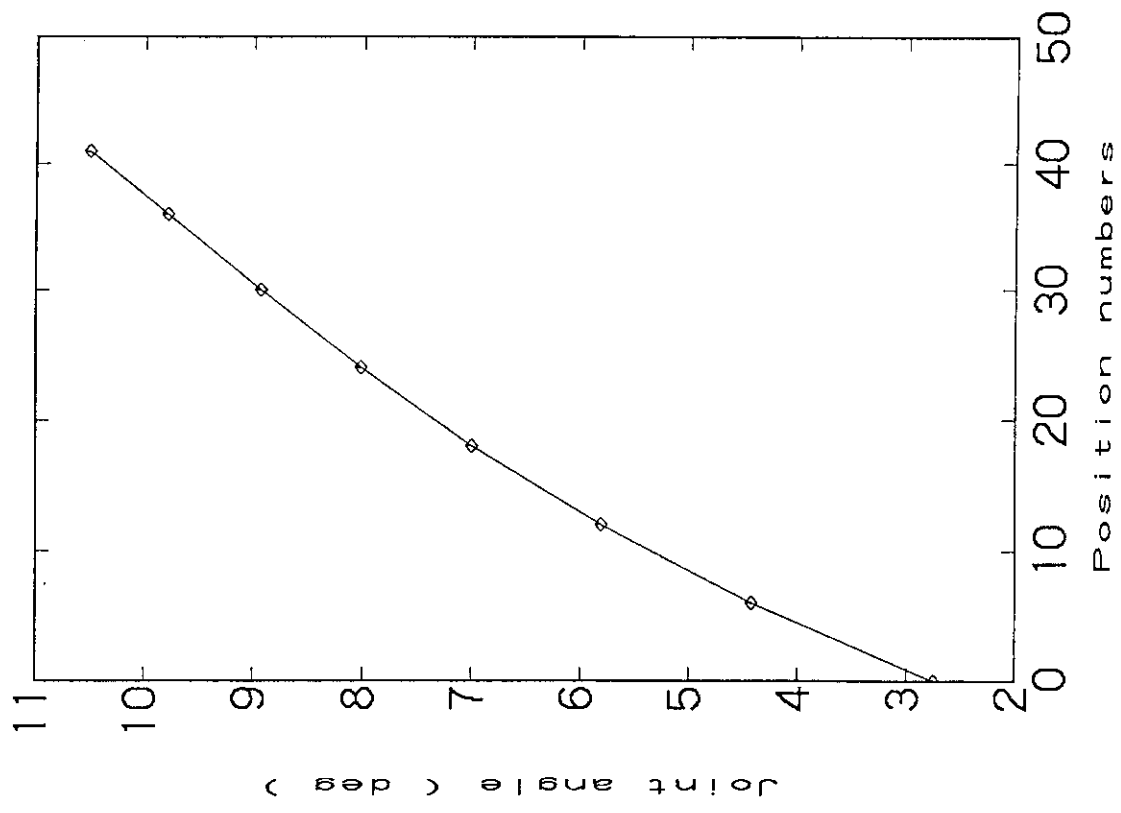


Fig. 27 Behavior of Joint Angle  $\theta_1$  (Sample Problem 3)

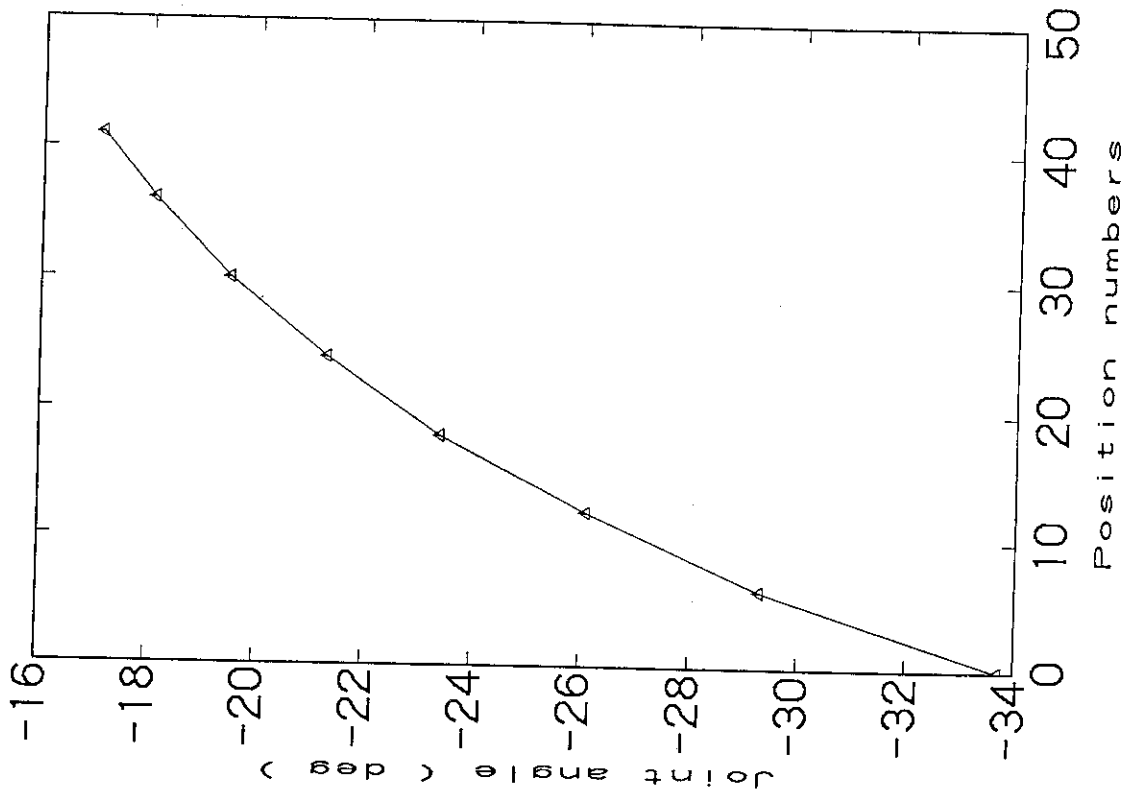


Fig. 30 Behavior of Joint Angle  $\theta_4$  (Sample Problem 3)

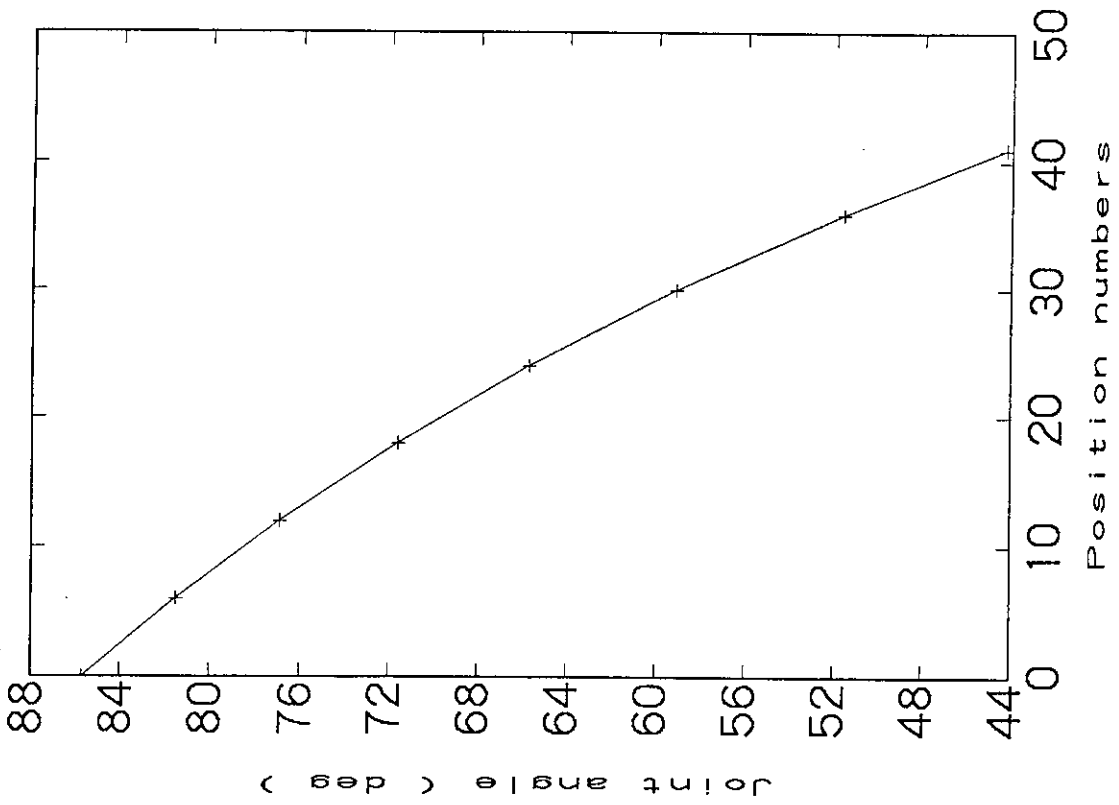


Fig. 29 Behavior of Joint Angle  $\theta_3$  (Sample Problem 3)

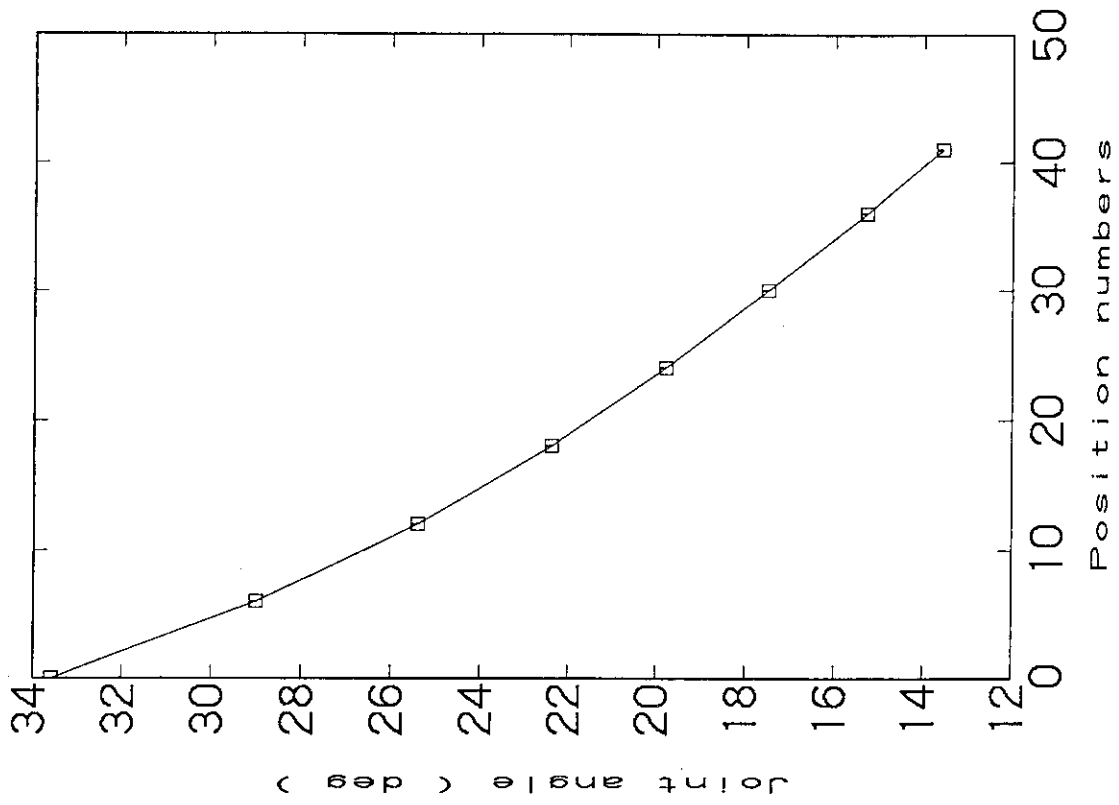


Fig. 32 Behavior of Joint Angle  $\theta_6$  (Sample Problem 3)

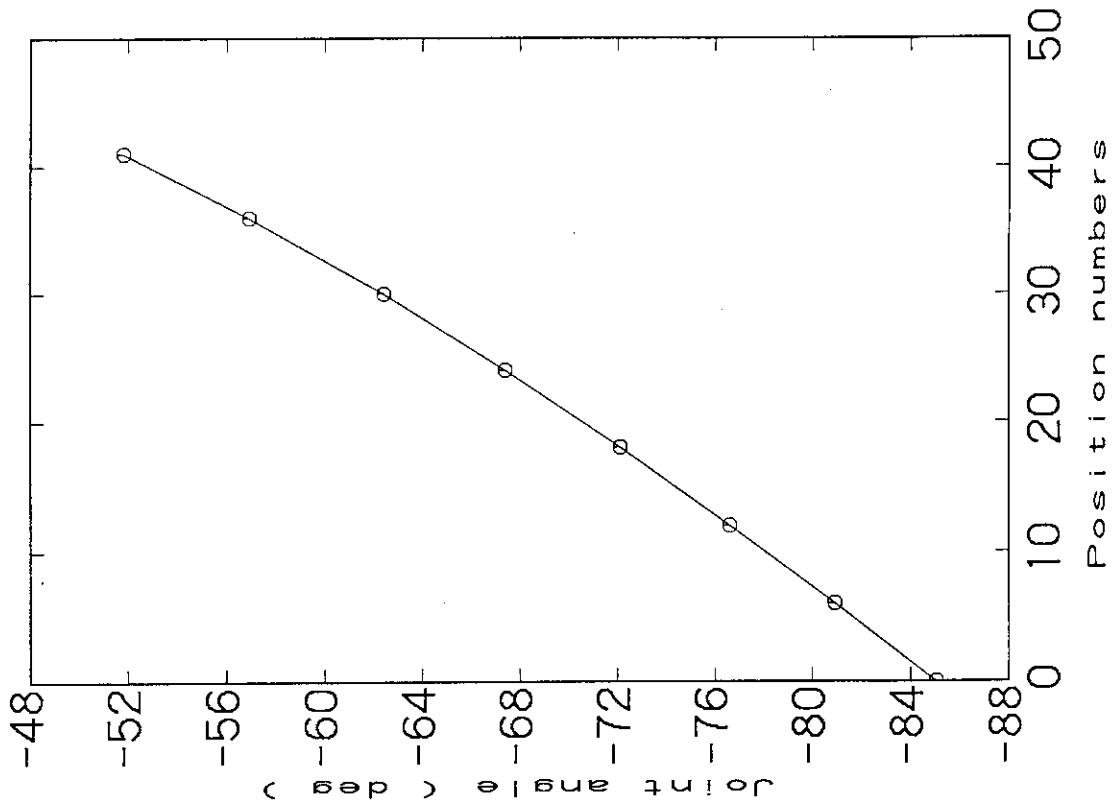


Fig. 31 Behavior of Joint Angle  $\theta_5$  (Sample Problem 3)

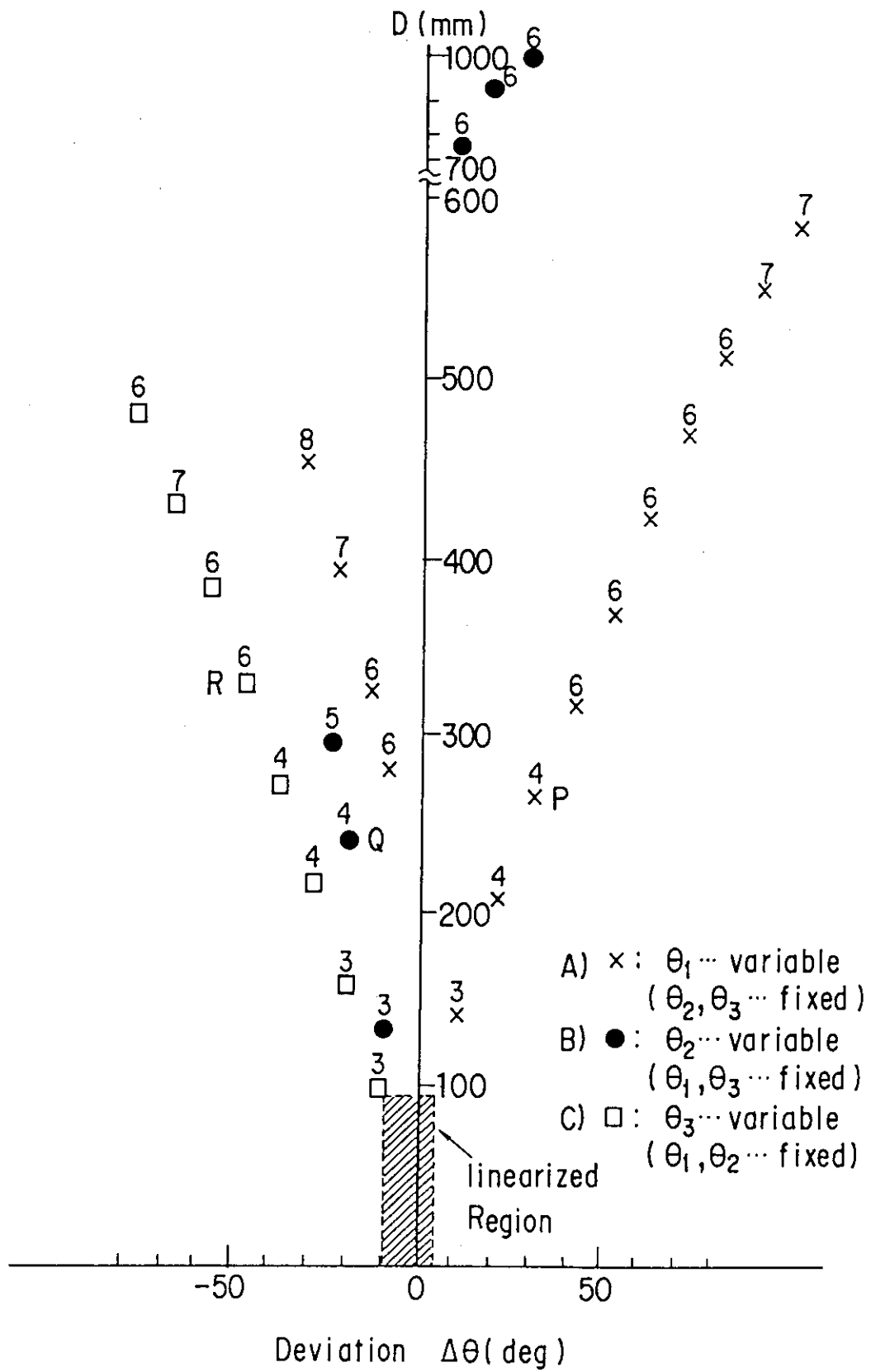


Fig. 33 Convergence Characteristics 1

Table 2 Convergence Characteristics 2

$\theta_1$ (deg)	$\theta_2$ (deg)	$\theta_3$ (deg)	iteration no.	(initial distance) (mm)	
2.7533	0.1502	85.7259	0	( $5 \times 10^{-4}$ )	** base case
12.7533	10.1502	75.7259	4	( 180.55 )	
22.7533	20.1502	65.7259	4	( 309.10 )	
22.7533	-19.8498	65.7259	6	( 342.13 )	
32.7533	-19.8498	75.7259	8	( 288.78 )	
-7.2467	-9.8498	75.7259	5	( 244.52 )	
-17.2467	20.1502	65.7259	6	( 443.31 )	



## 4. おわりに

ロボット・マニピュレータのリンク機構を支配する運動学方程式の解法について、在来手法の弱点や欠点を考慮に入れた斬新なアプローチが提案された。連立非線形の運動学方程式の解を数値的に求める場合、その計算方法はいくつか考えられるが、回転角の正弦・余弦を多数含む極めて複雑なリンク関係式を原式のまま、通常の数値解法モデルを利用して解を求めれば、その探索時間や精度、記憶容量などが問題となる。そのうえ、こうした既存の数値計算アルゴリズムを（大型計算機を除く）ミニコン（あるいはパソコン）クラスで処理しようとするならば、なおさらである。今日、マニピュレータを操作するには、中型以下の計算機により、精度がよく、しかも迅速に処理できることが制御ソフトへの最大要求事項であるから、既成の数値解法モデルに依頼するよりも、マニピュレータ本来の機構学的特徴を把握したうえで、効率的な演算方法を優先した実用的なアルゴリズムを考えるのが得策である。

先行研究として最初に試みた多項式モデルでは、関節解の多値性が厳密に取扱える24次の代数方程式への変換に力点をおいて開発を進めた。さらにこれを核にして次数の低減化を迫った結果、扱いやすい8次の方程式に簡略化が達成された。もともと、高次方程式モデルは精度よく解くためにいくつかの方策や吟味がプログラミングの過程でなされていたため、24次の方程式の解でもまったく問題なくマニピュレータの軌道プランニングに利用できるが、最初から不要根が回避できる低次のモデルを使えば、計算時間の短縮化、丸め誤差の蓄積排除、また簡潔なモデルの記述などの点で有効なことは論じるまでもない。提案した多項式モデルの重要な役割は、複雑なリンク機構の相互関係を解析する場合、その複雑さゆえに追跡が困難な各関節機構の潜在的な性質を網羅なく顕在化することにある。

つぎに、統一的に記述した  $A_i$  行列からマニピュレータの運動学方程式を誘導し、その解法を同じ多項式モデルを適用して正しい結果を導き出した。 $A_i$  行列を指定する場合、リンクの基本姿勢となる幾何学的な連鎖状態およびその座標系の設定がポイントになる。ただ、任意の関節とその隣接関係の行列表現は一義的なものでなく、例えば、付録の(A.5.1)を引出す際、 $x$  方向への並進を  $y$  方向に代えたり、また、回転軸  $z_i$  の一定方向に対して、その向きを変えたり等々…、座標系の取り扱い方でその定式化も固定したものではない。各リンクの座標系を全く任意に与えても運動学方程式を導くことは可能であったが、任意性のなかにも一定のルールを定めた  $A_i$  行列を用いれば、マニピュレータ指先関係の統一した記述（計算機処理に適した漸化式表現）が可能となり、このことは今後逆問題を統一的に取り扱うための一つの指針を与える。

仮想的リンクから構成されるマニピュレータを導入した解析では、一般にマニピュレータの解析が根元固定で指先が指定された状態での議論（数学的には2点境界問題）となるため、通常のアプローチとは若干見方を変えた取扱いを行った。すなわち、指先を起点とする仮想的なリンク構造体の根元支持機構付近での距離関係と物理的接続条件が、最少の関節変数から構成される数学モデルの構築を指摘した。この発見により、マニピュレータの原問題が独立4変数のみで決定され、その解法を4変数を含んだ評価関数の最適化問題に帰着できた。解法のなかに一部線形化手

法を取入れてあるが、2次の極値探索を考慮しているため、収束速度は極めて良いことが判明した。この方法は、自由度が増えた計算へ拡張する場合、冗長分の条件設定を行うことで原理的に解が決定でき、一般化逆行列などの手法を使わなくてもこの簡単なアルゴリズムで十分である。

ベクトルと幾何学の知識を利用した方法では、リンク関係式と関節角が同時に誘導できた。ここでは、回転(単位)ベクトルの変位の定式化と簡単なベクトル演算のみが考え方の基本になっている。通常の座標変換法に比べて、リンク間の関係式が直感的に作られ、また、個々の関節解も陽的に求められる可能性も高いことが本法の特徴である。

位置決定機構と姿勢の決定機構に分けられたマニピュレータ構造にヒントを得て、全体の関節変数の2つのグループに分けた研究は、原理的に任意のマニピュレータにも適用できる考え方である。6変数のマニピュレータ運動学方程式を基本的には3変数の決定問題に置き換えたことで計算処理の簡潔化、迅速化に大きな役割を演じた。評価関数の最適計算で誘導される関節角の変位に対して、適用範囲を拡大させる調整が有効であったが、非線形特性が未知の領域で適用する場合に、自動的に変動巾を改善していく方法が残された課題となろう。

以上、ヤコビ法の問題点を念頭において新しいアプローチを提案したが、これらの手法は今後、マニピュレータの動特性解析における基盤ツールとして大いに役立つであろう。

## 謝 辞

本研究の機会と支援を与え、また本報告書作成の上で有益なアドバイスをいただいた原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝致します。

法を取入れてあるが、2次の極値探索を考慮しているため、収束速度は極めて良いことが判明した。この方法は、自由度が増えた計算へ拡張する場合、冗長分の条件設定を行うことで原理的に解が決定でき、一般化逆行列などの手法を使わなくてもこの簡単なアルゴリズムで十分である。

ベクトルと幾何学の知識を利用した方法では、リンク関係式と関節角が同時に誘導できた。ここでは、回転(単位)ベクトルの変位の定式化と簡単なベクトル演算のみが考え方の基本になっている。通常の座標変換法に比べて、リンク間の関係式が直感的に作られ、また、個々の関節解も陽的に求められる可能性も高いことが本法の特徴である。

位置決定機構と姿勢の決定機構に分けられたマニピュレータ構造にヒントを得て、全体の関節変数の2つのグループに分けた研究は、原理的に任意のマニピュレータにも適用できる考え方である。6変数のマニピュレータ運動学方程式を基本的には3変数の決定問題に置き換えたことで計算処理の簡潔化、迅速化に大きな役割を演じた。評価関数の最適計算で誘導される関節角の変位に対して、適用範囲を拡大させる調整が有効であったが、非線形特性が未知の領域で適用する場合に、自動的に変動巾を改善していく方法が残された課題となろう。

以上、ヤコビ法の問題点を念頭において新しいアプローチを提案したが、これらの手法は今後、マニピュレータの動特性解析における基盤ツールとして大いに役立つであろう。

## 謝 辞

本研究の機会と支援を与え、また本報告書作成の上で有益なアドバイスをいただいた原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝致します。

## 参 考 文 献

1. J. Denavit & R. S. Hartenberg: A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, *J. Applied Mechanics*, 22, June, 215 / 221, (1955).
2. R. C. Paul: *Robot Manipulators—Mathematics, Programming and Control*, MIT Press (1981).
3. P. Coiffet: *Robot Technology—Modelling and Control*, Vol. 1, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs (1983).
4. A. Liegeois: *Robot Technology—Performance and Computer-aided Design*, Vol. 7, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs (1985).
5. W. E. Snyder: *Industrial Robots; Computer Interfacing and Control*. Prentice Hall (1985).
6. Vukobratovic et al. : *Kinematics and Trajectory Synthesis of Manipulation Robots*, Springer-Verlag (1986).
7. 中野: ロボット工学入門, オーム式 (1983).
8. 白井: ロボット, 共立出版 (1983).
9. 若松他: ロボットの制御, 計測自動制御学会 (1985).
10. 牧野他: ロボット機構学, 日刊工業新聞社 (1988).
11. ロボットアームの制御, 計測と制御, 25-1(1986).
12. S. L. S. Jacob et al., 関根訳: 非線形最適化問題の反復解法, 培風館 (1976).
13. S. Sasaki: A Method of Solving the Inverse Kinematics of a Manipulator Arm, JAERI-M 86-018, Feb. (1986).
14. 佐々木: 多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題計算法, 計測自動制御学会論文集, 23-5, pp 485 / 490 (1987).
15. 佐々木: 改良された多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題計算法, 計測自動制御学会論文集, 24-2, pp 204 / 206 (1988).
16. 佐々木, 多関節形ロボット・マニピュレータの逆運動学方程式に最小化手法を適用した新しい解法, 計測自動制御学会論文集, 23-3, pp 274 / 280 (1987).
17. 佐々木, 篠原: ベクトル幾何学および多項式表現による6リンク・マニピュレータの逆問題計算法, 計測自動制御学会論文集, 24-5, pp 540 / 542 (1988).
18. S. Sasaki and Y. Shinohara: Studies of Manipulator Kinematics at JAERI, Proceedings of 1st International Meeting on Advances in Robot Kinematics, Ljubljana (Yugoslavia) pp 14 / 24 (1988).
19. 佐々木: 関節変数の分離に基づく逆運動学の解法, 計測自動制御学会論文集 (投稿中)
20. 佐々木: 最適化手法を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題に関する新しい方法, JAERI-M 89-067, Jun. (1989).

21. 佐々木: マニピュレータ運動学の一般式, JAERI-M 88-018, Feb. (1988).
22. D. L. Pieper: The Kinematics of Manipulators under Computer Control, AIM 72 (1968).
23. 磯田他: 数値計算ハンドブック, オーム社 (1971).

## 付 録

## A.1 座標変換行列

本報では、Fig.1に示した根元(ベース)に回転ジョイントが結合され、全体として6関節から構成されるメカニカル・マニピュレータを研究対象とする。このアームの空間的位置や姿勢また各関節角を求めるアルゴリズムを展開するために、相対運動を許す座標系を各関節に設定することが必要である。Fig.1のリンク構造をもつマニピュレータに対して、本報では主としてFig.2のような座標系を採用する。すなわち、マニピュレータを支えるベースの座標系を $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ 、肩の座標系を $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $\dots$ 、指先の座標系を $\Sigma_6(x_6, y_6, z_6)$ で表現する。 $\Sigma_0$ から $\Sigma_6$ へと同次座標変換行列の積演算を実行して指先の位置・方向を含む行列 $T_6$ を求めることを順方向計算とする。この計算から指先の位置は、 $\Sigma_6$ の原点 $0_6$ の位置ベクトル $\mathbf{p} = (P_x, P_y, P_z)^T$ ( $T$ は転置を示す。)で指定され、また、その姿勢は $\Sigma_6$ の3直交軸方向の単位ベクトル $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ 、 $\mathbf{o} = (o_x, o_y, o_z)^T$ 、 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ として表現される。通常、各関節軸に割当ててこの座標系は全て右手直交系とする。変換行列を計算する上でつぎの記号を導入する。

- Rot(x,  $\theta$ ) : x軸のまわりに右ネジの進む向きを正として角度 $\theta$ だけ回転  
(または旋回)したときの座標変換行列
- Rot(y,  $\theta$ ) : y軸のまわりに右ネジの進む向きを正として角度 $\theta$ だけ回転  
(または旋回)したときの座標変換行列
- Rot(z,  $\theta$ ) : z軸のまわりに右ネジの進む向きを正として角度 $\theta$ だけ回転  
(または旋回)したときの座標変換行列
- Trans(l, m, n) : x, y, z軸方向にそれぞれl, m, nだけ並進させる座標変換行列
- $A_n$  : 上の回転、並進操作を含む座標変換行列

この記法に従って、Fig.1のマニピュレータに対する各ステップでの座標変換行列をつぎのように定める。

$$A_1 = \text{Rot}(z_0, \theta_1) \text{Trans}(0, 0, a_1) \text{Rot}(y_0, -\pi/2)$$

$$A_2 = \text{Rot}(z_1, \theta_2) \text{Trans}(a_2, 0, 0)$$

$$A_3 = \text{Rot}(z_2, \theta_3) \text{Trans}(a_3, 0, 0) \text{Rot}(y_2, \pi/2)$$

$$A_4 = \text{Rot}(z_3, \theta_4) \text{Trans}(0, 0, a_4) \text{Rot}(y_3, -\pi/2)$$

$$A_5 = \text{Rot}(z_4, \theta_5) \text{Trans}(a_5, 0, 0) \text{Rot}(x_4, -\pi/2)$$

$$A_6 = \text{Rot}(z_5, \theta_6) \text{Trans}(a_6, 0, 0)$$

この $4 \times 4$ 行列の積演算

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

から基準座標系 $\Sigma_0$ に対する指先の位置・姿勢を決定する運動学方程式が求まる(その内容は2.1節に記載)。

## A.2 変換方程式(24次モデル)の係数の計算

- (1)  $b_0 = a_5(n_y Y_n - n_x X_n)$   
 $b_1 = 2a_5\{(o_x X_n - o_y Y_n) - a_5(n_x o_x + n_y o_y)\}$   
 $b_2 = a_5\{(n_x X_n - n_y Y_n) + n_y Y_p - n_x X_p\} - 4a_5(o_x^2 + o_y^2)$   
 $b_3 = 2a_5\{(o_x X_p - o_y Y_p) + a_5(n_x o_x + n_y o_y)\}$   
 $b_4 = a_5(n_x X_p - n_y Y_p)$   
 $b_5 = X_n XX - Y_n YY$   
 $b_6 = 2a_5(o_x XX - o_y YY)$   
 $b_7 = X_n XX - Y_n YY + X_p XX - Y_p YY$   
 $b_8 = 2a_5(o_x XX + o_y YY)$   
 $b_9 = X_p XX - Y_p YY$
- (2)  $k_i = b_i - b_{i+5} \quad (i=0, \dots, 4)$
- (3)  $d_{00} = a_5 n_z - ZZ$   
 $d_{01} = -2a_5 o_z$   
 $d_{02} = -(a_5 n_z + ZZ)$
- (4)  $\sum_{i=0}^4 d_i t^i = \left( \sum_{i=0}^2 d_{0i} t^i \right)^2$
- (5)  $\sum_{i=0}^8 e_i t^i = \left( \sum_{i=0}^4 k_i t^i \right)^2$
- (6)  $f_0 = X_n^2 + Y_n^2$   
 $f_1 = 4a_5(o_x X_n - o_y Y_n)$   
 $f_2 = 2(X_n X_p + Y_n Y_p) + 4a_5^2(o_x^2 + o_y^2)$   
 $f_3 = 4a_5(o_x X_p - o_y Y_p)$   
 $f_4 = X_p^2 + Y_p^2$
- (7)  $\sum_{i=0}^8 g_i t^i = \left( \sum_{i=0}^4 d_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)$
- (8)  $h_0 = f_0$   
 $h_1 = f_1$   
 $h_2 = f_2 + 2f_0$   
 $h_3 = f_3 + 2f_1$   
 $h_4 = f_0 + 2f_2 + f_4$   
 $h_5 = f_1 + 2f_3$   
 $h_6 = f_2 + 2f_4$   
 $h_7 = f_3$   
 $h_8 = f_4$
- (9)  $J_i = e_i + g_i - ah_i \quad (i=0, \dots, 8)$
- (10)  $l_0 = o_y Y_n - o_x X_n$

$$l_1 = -2a_5(o_x^2 + o_y^2) + 2(n_y Y_n - n_x X_n)$$

$$l_2 = o_y Y_p - o_x X_p + o_x X_n - o_y Y_n - 4a_5(n_x o_x + n_y o_y)$$

$$l_3 = 2a_5(o_x^2 + o_y^2) - 2(n_y Y_p - n_x X_p)$$

$$l_4 = o_x X_p - o_y Y_p$$

$$(11) \quad \left( \sum_{i=0}^8 l_{2i} t^i \right) = \left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right)^2$$

$$(12) \quad \sum_{i=0}^6 l_i t^i = \left( \sum_{i=0}^4 l_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \right)$$

$$(13) \quad K_0 = -o_z k_0$$

$$K_1 = -(o_z k_1 + 2n_z k_0)$$

$$K_2 = o_z k_0 - 2n_z k_1 - o_z k_2$$

$$K_3 = o_z k_1 - 2n_z k_2 - o_z k_3$$

$$K_4 = o_z k_2 - 2n_z k_3 - o_z k_4$$

$$K_5 = o_z k_3 - 2n_z k_4$$

$$K_6 = o_z k_4$$

$$(14) \quad PL_i = K_i + l_i \quad (i=0, \dots, 6)$$

$$(15) \quad LL_0 = o_z^2$$

$$LL_1 = 4n_z o_z$$

$$LL_2 = 4n_z^2 - 2o_z^2$$

$$LL_4 = o_z^2$$

$$(16) \quad \sum_{i=0}^8 PL_i t^i = \left( \sum_{i=0}^4 LL_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)$$

$$(17) \quad L_i = l_{2i} + PL_i$$

$$(18) \quad \sum_{i=0}^{16} N_i t^i = \left( \sum_{i=0}^8 J_i t^i \right)^2$$

$$(19) \quad \sum_{i=0}^{12} m_i t^i = 4a_{34}^2 \left( \sum_{i=0}^6 PL_i t^i \right)^2$$

$$(20) \quad \sum_{i=0}^{12} W_i t^i = (1+t^2)^2 \left( \sum_{i=0}^4 f_i t^i \right)^2$$

$$(21) \quad \sum_{i=0}^{24} P_i t^i = \left( \sum_{i=0}^{12} m_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^{12} W_i t^i \right)$$

$$\sum_{i=0}^{24} Q_i t^i = \left( \sum_{i=0}^8 L_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^{16} N_i t^i \right)$$

$$(22) \quad R_i = P_i - Q_i \quad (i=0, \dots, 24)$$



## A.3 Bairstow 法の概要

与えられた  $n$  次の実係数代数方程式を

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (\text{A.3.1})$$

とする。いま、 $Q(x) = x^2 + px + q$  を実係数からなる任意の 2 次式とし、 $F(x)$  を  $Q$  で割った商を  $Q_1(x)$  としよう。その  $F(x)$  をつぎのように記述する。

$$F(x) = (x^2 + px + q)Q_1(x) + Rx + S \quad (\text{A.3.2})$$

$$Q_1(x) = b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \dots + b_{n-2} \quad (\text{A.3.3})$$

さらに、 $Q_1(x)$  が 2 次因子  $(x^2 + px + q)$  を含むつぎの形に整理できたとする。

$$Q_1(x) = (x^2 + px + q)Q_2(x) + \bar{R}x + \bar{S} \quad (\text{A.3.4})$$

$$\text{但し, } Q_2(x) = c_0x^{n-4} + c_1x^{n-5} + \dots + c_{n-4} \quad (\text{A.3.5})$$

これより係数間にはつぎの関係が引出せる。

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \quad b_1 = a_1 - pb_0 \\ b_k &= a_k - pb_{k-1} - qp_{k-2} \quad (k=2, 3, \dots, n) \\ c_0 &= b_0, \quad c_1 = b_1 - pb_0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

$$c_k = b_k - pc_{k-1} - qc_{k-2} \quad (k=2, 3, \dots, n-1)$$

式(A.3.1)～(A.3.6)の関係より

$$R = b_{n-1}, \quad S = b_n + pb_{n-1} \quad (\text{A.3.7})$$

$$\bar{R} = c_{n-3}, \quad \bar{S} = c_{n-2} + pc_{n-3} \quad (\text{A.3.8})$$

が得られる。

いま、 $xQ_1(x)$  を 2 次因子  $(x^2 + px + q)$  で割った剰余を  $R^*x + S^*$  としよう。そのとき、 $xQ_1(x)$  は式(A.3.4)からつぎのように記述できる。

$$\begin{aligned} xQ_1(x) &= Q_3(x)(x^2 + px + q) + R^*x + S^* \\ &= (x^2 + px + q)xQ_2(x) + \bar{R}x^2 + \bar{S}x \\ &= (x^2 + px + q)xQ_2(x) + c_{n-3}x^2 + (c_{n-2} + pc_{n-3})x \\ &= (x^2 + px + q)\{xQ_2(x) + c_{n-3}\} + c_{n-2}x - qc_{n-3} \end{aligned} \quad (\text{A.3.9})$$

したがって、つぎの関係が導き出せる。

$$\begin{aligned} R^* &= c_{n-2} \\ S^* &= -c_{n-3}q = c_{n-1} - b_{n-1} + pc_{n-2} \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

一方、式(A.3.2)、(A.3.3)を  $p, q$  について微分すると

$$xQ_1(x) = -(x^2 + px + q) \frac{\partial Q_1}{\partial p} - x \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial p} \quad (\text{A.3.11})$$

$$Q_1(x) = -(x^2 + px + q) \frac{\partial Q_1}{\partial q} - x \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{\partial S}{\partial q} \quad (\text{A.3.12})$$

式(A.3.4)、(A.3.5)、(A.3.8)～(A.3.10)により

$$\frac{\partial R}{\partial p} = -R^* = -c_{n-2} \quad (\text{A.3.13})$$

$$\frac{\partial S}{\partial p} = -S^* = -(c_{n-1} - b_{n-1} + pc_{n-2}) \quad (\text{A.3.14})$$

$$\frac{\partial R}{\partial q} = -\bar{R} = -c_{n-3} \quad (\text{A.3.15})$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = -\bar{S} = -(c_{n-2} + pc_{n-3}) \quad (\text{A.3.16})$$

ところで、 $Q(x) = (x^2 + px + q)$ が $F(x)$ の因子であれば、式(A.3.2)の $R$ 、 $S$ は零でなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} R(p, q) &= 0 \\ S(p, q) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.17})$$

いま、 $\bar{Q}(x) = (x^2 + \bar{p}x + \bar{q})$ が $Q(x)$ で近似されたとすると、 $\bar{p}$ 、 $\bar{q}$ もそれぞれ $p$ 、 $q$ に近似できるとしよう。すなわち、 $\bar{p}$ 、 $\bar{q}$ をつぎのように表す。

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + \Delta p \\ \bar{q} &= q + \Delta q \end{aligned} \quad (\text{A.3.18})$$

したがって、式(A.3.17)に代入してつぎの式を得る。

$$\begin{aligned} R(p + \Delta p, q + \Delta q) &= 0 \\ S(p + \Delta p, q + \Delta q) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.19})$$

これらを Taylor 級数に展開して1次の項のみを取入れると

$$\begin{aligned} R(p, q) + \frac{\partial R}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial R}{\partial q} \Delta q &= 0 \\ S(p, q) + \frac{\partial S}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial S}{\partial q} \Delta q &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.20})$$

式(A.3.13)~(A.3.16)を使って $\Delta p$ 、 $\Delta q$ を求めるとつぎのように表される。

$$\Delta p = \frac{Rc_{n-2} - Sc_{n-3}}{c_{n-2}^2 - \bar{c}_{n-1}c_{n-3}} = \frac{b_{n-1}c_{n-2} - b_n c_{n-3}}{c_{n-2}^2 - \bar{c}_{n-1}c_{n-3}} \quad (\text{A.3.21})$$

$$\Delta q = \frac{Sc_{n-2} - Rc_{n-1}}{c_{n-2}^2 - \bar{c}_{n-1}c_{n-3}} = \frac{b_n c_{n-2} - b_{n-1} \bar{c}_{n-1}}{c_{n-2}^2 - \bar{c}_{n-1}c_{n-3}} \quad (\text{A.3.22})$$

但し、

$$\begin{aligned} c_{n-2}^2 - \bar{c}_{n-1}c_{n-3} &\neq 0 \\ \bar{c}_{n-1} &= c_{n-1} - b_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{A.3.23})$$

$p$ 、 $q$ の変動巾が計算できたので、 $p$ を $p + \Delta p$ に、また、 $q$ を $q + \Delta q$ におきかえて上の手順を繰返す。

## A.4 パラメータの記述

運動学方程式から多項式を導き出す過程で採用したパラメータ  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $K$  を  $t$  の有理式で記述する。

1)  $P_1$  の表示

$$P_1 = P_y - a_6 n_y - a_5 C = P_y - a_6 n_y - a_5 (n_y c_6 - o_y s_6)$$

この式のなかにてできた三角関数を  $\tan(\theta_6/2) = t$  と置いて書き換えると、

$$\begin{aligned} P_1 &= P_y - a_6 n_y - a_5 n_y \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + \frac{2a_5 o_y t}{(1+t^2)} = YY - a_5 n_y \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + \frac{2a_5 o_y t}{(1+t^2)} \\ &= \frac{\{YY - a_5 n_y + 2a_5 o_y t + (YY + a_5 n_y)t^2\}}{(1+t^2)} \\ &= \frac{(Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)}{(1+t^2)} = \frac{Y}{(1+t^2)} \end{aligned} \quad (A.4.1)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} Y &= Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2 \\ Y_n &= a_5 n_y - YY, \quad Y_p = -(a_5 n_y + YY), \quad YY = P_y - a_6 n_y \end{aligned} \quad (A.4.2)$$

2)  $P_2$  の表示

$$\begin{aligned} P_2 &= P_z - a_6 n_z - a_5 E - a_1 = ZZ - a_5 (n_z c_6 - o_z s_6) \\ &= ZZ - a_5 n_z \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + \frac{2a_5 o_z t}{(1+t^2)} = \frac{\{ZZ - a_5 n_z + 2a_5 o_z t + (ZZ + a_5 n_z)t^2\}}{(1+t^2)} \\ &= \frac{(Z_n - 2a_5 o_z t + Z_p t^2)}{(1+t^2)} = \frac{\left(\sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i\right)}{(1+t^2)} = \frac{-Z}{(1+t^2)} \end{aligned} \quad (A.4.3)$$

但し、 $Z = Z_n - 2a_5 o_z t + Z_p t^2$

$$Z_n = a_5 n_z - ZZ, \quad Z_p = -(a_5 n_z + ZZ), \quad ZZ = P_z - a_1 - a_6 n_z \quad (A.4.4)$$

3)  $K$  の表示

式(2.2.1.2), (2.2.1.4)を  $s_4 c_{23}$  について解き、

$$s_4 c_{23} = Dc_1 - Bs_1 = (n_y s_6 + o_y c_6)c_1 - (n_x s_6 + o_x c_6)s_1 \quad (A.4.5)$$

また、 $s_4 s_{23}$  は式(2.2.1.6)から

$$s_4 s_{23} = -F = -(o_z c_6 + n_z s_6) \quad (A.4.6)$$

を得る。式(A.4.5), (A.4.6)から  $\tan\theta_{23}$  を求めると

$$\begin{aligned} \tan\theta_{23} &= \frac{-(o_z c_6 + n_z s_6)}{c_1 \{n_y s_6 + o_y c_6 - (n_x s_6 + o_x c_6)(X/Y)\}} \\ &= \frac{-(o_z c_6 + n_z s_6)Y}{c_1 \{(n_y s_6 + o_y c_6)Y - (n_x s_6 + o_x c_6)X\}} \\ &= \frac{-Y \{o_z(1-t^2) + 2n_z t\}}{c_1 [\{2n_y t + o_y(1-t^2)\}Y - \{2n_x t + o_x(1-t^2)\}X]} \end{aligned}$$

$$= \frac{-Y(o_z + 2n_z t - o_z t^2)}{c_1 \{(o_y Y - o_x X) + 2(n_y Y - n_x X)t + (o_x X - o_y Y)t^2\}} \quad (\text{A.4.7})$$

但し,  $\frac{X}{Y} = \frac{X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2}{Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2}$  (A.4.8)

$$X = X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2, \quad X_n = -a_5 n_x + XX, \quad X_p = a_5 n_x + XX \quad (\text{A.4.9})$$

$$XX = P_x - a_6 n_x$$

(A.4.7)の分母を整理すると,

$$\begin{aligned} o_y Y - o_x X &= o_y (Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2) - o_x (X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2) \\ &= (o_y Y_n - o_x X_n) - 2a_5 (o_x^2 + o_y^2)t - (o_x X_p - o_y Y_p)t^2 \\ 2(n_y Y - n_x X)t &= 2n_y (Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)t - 2n_x (X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2)t \\ &= 2(n_y Y_n - n_x X_n)t - 4a_5 (n_y o_y + n_x o_x)t^2 + 2(n_y Y_p - n_x X_p)t^3 \\ (o_x X - o_y Y)t^2 &= [o_x (X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2) - o_y (Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)]t^2 \\ &= (o_x X_n - o_y Y_n)t^2 + 2a_5 (o_x^2 + o_y^2)t^3 + (o_x X_p - o_y Y_p)t^4 \\ (\text{分母}) &= [(o_y Y_n - o_x X_n) + 2\{(n_y Y_n - n_x X_n) - a_5 (o_x^2 + o_y^2)\}t \\ &\quad + \{(o_x X_n - o_y Y_n) - (o_x X_p - o_y Y_p) - 4a_5 (n_y o_y + n_x o_x)\}t^2 \\ &\quad + 2\{(n_y Y_p - n_x X_p) + a_5 (o_x^2 + o_y^2)\}t^3 + (o_x X_p - o_y Y_p)t^4]c_1 \\ &= c_1 \sum_{i=0}^4 b_i t^i \end{aligned} \quad (\text{A.4.10})$$

これより,

$$\frac{-Y(o_z + 2n_z t - o_z t^2)}{c_1 \sum_{i=0}^4 b_i t^i} = \frac{K}{c_1} \quad (\text{A.4.11})$$

従って, K の表示はつぎのようになる。

$$K = - \frac{(Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)(o_z + 2n_z t - o_z t^2)}{\sum_{i=0}^4 b_i t^i} \quad (\text{A.4.12})$$

A.5 Denavit-Hartenberg 記法による  $A_i$  行列の一般的指定法

## (1) 隣接リンク間の関係

マニピュレータの手先の空間運動を解析するためには、まず、各リンクに直交座標系  $x_i, y_i, z_i$  を設定することが必要である。この座標系をリンク座標系と呼び、 $\Sigma_i$  で表現する。 $\Sigma_i$  は、原点  $O_i$  の位置と各直交座標軸の単位方向ベクトル  $\mathbf{n}_i, \mathbf{o}_i, \mathbf{a}_i$  により表すことができる。リンク座標系の選び方として最も普及している DH 法を採用する。

まず最初に、台座(ベース)を固定したリンク 0 とし、そこから手先に向けて 1, 2, 3, ... と番号をつけ、リンク間をつなぐ関節に対しても、台座に近い側から先端に向けて、1, 2, 3, ... と番号をつける。関節  $i+1$  の回転を  $z_i$  軸とし、 $z_{i-1}$  軸と  $z_i$  軸との共通法線が  $z_i$  軸と交わる点を  $O_i$  とする。そして、この共通法線を  $z_i$  軸の側へ延長した方向に  $x_i$  軸をとり、 $y_i$  軸はリンク座標系  $O_i - x_i y_i z_i$  が右手系となるように定める。

Fig.A.1 は第  $i-1$  番目のリンクに固定した座標系  $\Sigma_{i-1}$  (すなわち、関節  $i$  の座標系) と第  $i$  番目のリンクに固定した座標系  $\Sigma_i$  (すなわち、関節  $i+1$  の座標系) の関係を示したものである。各リンク座標系間の位置関係は、図に示した 4 つのリンクパラメータ  $\theta_i, \alpha_i, a_i, d_i$  により表される。用いる記号を要約すると、

- $\Sigma_{i-1}$  : 関節  $i$  における座標系 ( $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$ )。
- $\theta_i$  : 関節における回転角 (右ねじの方向(反時計方向)を正とする)。
- $z_{i-1}$  : リンク  $i-1$  とリンク  $i$  との間の関節  $i$  が、回転運動を行う軸。
- $x_{i-1}$  :  $z_{i-2}$  軸と  $z_{i-1}$  軸間の共通法線に合せ、関節  $i-1$  から関節  $i$  の方向に向いた軸。
- $y_{i-1}$  :  $z_{i-1}$  軸と  $x_{i-1}$  軸から右手座標系として定める軸。
- $\alpha_i$  : 正の  $z_{i-1}$  軸から正の  $z_i$  軸へ反時計方向(正)のねじれ角度。
- $d_i$  : 正の  $z_{i-1}$  方向に沿って測った軸  $x_{i-1}$  と  $x_i$  間の距離。
- $a_i$  : 正の  $x_{i-1}$  方向 (すなわち、 $x_i$  方向) に沿って測った軸  $z_{i-1}$  と  $z_i$  間の共通法線距離(リンク長さ)。

である。

リンク座標系  $\Sigma_i$  が定義されると、各座標系間の相対位置関係を解析することにより、マニピュレータの運動を解析できる。Fig.A.1 を参考にして、座標系  $\Sigma_{i-1}$  と  $\Sigma_i$  の間の位置関係は、つぎの 4 つの操作で確定する。

- (i)  $z_{i-1}$  軸のまわりに  $\theta_i$  だけ回転する。
- (ii)  $z_{i-1}$  軸の正方向に沿って距離  $d_i$  だけ並進する。
- (iii) 回転後の  $x_{i-1}$  軸に沿って、正方向に長さ  $a_i$  の並進を行い、 $x_i$  軸を定める。
- (iv)  $x_i$  軸のまわりにねじれ角  $\alpha_i$  だけ回転する。

すなわち、このステップを定式化すると、 $\Sigma_i$  から  $\Sigma_{i-1}$  への座標変換行列  $A_i$  がつぎのようにして導き出せる。

$$\begin{aligned}
 A_i &= \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \text{Trans}(0, 0, d_i) \text{Trans}(a_i, 0, 0) \text{Rot}(x_i, \alpha_i) \\
 &= \begin{vmatrix} c_i & -s_i & 0 & 0 \\ s_i & c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} c_i & -s_i \cos\alpha_i & s_i \sin\alpha_i & a_i c_i \\ s_i & c_i \cos\alpha_i & -c_i \sin\alpha_i & a_i s_i \\ 0 & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{A.5.1}
 \end{aligned}$$

n リンク・マニピュレータのリンク機構を行列  $A_i$  を用いて組織的に解析する場合、各リンクパラメータ  $\alpha_i, a_i, d_i$  を既知として与え、n 個の  $4 \times 4$  行列を右側から順次掛合わせると、基準座標系に対する手先の位置・姿勢関係が引出せる。つまり、行列積  $A_1 A_2 \cdots A_n$  の各要素が n 個の関節変数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  の関数として記述される。

(2) 6 リンク・マニピュレータへの適用

前述の関係式(A.5.1)を Fig. 1 に示した 6 リンク・マニピュレータへ適用を試みる。まず、各リンク上へ座標系を設定するに当たって、 $A_i$  行列の一般式が適用出来るためにマニピュレータの各関節角を零とした姿勢(零位置あるいは初期状態と呼ぶ。)を場合によっては多少変更する必要がある。マニピュレータの零位置と計算モデル上の基本姿勢の間に相違があっても同一の順問題として取扱が可能なのは、マニピュレータの根元に対する手先の機構学的位置関係が相対的な関係にあるからである。

以下、Fig. 2 に示す座標系を Fig. 3 の座標系でもってその説明を行う。

(1) 第 1 関節

- (a) 台座に固定した座標系  $\Sigma_0$  は回転軸  $z_0$  を垂直下方に、また、 $x_0$  軸を原点から図のように右方向正と定める。まず、 $z_0$  軸のまわりに角度  $\theta_1$  だけ回転する。
- (b)  $z_0$  方向へ  $d_1$  の並進を行う。
- (c)  $x_0$  方向への並進を零とする。
- (d)  $z_0$  軸を  $x_0$  軸まわりに  $-90(\text{deg})$  回転して(ねじれ角度  $\alpha_1 = 90(\text{deg})$ ) 新しく  $z_1$  軸を定める。

(2) 第 2 関節

- (a)  $x_1$  軸を  $x_0$  軸と同一方向に定め、また、上の  $z_1$  軸の指定から  $\Sigma_1$  が決定するが、しかし、この関節と次の第 3 関節との位置関係を調べると、Fig. 2 が示すように第 3 関節は第 2 関節から  $a_2$  だけ真下にある。これは座標  $y_1$  方向へ  $-a_2$  の平行移動を意味するが、前述の  $A_i$  行列に対する関係式(A.5.1)を適用する場合、関節を  $z_0$  軸まわりに回転した後  $z$  軸および  $x$  軸に沿って並進させるステップ(ii), (iii)が含まれているため、 $\Sigma_1$  の下方にリンク座標系を選ぶことはできない。第 2 関節にはオフセット機構がない(すなわち、 $d_2 = 0$ )ため、 $x_1$  方向へリンクの連鎖を展開できる。そこで実在の第 2 リンク以下を図のように  $90(\text{deg})$  右まわりに回転して水平方向の  $x_1$  軸と一致させる。これを関節 2 につな

がるリンク 2 の基本姿勢とする。

- (b)  $z_1$  軸を旋回軸として  $\theta_2$  だけ旋回する(実際の零位置から換算するとそのとりうる値は  $\theta_2 + 90(\text{deg})$  である)。
- (c)  $x_1$  方向へ  $a_2$  だけ並進する( $z_1$  方向への移動は零とする)。
- (d)  $z_1$  軸から  $z_2$  軸へのねじれ角度  $0(\text{deg})$  とした上で第 3 関節の座標系  $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$  を定める。

(3) 第 3 関節

- (a)  $\Sigma_2$  を定めた後、これに続く第 4 関節の回転軸は第 3 関節の  $x_2$  方向に一致することになる。式(A.5.1)の仮定では、回転軸を  $z$  方向と規定して関係式を導いているため、Fig. 3 のように  $90(\text{deg})$  だけリンクを逆回転させ、 $z_3$  軸を垂直下方に、また、 $x_3$  軸と  $x_2$  軸が同一方向となる座標系  $\Sigma_3(x_3, y_3, z_3)$  を選ぶ。
- (b) 回転軸  $z_2$  のまわりに  $\theta_3$  の旋回を与える(実際の零位置から換算するとそのとりうる値は、 $\theta_3 - 90(\text{deg})$  である)。
- (c) 第 3, 第 4 関節は互いに隣接しているため  $x_2$  方向及び  $z_2$  方向への並進は零となる。
- (d)  $z_3$  軸は、 $z_2$  軸を  $x_2$  軸のまわりに  $90(\text{deg})$  回転(ねじれ角度  $\alpha_3 = 90(\text{deg})$ )したものである。

(4) 第 4 関節

- (a) 軸  $z_3$  のまわりに  $\theta_4$  の回転を与える。
- (b) この軸に沿って  $d_4$  だけ並進する。
- (c)  $x_3$  軸に沿っての並進は零とする。
- (d)  $z_3$  軸を  $x_3$  軸まわりに  $-90(\text{deg})$  回転させ、 $z_4$  軸を得る(ねじれ角度  $\alpha_4 = -90(\text{deg})$ )。

(5) 第 5 関節

- (a) 上の  $z_4$  軸および  $x_3$  軸と同一方向の  $x_4$  軸から、右手座標系  $\Sigma_4(x_4, y_4, z_4)$  が決定するが、次の関節に対して第 2 関節の(a)で述べたと同様の理由により、リンク 5 を  $90(\text{deg})$  正方向に回転し、もとの  $x_4$  方向に  $a_5$  だけ並進した位置が原点となる座標系  $\Sigma_5(x_5, y_5, z_5)$  を設定する。図で右方向に  $x_5$  軸、上方に  $z_5$  軸がくる。
- (b)  $z_4$  軸を  $\theta_5$  だけ旋回する(実際の零位置から換算するとその取り得る値は  $\theta_5 + 90(\text{deg})$  である)。
- (c)  $x_4$  方向に  $a_5$  だけ並進し、また、 $z_4$  軸に沿っての移動は零とする。
- (d)  $z_4$  軸から  $z_5$  軸へのねじれ角度  $\alpha_5$  は  $-90(\text{deg})$  である。

(6) 第 6 関節

- (a)  $z_5$  軸を中心に角度  $\theta_6$  だけ回転する。
- (b)  $z_5$  軸の正方向にオフセット分  $d_6$  だけ並進し、続いて  $x_5$  軸と平行に共通法線距離  $a_6$  だけ移動させて、手先の座標系  $\Sigma_6(x_6, y_6, z_6)$  を定める。
- (c)  $z_5$  軸から  $z_6$  軸へのねじれ角度  $\alpha_6$  は零とする。

以上の説明から、マニピュレータのリンク・パラメータは Table A. 1 に、また、各  $A_i$  行列は以下のように与えられる。

$$A_1 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.5.2})$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.5.3})$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.5.4})$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.5.5})$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & a_5 c_5 \\ s_5 & 0 & c_5 & a_5 s_5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.5.6})$$

$$A_6 = \begin{vmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.5.7})$$

$$A_1 A_2 = \begin{vmatrix} c_1 c_2 & -s_2 c_1 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & a_2 s_1 c_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & -a_2 s_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_1 A_2 A_3 = \begin{vmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & s_{23} c_1 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & a_2 s_1 c_2 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & d_1 - a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = \begin{vmatrix} c_1 c_{23} c_4 - s_1 s_4 & -s_{23} c_1 & -s_4 c_1 c_{23} - s_1 c_4 & d_4 s_{23} c_1 + a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_{23} c_4 + s_4 c_1 & -s_1 s_{23} & -s_1 s_4 c_{23} + c_1 c_4 & d_4 s_1 s_{23} + a_2 s_1 c_2 \\ -s_{23} c_4 & -c_{23} & s_{23} s_4 & d_4 c_{23} + d_1 - a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 & A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 = \begin{vmatrix} c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_1 s_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1 & s_4 c_1 c_{23} + s_1 c_4 \\ s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_4 c_1 c_5 - s_1 s_{23} s_5 & s_1 s_4 c_{23} - c_1 c_4 \\ -s_{23} c_4 c_5 - s_5 c_{23} & -s_{23} s_4 \\ 0 & 0 \\ -s_5 c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 s_5 - s_{23} c_1 c_5 & a_5 (c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_1 s_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1) + d_4 s_{23} c_1 + a_2 c_1 c_2 \\ -s_1 s_5 c_{23} c_4 - s_4 s_5 c_1 - s_1 s_{23} c_5 & a_5 (s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_4 c_1 c_5 - s_1 s_{23} s_5) + d_4 s_1 s_{23} + a_2 s_1 c_2 \\ s_{23} s_5 c_4 - c_{23} c_5 & -a_5 (s_{23} c_4 c_5 + s_5 c_{23}) + d_4 c_{23} + d_1 - a_2 s_2 \\ 0 & 1 \\ \hline A & B & U & X_1 \\ C & D & V & Y_1 \\ E & F & W & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} A & B & U & X_1 \\ C & D & V & Y_1 \\ E & F & W & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

ここに、各パラメータは、

$$\begin{aligned}
 A &= c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_1 s_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1 \\
 B &= s_4 c_1 c_{23} + s_1 c_4 \\
 C &= s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_4 c_1 c_5 - s_1 s_{23} s_5 \\
 D &= s_1 s_4 c_{23} - c_1 c_4 \\
 E &= -s_{23} c_4 c_5 - s_5 c_{23} \\
 F &= -s_{23} s_4 \\
 U &= CF - DE = -s_5 c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 s_5 - s_{23} c_1 c_5 = a_x, \\
 V &= BE - AF = -s_1 s_5 c_{23} c_4 - s_4 s_5 c_1 - s_1 s_{23} c_5 = a_y, \\
 W &= AD - BC = s_{23} s_5 c_4 - c_{23} c_5 = a_z \\
 X_1 &= a_5 (c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_1 s_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1) + d_4 s_{23} c_1 + a_2 c_1 c_2 \\
 Y_1 &= a_5 (s_1 c_{23} c_4 c_5 + s_4 c_1 c_5 - s_1 s_{23} s_5) + d_4 s_1 s_{23} + a_2 s_1 c_2 \\
 Z_1 &= -a_5 (s_{23} c_4 c_5 + s_5 c_{23}) + d_4 c_{23} + d_1 - a_2 s_2
 \end{aligned} \tag{A.5.8}$$

となる。従って、ベースに関するマニピュレータ先端の表示は、

$$\begin{aligned}
 T_6 &= A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \\
 &= \begin{vmatrix} A & B & U & X_1 \\ C & D & V & Y_1 \\ E & F & W & Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.5.9}$$

で与えられる。これが Fig. 3 の座標系を基準にして導いたマニピュレータのベースと指先間の運動学方程式である。すなわち、

$$\begin{aligned}
n_x &= Ac_6 + Bs_6 \\
n_y &= Cc_6 + Ds_6 \\
n_z &= Ec_6 + Fs_6 \\
o_x &= -As_6 + Bc_6 \\
o_y &= -Cs_6 + Dc_6 \\
o_z &= -Es_6 + Fc_6 \\
a_x &= -s_5c_1c_{23}c_4 + s_1s_4s_5 - s_{23}c_1c_5 \\
a_y &= -s_1s_5c_{23}c_4 - s_4s_5c_1 - s_1s_{23}c_5 \\
a_z &= s_{23}s_5c_4 - c_{23}c_5 \\
P_x &= a_6(Ac_6 + Bs_6) + d_6a_x + Aa_5 + d_4s_{23}c_1 + a_2c_1c_2 \\
&= a_6n_x + Aa_5 + d_6a_x + d_4s_{23}c_1 + a_2c_1c_2 \\
P_y &= a_6(Cc_6 + Ds_6) + d_6a_y + Ca_5 + d_4s_1s_{23} + a_2s_1c_2 \\
&= a_6n_y + Ca_5 + d_6a_y + d_4s_1s_{23} + a_2s_1c_2 \\
P_z &= a_6(Ec_6 + Fs_6) + d_6a_z + Ea_5 + d_4c_{23} + d_1 - a_2s_2 \\
&= a_6n_z + Ea_5 + d_6a_z + d_4c_{23} + d_1 - a_2s_2
\end{aligned} \tag{A.5.10}$$

Table A.1 Link Parameters for a Six-Link Manipulator

関節	関節角	ねじれ角 $\alpha_i$		リンク長さ $a_i$		X-軸間の距離 $d_i$	
1	$\theta_1$	$\alpha_1$	-90(deg)	$a_1$	0 (mm)	$d_1$	700 (mm)
2	$\theta_2$	$\alpha_2$	0(deg)	$a_2$	500 (mm)	$d_2$	0 (mm)
3	$\theta_3$	$\alpha_3$	90(deg)	$a_3$	0 (mm)	$d_3$	0 (mm)
4	$\theta_4$	$\alpha_4$	-90(deg)	$a_4$	0 (mm)	$d_4$	350 (mm)
5	$\theta_5$	$\alpha_5$	-90(deg)	$a_5$	150 (mm)	$d_5$	0 (mm)
6	$\theta_6$	$\alpha_6$	0(deg)	$a_6$	280 (mm)	$d_6$	-115 (mm)

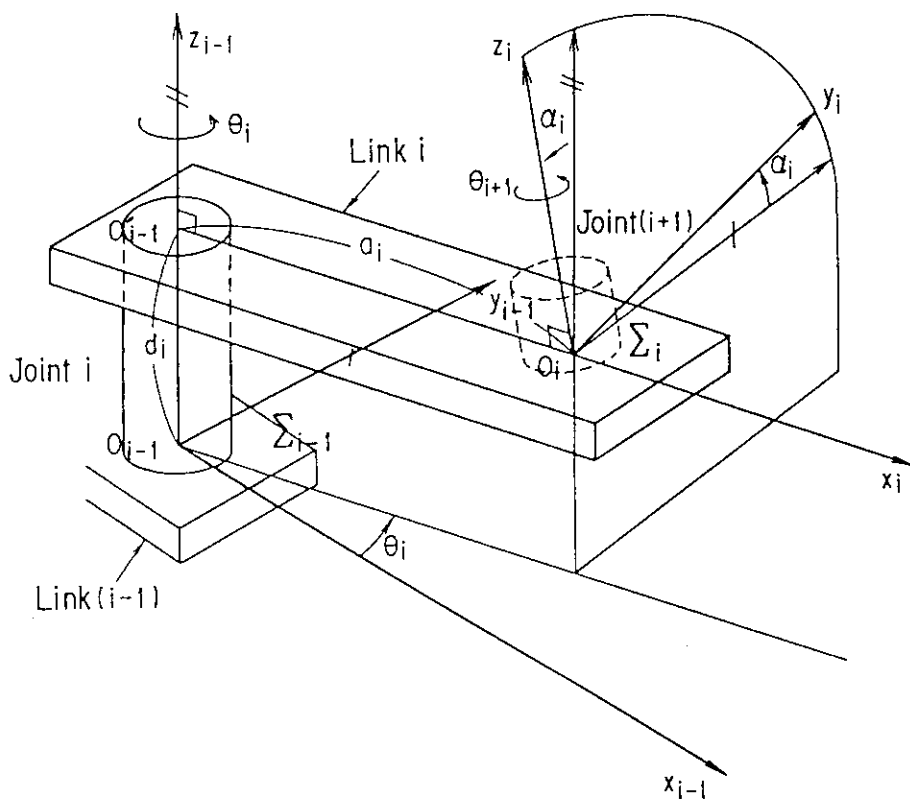


Fig. A.1 Kinematic Relation Between Link i-1 and i

A.6 一般化 A<sub>1</sub> 行列を利用した逆運動学の多項式モデル(16 次変換方程式)

2.2.2 節と同様にして, 2.3.2 節では DH 法で記述された逆問題を代数方程式の決定問題に置き換えた。本付録では, 低次元化のための 2 つのアプローチを示す。

(A) 解法 1

まず, 式(2.3.2.10), (2.3.2.12)より

$$d_4s_{23} + a_2c_2 = \{P_x - a_6n_x - Aa_5 - d_6a_x\}/c_1 = P_1/c_1 \quad (A.6.1)$$

$$d_4c_{23} - a_2s_2 = P_z - a_6n_z - Ea_5 - d_6a_z - d_1 = P_2 \quad (A.6.2)$$

つまり,

$$d_4s_3 = (P_1/c_1)c_2 - P_2s_2 - a_2 \quad (A.6.3)$$

$$d_4c_3 = (P_1/c_1)s_2 + P_2c_2 \quad (A.6.4)$$

を導く。さらに,  $\tan\theta_{23} = s_{23}/c_{23}$  に対してはつぎの表示を行い,

$$\frac{P_1/c_1 - a_2c_2}{P_2 + a_2s_2} = \frac{K}{c_1} \quad (A.6.5)$$

ここで,  $P_1, P_2, K$  は  $\theta_6$  のみの関係式で付録 A.7 に記載する。

また, 式(A.6.3), (A.6.4)から,

$$P_1^2 + P_2^2c_1^2 - 2a_2c_2P_1c_1 + 2a_2P_2s_2c_1^2 = -ac_1^2 \quad (A.6.6)$$

を得る。但し,  $a = a_2^2 - d_4^2$

これらを整理して, つぎの式

$$a_2s_2 = \frac{P_1^2 - P_2^2c_1^2 - ac_1^2 - 2KP_1P_2}{2(KP_1 + P_2c_1^2)} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3} \quad (A.6.7)$$

$$a_2c_2 = \frac{K(P_1^2 - P_2^2c_1^2 + ac_1^2) + 2P_1P_2c_1^2}{2(KP_1 + P_2c_1^2)c_1} = \frac{\Gamma_2}{c_1\Gamma_3} \quad (A.6.8)$$

を結合して, 1 つの関係式(A.6.9)を得る。

$$(\Gamma_1/\Gamma_3)^2 + (\Gamma_2/c_1/\Gamma_3)^2 = a_2^2 \quad (A.6.9)$$

以下, 付録 A.7 に示した  $t$  に関する有理式  $P_1, P_2, K$  を使って, 式(A.6.9)の各項を計算するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= P_1^2 - P_2^2c_1^2 - ac_1^2 - 2KP_1P_2 \\ &= -\frac{X^2 \left\{ \sum_{i=0}^8 J_i t^i \right\}}{(1+t^2)^2 (X^2 + Y^2) \sum_{i=0}^4 b_i t^i} \end{aligned} \quad (A.6.10)$$

ここに,

$$\sum_{i=0}^8 J_i t^i = \left\{ \sum_{i=0}^4 (d_i - f_i) t^i + a(1+t^2)^2 \right\} \sum_{i=0}^4 b_i t^i - 2 \sum_{i=0}^6 h_i t^i \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \quad (A.6.11)$$

$$\sum_{i=0}^6 h_i t^i = \sum_{i=0}^4 f_i t^i (o_z + 2n_z t - o_z t^2) \quad (A.6.12)$$

$$X^2 + Y^2 = \sum_{i=0}^4 f_i t^i \quad (\text{A.6.13})$$

(係数  $b_i$  は付録 A.7 参照)

次に,  $\Gamma_2$  は,

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= K(P_1^2 - P_2^2 c_1^2 + a c_1^2) + 2P_1 P_2 c_1^2 \\ &= \frac{X^3}{(1+t^2)^2 (X^2 + Y^2) \sum_{i=0}^4 b_i t^i} \sum_{i=0}^6 (LB)_i t^i \end{aligned} \quad (\text{A.6.14})$$

となる。

但し,

$$\sum_{i=0}^6 (LB)_i t^i = \sum_{i=0}^6 L_i t^i + 2 \sum_{i=0}^6 (BD)_i t^i \quad (\text{A.6.15})$$

$$\sum_{i=0}^6 L_i t^i = (o_z + 2n_z t - o_z t^2) \left\{ \sum_{i=0}^4 (d_i - f_i) t^i - a(1+t^2)^2 \right\} \quad (\text{A.6.16})$$

$$\sum_{i=0}^6 (BD)_i t^i = \sum_{i=0}^4 b_i t^i \sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i \quad (\text{A.6.17})$$

$\Gamma_3$  についても同様に簡略化を行うと,

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= 2(KP_1 + P_2 c_1^2) \\ &= \frac{-2X^2}{(1+t^2)} \frac{\sum_{i=0}^6 (HH)_i t^i}{\sum_{i=0}^4 f_i t^i \sum_{i=0}^4 b_i t^i} \end{aligned} \quad (\text{A.6.18})$$

$$\text{但し, } \sum_{i=0}^6 (HH)_i t^i = \sum_{i=0}^6 h_i t^i - \sum_{i=0}^6 (BD)_i t^i \quad (\text{A.6.19})$$

が得られる。従って, 式(A.6.10), (A.6.14), (A.6.18)から

$$(\Gamma_1/\Gamma_3)^2 = \frac{1}{4(1+t^2)^2} \frac{\left( \sum_{i=0}^8 J_i t^i \right)^2}{\left\{ \sum_{i=0}^6 (HH)_i t^i \right\}^2} \quad (\text{A.6.20})$$

$$(\Gamma_2/c_1/\Gamma_3)^2 = \frac{X^2}{4(1+t^2)^2} \frac{\left\{ \sum_{i=0}^6 (LB)_i t^i \right\}^2 (X^2 + Y^2)}{\left\{ \sum_{i=0}^6 (HH)_i t^i \right\}^2 X^2} \quad (\text{A.6.21})$$

となり, 最終的な変換多項式は,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{16} n_i t^i + \sum_{i=0}^{16} m_i t^i &= 4a_2^2 (1+t^2)^2 \left\{ \sum_{i=0}^6 (\text{HH})_i t^i \right\}^2 \\ \sum_{i=0}^{16} Q_i t^i &= \sum_{i=0}^{16} P_i t^i \end{aligned} \quad (\text{A.6.22})$$

で表される。

$$\text{ここに, } \sum_{i=0}^{16} Q_i t^i = \sum_{i=0}^{16} (n_i + m_i) t^i \quad (\text{A.6.23})$$

$$\sum_{i=0}^{16} P_i t^i = 4a_2^2 (1+t^2)^2 \left\{ \sum_{i=0}^6 (\text{HH})_i t^i \right\}^2 \quad (\text{A.6.24})$$

$$\sum_{i=0}^{16} m_i t^i = \left\{ \sum_{i=0}^6 (\text{LB})_i t^i \right\}^2 \sum_{i=0}^4 f_i t^i, \quad \sum_{i=0}^{16} n_i t^i = \left( \sum_{i=0}^8 J_i t^i \right)^2 \quad (\text{A.6.25})$$

(B) 解法 2

2.3.2 節の式(2.3.2.30)で示した  $\eta$  の有理関数表示は,

$$\frac{c_1}{(1+t^2)(Y_n - 2a_5 o_y t + Y_p t^2)} - \sum_{i=0}^4 k_i t^i \quad (\text{A.6.26})$$

であった。ここで  $\sum k_i t^i$  の各係数は,

$$\begin{aligned} k_0 &= -a_5(Y_n n_y + X_n n_x) + X_n XX + Y_n YY = X_n (XX - a_5 n_x) + Y_n (-a_5 n_y + YY) \\ &= X_n^2 + Y_n^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6.27})$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 2a_5 \{ (X_n o_x + Y_n o_y) - a_5 (n_x o_x + n_y o_y) + XX o_x + YY o_y \} \\ &= 2a_5 \{ X_n o_x + Y_n o_y + o_x (XX - a_5 n_x) + o_y (YY - a_5 n_y) \} \\ &= 2a_5 \{ X_n o_x + Y_n o_y + X_n o_x + Y_n o_y \} = 4a_5 (X_n o_x + Y_n o_y) \end{aligned} \quad (\text{A.6.28})$$

$$\begin{aligned} k_2 &= a_5 \{ (X_n n_x + Y_n n_y) - (Y_p n_y + n_x X_p) + 4a_5 (o_x^2 + o_y^2) \} + X_n XX \\ &\quad + Y_n YY + X_p XX + Y_p YY \\ &= X_n (XX + a_5 n_x) + Y_n (YY + a_5 n_y) + X_p (XX - a_5 n_x) + Y_p (-a_5 n_y + YY) \\ &\quad + 4a_5^2 (o_x^2 + o_y^2) \\ &= X_n X_p + Y_n Y_p + X_p X_n + Y_p Y_n + 4a_5^2 (o_x^2 + o_y^2) \\ &= 2(X_n X_p + Y_n Y_p) + 4a_5^2 (o_x^2 + o_y^2) \end{aligned} \quad (\text{A.6.29})$$

$$\begin{aligned} k_3 &= 2a_5 \{ (X_p o_x + Y_p o_y) + a_5 (n_x o_x + n_y o_y) + XX o_x + YY o_y \} \\ &= 2a_5 \{ X_p o_x + Y_p o_y + o_x (XX + a_5 n_x) + o_y (YY + a_5 n_y) \} \\ &= 2a_5 \{ X_p o_x + Y_p o_y + X_p o_x + Y_p o_y \} = 4a_5 (X_p o_x + Y_p o_y) \end{aligned} \quad (\text{A.6.30})$$

$$\begin{aligned} k_4 &= a_5 (X_p n_x + Y_p n_y) + X_p XX + Y_p YY = X_p (XX + a_5 n_x) + Y_p (YY + a_5 n_y) \\ &= X_p^2 + Y_p^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6.31})$$

となり, この  $k_i$  は  $f_i$  と一致することから,

$$\phi^2 + \eta^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2} \left\{ \sum_{i=0}^4 f_i t^i + \sum_{i=0}^4 d_i t^i \right\} \quad (\text{A.6.32})$$

が表示でき, これより,

$$(\phi^2 + \eta^2 - a)^2 = \frac{1}{(1+t^2)^4} \left( \sum_{i=0}^4 G_i t^i \right)^2 = \frac{1}{(1+t^2)^4} \sum_{i=0}^8 (\text{GS})_i t^i \quad (\text{A.6.33})$$

が導きだせる。

$$\text{但し, } \sum_{i=0}^4 G_i t^i = \sum_{i=0}^4 (d_i + f_i) t^i - a(1+t^2)^2 \quad (\text{A.6.34})$$

一方,  $4 d_4^2 c_{23}^2 (\eta \tan \theta_{23} - \phi)^2$  は, 2.2.2 節の式(2.2.2.42)と同様に,

$$4 a_{34}^2 c_{23}^2 (\eta \tan \theta_{23} - \phi)^2 = \frac{\sum_{i=0}^{12} m_i t^i}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^8 L_i t^i} \quad (\text{A.6.35})$$

となる。式(A.6.33), (A.6.35)を等しく置いて

$$\frac{1}{(1+t^2)^4} \sum_{i=0}^8 (GS)_i t^i = \frac{\sum_{i=0}^{12} m_i t^i}{(1+t^2)^2 \sum_{i=0}^8 L_i t^i} \quad (\text{A.6.36})$$

$$\sum_{i=0}^8 (GS)_i t^i \sum_{i=0}^8 L_i t^i = (1+t^2)^2 \sum_{i=0}^{12} m_i t^i \quad (\text{A.6.37})$$

を得る。これより, 分母を払ってまとめた式が16次の多項式である。

$$H(t) = \sum_{i=0}^{16} r_i t^i = 0 \quad (\text{A.6.38})$$

### A.7 パラメータの記述

運動学方程式から多項式を導き出す過程で採用したパラメータ  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $K$  を  $t$  の有理式で記述する。

#### 1) $P_1$ の表示

$P_1 = P_y - a_6 n_y - a_5 C - d_6 a_y = P_y - a_6 n_y - d_6 a_y - a_5 (n_y c_6 - o_y s_6)$  のなかにてできた三角関数を  $\tan(\theta_6/2) = t$  と置いて書き換えると、

$$\begin{aligned} P_1 &= P_y - a_6 n_y - d_6 a_y - a_5 n_y \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + \frac{2a_5 o_y t}{(1+t^2)} = YY - a_5 n_y \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + \frac{2a_5 o_y t}{(1+t^2)} \\ &= \frac{\{YY - a_5 n_y + 2a_5 o_y t + (YY + a_5 n_y)t^2\}}{(1+t^2)} \\ &= \frac{(Y_n + 2a_5 o_y t + Y_p t^2)}{(1+t^2)} = \frac{Y}{(1+t^2)} \end{aligned} \quad (A.7.1)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} Y &= Y_n + 2a_5 o_y t + Y_p t^2 \\ Y_n &= -a_5 n_y + YY, \quad Y_p = a_5 n_y + YY, \quad YY = P_y - a_6 n_y - d_6 a_y \end{aligned} \quad (A.7.2)$$

#### 2) $P_2$ の表示

$$\begin{aligned} P_2 &= P_z - a_6 n_z - a_5 E - d_1 - d_6 a_z = ZZ - a_5 (n_z c_6 - o_z s_6) \\ &= ZZ - a_5 n_z \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} + \frac{2a_5 o_z t}{(1+t^2)} = \frac{\{ZZ - a_5 n_z + 2a_5 o_z t + (ZZ + a_5 n_z)t^2\}}{(1+t^2)} \\ &= \frac{(Z_n + 2a_5 o_z t + Z_p t^2)}{(1+t^2)} = \frac{\left(\sum_{i=0}^2 d_{oi} t^i\right)}{(1+t^2)} = \frac{Z}{(1+t^2)} \end{aligned} \quad (A.7.3)$$

但し、 $Z = Z_n + 2a_5 o_z t + Z_p t^2$

$$Z_n = -a_5 n_z + ZZ, \quad Z_p = a_5 n_z + ZZ, \quad ZZ = P_z - d_1 - a_6 n_z - d_6 a_z \quad (A.7.4)$$

#### 3) $K$ の表示

式(2.3.2.14), (2.3.2.16)を  $s_4 c_{23}$  について解き、

$$s_4 c_{23} = Bc_1 + Ds_1 = (n_y s_6 + o_y c_6) s_1 + (n_x s_6 + o_x c_6) c_1 \quad (A.7.5)$$

また、 $s_4 s_{23}$  は式(2.3.2.18)から

$$s_4 s_{23} = -F = -(o_z c_6 + n_z s_6) \quad (A.7.6)$$

を得る。式(A.7.5), (A.7.6)から  $\tan \theta_{23}$  を求めると、

$$\begin{aligned} \tan \theta_{23} &= \frac{-(o_z c_6 + n_z s_6)}{c_1 \{(n_y s_6 + o_y c_6)(Y/X) + n_x s_6 + o_x c_6\}} \\ &= \frac{-(o_z c_6 + n_z s_6)X}{c_1 \{(n_y s_6 + o_y c_6)Y + (n_x s_6 + o_x c_6)X\}} \\ &= \frac{-X \{o_z(1-t^2) + 2n_z t\}}{c_1 [\{2n_y t + o_y(1-t^2)\}Y + \{2n_x t + o_x(1-t^2)\}X]} \\ &= \frac{-X(o_z + 2n_z t - o_z t^2)}{c_1 \{(o_y Y + o_x X) + 2(n_y Y + n_x X)t - (o_x X + o_y Y)t^2\}} \end{aligned} \quad (A.7.7)$$



但し,

$$\frac{Y}{X} = \frac{Y_n + 2a_5 o_y t + Y_p t^2}{X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2} = \tan \theta_1 \quad (\text{A.7.8})$$

$$X = X_n + 2a_5 o_x t + X_p t^2, \quad X_n = -a_5 n_x + XX, \quad X_p = a_5 n_x + XX \quad (\text{A.7.9})$$

$$XX = P_x - a_6 n_x - d_6 a_x$$

式(A.7.7)の分母を整理すると,

$$\begin{aligned} & \{(o_y Y + o_x X) + 2(n_y Y + n_x X)t - (o_x X + o_y Y)t^2\} \\ & = [(Y_n o_y + X_n o_x) + 2\{(Y_n n_y + X_n n_x) + a_5(o_x^2 + o_y^2)\}t + \{- (X_n o_x + Y_n o_y) \\ & \quad + (X_p o_x + Y_p o_y) + 4a_5(n_y o_y + n_x o_x)\}t^2 + 2\{(Y_p n_y + X_p n_x) - a_5(o_x^2 + o_y^2)\}t^3 \\ & \quad - (X_p o_x + Y_p o_y)t^4]c_1 \\ & = c_1 \sum_{i=0}^4 b_i t^i \end{aligned} \quad (\text{A.7.10})$$

これより,

$$\frac{-X(o_z + 2n_z t - o_z t^2)}{c_1 \sum_{i=0}^4 b_i t^i} = \frac{K}{c_1} \quad (\text{A.7.11})$$

$$K = - \frac{(X_n + 2a_5 o_x t + Y_p t^2)(o_z + 2n_z t - o_z t^2)}{\sum_{i=0}^4 b_i t^i} \quad (\text{A.7.12})$$

従って, K の表示はつぎのようになる。

## A.8 関節 D における座標の表示

式(2.5.2.2)で求めた第5軸の位置座標に対して、 $\tan(\theta_6/2) = t$ を利用して、 $t$ のみで表現する。それらは、

$$\begin{aligned} x_5 &= \{X_n + 2l_5 n_x t + X_p t^2\} / (1+t^2) = X / (1+t^2) \\ y_5 &= \{Y_n + 2l_5 n_y t + Y_p t^2\} / (1+t^2) = Y / (1+t^2) \\ z_5 - l_1 &= \{Z_n + 2l_5 n_z t + Z_p t^2\} / (1+t^2) = Z / (1+t^2) \end{aligned} \quad (\text{A.8.1})$$

但し、 $XX = P_x - l_6 a_x$ ,  $X_n = XX - l_5 a_x$ ,  $X_p = XX + l_5 a_x$ ,

$$YY = P_y - l_6 a_y, \quad Y_n = YY - l_5 a_y, \quad Y_p = YY + l_5 a_y,$$

$$ZZ = P_z - l_6 a_z - l_1, \quad Z_n = ZZ - l_5 a_z, \quad Z_p = ZZ + l_5 a_z \quad (\text{A.8.2})$$

となる。また、(A.8.1), (A.8.2)に基づく

$$\begin{aligned} X &= (1+t^2) \{XX - l_5 (a_x c_6 - n_x s_6)\}, \\ Y &= (1+t^2) \{YY - l_5 (a_y c_6 - n_y s_6)\} \\ Z &= (1+t^2) \{ZZ - l_5 (a_z c_6 - n_z s_6)\} \end{aligned} \quad (\text{A.8.3})$$

の表現は、因数発見に有効である。

Fig. 11 で示した  $\omega_1$ ,  $\theta_1$  は、つぎのように記述できる。

$$\tan \omega_1 = -\frac{Y}{Zc_1}, \quad \tan \theta_1 = -\frac{X}{Y} \quad (\text{A.8.4})$$

## A.9 代数方程式の誘導

式(2.5.2.23)の右辺の簡略化を起点にリンク関係を代表する多項式  $H(t) = 0$  を誘導する。

1)  $J_1 = (XN_x + YN_y + ZN_z)$  に関して

付録の式(A.8.3), 式(2.5.2.19)およびつぎの定義を使って,  $J_1$  は

$$\begin{aligned} R_1 &= n_x XX + n_y YY + n_z ZZ, \\ R_2 &= a_x XX + a_y YY + a_z ZZ, \end{aligned} \quad (\text{A.9.1})$$

$$\begin{aligned} R_3 &= o_x XX + o_y YY + o_z ZZ \\ J_1 &= (1+t^2) \{XXN_x + YYN_y + ZZN_z\} = (1+t^2) \Psi_1(t) \end{aligned} \quad (\text{A.9.2})$$

となる。但し,  $\Psi_1(t) = R_1 + 2R_2t - R_1t^2$  (A.9.3)

2)  $J_2 = Z(XN_x + YN_y) - (X^2 + Y^2)N_z$  に関して

$$\text{まず, } X^2 + Y^2 + Z^2 = (1+t^2) \Psi_2(t) \quad (\text{A.9.4})$$

但し,  $\Psi_2(t) = e_0 + e_1t + e_2t^2$

$$\begin{aligned} e_0 &= R_1^2 + (R_2 - l_5)^2 + R_3^2, \\ e_1 &= 4l_5 R_1, \\ e_2 &= R_1^2 + (R_2 + l_5)^2 + R_3^2 \end{aligned} \quad (\text{A.9.5})$$

と書けることから,

$$\begin{aligned} J_2 &= Z \{ (1+t^2) \Psi_1 - ZN_z \} - (X^2 + Y^2) N_z \\ &= (1+t^2) \{ \Psi_1 Z - \Psi_2 N_z \} \end{aligned} \quad (\text{A.9.6})$$

となり, 式(2.5.2.23)は式(A.9.7)で表現できる。

$$\tan^2 \alpha_2 = \frac{\Psi_1^2 (X^2 + Y^2)}{\{ \Psi_1 Z - \Psi_2 N_z \}^2} \quad (\text{A.9.7})$$

ところで,  $\tan \alpha_2$  に対する式(2.5.2.10)から,

$$\tan^2 \alpha_2 + 1 = \frac{4L^2 l_{34}^2}{(L^2 - b)^2} \quad (\text{A.9.8})$$

を得る。式中の  $L$  は, 式(2.5.2.9)と式(A.9.1)を使うと,

$$L^2 = x_5^2 + y_5^2 + (z_5 - l_1)^2 = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{\Psi_2(t)}{(1+t^2)} \quad (\text{A.9.9})$$

と表せる。これを直接式(A.9.8)に代入すれば,

$$\tan^2 \alpha_2 + 1 = \frac{4l_{34}^2 \Psi_2 / (1+t^2)}{\{ (\Psi_2 / (1+t^2)) - b \}^2} = \frac{4(1+t^2) \Psi_2 l_{34}^2}{\{ \Psi_2 - b(1+t^2) \}^2} \quad (\text{A.9.10})$$

なる  $t$  の有理数が得られる。

一方, (A.9.7) の右辺に 1 を加えた分子を  $J_3$  とすると,

$$\begin{aligned} J_3 &= \Psi_1^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) + \Psi_2 N_z (\Psi_2 N_z - 2\Psi_1 Z) \\ &= \Psi_1^2 (1+t^2) \Psi_2 + \Psi_2 N_z (\Psi_2 N_z - 2\Psi_1 Z) \end{aligned} \quad (\text{A.9.11})$$

となる。 $J_3$  の一部  $(\Psi_2 N_z - 2\Psi_1 Z)$  に式(A.9.3), (A.9.5)の  $\Psi_1, \Psi_2$  を代入する ( $\Psi_2$  をつぎのように変形しておく。)

$$\Psi_2 = (1+t^2) \{ R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2 - 2l_5 (R_2 c_6 - R_1 s_6) \}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_2 N_z - 2\Psi_1 Z &= \Psi_2 N_z - 2\Psi_1 \{ZZ(1+t^2) - l_5 N_z\} \\
 &= (1+t^2) [\{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2 - 2l_5(R_2 c_6 - R_1 s_6)\} (n_z + 2a_2 t - n_z t^2) \\
 &\quad - 2\{ZZ - l_5(a_2 c_6 - n_z s_6)\} (R_1 + 2R_2 t - R_1 t^2)] \\
 &= (1+t^2) \Psi_3
 \end{aligned}$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned}
 \Psi_3 &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\
 b_0 &= W + U, \quad b_1 = 2\{a_2 S - 2R_2 ZZ\}, \quad b_2 = -W + U \\
 S &= R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + l_5^2, \quad W = S n_z - 2R_1 ZZ, \quad U = 2l_5(a_2 R_1 - n_z R_2)
 \end{aligned} \tag{A.9.12}$$

従って、

$$J_3 = \Psi_1^2(1+t^2)\Psi_2 + N_z \Psi_2(1+t^2)\Psi_3 \tag{A.9.13}$$

と式 (A.9.10) から因数  $\Psi_2(1+t^2)$  を除去すると、

$$\frac{4l_5^2}{\{\Psi_2 - b(1+t^2)\}^2} = \frac{\Psi_1^2 + \Psi_3 N_z}{\{\Psi_1 Z - \Psi_2 N_z\}^2} \tag{A.9.14}$$

を得る。これを整理すると  $t$  に関する 8 次の代数方程式

$$H(t) = 0 \tag{A.9.15}$$

となる。(ここに  $t = \tan(\theta_6/2)$ )

## A.10 微分係数の計算

関節変数  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  の微分値

評価関数の最小値を計算するために、 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  の基準変数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  に関する偏導関数を算出する。

まず、式(2.6.2.6)~(2.6.2.8)の  $X_1, X_2, X_3$  について

$$\begin{aligned} dX_1/d\theta_1 &= -(a_y c_1 - a_x s_1) = -w_1, \quad dX_1/d\theta_2 = dX_1/d\theta_3 = 0 \\ dX_2/d\theta_1 &= -(a_y s_1 + a_x c_1) c_{23} = X_1 c_{23}, \\ dX_2/d\theta_2 &= -(a_y c_1 - a_x s_1) s_{23} - a_z c_{23} = -w_1 s_{23} - a_z c_{23} = X_3, \quad dX_2/d\theta_3 = dX_2/d\theta_2, \\ dX_3/d\theta_1 &= (a_y s_1 + a_x c_1) s_{23} = -X_1 s_{23}, \\ dX_3/d\theta_2 &= a_z s_{23} - (a_y c_1 - a_x s_1) c_{23} = -X_2, \\ dX_3/d\theta_3 &= dX_3/d\theta_2 \end{aligned} \quad (\text{A.10.1})$$

から、 $\theta_4$  の微分演算は、式(2.6.2.9)の両辺の対数を取り上の結果を利用すると簡単である。すなわち、

$$\theta_{41} = -s_4 c_4 \{ (w_1/X_1) + (X_1 c_{23}/X_2) \} \quad (\text{A.10.2})$$

$$\theta_{42} = -s_4 c_4 (X_3/X_2) \quad (\text{A.10.3})$$

$$\theta_{43} = \theta_{42} \quad (\text{A.10.4})$$

式(2.6.2.11)の  $\theta_5$  の微分も同様にして算出する。

$$\theta_{51} = s_5 c_5 \{ -(X_1 s_{23}/X_3) + (w_1/X_1) + (\cot\theta_4)\theta_{41} \} \quad (\text{A.10.5})$$

$$\theta_{52} = s_5 c_5 \{ -(X_2/X_3) + (\cot\theta_4)\theta_{42} \} \quad (\text{A.10.6})$$

$$\theta_{53} = \theta_{52} \quad (\text{A.10.7})$$

最後に、 $\theta_6$  についての計算は式(2.6.2.17)から

$$(1/s_6 c_6) \theta_{6i} = (1/X_4) (dX_4/d\theta_i) - (1/X_5) (dX_5/d\theta_i)$$

$$\text{但し、} X_4 = B n_x + A o_x, \quad X_5 = B o_x - A n_x \quad (\text{A.10.8})$$

を導きつぎのように定まる(A, Bは式(2.6.2.13), (2.6.2.14)を参照)。

$$\theta_{6i} = s_6 c_6 (h_{2i-1} - h_{2i}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (\text{A.10.9})$$

以下、各項の計算値をまとめて記述する。

$$\begin{aligned} h_1 &= (B_1 n_x + A_1 o_x)/X_4, & h_2 &= (B_1 o_x - A_1 n_x)/X_5 \\ h_3 &= (B_2 n_x + A_2 o_x)/X_4, & h_4 &= (B_2 o_x - A_2 n_x)/X_5 \\ h_5 &= (B_3 n_x + A_3 o_x)/X_4, & h_6 &= (B_3 o_x - A_3 n_x)/X_5 \\ A_1 &= (\partial A/\partial\theta_1) = k_8 + k_9 \theta_{51} + k_5 s_5 \theta_{41} \\ A_2 &= (\partial A/\partial\theta_2) = k_2 s_1 + k_9 \theta_{52} + k_5 s_5 \theta_{42} \\ A_3 &= (\partial A/\partial\theta_3) = k_2 s_1 + k_9 \theta_{53} + k_5 s_5 \theta_{43} \\ B_1 &= (\partial B/\partial\theta_1) = -k_6 - k_7 \theta_{41} \\ B_2 &= (\partial B/\partial\theta_2) = -s_1 s_{23} s_4 - k_7 \theta_{42} \\ B_3 &= (\partial B/\partial\theta_3) = -s_1 s_{23} s_4 - k_7 \theta_{43} \end{aligned} \quad (\text{A.10.10})$$

また、本研究で使用したパラメータはつぎのようである。

$$d_1 = (a_3 + a_4) s_{23} + a_2 s_2$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= (a_3 + a_4)c_{23} + a_2c_2 \\
d_3 &= a_6c_6 + a_5 \\
k_1 &= c_{23}c_4c_5 - s_{23}s_5 \\
k_2 &= c_{23}c_4c_5 - s_{23}s_5c_4 \\
k_3 &= s_{23}c_4c_5 + s_5c_{23} \\
k_4 &= s_{23}c_5 + s_5c_{23}c_4 \\
k_5 &= c_1c_4 - s_1s_4c_{23} \\
k_6 &= s_1c_4 + s_4c_1c_{23} \\
k_7 &= s_4c_1 + s_1c_{23}c_4 \\
k_8 &= k_4c_1 - s_1s_4s_5 \\
k_9 &= k_1s_1 + s_4c_1c_5
\end{aligned}
\tag{A.10.11}$$