

JAERI-M
8975

キルク型不安定性の粒子運動学的理論

1980年7月

伊藤 公孝・井上 早苗*

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

キンク型不安定性の粒子運動学的理論

日本原子力研究所東海研究所核融合研究部

伊藤 公孝・井上 早苗*

(1980年7月1日受理)

粒子運動学的理論に基づき、高温円柱トカマクプラズマのキンク型モードの安定性が解析された。

無衝突近似の範囲で、ドリフト・テアリングモードの安定性が重点的に調べられた。その結果、1) プラズマ密度が低い時には不安定であるが、密度が増すにつれて安定化される、2) ポロイダルモード数 m の大きなモードの成長率は小さい、3) 電子温度勾配は安定化効果を持つ、ことが判明した。さらに、電子衝突を考慮すると安定領域が広がる。磁気シンアーと有限ベータ効果の寄与により、テアリングモードはドリフトモードと結合し、イオン・ランダウ減衰によって安定化される。有理面近傍の局所的な電流密度が不安定性誘起の重要な要因である。MHD理論での不安定条件 $\Delta' > 0$ (Δ' は \tilde{B}_r の対数微分の有理面に於ける不連続値)は、高温高ベータプラズマでは正しくない。

将来のトカマクプラズマのパラメータでは、 $2 \leq m \leq 50$ のドリフト・テアリングモードは円柱配位では安定であることが示された。

* 広島大学核融合理論研究センター

Kinetic Theory of Kink-Like Instabilities

Kimitaka ITOH and Sanae INOUE*

Division of Thermonuclear Fusion Research,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received July 1, 1980)

Kinetic theory of drift-tearing mode in a finite- β , collisionless inhomogeneous cylindrical tokamak is investigated. We find that 1) When the density is low, kinetic drift-tearing modes are unstable, while they become stabilized as the density increases; 2) The medium m (poloidal mode number) modes have smaller growth rate; 3) The electron temperature gradient further stabilizes them. Due to the magnetic shear and finite- β value, out-going drift wave is associated with the tearing mode and hence the ion Landau damping stabilizes the mode when β increases. The local current density is found to be crucial for the instability. We note that the stability criterion of MHD tearing mode, $\Delta' > 0$ (Δ' : jump of the logarithmic derivative of \tilde{B}_r across the mode rational surface), is no longer valid for kinetic tearing mode.

For future tokamak parameters, low and medium m ($2 \leq m \leq 50$) kinetic drift-tearing modes are found to be stable in a cylindrical geometry.

Key words: Kink Mode, Tearing Mode, Drift Mode, Electromagnetic Instability, Tokamak, Cylindrical Geometry, Kinetic Theory, Collisionless Plasma, Finite- β Plasma, Plasma Current, Inhomogeneous Profile

* Institute for Fusion Theory, Hiroshima University

目 次

1 序	1
2 基礎方程式	2
3 境界条件	4
4 エネルギー積分	5
5 数値解析	6
6 結 語	8
謝 辞	9
付章A 数値解法	10
付章B 電子衝突効果	12
引用文献	13

CONTENTS

1 Introduction	1
2 Basic Equations	2
3 Boundary Conditions	4
4 Energy Integral	5
5 Numerical Results	6
6 Conclusions and Discussions	8
Acknowledgements	9
Appendix A Numerical Methods	10
Appendix B Collisional Effects	12
References	13

1. 序

キंक型不安定性はトロイダルプラズマの代表的不安定性として精力的に研究されてきた。プラズマ柱がらせん型に変型するこの不安定性は、プラズマのパラメータによってキंक不安定性¹⁾、テアリング不安定性^{2, 3)}、ドリフト・テアリング不安定性⁴⁻⁶⁾と呼ばれるが、特にディスラプティブ不安定性の誘因になり⁷⁻⁹⁾、また異常輸送を増大させる原因となるものと考えられており¹⁰⁻¹³⁾、キंक型モードの安定性解析は、閉込め特性の好いパラメータ領域を知るためにも、また閉込めを制限している現象を理解するためにも重要な課題である。

磁力線方向の波数 k_{\parallel} が0となる磁気面を有理面と呼ぶ。有理面がプラズマ柱内に位置する時、磁気面の再結合を伴いながらプラズマ柱をらせん型に変型するモードがテアリングモードであって、それが電気抵抗により不安定になる事はキंक型不安定性研究の初期から知られている。こうした解析は電磁流体方程式を用いて解析された。プラズマ温度が上昇するにつれて、流体方程式から求められるテアリングモードの成長率 γ_T は減少し、ついにはドリフト周波数 ω_* より小さくなり固有モードはドリフト・テアリングモードと呼ばれるようになる。例として、 $B = 4 \text{ T}$, $a = 0.5 \text{ m}$, $R = 2 \text{ m}$, $n = 10^{14} / \text{cc}$, $T_e = 4 \text{ keV}$ というトカマクで実現されるパラメータを取って、 $(m, n) = (2, 1)$ (m と n はそれぞれポロイダル及びトロイダルモード数)のモードを考えると、 S 値は約 10^{10} となり (S : 抵抗性スキン時間/アルフベン時間), γ_T は $10^{-3} \omega_*$ 程度となり、有理面近傍のkinetic効果が波の分散を決めることがわかる。流体方程式の範囲では、 $\gamma_T < \omega_*$ となるとドリフト波とテアリングモードとの間の結合が顕著となって成長率が温度とともに増大することが示されているが¹⁴⁾、kinetic効果が正確に取り入れられていないので、正しい成長率やモード構造を与えているとは考えられない。

最近トカマクプラズマの低周波不安定性 (周波数がイオンサイクロトロン周波数より十分低いもの) の解析が進歩をとげ、有限ベータ値プラズマ (ベータ値: プラズマ圧力/磁気圧力) 中の低周波固有モードについての多くの知見が得られた¹⁵⁻²⁰⁾。それらの研究結果の重要な点は、低周波モードの安定性は、ベータ値、磁気シア、プラズマ電流や密度・温度の不均一、またプラズマのkineticなインピーダンスとその不均一といったものが安定性を定めるうえで重要であるという点であり、これらの効果の多くは従来のキंक型不安定性の解析では論じられてこなかった。実際、電流駆動アルフベン不安定性の閾値は $u/v_A \geq O(k^2 \rho_i^2)$ ($u = -J_0/n_0 e$, v_A はアルフベン速度, k : 波数, ρ_i : イオンラーマ半径)と与えられるが²⁰⁾、これはトカマクプラズマで十分満足される値である。一方、kinetic効果をテアリングモードに取り入れる試みは〔21-23〕などで行われ、引続き一般化され拡張された²⁴⁻²⁸⁾。

これらのドリフト・テアリングモード解析の問題点のひとつは、値 Δ' を用いる事にある。有理面の周囲の狭い領域では後に述べる種々の原因によってインピーダンスが有限の大きさを持ち、揺動電場 \tilde{E}_{\parallel} が0とならない。そうした領域をkinetic領域と呼ぶこととし (そこでは、kinetic方程式が解かれる) その代表的厚さを δ とする。プラズマ温度が高くなるにつれて δ が大きくなり、固有モードの曲率に比べ無視できなくなる。 Δ' の定義は²⁾ $(d\tilde{B}_{\parallel}/dr)/\tilde{B}_{\parallel}$

の有理面を横切る時の跳びであるから、 δ が 0 でない時には意味が不明確になる。 $(d\tilde{B}_r/dr)/\tilde{B}_r$ の kinetic 領域を横切ったの不連続を $\hat{\Delta}'$ と一般化すると

$$\hat{\Delta}' \equiv \left. \frac{\tilde{B}_r'}{\tilde{B}_r} \right|_{r_s+\delta} - \left. \frac{\tilde{B}_r'}{\tilde{B}_r} \right|_{r_s-\delta}$$

(r_s は有理面の半径, $' \equiv d/dr$) $\hat{\Delta}'$ は kinetic 領域でのモードを解くための適当な境界条件となる。ここで $\hat{\Delta}'$ は δ の関数であるので (図 1 に $\hat{\Delta}'(\delta)$ を図式的に示した), δ の選び方で $\hat{\Delta}'$ の値は変化する。しかし, 固有モードは δ の選び方に依存しないものが求められなければならない。実際, そうして得られる固有値が第五章に示される。

この論文では, 円柱近似したトカマクプラズマの, らせん対称性を持つ不安定性についての kinetic 理論が統一的に解析される。解析を行うにあたっては, 密度の不均一, 電子温度勾配, プラズマ電流, β 値, 磁気シア, 有限イオンラーマ半径効果及び磁場に平行なインピーダンス等を正確に評価してそれらの効果を取り入れてある。高温プラズマに着目するため, 単純化し無衝突近似を仮定した (付章 B で衝突効果が議論される)。ポロイダルモード数 $2 \leq m \leq 50$ ($k\rho_i \leq 0.1$) についてドリフト・テアリングモードの安定性を解析し, プラズマが低温低密度の時には $\gamma \simeq 0.1 \omega_*$ 程度の不安定性が可能となるが, 密度を上げるか ($n \sim 10^{14}/\text{cc}$) または ∇T_e の効果で安定化される。イオン・ランダウ減衰の効果がドリフトテアリングモードの安定化に重要な意味を持つことが初めて示された。

第二章では考察の対象となるプラズマの平衡を議論し, kinetic 効果を取入れた固有モード方程式を導びく。第三章に於ては境界条件が議論される。キंक型モードについてのエネルギー積分を第四章で求め, 有理面近傍の波 — 粒子相互作用による散逸が安定性を定めることが示される。第五章で, 様々なパラメータに対して固有モード及び固有値が求められ, 安定 — 不安定の境界が議論される。第六章は結びと展望に充てられる。付章 A では数値解析手法の詳細が補足され, 付章 B に於ては, 電子の衝突効果がさらに議論されている。

2. 基礎方程式

円柱プラズマの半径を a とし, 内径 d のシェル内に軸を一致させて置く。 $r=0$ が磁気軸と一致するよう円柱座標系 (r, θ, z) を取る。トカマクのトロイダル対称性はここでは軸方向の $2\pi R$ の周期性に置き換えられる。トカマク近似 $(B_\theta/B_z)^2 \ll 1$ を取り, イオン・ラーマ半径が平衡の勾配に比して十分小さいことを仮定し, 平衡分布函数を次のようにえらぶ^{13,20)}。

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{N}{(2\pi v_T^2)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{v^2 - 2v_{\parallel} u + u^2}{2v_T^2} \right\}. \quad (1)$$

ここで $N, v_T^2 = T/M$ 及び u は一般には $P_\theta \equiv Mr(v_\theta + r\Omega/2)$ の函数である。(M は粒子質量, Ω はサイクロトロン周波数であり, 粒子を区別する添字 j は必要に応じてつけるものとする。) 密度, 温度, 速度及び電流密度は $n_0 = N(r), \vec{V}(r) = -[(\kappa + \kappa_T)v_T^2/\Omega]\hat{\theta} + u(r)[\hat{z} + (B_\theta/B_z)\hat{\theta}]$, $T = T(r), \vec{j}(r) = n_0 e(\vec{V}_i - \vec{V}_e)$ (ただし $\kappa \equiv -(dN/dr)/N$, $\kappa_T \equiv -(dT/dr)/T$) となり, 平衡方程式 $\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p$ は当然満足される。ここでは $u_i = 0$

の有理面を横切る時の跳びであるから、 δ が 0 でない時には意味が不明確になる。 $(d\tilde{B}_r/dr)/\tilde{B}_r$ の kinetic 領域を横切ったの不連続を $\hat{\Delta}'$ と一般化すると

$$\hat{\Delta}' \equiv \left. \frac{\tilde{B}_r'}{\tilde{B}_r} \right|_{r_s+\delta} - \left. \frac{\tilde{B}_r'}{\tilde{B}_r} \right|_{r_s-\delta}$$

(r_s は有理面の半径, $' \equiv d/dr$) $\hat{\Delta}'$ は kinetic 領域でのモードを解くための適当な境界条件となる。ここで $\hat{\Delta}'$ は δ の関数であるので (図 1 に $\hat{\Delta}'(\delta)$ を図式的に示した), δ の選び方で $\hat{\Delta}'$ の値は変化する。しかし, 固有モードは δ の選び方に依存しないものが求められなければならない。実際, そうして得られる固有値が五章に示される。

この論文では, 円柱近似したトカマクプラズマの, らせん対称性を持つ不安定性についての kinetic 理論が統一的に解析される。解析を行うにあたっては, 密度の不均一, 電子温度勾配, プラズマ電流, β 値, 磁気シア, 有限イオンラーマー半径効果及び磁場に平行なインピーダンス等を正確に評価してそれらの効果を取り入れてある。高温プラズマに着目するため, 単純化し無衝突近似を仮定した (付章 B で衝突効果が議論される)。ポロイダルモード数 $2 \leq m \leq 50$ ($k\rho_i \leq 0.1$) についてドリフト・テアリングモードの安定性を解析し, プラズマが低温低密度の時には $r \simeq 0.1 \omega_*$ 程度の不安定性が可能となるが, 密度を上げるか ($n \sim 10^{14}/\text{cc}$) または ∇T_e の効果で安定化される。イオン・ランダウ減衰の効果がドリフトテアリングモードの安定化に枢要な意味を持つことが初めて示された。

第二章では考察の対象となるプラズマの平衡を議論し, kinetic 効果を取入れた固有モード方程式を導びく。第三章に於ては境界条件が議論される。キック型モードについてのエネルギー積分を第四章で求め, 有理面近傍の波 — 粒子相互作用による散逸が安定性を定めることが示される。第五章で, 様々のパラメータに対して固有モード及び固有値が求められ, 安定 — 不安定の境界が議論される。第六章は結びと展望に充てられる。付章 A では数値解析手法の詳細が補足され, 付章 B に於ては, 電子の衝突効果がさらに議論されている。

2. 基礎方程式

円柱プラズマの半径を a とし, 内径 d のシェル内に軸を一致させて置く。 $r=0$ が磁気軸と一致するよう円柱座標系 (r, θ, z) を取る。トカマクのトロイダル対称性はここでは軸方向の $2\pi R$ の周期性に置き換えられる。トカマク近似 $(B_\theta/B_z)^2 \ll 1$ を取り, イオン・ラーマー半径が平衡の勾配に比して十分小さいことを仮定し, 平衡分布函数を次のようにえらふ^{13,29)}。

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{N}{(2\pi v_T^2)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{v^2 - 2v_{\parallel} u + u^2}{2v_T^2} \right\}. \quad (1)$$

ここで $N, v_T^2 = T/M$ 及び u は一般には $P_\theta \equiv Mr(v_\theta + r\Omega/2)$ の函数である。(M は粒子質量, Ω はサイクロトロン周波数であり, 粒子を区別する添字 j は必要に応じてつけるものとする。) 密度, 温度, 速度及び電流密度は $n_0 = N(r), \vec{V}(r) = -[(\kappa + \kappa_T)v_T^2/\Omega]\hat{\theta} + u(r)[\hat{z} + (B_\theta/B_z)\hat{\theta}]$, $T = T(r), \vec{j}(r) = n_0 e(\vec{V}_i - \vec{V}_e)$ (ただし $\kappa \equiv -(dN/dr)/N$, $\kappa_T \equiv -(dT/dr)/T$) となり, 平衡方程式 $\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p$ は当然満足される。ここでは $u_i = 0$

と選ぶ。

考察の対称の低周波揺動の構造を $\tilde{n}(\vec{r}, t) = \tilde{n}(r) \times \exp(im\theta - inz/R - i\omega t)$ とし、線型化されたブラソフ方程式を解く。マックスウェル方程式に代入して直ちに \tilde{B}_r と \tilde{E}_θ の満たすべき方程式

$$\left[\rho_i^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - k^2 \rho_i^2 - \beta_i \frac{u \omega_j}{k_\parallel c_s^2} \right] \phi = \beta_i \frac{c_s^2}{c_s^2} P \frac{\omega}{k_\parallel c} \left\{ \phi + \frac{\omega}{k_\parallel c} \phi \right\}, \quad (2)$$

$$\left[\rho_i^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - k^2 \rho_i^2 \right] \phi = \frac{\omega}{\omega \tau + \omega_*} \frac{P}{\xi_i Z(\xi_i)} \left\{ \phi + \frac{\omega}{k_\parallel c} \phi \right\}, \quad (3)$$

$$P = \frac{\omega - \omega_*}{2\omega} Z'(\xi_e) + \frac{\omega_{Te}}{4\omega} \xi_e Z''(\xi_e) + \frac{\omega \tau + \omega_*}{2\omega} Z'(\xi_i) + \frac{k_\parallel u}{\sqrt{2} |k_\parallel| v_e} \left\{ Z(\xi_e) + \frac{\omega - \omega_j}{\omega} \xi_e Z'(\xi_e) + \frac{\omega_{Te}}{2\omega} \left\{ \xi_e Z'(\xi_e) \right\}' \right\} \quad (4)$$

が得られる。ここで $\rho_i^2 \nabla^2$, u/v_e 及び $\beta_i \equiv 4\pi n_0 T_i / B^2$ の最低次の補正を取る。記号の定義は $\phi \equiv r \tilde{B}_r$, $\phi \equiv r E_\theta$, $k \equiv m/r$, $\xi \equiv \omega / \sqrt{2} |k_\parallel| v_T$, $\tau \equiv T_e / T_i$, $Z' \equiv dZ/d\xi$ (Z はプラズマ分散函数), $\omega_* \equiv \kappa c T_e k / eB$, $\omega_{Te} \equiv \kappa_{Te} \omega_* / \kappa$, $\omega_j \equiv \kappa_j \omega_* / \kappa$, $\kappa_j \equiv -(dJ_0/dr) / J_0$, $c_s^2 \equiv T_e / M_i$, $q(r_s) = m/n$, $k_\parallel = (m - nq) / Rq$ である。簡単化のため κ_{Ti} は無視した。 ϕ は磁気面の変位 $\tilde{\xi}_r$ と $\tilde{\xi}_r = ic\phi / r\omega B$ の関係で結びついている。これはプラズマの流体運動が基本的に $E \times B$ 運動であることによる。 ϕ を無視した方程式によって (ドリフト) テアリング不安定性を解析することは不適切である。

(4)式で定義される P は磁力線と平行方向の伝導度に比例する量である。 $\tilde{E}_\parallel = k_\parallel (\phi + \omega\phi / k_\parallel c) / rk$ の関係からもわかる様に、 \tilde{E}_\parallel を通じて波と粒子の相互作用が取り入れられている。電子だけでなくイオンの寄与も無視できない。このような波-粒子共鳴は $k_\parallel v_T \sim \omega$ の領域で特徴的な事であるから、有理面から離れた領域ではプラズマは流体的に振舞い、MHD近似がよい精度で成立する。実際、 $k_\parallel v_A, k_\parallel v_i \gg \omega$ が成立する時、(2)-(4)式のキンク型モード解は

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{4\pi m}{c} \frac{J_0'}{k \cdot B_0} \right] \phi = 0 \quad (5)$$

及び

$$\tilde{E}_\parallel = 0 \quad (6)$$

を満たし ($J_0' \equiv dJ_0/dr$)、これはMHD近似で求められるキンク型モードの固有方程式にトカマク近似 $n^2 r^2 / q^2 m^2 R^2 \ll 1$ を用いたものと一致する。方程式(5)では有理面で $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ となり ϕ の演算子に特異点があられる。しかし(2)-(4)式では粒子共鳴による散逸が考慮され

ているためにその様な特異点は現れない。次章で論じられる境界条件を与えることにより、離散スペクトルが得られる。

3. 境界条件

(2), (3), (4)式を解く時に要求される境界条件は、 \tilde{B}_r 及び \tilde{E}_θ が $r=0$ で正則であり、また $r=d$ のシェル上で振巾が0になる事である。 $r \ll a$ の時 ϕ は r^m という漸近的振舞をする。しかし、(2)-(4)式を $0 \leq r \leq d$ で直接数値的に解く事は困難である。報文〔16, 19〕に示されている様に(2)-(4)式には in-coming³⁰⁾ドリフト波成分が含まれているが、そのモードは $|k_\parallel v_i / \omega| \geq 1$ となると発散するためその困難が現れる。この in-coming ドリフト成分は境界条件を満たさないで除かれねばならない。ここでは、プラズマ柱をMHD ($|r - r_s| \geq \delta$)及びkinetic領域 ($|r - r_s| \leq \delta$)とに区別する。 δ を十分大きく採るとMHD領域では $\tilde{E}_\parallel = 0$ となり、MHD方程式(5)が高精度で成立する。そこでMHD領域では境界条件

$$\phi(0) = \phi(a) = \phi(d) = \phi(d) = 0 \quad (7)$$

のもとで(5)式を解き、kinetic領域では(2)-(4)式が解かれ、 $r - r_s = \pm \delta$ の境界で両者が接続される。こうして in-coming ドリフト波成分とそのもたらす数値的困難が除かれる。もちろん、固有モード及び固有値は δ の選び方に依存してはならない。予想される様に、 $|k_\parallel (r_s \pm \delta) v_i| \geq \omega$ となる様に δ を取ればその要請が満たされることが付章Aに示されている。kinetic領域では必ずしも $\tilde{E}_\parallel = 0$ ではないがMHD領域では $\tilde{E}_\parallel = 0$ である。 $r = r_s \pm \delta$ での接続条件は

$$\lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta - 0} \phi = \lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta + 0} \phi \quad (r = r_s \pm \delta) \quad (8)$$

$$\lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta - 0} \frac{d\phi}{dr} = \lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta + 0} \frac{d\phi}{dr} \quad (r = r_s \pm \delta) \quad (9)$$

及び

$$\lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta - 0} \tilde{E}_\parallel, \lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta - 0} \frac{d\tilde{E}_\parallel}{dr} \rightarrow 0 \quad (10)$$

とあらわされる。これらの4つの条件は(2), (3)式を解く為に必要十分である。(10)式はkinetic領域の解が漸近的に $\tilde{E}_\parallel \rightarrow 0$, $d\tilde{E}_\parallel / dr \rightarrow 0$ を満たすことを示す。

(2)-(4)式の解の有理面から遠方 $|k_\parallel v_A / \omega| > 1$ での漸近型は次の四成分の線型結合で与えられる。各成分を具体的に書くと¹⁹⁾

ているためにその様な特異点は現れない。次章で論じられる境界条件を与えることにより、離散スペクトルが得られる。

3. 境界条件

(2), (3), (4)式を解く時に要求される境界条件は, \tilde{B}_r 及び \tilde{E}_θ が $r=0$ で正則であり, また $r=d$ のシエル上で振巾が0になる事である。 $r \ll a$ の時 ϕ は r^m という漸近的振舞をする。しかし, (2)-(4)式を $0 \leq r \leq d$ で直接数値的に解く事は困難である。報文 [16, 19] に示されている様に(2)-(4)式には in-coming³⁰⁾ ドリフト波成分が含まれているが, そのモードは $|k_\parallel v_i / \omega| \geq 1$ となると発散するためその困難が現れる。この in-coming ドリフト成分は境界条件を満たさないで除かれねばならない。ここでは, プラズマ柱を MHD ($|r - r_s| \geq \delta$) 及び kinetic 領域 ($|r - r_s| \leq \delta$) とに区別する。 δ を十分大きく採ると MHD 領域では $\tilde{E}_\parallel = 0$ となり, MHD 方程式(5)が高精度で成立する。そこで MHD 領域では境界条件

$$\phi(0) = \phi(d) = \phi'(0) = \phi'(d) = 0 \quad (7)$$

のもとで(5)式を解き, kinetic 領域では(2)-(4)式が解かれ, $r - r_s = \pm \delta$ の境界で両者が接続される。こうして in-coming ドリフト波成分とそのもたらす数値的困難が除かれる。もちろん, 固有モード及び固有値は δ の選び方に依存してはならない。予想される様に, $|k_\parallel (r_s \pm \delta) v_i| \geq \omega$ となる様に δ を取ればその要請が満たされることが付章 A に示されている。 kinetic 領域では必ずしも $\tilde{E}_\parallel = 0$ ではないが MHD 領域では $\tilde{E}_\parallel = 0$ である。 $r = r_s \pm \delta$ での接続条件は

$$\lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta - 0} \phi = \lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta + 0} \phi \quad (r = r_s \pm \delta) \quad (8)$$

$$\lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta - 0} \frac{d\phi}{dr} = \lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta + 0} \frac{d\phi}{dr} \quad (r = r_s \pm \delta) \quad (9)$$

及び

$$\lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta - 0} \tilde{E}_\parallel, \lim_{|r - r_s| \rightarrow \delta - 0} \frac{d\tilde{E}_\parallel}{dr} \rightarrow 0 \quad (10)$$

とあらわされる。これらの4つの条件は(2), (3)式を解く為に必要十分である。(10)式は kinetic 領域の解が漸近的に $\tilde{E}_\parallel \rightarrow 0$, $d\tilde{E}_\parallel / dr \rightarrow 0$ を満たすことを示す。

(2)-(4)式の解の有理面から遠方 $|k_\parallel v_A / \omega| > 1$ での漸近型は次の四成分の線型結合で与えられる。各成分を具体的に書くと¹⁹⁾

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{\omega}{k_{\parallel} c} \end{array} \right] \exp(-k |r - r_s|) & \dots\dots \text{I} \\ \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{\omega}{k_{\parallel} c} \end{array} \right] \exp(k |r - r_s|) & \dots\dots \text{II} \\ \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{k_{\parallel} c_s^2}{\beta_i c (\tau \omega + \omega_*)} \end{array} \right] \exp\left\{-i \mu (r - r_s)^2 / \rho_i^2\right\} & \dots\dots \text{III} \\ \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{k_{\parallel} c_s^2}{\beta_i c (\tau \omega + \omega_*)} \end{array} \right] \exp\left\{i \mu (r - r_s)^2 / \rho_i^2\right\} & \dots\dots \text{IV} \end{cases} \quad (11)$$

$(\mu^2 = (1 + \tau) k^2 \rho_i^2 v_i^2 / L_s^2 \omega (\omega \tau + \omega_*))$ となる。これらは(2)-(4)式のWKB解であるが、I, IIはアルフベン波、III, IVはドリフト波の成分にあたる。第IV成分は $|k_{\parallel} v_i / \omega| \geq 1$ で発散するため連続条件(10)式を満足しない。MHD領域の解に接続される固有解はI, II, IIIの成分の線型結合で与えられることがわかる。また逆に、I, II, IIIの線型結合は(10)を満たす。アルフベン波成分I, IIは $|k_{\parallel} v_A / \omega| \geq 1$ の時 $|\tilde{E}_{\parallel}| \rightarrow 0$ となることが(11)よりわかる。それに対しout-goingドリフト波成分IIIについては、 $|\tilde{E}_{\parallel}| / |\tilde{E}_{\theta}|$ は0とならないが $|\phi|$ 自体が $|k_{\parallel} v_i / \omega| \geq 1$ の時0になるので(10)が満足されるのである。そこで、I, II, IIIの線型結合に対し、(8), (9)式の ϕ と ϕ' の連続条件を要請することにより、固有モードと固有値を決定することができる。計算の詳細は、付章Aに述べられている。また、計算された固有値 ω を δ の関数として示し、 $|k_{\parallel} (r_s + \delta) v_i / \omega| \geq 1$ と選べば ω が δ の選び方によらぬ事が確認される。

4. エネルギー積分

キンク型モードのエネルギー積分を(2), (3)式から導びくことができる。 $|\tilde{E}_{\parallel}|$ が0でない値を取るのは $|\xi_i| \gg 1$ の領域であるので(3)式の右辺を $-P \omega (\omega + \omega_*)^{-1} (\phi + \omega \phi / k_{\parallel} c)$ と近似し、 $\int r dr \phi^+$ 及び $\int r dr \phi^+$ をそれぞれ(2),(3)に作用させると(+は複素共役量)エネルギー積分が得られる³¹⁾。

$$\begin{aligned}
 \omega^+ \delta W - (\omega + \frac{\omega_*}{\tau}) \delta K &= -\omega \int_0^d \frac{c^2 m^2}{\tau v_A^2 \rho_i^2 k_{\parallel}^2} P |\tilde{E}_{\parallel}|^2 r dr & (12) \\
 \delta W &= \int_0^d \left\{ |\phi'|^2 + \left(\frac{m^2}{r^2} + \frac{4\pi}{c} \frac{m}{r} \frac{J_0'}{\vec{k} \cdot \vec{B}} \right) |\phi|^2 \right\} r dr
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix} \sim \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{\omega}{k_{\parallel} c} \end{array} \right] \exp(-k|r-r_s|) & \dots\dots \text{I} \\ \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{\omega}{k_{\parallel} c} \end{array} \right] \exp(k|r-r_s|) & \dots\dots \text{II} \\ \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{k_{\parallel} c_s^2}{\beta_i c(\tau\omega + \omega_*)} \end{array} \right] \exp\left\{-i\mu(r-r_s)^2/\rho_i^2\right\} & \dots\dots \text{III} \\ \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{k_{\parallel} c_s^2}{\beta_i c(\tau\omega + \omega_*)} \end{array} \right] \exp\left\{i\mu(r-r_s)^2/\rho_i^2\right\} & \dots\dots \text{IV} \end{cases} \quad (11)$$

$(\mu^2 = (1+\tau)k^2 \rho_i^2 v_i^2 / L_s^2 \omega(\omega\tau + \omega_*))$ となる。これらは(2)-(4)式のWKB解であるが、I, IIはアルフベン波、III, IVはドリフト波の成分にあたる。第IV成分は $|k_{\parallel} v_i / \omega| \geq 1$ で発散するため連続条件(10)式を満足しない。MHD領域の解に接続される固有解はI, II, IIIの成分の線型結合で与えられることがわかる。また逆に、I, II, IIIの線型結合は(10)を満たす。アルフベン波成分I, IIは $|k_{\parallel} v_A / \omega| \geq 1$ の時 $|\tilde{E}_{\parallel}| \rightarrow 0$ となることが(11)よりわかる。それに対しout-goingドリフト波成分IIIについては、 $|\tilde{E}_{\parallel}| / |\tilde{E}_{\theta}|$ は0とならないが $|\phi|$ 自体が $|k_{\parallel} v_i / \omega| \geq 1$ の時0になるので(10)が満足されるのである。そこで、I, II, IIIの線型結合に対し、(8), (9)式の ϕ と ϕ' の連続条件を要請することにより、固有モードと固有値を決定することができる。計算の詳細は、付章Aに述べられている。また、計算された固有値 ω を δ の関数として示し、 $|k_{\parallel}(r_s + \delta)v_i / \omega| \geq 1$ と選べば ω が δ の選び方によらぬ事が確認される。

4. エネルギー積分

キンク型モードのエネルギー積分を(2), (3)式から導びくことができる。 $|\tilde{E}_{\parallel}|$ が0でない値を取るのは $|\xi_i| \gg 1$ の領域であるので(3)式の右辺を $-P\omega(\omega + \omega_*)^{-1}(\phi + \omega\phi/k_{\parallel}c)$ と近似し、 $\int r dr \phi^+$ 及び $\int r dr \phi^+$ をそれぞれ(2), (3)に作用させると(+は複素共役量)エネルギー積分が得られる³¹⁾。

$$\begin{aligned}
 \omega^+ \delta W - \left(\omega + \frac{\omega_*}{\tau}\right) \delta K &= -\omega \int_0^d \frac{c^2 m^2}{\tau v_A^2 \rho_i^2 k_{\parallel}^2} P |\tilde{E}_{\parallel}|^2 r dr & (12) \\
 \delta W &= \int_0^d \left\{ |\phi'|^2 + \left(\frac{m^2}{r^2} + \frac{4\pi}{c} \frac{m}{r} \frac{J_0'}{\vec{k} \cdot \vec{B}}\right) |\phi|^2 \right\} r dr
 \end{aligned}$$

$$\delta K = \int_0^a \frac{c^2}{v_A^2} \left\{ |\phi'|^2 + k^2 |\phi|^2 \right\} r dr$$

ここで $|\phi|$ は有理面近傍に局在しているので $(\omega + \omega_*/\tau)$ は積分記号の外に出した。

(12)式はMHDモードに対するエネルギー積分のkineticモードに対する一般化になっている。プラズマ運動が流体的である時には、 $\tilde{E}_n \rightarrow 0$ として右边が無視されて

$$\omega \left(\omega + \frac{\omega_*}{\tau} \right) = \frac{|\omega|^2 \delta W}{\delta K} \equiv -\gamma_{\text{MHD}}^2 \quad (13)$$

が得られる。ここで γ_{MHD} はMHD近似で得られる成長率である。有限イオンラマー半径の効果が ω_* を通じて左辺に現われている。 $T_i \rightarrow 0$ とすれば、もちろん(13)式は $\omega^2 = -\gamma_{\text{MHD}}^2$ となりMHD近次の結果と一致する。(13)式は

$$\omega = -\frac{\omega_*}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{\omega_*^2}{4\tau^2} - \gamma_{\text{MHD}}^2} \quad (14)$$

という解を持ち、 ω_* による安定効果のため不安定性が起こるのは $\delta W < 0$ では不十分であり

$$\gamma_{\text{MHD}} > \frac{\omega_*}{2\tau} \quad (15)$$

という不安定条件が得られる。キंकモードは有理面がプラズマ柱内に無いので(14)が固有値を与える。

有理面がプラズマ柱内にあって $|\tilde{E}_n|$ を通じての散逸効果が無視できない時には、(13)式は

$$\omega \left(\omega + \frac{\omega_*}{\tau} \right) = -\gamma_{\text{MHD}}^2 + i\Gamma_{res} \quad (13')$$

という散逸による付加項があらわれ、kinetic不安定が可能となる。 Γ_{res} にはイオンと電子との双方からの寄与があるので安定性はそのつり合いで決まる。イオンによる減衰を無視できない。

5. 数 値 解 析

平衡分布として

$$\bar{N}(r) = n(0) e^{-\frac{r^2}{2L_n^2}} \quad (16-1)$$

$$J_0(r) = J_0 e^{-\eta_j \frac{r^2}{2L_n^2}} \quad (16-2)$$

$$T_e(r) = T_0 e^{-\eta_T \frac{r^2}{2L_n^2}} \quad (16-3)$$

をえらぶ。勾配 κ , κ_J , κ_{T_e} は $\kappa = r/L_n^2$, $\kappa_J = \eta_j \kappa$, $\kappa_{T_e} = \eta_e \kappa$ となる。ここでは $L_n = a/2$ と取って平均密度は $\bar{N}(r) \approx n(0)/2$ で与えられる。 η_j と η_e は電流と温度の中心集中度を示す。ここでは無衝突プラズマを考えるので η_j と η_e は独立に選択できる。実際のプラズマ

$$\delta K = \int_0^a \frac{c^2}{v_A^2} \left\{ |\phi'|^2 + k^2 |\phi|^2 \right\} r dr$$

ここで $|\phi|$ は有理面近傍に局在しているので $(\omega + \omega_*/\tau)$ は積分記号の外に出した。

(12)式はMHDモードに対するエネルギー積分のkineticモードに対する一般化になっている。プラズマ運動が流体的である時には、 $\tilde{E}_n \rightarrow 0$ として右边が無視されて

$$\omega \left(\omega + \frac{\omega_*}{\tau} \right) = \frac{|\omega|^2 \delta W}{\delta K} \equiv -\gamma_{MHD}^2 \quad (13)$$

が得られる。ここで γ_{MHD} はMHD近似で得られる成長率である。有限イオンラマー半径の効果が ω_* を通じて左辺に現われている。 $T_i \rightarrow 0$ とすれば、もちろん(13)式は $\omega^2 = -\gamma_{MHD}^2$ となりMHD近次の結果と一致する。(13)式は

$$\omega = -\frac{\omega_*}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{\omega_*^2}{4\tau^2} - \gamma_{MHD}^2} \quad (14)$$

という解を持ち、 ω_* による安定効果のため不安定性が起こるのは $\delta W < 0$ では不十分であり

$$\gamma_{MHD} > \frac{\omega_*}{2\tau} \quad (15)$$

という不安定条件が得られる。キंकモードは有理面がプラズマ柱内に無いので(14)が固有値を与える。

有理面がプラズマ柱内にあって $|\tilde{E}_n|$ を通じての散逸効果が無視できない時には、(13)式は

$$\omega \left(\omega + \frac{\omega_*}{\tau} \right) = -\gamma_{MHD}^2 + i\Gamma_{res} \quad (13')$$

という散逸による付加項があらわれ、kinetic不安定が可能となる。 Γ_{res} にはイオンと電子との双方からの寄与があるので安定性はそのつり合いで決まる。イオンによる減衰を無視できない。

5. 数 値 解 析

平衡分布として

$$N(r) = n(0) e^{-\frac{r^2}{2L_n^2}} \quad (16-1)$$

$$J_0(r) = J_0 e^{-\eta_J \frac{r^2}{2L_n^2}} \quad (16-2)$$

$$T_e(r) = T_0 e^{-\eta_T \frac{r^2}{2L_n^2}} \quad (16-3)$$

をえらぶ。勾配 κ , κ_J , κ_{Te} は $\kappa = r/L_n^2$, $\kappa_J = \eta_J \kappa$, $\kappa_{Te} = \eta_e \kappa$ となる。ここでは $L_n = a/2$ と取って平均密度は $\bar{N}(r) \approx n(0)/2$ で与えられる。 η_J と η_e は電流と温度の中心集中度を示す。ここでは無衝突プラズマを考えるので η_J と η_e は独立に選択できる。実際のプラズマ

をモデル化するために、 $R=2\text{ m}$, $a=50\text{ cm}$, $B=4\text{ T}$ と装置パラメータをえらび、 $T_e(0)=4\text{ keV}$, $T_i=2\text{ keV}$ とすると $a/\rho_i \approx 450$ である。ドリフト・テアリングモードの解析を行うので、 $d=a$ として固定端モードを考える。

パラメータ依存性を順次調べるが、まず ∇T_e の効果を考えず $\eta_e=0$ とする。典型的パラメータ $\eta_i=1$, $q(0)=1.49$, $q(a)=3.4$ の時に $(2, 1)$ モードの固有値を求めた。このとき、 $\mathcal{A}'=12.1/a$ であってMHD理論では不安定が示される。第二図に (ω, γ) を $n(0)$ の函数として表わす。プラズマ密度が低い時には $\gamma \sim 0.1 \omega_*$ の不安定性が現れるが、密度が上昇するにつれて成長率が減少し $n(0) \gtrsim 7 \times 10^{13}/\text{cc}$ ($u/v_i \lesssim 0.4$)の時にドリフト・テアリングモードは安定である。 $(20, 10)$ モードの成長率もあわせて示した。この図では磁場の配位が変化しないから \mathcal{A}' は一定である。安定性には β や u/v_i といったkineticパラメータが重要な要因となっていることを示唆している。

らせん度が共通で短波長モードを考える。 $m/n=2$ であって有理面は共通。 $n(0)=10^{13}/\text{cc}$ と低密度にえらび、 γ を m の函数としてあらわしたものが3図である。 m の大きいモードは成長率が小さい。しかし $m > 2$ のモードについては $\mathcal{A}' < 0$ であるにもかかわらず $2 \leq m \leq 8$ のモードが不安定である。

さらに $(2, 1)$ モードについて、 γ の T 依存性を調べたものが第4図に示される。 T が上昇するとより安定になる。温度の低い領域では $\nu > \omega_*$ (ν は電子-イオン衝突周波数)となって電子衝突の効果を取入れるべきであるが、ここでは無衝突モードの安定化効果を調べるのが目的であるので ν は無視した。付章BでKrook衝突オペレータにより ν の効果が調べられている。

波の安定性がkineticな相互作用で定められている事は波のモード構造を観察することによってわかる。第5図a), b), c)に \tilde{B}_r , \tilde{E}_θ , \tilde{E}_r を示した。a)は $n(0)=10^{13}/\text{cc}$ での不安定な $(2, 1)$ モードであり、b), c)は $n(0)=10^{14}/\text{cc}$ とした安定な $(2, 1)$ ($20, 10$)モードである。 $|\tilde{E}_r|$ は有理面近傍に局在し、 $|k_r v_i / \omega| \gtrsim 1$ となると急速に0に近づく。第3章の境界条件を満たす解になっている。特徴的なことは、 \tilde{E}_r が振動的であって、ドリフト波との結合によりエネルギーが有理面近傍から外へと搬ばれていることが明確に示されている。磁気面を横切るポインティングベクトルは

$$R_e \left\{ \frac{ic}{4\pi m} \tilde{E}_r^+ \phi' \right\} \quad (17)$$

であるので ϕ の有理面近傍の振動成分の大きい程、convective減衰とイオンランダウ減衰が大きい効果を持つ。 $n(0)$ が増大することにつれてその振動成分が増すことが5-a), 5-b)を比較することによりよくわかる。らせん対称揺動 \tilde{B}_r は基本的にアルフベン波であるが、有限ベータ効果により有理面近傍の $|k_r v_A / \omega| \sim 1$ の領域でドリフト波と結合し、convective減衰が強くなる。 \tilde{B}_r , \tilde{E}_θ , \tilde{E}_r の構造はこのkinetic理論によって初めて正確に定められた。イオンの運動を流体的振舞と仮定する近似理論ではこうしたエネルギーの流れと安定化効果を取り入れられないので、不安定性を過大評価し、正確な成長率が得られない。

以上のデータは磁気配位を一定にしてkineticとパラメータによる γ 依存性を調べたわけであるが、それらをまとめて、 $n-T$ 空間での安定-不安定の境界が調べられた。第6図は、

(2, 1) モードの安定領域を $\tau = 1$ 及び 2 について調べたものである。この図より、

$$\frac{u}{v_i} \gtrsim 0.4 \quad (19)$$

の時に無衝突ドリフト・テアリングモードが不安定になることがわかる。6図では ($m, n, \Delta', \kappa L_s, q(0) \dots$) を一定とし ($u/v_i, \beta, k\rho_i$) を変化させているわけであるが、 Δ' でなく局所的な電流密度が不安定化に本質的な役割を無衝突モードに対して果たしている。

次に磁場配位の効果を考えよう。 $\eta_J = 1, T_e = 4 \text{ keV}, n(0) = 10^{13}/\text{cc}$ と取って (2, 1) モードと (3, 1) モードの成長率を q の関数として書きあらわしたものが7図である。 $\Delta'(q)$ も示した。有理面がプラズマ表面に近づくにつれて Δ' は急速に減少し負となるが、成長率はゆるやかな増大を示すのみである。

m の大きなモードに対しては磁気シアによる安定効果が有効である。第8図は η_J の関数として (2, 1) モード及び (20, 10) モードの成長率を求めたものであり、あわせて Δ' を示す。ここでは、 $T_e = 4 \text{ keV}, n(0) = 10^{13}/\text{cc}$ と取ってあるが、 η_J を変化させる時に有理面は $r_s = a/2$ と一定に保つよう $q(0)$ も同時に変化させている。(2, 1) モードの成長率は η_J に弱い依存性しか持たないが、(20, 10) モードは η_J を増加させ、シアを強くすることによって安定化される。

最後に ∇T_e の安定化効果を9図に示す。(2, 1) モードの成長率を低密度の場合に示したもので、 ∇T_e の安定化効果が顕著に認められる。

これらの計算をまとめると、ドリフト・テアリングモードの不安定性は電流密度が重要な指標になっている。イオンランダウ減衰効果が高ベータプラズマではきわめて有効なので、高温・高密度の円柱トカマク ($\eta_J, \eta_e \sim 1-2$) では $2 \leq m \leq 50$ のドリフト・テアリングモードは $\Delta' > 0$ にもかかわらず安定である。

6. 結 語

この論文に於て高温高密度円柱トカマクプラズマのキンク型不安定性について kinetic 理論が解析された。

キンクモードの成長率は有限イオン・ラーマー半径の効果で安定化されるが、その効果は m が小さいと小さい。

ドリフト・テアリングモードについては以下の事が判明した。i) $\gamma_T \ll \omega_*$ の時、安定性は有理面近傍のイオンと電子の波 — 粒子相互作用で決定される。ii) 磁力線方向の伝導度 ($\propto P$) が磁気シアにより空間的に不均一である故テアリングモードとドリフトモードが強く結合する。iii) そのためイオン・ランダウ減衰が高温高密度プラズマをドリフト・テアリングモードに対して安定化する ($u/v_i \lesssim 0.4$)。iv) m の大きなモードは γ/ω_* が小さい。さらに電子温度勾配が安定化効果を持つので、円柱トカマク内ではらせん対称の $2 \leq m \leq 50$ のモード (電磁ドリフトモード等も含む) は、すべて、 $\beta \sim 1\%$ 程度のパラメータでは安定である。

こうしたドリフト・テアリングモードの不安定化は局所的なドリフト u/v_i に由来し、また

(2, 1) モードの安定領域を $\tau = 1$ 及び 2 について調べたものである。この図より、

$$\frac{u}{v_i} \gtrsim 0.4 \quad (18)$$

の時に無衝突ドリフト・テアリングモードが不安定になることがわかる。6図では $(m, n, \Delta', \kappa L_s, q(0) \dots)$ を一定とし $(u/v_i, \beta, k\rho_i)$ を変化させているわけであるが、 Δ' でなく局所的な電流密度が不安定化に本質的な役割を無衝突モードに対して果たしている。

次に磁場配位の効果を考えよう。 $\eta_J = 1$, $T_e = 4 \text{ keV}$, $n(0) = 10^{13}/\text{cc}$ と取って (2, 1) モードと (3, 1) モードの成長率を q の函数として書きあらわしたものが 7 図である。 $\Delta'(q)$ も示した。有理面がプラズマ表面に近づくにつれて Δ' は急速に減少し負となるが、成長率はゆるやかな増大を示すのみである。

m の大きなモードに対しては磁気シアによる安定効果が有効である。第 8 図は η_J の函数として (2, 1) モード及び (20, 10) モードの成長率を求めたものであり、あわせて Δ' を示す。ここでは、 $T_e = 4 \text{ keV}$, $n(0) = 10^{13}/\text{cc}$ と取ってあるが、 η_J を変化させる時に有理面は $r_s = a/2$ と一定に保つよう $q(0)$ も同時に変化させている。(2, 1) モードの成長率は η_J に弱い依存性しか持たないが、(20, 10) モードは η_J を増加させ、シアを強くすることによって安定化される。

最後に ∇T_e の安定化効果を 9 図に示す。(2, 1) モードの成長率を低密度の場合に示したもので、 ∇T_e の安定化効果が顕著に認められる。

これらの計算をまとめると、ドリフト・テアリングモードの不安定性は電流密度が重要な指標になっている。イオンランダウ減衰効果が高ベータプラズマではきわめて有効なので、高温・高密度の円柱トカマク ($\eta_J, \eta_e \sim 1-2$) では $2 \leq m \leq 50$ のドリフト・テアリングモードは $\Delta' > 0$ にもかかわらず安定である。

6. 結 語

この論文に於て高温高密度円柱トカマクプラズマのキンク型不安定性について kinetic 理論が解析された。

キンクモードの成長率は有限イオン・ラーマー半径の効果で安定化されるが、その効果は m が小さいと小さい。

ドリフト・テアリングモードについては以下の事が判明した。i) $r_T \ll \omega_*$ の時、安定性は有理面近傍のイオンと電子の波—粒子相互作用で決定される。ii) 磁力線方向の伝導度 ($\propto P$) が磁気シアにより空間的に不均一である故テアリングモードとドリフトモードが強く結合する。iii) そのためイオン・ランダウ減衰が高温高密度プラズマをドリフト・テアリングモードに対して安定化する ($u/v_i \lesssim 0.4$)。iv) m の大きなモードは r/ω_* が小さい。さらに電子温度勾配が安定化効果を持つので、円柱トカマク内ではらせん対称の $2 \leq m \leq 50$ のモード (電磁ドリフトモード等も含む) は、すべて、 $\beta \sim 1\%$ 程度のパラメータでは安定である。

こうしたドリフト・テアリングモードの不安定化は局所的なドリフト u/v_i に由来し、また

その安定化は有限ベータ効果によるドリフトモードとの結合（とイオン・ランダウ減衰）とによるものであり、これらはいずれも従来の計算に含まれていない効果である。

ドリフト波は $|k_{\parallel} v_A| \sim \omega_*$ の領域で誘起され、 $|k_{\parallel} v_i| \simeq \omega_*$ の領域でイオンに吸収されるが、 β の上昇につれ v_i/v_A が増し波の結合する領域が減衰する領域に近づくので安定化が顕著になる。 β が上昇した時のドリフト波とテアリング波との結合効果は報文〔14〕で流体方程式を用いて議論されている。しかし、そこではイオンによる減衰やドリフト波の磁気シアによる r 方向の伝播が考慮されていない為に、誘起されたドリフト波は反射され、搬ばれていったエネルギーは減衰せず再び有理面近傍に戻される。そのためドリフト波との結合は r を上昇させた。しかし、粒子 — 波の相互作用を kinetic に求めてその効果を考えると、out-going ドリフト波が誘起されイオンにより吸収されてしまい反射はおこらないことが示される。

第2章 — 第5章では簡単化のため電子衝突の効果を考えていないが、付章Bでは Krook モデルを用いてそれが評価され、安定領域が広がることが示されている。

本論文の解析結果から、ドリフト波の r 方向の伝播と減衰がドリフト・テアリングモードの安定化に重要な意味を持つことがわかるが、 $m \gg 1$ の静電近似のドリフト不安定性理論によると、ドリフト波によるエネルギーの搬送は、トロイダル効果や³²⁻³⁴⁾急なイオン温度勾配によって阻害され³⁵⁾不安定性があらわれる事が示されている。従ってトロイダル効果や ϵ_{Ti} の効果が kinetic ドリフト・テアリングモードについても不安定化する可能性がある³⁶⁾。

(2, 1) モードは主ディスラプティブ不安定性を引きおこすと考えられているが、ここで調べられたテアリングモードの安定化によって、高温高密度トカマクでは主ディスラプティブ不安定性の頻度が下がる事が予想される。 $m=1$ ドリフト・テアリングモードの解析も含め、キルク型不安定性についての解析は今後とも積極的に行なわれることが望まれる。

謝 辞

終始有意義な議論をしていただいた津田孝博士を始め日本原子力研究所核融合研究部理論解析研究室の皆様へ感謝いたします。特に常松俊秀博士には数値解法上の御助力をいただきました。また本研究遂行にあたって示されました田中正俊次長、竹田辰興室長及び広島大学核融合理論研究センター西川恭治教授の激励に感謝いたします。

その安定化は有限ベータ効果によるドリフトモードとの結合（とイオン・ランダウ減衰）によるものであり、これらはいずれも従来の計算に含まれていない効果である。

ドリフト波は $|k_{\parallel} v_A| \sim \omega_*$ の領域で誘起され、 $|k_{\parallel} v_i| \simeq \omega_*$ の領域でイオンに吸収されるが、 β の上昇につれ v_i/v_A が増し波の結合する領域が減衰する領域に近づくので安定化が顕著になる。 β が上昇した時のドリフト波とテアリング波との結合効果は報文〔14〕で流体方程式を用いて議論されている。しかし、そこではイオンによる減衰やドリフト波の磁気シアによる r 方向の伝播が考慮されていない為に、誘起されたドリフト波は反射され、搬ばれていったエネルギーは減衰せず再び有理面近傍に戻される。そのためドリフト波との結合は γ を上昇させた。しかし、粒子 - 波の相互作用を kinetic に求めてその効果を考えると、out-going ドリフト波が誘起されイオンにより吸収されてしまい反射はおこらないことが示される。

第2章 - 第5章では簡単化のため電子衝突の効果を考えていないが、付章Bでは Krook モデルを用いてそれが評価され、安定領域が広がることが示されている。

本論文の解析結果から、ドリフト波の r 方向の伝播と減衰がドリフト・テアリングモードの安定化に重要な意味を持つことがわかるが、 $m \gg 1$ の静電近似のドリフト不安定性理論によると、ドリフト波によるエネルギーの搬送は、トロイダル効果や³²⁻³⁴⁾急なイオン温度勾配によって阻害され³⁵⁾不安定性があらわれる事が示されている。従ってトロイダル効果や κ_{Ti} の効果が kinetic ドリフト・テアリングモードについても不安定化する可能性がある³⁶⁾。

(2, 1) モードは主ディスラプティブ不安定性を引きおこすと考えられているが、ここで調べられたテアリングモードの安定化によって、高温高密度トカマクでは主ディスラプティブ不安定性の頻度が下がる事が予想される。 $m=1$ ドリフト・テアリングモードの解析も含め、キルク型不安定性についての解析は今後とも積極的に行なわれることが望まれる。

謝 辞

終始有意義な議論をしていただいた津田孝博士を始め日本原子力研究所核融合研究部理論解析研究室の皆様へ感謝いたします。特に常松俊秀博士には数値解法上の御助力をいただきました。また本研究遂行にあたって示されました田中正俊次長、竹田辰興室長及び広島大学核融合理論研究センター西川恭治教授の激励に感謝いたします。

付章A 数 値 解 法

(2)-(4)式を解いて固有値固有ベクトルを定めるために、解ベクトル $\vec{F}_j^\pm(r)$ を導入し次の様に定義する。

$$\vec{F}_j^\pm(r) \equiv \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \\ \phi \\ \phi' \end{bmatrix}_j \quad (\text{A } 1)$$

ここで $' \equiv d/dr$ であり、 \pm は $r > r_s$ 及び $r < r_s$ の領域の解であることを示し、添字 j は(1)式の j 番目のWKB解を漸近解として持つことを意味している。 $\phi_j^\pm(r_s, \pm\delta) = 1$ と規格化しておく。たとえば $\vec{F}_1^+(r)$ は $r_s \leq r \leq r_s + \delta$ の領域の解で $|k_\perp v_A / \omega| \gg 1$ の時(1)式の1の漸近型を持つ。 $\vec{F}_{1,2}$ はアルフベン波で \vec{F}_3 はout-goingドリフト波である。3章で述べた様に、 \vec{F}_4 は固有解に含まれないから、 $r \geq r_s$ での解 $\vec{F}_\pm(r)$ は \vec{F}_j^\pm の線型結合で次の様に与えられる。

$$\vec{F}_+(r) = x_1 \vec{F}_1^+(r) + x_2 \vec{F}_2^+(r) + x_3 \vec{F}_3^+(r) \quad (\text{A } 2)$$

($r_s \leq r \leq r_s + \delta$)

$$\vec{F}_-(r) = y_1 \vec{F}_1^-(r) + y_2 \vec{F}_2^-(r) + y_3 \vec{F}_3^-(r) \quad (\text{A } 3)$$

($r_s - \delta \leq r \leq r_s$)

係数($x_1 \dots y_3$) 及び ω を定めると固有値固有モードが求まった事になる。 ϕ と ϕ' の $r = r_s \pm \delta$ に於ける連続条件から ($x_1 \dots y_3$) の間に

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 x_j \phi_j(r_s + \delta) &= \phi_{\text{MHD}}(r_s + \delta) \\ \sum_{j=1}^3 x_j \phi'_j(r_s + \delta) &= \phi'_{\text{MHD}}(r_s + \delta) \\ \sum_{j=1}^3 y_j \phi_j(r_s - \delta) &= \phi_{\text{MHD}}(r_s - \delta) \\ \sum_{j=1}^3 y_j \phi'_j(r_s - \delta) &= \phi'_{\text{MHD}}(r_s - \delta) \end{aligned} \quad (\text{A } 4)$$

の関係式が成立する。 ϕ_{MHD} はMHD領域の解である。(A 4) より (x_1, x_2, y_1, y_2) は x_3, y_3 を用いて表現することが出来、 \vec{F}_\pm は

$$\vec{F}_+(r) = \vec{G}_+(r) + x_3 \vec{H}_+(r) \quad (\text{A } 5)$$

$$\vec{F}_-(r) = \vec{G}_-(r) + y_3 \vec{H}_-(r) \quad (\text{A } 6)$$

と表わすことができる。ここで

$$\begin{aligned} \vec{G}_{\pm}(r) &= \frac{\phi_2^{\pm'}(r_s \pm \delta) \phi_{\text{MHD}}(r_s \pm \delta) - \phi_{\text{MHD}}'(r_s \pm \delta)}{\phi_2^{\pm'}(r_s \pm \delta) - \phi_1^{\pm'}(r_s \pm \delta)} \vec{F}_1^{\pm}(r) \\ &+ \frac{\phi_{\text{MHD}}'(r_s \pm \delta) - \phi_1^{\pm}(r_s \pm \delta) \phi_{\text{MHD}}(r_s \pm \delta)}{\phi_2^{\pm'}(r_s \pm \delta) - \phi_1^{\pm'}(r_s \pm \delta)} \vec{F}_2^{\pm}(r) \end{aligned} \quad (\text{A } 7)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\pm}(r) &= \frac{\phi_3^{\pm'}(r_s \pm \delta) - \phi_2^{\pm'}(r_s \pm \delta)}{\phi_2^{\pm'}(r_s \pm \delta) - \phi_1^{\pm'}(r_s \pm \delta)} \vec{F}_1^{\pm}(r) \\ &+ \frac{\phi_1^{\pm'}(r_s \pm \delta) - \phi_3^{\pm'}(r_s \pm \delta)}{\phi_2^{\pm'}(r_s \pm \delta) - \phi_1^{\pm'}(r_s \pm \delta)} \vec{F}_2^{\pm}(r) + \vec{F}_3(r) \end{aligned} \quad (\text{A } 8)$$

である。

\vec{F}_{\pm} は $r = r_s$ で連続でなければならない。 $r = r_s$ で \vec{F}_+ と \vec{F}_- が連続である時、ある数係数 α が存在して

$$\vec{F}_+(r_s) = \alpha \vec{F}_-(r_s) \quad (\text{A } 9)$$

が成立する。(A 5), (A 6) を代入して

$$\left[\vec{G}_+(r_s), \vec{H}_+(r_s), -\vec{G}_-(r_s), -\vec{H}_-(r_s) \right] \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ \alpha \\ \alpha y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A } 10)$$

が得られるが、これが解 (x_3, y_3, α) を持つのは

$$\det | \vec{G}_+(r_s), \vec{H}_+(r_s), -\vec{G}_-(r_s), -\vec{H}_-(r_s) | = 0 \quad (\text{A } 11)$$

の時に限られる。(A 11) 式が ω を定め、(A 4), (A 10) 式より固有モードを求めることができる。

こうして得られる $(x_1, \dots, y_3, \omega)$ は δ の選び方に依存する。しかし、(10) 式が漸近型で与えられていることからわかるが、 δ を十分大きく取ればそれはひとつの定った値に収束する。実際、 $|k_{\parallel} v_i / \omega| \sim 1$ の領域でイオンランダウ減衰が大きく、第 IV 成分を正確に排除することができ、第 III 成分の振巾が十分減衰するので正しい固有値が得られ、それは δ に依存しない。

(A 11) を解いて得られる γ / ω_* を δ の函数として図 A 1 に示した。 $|k_{\parallel}(r_s + \delta) v_i / \omega| \geq 0.5$ の時に y は一定値に収束することがわかる。

付章B 電子衝突効果

第5章の計算によると温度が下降するにつれ u/v_i の値が増大し成長率が増すことが示された。しかし、温度が下降すると電子衝突周波数が上昇し、無衝突モデルは適当でなくなる。低温での安定性を正確に知るために、ここでは粒子数保存の Krook モデルの衝突オペレーターを用いて $\nu/\omega_* > 1$ の領域の安定性を調べよう。 $\nu/\omega_* \ll 0$ の時、(2)-(4)式中の P が衝突項を含む伝導度 P_R に置き換えられる。 $\eta_e = 0$ の時、 P_R は [19] に求められており、

$$\begin{aligned}
 P_R = & \frac{\omega - \omega_*}{2\omega} Z'(\hat{\xi}_e) \left\{ 1 + \frac{i\nu}{\sqrt{2}|k_{\parallel}|v_e} Z(\hat{\xi}_e) \right\}^{-1} + \frac{\omega\tau + \omega_*}{2\omega} Z'(\xi_i) \\
 & + \frac{k_{\parallel} u}{\sqrt{2}|k_{\parallel}|v_e} \left[Z(\hat{\xi}_e) + \frac{\omega - \omega_i}{\omega} \xi_e Z'(\hat{\xi}_e) \left\{ 1 + \frac{i\nu}{\sqrt{2}|k_{\parallel}|v_e} Z(\hat{\xi}_e) \right\}^{-1} \right] \\
 & \times \left\{ 1 + \frac{i\nu}{\sqrt{2}|k_{\parallel}|v_e} Z(\hat{\xi}_e) \right\}^{-1} \quad (B1)
 \end{aligned}$$

となる。 ν は電子衝突周波数であり $\nu = 4.2 \times 10^{-6} n_0 (e/T_e)^{3/2} \times \ln(1.55 \times 10^{-6} \sqrt{T_e^3/\eta_e e^3})$ と与えられ、 $\hat{\xi}_e = (\omega + i\nu)/\sqrt{2}|k_{\parallel}|v_e$ である。イオンは無衝突であるとした。

この P_R を用いると電子衝突の効果論ずることができる。温度が下がると5章との結果からの差があらわれる。

図B1は第5章第4図と同じパラメータに対し、 τ を T の関数であらわしたものである。実線は (B1) による結果であり、破線は(4)による無衝突近似の結果である。 $\nu/\omega_* > 1$ となると、衝突効果はまず安定化効果を持つ。しかし、衝突周波数が一層上がって

$$\nu/\omega_* \gtrsim \sqrt{v_e/v_i} \quad (B2)$$

程度になると、ドリフト波によるエネルギー搬送が阻害され成長率が急上昇する。

図B2は安定 - 不安定領域の境界 (2, 1) モードに対して書きあらわしたものである。破線は無衝突近似の結果である。不安定領域は狭くなる。図は同時に $\nu/\omega_* = 1$ 、 $\nu/\omega_* = \sqrt{v_e/v_i}$ の境界も示してある。

磁場にシアがある時、ドリフト波はコンベクティブ減衰を受けるが、電子衝突効果はそれを増大させる。静電ドリフト波、電磁ドリフト波及びドリフト・アルフベン波に対する電子衝突による安定化効果は、シア磁場中の平板配位で確かめられている^{19, 37-39}。ドリフト・テアリング波に対してもその安定化効果は有効であることがわかる。

$\nu/\omega_* \gtrsim \sqrt{v_e/v_i}$ となると、実際、イオンの衝突を無視することができないため、無衝突近似でイオンを扱った (B1) 式の精度が下がる。イオン衝突を考慮した理論が望ましいが、イオン衝突周波数が増してゆくと、結局は流体近似の結果になる。

References

- 1) V.D.Shafranov, Zh. Tekh. Fiz. 40 (1970) 241 (Sov. Phys. Tech. Phys. 15 (1970) 175).
- 2) H.P.Furth, J. Killeen and M.N.Rosenbluth, Phys. Fluids 6 (1963) 459.
- 3) H.P.Furth, P.H.Rutherford and H.Selberg, Phys. Fluids 16 (1973) 1054.
- 4) B.Coppi, Phys. Fluids 7 (1964) 1501.
- 5) B.Coppi, Phys. Fluids 8 (1965) 2273.
- 6) G.Laval, R.Pellat and M.Vuillemin, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1965) Vol.2 p259.
- 7) B.B.Kadomtsev, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1977) Vol.1 p555.
- 8) B.V.Waddel, et al., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1977) Vol.1 p443.
- 9) K.Itoh, S.Inoue and S.Yoshikawa, J. Phys. Soc. Japan 41 (1976) 725.
- 10) B.B.Kadomtsev, Fiz. Plasmy 1 (1975) 710 (Sov. J. Plasma Phys. 1 1975 512).
- 11) J.D.Callen, Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 1540.
- 12) A.B.Rechester and M.N.Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. 40 (1978) 38.
- 13) T.Tange, et al., J. Phys. Soc. Japan 46 (1979) 266.
- 14) D.Biskamp, Nucl. Fusion 18 (1978) 1059.
- 15) K.T.Tsang, et al., Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 557.
- 16) S.Inoue, et al., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1979) Vol.1 p777.
- 17) D.Ross, et al., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1979) Vol.1 p 787.
- 18) C.Ueno, et al., J. Phys. Soc. Japan 48 (1979) 984.

- 19) S.Inoue, K.Itoh and S.Yoshikawa, J. Phys. Soc. Japan 48 (1980) 973.
- 20) H.Irie, S.Inoue and K.Nishikawa, Phys. Letters 74A (1979) 219.
- 21) R.D.Hazeltine, D.Dobrott and T.S.Wang, Phys. Fluids 18 (1975) 1778.
- 22) J.F.Drake and Y.C.Lee, Phys. Fluids 20 (1977) 1341.
- 23) L.Chen, P.H.Rutherford and W.M.Tang, Phys. Rev. Lett. 34 (1977) 460.
- 24) H.R.Strauss, et al., Phys. Fluids 22 (1979) 889.
- 25) R.D.Hazeltine, et al., Phys. Fluids 22 (1979) 1932.
- 26) S.M.Mahajan, et al., Phys. Fluids 22 (1979) 2147.
- 27) B.Coppi, J.W.-K. Mark and L.Sugiyama, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1058.
- 28) J.F.Drake, et al., Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 994.
- 29) P.J.Catto, et al., Nucl. Fusion 14 (1974) 405.
- 30) L.D.Pearlstein and H.L.Berk, Phys. Rev. Lett. 23 (1969) 220.
- 31) S.Inoue, K.Itoh and Y.Terashima, International Conference on Plasma Physics (Nagoya, 1980) Vol.1 p47.
- 32) J.B.Taylor, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1977) Vol.2 p323.
- 33) R.J.Hastie, K.W.Hesketh and J.B.Taylor, Nucl. Fusion 19 (1979) 1223.
- 34) K.Itoh, T.Tuda and S.Inoue, J. Phys. Soc. Japan 48 (1980) 258.
- 35) S.Inoue, K.Itoh and S.Yoshikawa, Nucl. Fusion 18 (1978) 755.
- 36) K.Itoh, S.Inoue and T.Tuda, Research Report HIFT-21 (Hiroshima, 1980).
- 37) L.Chen, et al., Phys. Rev. Letters 41 (1978) 1566.
- 38) J.G.Cordey, E.M.Jones and D.F.H.Start, Plasma Phys. 21 (1979) 725.
- 39) K.I.Nishikawa, J. Phys. Soc. Japan 48 (1980) No.6 in press.

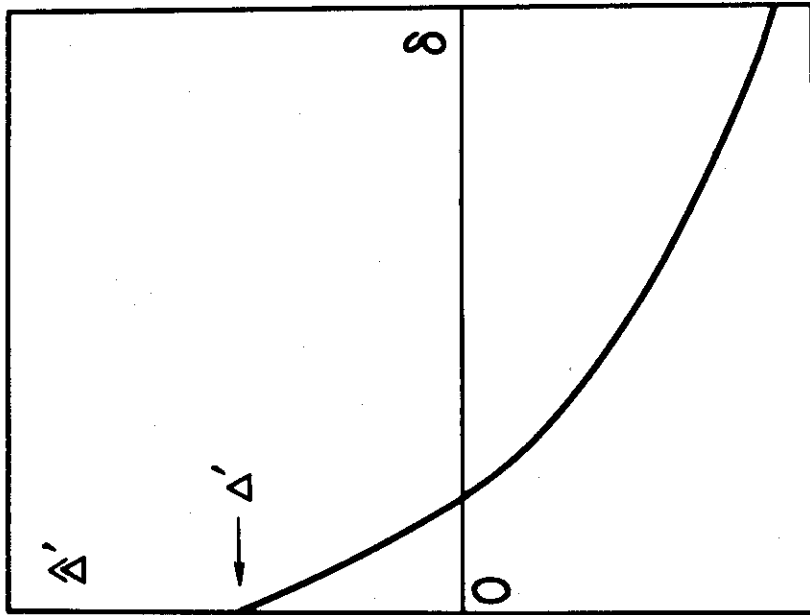


図1 $\hat{\Delta}'$ を δ の関数として模式的にあらわしたものの。
 $\delta \rightarrow 0$ の極限では $\hat{\Delta}'$ と Δ' は一致する。

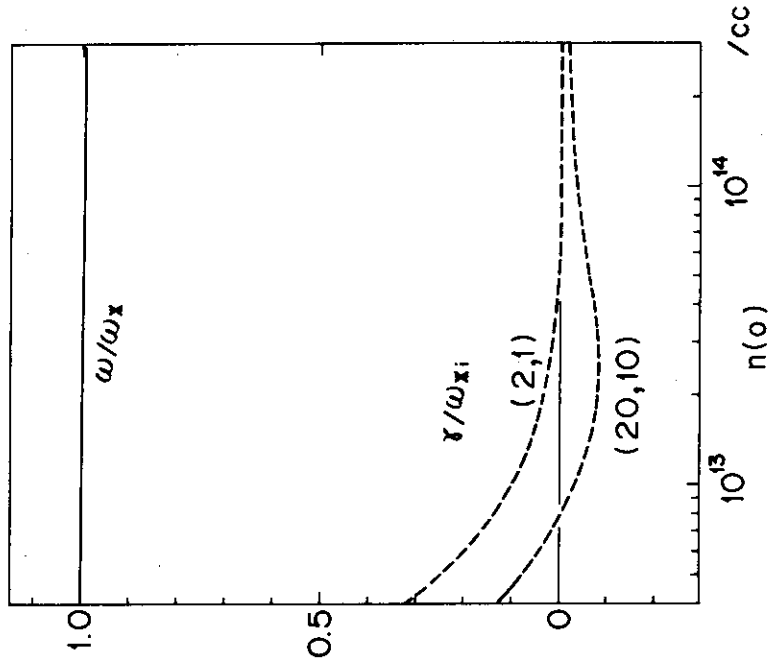


図2 (2,1) モードの固有値 ω をプラズマ密度の関数としてあらわす。
 $q(0) = 1.49$, $q(a) = 3.4$, $\eta_j = 1$, $\eta_e = 0$, $a = d$, $\tau = 2$ 。
 温度は $T_e = 4$ keV。 $n(o) \geq 7 \times 10^{13}$ /cc で安定となる。(20,10) モードの成長率も示してある。 $\omega_{*i} = \omega_* / \tau$ 。

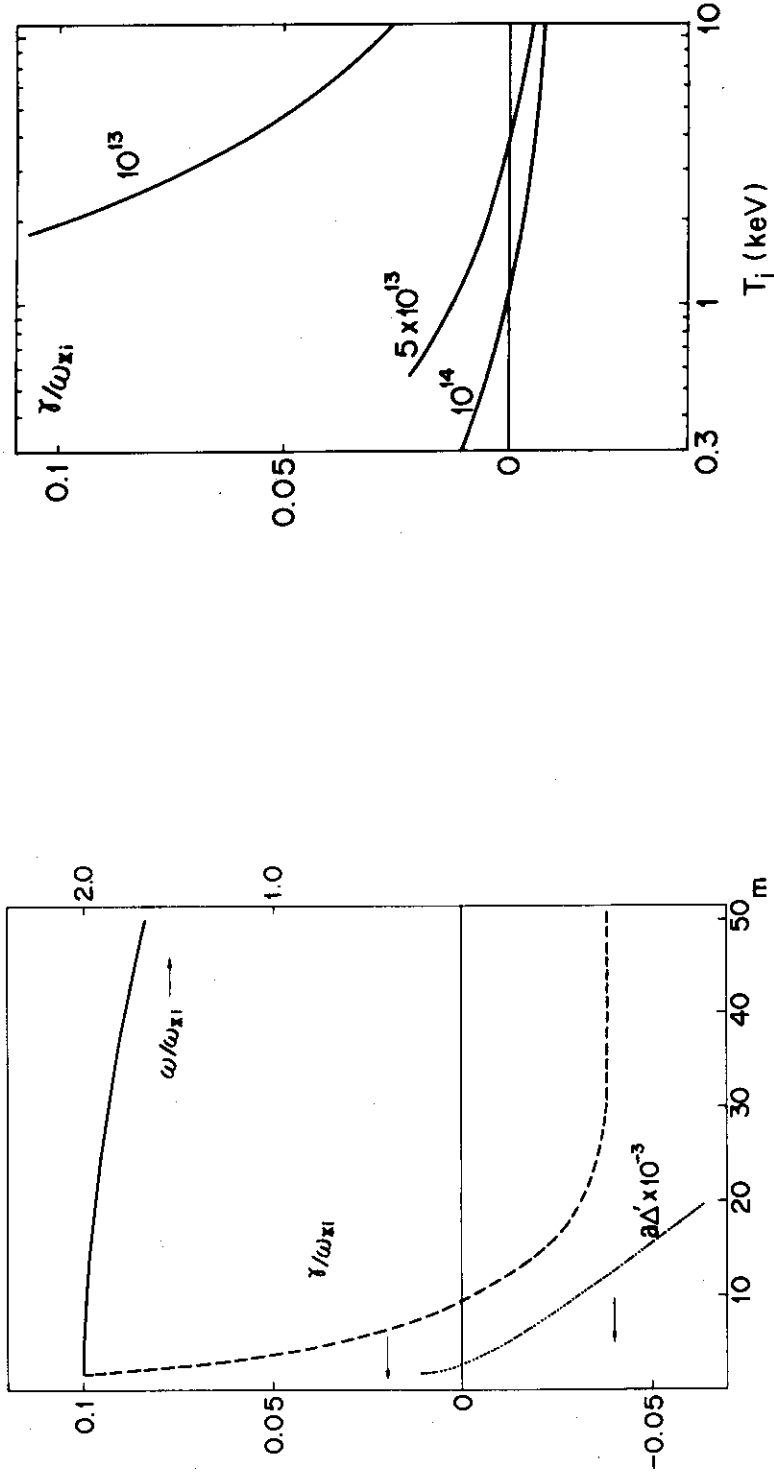


図3 $m/n=2$ のらせん度が共通のモードについて γ と m の関係を示す。図4 (2,1) モードの成長率の T_i 依存性。密度がそれぞれ 10^{14} , 5×10^{13} , 10^{13} /cc である。 $n(0) = 10^{13}$ /cc とし、他のパラメータは図2と等しい。

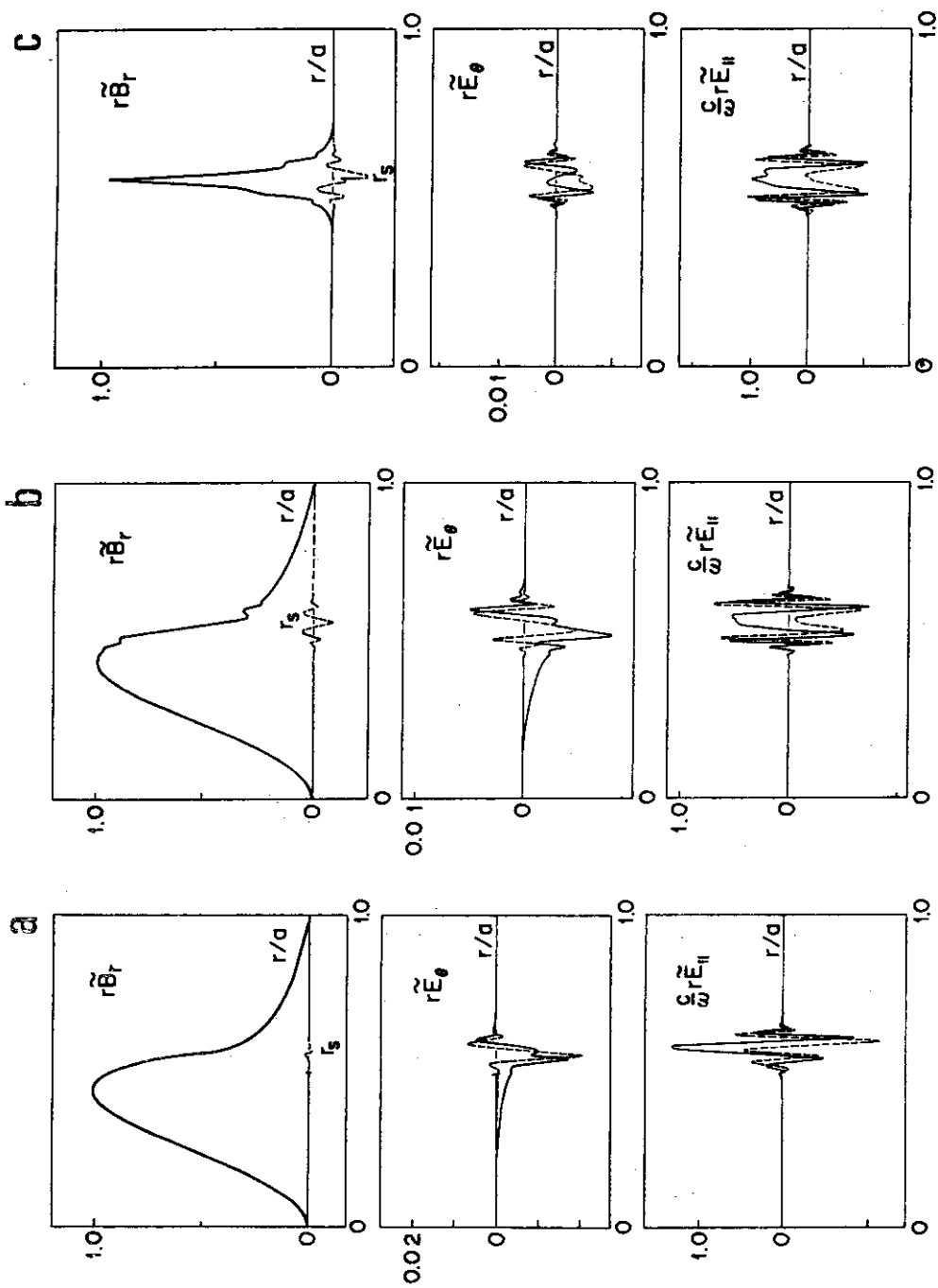


図5 固有モード構造を示す。a) は (2, 1) モードで $n(0) = 10^{13}$, $\omega = 1.002\omega_*$, $\gamma = 0.161\omega_*$ 。b) は安定な (2, 1) モードで $n(0) = 10^{14}/cc$, $\omega = 0.995\omega_*$, $\gamma = -0.0016\omega_*$ 。c) は安定な (20, 10) モードで $n(0) = 10^{14}/cc$, $\omega = 0.993\omega_*$, $\gamma = -0.018\omega_*$ 。実線は実部であり破線は虚部を示す。 $\text{Im}\phi(r \rightarrow 0)/\text{Re}\phi(r \rightarrow 0) \rightarrow 0$ と規格化されている。他のパラメータは図2に等しい。

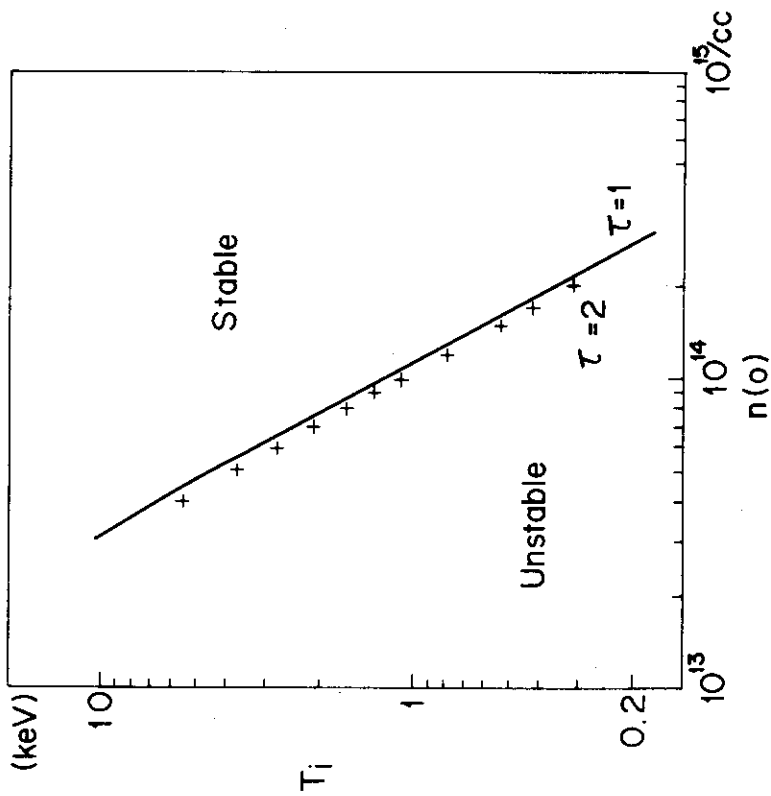


図6 (2,1)モードの不安定領域を $n(o) - T_i$ 面上に示した。実線は $\tau = 1$ での境界であり、+記号は $\tau = 2$ の時の境界を示す。境界は τ に弱い依存性を示し、ほぼ $u/v_i \geq 0.4$ が得られる。他のパラメータは図2に等しい。

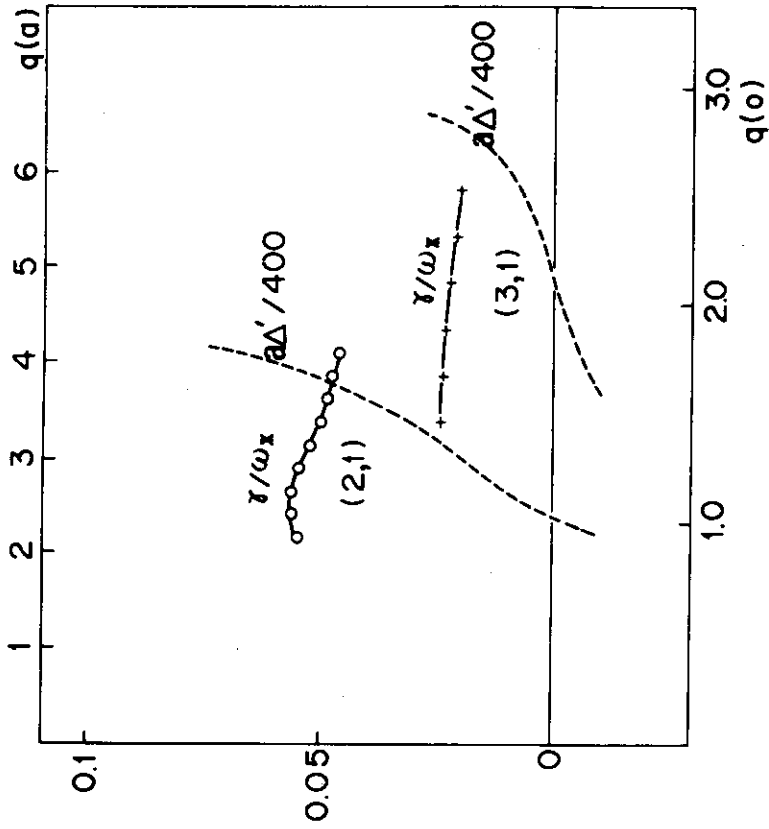


図7 成長率の q 依存性。(2,1)モードと(3,1)モードを示す。点線は Δ' 。 $n(o) = 10^{13}/cc$ とし、他のパラメータは図2と共通である。

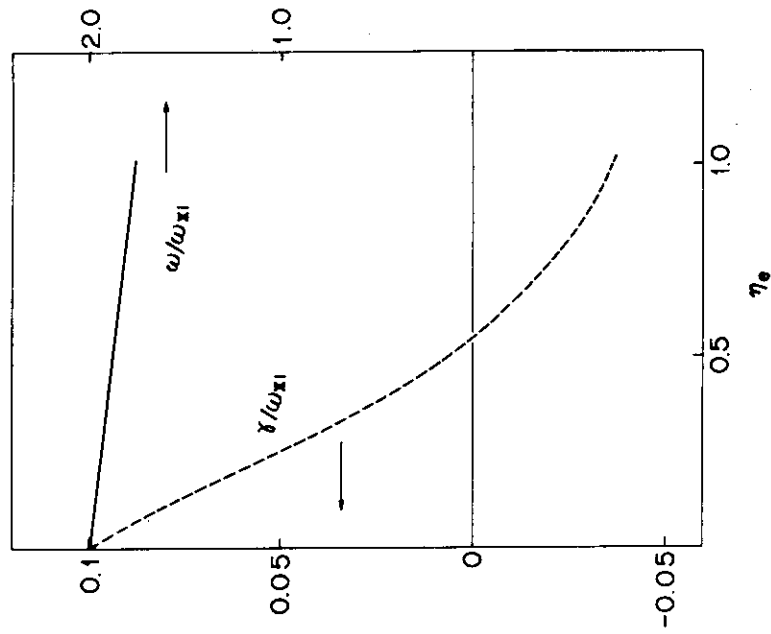


図9 固有値 ω の η_0 依存性。 $n(0) = 10^{13}/\text{cc}$ とし、他のパラメータは図2と共通。

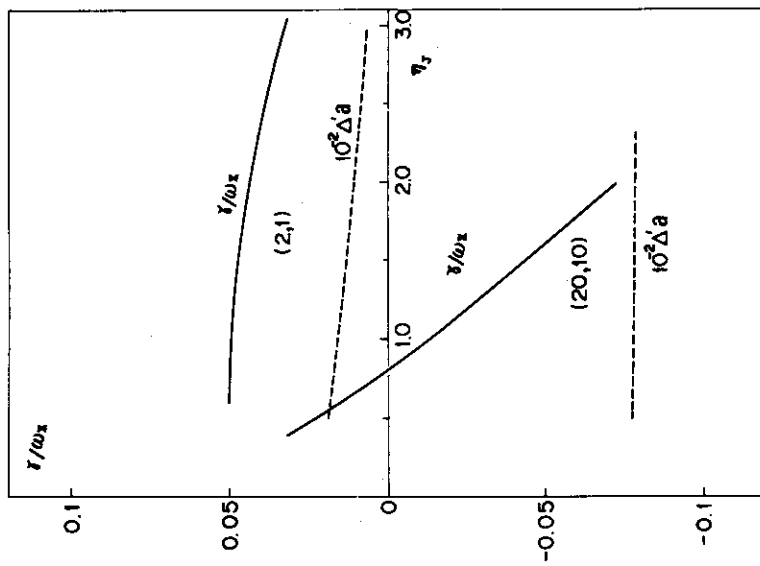
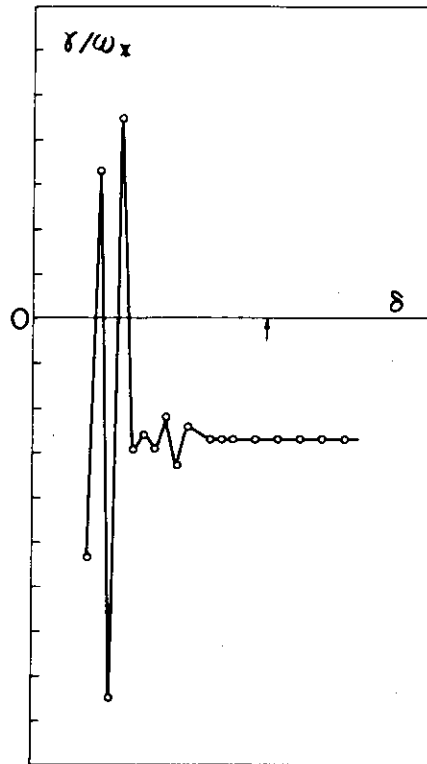
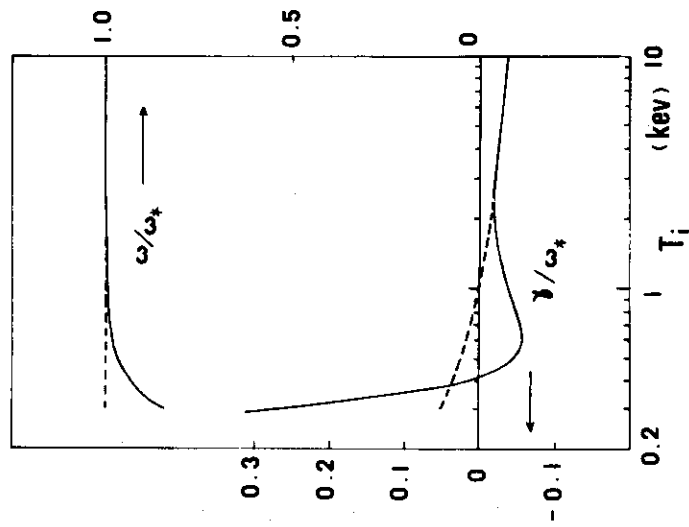


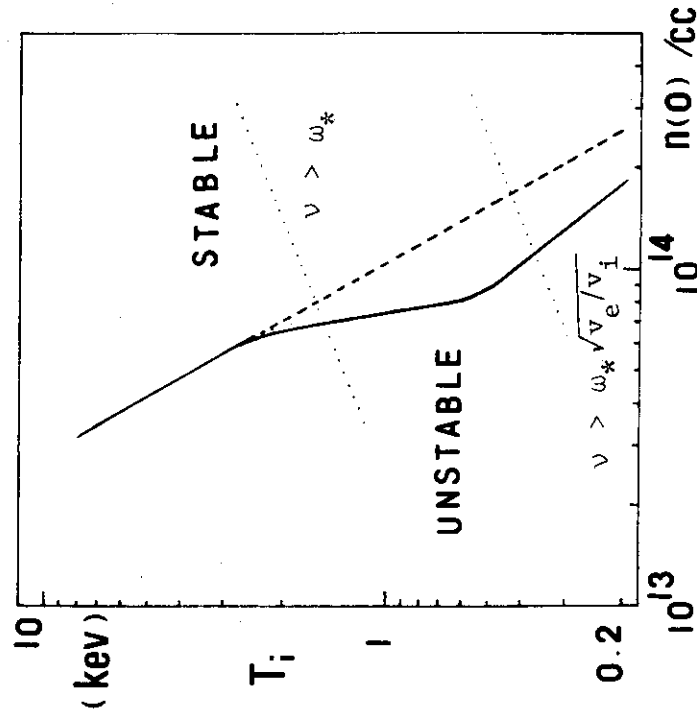
図8 成長率の η_1 依存性。(2,1)及び(20,10)モードを示す。点線は Δ' 。 $r_s = a/2$ となる様 $q(0)$ も同時に変化する。 $n(0) = 10^{13}/\text{cc}$ 。他は図2のパラメータに等しい。



図A1 固有値の δ 依存性と収束性を示す。矢印は $k_r(\delta+r_s) = \omega/v_i$ となる位置を表す。 $|k_r(\delta) v_i/\omega| \geq 0.5$ の時、 γ は真の成長率に収束する。



図B1 (2,1)モードの固有値(電子衝突効果を取入れたもの)。
 T_i 依存性を示す。 $n(0) = 10^{14}/\text{cc}$ とし、他のパラメータは
 図2による。破線は無衝突近似の結果。



図B2 (2,1)モードの安定-不安定境界。図2のパラメータによる。
 破線は無衝突近似の結果。点線で $v > \omega_*$ 及び $v > \omega_* \sqrt{v_e/v_i}$
 の領域をあらわして示した。