

JAERI - M
89-219

ロボット・マニピュレータの動特性解析
(2リンク機構の計算機シミュレーション)

1989年12月

佐々木 忍・篠原 慶邦・白井 甫積

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1989

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 原子力資料サービス

ロボット・マニピュレータの動特性解析
(2リンク機構の計算機シミュレーション)

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍・篠原 慶邦・臼井 甫積

(1989年11月30日受理)

本報は、空間機構の動特性の基本的な問題を取扱う。指定された運動を実現するための駆動力や駆動トルクを得るいわゆる動力学の問題は、リンクの数とともに極端に複雑となる関係式を取扱うことになる。実用的な立場からすると、動特性方程式のこのような複雑さは、十分に根拠のある近似を取入れた簡略化モデルを導入して簡潔に整理できることが望ましい。このために、動的な動作におけるシミュレーションの経験を十分に蓄積する意図から、通常のマニピュレータの基本的な機能の一部をもった2リンク機構の解析に注意が向けられた。解析を検討した結果、各関節のトルクの挙動のなかに力学的な諸効果ははっきりと確認された。

Dynamics Analysis of Robot Manipulator
(Computer Simulation for Two-Linkage Mechanism)

Shinobu SASAKI, Yoshikuni SHINOHARA and Hozumi USUI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received November 30, 1989)

This paper is concerned with a basic problem of dynamics of spatial mechanisms. The problem of dynamics for obtaining the driving forces and torques that will realize the prescribed motion, the so called direct problem, leads to dealing with expressions which becomes extremely involved with increasing number of links. From the practical standpoint, it is desirable that this complexity of dynamical equations be simplified by means of introduction of reduced models with well-grounded approximation.

To this end, attention was directed towards analysis of two-link mechanisms having some of the fundamental functions in ordinary manipulator to accumulate experience of better simulation of dynamical movements. Through examination of analytical results, the various mechanical effects were clearly identified in torque behaviors of individual joints.

Keywords: Direct Problem of Manipulator Dynamics, Driving Torque, Coupling Effect, Inertial Matrix, Lagrange's Equation

目 次

1. はじめに	1
2. 動的挙動の解析手順	2
3. 解析結果と検討	11
4. おわりに	15
参 考 文 献	15

Contents

1. Introduction	1
2. Analytical Approach for Dynamical Behaviors	2
3. Calculated Results and Discussions	11
4. Concluding Remarks	15
References	15

List of Figures

- Fig. 1 A simple linkage mechanism to be studied
(a) Kinematic structure
(b) Link co-ordinates systems
- Fig. 2 Vector representation at the center of gravity of each link
- Fig. 3 Calculation of moment of inertia of each link
- Fig. 4 Distribution of velocity and acceleration of joint angle
(a) Acceleration distribution
(b) Velocity distribution
(c) Joint angle profile
- Fig. 5 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_2 with $\theta_1=0(\text{deg})$ fixed
- Fig. 6 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_1=0(\text{deg})$ fixed
- Fig. 7 Time dependent behavior of joint angle θ_2
- Fig. 8 Acceleration behavior of joint angle θ_2
- Fig. 9 Velocity behavior of joint angle θ_2
- Fig. 10 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1 with $\theta_2=-90(\text{deg})$ fixed
- Fig. 11 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=-90(\text{deg})$ fixed
- Fig. 12 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_2=-90(\text{deg})$ fixed
- Fig. 13 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1 with $\theta_2=-45(\text{deg})$ fixed
- Fig. 14 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=-45(\text{deg})$ fixed
- Fig. 15 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_2=-45(\text{deg})$ fixed
- Fig. 16 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1 with $\theta_2=0(\text{deg})$ fixed
- Fig. 17 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=0(\text{deg})$ fixed
- Fig. 18 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_2=0(\text{deg})$ fixed
- Fig. 19 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1 with $\theta_2=30(\text{deg})$ fixed

- Fig. 20 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=30$
(deg) fixed
- Fig. 21 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_2=30$
(deg) fixed
- Fig. 22 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1
- Fig. 23 Time dependent behavior of calculated torque τ_1
- Fig. 24 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_1
- Fig. 25 Time dependent behavior of calculated torque τ_2
- Fig. 26 Time dependent behavior of calculated torque τ_1
- Fig. 27 Time dependent behavior of calculated torque τ_2
- Fig. 28 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1
- Fig. 29 Time dependent behavior of calculated torque τ_1
- Fig. 30 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_1
- Fig. 31 Time dependent behavior of calculated torque τ_2
- Fig. 32 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1
- Fig. 33 Time dependent behavior of calculated torque τ_1
- Fig. 34 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_1
- Fig. 35 Time dependent behavior of calculated torque τ_2
- Fig. 36 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1
- Fig. 37 Time dependent behavior of calculated torque τ_1
- Fig. 38 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_1

1. はじめに

シリアルリンク・マニピュレータは、単純な回転(または直動)関節を有機的に連結させた空間リンク機構である。作業空間内でこの機構にある運動をさせた場合、重力や慣性力にくわえ、関節間に働く相対運動による干渉効果などの力学的な動作特性を定量的に掴むことはそれほど簡単ではない。こうした関節相互の運動を支配する方程式は、古典力学の領域で確立された知識を十分に適用すれば、その定式化が体系的に引出せることが、Lagrangeの方程式、Newton-Euler法、d'Alembertの手法などにより明らかなどころである^{(1)~(4)}。にもかかわらず、マニピュレータ・リンク機構の動力学的特性解析が手軽に実現されない理由は、解析の難易がもっぱらリンクの数に依存しているため、リンクが1つ増えるに毎に運動学の定式化を遙かにうわまわる複雑な式の取扱いに遭遇する。われわれは、6リンクの場合の運動方程式を計算機による数式処理で自動生成し、その複雑さについて直接経験を得た⁽⁵⁾。厳密な定式化も場合によっては、解析に大きく貢献すると考えられるが、実用的立場からすると、近似モデルを導入することが極めて複雑な関係式を効率よく計算するうえでより必要であることが分った。しかしながら、一足飛びに多リンク構造のダイナミック・モデルの簡略化を取扱うのではなく、自由度の低い機構からの運動特性を十分に把握し、多くの数値実験結果やロボットの操作経験を踏まえたうえで、運動挙動に大きく影響を及ぼす重要な因子を選び出し、簡略化や省略化の根拠を十分知ったうえで目的とするモデルにこれらを反映させていくことが開発ステップにおいて重要と考えられる。数千項からなる6リンク・マニピュレータの極めて複雑な解析モデルに対しては、このような近似化にウエイトをおいた基盤研究も各関節の制御問題に適切な見通しを与えることであろう。

本報は、こうした観点から、マニピュレータ・リンク機構の動特性モデルについて今後継続して取組んでいくために、その先行研究として単純な機構の解析を最初に取上げた。すなわち、通常の6リンク・マニピュレータのもっとも基本的な部分である根元2リンク分に焦点をあて、簡単な力学モデルを使ってリンクの相互運動の詳細な解析を実施した。解析モデルは、文献(5)で述べた質点系での取扱いに対して、リンクの重心におけるポテンシャル・エネルギーや質量分布を考慮した慣性行列の計算から関係式が誘導された。この力やトルクと位置、速度、加速度との関係を記述した動特性式に対して、リンクの運動を与えた場合、その運動を実現させるためにいかなる力やトルクを加えねばならないかといったいわゆる動力学的順問題が本報での主テーマとなる。加速度や速度分布を仮定した運動に対して、関節に働くトルクの支配因子(慣性効果、速度干渉効果、重力効果)が明確になり、同時に各関節に及ぼすトルクの全容が時間や姿勢により変化するありさまをグラフにより捉えることができた。

2. 動的挙動の解析手順

Fig.1(a)のような簡単な2リンク剛体機構を本報の解析対象とする。同図(b)に示すように、まず、根元(ベース)からリンクの先端に向けて順に直交座標系 $\Sigma_0:0-x_0y_0z_0$, $\Sigma_1:0_1-x_1y_1z_1$, $\Sigma_2:0_2-x_2y_2z_2$ を設定する。この座標系は、運動学でよく利用されるDenavit-Hartenbergの記法に従った表現とする⁽⁶⁾。ベースに固定したこの基準座標系 Σ_0 が、図に示した2リンク機構を解析するうえでの慣性座標系となる。各リンクの質量分布は均質として、重心にその質量が集中するものとする。 Σ_0 内での各リンクの位置や方向などいわゆる機構学的パラメータは、同次座標変換により簡単に求めることができる。以下、 $s_i=\sin(\theta_i)$, $c_j=\cos(\theta_j)$ は表記上の慣習に従う。

Fig.1に示した各リンクの変換行列は、座標系 Σ_0 から Σ_1 までの変換を A_{01} , 座標系 Σ_1 から Σ_2 までのそれを A_{12} とすると、

$$A_{01} = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

となる。したがって、基準系でみた第2リンク先端位置は $A_{01}A_{12}(=A_{02})$ の積演算から算出される。

$$A_{02} = \begin{vmatrix} c_1c_2 & -s_2c_1 & -s_1 & a_2c_1c_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 & a_2s_1c_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1-a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

いま、各リンクの重心 G_1, G_2 の位置をFig.2に示すように、基準系原点からのベクトル \bar{r}_1, \bar{r}_2 で表す。また、各座標系 Σ_1, Σ_2 の原点からの位置ベクトルを r_1, r_2 とすると、 \bar{r}_1, \bar{r}_2 との間につきの関係がある。

$$\bar{r}_1 = A_{01}r_1 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} r_1 \quad (2.4)$$

$$\bar{r}_2 = A_{01}A_{12}r_2 = \begin{vmatrix} c_1c_2 & -s_2c_1 & -s_1 & a_2c_1c_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 & a_2s_1c_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 - a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} r_2 \quad (2.5)$$

基準系で表される r_1, r_2 の速度は

$$v_1 = \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A_{01}r_1) = \frac{\partial A_{01}}{\partial t} r_1 = A^+_{01} \dot{\theta}_1 r_1 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A_{01}A_{12}r_2) = \frac{\partial}{\partial t} (A_{01}A_{12})r_2 \\ &= (A^+_{01} \dot{\theta}_1 A_{12} + A_{01} A^+_{12} \dot{\theta}_2) r_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。ここに、記号 A^+_{01}, A^+_{12} はつぎの行列演算を意味する。

$$A^+_{01} = \frac{dA_{01}}{d\theta_1} = \begin{vmatrix} -s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

$$A^+_{12} = \frac{dA_{12}}{d\theta_2} = \begin{vmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -a_2s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

ところで、リンク上 G_1, G_2 における2質点(質量 dm_1, dm_2) の運動エネルギーを dK_1, dK_2 とすると、それぞれ

$$dK_1 = \frac{1}{2} v_1 v_1 dm_1 = \frac{1}{2} \text{Tr}(v_1 v_1^T) dm_1 \quad (2.10)$$

$$dK_2 = \frac{1}{2} v_2 v_2 dm_2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(v_2 v_2^T) dm_2 \quad (2.11)$$

と表される。これは、式(2.6), (2.7)を使って以下のように展開される。記号 Tr は、ベクトルのスカラー積 vv を行列表現に書換えるために用いる。

$$dK_1 = \frac{1}{2} \text{Tr}[(A^+_{01} \dot{\theta}_1 r_1)(A^+_{01} \dot{\theta}_1 r_1)^T] dm_1 = \frac{1}{2} \text{Tr}[A^+_{01} \{r_1 r_1^T dm_1\} (A^+_{01})^T \dot{\theta}_1^2] \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} dK_2 &= \frac{1}{2} \text{Tr}[(A^+_{01} \dot{\theta}_1 A_{12} r_2 + A_{01} A^+_{12} \dot{\theta}_2 r_2)(A^+_{01} \dot{\theta}_1 A_{12} r_2 + A_{01} A^+_{12} \dot{\theta}_2 r_2)^T] dm_2 \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[(A^+_{01} \dot{\theta}_1 A_{12} r_2)(A^+_{01} \dot{\theta}_1 A_{12} r_2)^T + (A^+_{01} \dot{\theta}_1 A_{12} r_2)(A_{01} A^+_{12} \dot{\theta}_2 r_2)^T + \\ &\quad (A_{01} A^+_{12} \dot{\theta}_2 r_2)(A^+_{01} \dot{\theta}_1 A_{12} r_2)^T + (A_{01} A^+_{12} \dot{\theta}_2 r_2)(A_{01} A^+_{12} \dot{\theta}_2 r_2)^T] dm_2 \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[A^+_{01} A_{12} \{r_2 r_2^T dm_2\} A_{12}^T A^+_{01}{}^T \dot{\theta}_1^2 + A^+_{01} A_{12} \{r_2 r_2^T dm_2\} A^+_{12}{}^T A_{01}{}^T \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ &\quad + A_{01} A^+_{12} \{r_2 r_2^T dm_2\} A_{12}^T A^+_{01}{}^T \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + A_{01} A^+_{12} \{r_2 r_2^T dm_2\} A^+_{12}{}^T A_{01}{}^T \dot{\theta}_2^2] \quad (2.13) \end{aligned}$$

dK_1 , dK_2 に関する式(2.12), (2.13)において, 中括弧{ }でくくった部分 $r_1 r_1^T dm_1$, $r_2 r_2^T dm_2$ 以外はリンクの質量分布とは無関係であることから, 各リンクの全体の運動エネルギーがこの部分の積分により決定する。積分部分は, それぞれリンク1と2のすべての点における慣性を示し, 被積分項 rr^T を書き直して下記の行列表示を得る。通常これは擬似慣性行列と呼ばれる。

$$J_1 = \int r_1 r_1^T dm_1 = \begin{vmatrix} \int x_1^2 dm_1 & \int x_1 y_1 dm_1 & \int x_1 z_1 dm_1 & \int x_1 dm_1 \\ \int x_1 y_1 dm_1 & \int y_1^2 dm_1 & \int y_1 z_1 dm_1 & \int y_1 dm_1 \\ \int x_1 z_1 dm_1 & \int y_1 z_1 dm_1 & \int z_1^2 dm_1 & \int z_1 dm_1 \\ \int x_1 dm_1 & \int y_1 dm_1 & \int z_1 dm_1 & \int dm_1 \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

$$J_2 = \int r_2 r_2^T dm_2 = \begin{vmatrix} \int x_2^2 dm_2 & \int x_2 y_2 dm_2 & \int x_2 z_2 dm_2 & \int x_2 dm_2 \\ \int x_2 y_2 dm_2 & \int y_2^2 dm_2 & \int y_2 z_2 dm_2 & \int y_2 dm_2 \\ \int x_2 z_2 dm_2 & \int y_2 z_2 dm_2 & \int z_2^2 dm_2 & \int z_2 dm_2 \\ \int x_2 dm_2 & \int y_2 dm_2 & \int z_2 dm_2 & \int dm_2 \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

この慣性行列 J_i は慣性テンソル I を使って式(2.27)のように簡潔に表現できる。ところで, 慣性テンソル I は, その成分を (I_{ij}) としたとき,

$$I_{ij} = \begin{cases} I_{ij}^* & (i=j) \\ -I_{ij}^* & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.16)$$

なる関係をもち, I_{ij}^* はつぎのようにして求まる。

$$I_{ij}^* = \int [\delta_{ij}(\sum_k x_k^2) - x_i x_j] dm \quad (2.17)$$

式中の δ_{ij} はクロネッカのデルタである。添字 i, j, k は座標系の主軸を表すもので、この座標軸 x_1, x_2, x_3 を通常表記する座標軸 x, y, z と考えればよい。したがって、慣性テンソル I は

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_{11}^* = \int [\delta_{11}(\sum_{k=1}^3 x_k^2) - x_1 x_1] dm \\ &= \int [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1^2] dm = \int (x_2^2 + x_3^2) dm \\ &= \int (y^2 + z^2) dm (=I_{xx}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= -I_{12}^* = \int [\delta_{12}(\sum_k x_k^2) - x_1 x_2] dm \\ &= \int (-x_1 x_2) dm = -\int (xy) dm (=I_{xy}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} I_{13} &= -I_{13}^* = \int [\delta_{13}(\sum_k x_k^2) - x_1 x_3] dm \\ &= \int (-x_1 x_3) dm = -\int (xz) dm (=I_{xz}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} I_{21} &= -I_{21}^* = \int [\delta_{21}(\sum_k x_k^2) - x_2 x_1] dm \\ &= \int (-x_2 x_1) dm = -\int (yx) dm (=I_{yx}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= I_{22}^* = \int [\delta_{22}(\sum_k x_k^2) - x_2 x_2] dm \\ &= \int [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_2^2] dm = \int (x_1^2 + x_3^2) dm \\ &= \int (x^2 + z^2) dm (=I_{yy}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} I_{23} &= -I_{23}^* = \int [\delta_{23}(\sum_k x_k^2) - x_2 x_3] dm \\ &= \int (-x_2 x_3) dm = -\int (yz) dm (=I_{yz}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} I_{31} &= -I_{31}^* = \int [\delta_{31}(\sum_k x_k^2) - x_3 x_1] dm \\ &= \int (-x_3 x_1) dm = -\int (zx) dm (=I_{zx}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} I_{32} &= -I_{32}^* = \int [\delta_{32}(\sum_k x_k^2) - x_3 x_2] dm \\ &= \int (-x_3 x_2) dm = -\int (zy) dm (=I_{zy}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} I_{33} &= I_{33}^* = \int [\delta_{33}(\sum_k x_k^2) - x_3 x_3] dm \\ &= \int [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_3^2] dm = \int (x_1^2 + x_2^2) dm \\ &= \int (x^2 + y^2) dm (=I_{zz}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

と表すことができる。したがって、式(2.14), (2.15)で示したようなリンク*i*の擬似慣性行列(またはリンク慣性行列) J_i は、この慣性テンソルを使ってつぎのように表わせる。

$$J_i = \begin{pmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & \overline{m_i x_i} \\ I_{yx} & \frac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & I_{yz} & \overline{m_i y_i} \\ I_{zx} & I_{zy} & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} & \overline{m_i z_i} \\ \overline{m_i x_i} & \overline{m_i y_i} & \overline{m_i z_i} & m_i \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

ここに、 $\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}$ は*i*番目のリンク座標系の原点から、このリンクの重心(質量中心)までの位置座標を表す。 J_i はリンク*i*の質量分布のみにより、位置や速度に無関係である。 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} は、剛体の固定軸*x, y, z*まわりの慣性モーメントで、一方、 I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} はそれぞれ、*x, y, z*軸についての慣性乗積で対称性を有する。これらの量は各リンクについて計算する必要がある。Fig. 1の機構に対する1軸、2軸の慣性行列 J_1 と J_2 の計算結果はつぎのようになる(行列要素については第3節で簡単に触れる)。

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m_1 d_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} m_1 d_1^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_1 d_1 & 0 & m_1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} m_2 a_2^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} m_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} m_2 a_2 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

この値が決定すると、式(2.12), (2.13)で表したリンク全体の運動エネルギーが直ちに計算できる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{2} \text{Tr} [A_{01}^+ \{ \int r_1 r_1^T dm_1 \} (A_{01}^+)^T] \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} [A_{01}^+ J_1 (A_{01}^+)^T] \dot{\theta}_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \text{Tr} \left\{ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -s_1 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & -s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} d_1^2 & 0 & -c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} d_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \dot{\theta}_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 \text{Tr} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} d_1^2 c_1^2 & \frac{1}{3} d_1^2 s_1 c_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} d_1^2 s_1 c_1 & \frac{1}{3} d_1^2 s_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \dot{\theta}_1^2 = (m_1/6) d_1^2 \dot{\theta}_1^2
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} [A_{01}^+ A_{12} \{ \int r_2 r_2^T dm_2 \} A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_1^2 + \\
 &\quad A_{01}^+ A_{12} \{ \int r_2 r_2^T dm_2 \} A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
 &\quad A_{01} A_{12}^+ \{ \int r_2 r_2^T dm_2 \} A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
 &\quad A_{01} A_{12}^+ \{ \int r_2 r_2^T dm_2 \} A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_2^2] = \text{Tr} [S_1 + S_2 + S_3 + S_4]
 \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} A_{01}^+ A_{12} \{ \int r_2 r_2^T dm_2 \} A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} A_{01}^+ A_{12} J_2 A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \begin{vmatrix} -s_1 & 0 & -c_1 & 0 & c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 & \frac{1}{3} a_2^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} a_2 \\ c_1 & 0 & -s_1 & 0 & s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} a_2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \begin{vmatrix} -s_1 c_2 & s_1 s_2 & -c_1 & -a_2 s_1 c_2 & \frac{1}{3} a_2^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} a_2 \\ c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} a_2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{3} (a_2 s_1 c_2)^2 & -\frac{1}{3} (a_2 c_2)^2 s_1 c_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} (a_2 c_2)^2 s_1 c_1 & \frac{1}{3} (a_2 c_1 c_2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \dot{\theta}_1^2$$

$$\text{Tr}(S_1) = (m_2/6) a_2^2 c_2^2 \dot{\theta}_1^2 \tag{2.31}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} A_{01}^+ A_{12} \{ \int r_2 r_2^T dm_2 \} A_{12}^T A_{01}^T \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} m_2 \begin{vmatrix} (1/6)a_2^2 s_1 c_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} a_2 s_1 c_2 \\ -(1/6)a_2^2 c_1 c_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} a_2 c_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \\
 &\begin{vmatrix} -s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 s_2 & a_2 c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 1 \end{vmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
 &= \frac{1}{2} m_2 \begin{vmatrix} (1/6)a_2^2 s_1 c_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} a_2 s_1 c_2 \\ -(1/6)a_2^2 c_1 c_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} a_2 c_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -s_2 c_1 & -s_1 s_2 & -c_2 & 0 \\ -c_1 c_2 & -s_1 c_2 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 s_2 c_1 & -a_2 s_1 s_2 & -a_2 c_2 & 0 \end{vmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
 &= \frac{1}{2} m_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{3} a_2^2 s_1 s_2 c_1 c_2 & \frac{1}{3} a_2^2 s_1^2 s_2 c_2 & \frac{1}{3} a_2^2 s_1 c_2^2 & 0 \\ -\frac{1}{3} a_2^2 s_2 c_1^2 c_2 & -\frac{1}{3} a_2^2 s_1 s_2 c_1 c_2 & -\frac{1}{3} a_2^2 c_1 c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2
 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(S_2) = 0 \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \frac{1}{2} A_{01} A^+_{12} \left\{ \int r_2 r_2^T dm_2 \right\} A_{12}^T A^+_{01} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
 &= \frac{1}{2} (A^+_{12} A_{01}^T)^T (A^+_{01} A_{12} J_2)^T \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = S_2^T
 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(S_3) = 0 \quad (2.33)$$

$$S_4 = \frac{1}{2} A_{01} A^+_{12} \left\{ \int r_2 r_2^T dm_2 \right\} A^+_{12} A_{01} \dot{\theta}_2^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} m_2 \begin{vmatrix} -s_2 c_1 & -c_1 c_2 & 0 & -a_2 s_2 c_1 \\ -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & 0 & -a_2 s_1 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -a_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1/6)a_2^2 s_2 c_1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} a_2 s_2 c_1 \\ (1/6)a_2^2 s_1 s_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} a_2 s_1 s_2 \\ (1/6)a_2^2 c_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} a_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \dot{\theta}_2^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{3} (a_2 s_2 c_1)^2 & \frac{1}{3} (a_2 s_2)^2 s_1 c_1 & \frac{1}{3} a_2^2 s_2 c_1 c_2 & 0 \\ \frac{1}{3} (a_2 s_2)^2 s_1 c_1 & \frac{1}{3} (a_2 s_1 s_2)^2 & \frac{1}{3} a_2^2 s_1 s_2 c_2 & 0 \\ \frac{1}{3} a_2^2 s_2 c_1 c_2 & \frac{1}{3} a_2^2 s_1 s_2 c_2 & \frac{1}{3} (a_2 c_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(S_4) = (m_2/6)a_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \text{Tr}[S_1+S_2+S_3+S_4] \\ &= (m_2/6)a_2^2 c_2^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2/6)a_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

一方、機構のポテンシャル・エネルギーは、各リンクの重心において計算すると、

$$\begin{aligned} P_1 &= -m_1 \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{r}}_1 = m_1 \mathbf{g}^T (A_{01} \mathbf{r}_1) \\ &= -m_1 (0, 0, g, 0) \begin{vmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}d_1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}m_1 d_1 g \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= -m_2 \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{r}}_2 = m_2 \mathbf{g}^T (A_{02} \mathbf{r}_2) \\ &= -m_2 \mathbf{g}^T \begin{vmatrix} c_1 c_2 & -s_2 c_1 & -s_1 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & a_2 s_1 c_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & d_1 - a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &= -m_2 g (d_1 - \frac{1}{2}a_2 s_2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

を得る。ここで、 \mathbf{g} は重力ベクトルで、Fig.1に示した基準系 Σ_0 の z_0 方向を重力加速度 g が作用する正方向と定め、 $\mathbf{g}^T = (0, 0, g, 0)$ と表しておく。

以上で、リンク全体の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーが明らかになったことから、Lagrangian L がつぎのように決定する。

$$\begin{aligned} L &= (m_1/6)d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2/6)a_2^2 c_2^2 \dot{\theta}_1^2 + (m_2/6)a_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_1 d_1 g + m_2 g (d_1 - \frac{1}{2}a_2 s_2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

これを、Lagrangeの運動方程式に代入することで、各関節に作用するトルク τ_1 、 τ_2 が容易に導き出せる。すなわち、

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right\} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1}{3} + \frac{m_2 a_2^2 c_2^2 \dot{\theta}_1}{3} \right\} \\ &= \frac{m_1 d_1^2 \ddot{\theta}_1}{3} + \frac{m_2 a_2^2 c_2^2 \ddot{\theta}_1}{3} - \frac{2m_2 a_2^2 s_2 c_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2}{3} \\ &= J_{11} \ddot{\theta}_1 + \sigma_{11} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right\} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_2 a_2^2 \dot{\theta}_2}{3} \right\} - \frac{-m_2 a_2 g C_2}{2} \\
&= \frac{1}{3} m_2 a_2^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{3} m_2 a_2^2 s_2 c_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_2 g C_2 \quad (2.40) \\
&= J_{22} \ddot{\theta}_2 + \Lambda_{21} \dot{\theta}_1^2 + G_2 g
\end{aligned}$$

式(2.39)の τ_1 について調べてみると、 J_{11} が関節1の加速度により $J_{11} \ddot{\theta}_1$ の有効慣性力を発生し、第2項 $\sigma_{11} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$ が2つの関節の速度に起因したコリオリの力を表している。一方、 τ_2 については、加速度項 $J_{22} \ddot{\theta}_2$ のほか、第1関節の速度による求心力 $\Lambda_{21} \dot{\theta}_1^2$ 、重力項 $G_2 g$ が要素として含まれている。つぎの節でこのトルク計算の結果について示す。

3. 解析結果と検討

本節では、Fig. 1で示す2リンク機構の動特性を調べ、有効慣性や重力負荷項など動力学の順問題を前節で求めたトルク計算式に基づき算出する。計算に先立って、まず、各座標系における主軸周りの慣性モーメントを求めておこう。

リンク1と2における擬似慣性行列は(2.27)に示した式を利用して求められる。そのなかで、座標軸相互の慣性乗積は0としよう。 J_1 の慣性モーメントについては、リンク1を長さ d_1 、質量 m_1 の直線棒ABとみなし、重心0を通り棒に垂直な軸(p軸)をとる。棒ABのp軸のまわりの慣性モーメントを I_{pp} とする。(Fig. 3参照) 微小部分 dr の質量 dm とすると、 $dm = \rho dr$ より I_{pp} が

$$I_{pp} = \int r^2 dm = \int_{-\frac{1}{2}d_1}^{\frac{1}{2}d_1} \rho r^2 dr = m_1 d_1^2 / 12. \quad (3.1)$$

と算出される。ただし、 $m_1 = \rho d_1$ (ρ は密度)

さらに、この棒の一端を通り棒に垂直な軸(q軸)の周りの慣性モーメント I_{qq} は、平行軸の定理を使って

$$I_{qq} = I_{pp} + m_1 \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 = \frac{1}{3}m_1 d_1^2 \quad (3.2)$$

が得られる。これより、リンク1に関する慣性モーメントは、

$$I_{zz} = 0, \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{3}m_1 d_1^2 \quad (3.3)$$

となる。同様に、リンク2については

$$I_{xx} = 0, \quad I_{yy} = I_{zz} = \frac{1}{3}m_2 a_2^2 \quad (3.4)$$

と定まる。また、リンク1の重心 $G_1(0, \frac{1}{2}d_1, 0)$ とリンク2の重心 $G_2(-\frac{1}{2}a_2, 0, 0)$ の座標はFig. 2に基づいて決定される。これらの値を式(2.27)に代入したものが式(2.28)、(2.29)である。

つぎに、駆動トルクを計算するうえで、各関節の運動を考えよう。まず、加速度をFig. 4(a)の形で与えよう。すなわち、移動時間 T の前半を各関節の駆動機構が一定の加速度で運動し、後半を逆符号の加速度で動くモデルを考える。これを式で表せば、つぎのようになる。

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \begin{cases} a & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T) \\ -a & (\frac{1}{2}T \leq t \leq T) \end{cases} \quad (3.5)$$

式(3.5)を積分して、両端の境界条件($t=0$ で $dq/dt=0$, $t=T/2$ で $dq/dt=V$, $t=T$ で $dq/dt=0$)から

$$\frac{dq}{dt} = \begin{cases} (2V/T)t & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T) \text{ 但し, } a = 2V/T \\ -(2V/T)t + 2V & (\frac{1}{2}T \leq t \leq T) \end{cases} \quad (3.6)$$

と直ちに決定できる。但し、速度は運動開始から時刻 $\frac{1}{2}T$ まで増加を続け、時刻 $\frac{1}{2}T$ で最大値 V をとり、以後単調減少し時刻 T で停止するものとする。(Fig.4(b) 参照)

これより、関節角の変動がなめらかな軌道として求められる。両端の境界条件($t=0$ で $q=\theta_0$, $t=T$ で $q=\theta_x$)から式(3.7)のように書ける。

$$q(t) = \begin{cases} (V/T)t^2 + \theta_0 & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T) \\ -(V/T)t^2 + 2Vt + C & (\frac{1}{2}T \leq t \leq T) \end{cases} \quad (3.7)$$

$t=\frac{1}{2}T$ で両曲線の値が一致するために、

$$(V/T)(\frac{1}{2}T)^2 + \theta_0 = -(V/T)(\frac{1}{2}T)^2 + 2V(\frac{1}{2}T) + C$$

$$C = -(VT/2) + \theta_0$$

として、この軌道がつぎのように決定する。(Fig.4(c) 参照)

$$q(t) = -(V/T)t^2 + 2Vt - (VT/2) + \theta_0 = -(V/T)(t-T)^2 + (VT/2) + \theta_0$$

$t=T$ を代入して、

$$\frac{1}{2}VT + \theta_0 = \theta_x, \quad \Delta\theta = \theta_x - \theta_0 \quad (3.8)$$

を得る。これより、

$$V = 2\Delta\theta/T, \quad a = 2V/T = 4\Delta\theta/T^2 \quad (3.9)$$

となる。つまり、加速度と最大速度が移動時間 T と関節角の移動量 $\Delta\theta$ で決定できる。

以上、時間ステップ毎に計算する式(2.39), (2.40)において速度、加速度が次式のように整理される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_i &= (4\Delta\theta_i/T^2) \\ \dot{\theta}_i &= (4\Delta\theta_i/T^2)t \\ \theta_i &= q_i(t) = (V/T)t^2 = (2\Delta\theta_i/T^2)t^2 + \theta_0 \end{aligned} \right\} (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_i &= -(4\Delta\theta_i/T^2) \\
 \dot{\theta}_i &= -(4\Delta\theta_i/T^2)(t-T) \\
 \theta_i = q_i(t) &= -(2\Delta\theta_i/T)(t-T)^2 + \theta_x
 \end{aligned} \right\} \quad \left(\frac{1}{2}T \leq t \leq T \right) \quad (3.10)$$

$i=1, 2 \quad t=T/n$ (n は分割数)

それでは、解析結果を示そう。

関節角の初期位置として、Fig. 1に示した姿勢を本解析を通して扱う2リンク機構のホームポジションと約束する。そして、1軸の回転方向は、垂直下方を正とする回転軸 z_0 に対して、反時計まわりを正とする。また、2軸についても、水平方向に向いた第2リンクが、回転軸 z_1 に対して反時計まわりを正とする。

Fig. 5からFig. 9は、 $\theta_1=0$ のもとで、 θ_2 を $-90(\text{deg})$ から $45(\text{deg})$ まで9秒かけて移動したときの挙動である。Fig. 5は、第2関節に作用する駆動トルクと関節角 θ_2 の関係で、Fig. 6はこれを時間についてまとめたものである。図の中で、ACCは、加速度による有効慣性力を、CENTは2軸の関節速度が及ぼす求心力を、CORは1軸、2軸2つの関節の速度に起因するコリオリの力を、またGRVは重力負荷を表す。TOTALはこれら効果を加えた駆動トルクを表す。この場合、作用するトルク τ_2 は重力項にほとんど一致していることがわかる。トルクは $\theta_2=0$ 、 $t=5.5(\text{sec})$ で最大となる。一方、1軸に作用するトルク τ_1 は、零である。関節の運動特性、すなわち、加速度、速度、移動量はFig. 7からFig. 9に示される。本解析では、各関節の最大速度を $30(\text{deg})/\text{sec}$ 、平均 $15(\text{deg})/\text{sec}$ として計算を行った。Fig. 10からFig. 21は θ_2 を固定した状態で、1軸を回転した場合($\theta_1=-45\sim 45(\text{deg})$)の挙動を示す。Fig. 10は $\theta_2=-90(\text{deg})$ 、つまりリンク2を垂直にさげた状態で1軸に作用するトルクを示したものである。このトルクの値が前半、後半でそれぞれ一定なのは、慣性モーメント $J_{11}=m_1 d_1^2/3$ が一定で、かつこの項に作用する加速度も一定値を取るためである。Fig. 1で見たように、関節軸が垂直になっていることから、関節1への重力負荷がかからないことが分る。 τ_2 の方は、各項が極めて小さく零とみなせる。

Fig. 13, Fig. 14は、 $\theta_2=-45(\text{deg})$ に固定したときの θ_1 (や時刻 t)の変化に対する τ_1 の変化を示したものである。これらは、Fig. 10やFig. 11と同様に加速度効果が大きく効いていることが示されている。 τ_2 の方(Fig. 15)は、Fig. 12の零値に比べて $45(\text{deg})$ 分の回転の効果が見れ、それは1軸のトルクよりはるかに大きな値を算出した。これも重力項のみが回転トルクに寄与している。 θ_2 を垂直位置から $90(\text{deg})$ 移動させた(丁度Fig. 1の初期ホームポジションに相当する)とき、図の形は類似しているが、 τ_1 、 τ_2 ともに最も大きな値を示している。さらに、 θ_2 が正方向へ回転するにつれ、再び τ_1 、 τ_2 の値は小さくなっていく。(Fig. 19~Fig. 21参照)

つぎに、2つの関節を同時にある量だけ移動させたときのトルク特性をFig. 22からFig. 38に与える。まず、Fig. 22~Fig. 25は θ_1 と θ_2 をともに -45 から $45(\text{deg})$ まで6秒かけて移動したときの挙動である。 τ_1 の計算では、慣性力とコリオリの力の影響がはっきりと示されているが、一方、 τ_2 のトルクは重力負荷のみが決定要素になっている。その大きさは1軸のそれに比べて極めて大きい。

Fig. 26, Fig. 27は、第2軸を前とは逆に45~-45(deg)まで移動させた結果である。 τ_1 について、Fig. 22, Fig. 26は全く一致するが、 τ_2 についてもFig. 25, Fig. 27を比較すると、加速度トルクが符号反対で作用しているものの、その値が極めて小さいために重力の効果のみが支配的となってほとんど一致していると思われる。Fig. 28~Fig. 31は $\theta_1 = -10 \sim 20(\text{deg})$, $\theta_2 = 10 \sim 40(\text{deg})$ を2(sec)で動作した各軸の特性である。Fig. 28における τ_1 への要素として、コリオリの力が出現し1(sec)で最大になる(逆方向に)が、時間と共に減少傾向を示した。一方、Fig. 30における τ_2 は、反転する加速度効果に比べ、重力項が十分に大きいため、トルクの反転は見られない。Fig. 32~Fig. 35は $\theta_1 = -10 \sim 20(\text{deg})$, $\theta_2 = -40 \sim -10(\text{deg})$ を2(sec)で動作した各軸の特性である。Fig. 32はFig. 28に比べ、コリオリの力がプラス方向に作用したため、それだけ大きくトルクをみつもった。 τ_2 もFig. 30に比べて上昇カーブを示している。Fig. 36以降は $\theta_1 = 5 \sim 20(\text{deg})$, $\theta_2 = -40 \sim -25(\text{deg})$ を1(sec)で移動させたもので、トルク挙動は今までと概ね類似するが、その値は大きく計算された。

4. おわりに

マニピュレータのもっとも基本構成とみられる2リンク機構の動的解析を実施した。解析方法は古典力学で周知の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから、Lagrangeの方程式を介して動特性式を引出すことが基礎となっている。与えた運動は単純であるが、関節を駆動するトルクが姿勢に依存して、慣性力、重力、求心力などその効果を見ることができた。今回の計算では関節速度や加速度を低く抑えていたので各物理量は大きく変化せず類似の動作を引出したが、運動を代えることにより異なる力学挙動が得られるであろう。とくに、今回行わなかったが、先端へ負荷をかけることにより各軸への力の作用する様相は、実験データとの比較が望ましいので次の報告とする。現在のモデルはリンク構成が単純なことから取扱いも容易であり、各関節の特性をかなり詳細に調査できる。そこで、この種の実験対象による生データと比較し、解析モデルの妥当性を検討することが急務である。

参考文献

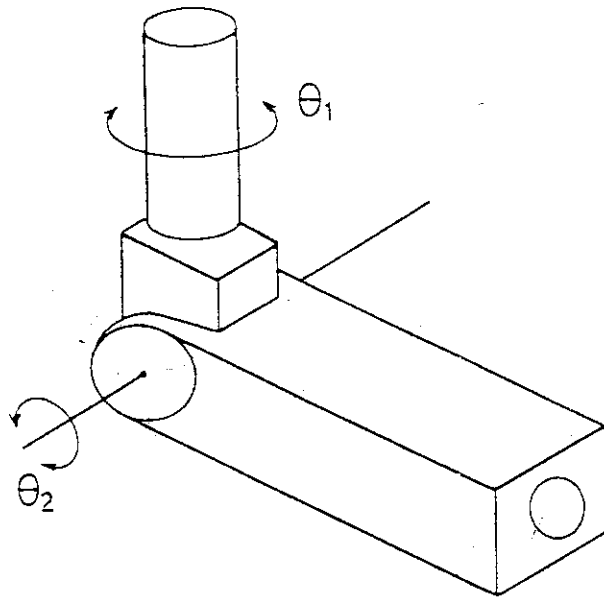
- (1) R.P. Paul: "Robot Manipulators; Mathematics, Programming and Control", The MIT Press (1981).
- (2) M.Vukobratovic et al.: "Dynamics of Manipulation Robots / Theory and Application", Springer-Verlag (1982).
- (3) P. Coiffet : "Robot Technology; Modelling and Control", vol.1, Englewood Cliffs, Prentice-Hall (1983).
- (4) W.E. Snyder : "Industrial Robots", Prentice-Hall (1985).
- (5) 佐々木 : "Lagrangeの力学に基づくマニピュレータ動特性方程式の完全な記述", JAERI-M 89-121, Aug. (1989).
- (6) J.Denavit & Hartenberg : "A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanism Based on Matrices", Trans. ASME, J. of Applied Mechanism, Jun. (1955).

4. おわりに

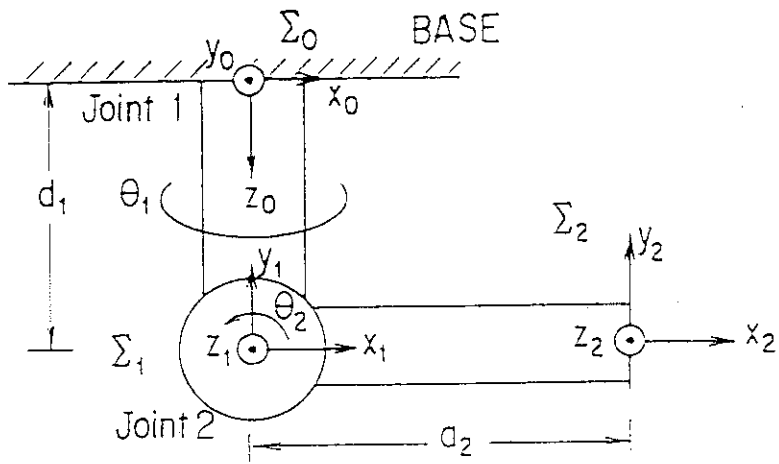
マニピュレータのもっとも基本構成とみられる2リンク機構の動的解析を実施した。解析方法は古典力学で周知の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから、Lagrangeの方程式を介して動特性式を引出すことが基礎となっている。与えた運動は単純であるが、関節を駆動するトルクが姿勢に依存して、慣性力、重力、求心力などその効果を見ることができた。今回の計算では関節速度や加速度を低く抑えていたので各物理量は大きく変化せず類似の動作を引出したが、運動を代えることにより異なる力学挙動が得られるであろう。とくに、今回行わなかったが、先端へ負荷をかけることにより各軸への力の作用する様相は、実験データとの比較が望ましいので次の報告とする。現在のモデルはリンク構成が単純なことから取扱いも容易であり、各関節の特性をかなり詳細に調査できる。そこで、この種の実験対象による生データと比較し、解析モデルの妥当性を検討することが急務である。

参考文献

- (1) R.P. Paul: "Robot Manipulators; Mathematics, Programming and Control", The MIT Press (1981).
- (2) M.Vukobratovic et al.: "Dynamics of Manipulation Robots / Theory and Application", Springer-Verlag (1982).
- (3) P. Coiffet : "Robot Technology; Modelling and Control", vol.1, Englewood Cliffs, Prentice-Hall (1983).
- (4) W.E. Snyder : "Industrial Robots", Prentice-Hall (1985).
- (5) 佐々木 : "Lagrangeの力学に基づくマニピュレータ動特性方程式の完全な記述", JAERI-M 89-121, Aug. (1989).
- (6) J.Denavit & Hartenberg : " A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanism Based on Matrices", Trans. ASME, J. of Applied Mechanism, Jun. (1955).



(a) Kinematic structure



(b) Link co-ordinates systems

Fig. 1 A simple linkage mechanism to be studied

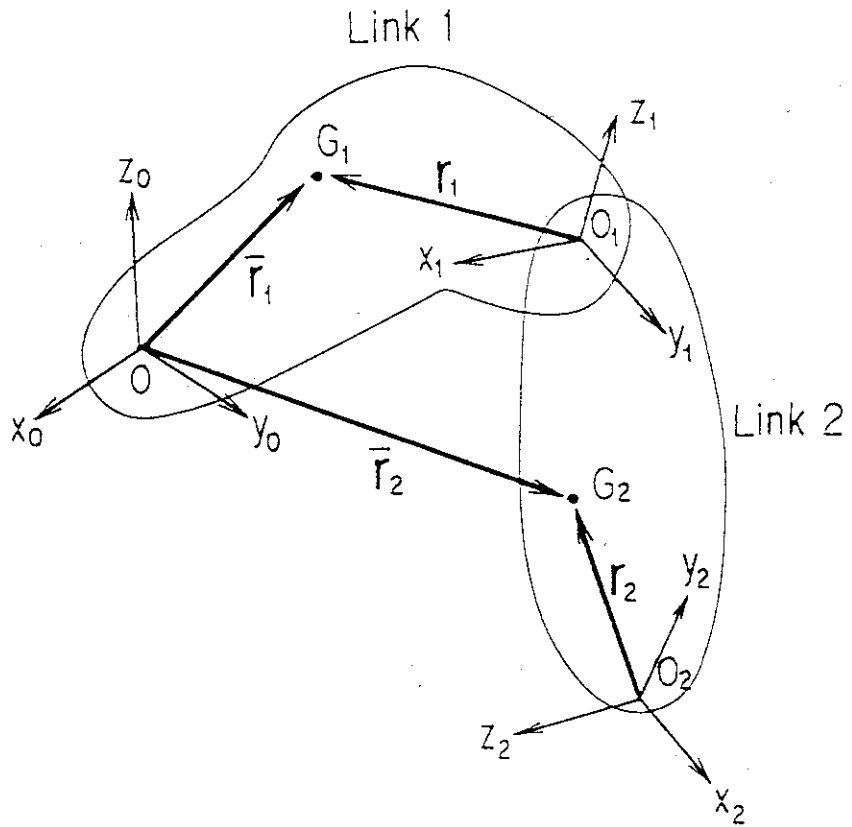


Fig. 2 Vector representation at the center of gravity of each link

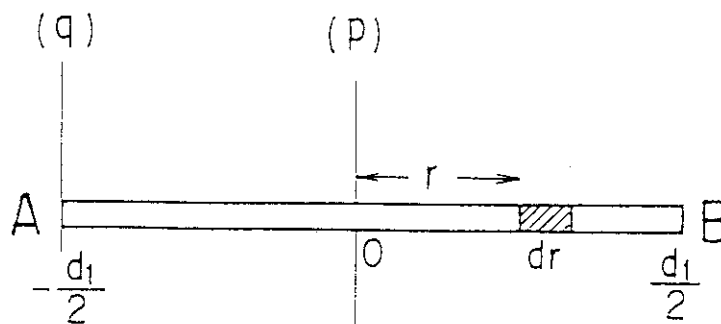


Fig. 3 Calculation of moment of inertia of each link

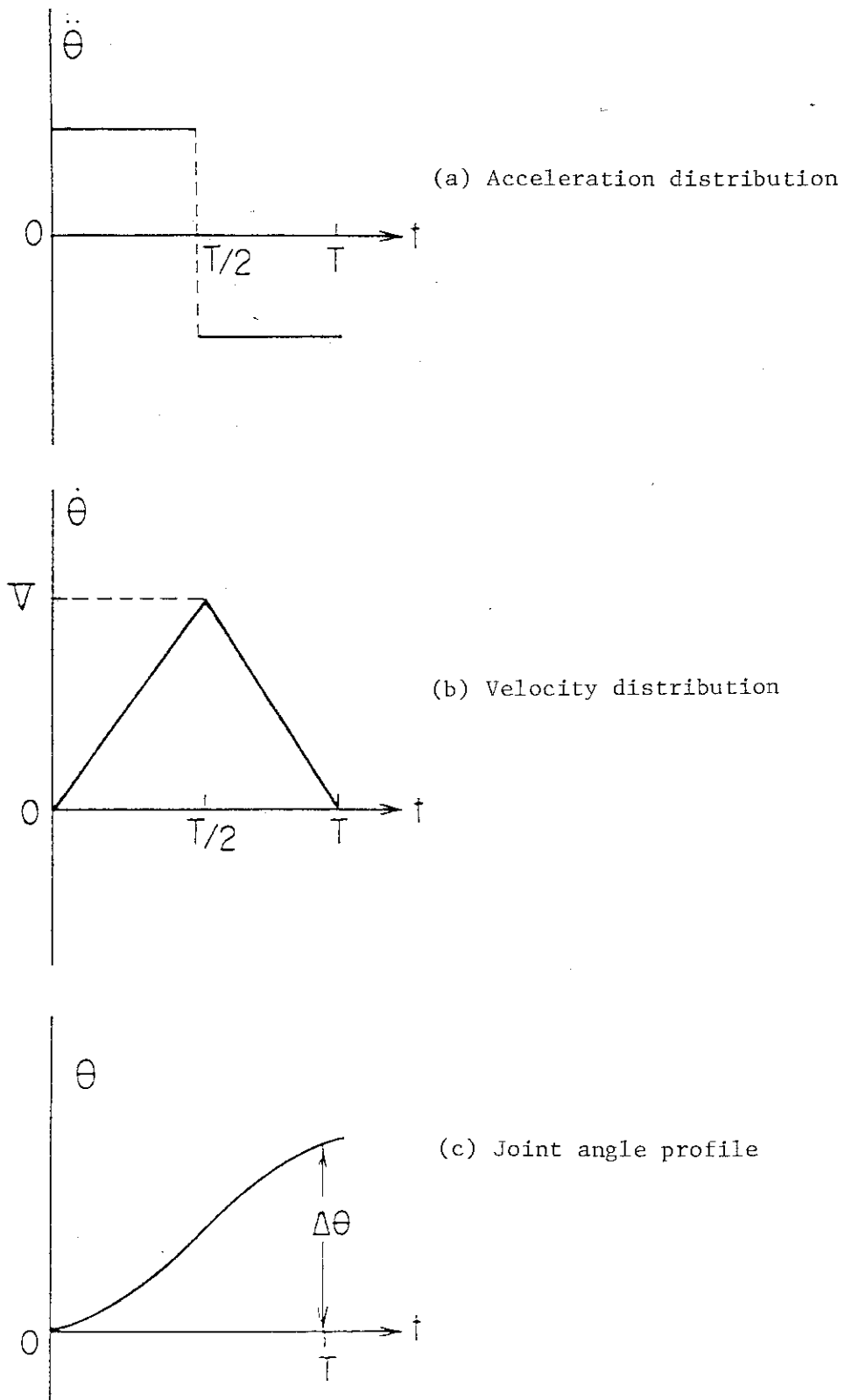


Fig. 4 Distribution of velocity and acceleration of joint angle

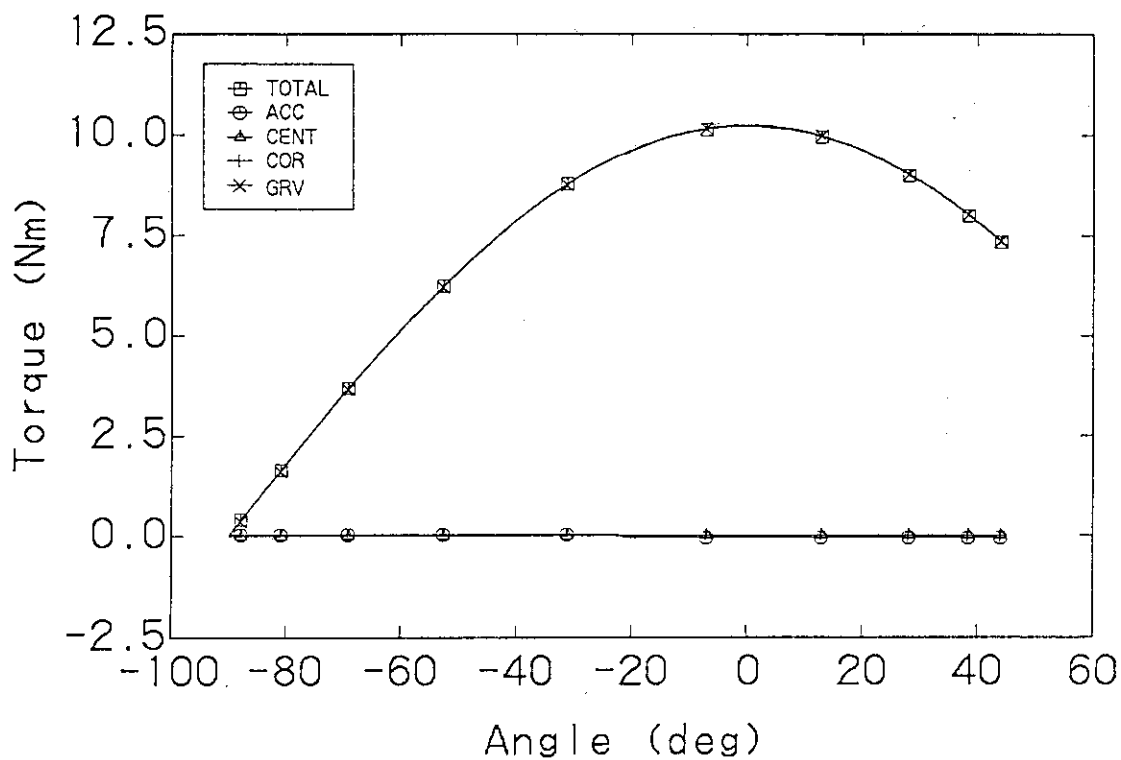


Fig. 5 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_2 with $\theta_1=0(\text{deg})$ fixed

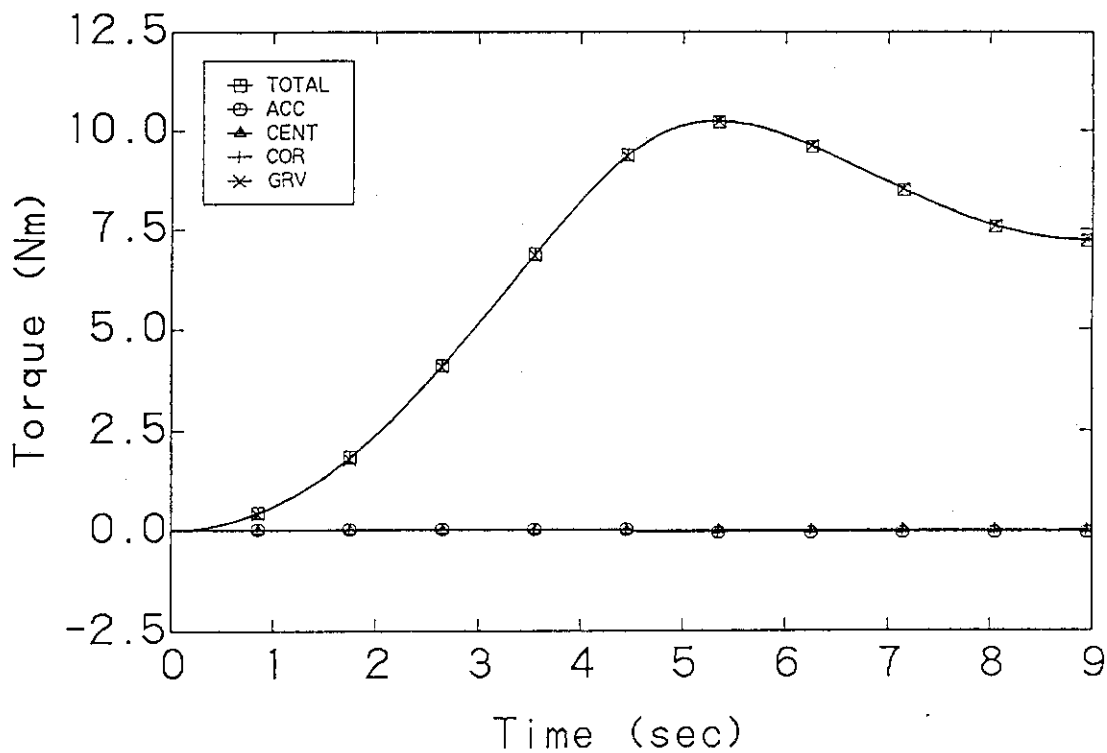


Fig. 6 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_1=0(\text{deg})$ fixed

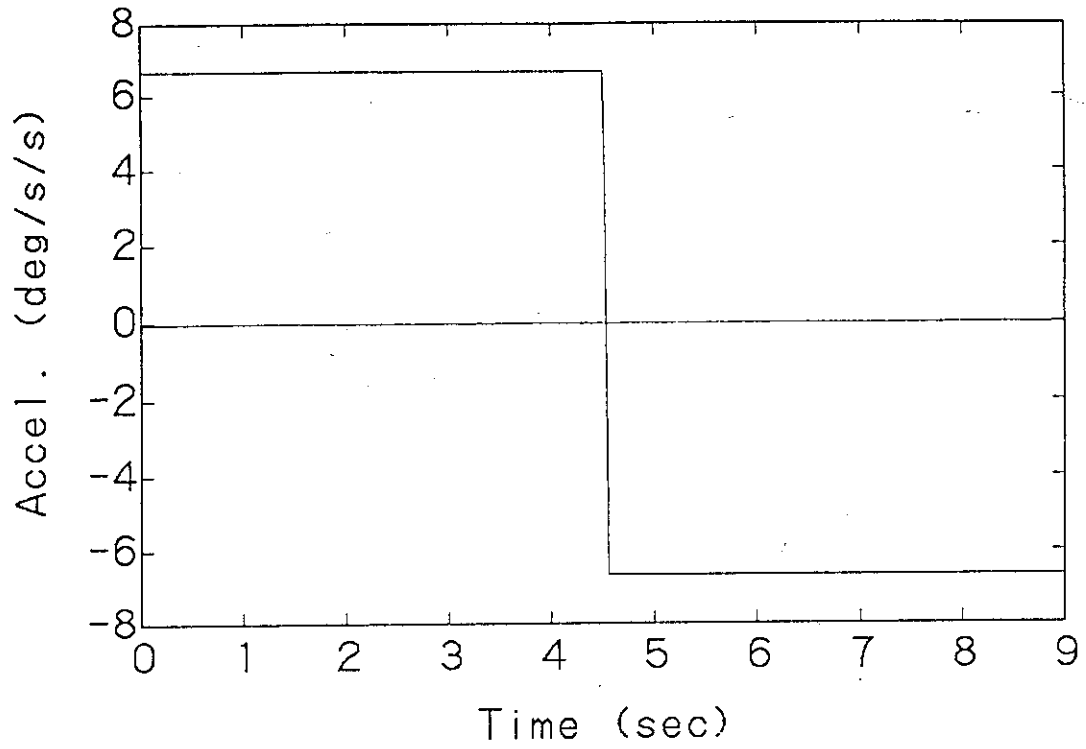


Fig. 7 Time dependent behavior of joint angle θ_2

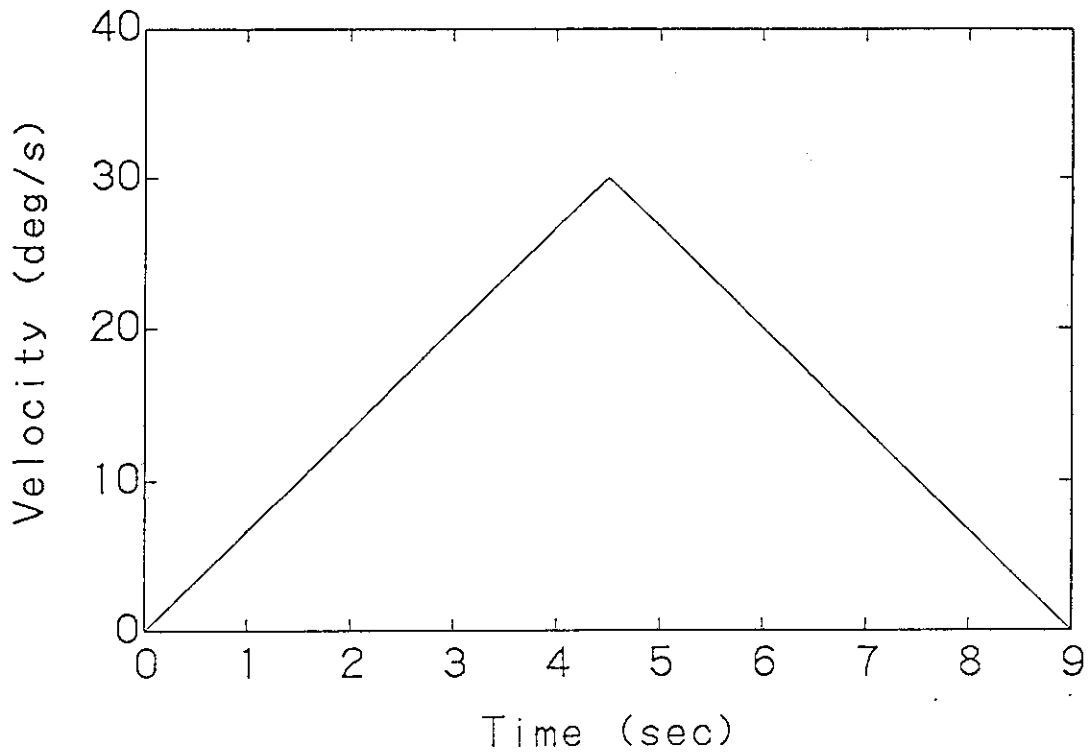


Fig. 8 Acceleration behavior of joint angle θ_2

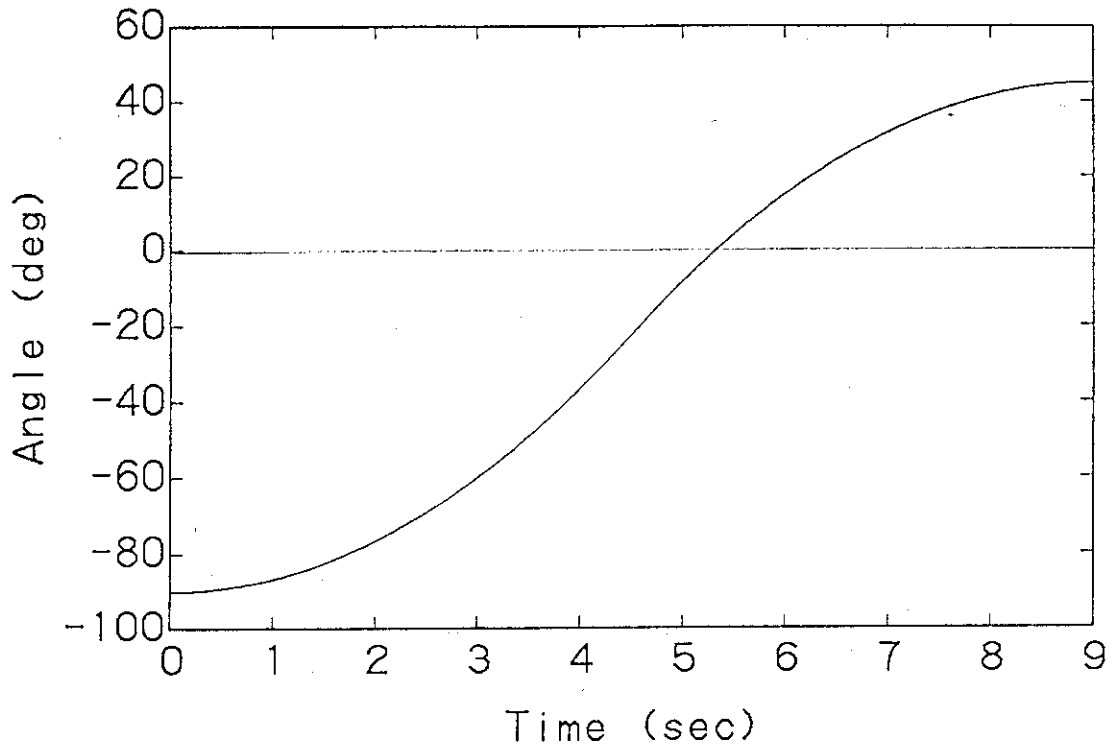


Fig. 9 Velocity behavior of joint angle θ_2

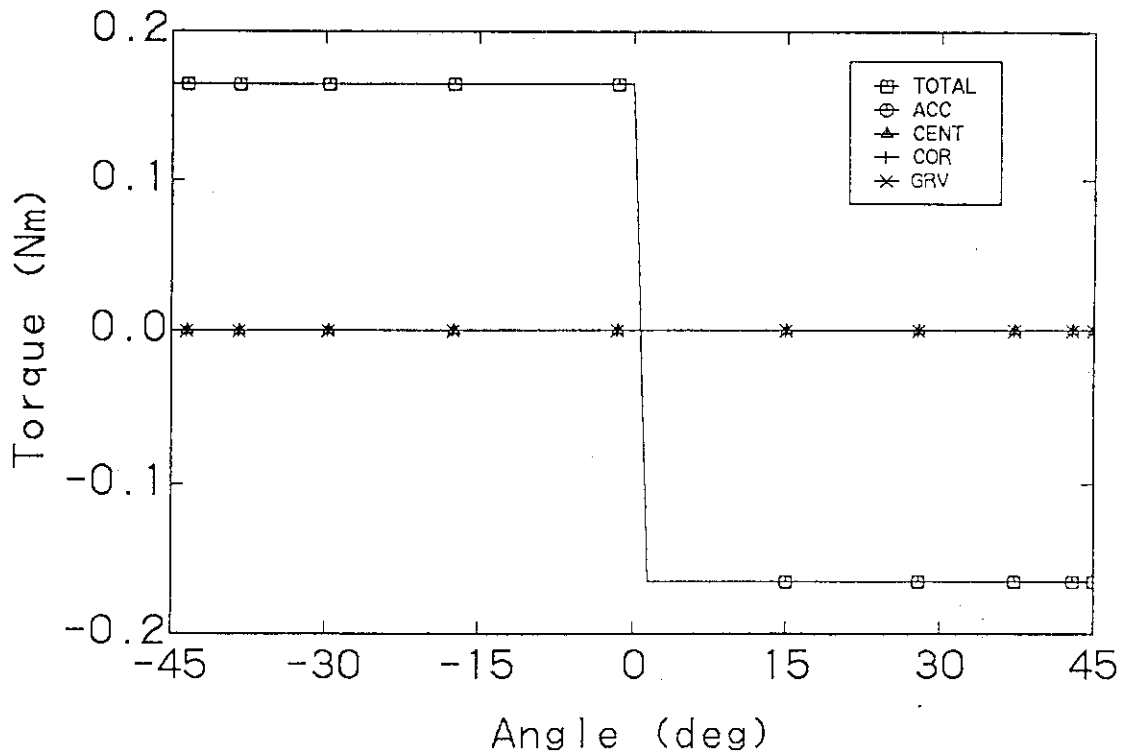


Fig. 10 Calculated torque τ_1 corresponding to variable angle θ_1 with $\theta_2 = -90$ (deg) fixed

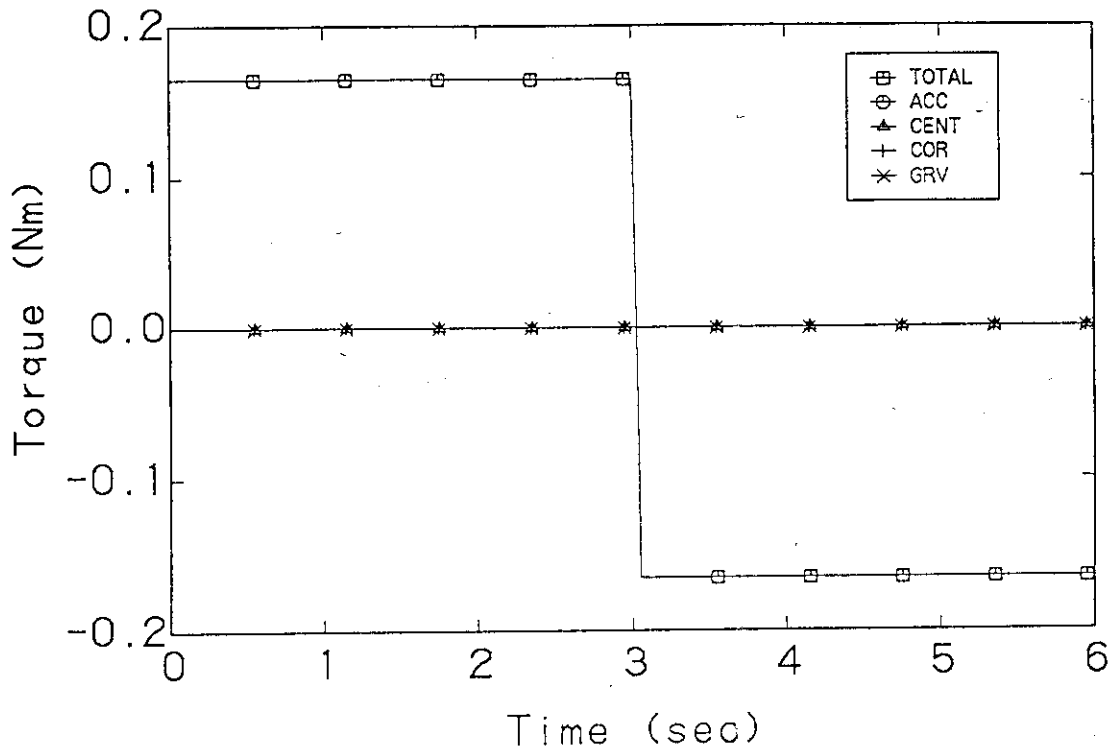


Fig. 11 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=-90(\text{deg})$ fixed

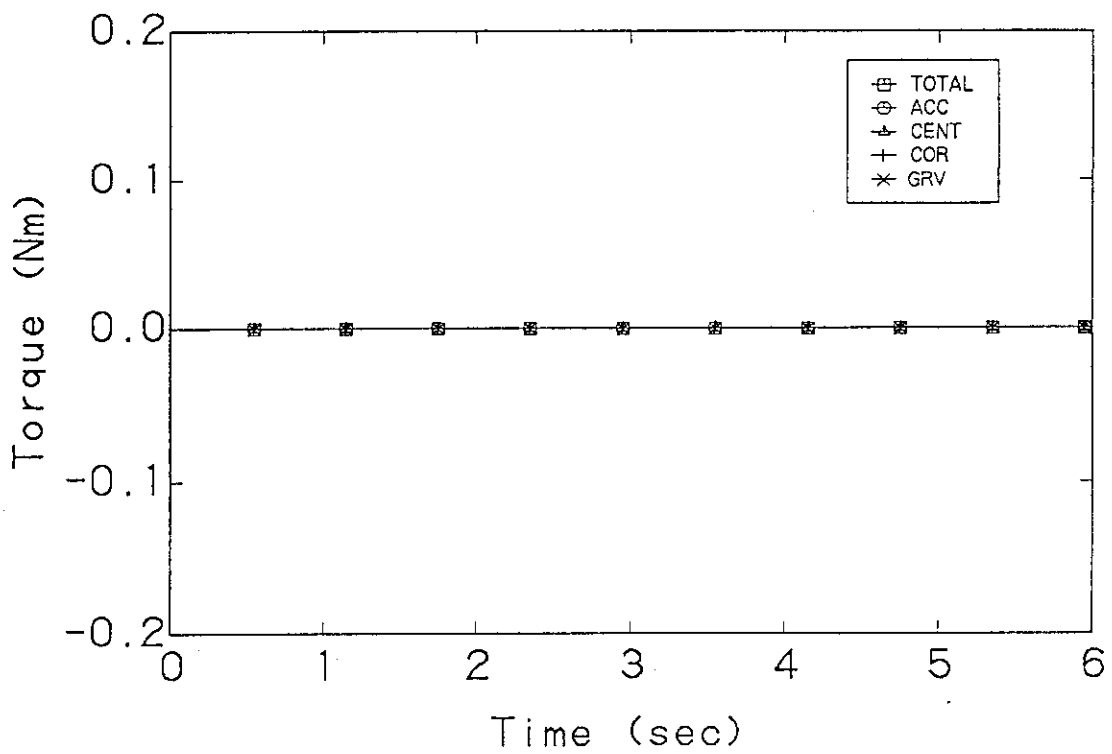


Fig. 12 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=-90(\text{deg})$ fixed

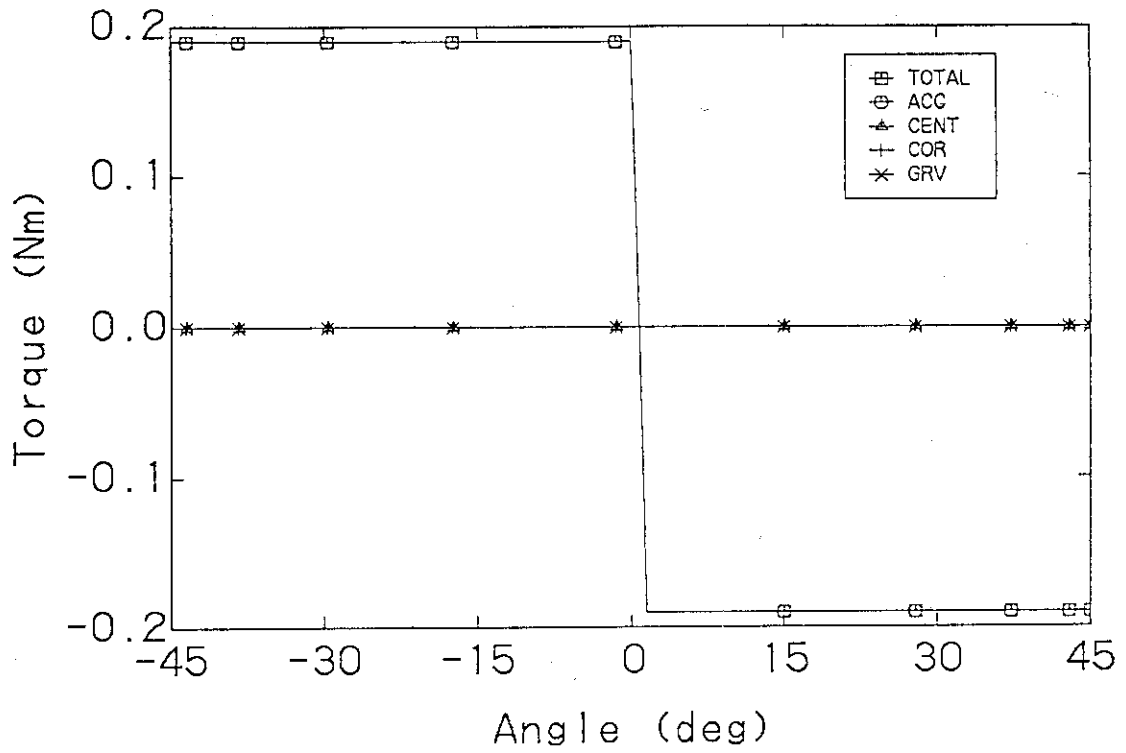


Fig. 13 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1 with $\theta_2=-45(\text{deg})$ fixed

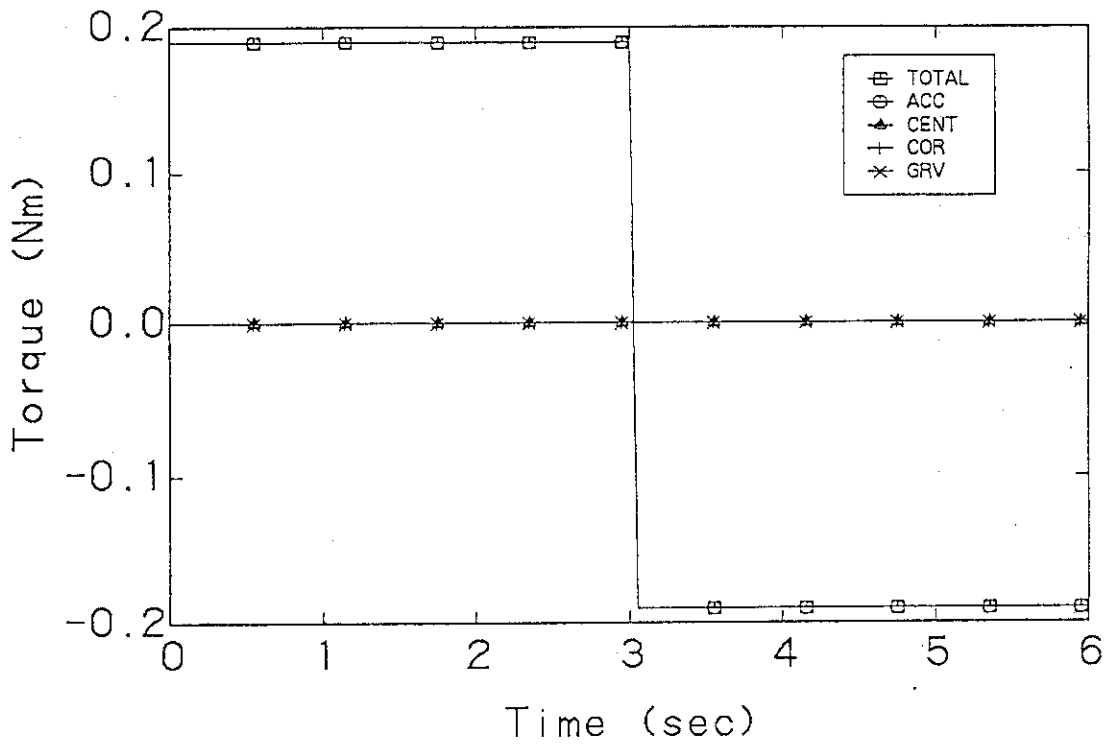


Fig. 14 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=-45(\text{deg})$ fixed

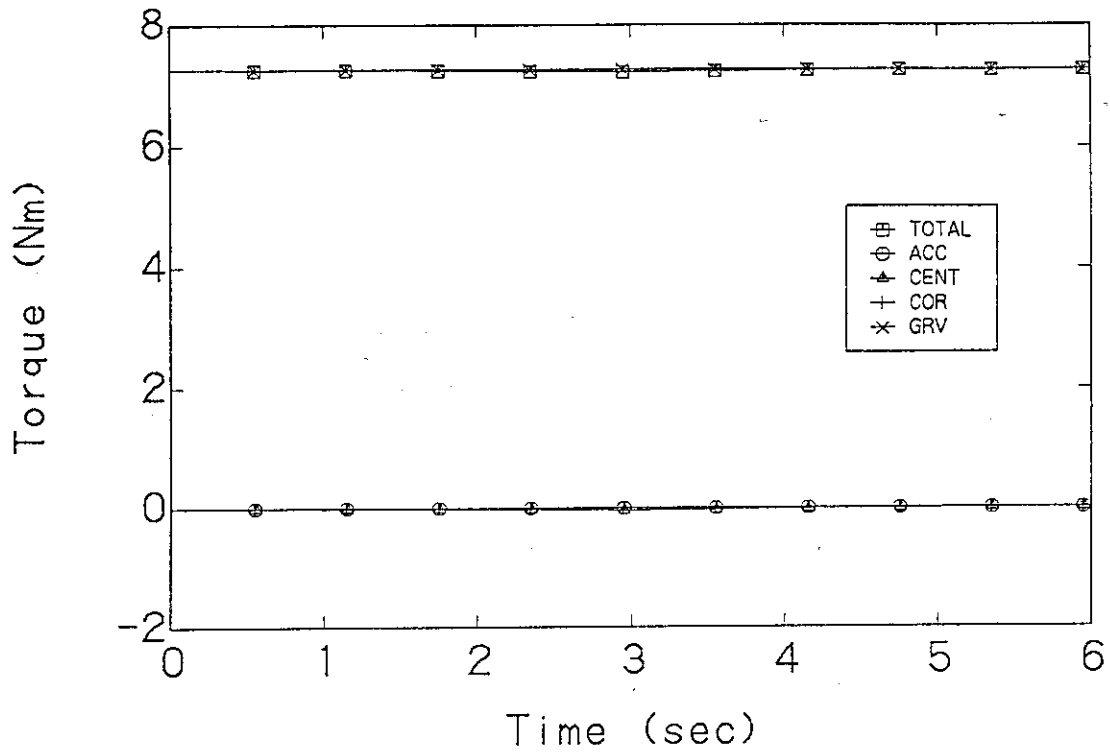


Fig. 15 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_2=-45(\text{deg})$ fixed

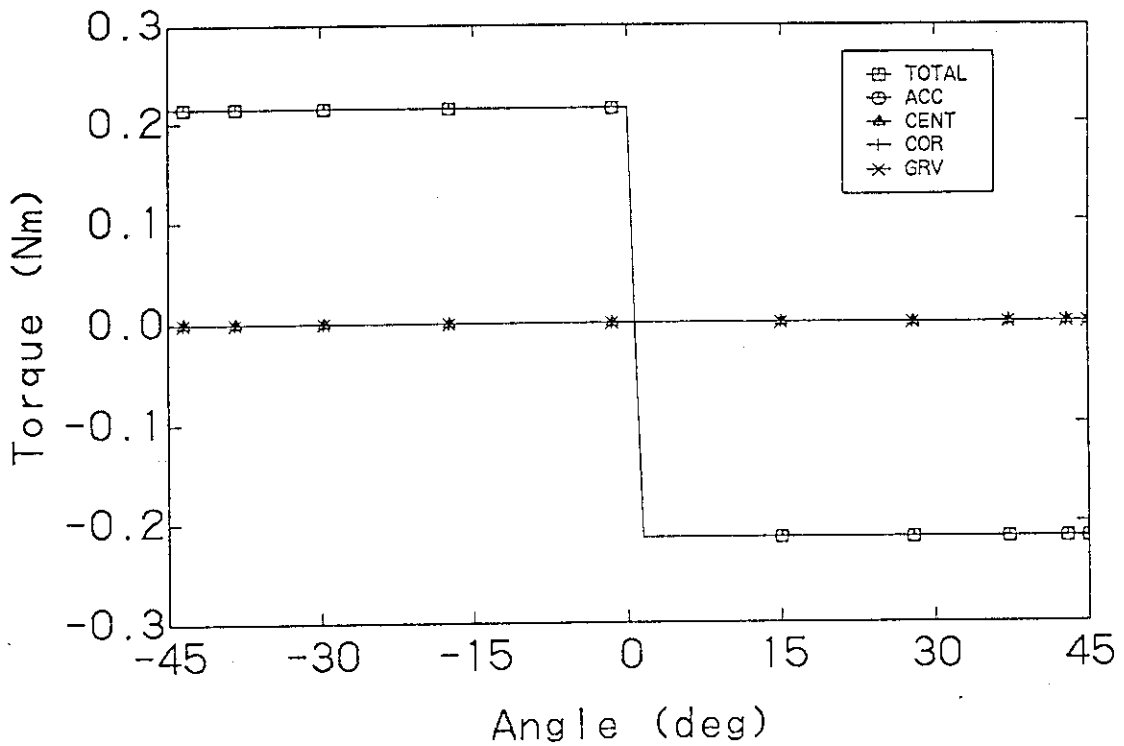


Fig. 16 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1 with $\theta_2=0(\text{deg})$ fixed

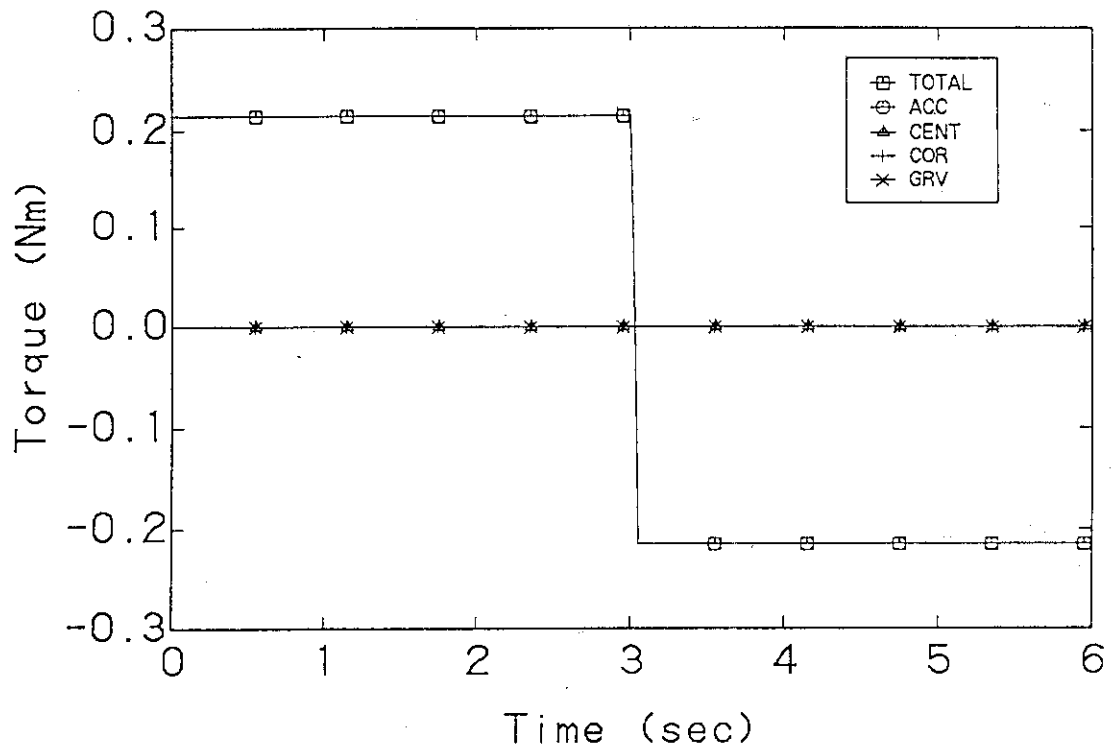


Fig. 17 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=0(\text{deg})$ fixed

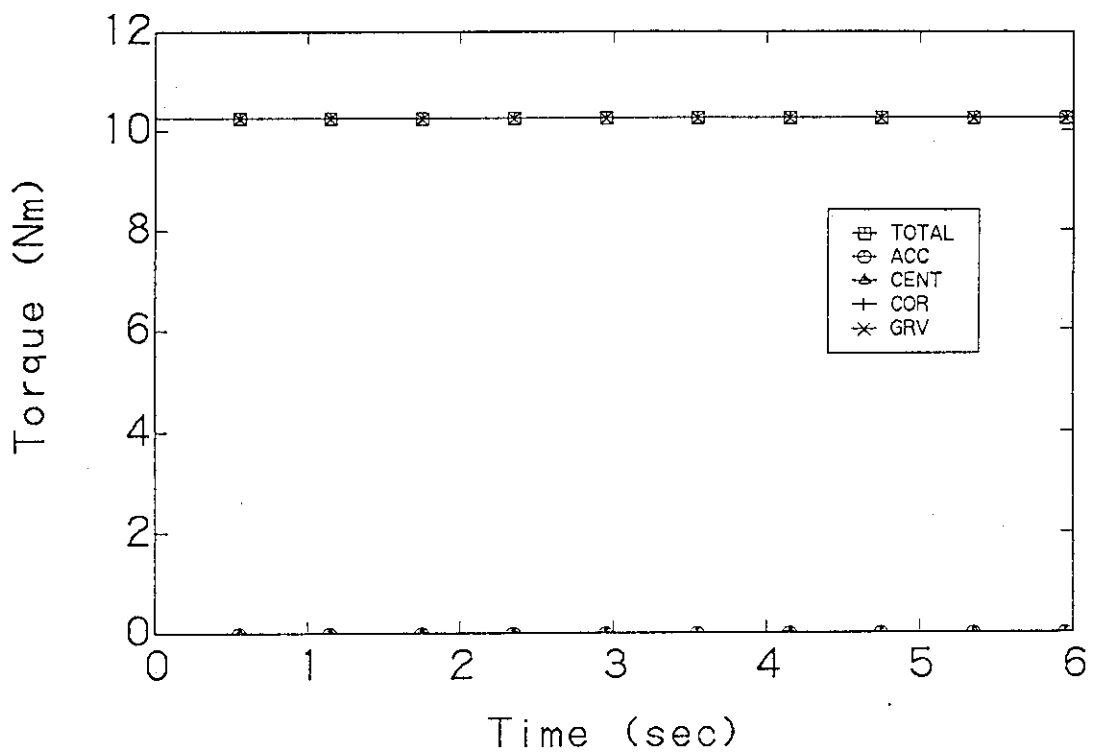


Fig. 18 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_2=0(\text{deg})$ fixed

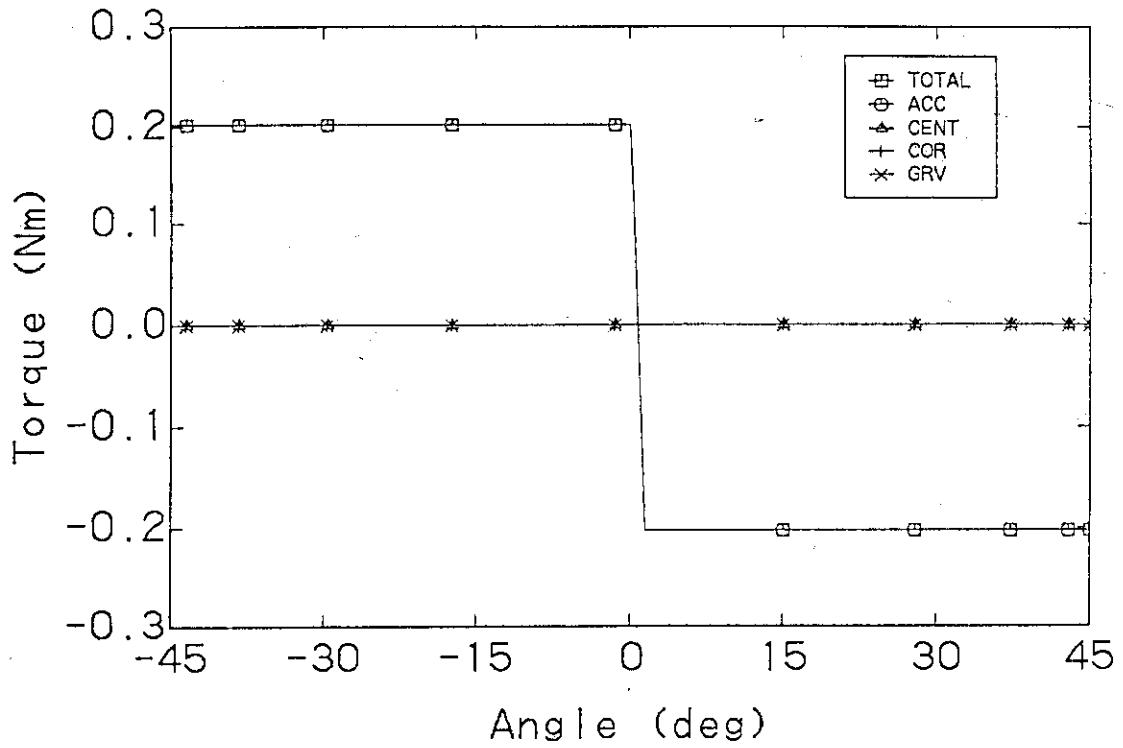


Fig. 19 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1 with $\theta_2=30(\text{deg})$ fixed

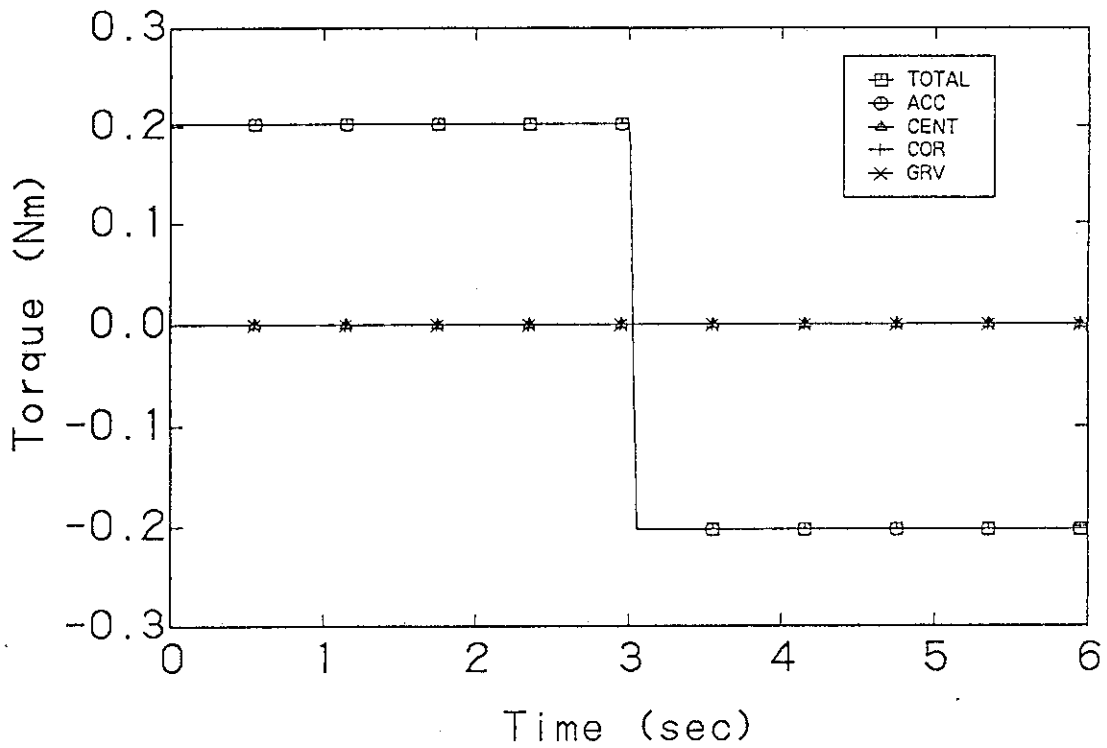


Fig. 20 Time dependent behavior of calculated torque τ_1 with $\theta_2=30(\text{deg})$ fixed

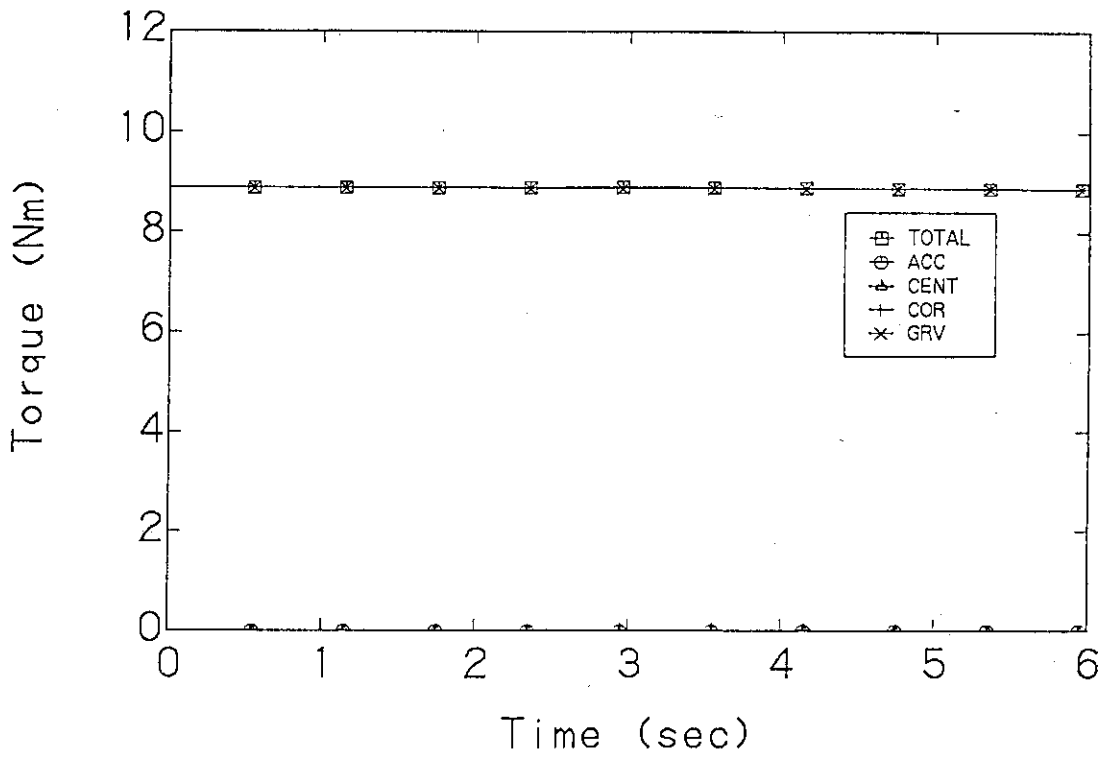


Fig. 21 Time dependent behavior of calculated torque τ_2 with $\theta_2=30$ (deg) fixed

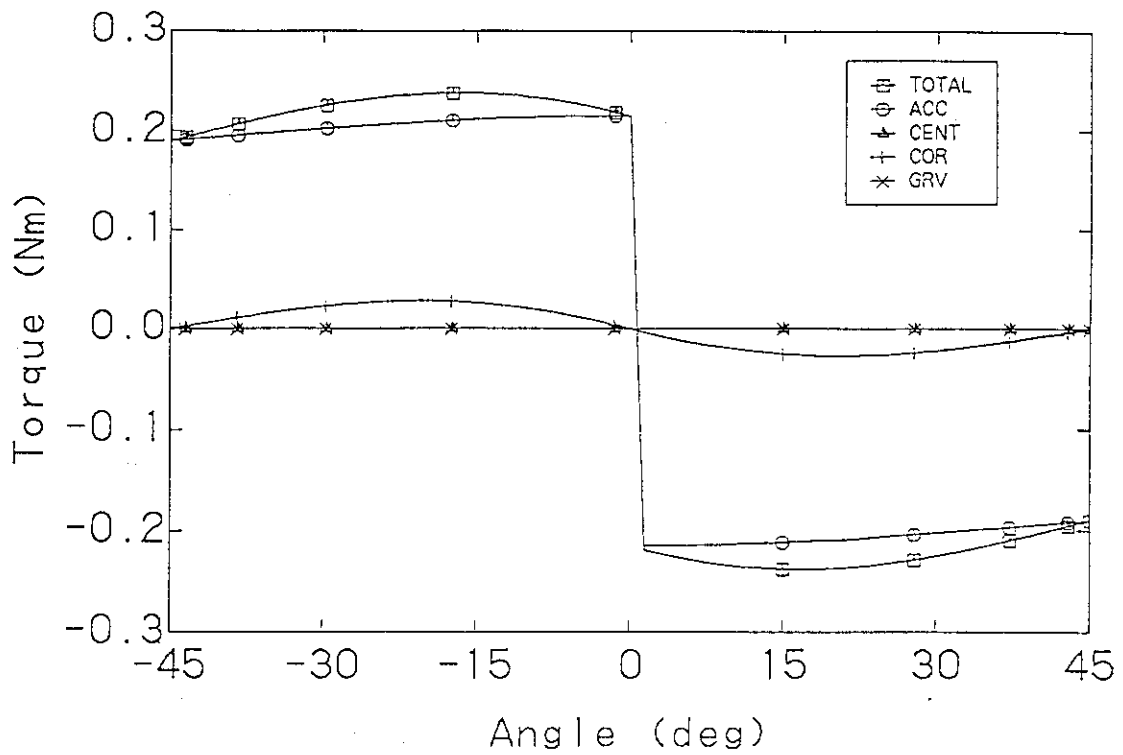


Fig. 22 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1

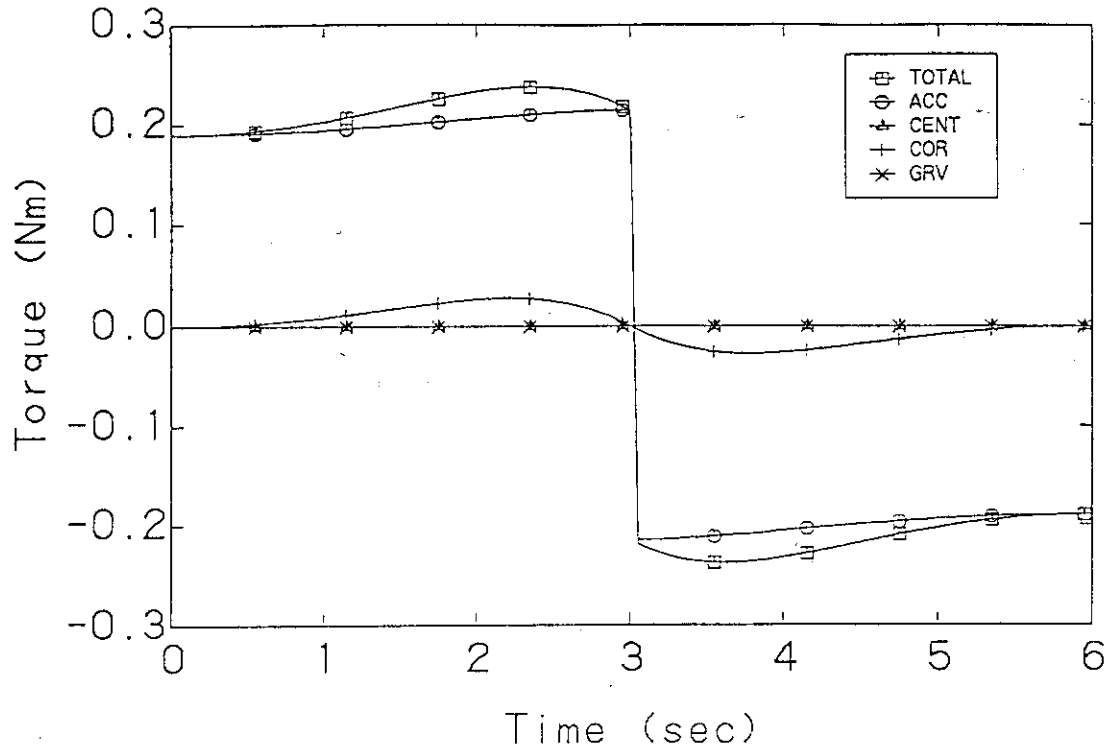


Fig. 23 Time dependent behavior of calculated torque τ_1

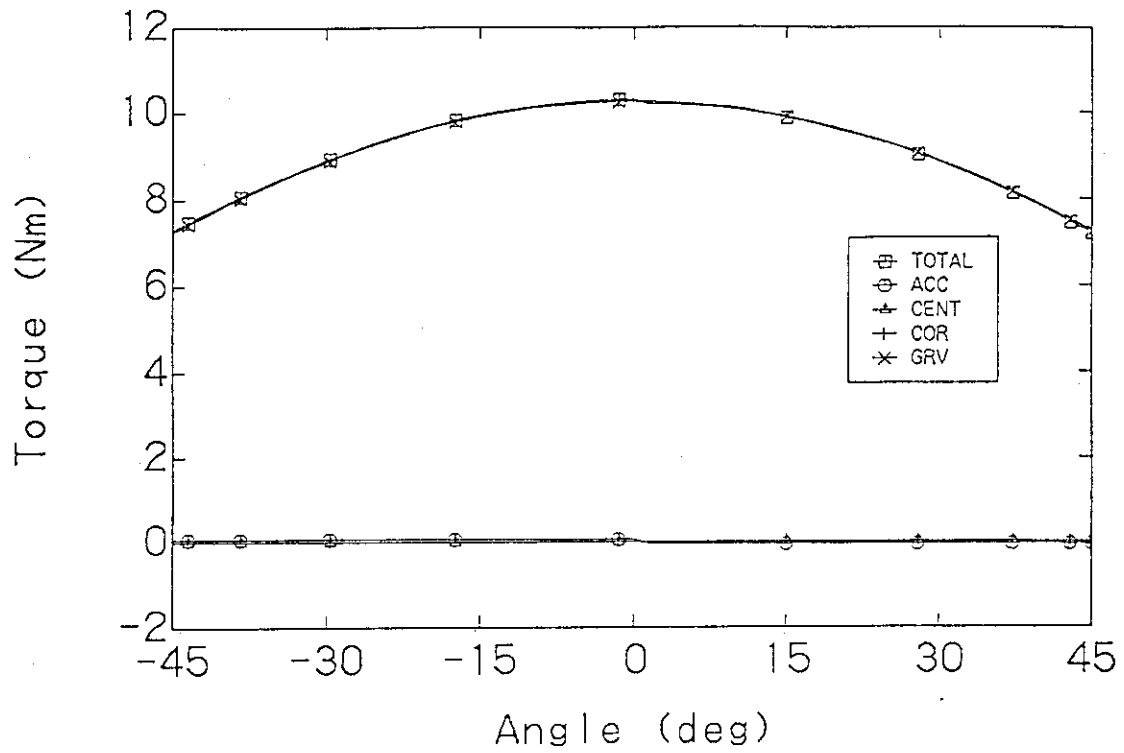


Fig. 24 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_1

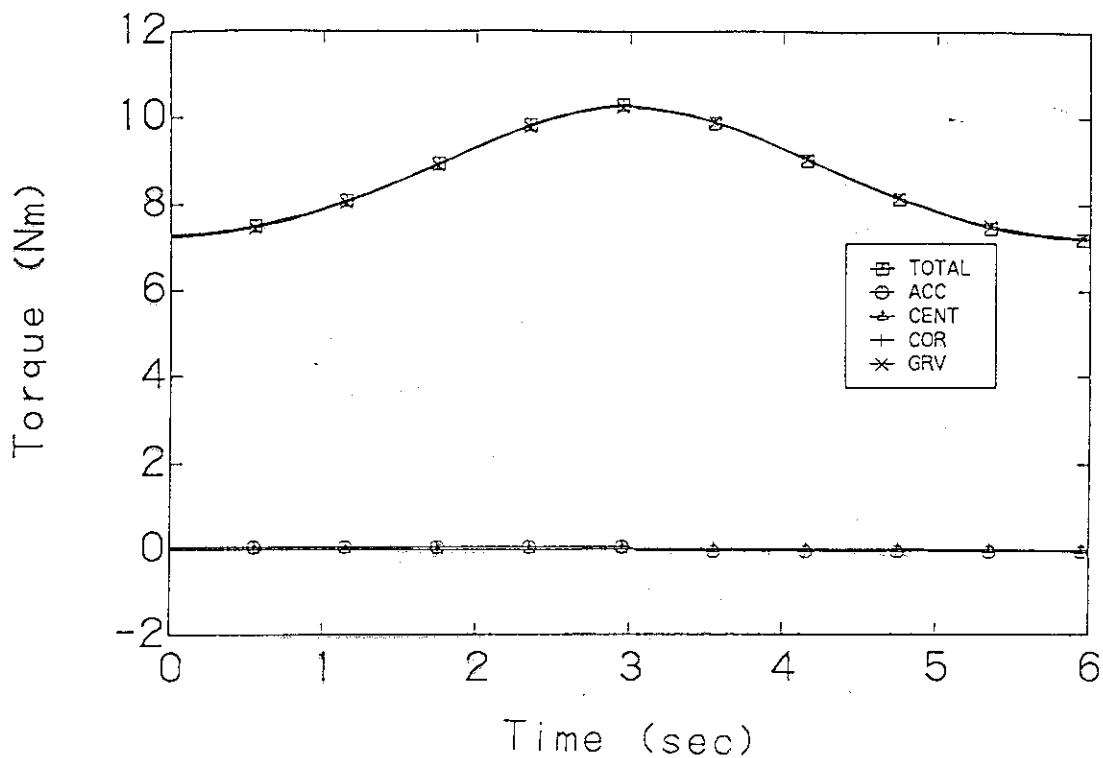


Fig. 25 Time dependent behavior of calculated torque τ_2

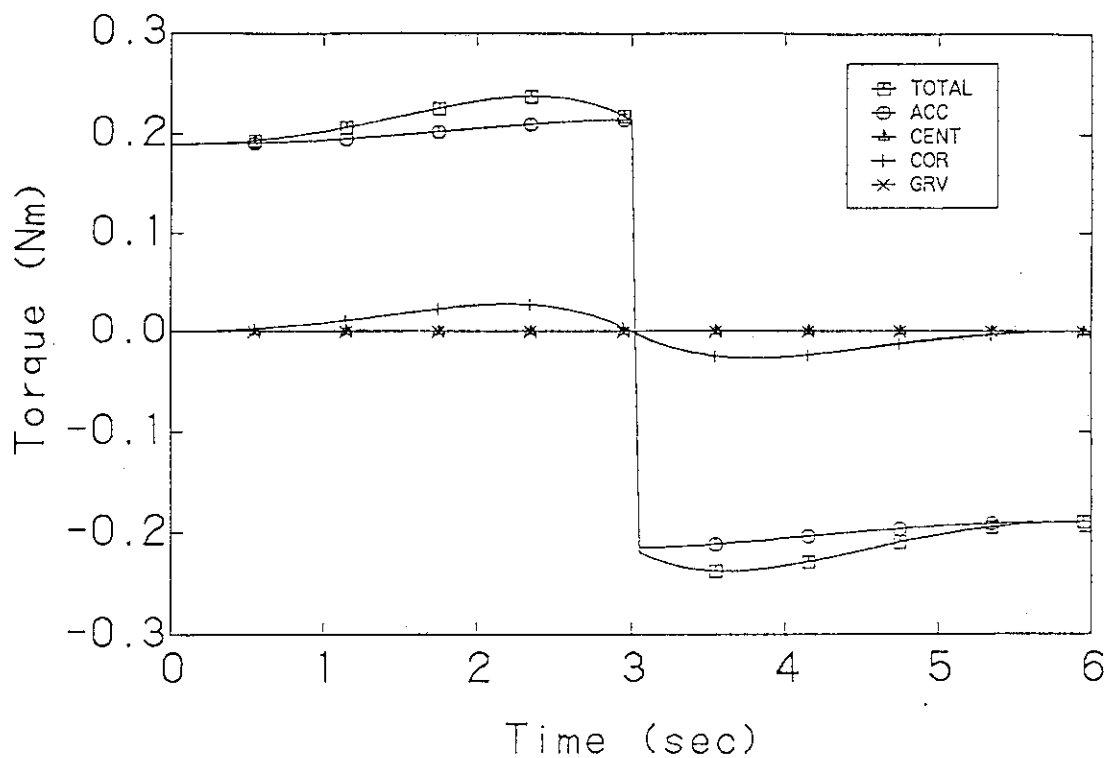


Fig. 26 Time dependent behavior of calculated torque τ_1

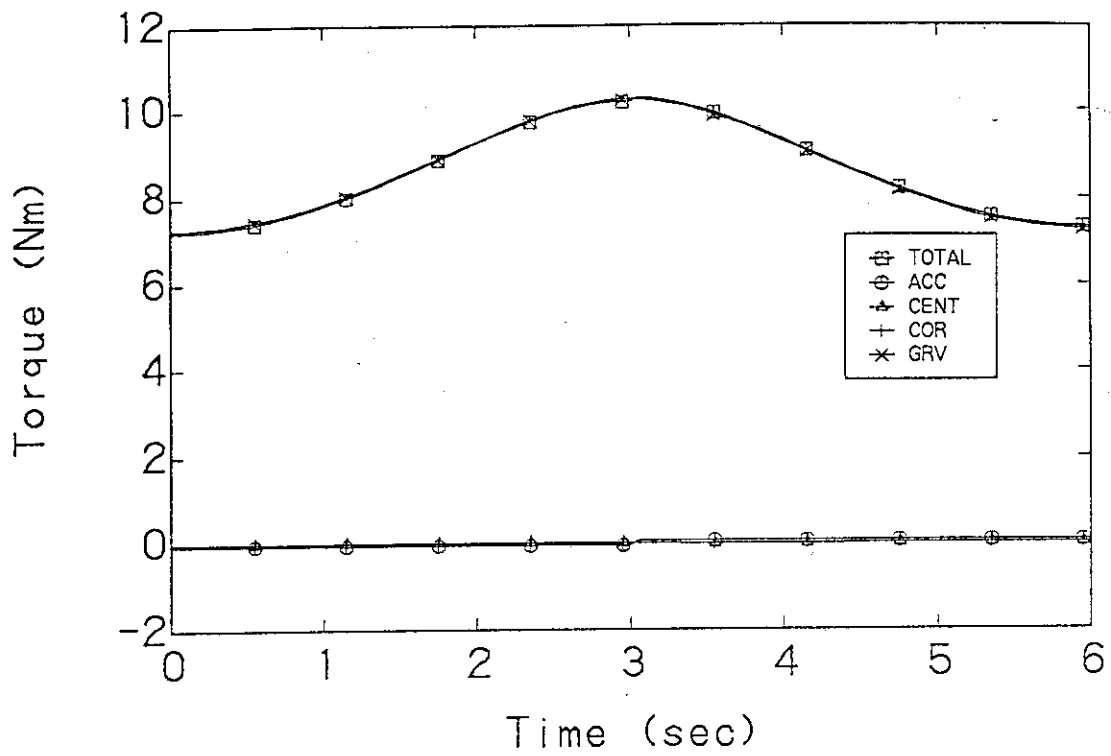


Fig. 27 Time dependent behavior of calculated torque τ_2

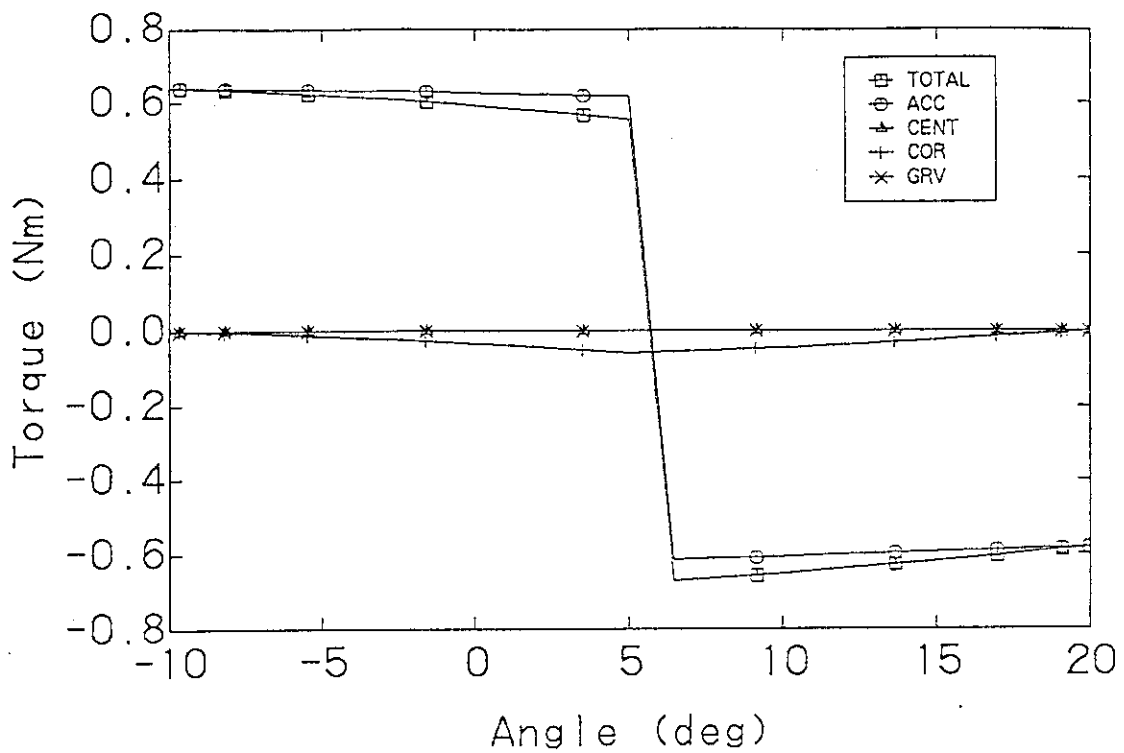


Fig. 28 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1

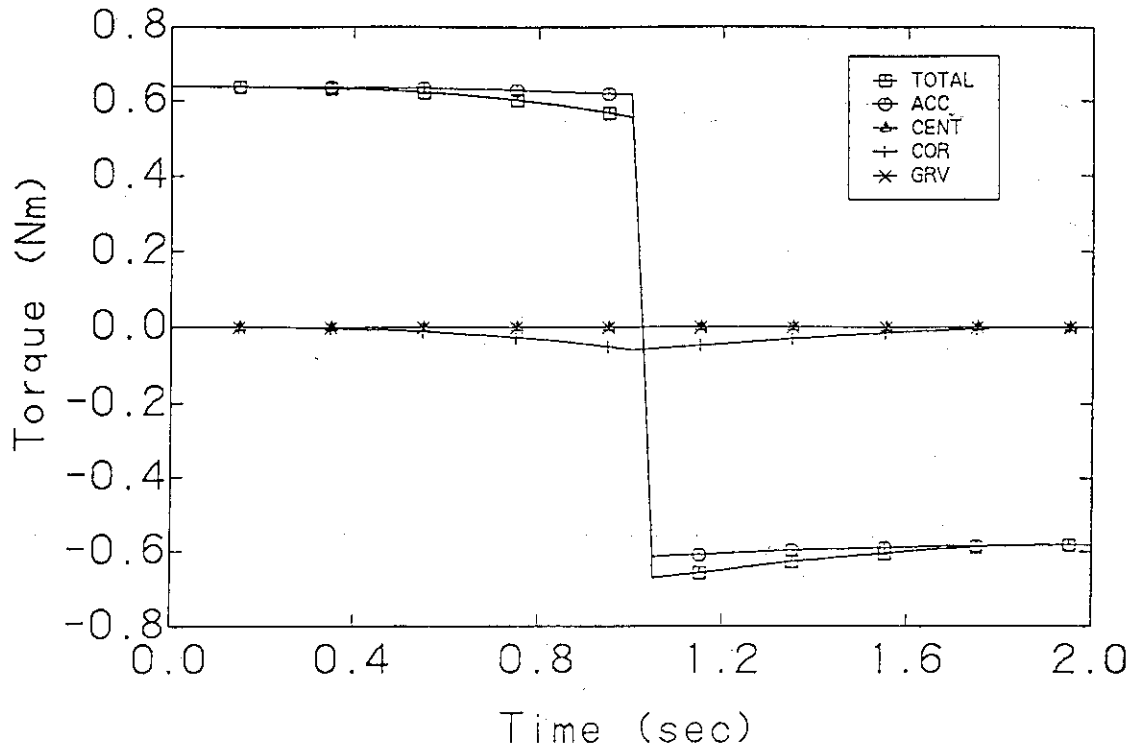


Fig. 29 Time dependent behavior of calculated torque τ_1

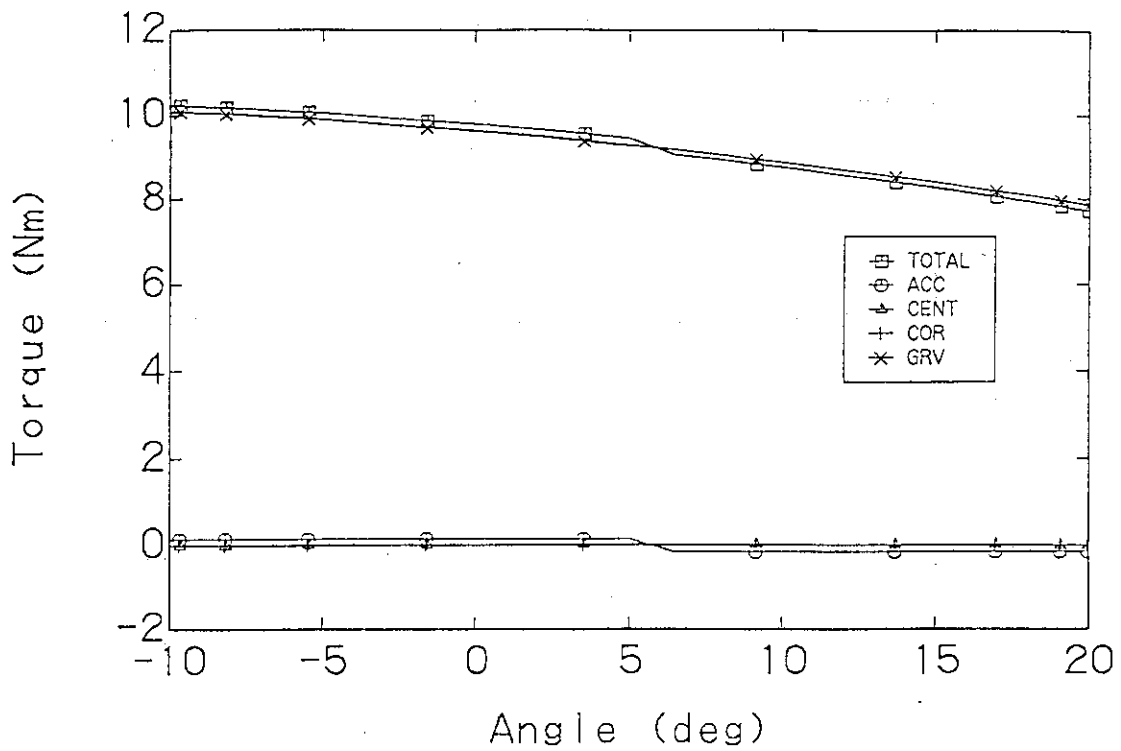


Fig. 30 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_1

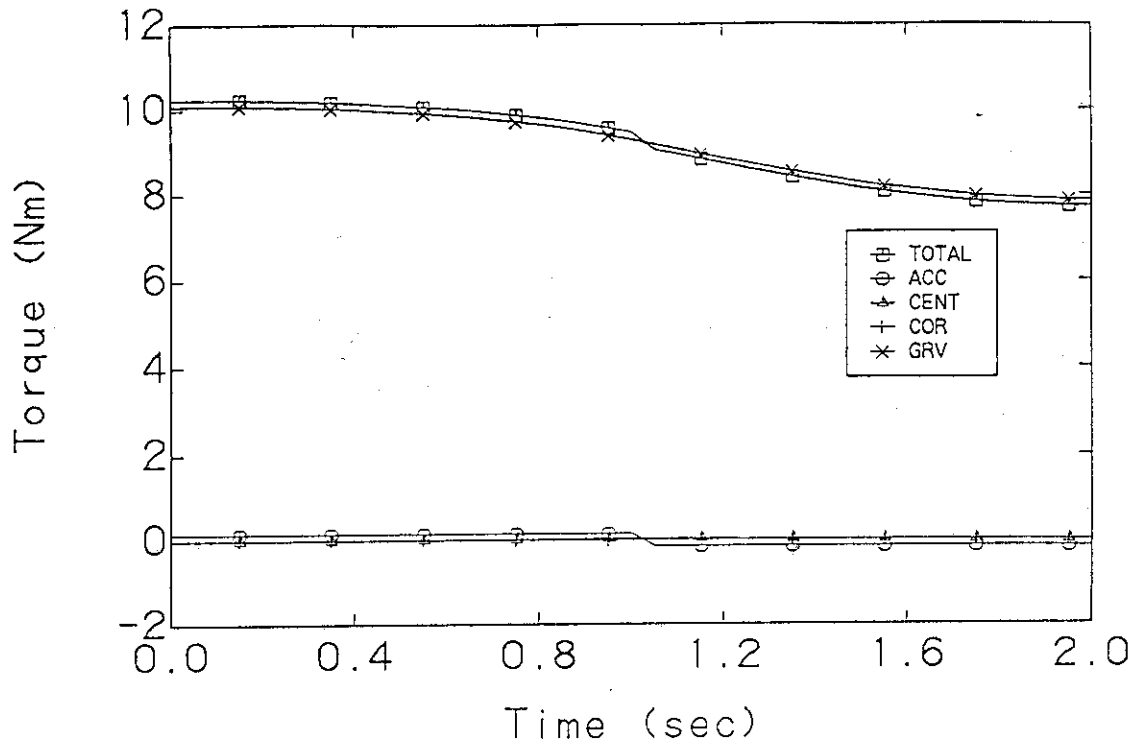


Fig. 31 Time dependent behavior of calculated torque τ_2

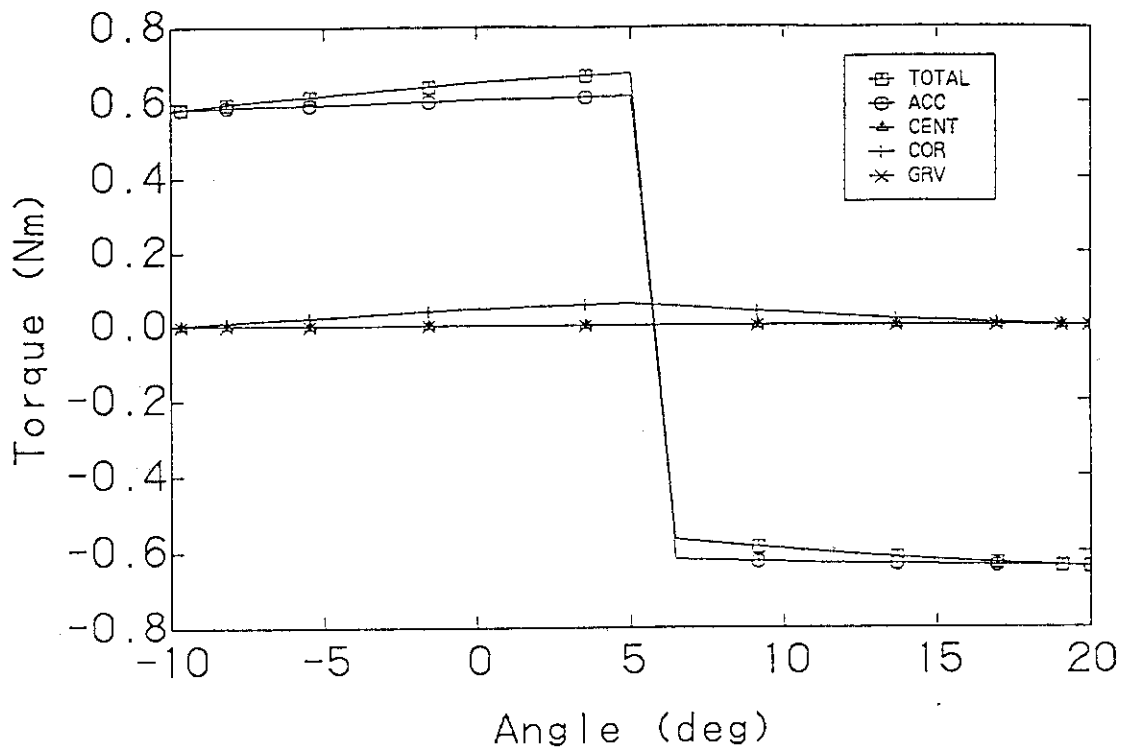


Fig. 32 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1

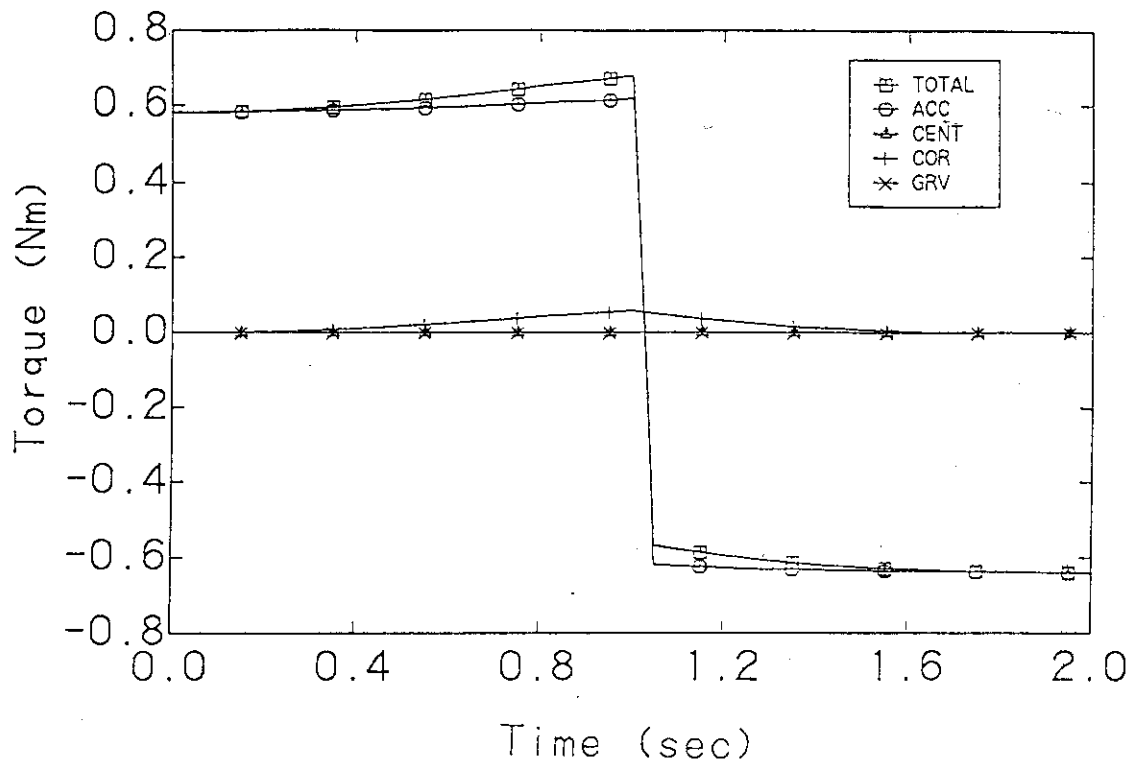


Fig. 33 Time dependent behavior of calculated torque τ_1

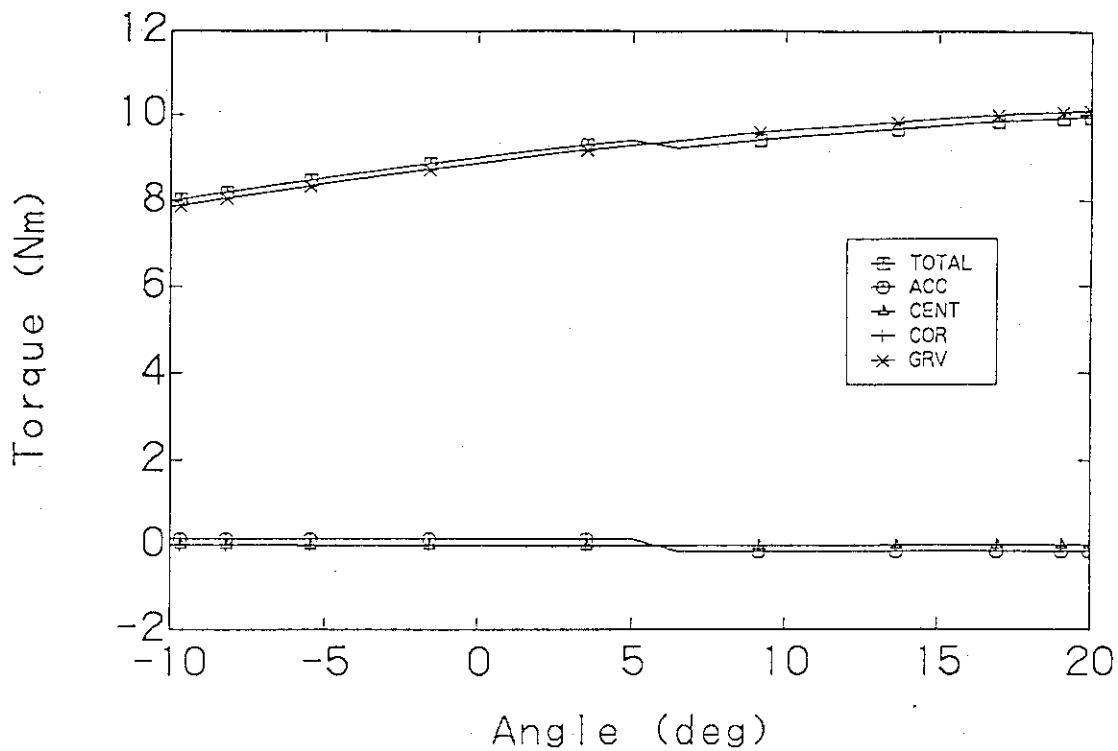


Fig. 34 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_1

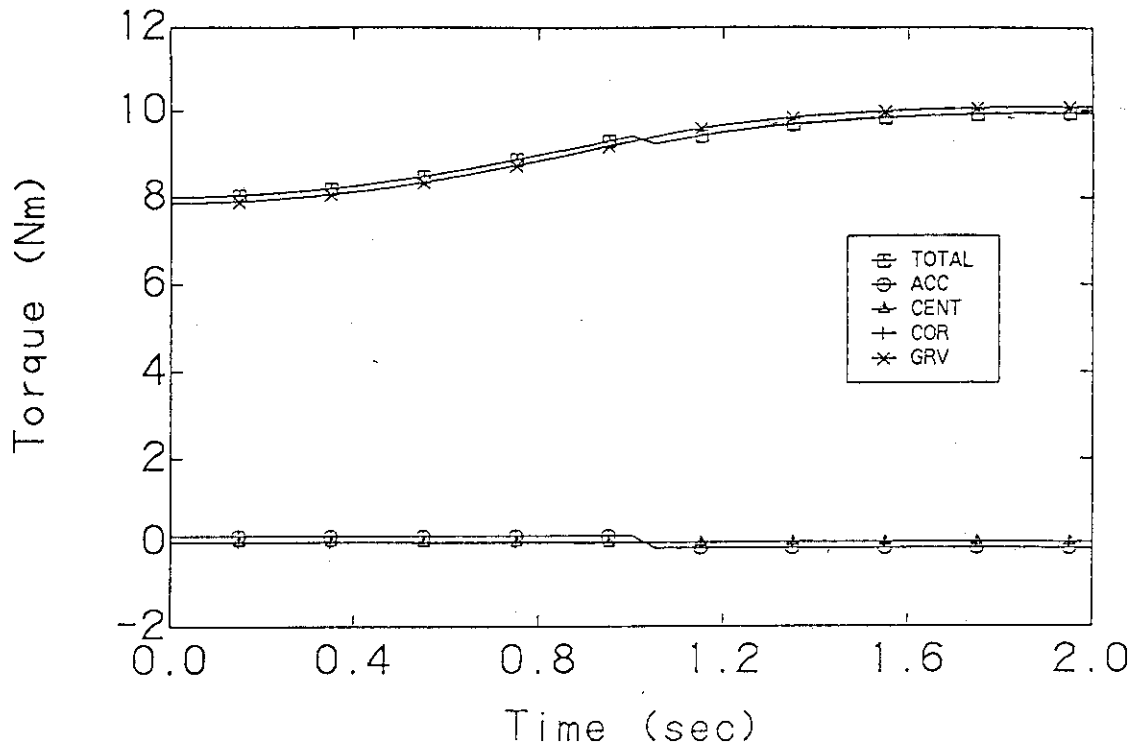


Fig. 35 Time dependent behavior of calculated torque τ_2

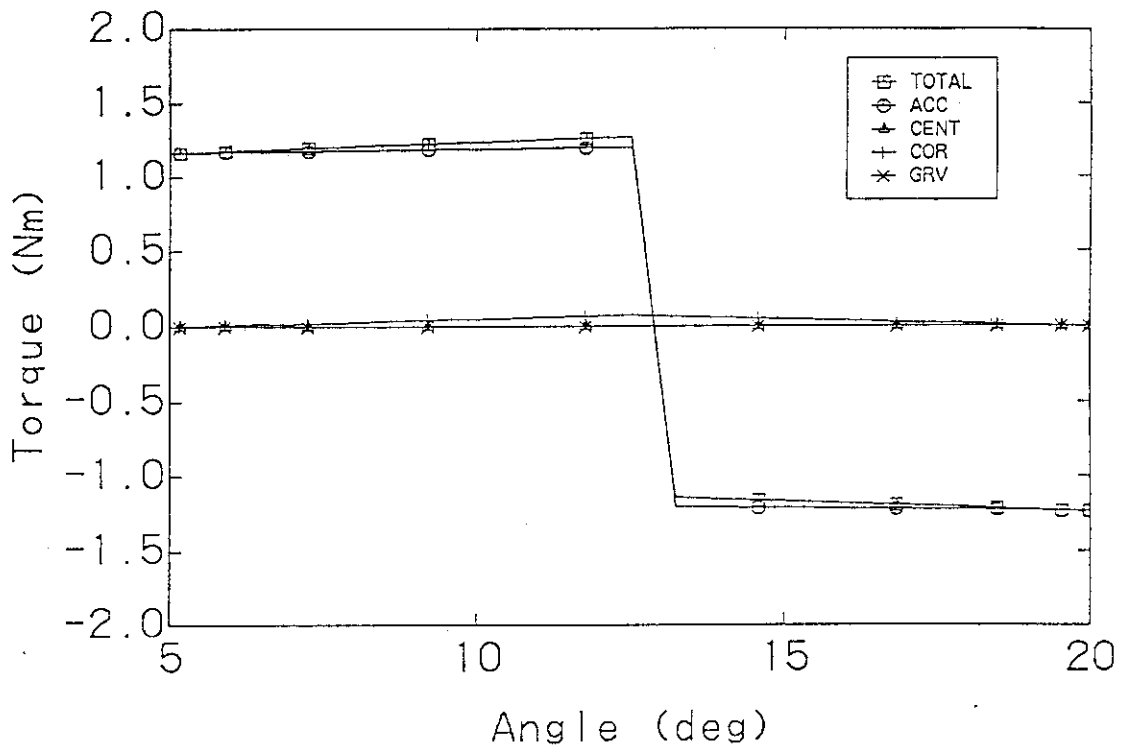


Fig. 36 Calculated torque τ_1 corresponding to variable joint angle θ_1

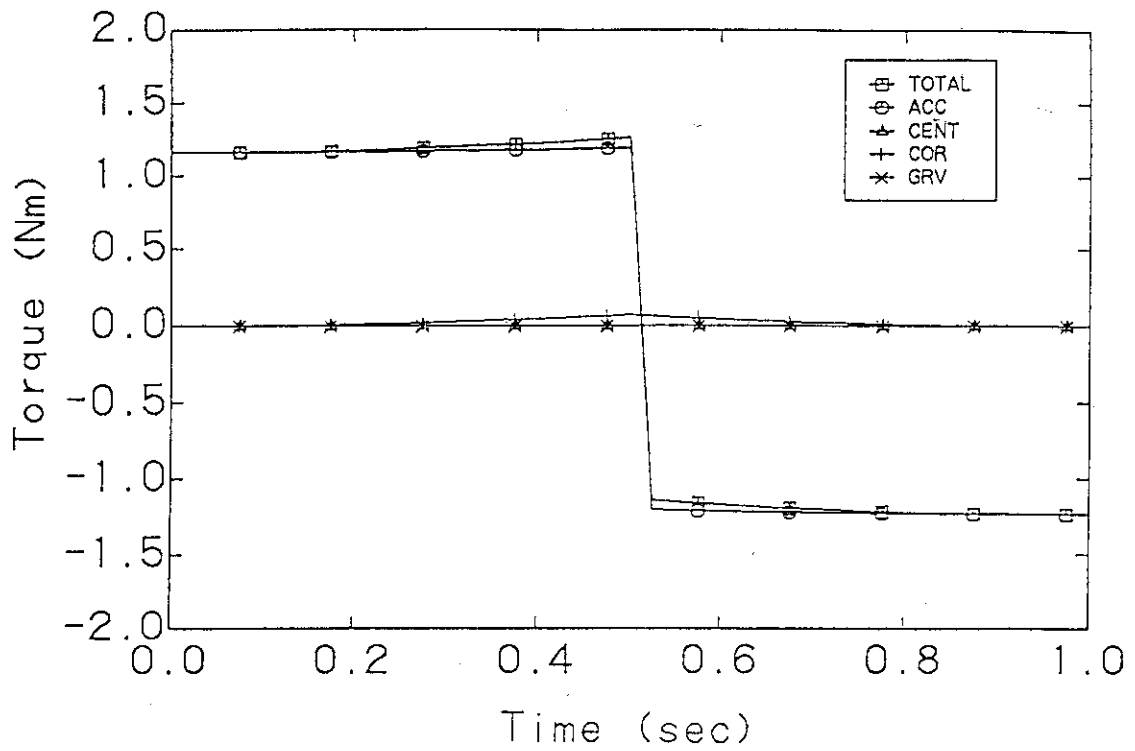


Fig. 37 Time dependent behavior of calculated torque τ_1

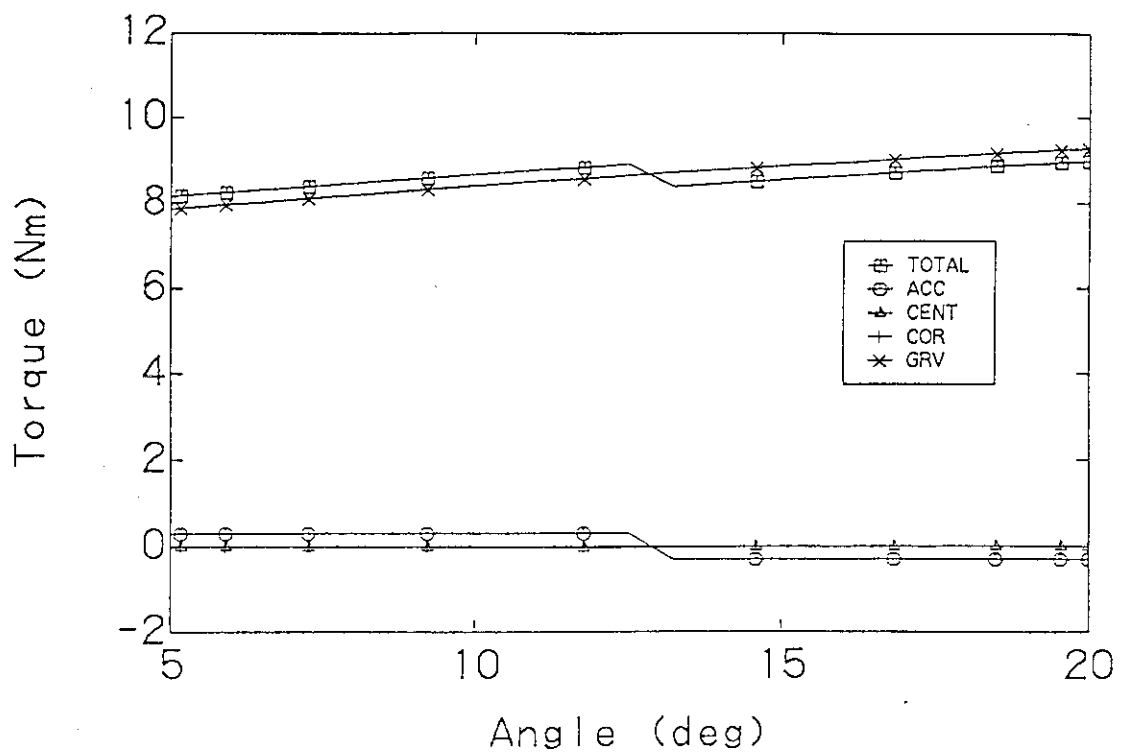


Fig. 38 Calculated torque τ_2 corresponding to variable joint angle θ_1