

JAERI - M

90-064

マニピュレータ機構学における
逆行列の一利用法

1990年3月

佐々木 忍

JAERI-M レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）
あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城
県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費領布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department
of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun,
Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1990

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 山田 軽 印 刷 所

マニピュレータ機構学における逆行列の一利用法

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1990年2月28日受理)

今日まで、マニピュレータの逆問題に対していくつかの方法が提案され利用されてきた。筆者は先に、機構的關係式が仮想的なマニピュレータの導入により、6関節型マニピュレータの機構学方程式を4変数の方程式系に単純化できることを示した。これは逆問題の本質をさぐる斬新な方法といえる。

一方、このような補助的な方法を適用する代わりに、このプロセスにおいて同次変換行列の反転操作を行うことにより同一の結果に到達することが明らかになった。本報では、こうしたリンク連鎖の計算が容易にできる逆行列の有用性に力点をおいた誘導過程を示す。

A Method of Using the Inverse Matrix for Manipulator Kinematics

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received February 28, 1990)

Up to now, some approaches have been proposed and used to the inverse problems of manipulators. As for a six-link manipulator, the kinematic relationships can be simplified into an equation system with four variables by the introduction of a virtual manipulator, which seems novel as an alternative way of looking at the entity of the inverse problem.

In place of such an auxiliary method, the inversion of the homogeneous transformation matrix in this process was found to lead to the same results. In this paper, this derivation is shown laying an emphasis on the usefulness of the inverse matrix having the possibility of facilitating the calculation of the link chain.

Keywords: Virtual Manipulator, Link Mechanism, Homogeneous Transformation, Matrix Inversion, Manipulator Kinematics

目 次

1. はじめに	1
2. 行列反転により導かれた関係	3
3. おわりに	7
謝 辞	7
参 考 文 献	7
付 録	8

Contents

1. Introductory remarks	1
2. Kinematic relationships derived by matrix inversion	3
3. Concluding remarks	7
Acknowledgement	7
Reference	7
Appendices	8

1. はじめに

ロボット・マニピュレータの逆問題については、これまで線形化ヤコビ法に代わる方法として、異なる観点からのアプローチを提案してきた。それらは、運動学モデルの多項式変換をはじめとして、数理計画の最小化技法、ベクトルと幾何学的直感を利用した方法、関節変数を分離し最適化問題に関連づけた方法などで、特異点回避と高精度な解に力点をおいて開発を行ってきた。なかでも、仮想的なマニピュレータを導入したアプローチでは、マニピュレータの逆問題として指先の位置・姿勢が与えられていることを特に注意して、そこを起点に肩の方へと辿ってみることが示唆された。⁽¹⁾そこで、ベースから順方向にマニピュレータの指先位置・姿勢を決定する場合とは逆に、マニピュレータの先端部の位置が与えられ、肩の終端が自由である仮想マニピュレータを解析対象のマニピュレータのなかに入れた。そして、この仮想マニピュレータの終端位置と実際にそれがあべき位置との偏差を最小化し、零にもっていくことにより関節解を決定した。特に、計算効率を念頭において、6関節マニピュレータの先端から数えて5リンク分(4関節角)をベースにつながる第1リンク(2関節角)と分離させて、切り離れた第5リンク終端とベース側第1リンクのそれとの位置の差を最小(すなわち、零)にすることで、6リンク全体の連結を実現させた。このようなアプローチは、3次元空間内でリンクの有機的つながりにより形成された開ループの体系について、見かけ上指先から肩の部分へと逆方向に辿っているようであるが、実は指先が固定されたものとすれば、順問題的な取扱いを行っていることになる。文献(1)では、指先からこの肩の部分までの仮想リンクに対して適当な座標系を再定義し、その変換行列の計算から新たな関係式が引出せた。本報では、機構の特徴や容易な理解に役だった上記仮想マニピュレータの概念から離れ、問題を単に順方向に定義した座標系に対する同次変換行列の反転操作で同一目的が達成できることを示す。仮想リンク上の座標(新座標)系や、指先および肩部での元の座標系と新座標系間の180(deg)反転操作などが不要となり、方向余弦の特徴的な性質を利用すれば、簡単な逆行列(実際には転置行列)で置き換えることにより、同一関係式が引出せることを示す。なお、文献(1)のアルゴリズムの展開を付録 A に記載する。

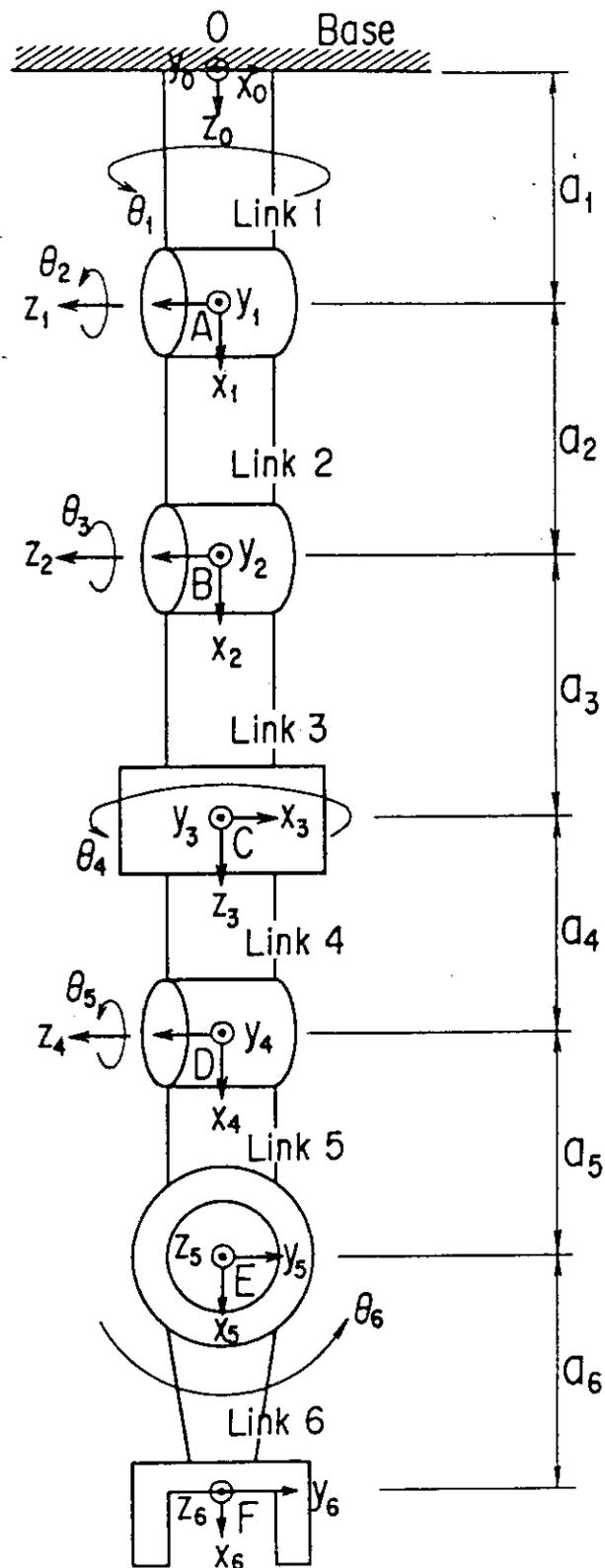


Fig.1 A Six-link Manipulator with Arbitrary Link Co-ordinates Systems

2. 行列反転により導かれた関係

本報では、Fig.1に示した台座(ベース)に回転ジョイントが結合され、全体として6関節から構成されるメカニカル・マニピュレータを研究対象とする。このアームの空間的位置や姿勢また各関節角を求めるアルゴリズムを展開するために、相対運動を許す座標系を各関節に設定することが必要である。ここでは、文献(1)の式の1部との比較を行うことから同じ座標系を用いる。すなわち、マニピュレータを支えるベースの座標系を $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ 、肩の座標系を $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 \dots 、指先の座標系を $\Sigma_6(x_6, y_6, z_6)$ で表現する。仮想リンク上に定義した新座標系 $\Sigma_6^+ \sim \Sigma_2^+$ は本報では必要としない。関係式を導出する計算過程に重点をおくため、以下の座標変換行列や逆行列の計算の子細が一見してわかるように(冗長性を感じるが)、あえて詳しく記述しておく。各関節軸に割当てた右手直交系に対して、リンク間の同次変換行列を計算する上で重要な回転・並進操作はつぎの記号で記述する。

- $\text{Rot}(x, \theta)$: x -軸のまわりに右ネジの進む向きを正として角度 θ だけ回転
 (または旋回)したときの座標変換行列
 $\text{Rot}(y, \theta)$: y -軸のまわりに右ネジの進む向きを正として角度 θ だけ回転
 (または旋回)したときの座標変換行列
 $\text{Rot}(z, \theta)$: z -軸のまわりに右ネジの進む向きを正として角度 θ だけ回転
 (または旋回)したときの座標変換行列
 $\text{Trans}(l, m, n)$: x, y, z 軸方向にそれぞれ l, m, n だけ並進させる座標変換行列
 A_n : 上の回転, 並進操作を含む座標変換行列

この記法に従って、Fig.1のマニピュレータに対するベースから指先への各ステップでの 4×4 座標変換行列をつぎのように定める。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \text{Rot}(z_0, \theta_1) \text{Trans}(0, 0, a_1) \text{Rot}(y_0, -\pi/2) \\
 &= \left| \begin{array}{ccc|ccc} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cccc} 0 & -s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \text{Rot}(z_1, \theta_2) \text{Trans}(a_2, 0, 0) \\
 &= A_2 * A_2^+ \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 c_2 & -s_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\
 s_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \text{Rot}(z_2, \theta_3) \text{Trans}(a_3, 0, 0) \text{Rot}(y_2, \pi/2) \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 c_3 & -s_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 s_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc}
 0 & -s_3 & c_3 & a_3 c_3 \\
 0 & c_3 & s_3 & a_3 s_3 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \text{Rot}(z_3, \theta_4) \text{Trans}(0, 0, a_4) \text{Rot}(y_3, -\pi/2) \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 c_4 & -s_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 s_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc}
 0 & -s_4 & -c_4 & 0 \\
 0 & c_4 & -s_4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & a_4 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 A_5 &= \text{Rot}(z_4, \theta_5) \text{Trans}(a_5, 0, 0) \text{Rot}(x_4, -\pi/2) \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 c_5 & -s_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 s_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cccc}
 c_5 & 0 & -s_5 & a_5 c_5 \\
 s_5 & 0 & c_5 & a_5 s_5 \\
 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$A_6 = \text{Rot}(z_5, \theta_6) \text{Trans}(a_6, 0, 0)$$

$$= \begin{vmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & a_6 & | & c_6 & -s_6 & 0 & a_6 c_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & | & s_6 & c_6 & 0 & a_6 s_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

ところで、同次変換行列Mの反転は一般につきのように記述することができる。
(付録のBを参照)

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -n \cdot p \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & -o \cdot p \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a \cdot p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad n &= (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T \\ o &= (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T \\ a &= (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T \\ p &= (p_x, p_y, p_z)^T \end{aligned} \quad (8)$$

n, o, aは方向余弦ベクトル(単位ベクトル)を表し, pは位置ベクトルを表す。また, Tは転置記号である。n・p等はベクトルのスカラー積を意味する。

さて、マニピュレータの指先座標系Σ₆を起点にして固定端へと展開させる計算過程は、通常とは逆方向に追跡した順問題と考えられ、つぎの逆行列の積演算により求めることができる。

$$\begin{aligned} &A_6^{-1}A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1} = \\ &= \begin{vmatrix} c_6 & s_6 & 0 & -a_6 & | & c_5 & s_5 & 0 & -a_5 & | & 0 & 0 & 1 & -a_4 & | & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_6 & c_6 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 & 0 & | & -s_4 & c_4 & 0 & 0 & | & -s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -s_5 & c_5 & 0 & 0 & | & -c_4 & -s_4 & 0 & 0 & | & c_3 & s_3 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} c_5 c_6 & s_5 c_6 & -s_6 & -a_5 c_6 - a_6 & | & 0 & 0 & 1 & -a_4 & | & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_6 c_5 & -s_5 s_6 & -c_6 & a_5 s_6 & | & -s_4 & c_4 & 0 & 0 & | & -s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ -s_5 & c_5 & 0 & 0 & | & -c_4 & -s_4 & 0 & 0 & | & c_3 & s_3 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -s_4 s_5 c_6 + s_6 c_4 & s_5 c_4 c_6 + s_4 s_6 & c_5 c_6 & -a_4 c_5 c_6 - a_5 c_6 - a_6 & | & 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_4 s_5 s_6 + c_4 c_6 & -s_5 s_6 c_4 + s_4 c_6 & -s_6 c_5 & a_4 s_6 c_5 + a_5 s_6 & | & -s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ -s_4 c_5 & c_4 c_5 & -s_5 & a_4 s_5 & | & c_3 & s_3 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -s_3 s_5 c_4 c_6 - s_3 s_4 s_6 + c_3 c_5 c_6 & s_5 c_3 c_4 c_6 + s_4 s_6 c_3 + s_3 c_5 c_6 & s_4 s_5 c_6 - s_6 c_4 & & | & & & & \\ s_3 s_5 s_6 c_4 - s_3 s_4 c_6 - s_6 c_3 c_5 & -s_5 s_6 c_3 c_4 + s_4 c_3 c_6 - s_3 s_6 c_5 & -s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6 & & | & & & & \\ -s_3 c_4 c_5 - s_5 c_3 & c_3 c_4 c_5 - s_3 s_5 & s_4 c_5 & & | & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & | & & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} -a_{34}C_5C_6 - a_5C_6 - a_6 & \\ a_{34}S_6C_5 + a_5S_6 & \\ a_{34}S_5 & \\ 1 & \end{array} \quad a_{34} = a_3 + a_4 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & A_6^{-1}A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}(A_2^+)^{-1} = \\ = & \left[\begin{array}{ccc|ccc} -S_3S_5C_4C_6 - S_3S_4S_6 + C_3C_5C_6 & S_5C_3C_4C_6 + S_4S_6C_3 + S_3C_5C_6 & S_4S_5C_6 - S_6C_4 & & & \\ S_3S_5S_6C_4 - S_3S_4C_6 - S_6C_3C_5 & -S_5S_6C_3C_4 + S_4C_3C_6 - S_3S_6C_5 & -S_4S_5S_6 - C_4C_6 & & & \\ -S_3C_4C_5 - S_5C_3 & C_3C_4C_5 - S_3S_5 & S_4C_5 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ -a_{34}C_5C_6 - a_5C_6 - a_6 & & & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ a_{34}S_6C_5 + a_5S_6 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{34}S_5 & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ = & \left[\begin{array}{ccc|ccc} -S_3S_5C_4C_6 - S_3S_4S_6 + C_3C_5C_6 & S_5C_3C_4C_6 + S_4S_6C_3 + S_3C_5C_6 & S_4S_5C_6 - S_6C_4 & & & \\ S_3S_5S_6C_4 - S_3S_4C_6 - S_6C_3C_5 & -S_5S_6C_3C_4 + S_4C_3C_6 - S_3S_6C_5 & -S_4S_5S_6 - C_4C_6 & & & \\ -S_3C_4C_5 - S_5C_3 & C_3C_4C_5 - S_3S_5 & S_4C_5 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ a_2(S_3S_5C_4C_6 + S_3S_4S_6 - C_3C_5C_6) - a_{34}C_5C_6 - a_5C_6 - a_6 & & & & & \\ -a_2(S_3S_5S_6C_4 - S_3S_4C_6 - S_6C_3C_5) + a_{34}S_6C_5 + a_5S_6 & & & & & \\ a_2(S_3C_4C_5 + S_5C_3) + a_{34}S_5 & & & & & \\ 1 & & & & & \end{array} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

この結果、肩部第2関節までの上の逆行列の演算 $A_6^{-1}A_5^{-1}A_4^{-1}A_3^{-1}(A_2^+)^{-1}$ は、付録の(A.9)に示した仮想マニピュレータの指先から先端 P_6 に致る行列積に等しいことが分る。これにより、仮想リンクを導入して引出した関係は、通常の同次変換行列の反転操作により全く同一の結果に帰着することが示された。一般的には、隣接するリンク i と $i+1$ の座標系に関して、 $i+1$ の座標系を基準にした場合の座標系 i への変換行列 ${}_{i+1}M^i$ は、つぎのように表せる。

$${}_{i+1}M^i = [{}_{i+1}M^{i+1}]^{-1} \quad (11)$$

3. おわりに

マニピュレータの指先から肩の部分へと連鎖の様相を追及していく過程は、座標変換行列の立場からみると、同次変換行列の逆行列を計算することで全く同じ結果に到達することが示された。しかも、姿勢に関する行列の反転は単に転置するのみで、その操作が極めて単純であることも、変換行列のすぐれた特徴になっている。こうした行列反転を巧妙に使えるば、新たなアルゴリズムの開発にもつながるであろう。

謝辞

本研究の機会と支援を与え、また本報告書作成の上で有益なアドバイスをいただいた原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝します。

参考文献

- 1) 佐々木：多関節形ロボット・マニピュレータの逆運動学方程式に最小化手法を適用した新しい解法，計測自動制御学会論文集，23-3，(1987)。

3. おわりに

マニピュレータの指先から肩の部分へと連鎖の様相を追及していく過程は、座標変換行列の立場からみると、同次変換行列の逆行列を計算することで全く同じ結果に到達することが示された。しかも、姿勢に関する行列の反転は単に転置するのみで、その操作が極めて単純であることも、変換行列のすぐれた特徴になっている。こうした行列反転を巧妙に使えるば、新たなアルゴリズムの開発にもつながるであろう。

謝辞

本研究の機会と支援を与え、また本報告書作成の上で有益なアドバイスをいただいた原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝します。

参考文献

- 1) 佐々木：多関節形ロボット・マニピュレータの逆運動学方程式に最小化手法を適用した新しい解法，計測自動制御学会論文集，23-3，(1987)。

3. おわりに

マニピュレータの指先から肩の部分へと連鎖の様相を追及していく過程は、座標変換行列の立場からみると、同次変換行列の逆行列を計算することで全く同じ結果に到達することが示された。しかも、姿勢に関する行列の反転は単に転置するのみで、その操作が極めて単純であることも、変換行列のすぐれた特徴になっている。こうした行列反転を巧妙に使えるば、新たなアルゴリズムの開発にもつながるであろう。

謝辞

本研究の機会と支援を与え、また本報告書作成の上で有益なアドバイスをいただいた原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝します。

参考文献

- 1) 佐々木：多関節形ロボット・マニピュレータの逆運動学方程式に最小化手法を適用した新しい解法，計測自動制御学会論文集，23-3，(1987)。

付 録 A

— 仮想マニピュレータを用いた最適化手法(要約) —

本文のFig.1に示した座標系をもつマニピュレータに対して、指先から固定端へ逆に辿る計算過程を、指先 P_1 を基点として根元の支持機構までの間に仮想的なリンクで構成された別のマニピュレータを考えてみよう(Fig.2の点線部参照)。この仮想リンク($\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_5P_6}$)は実際の第2リンクから指先までの体系と幾何学的にまったく同一であるが、回転・旋回方向は順方向それと逆になる座標系を定義する。図の実線部を含めたOMP $_2P_1$ は実際のマニピュレータのある姿勢を示す。以下の解析で個々の変換行列を求める際の回転行列、並進行列は本文で説明した記号を用いる。また、順方向に計算する座標変換行列 A_n に対して、 A_n^+ を仮想リンク上の座標変換行列とする。

さて、指の部分の座標系 Σ_6 から逆に辿るためにこれを y_6 軸のまわりに180(deg)反転させ、新座標系 $\Sigma_6^+(x_6^+, y_6^+, z_6^+)$ を設定する。以下、点線で示した回転および旋回方向は、順方向の座標変換計算で定義した回転角の正方向である。

(i) 仮想リンク上先端 P_1 から第6関節までの変換行列 A_6^+ (Fig.3参照)

指部分の中心(Σ_6^+ の原点)から x_6^+ 方向へ a_6 だけ並進して、座標系 $\Sigma_5^+(x_5^+, y_5^+, z_5^+)$ を構成後、 z_5^+ 軸のまわりに θ_6 だけ旋回する。この間の変換行列を A_6^+ で表すと、

$$\begin{aligned}
 A_6^+ &= \text{Trans}(a_6, 0, 0)\text{Rot}(z_5^+, \theta_6) \\
 &= \begin{vmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

となる。

(ii) 仮想リンク上第6関節から第5関節までの変換行列 A_5^+ (Fig.4参照)

つぎに x_5^+ 軸のまわりに-90(deg)回転後 x_5^+ 軸に沿って a_5 だけ並進する。新座標系 $\Sigma_4^+(x_4^+, y_4^+, z_4^+)$ に対して z_4^+ 軸のまわりに θ_5 だけ旋回する。変換行列 A_5^+ は、(A.2)式で表される。

$$A_5^+ = \text{Rot}(x_5^+, -\pi/2)\text{Trans}(a_5, 0, 0)\text{Rot}(z_4^+, \theta_5)$$

$$= \begin{vmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

(iii) 仮想リンク上第5関節から第4関節までの変換行列 A_4^+ (Fig.5参照)

Fig.5を参考に、 y_4^+ 軸のまわりに90(deg)の回転と、 z_4^+ 方向に a_4 の並進を与える。座標系 $\Sigma_3^+(x_3^+, y_3^+, z_3^+)$ を定めた後、さらに z_3^+ 軸を中心に θ_4 だけ回転する。変換行列 A_4^+ はつぎのようになる。

$$A_4^+ = \text{Rot}(y_4^+, \pi/2)\text{Trans}(0, 0, a_4)\text{Rot}(z_3^+, \theta_4)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ -c_4 & s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

(iv) 仮想リンク上第4関節から第3関節までの変換行列 A_3^+ (Fig.6参照)

続いて z_3^+ 方向に a_3 並進後、 y_3^+ 軸を-90(deg)回転して新座標系 $\Sigma_2^+(x_2^+, y_2^+, z_2^+)$ を構成する。これを z_2^+ 軸のまわりに θ_3 の旋回を与えて、変換行列 A_3^+ を求める。

$$A_3^+ = \text{Trans}(0, 0, a_3)\text{Rot}(y_3^+, -\pi/2)\text{Rot}(z_2^+, \theta_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ c_3 & -s_3 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.4})$$

(v) 仮想リンク上第3関節から第2関節までの変換行列 A_2^+ (Fig.7参照)

最後にFig.7に示すように、 x_2^+ 方向へ a_2 だけ並進して座標系 $\Sigma_1^+(x_1^+, y_1^+, z_1^+)$ を定め、変換行列 A_2^+ を得る。

$$A_2^+ = \text{Trans}(a_2, 0, 0) \quad (\text{A.5})$$

さて、Fig.2から明らかなように、 \overline{OM} 間の距離 a_1 はリンクの長さ(一定)であり、回転 θ_1 とつぎの旋回 θ_2 による座標変換行列の積は点Mの方向のみを決定する。順方向に支持ベースから第2関節までの同次変換 A_1A_2 を決定する際に設定した座標系 $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ と仮想リンク最終点で定めた Σ_1^+ を対応させるためには、 Σ_1^+ を y_1^+ 軸のまわりに180(deg)反転させる必要がある。

以上、指先から出発した5個の仮想リンクの先端 P_6 における位置と方向は(i)~(v)の変換行列の積 U としてつぎのように表現される。(a₃₄は a_3+a_4 を意味する)

すなわち,

$$\begin{aligned}
 U &= (u_{ij}) = A_6^+ A_5^+ A_4^+ A_3^+ A_2^+ \text{Rot}(y_1^+, \pi) \\
 &= \begin{vmatrix}
 -(C_3 C_5 C_6 - S_3 S_5 C_4 C_6 - S_3 S_4 S_6) & -(S_3 C_5 C_6 + S_5 C_3 C_4 C_6 + S_4 S_6 C_3) \\
 -(S_6 C_3 C_5 - S_3 S_5 S_6 C_4 + S_3 S_4 C_6) & -(S_3 S_6 C_5 + S_5 S_6 C_3 C_4 - S_4 C_3 C_6) \\
 S_5 C_3 + S_3 C_4 C_5 & S_3 S_5 - C_3 C_4 C_5 \\
 0 & 0 \\
 S_6 C_4 - S_4 S_5 C_6 & a_2(C_3 C_5 C_6 - S_3 S_5 C_4 C_6 - S_3 S_4 S_6) + a_3 C_4 C_5 C_6 + a_5 C_6 + a_6 \\
 -(S_4 S_5 S_6 + C_4 C_6) & a_2(S_6 C_3 C_5 - S_3 S_5 S_6 C_4 + S_3 S_4 C_6) + a_3 S_4 S_6 C_5 + a_5 S_6 \\
 -S_4 C_5 & -a_2(S_5 C_3 + S_3 C_4 C_5) - a_3 S_5 \\
 0 & 1
 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix}
 u_{11} & u_{12} & u_{13} & p_x^+ \\
 u_{21} & u_{22} & u_{23} & p_y^+ \\
 u_{31} & u_{32} & u_{33} & p_z^+ \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{vmatrix} \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

$$(u_{14}=p_x^+, u_{24}=p_y^+, u_{34}=p_z^+, u_{41}=u_{42}=u_{43}=0, u_{44}=1)$$

一方, 基準座標系 Σ_0 でみた指先 P_1 の位置および方向を順方向変換 T_6 としつぎのように指定する。

$$T_6 = \begin{vmatrix}
 n_x^0 & o_x^0 & a_x^0 & P_x \\
 n_y^0 & o_y^0 & a_y^0 & P_y \\
 n_z^0 & o_z^0 & a_z^0 & P_z \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{vmatrix} \tag{A.7}$$

さらに, これを指先の座標系 Σ_6 から仮想リンク上の座標系 $\Sigma_6^+ \leftarrow 180(\text{deg})$ 座標変換したものを \overline{T}_6 とおく。

$$\begin{aligned}
 \overline{T}_6 &= \begin{vmatrix}
 n_x & o_x & a_x & P_x \\
 n_y & o_y & a_y & P_y \\
 n_z & o_z & a_z & P_z \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{vmatrix} = T_6 \text{Rot}(y_6, \pi) \\
 &= \begin{vmatrix}
 n_x^0 & o_x^0 & a_x^0 & P_x \\
 n_y^0 & o_y^0 & a_y^0 & P_y \\
 n_z^0 & o_z^0 & a_z^0 & P_z \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{vmatrix} \begin{vmatrix}
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{vmatrix} \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

従って, 点 P_1 を起点とする仮想リンクの終端 P_6 の空間的位置と方向は, 基準座標系 Σ_0 に関して上の座標変換の積 $I=(\alpha_{ij})=\overline{T}_6 U$ で求められる。

すなわち,

$$\begin{aligned}
 I &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & p_x^+ \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & p_y^+ \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & p_z^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n_x^0 & o_x^0 & a_x^0 & P_x \\ n_y^0 & o_y^0 & a_y^0 & P_y \\ n_z^0 & o_z^0 & a_z^0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6 & s_3c_5c_6 + s_5c_3c_4c_6 + s_4s_6c_3 \\ -(s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) & -(s_3s_6c_5 + s_5s_6c_3c_4 - s_4c_3c_6) \\ -(s_5c_3 + s_3c_4c_5) & -(s_3s_5 - c_3c_4c_5) \\ 0 & 0 \\ -(s_6c_4 - s_4s_5c_6) & -a_2(c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6) - a_3c_5c_6 - a_5c_6 - a_6 \\ -(s_4s_5s_6 + c_4c_6) & a_2(s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) + a_3c_4c_5 + a_5s_6 \\ s_4c_5 & a_2(s_5c_3 + s_3c_4c_5) + a_3c_4s_5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

これより、絶対座標空間 Σ_0 における点 P_6 のx-方向、y-方向、z-方向の位置はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 p_x &= \alpha_{14} = n_x p_x^+ + o_x p_y^+ + a_x p_z^+ + P_x \\
 &= n_x \{ a_2 (c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6) + a_3c_5c_6 + a_5c_6 + a_6 \} \\
 &\quad + o_x \{ a_2 (s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) + a_3c_4c_5 + a_5s_6 \} \\
 &\quad + a_x \{ -a_2 (s_5c_3 + s_3c_4c_5) - a_3c_4s_5 \} + P_x \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

$$p_y = \alpha_{24} = n_y p_x^+ + o_y p_y^+ + a_y p_z^+ + P_y \tag{A.11}$$

$$p_z = \alpha_{34} = n_z p_x^+ + o_z p_y^+ + a_z p_z^+ + P_z \tag{A.12}$$

また、点 P_6 における仮想リンクの方向は(A.9)式の最初の3つの列ベクトルから求められる。

このことから、マニピュレータの与えられた位置と姿勢に対する逆問題は、仮想リンク先端 $P_6(p_x, p_y, p_z)$ が座標系 Σ_1 の原点 M (Σ_0 に関してその位置は $(0, 0, a_1)$ で a_1 は第1リンクの長さを表わす)に一致する関節角度 $\theta_6, \theta_5, \theta_4, \theta_3$ を求める問題とみられる。

4つの独立変数からなる(A.10)~(A.12)式に姿勢の定式化を1つ加え、計4つの非線形方程式から関節角を陽に導くことは困難であるため、つぎのアルゴリズムを採用する。いま、仮に点 P_6 が M に十分近いと推定される θ_i の初期値を $\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30}$ とすると、(A.10)~(A.12)式

$$\begin{aligned} p_x(\theta_0) &= p_x(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30}) \\ p_y(\theta_0) &= p_y(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30}) \\ p_z(\theta_0) &= p_z(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30}) \end{aligned}$$

から求まる値と座標系 Σ_z の原点Mとの空間的位置の近さ(ユークリッド距離)を調べる。その距離が十分に接近していれば、 θ_0 が解と考えられるが、離れている場合各関節をそれぞれ上の初期値を中心として微小変動($\Delta\theta_6, \Delta\theta_5, \Delta\theta_4, \Delta\theta_3$)させ、(A.10)~(A.12)式をつぎのように線形近似する。

$$\begin{aligned} p_x(\theta_0 + \Delta\theta) &= p_x(\theta_0) + (\partial p_x / \partial \theta_6)_0 \Delta\theta_6 + (\partial p_x / \partial \theta_5)_0 \Delta\theta_5 \\ &\quad + (\partial p_x / \partial \theta_4)_0 \Delta\theta_4 + (\partial p_x / \partial \theta_3)_0 \Delta\theta_3 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ここに $(\partial p_x / \partial \theta_i)_0$ は p_x の角度 θ_i における変化率を初期値 θ_0 について計算した値である。また、 $p_x(\theta_0 + \Delta\theta)$ は、 $p_x(\theta_{60} + \Delta\theta_6, \theta_{50} + \Delta\theta_5, \theta_{40} + \Delta\theta_4, \theta_{30} + \Delta\theta_3)$ を意味する。同様に、 p_y, p_z に対してもつぎのように表現できる。

$$p_y(\theta_0 + \Delta\theta) = p_y(\theta_0) + \sum_{i=3}^6 (\partial p_y / \partial \theta_i)_0 \Delta\theta_i \quad (\text{A.14})$$

$$p_z(\theta_0 + \Delta\theta) = p_z(\theta_0) + \sum_{i=3}^6 (\partial p_z / \partial \theta_i)_0 \Delta\theta_i \quad (\text{A.15})$$

この近似表現に対する $\overline{P_6M}$ 間のEuclid距離は容易に計算できることがわかる。

さて、われわれは原問題をまず4変数の決定問題に置き換えて(A.10)~(A.12)式を導いたが、解の決定には1自由度分の指定が残されている。事実、現在の議論では $\overline{P_6M}$ の接合の仕方についてまったく任意である(すなわち、フリー・ジョイントを前提としている)ため、実際の関節機構に即した接合方法を指定する必要がある。後述の(A.28)式から $A_1 A_2$ の座標変換で第3列ベクトルの1成分(すなわち、接近ベクトル a のz-方向余弦)がつねに零($A_z=0$)であるため、この拘束条件を2点間のノルム(距離)のなかに追加することが必要である。すなわち、最終的な目的関数として

$$J = \{p_x(\theta_0 + \Delta\theta)\}^2 + \{p_y(\theta_0 + \Delta\theta)\}^2 + \{p_z(\theta_0 + \Delta\theta) - a_1\}^2 + A_z^2 \quad (\text{A.16})$$

が最小値をとるように $\Delta\theta_i (i=3\sim 6)$ を決定することがつぎの目標である。ここに、 A_z は(A.9)式の α_{33} に相当し、次式で表現される。

$$\begin{aligned} A_z &= n_z u_{13} + o_z u_{23} + a_z u_{33} \\ &= n_z (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_z (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_z (-s_4 c_5) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

(A.16)式の A_z にはこれを初期値のまわりで線形化して代入する。 $\Delta \theta_i = \phi_i (i=3\sim 6)$ とおき以上の式を

$$\begin{aligned}
 p_x(\theta_0 + \Delta \theta) &= m_1 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_x / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\
 p_y(\theta_0 + \Delta \theta) &= m_2 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_y / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\
 p_z(\theta_0 + \Delta \theta) - a_1 &= m_3 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_z / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\
 A_z(\theta_0 + \Delta \theta) &= m_4 + \sum_{i=3}^6 (\partial A_z / \partial \theta_i)_0 \phi_i
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

と略記する。但し、 $m_1 = p_x(\theta_0)$, $m_2 = p_y(\theta_0)$, $m_3 = p_z(\theta_0) - a_1$, $m_4 = A_z(\theta_0)$
(A.18)式の各微分値の計算は、つぎのように整理される。

$$\begin{aligned}
 \partial p_x / \partial \theta_6 &= G(n_x, F_1, 0_x, F_2, 0, 0) \\
 \partial p_x / \partial \theta_5 &= G(n_x, F_3, 0_x, F_4, a_x, F_5) \\
 \partial p_x / \partial \theta_4 &= G(n_x, F_6, 0_x, F_7, a_x, F_8) \\
 \partial p_x / \partial \theta_3 &= G(n_x, F_9, 0_x, F_{10}, a_x, F_{11}) \\
 \partial p_y / \partial \theta_6 &= G(n_y, F_1, 0_y, F_2, 0, 0) \\
 \partial p_y / \partial \theta_5 &= G(n_y, F_3, 0_y, F_4, a_y, F_5) \\
 \partial p_y / \partial \theta_4 &= G(n_y, F_6, 0_y, F_7, a_y, F_8) \\
 \partial p_y / \partial \theta_3 &= G(n_y, F_9, 0_y, F_{10}, a_y, F_{11}) \\
 \partial p_z / \partial \theta_6 &= G(n_z, F_1, 0_z, F_2, 0, 0) \\
 \partial p_z / \partial \theta_5 &= G(n_z, F_3, 0_z, F_4, a_z, F_5) \\
 \partial p_z / \partial \theta_4 &= G(n_z, F_6, 0_z, F_7, a_z, F_8) \\
 \partial p_z / \partial \theta_3 &= G(n_z, F_9, 0_z, F_{10}, a_z, F_{11}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_6 &= G(n_z, F_{12}, 0_z, F_{13}, 0, 0) \\
 \partial A_z / \partial \theta_5 &= G(n_z, F_{14}, 0_z, F_{15}, a_z, F_{16}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_4 &= G(n_z, F_{17}, 0_z, F_{18}, a_z, F_{19}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

ここに、関数 G は、 $G(a, b, c, d, e, f) = ab + cd + ef$ と定める。また、(A.19)式の各パラメータは

$$\begin{aligned}
 F_1 &= a_2(-s_6 c_3 c_5 + s_3 s_5 s_6 c_4 - s_3 s_4 c_6) - a_{34} s_6 c_5 - a_5 s_6 \\
 F_2 &= a_2(c_3 c_5 c_6 - s_3 s_5 c_4 c_6 - s_3 s_4 s_6) + a_{34} c_5 c_6 + a_5 c_6 \\
 F_3 &= a_2(-s_5 c_3 c_6 - s_3 c_4 c_5 c_6) - a_{34} s_5 c_6 \\
 F_4 &= a_2(-s_5 s_6 c_3 - s_3 s_6 c_4 c_5) - a_{34} s_5 s_6 \\
 F_5 &= -a_2(c_3 c_5 - s_3 s_5 c_4) - a_{34} c_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_6 &= a_2(s_3s_4s_5c_6 - s_3s_6c_4) \\
F_7 &= a_2(s_3s_4s_5s_6 + s_3c_4c_6) \\
F_8 &= a_2s_3s_4c_5 \\
F_9 &= -a_2(s_3c_5c_6 + s_5c_3c_4c_6 + s_4s_6c_3) \\
F_{10} &= a_2(-s_3s_6c_5 - s_5s_6c_3c_4 + s_4c_3c_6) \\
F_{11} &= a_2(s_3s_5 - c_3c_4c_5) \\
F_{12} &= c_4c_6 + s_4s_5s_6 \\
F_{13} &= -s_4s_5c_6 + s_6c_4 \\
F_{14} &= -s_4c_5c_6 \\
F_{15} &= -s_4s_6c_5 \\
F_{16} &= s_4s_5 \\
F_{17} &= -s_4s_6 - s_5c_4c_6 \\
F_{18} &= -s_5s_6c_4 + s_4c_6 \\
F_{19} &= -c_4c_5
\end{aligned} \tag{A.20}$$

と表す。これらの値を使って目的関数は、

$$J = (m_1 + \sum_{i=3}^6 a_{xi} \phi_i)^2 + (m_2 + \sum_{i=3}^6 a_{yi} \phi_i)^2 + (m_3 + \sum_{i=3}^6 a_{zi} \phi_i)^2 + (m_4 + \sum_{i=3}^6 b_i \phi_i)^2$$

と表現される。ただし、

$$\begin{aligned}
a_{xi} &= (\partial p_x / \partial \theta_i)_0, \quad a_{yi} = (\partial p_y / \partial \theta_i)_0, \\
a_{zi} &= (\partial p_z / \partial \theta_i)_0, \quad b_i = (\partial Az / \partial \theta_i)_0 \\
&\quad (i = 3, 4, 5, 6)
\end{aligned} \tag{A.21}$$

J の最小値を求めるために、 $\partial J / \partial \phi_i = 0$ を実行すると、 ϕ_i に関する連立方程式が形成されつぎのようになる。

$$\begin{vmatrix} R_0 & R_4 & R_5 & R_6 \\ R_4 & R_1 & R_7 & R_8 \\ R_5 & R_7 & R_2 & R_9 \\ R_6 & R_8 & R_9 & R_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{vmatrix} \tag{A.22}$$

ここで、方程式の各係数および定数項は、

$$\begin{aligned}
R_0 &= G_1(a_{x3}, a_{y3}, a_{z3}, b_3) \\
R_1 &= G_1(a_{x4}, a_{y4}, a_{z4}, b_4) \\
R_2 &= G_1(a_{x5}, a_{y5}, a_{z5}, b_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_3 &= G_1(a_{x6}, a_{y6}, a_{z6}, b_6) \\
 R_4 &= G_2(a_{x3}, a_{x4}, a_{y3}, a_{y4}, a_{z3}, a_{z4}, b_3, b_4) \\
 R_5 &= G_2(a_{x3}, a_{x5}, a_{y3}, a_{y5}, a_{z3}, a_{z5}, b_3, b_5) \\
 R_6 &= G_2(a_{x3}, a_{x6}, a_{y3}, a_{y6}, a_{z3}, a_{z6}, b_3, b_6) \\
 R_7 &= G_2(a_{x4}, a_{x5}, a_{y4}, a_{y5}, a_{z4}, a_{z5}, b_4, b_5) \\
 R_8 &= G_2(a_{x4}, a_{x6}, a_{y4}, a_{y6}, a_{z4}, a_{z6}, b_4, b_6) \\
 R_9 &= G_2(a_{x5}, a_{x6}, a_{y5}, a_{y6}, a_{z5}, a_{z6}, b_5, b_6) \\
 K_3 &= -G_2(m_1, a_{x3}, m_2, a_{y3}, m_3, a_{z3}, m_4, b_3) \\
 K_4 &= -G_2(m_1, a_{x4}, m_2, a_{y4}, m_3, a_{z4}, m_4, b_4) \\
 K_5 &= -G_2(m_1, a_{x5}, m_2, a_{y5}, m_3, a_{z5}, m_4, b_5) \\
 K_6 &= -G_2(m_1, a_{x6}, m_2, a_{y6}, m_3, a_{z6}, m_4, b_6)
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

但し, $G_1(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ (A.24)

$G_2(a, b, c, d, e, f, g, h) = ab + cd + ef + gh$ (A.25)

と整理できて、初期値 θ_0 から決定される。上の連立方程式を $\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$ について Gauss の掃き出し法で計算すると $\partial J / \partial \phi_i = 0$ を満たす解が得られる。

以上のようにして ϕ_i を決定した後、 $\theta_i = \theta_{i0} + \phi_i$ を線形化を行わない元の式 (A.10) ~ (A.12) と (A.17) に代入して再び点 M との Euclid 距離に A_z を追加した 2 乗規範

$$J = p_x(\theta_i)^2 + p_y(\theta_i)^2 + \{p_z(\theta_i) - a_i\}^2 + A_z(\theta_i)^2 \tag{A.26}$$

を計算する。仮想リンク先端 P_6 の位置決め精度として指定した収束判定条件

$$\sqrt{p_x(\theta_i)^2 + p_y(\theta_i)^2 + \{p_z(\theta_i) - a_i\}^2 + A_z(\theta_i)^2} < \epsilon ; \epsilon = 10^{-2} \tag{A.27}$$

を満たせば、 $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ は目的関数を最小にするものとみなす。もしも、この条件を満足しない時は、 $\theta_i (= \theta_{i0} + \phi_i)$ を新しい初期値として、その近傍で線形化を行って適切な ϕ_i を見つける上記手順を収束条件に到達するまで繰り返す。すなわち、目的関数の最小化（取りも直さず仮想リンクが実在のマニピュレータ・リンクと十分一致すること）で所要の関節変数 $\theta_6, \theta_5, \theta_4, \theta_3$ が決まる。

最後に、これら 4 変数が決定された後残りの関節角 θ_1, θ_2 を定める方法について述べる。基準座標系 Σ_0 から第 2 軸の Σ_1 に至る座標変換は、Fig. 1 に示した座標系をもとに

$$\begin{aligned}
 & \text{Rot}(z_0, \theta_1) \text{Trans}(0, 0, a_1) \text{Rot}(y_0, -\pi/2) \text{Rot}(z_1, \theta_2) \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & -s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & -c_1 & 0 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & 0 \\ c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A. 28})$$

と計算される。

一方、この行列を(A.9)式の変換行列Iと比較すると、第1関節の回転角はつぎのように定まる。

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= -c_1, \quad \alpha_{23} = -s_1 \\ \therefore \tan \theta_1 &= \frac{s_1}{c_1} = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}} = \frac{n_y u_{13} + o_y u_{23} + a_y u_{33}}{n_x u_{13} + o_x u_{23} + a_x u_{33}} \\ &= \frac{n_y (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_y (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_y (-s_4 c_5)}{n_x (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_x (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_x (-s_4 c_5)} \end{aligned} \quad (\text{A. 29})$$

また、 $\alpha_{31} = c_2$, $\alpha_{32} = -s_2$ より

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta_2 &= \frac{s_2}{c_2} = -\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}} = -\frac{(n_z u_{12} + o_z u_{22} + a_z u_{32})}{(n_z u_{11} + o_z u_{21} + a_z u_{31})} \\ &= \frac{n_z (s_3 c_5 c_6 + s_5 c_3 c_4 c_6 + s_4 s_6 c_3) + o_z (s_3 s_6 c_5 + s_5 s_6 c_3 c_4 - s_4 c_3 c_6) - a_z (s_3 s_5 - c_3 c_4 c_5)}{n_z (c_3 c_5 c_6 - s_3 s_5 c_4 c_6 - s_3 s_4 s_6) + o_z (s_6 c_3 c_5 - s_3 s_5 s_6 c_4 + s_3 s_4 c_6) - a_z (s_5 c_3 + s_3 c_4 c_5)} \end{aligned} \quad (\text{A. 30})$$

が(A.6)式より求められる。すなわち、 θ_1, θ_2 は先に求めた $\theta_3 \sim \theta_6$ の値を使って従属的に決定されたことになる。

このように抽出された関節角の値を、予め順方向に求めておいた変換行列 T_6 のなかに代入して計算値と最初に与えた位置・姿勢データとの一致度から解の妥当性を検討し、マニピュレータの動作制限範囲との照合をもって最終的な解の採否を判断する。

付 録 A

— 仮想マニピュレータを用いた最適化手法(要約) —

本文のFig.1に示した座標系をもつマニピュレータに対して、指先から固定端へ逆に辿る計算過程を、指先 P_1 を基点として根元の支持機構までの間に仮想的なリンクで構成された別のマニピュレータを考えてみよう(Fig.A.1の点線部参照)。この仮想リンク($\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_5P_6}$)は実際の第2リンクから指先までの体系と幾何学的にまったく同一であるが、回転・旋回方向は順方向それと逆になる座標系を定義する。図の実線部を含めたOMP₂P₁は実際のマニピュレータのある姿勢を示す。以下の解析で個々の変換行列を求める際の回転行列、並進行列は本文で説明した記号を用いる。また、順方向に計算する座標変換行列 A_n に対して、 A_n^+ を仮想リンク上の座標変換行列とする。

さて、指の部分の座標系 Σ_6 から逆に辿るためにこれを y_6 軸のまわりに180(deg)反転させ、新座標系 $\Sigma_6^+(x_6^+, y_6^+, z_6^+)$ を設定する。以下、点線で示した回転および旋回方向は、順方向の座標変換計算で定義した回転角の正方向である。

(i) 仮想リンク上先端 P_1 から第6関節までの変換行列 A_6^+ (Fig.A.2参照)

指部分の中心(Σ_6^+ の原点)から x_6^+ 方向へ a_6 だけ並進して、座標系 $\Sigma_5^+(x_5^+, y_5^+, z_5^+)$ を構成後、 z_5^+ 軸のまわりに θ_6 だけ旋回する。この間の変換行列を A_6^+ で表すと、

$$\begin{aligned}
 A_6^+ &= \text{Trans}(a_6, 0, 0)\text{Rot}(z_5^+, \theta_6) \\
 &= \begin{vmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & a_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

となる。

(ii) 仮想リンク上第6関節から第5関節までの変換行列 A_5^+ (Fig.A.3参照)

つぎに x_5^+ 軸のまわりに-90(deg)回転後 x_5^+ 軸に沿って a_5 だけ並進する。新座標系 $\Sigma_4^+(x_4^+, y_4^+, z_4^+)$ に対して z_4^+ 軸のまわりに θ_5 だけ旋回する。変換行列 A_5^+ は、(A.2)式で表される。

$$A_5^+ = \text{Rot}(x_5^+, -\pi/2)\text{Trans}(a_5, 0, 0)\text{Rot}(z_4^+, \theta_5)$$

$$= \begin{vmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

(iii) 仮想リンク上第5関節から第4関節までの変換行列 A_4^+ (Fig.A.4参照)

Fig.A.4を参考に、 y_4^+ 軸のまわりに90(deg)の回転と、 z_4^+ 方向に a_4 の並進を与える。座標系 $\Sigma_3^+(x_3^+, y_3^+, z_3^+)$ を定めた後、さらに z_3^+ 軸を中心に θ_4 だけ回転する。変換行列 A_4^+ はつぎのようになる。

$$A_4^+ = \text{Rot}(y_4^+, \pi/2)\text{Trans}(0, 0, a_4)\text{Rot}(z_3^+, \theta_4)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ -c_4 & s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

(iv) 仮想リンク上第4関節から第3関節までの変換行列 A_3^+ (Fig.A.5参照)

続いて z_3^+ 方向に a_3 並進後、 y_3^+ 軸を-90(deg)回転して新座標系 $\Sigma_2^+(x_2^+, y_2^+, z_2^+)$ を構成する。これを z_2^+ 軸のまわりに θ_3 の旋回を与えて、変換行列 A_3^+ を求める。

$$A_3^+ = \text{Trans}(0, 0, a_3)\text{Rot}(y_3^+, -\pi/2)\text{Rot}(z_2^+, \theta_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ c_3 & -s_3 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A.4})$$

(v) 仮想リンク上第3関節から第2関節までの変換行列 A_2^+ (Fig.A.6参照)

最後にFig.A.6に示すように、 x_2^+ 方向へ a_2 だけ並進して座標系 $\Sigma_1^+(x_1^+, y_1^+, z_1^+)$ を定め、変換行列 A_2^+ を得る。

$$A_2^+ = \text{Trans}(a_2, 0, 0) \quad (\text{A.5})$$

さて、Fig.A.1から明らかなように、 \overline{OM} 間の距離 a_1 はリンクの長さ(一定)であり、回転 θ_1 とつぎの旋回 θ_2 による座標変換行列の積は点Mの方向のみを決定する。順方向に支持ベースから第2関節までの同次変換 A_1A_2 を決定する際に設定した座標系 $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ と仮想リンク最終点で定めた Σ_1^+ を対応させるためには、 Σ_1^+ を y_1^+ 軸のまわりに180(deg)反転させる必要がある。

以上、指先から出発した5個の仮想リンクの先端 P_5 における位置と方向は(i)~(v)の変換行列の積 U としてつぎのように表現される。 $(a_{34}$ は a_3+a_4 を意味する)

すなわち,

$$\begin{aligned}
 U &= (u_{ij}) = A_6^+ A_5^+ A_4^+ A_3^+ A_2^+ \text{Rot}(y_1^+, \pi) \\
 &= \begin{vmatrix} -(C_3 C_5 C_6 - S_3 S_5 C_4 C_6 - S_3 S_4 S_6) & -(S_3 C_5 C_6 + S_5 C_3 C_4 C_6 + S_4 S_6 C_3) \\ -(S_6 C_3 C_5 - S_3 S_5 S_6 C_4 + S_3 S_4 C_6) & -(S_3 S_6 C_5 + S_5 S_6 C_3 C_4 - S_4 C_3 C_6) \\ S_5 C_3 + S_3 C_4 C_5 & S_3 S_5 - C_3 C_4 C_5 \\ 0 & 0 \\ S_6 C_4 - S_4 S_5 C_6 & a_2(C_3 C_5 C_6 - S_3 S_5 C_4 C_6 - S_3 S_4 S_6) + a_3 C_5 C_6 + a_5 C_6 + a_6 \\ -(S_4 S_5 S_6 + C_4 C_6) & a_2(S_6 C_3 C_5 - S_3 S_5 S_6 C_4 + S_3 S_4 C_6) + a_3 S_6 C_5 + a_5 S_6 \\ -S_4 C_5 & -a_2(S_5 C_3 + S_3 C_4 C_5) - a_3 S_4 S_5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & p_x^+ \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & p_y^+ \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & p_z^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

$$(u_{14}=p_x^+, u_{24}=p_y^+, u_{34}=p_z^+, u_{41}=u_{42}=u_{43}=0, u_{44}=1)$$

一方, 基準座標系 Σ_0 でみた指先 P_1 の位置および方向を順方向変換 T_6 としつぎのように指定する。

$$T_6 = \begin{vmatrix} n_x^0 & o_x^0 & a_x^0 & P_x \\ n_y^0 & o_y^0 & a_y^0 & P_y \\ n_z^0 & o_z^0 & a_z^0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{A.7}$$

さらに, これを指先の座標系 Σ_6 から仮想リンク上の座標系 $\Sigma_6^+ \rightarrow 180(\text{deg})$ 座標変換したものを \overline{T}_6 とおく。

$$\begin{aligned}
 \overline{T}_6 &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = T_6 \text{Rot}(y_6, \pi) \\
 &= \begin{vmatrix} n_x^0 & o_x^0 & a_x^0 & P_x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ n_y^0 & o_y^0 & a_y^0 & P_y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_z^0 & o_z^0 & a_z^0 & P_z & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

従って, 点 P_1 を起点とする仮想リンクの終端 P_6 の空間的位置と方向は, 基準座標系 Σ_0 に関して上の座標変換の積 $I=(\alpha_{ij})=\overline{T}_6 U$ で求められる。

すなわち,

$$\begin{aligned}
 I &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & p_x^+ \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & p_y^+ \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & p_z^+ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n_x^0 & o_x^0 & a_x^0 & P_x \\ n_y^0 & o_y^0 & a_y^0 & P_y \\ n_z^0 & o_z^0 & a_z^0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6 & s_3c_5c_6 + s_5c_3c_4c_6 + s_4s_6c_3 \\ -(s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) & -(s_3s_6c_5 + s_5s_6c_3c_4 - s_4c_3c_6) \\ -(s_5c_3 + s_3c_4c_5) & -(s_3s_5 - c_3c_4c_5) \\ 0 & 0 \\ -(s_6c_4 - s_4s_5c_6) & -a_2(c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6) - a_3a_4c_5c_6 - a_5c_6 - a_6 \\ -(s_4s_5s_6 + c_4c_6) & a_2(s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) + a_3a_4s_6c_5 + a_5s_6 \\ s_4c_5 & a_2(s_5c_3 + s_3c_4c_5) + a_3a_4s_5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

これより、絶対座標空間 Σ_0 における点 P_6 の x -方向, y -方向, z -方向の位置はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 p_x &= \alpha_{14} = n_x p_x^+ + o_x p_y^+ + a_x p_z^+ + P_x \\
 &= n_x \{ a_2 (c_3c_5c_6 - s_3s_5c_4c_6 - s_3s_4s_6) + a_3a_4c_5c_6 + a_5c_6 + a_6 \} \\
 &\quad + o_x \{ a_2 (s_6c_3c_5 - s_3s_5s_6c_4 + s_3s_4c_6) + a_3a_4s_6c_5 + a_5s_6 \} \\
 &\quad + a_x \{ -a_2 (s_5c_3 + s_3c_4c_5) - a_3a_4s_5 \} + P_x \tag{A.10}
 \end{aligned}$$

$$p_y = \alpha_{24} = n_y p_x^+ + o_y p_y^+ + a_y p_z^+ + P_y \tag{A.11}$$

$$p_z = \alpha_{34} = n_z p_x^+ + o_z p_y^+ + a_z p_z^+ + P_z \tag{A.12}$$

また、点 P_6 における仮想リンクの方向は(A.9)式の最初の3つの列ベクトルから求められる。

このことから、マニピュレータの与えられた位置と姿勢に対する逆問題は、仮想リンク先端 $P_6(p_x, p_y, p_z)$ が座標系 Σ_1 の原点 M (Σ_0 に関してその位置は $(0, 0, a_1)$ で a_1 は第1リンクの長さを表わす)に一致する関節角度 $\theta_6, \theta_5, \theta_4, \theta_3$ を求める問題とみられる。

4つの独立変数からなる(A.10)~(A.12)式に姿勢の定式化を1つ加え、計4つの非線形方程式から関節角を陽に導くことは困難であるため、つぎのアルゴリズムを採用する。いま、仮に点 P_6 が M に十分近いと推定される θ_i の初期値を $\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30}$ とすると、(A.10)~(A.12)式

$$\begin{aligned}
 p_x(\theta_0) &= p_x(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30}) \\
 p_y(\theta_0) &= p_y(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30}) \\
 p_z(\theta_0) &= p_z(\theta_{60}, \theta_{50}, \theta_{40}, \theta_{30})
 \end{aligned}$$

から求まる値と座標系 Σ_2 の原点Mとの空間的位置の近さ(ユークリッド距離)を調べる。その距離が十分に接近していれば、 θ_0 が解と考えられるが、離れている場合各関節をそれぞれ上の初期値を中心として微小変動($\Delta\theta_6, \Delta\theta_5, \Delta\theta_4, \Delta\theta_3$)させ、(A.10)~(A.12)式をつぎのように線形近似する。

$$\begin{aligned}
 p_x(\theta_0 + \Delta\theta) &= p_x(\theta_0) + (\partial p_x / \partial \theta_6)_0 \Delta\theta_6 + (\partial p_x / \partial \theta_5)_0 \Delta\theta_5 \\
 &\quad + (\partial p_x / \partial \theta_4)_0 \Delta\theta_4 + (\partial p_x / \partial \theta_3)_0 \Delta\theta_3 \quad (A.13)
 \end{aligned}$$

ここに $(\partial p_x / \partial \theta_i)_0$ は p_x の角度 θ_i における変化率を初期値 θ_0 について計算した値である。また、 $p_x(\theta_0 + \Delta\theta)$ は、 $p_x(\theta_{60} + \Delta\theta_6, \theta_{50} + \Delta\theta_5, \theta_{40} + \Delta\theta_4, \theta_{30} + \Delta\theta_3)$ を意味する。同様に、 p_y, p_z に対してもつぎのように表現できる。

$$p_y(\theta_0 + \Delta\theta) = p_y(\theta_0) + \sum_{i=3}^6 (\partial p_y / \partial \theta_i)_0 \Delta\theta_i \quad (A.14)$$

$$p_z(\theta_0 + \Delta\theta) = p_z(\theta_0) + \sum_{i=3}^6 (\partial p_z / \partial \theta_i)_0 \Delta\theta_i \quad (A.15)$$

この近似表現に対する $\overline{P_6M}$ 間のEuclid距離は容易に計算できることがわかる。

さて、われわれは原問題をまず4変数の決定問題に置き換えて(A.10)~(A.12)式を導いたが、解の決定には1自由度分の指定が残されている。事実、現在の議論では $\overline{P_6M}$ の接合の仕方についてまったく任意である(すなわち、フリー・ジョイントを前提としている)ため、実際の関節機構に即した接合方法を指定する必要がある。後述の(A.28)式から $A_1 A_2$ の座標変換で第3列ベクトルの1成分(すなわち、接近ベクトル a の z -方向余弦)がつねに零($A_z=0$)であるため、この拘束条件を2点間のノルム(距離)のなかに追加することが必要である。すなわち、最終的な目的関数として

$$J = \{p_x(\theta_0 + \Delta\theta)\}^2 + \{p_y(\theta_0 + \Delta\theta)\}^2 + \{p_z(\theta_0 + \Delta\theta) - a_1\}^2 + A_z^2 \quad (A.16)$$

が最小値をとるように $\Delta\theta_i$ ($i=3\sim 6$)を決定することがつぎの目標である。ここに、 A_z は(A.9)式の α_{33} に相当し、次式で表現される。

$$\begin{aligned}
 A_z &= n_z u_{13} + o_z u_{23} + a_z u_{33} \\
 &= n_z (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_z (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_z (-s_4 c_5) \quad (A.17)
 \end{aligned}$$

(A.16)式の A_z にはこれを初期値のまわりで線形化して代入する。 $\Delta \theta_i = \phi_i (i=3\sim 6)$ とおき以上の式を

$$\begin{aligned}
 p_x(\theta_0 + \Delta \theta) &= m_1 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_x / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\
 p_y(\theta_0 + \Delta \theta) &= m_2 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_y / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\
 p_z(\theta_0 + \Delta \theta) - a_1 &= m_3 + \sum_{i=3}^6 (\partial p_z / \partial \theta_i)_0 \phi_i \\
 A_z(\theta_0 + \Delta \theta) &= m_4 + \sum_{i=3}^6 (\partial A_z / \partial \theta_i)_0 \phi_i
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

と略記する。但し、 $m_1 = p_x(\theta_0)$, $m_2 = p_y(\theta_0)$, $m_3 = p_z(\theta_0) - a_1$, $m_4 = A_z(\theta_0)$
(A.18)式の各微分値の計算は、つぎのように整理される。

$$\begin{aligned}
 \partial p_x / \partial \theta_6 &= G(n_x, F_1, 0_x, F_2, 0, 0) \\
 \partial p_x / \partial \theta_5 &= G(n_x, F_3, 0_x, F_4, a_x, F_5) \\
 \partial p_x / \partial \theta_4 &= G(n_x, F_6, 0_x, F_7, a_x, F_8) \\
 \partial p_x / \partial \theta_3 &= G(n_x, F_9, 0_x, F_{10}, a_x, F_{11}) \\
 \partial p_y / \partial \theta_6 &= G(n_y, F_1, 0_y, F_2, 0, 0) \\
 \partial p_y / \partial \theta_5 &= G(n_y, F_3, 0_y, F_4, a_y, F_5) \\
 \partial p_y / \partial \theta_4 &= G(n_y, F_6, 0_y, F_7, a_y, F_8) \\
 \partial p_y / \partial \theta_3 &= G(n_y, F_9, 0_y, F_{10}, a_y, F_{11}) \\
 \partial p_z / \partial \theta_6 &= G(n_z, F_1, 0_z, F_2, 0, 0) \\
 \partial p_z / \partial \theta_5 &= G(n_z, F_3, 0_z, F_4, a_z, F_5) \\
 \partial p_z / \partial \theta_4 &= G(n_z, F_6, 0_z, F_7, a_z, F_8) \\
 \partial p_z / \partial \theta_3 &= G(n_z, F_9, 0_z, F_{10}, a_z, F_{11}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_6 &= G(n_z, F_{12}, 0_z, F_{13}, 0, 0) \\
 \partial A_z / \partial \theta_5 &= G(n_z, F_{14}, 0_z, F_{15}, a_z, F_{16}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_4 &= G(n_z, F_{17}, 0_z, F_{18}, a_z, F_{19}) \\
 \partial A_z / \partial \theta_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

ここに、関数 G は、 $G(a, b, c, d, e, f) = ab + cd + ef$ と定める。また、(A.19)式の各パラメータは

$$\begin{aligned}
 F_1 &= a_2(-s_6 c_3 c_5 + s_3 s_5 s_6 c_4 - s_3 s_4 c_6) - a_3 a_4 s_6 c_5 - a_5 s_6 \\
 F_2 &= a_2(c_3 c_5 c_6 - s_3 s_5 c_4 c_6 - s_3 s_4 s_6) + a_3 a_4 c_5 c_6 + a_5 c_6 \\
 F_3 &= a_2(-s_5 c_3 c_6 - s_3 c_4 c_5 c_6) - a_3 a_4 s_5 c_6 \\
 F_4 &= a_2(-s_5 s_6 c_3 - s_3 s_6 c_4 c_5) - a_3 a_4 s_5 s_6 \\
 F_5 &= -a_2(c_3 c_5 - s_3 s_5 c_4) - a_3 a_4 c_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_6 &= a_2(S_3S_4S_5C_6 - S_3S_6C_4) \\
F_7 &= a_2(S_3S_4S_5S_6 + S_3C_4C_6) \\
F_8 &= a_2S_3S_4C_5 \\
F_9 &= -a_2(S_3C_5C_6 + S_5C_3C_4C_6 + S_4S_6C_3) \\
F_{10} &= a_2(-S_3S_6C_5 - S_5S_6C_3C_4 + S_4C_3C_6) \\
F_{11} &= a_2(S_3S_5 - C_3C_4C_5) \\
F_{12} &= C_4C_6 + S_4S_5S_6 \\
F_{13} &= -S_4S_5C_6 + S_6C_4 \\
F_{14} &= -S_4C_5C_6 \\
F_{15} &= -S_4S_6C_5 \\
F_{16} &= S_4S_5 \\
F_{17} &= -S_4S_6 - S_5C_4C_6 \\
F_{18} &= -S_5S_6C_4 + S_4C_6 \\
F_{19} &= -C_4C_5
\end{aligned} \tag{A.20}$$

と表す。これらの値を使って目的関数は、

$$J = (m_1 + \sum_{i=3}^6 a_{x_i} \phi_i)^2 + (m_2 + \sum_{i=3}^6 a_{y_i} \phi_i)^2 + (m_3 + \sum_{i=3}^6 a_{z_i} \phi_i)^2 + (m_4 + \sum_{i=3}^6 b_i \phi_i)^2$$

と表現される。ただし、

$$\begin{aligned}
a_{x_i} &= (\partial p_x / \partial \theta_i)_0, \quad a_{y_i} = (\partial p_y / \partial \theta_i)_0, \\
a_{z_i} &= (\partial p_z / \partial \theta_i)_0, \quad b_i = (\partial Az / \partial \theta_i)_0 \\
&\quad (i = 3, 4, 5, 6)
\end{aligned} \tag{A.21}$$

J の最小値を求めるために、 $\partial J / \partial \phi_i = 0$ を実行すると、 ϕ_i に関する連立方程式が形成されつぎのようになる。

$$\begin{vmatrix} R_0 & R_4 & R_5 & R_6 \\ R_4 & R_1 & R_7 & R_8 \\ R_5 & R_7 & R_2 & R_9 \\ R_6 & R_8 & R_9 & R_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \end{vmatrix} \tag{A.22}$$

ここで、方程式の各係数および定数項は、

$$\begin{aligned}
R_0 &= G_1(a_{x3}, a_{y3}, a_{z3}, b_3) \\
R_1 &= G_1(a_{x4}, a_{y4}, a_{z4}, b_4) \\
R_2 &= G_1(a_{x5}, a_{y5}, a_{z5}, b_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= G_1(a_{x6}, a_{y6}, a_{z6}, b_6) \\
R_4 &= G_2(a_{x3}, a_{x4}, a_{y3}, a_{y4}, a_{z3}, a_{z4}, b_3, b_4) \\
R_5 &= G_2(a_{x3}, a_{x5}, a_{y3}, a_{y5}, a_{z3}, a_{z5}, b_3, b_5) \\
R_6 &= G_2(a_{x3}, a_{x6}, a_{y3}, a_{y6}, a_{z3}, a_{z6}, b_3, b_6) \\
R_7 &= G_2(a_{x4}, a_{x5}, a_{y4}, a_{y5}, a_{z4}, a_{z5}, b_4, b_5) \\
R_8 &= G_2(a_{x4}, a_{x6}, a_{y4}, a_{y6}, a_{z4}, a_{z6}, b_4, b_6) \\
R_9 &= G_2(a_{x5}, a_{x6}, a_{y5}, a_{y6}, a_{z5}, a_{z6}, b_5, b_6) \\
K_3 &= -G_2(m_1, a_{x3}, m_2, a_{y3}, m_3, a_{z3}, m_4, b_3) \\
K_4 &= -G_2(m_1, a_{x4}, m_2, a_{y4}, m_3, a_{z4}, m_4, b_4) \\
K_5 &= -G_2(m_1, a_{x5}, m_2, a_{y5}, m_3, a_{z5}, m_4, b_5) \\
K_6 &= -G_2(m_1, a_{x6}, m_2, a_{y6}, m_3, a_{z6}, m_4, b_6)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\text{但し, } G_1(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{A.24}$$

$$G_2(a, b, c, d, e, f, g, h) = ab + cd + ef + gh \tag{A.25}$$

と整理できて、初期値 θ_0 から決定される。上の連立方程式を $\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$ について Gauss の掃き出し法で計算すると $\partial J / \partial \phi_i = 0$ を満たす解が得られる。

以上のようにして ϕ_i を決定した後、 $\theta_i = \theta_{i0} + \phi_i$ を線形化を行わない元の式 (A.10) ~ (A.12) と (A.17) に代入して再び点 M との Euclid 距離に A_z を追加した 2 乗規範

$$J = p_x(\theta_i)^2 + p_y(\theta_i)^2 + \{p_z(\theta_i) - a_1\}^2 + A_z(\theta_i)^2 \tag{A.26}$$

を計算する。仮想リンク先端 P_6 の位置決め精度として指定した収束判定条件

$$\sqrt{p_x(\theta_i)^2 + p_y(\theta_i)^2 + \{p_z(\theta_i) - a_1\}^2 + A_z(\theta_i)^2} < \varepsilon ; \varepsilon = 10^{-2} \tag{A.27}$$

を満たせば、 $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ は目的関数を最小にするものとみなす。もしも、この条件を満足しない時は、 $\theta_i (= \theta_{i0} + \phi_i)$ を新しい初期値として、その近傍で線形化を行って適切な ϕ_i を見つける上記手順を収束条件に到達するまで繰り返す。すなわち、目的関数の最小化（取りも直さず仮想リンクが実在のマニピュレータ・リンクと十分一致すること）で所要の関節変数 $\theta_6, \theta_5, \theta_4, \theta_3$ が決まる。

最後に、これら 4 変数が決定された後残りの関節角 θ_1, θ_2 を定める方法について述べる。基準座標系 Σ_0 から第 2 軸の Σ_1 に至る座標変換は、Fig. A.1 に示した座標系をもとに

$$\begin{aligned}
& \text{Rot}(z_0, \theta_1) \text{Trans}(0, 0, a_1) \text{Rot}(y_0, -\pi/2) \text{Rot}(z_1, \theta_2) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} -s_1 s_2 & -s_1 c_2 & -c_1 & 0 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & 0 \\ c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{A. 28})$$

と計算される。

一方、この行列を(A.9)式の変換行列Iと比較すると、第1関節の回転角はつぎのように定まる。

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= -c_1, \quad \alpha_{23} = -s_1 \\ \therefore \tan \theta_1 &= \frac{s_1}{c_1} = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}} = \frac{n_y u_{13} + o_y u_{23} + a_y u_{33}}{n_x u_{13} + o_x u_{23} + a_x u_{33}} \\ &= \frac{n_y (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_y (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_y (-s_4 c_5)}{n_x (s_6 c_4 - s_4 s_5 c_6) + o_x (-s_4 s_5 s_6 - c_4 c_6) + a_x (-s_4 c_5)} \end{aligned} \quad (\text{A. 29})$$

また、 $\alpha_{31} = c_2$, $\alpha_{32} = -s_2$ より

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta_2 &= \frac{s_2}{c_2} = -\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{31}} = -\frac{(n_z u_{12} + o_z u_{22} + a_z u_{32})}{(n_z u_{11} + o_z u_{21} + a_z u_{31})} \\ &= \frac{n_z (s_3 c_5 c_6 + s_5 c_3 c_4 c_6 + s_4 s_6 c_3) + o_z (s_3 s_6 c_5 + s_5 s_6 c_3 c_4 - s_4 c_3 c_6) - a_z (s_3 s_5 - c_3 c_4 c_5)}{n_z (c_3 c_5 c_6 - s_3 s_5 c_4 c_6 - s_3 s_4 s_6) + o_z (s_6 c_3 c_5 - s_3 s_5 s_6 c_4 + s_3 s_4 c_6) - a_z (s_5 c_3 + s_3 c_4 c_5)} \end{aligned} \quad (\text{A. 30})$$

が(A.6)式より求められる。すなわち、 θ_1, θ_2 は先に求めた $\theta_3 \sim \theta_6$ の値を使って従属的に決定されたことになる。

このように抽出された関節角の値を、予め順方向に求めておいた変換行列 T_6 のなかに代入して計算値と最初に与えた位置・姿勢データとの一致度から解の妥当性を検討し、マニピュレータの動作制限範囲との照合をもって最終的な解の採否を判断する。

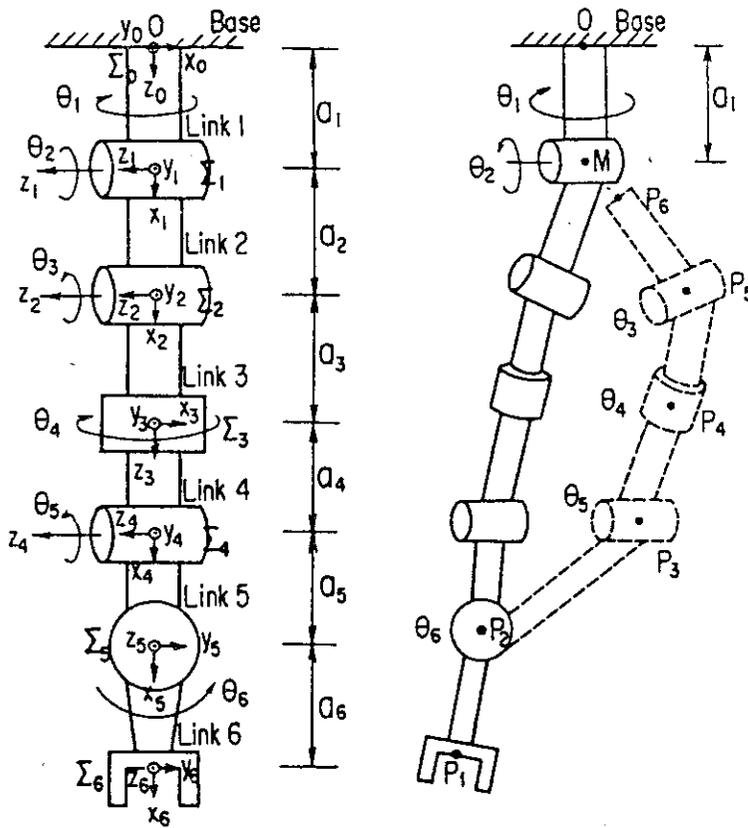


Fig. A.1 Kinematic Analysis with Imaginary Links

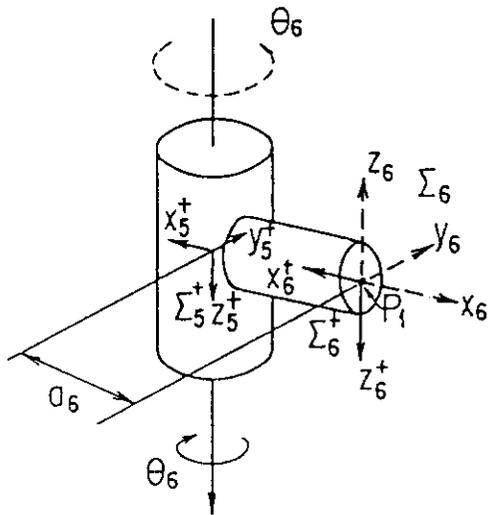


Fig. A.2 Kinematic Structure of Imaginary Link 6 to 5

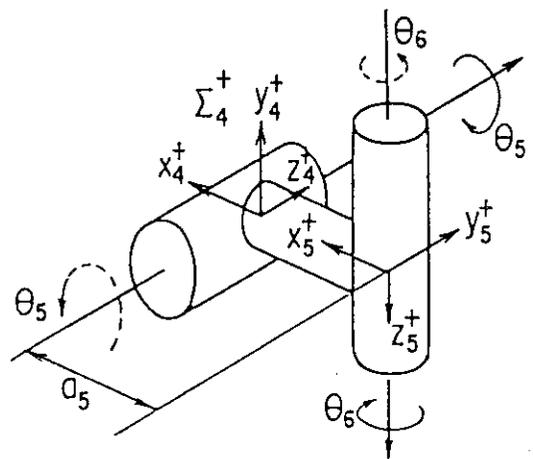


Fig. A.3 Kinematic Structure of Imaginary Link 5 to 4

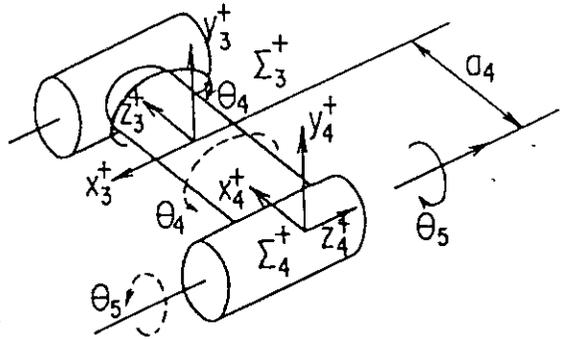


Fig.A.4 Kinematic Structure of Imaginary Link 4 to 3

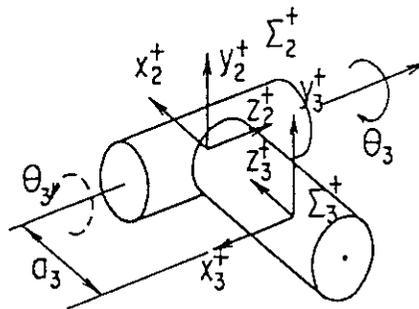


Fig.A.5 Kinematic Structure of Imaginary Link 3 to 2

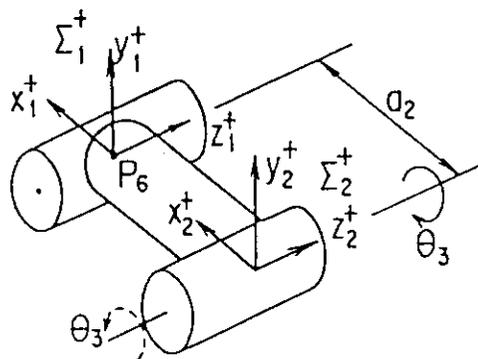


Fig.A.6 Kinematic Structure to End-point of Imaginary Link 2

付録 B

直交座標系における座標変換行列(方向余弦)の性質 および
同次座標変換行列の反転操作

直交座標系 0-XYZ の各座標軸を原点0の回りに回転させて、新しい座標系 0-X₁Y₁Z₁を作る(Fig. B.1参照)。これらの座標系の基本ベクトルをそれぞれ i, j, k および i₁, j₁, k₁ とする。いま、

$$\begin{aligned} i_1 &= a_{11}i + a_{12}j + a_{13}k \\ j_1 &= a_{21}i + a_{22}j + a_{23}k \\ k_1 &= a_{31}i + a_{32}j + a_{33}k \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

とおけば、行列記号を用いて(B.1)はつぎのように書ける。

$$(i_1, j_1, k_1)^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix} = A(i, j, k)^T \quad (\text{B.2})$$

$$\text{但し,} \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{B.3})$$

i₁, j₁, k₁ は互に直交する単位ベクトルであるから、スカラ積は

$$i_1 \cdot i_1 = j_1 \cdot j_1 = k_1 \cdot k_1 = 1 \quad (\text{B.4})$$

$$i_1 \cdot j_1 = j_1 \cdot k_1 = k_1 \cdot i_1 = 0 \quad (\text{B.5})$$

となる。

したがって、(B.1)を上のに代入すると行列Aの要素a_{1j}はつぎの関係を満たす。

$$\sum_{j=1}^3 (a_{1j})^2 = \sum_{j=1}^3 (a_{2j})^2 = \sum_{j=1}^3 (a_{3j})^2 = 1 \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{2j}a_{3j} = \sum_{j=1}^3 a_{3j}a_{1j} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}a_{2j} = 0 \quad (\text{B.7})$$

これより、行列Aとその転置行列 A^T を乗じると

$$\begin{aligned}
 AA^T &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \sum (a_{1j})^2 & \sum a_{1j}a_{2j} & \sum a_{1j}a_{3j} \\ \sum a_{2j}a_{1j} & \sum (a_{2j})^2 & \sum a_{2j}a_{3j} \\ \sum a_{3j}a_{1j} & \sum a_{3j}a_{2j} & \sum (a_{3j})^2 \end{vmatrix} = E
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

となり、つぎのように書ける。

$$AA^T = E \text{ または } A^{-1} = A^T \tag{B.9}$$

ここで、 A^{-1} はAの逆行列を、Eは単位行列を表す。このことから、方向余弦の行列は直交行列となることが分る。

つぎに、本文の(7)における同次変換行列Mは、方向余弦に関する部分をA、位置ベクトルをpとし、逆行列 M^{-1} のそれを A^* 、 p^* とすると

$$M = \begin{vmatrix} A & p \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{vmatrix} A^* & p^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{B.10}$$

と表される。 $MM^{-1} = E$ の演算より

$$AA^* = E \tag{B.11}$$

$$Ap^* + p = 0 \tag{B.12}$$

とにおいて、 M^{-1} の要素が求まる。

$$p^* = -A^{-1}p = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} p = \begin{vmatrix} -n \cdot p \\ -o \cdot p \\ -a \cdot p \end{vmatrix} \tag{B.13}$$

$$A^* = A^{-1} = A^T \tag{B.14}$$

以上、(B.13)、(B.14)により同次変換行列Mの反転が計算された。

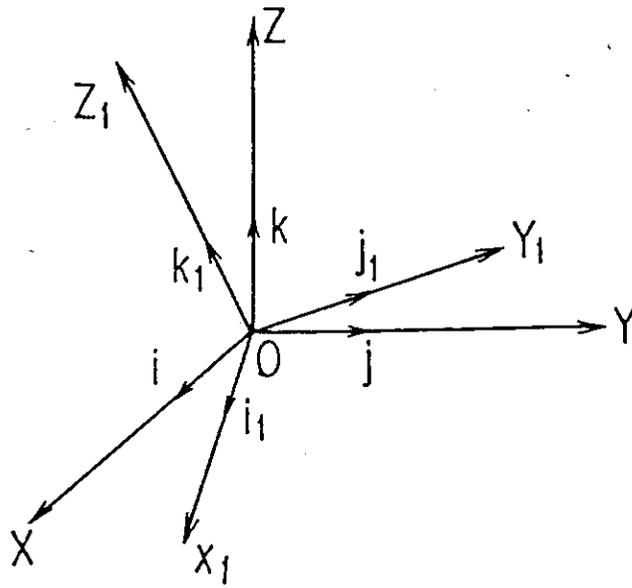


Fig. B.1 Rotation of Co-ordinates Systems