

JAERI - M
90-147

Newton-Euler の運動方程式に基づく
ロボット・マニピュレータの動力学モデル

1990年9月

佐々木 忍

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-M レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。入手の問合せは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1990

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 株高野高速印刷

Newton-Eulerの運動方程式に基づくロボット・マニピュレータ
の動力学モデル

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部
佐々木 忍

(1990年8月6日受理)

本報は、ロボット・マニピュレータの逆動力学の問題を解くアルゴリズムについて取扱う。
Lagrange力学から誘導された動力学の方程式と比較すると、取扱う関係がリンクの相対運動の
再帰的表現により簡単な形で記述できた。

6リンク・マニピュレータに適用した計算機シミュレーションにより、現在の方法が計算効率
の観点から他のアプローチに比べもっとも適切であろうという示唆を得た。とくに、計算の複雑
さがリンクの数を増やしてもあまり大きな影響をうけないことは注目に値する。

A Modelling of Robot Manipulator Dynamics
Based on Newton-Euler's Equations

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received August 6, 1990)

In this paper is presented an algorithm for solving the inverse dynamics of robot manipulators. In comparison with the dynamical equations derived from the Lagrange's mechanics, the relations to be treated are of simple forms due to recursive expressions of relative link motions.

A computer simulation for applying the algorithm to a six-link manipulator indicated that the present method might be most appropriate among the existing approaches from the viewpoint of computational efficiency. In particular, it is noted that the increase of the number of links has hardly great effect on the intricacy of calculation.

Keywords: Manipulator Dynamics, Inverse Problem, Newton-Euler's Equations, Lagrange's Mechanics, Recursive Formulation

目 次

1. はじめに	1
2. 関節駆動トルク（力）の計算方法	2
2.1 回転座標系と相対運動	2
2.2 マニピュレータ・リンク機構における相対運動の表現	5
2.3 動特性方程式の漸化式による表現	9
3. 運動方程式のシンボリックな表示	14
4. 計算例	20
5. おわりに	28
謝辞	28
参考文献	29
付録	31

Contents

1. Introduction	1
2. Computational Method of Joint Driving Torques (Forces)	2
2.1 Rotational Co-ordinate and Relative motions	2
2.2 Representations of Relative Motions for Manipulator Linkage Mechanisms	5
2.3 Recursive Expression of Dynamis Equations	9
3. Symbolic Descriptions of Motion Equations	14
4. Examples	20
5. Concluding Remarks	28
Acknowledgement	28
References	29
Appendices	31

1. はじめに

空間機構の動的挙動に関する研究は、Uickerの先駆的な論文¹⁾が引金となってロボット・マニピュレータの動特性研究が手掛けられるようになつた。爾来、20年の間に計算機技術の飛躍的な進歩と軌を一つにして多くの新しい方法が提案されてきた。^{2)~11)} 整理するとそれらは再帰的性質(recursiveness)を利用したアルゴリズムと、直接方程式系を取り扱うもの(non-recursiveness)とに分類できる。周知のごとく、マニピュレータの動特性モデルは2階の非線形微分方程式でつぎのように表される。

$$J(\dot{q})\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau(t)$$

すなわち、力やトルクと位置、速度、加速度との関係を与えるものである。ここに、 \dot{q} は一般化座標で表したN次元ベクトル、 $J(\dot{q})=[a_{ij}]$ は NxN慣性行列、 $C(q, \dot{q})=[q_j c_{jm} q_m]$ は遠心力とコリオリ力を含むN次元ベクトル、 $G(q)$ は重力項を表すN次元ベクトル、 $\tau(t)$ は一般化力のN次元ベクトルである。この方程式系で、各係数は関節相互の関わり合い、つまり干渉効果を示す尺度となる。先の報告¹²⁾で示したように、これらは6自由度のリンク構成に対して数千項からなる複雑な三角関数の関係式を与えた。その全体像は余りにも膨大で実際に利用するには簡略化以外には解決の道はなさそうである。力学的根拠や実験データと解析結果の照合によりそれを達成させた単純な式はリアル・タイムで計算ができ、同時に制御すべきシステムに対する見通しが得られるという大きな利点がある。この方針にしたがつた動力学の簡略化モデルの開発を計画中ではあるが¹³⁾、本報では、Lagrangeの方程式に基づく完全な動特性方程式の導出過程で経験した複雑さを回避するためにこのアプローチと並行して、リンク運動を漸化式で与え、その数値計算できわめて単純に解決できる動力学の逆問題を取り扱う。すなわち、関節位置、速度、加速度の関数として正確な駆動トルクを計算するアルゴリズムを開発し、実用的な6自由度の機構に対して計算機シミュレーションが可能となるように整備することが目的である。本アルゴリズムの中心は、Lagrangeの方法とは異なるが、古典力学のNewtonの第2法則と回転体に対するEulerの運動方程式を結びつけることにより各関節に作用するトルクをベクトルと行列演算で定式化し再帰性を利用して効率的に算出するところにある。作成したプログラムは、Lagrangeの方程式から誘導される方法とは比較にならない程簡潔な記述となる。

2. 関節駆動トルク(力)の計算方法

2.1 回転座標系と相対運動

本節では、回転関節と直動関節で構成されるロボット・マニピュレータの動力学的運動をニュートン・オイラー(Newton-Euler)の運動方程式を利用して記述する。回転座標系と固定座標系でながめた質点の時間的表現は、本報で述べる手法を展開するうえでもっとも基礎的な事項であるがら、最初にこれについて取り上げる。

空間に1つの右手直交座標系 Σ を固定し、これを $O\text{-XYZ}(i, j, k)$ で表す。通常この座標系を絶対座標系と呼ぶ(あるいは慣性系と呼んでもよい)。これに対して、一般的な回転・並進運動を行う別の座標系 Σ^* を $O^*\text{-X}^*\text{Y}^*\text{Z}^*(i^*, j^*, k^*)$ と表そう。そして、 Σ^* の角速度(または回転速度)を ω とし、 i, j, k および i^*, j^*, k^* をそれぞれの座標軸の基本単位ベクトルとする。原点 O から O^* への並進移動するベクトルを r_0 とすると、Fig. 1に示した点Pの位置は

$$r = r^* + r_0 \quad (2.1)$$

と表される。 $r = \overline{OP}$, $r^* = \overline{O^*P}$ はそれぞれ絶対位置ベクトル、相対位置ベクトルと呼ぶ。座標系は互いに回転しているので $r(t)$ の時間微分は2つの異なる座標系 Σ と Σ^* について考える必要がある。すなわち、演算子 d/dt は固定した座標系 Σ に関する時間微分を、また d^*/dt は回転している座標系 Σ^* に関する時間微分を表すものとする。

ところで、慣性系に対して回転する相対位置ベクトル r^* は、座標系 Σ^* のなかでは

$$r^* = x^*i^* + y^*j^* + z^*k^* \quad (2.2)$$

と表現できるので、その時間変位は

$$\begin{aligned} \frac{d^*r^*}{dt} &= \frac{d^*x^*}{dt}i^* + \frac{d^*y^*}{dt}j^* + \frac{d^*z^*}{dt}k^* + x^*\frac{d^*i^*}{dt} + y^*\frac{d^*j^*}{dt} + z^*\frac{d^*k^*}{dt} \\ &= \frac{d^*x^*}{dt}i^* + \frac{d^*y^*}{dt}j^* + \frac{d^*z^*}{dt}k^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

と表せる。(Σ^* のなかでの単位ベクトル i^*, j^*, k^* の時間変化は零である。)

一方、慣性系 Σ のなかで記述した(2.1)の時間微分(すなわち、速度)は

$$\text{速度 } v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dr_0}{dt} = \frac{dx^*}{dt}i^* + \frac{dy^*}{dt}j^* + \frac{dz^*}{dt}k^* +$$

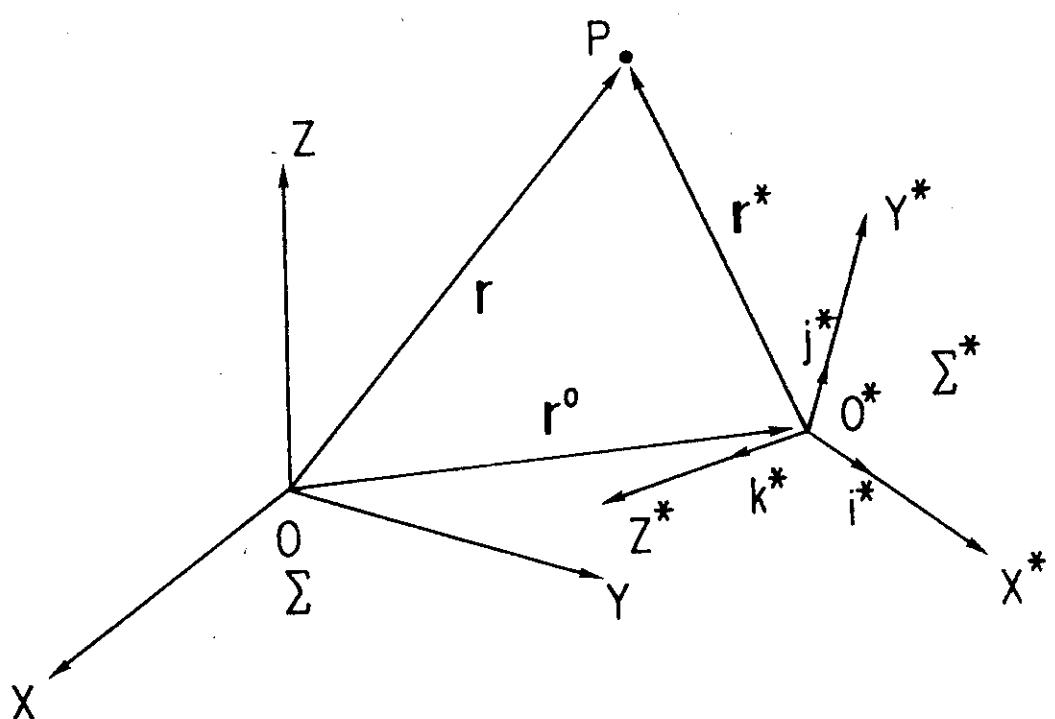


Fig.1 Moving co-ordinate systems

$$x^* \frac{di^*}{dt} + y^* \frac{dj^*}{dt} + z^* \frac{dk^*}{dt} + \frac{dr_o}{dt} \quad (2.4)$$

となり、最初の3項は(2.3)で示した Σ^* での時間変化に等しいので、結局

$$v = \frac{d^*r^*}{dt} + x^* \frac{di^*}{dt} + y^* \frac{dj^*}{dt} + z^* \frac{dk^*}{dt} + \frac{dr_o}{dt} \quad (2.5)$$

となる。回転座標系の単位ベクトルの変化については、以前導いた関係¹⁴⁾、すなわち

$$\frac{di^*}{dt} = \omega \times i^*, \quad \frac{dj^*}{dt} = \omega \times j^*, \quad \frac{dk^*}{dt} = \omega \times k^* \quad (2.6)$$

と(2.2)とを利用すればつぎのように整理できる。(付録B参照)

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = \frac{d^*r^*}{dt} + \omega x r^* + \frac{dr_o}{dt} \\ &= \frac{dr^*}{dt} + \frac{dr_o}{dt} = v^* + v_o \quad (\frac{dr^*}{dt} = \frac{d^*r^*}{dt} + \omega x r^*) \end{aligned} \quad (2.7)$$

これは、慣性系に対して並進および回転を行う他の座標系との間の時間的挙動を示す式である。 v は慣性系における点Pの絶対速度であり、(2.7)⁺が示すように移動座標系 Σ^* に関する質点Pの速度 v^* (相対速度)と Σ に対する Σ^* の移動速度 v_o とのベクトル和として表現できる。記号 x はベクトル外積を意味する。

さらに、(2.7)の微分を行うことにより質点Pの加速度 a が求められる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r^*}{dt^2} + \frac{d^2r_o}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d^*r^*}{dt} + \omega x r^* \right\} + \frac{d^2r_o}{dt^2} = a^* + a_o \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d^*r^*}{dt} \right\} + \omega x \left\{ \frac{d^*r^*}{dt} \right\} + \frac{d\omega}{dt} x r^* + \omega x \left\{ \frac{d^*r^*}{dt} + \omega x r^* \right\} + \frac{d^2r_o}{dt^2} \\ &= \frac{d^{*2}r^*}{dt^2} + 2\omega x \left\{ \frac{d^*r^*}{dt} \right\} + \frac{d\omega}{dt} x r^* + \omega x (\omega x r^*) + \frac{d^2r_o}{dt^2} \\ &= a^* + 2\omega x v^* + \omega x (\omega x r^*) + \frac{d\omega}{dt} x r^* + a_o \end{aligned} \quad (2.8)$$

a は、絶対座標系における点Pの絶対加速度を示す。一方、右辺第1項 a^* は、回転座標系に関する点Pの相対加速度であり、第2項はコリオリの加速度を、第3項は求心加速度を表す。絶対座標系 Σ の原点が静止している場合は $v_o=a_o=0$ となる。

2.2 マニピュレータ・リンク機構における相対運動の表現

前節で扱った座標系の移動(回転・並進)に伴う質点の相対運動についての関係式(速度, 加速度)は, 座標系をいくつか組入れた多リンク連鎖機構の場合に直ちに適用可能なことがわかる。そこで, これを使ってマニピュレータの運動を支配する各関節での速度, 加速度, トルクなどを質点系の剛体力学の範疇で定式化を行う。(付録Aには, 剛体運動に関する要項をまとめてある。)各関節に設定した座標系をベースから順に $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, ... と定義する。

まず, 開ループ連鎖機構に対して(i+1)番目の関節 S_{i+1} での角速度 ω_i と並進速度 v_i を決定しよう。Fig. 2を参照して, 関節 S_i を介してリンク(i-1)とiとの間の幾何学的位置関係は

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1, i} \quad (2.9)$$

と表される。

ここで, $\mathbf{R}_{i-1, i}$ は Σ_{i-1} から Σ_i へ向けての位置ベクトルである。上の式は, 絶対(固定)座標系 Σ_0 に対して Σ_{i-1}^* を回転移動する座標系とし, またリンクiの先端に座標系 Σ_i があると考えると,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1, i}^* \quad (2.9)^+$$

と書き表せ, 以下, 2.1節と同様な議論が展開できる。但し, $\mathbf{R}_{i-1, i}^*$ は回転・並進操作で変化することは明らかであるから, 以後*を省いて $\mathbf{R}_{i-1, i}$ と記す。

さて, (2.9)の時間微分を行うと

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{i-1}}{dt} + \frac{d^*\mathbf{R}_{i-1, i}}{dt} + \omega_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1, i}$$

すなわち,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \frac{d^*\mathbf{R}_{i-1, i}}{dt} + \omega_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1, i} \quad (2.10)$$

となる。ここに, \mathbf{v}_{i-1} , ω_{i-1} はベースの基準座標系 $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ からみた座標系 $\Sigma_i(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ の原点における線速度(linear velocity)と回転速度(角速度)(angular velocity)を表す。また, \mathbf{v}_i は座標系 Σ_i における速度を表す。

一方, i番目のリンクの角速度 ω_i は基準となるリンク(i-1)の角速度 ω_{i-1} と相対加速度 ω_r のベクトル和で表される。特に, リンク(i-1)の動きを基準として回転関節iによる相対加速度は $\mathbf{e}_i (dq_i/dt)$ となるが, 直動関節の場合, 回転による相対運動がないことから零である。但し, \mathbf{e}_i は関節軸(z_{i-1})の単位ベクトルで, 関節変数を q_i とする。

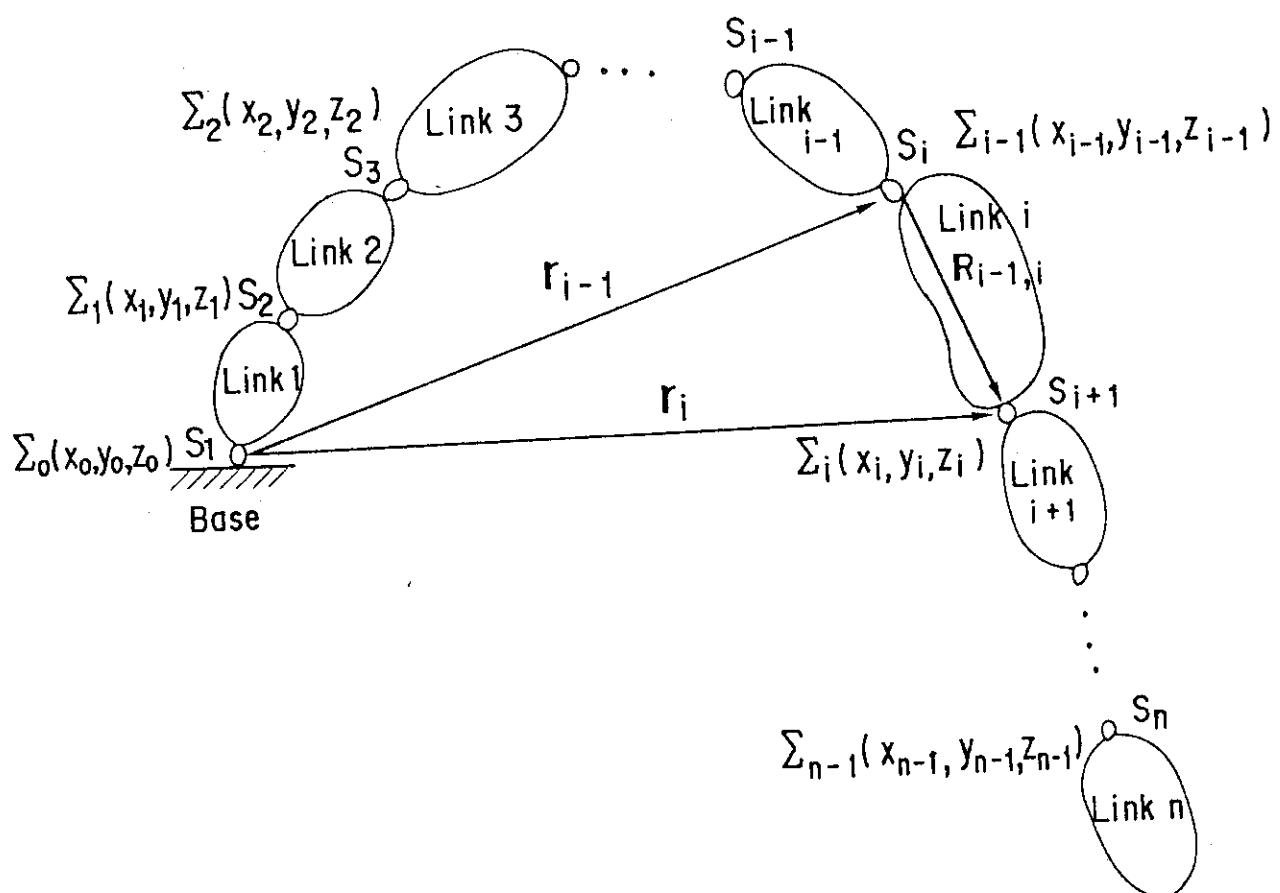


Fig. 2 Co-ordinate systems for open linkage mechanisms

これをまとめると、つぎのように記述できる。

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_r = \begin{cases} \omega_{i-1} + e_i(dq_i/dt) & (\text{関節 } i \text{ が回転する場合}) \\ \omega_{i-1} & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \end{cases} \quad (2.11)$$

ところで、(2.10)の($d^*R_{i-1,1}/dt$)は

$$\frac{d^*R_{i-1,1}}{dt} = \begin{cases} \omega_r \times R_{i-1,1} & (\text{関節 } i \text{ が回転する場合}) \\ e_i(dq_i/dt) & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \end{cases} \quad (2.12)$$

となるから、つぎのように整理できる。

$$v_i = \begin{cases} v_{i-1} + \omega_r \times R_{i-1,1} + \omega_{i-1} \times R_{i-1,1} = v_{i-1} + (\omega_r + \omega_{i-1}) \times R_{i-1,1} & (\text{関節 } i \text{ が回転する場合}) \\ v_{i-1} + \omega_i \times R_{i-1,1} & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \\ v_{i-1} + \omega_i \times R_{i-1,1} + e_i(dq_i/dt) & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \end{cases} \quad (2.13)$$

つぎに、 Σ_i に関して座標系 $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ の回転加速度(角加速度) $d\omega_i/dt$ 、(線)加速度 dv_i/dt は、以下のようにして求まる。まず、(2.11)を再度微分することにより、角加速度が決定する。

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_i}{dt} &= \frac{d\omega_{i-1}}{dt} + \frac{d^*\omega_r}{dt} \\ &= \begin{cases} \frac{d\omega_{i-1}}{dt} + \frac{d^2q_i}{dt^2}e_i + \frac{dq_i}{dt}(\omega_{i-1} \times e_i) & (\text{関節 } i \text{ が回転する場合}) \\ \frac{d\omega_{i-1}}{dt} & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

同様にして、加速度 a_i は(2.10)から

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_{i-1}}{dt} + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d^*R_{i-1,1}}{dt} + \omega_{i-1} \times R_{i-1,1} \right\} \\ &= \frac{dv_{i-1}}{dt} + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d^*R_{i-1,1}}{dt} \right\} + \omega_{i-1} \times \frac{d^*R_{i-1,1}}{dt} + \frac{d\omega_{i-1}}{dt} \times R_{i-1,1} + \\ &\quad \omega_{i-1} \times \left\{ \frac{d^*R_{i-1,1}}{dt} + \omega_{i-1} \times R_{i-1,1} \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

と書き表せる。この式のなかで($d^*R_{i-1,i}/dt$)は(2.12)を参照し、2次微分の計算は回転関節の場合

$$\begin{aligned}\frac{d^*2R_{i-1,i}}{dt^2} &= \frac{d^*\omega_r}{dt} \times R_{i-1,i} + \omega_r \times \frac{d^*R_{i-1,i}}{dt} \\ &= \frac{d^*\omega_r}{dt} \times R_{i-1,i} + \omega_r \times (\omega_r \times R_{i-1,i})\end{aligned}\quad (2.16)$$

となり、直動関節に対しては

$$\frac{d^*2R_{i-1,i}}{dt^2} = \frac{d^2q_i}{dt^2} e_i \quad (2.17)$$

となる。従って、(2.15)の a_i は

$$\begin{aligned}a_i &= \frac{dv_{i-1}}{dt} + \frac{d^*2R_{i-1,i}}{dt^2} + 2\omega_{i-1} \times \frac{d^*R_{i-1,i}}{dt} + \frac{d\omega_{i-1}}{dt} \times R_{i-1,i} + \\ &\quad \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times R_{i-1,i}) \\ &= \frac{dv_{i-1}}{dt} + \left\{ \frac{d^*\omega_r}{dt} \times R_{i-1,i} + \omega_r \times (\omega_r \times R_{i-1,i}) \right\} + \\ &\quad 2\omega_{i-1} \times \{\omega_r \times R_{i-1,i}\} + \frac{d\omega_{i-1}}{dt} \times R_{i-1,i} + \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times R_{i-1,i})\end{aligned}\quad (2.18)$$

と書ける。さらに、

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d\omega_{i-1}}{dt} + \frac{d^*\omega_r}{dt} \text{ より、各項を整理した結果、次式が得られる。}$$

$$\begin{aligned}a_i &= \frac{dv_{i-1}}{dt} + \left\{ \frac{d\omega_i}{dt} \times R_{i-1,i} + \omega_r \times (\omega_r \times R_{i-1,i}) \right\} + \\ &\quad 2\omega_{i-1} \times \{\omega_r \times R_{i-1,i}\} + \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times R_{i-1,i}) \\ &= \frac{dv_{i-1}}{dt} + \frac{d\omega_i}{dt} \times R_{i-1,i} + \omega_i \times (\omega_i \times R_{i-1,i})\end{aligned}\quad (2.19)$$

一方、直動関節の場合も同様にして(2.15)がつぎのように記述される。

$$\begin{aligned}a_i &= \frac{dv_{i-1}}{dt} + \frac{d^*2q_i}{dt^2} z_{i-1} + 2\omega_{i-1} \times \frac{dq_i}{dt} z_{i-1} + \frac{d\omega_{i-1}}{dt} \times R_{i-1,i} + \\ &\quad \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times R_{i-1,i})\end{aligned}\quad (2.20)$$

2.3 動特性方程式の漸化式による表現

2.2節において各関節での物理量を決定したので、これを利用してリンク重心での力とモーメントのつりあいを考えたアームの動特性方程式を誘導する。

まず、Fig.3に示すように、リンク*i*の重心(質量中心) G_i における諸量を定義する。

- $p_i = \Sigma$ 。の原点から G_i までの位置ベクトル
- F_i = リンク*i*の重心 G_i に働く外力
- N_i = リンク*i*の重心 G_i に働くモーメント
- I_i = 座標系 $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ に関する重心 G_i まわりの慣性行列
- s_i = Σ から重心 G_i への位置ベクトル
- \bar{v}_i = 重心 G_i におけるリンク*i*の平均速度
- \bar{a}_i = 重心 G_i におけるリンク*i*の平均加速度
- m_i = リンク*i*の質量
- f_i = リンク(*i*-1)からリンク*i*に働く力
- n_i = リンク(*i*-1)からリンク*i*に働くモーメント

重心 G_i におけるリンク*i*の平均速度 \bar{v}_i と平均加速度 \bar{a}_i は、

$$\bar{v}_i = v_i + \omega_i \times s_i \quad (2.21)$$

$$\bar{a}_i = \frac{\bar{v}_i}{dt} = \frac{dv_i}{dt} + \frac{d\omega_i}{dt} \times s_i + \omega_i \times (\omega_i \times s_i) \quad (2.22)$$

と表せる。

さて、リンク*i*に作用する力の釣合について調べると、リンク(*i*-1)から直接働く力 f_i とリンク(*i*+1)からの反作用による $-f_{i+1}$ が重心 G_i に及ぼす外力(慣性力) F_i と均衡していると考えればよい。つまり、

$$F_i = f_i + (-f_{i+1}) \quad (2.23)$$

と記述でき、また、重心 G_i まわりのモーメントのつりあいは

$$\begin{aligned} N_i &= n_i + (-n_{i+1}) + (r_{i-1} - p_i) \times f_i + (r_i - p_i) \times (-f_{i+1}) \\ &= n_i + (-n_{i+1}) - (R_{i-1, i} + s_i) \times f_i - s_i \times (-f_{i+1}) \\ &= n_i + (-n_{i+1}) - (R_{i-1, i} \times f_i) - s_i \times (f_i - f_{i+1}) \\ &= n_i + (-n_{i+1}) - R_{i-1, i} \times f_i - s_i \times F_i \\ &= n_i + (-n_{i+1}) - R_{i-1, i} \times (F_i + f_{i+1}) - s_i \times F_i \\ &= n_i + (-n_{i+1}) - (R_{i-1, i} + s_i) \times F_i - R_{i-1, i} \times f_{i+1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

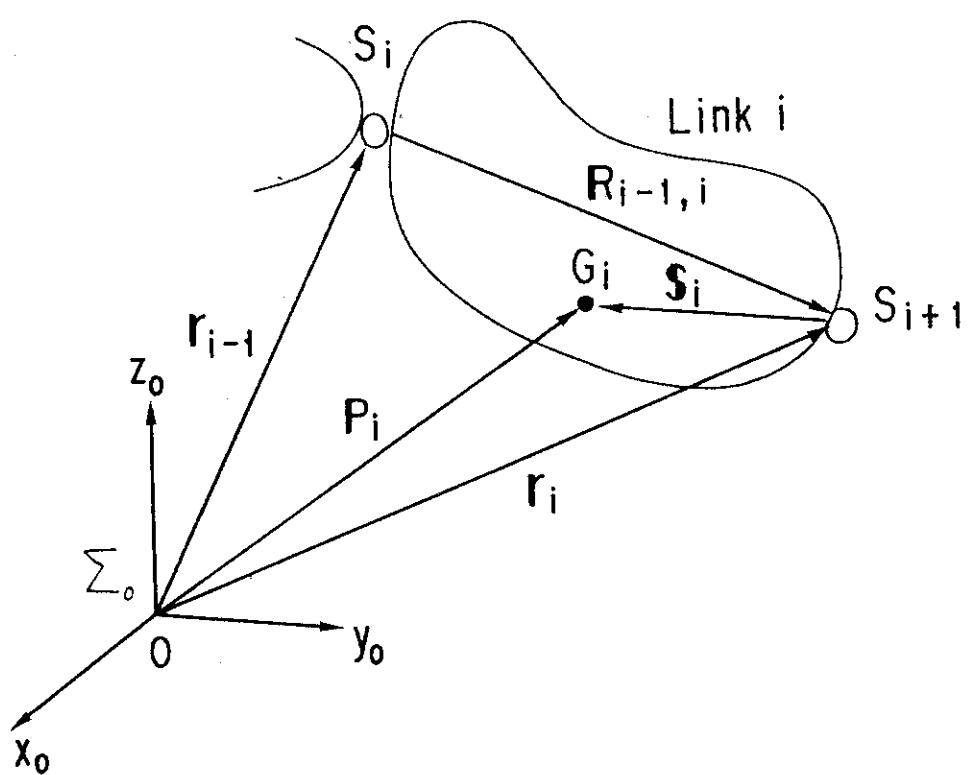


Fig.3 Relations between link and joint

とまとめられる。そこで、両式を

$$f_i = f_{i+1} + F_i \quad (2.25)$$

$$n_i = n_{i+1} + (R_{i-1, i} + s_i) \times F_i + R_{i-1, i} \times f_{i+1} + N_i \quad (2.26)$$

のように書き直すと、再帰的な表現に気付くであろう。各関節に作用する力とモーメントが後退的な手順で、すなわちリンク先端からベース方向に順に決定されることになる。質量 m_i のリンクに重心 G_i で作用する外力(慣性力) F_i は、(2.22)で与えた平均加速度 a_i から

$$F_i = m_i \bar{a}_i \quad (2.27)$$

として求まる。この慣性力 F_i に基づく(2.26)のモーメント N_i については、慣性テンソル I_i を使ってオイラーの運動方程式から算出できる。(詳細は付録Aにまわす)

すなわち、

$$N_i = \frac{d(I_i \omega)}{dt} = I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \omega_i \times (I_i \omega_i) \quad (2.28)$$

以上、目的とする関節*i*へのトルクまたは駆動力は、関節*i*が回転機構をとれば、いま求めたモーメント n_i の回転軸 z_{i-1} への射影によりトルク τ_i が、また、関節*i*が並進機構をとれば回転軸 z_{i-1} への射影により駆動力 τ_i がつぎのように定まる。

$$\tau_i = \begin{cases} n_i e_i & (\text{関節 } i \text{ が回転する場合}) \\ f_i e_i & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \end{cases} \quad (2.29)$$

このように、Newton-Eulerの運動方程式は、質点系の力学を説明するに十分なニュートンの運動の第2法則と回転に伴う角運動量の変化を論じたオイラーの運動方程式を組合せたものである。導出した(2.11), (2.13), (2.14), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), (2.27), (2.28)については、ベースからリンクの先端に向けて $i=1, 2, 3, \dots$ と1つずつ順方向に処理するいわゆる前進形の計算アルゴリズムであり、一方(25), (2.26), (2.29)はリンク先端から逆方向に $i=n, n-1, \dots$ と処理する後退形の計算アルゴリズムであることがわかる。前進形の漸化式により、各リンクの(重心における)速度、加速度、各関節の角速度、角加速度が算出され、この結果を使って後退形アルゴリズムにより各関節を駆動させるために必要なトルクや力が指先から逆方向に順次求めることができる。

ところで、上記の計算式は、慣性行列 I_i や幾何学的パラメータ($r_i, s_i, R_{i-1, i}, p_i$)がマニピュレータのベース座標系について定義したもので、運動とともに、これらの値は変化してしまう欠点がある。そこで、すべての速度、加速度、慣性行列、リンクの重心位置、力、モーメントをリンク自身の座標系で表現する必要がある。^{③)}

例えば、(i+1)番目の関節での角速度 ω_i にはすでにベースからこの関節までの変換行列 $A_{0, i} = \prod A_{i-1, i}$ が作用しているものと考えられるので、(i+1)番目の関節に設定した座標系内で議論するためには $A_{0, i}^{-1} \omega_i$ すなわち $A_{i, 0} \omega_i$ と記述し直して計算すればよい。このように各物理量を書き直した最終的な計算アルゴリズムを(2.31)～(2.39)に示す。ここに、 $A_{i-1, i}$ は、座標系 Σ_i から Σ_{i-1} へ変換する行列で、Denavit-Hartenbergの記法にしたがつたものである。^{15), 16)}

$$A_{i-1, i} = \begin{vmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

(a) 回転角速度 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$A_{i, 0} \omega_i = \begin{cases} A_{i, i-1} (A_{i-1, 0} \omega_{i-1} + e_i \dot{q}_i) & (\text{関節 } i \text{ が回転する場合}) \\ A_{i, i-1} (A_{i-1, 0} \omega_{i-1}) & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \end{cases} \quad (2.31)$$

(b) 回転角加速度 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$A_{i, 0} \ddot{\omega}_i = \begin{cases} A_{i, i-1} \{ A_{i-1, 0} \ddot{\omega}_{i-1} + e_i \ddot{q}_i + (A_{i-1, 0} \omega_{i-1}) x e_i \dot{q}_i \} & (\text{関節 } i \text{ が回転する場合}) \\ A_{i, i-1} (A_{i-1, 0} \ddot{\omega}_{i-1}) & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \end{cases} \quad (2.32)$$

(c) (線)加速度 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$A_{i, 0} \ddot{v}_i = \begin{cases} (A_{i, 0} \dot{\omega}_i) x (A_{i, 0} R_{i-1, i}) + (A_{i, 0} \omega_i) x \{ (A_{i, 0} \omega_i) x (A_{i, 0} R_{i-1, i}) \} \\ + A_{i, i-1} (A_{i-1, 0} \ddot{v}_{i-1}) & (\text{関節 } i \text{ が回転する場合}) \\ A_{i, i-1} (e_i \ddot{q}_i + A_{i-1, 0} \ddot{v}_{i-1}) + (A_{i, 0} \dot{\omega}_i) x (A_{i, 0} R_{i-1, i}) + \\ 2(A_{i, 0} \omega_i) x (A_{i, i-1} e_i \dot{q}_i) + \\ (A_{i, 0} \omega_i) x [(A_{i, 0} \omega_i) x (A_{i, 0} R_{i-1, i})] & (\text{関節 } i \text{ が並進する場合}) \end{cases} \quad (2.33)$$

(d) リンク質量中心の加速度 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$\dot{A}_{i,0}\bar{a}_i = (\dot{A}_{i,0}\omega_i)x(\dot{A}_{i,0}s_i) + (\dot{A}_{i,0}\omega_i)x((\dot{A}_{i,0}\omega_i)x(\dot{A}_{i,0}s_i)) + (\dot{A}_{i,0}\dot{v}_i) \quad (2.34)$$

(e) リンク質量中心に及ぼす慣性力 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$\dot{A}_{i,0}\bar{F}_i = m_i \dot{A}_{i,0}\bar{a}_i \quad (2.35)$$

(f) リンク質量中心に及ぼす全モーメント ($i=1, 2, \dots, n$)

$$\dot{A}_{i,0}\bar{N}_i = \dot{A}_{i,0}I_i A_{0,i}(\dot{A}_{i,0}\omega_i) + (\dot{A}_{i,0}\omega_i)x[\dot{A}_{i,0}I_i A_{0,i}(\dot{A}_{i,0}\omega_i)] \quad (2.36)$$

$\dot{A}_{i,0}I_i A_{0,i}$ は、関節($i+1$)の座標系 $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ に関するリンク*i*の重心 G_i まわりの慣性モーメントである。

(g) モーメントと力 ($i=n, n-1, \dots, 1$)

$$\dot{A}_{i,0}\bar{f}_i = \dot{A}_{i,i+1}(\dot{A}_{i+1,0}\bar{f}_{i+1}) + \dot{A}_{i,0}\bar{F}_i \quad (2.37)$$

$$\dot{A}_{i,0}\bar{n}_i = \dot{A}_{i,i+1}[(\dot{A}_{i+1,0}\bar{n}_{i+1}) + (\dot{A}_{i+1,0}\bar{R}_{i-1,i})x(\dot{A}_{i+1,0}\bar{f}_{i+1})] + (\dot{A}_{i,0}\bar{R}_{i-1,i} + \dot{A}_{i,0}\bar{s}_i)x(m_i \dot{A}_{i,0}\bar{a}_i) + \dot{A}_{i,0}\bar{N}_i \quad (2.38)$$

(h) 関節の駆動トルクと駆動力 ($i=n, n-1, \dots, 1$)

$$\tau_i = \begin{cases} (\dot{A}_{i,0}\bar{n}_i)^T(\dot{A}_{i,i-1}\bar{e}_i) + b_i \dot{q}_i & \text{(関節 } i \text{ が回転する場合)} \\ (\dot{A}_{i,0}\bar{f}_i)^T(\dot{A}_{i,i-1}\bar{e}_i) + b_i \dot{q}_i & \text{(関節 } i \text{ が並進する場合)} \end{cases} \quad (2.39)$$

ここで、 b_i は、関節*i*の粘性係数である。 z_{i-1} の軸ベクトルは $\bar{e}_i = (0, 0, 1)^T$ と定める。

3. 運動方程式のシンボリックな表示

2.3節で誘導した漸化式は、ベクトルと行列の計算が中心であるから、計算に適したシンボリックな表現を行う。ここで扱う関節はすべて回転関節とする。

(a) 回転角速度について

2.3節(2.30)で表される変換行列を3次の配列として定義する。($i=1, 2, \dots, n$)

$$A_{i-1, i} = (a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(1, 1, i) & A(1, 2, i) & A(1, 3, i) \\ A(2, 1, i) & A(2, 2, i) & A(2, 3, i) \\ A(3, 1, i) & A(3, 2, i) & A(3, 3, i) \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

次に、 $A_{i-1, 0} \omega_{i-1}$ を下記の配列Bで定義すると、

$$A_{i-1, 0} \omega_{i-1} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B(1, i) \\ B(2, i) \\ B(3, i) \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

$A_{i, 0} \omega_i$ は

$$A_{i, 0} \omega_i = \begin{vmatrix} B(1, i+1) \\ B(2, i+1) \\ B(3, i+1) \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

と書ける。但し、 $\omega_0 = 0$ より

$$\begin{vmatrix} B(1, 1) \\ B(2, 1) \\ B(3, 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

したがって、つぎの計算を行って($e_1 = (0, 0, 1)^T$)

$$A_{i, i-1}(A_{i-1, 0} \omega_{i-1} + e_i \dot{q}_i) =$$

$$\begin{vmatrix} A(1, 1, i) & A(2, 1, i) & A(3, 1, i) \\ A(1, 2, i) & A(2, 2, i) & A(3, 2, i) \\ A(1, 3, i) & A(2, 3, i) & A(3, 3, i) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B(1, i) \\ B(2, i) \\ B(3, i) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_i \end{vmatrix}$$

配列要素 $B(k, l)$ が繰返し計算で決定する。

$$B(1, i+1) = A(1, 1, i)B(1, i) + A(2, 1, i)B(2, i) + A(3, 1, i)\{B(3, i) + \dot{\theta}_1\} \quad (3.5)$$

$$B(2, i+1) = A(1, 2, i)B(1, i) + A(2, 2, i)B(2, i) + A(3, 2, i)\{B(3, i) + \dot{\theta}_1\} \quad (3.6)$$

$$B(3, i+1) = A(1, 3, i)B(1, i) + A(2, 3, i)B(2, i) + A(3, 3, i)\{B(3, i) + \dot{\theta}_1\} \quad (3.7)$$

(b) 回転角加速度について

$A_{1-1, 0}\omega_{1-1}$ を配列CXで定義し、その他の項を以下のように計算する。

$$A_{1-1, 0}\omega_{1-1} = \begin{vmatrix} CX(1, i) \\ CX(2, i) \\ CX(3, i) \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

$$(A_{1-1, 0}\omega_{1-1})x e_i q_1 = \begin{vmatrix} B(1, i) \\ B(2, i) \\ B(3, i) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B(2, i) \dot{\theta}_1 \\ -B(1, i) \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

$$\text{但し}, \omega_0=0 \text{より } CX(1, 1)=CX(2, 1)=CX(3, 1)=0 \quad (3.10)$$

とする。また、配列DDをつぎのようく定める。

$$A_{1-1, 0}\omega_{1-1} + e_i \ddot{q}_1 + (A_{1-1, 0}\omega_{1-1})x e_i \dot{q}_1 =$$

$$\begin{vmatrix} CX(1, i) \\ CX(2, i) \\ CX(3, i) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B(2, i) \dot{\theta}_1 \\ -B(1, i) \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} DD(1, i) \\ DD(2, i) \\ DD(3, i) \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

これよりベクトル $A_{1, 0}\omega_1$ が決定する。

$$CX(1, i+1) = A(1, 1, i)DD(1, i) + A(2, 1, i)DD(2, i) + A(3, 1, i)DD(3, i) \quad (3.12)$$

$$CX(2, i+1) = A(1, 2, i)DD(1, i) + A(2, 2, i)DD(2, i) + A(3, 2, i)DD(3, i) \quad (3.13)$$

$$CX(3, i+1) = A(1, 3, i)DD(1, i) + A(2, 3, i)DD(2, i) + A(3, 3, i)DD(3, i) \quad (3.14)$$

(c) (線)加速度について

Σ_{1-1} と Σ_1 間の座標変換は4x4同次変換行列でつぎのようく表せる。

$$\begin{vmatrix} A_{0, 1-1} & r_{1-1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{1-1, 1} & R_{1-1, 1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{0, 1} & r_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

これより、

$$A_{0, 1-1}A_{1-1, 1} = A_{0, 1} \quad (3.16)$$

$$A_{0, 1-1}R_{1-1, 1} + r_{1-1} = r_1 \quad (3.17)$$

の関係から $A_{1,0}R_{1-i,1}$ が決定する。

$$A_{1,0}R_{1-i,1} = A_{1,i-1}A_{1-i,0}(r_i - r_{i-1}) = A_{1,i-1}R_{1-i,1} =$$

$$\begin{vmatrix} c_i & s_i & 0 \\ -s_i \gamma_i & c_i \gamma_i & \eta_i \\ s_i \eta_i & -c_i \eta_i & \gamma_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_i c_i \\ a_i s_i \\ d_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i \\ d_i \eta_i \\ d_i \gamma_i \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

但し、 $\cos \alpha_i = \gamma_i$, $\sin \alpha_i = \eta_i$, $\sin \theta_i = s_i$, $\cos \theta_i = c_i$

以下、配列 CC, BB, BBB それに H を定義する。

$$\begin{aligned} (A_{1,0}\omega_1) x (A_{1,0}R_{1-i,1}) &= \\ \begin{vmatrix} CX(1,i+1) \\ CX(2,i+1) \\ CX(3,i+1) \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} a_i \\ d_i \eta_i \\ d_i \gamma_i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} CX(2,i+1)d_i \gamma_i - CX(3,i+1)d_i \eta_i \\ CX(3,i+1)a_i - CX(1,i+1)d_i \gamma_i \\ CX(1,i+1)d_i \eta_i - CX(2,i+1)a_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} CC(1,i) \\ CC(2,i) \\ CC(3,i) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} (A_{1,0}\omega_1) x (A_{1,0}R_{1-i,1}) &= \\ \begin{vmatrix} B(1,i+1) \\ B(2,i+1) \\ B(3,i+1) \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} a_i \\ d_i \eta_i \\ d_i \gamma_i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} B(2,i+1)d_i \gamma_i - B(3,i+1)d_i \eta_i \\ B(3,i+1)a_i - B(1,i+1)d_i \gamma_i \\ B(1,i+1)d_i \eta_i - B(2,i+1)a_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} BB(1,i) \\ BB(2,i) \\ BB(3,i) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} (A_{1,0}\omega_1) x ((A_{1,0}\omega_1) x (A_{1,0}R_{1-i,1})) &= \\ \begin{vmatrix} B(1,i+1) \\ B(2,i+1) \\ B(3,i+1) \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} BB(1,i) \\ BB(2,i) \\ BB(3,i) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} B(2,i+1)BB(3,i) - B(3,i+1)BB(2,i) \\ B(3,i+1)BB(1,i) - B(1,i+1)BB(3,i) \\ B(1,i+1)BB(2,i) - B(2,i+1)BB(1,i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} BBB(1,i) \\ BBB(2,i) \\ BBB(3,i) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$A_{1-i,0}v_{i-1} = (H(1,i), H(2,i), H(3,i))^T \quad (3.22)$$

但し、 $H(1,1)=H(2,1)=0$, $H(3,1)=g$, g は重力加速度で z_0 正方向に作用する。

$$\begin{aligned} A_{1,i-1}(A_{1-i,0}v_{i-1}) &= \\ \begin{vmatrix} A(1,1,i) & A(2,1,i) & A(3,1,i) \\ A(1,2,i) & A(2,2,i) & A(3,2,i) \\ A(1,3,i) & A(2,3,i) & A(3,3,i) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H(1,i) \\ H(2,i) \\ H(3,i) \end{vmatrix} &= \\ \begin{vmatrix} A(1,1,i)H(1,i) + A(2,1,i)H(2,i) + A(3,1,i)H(3,i) \\ A(1,2,i)H(1,i) + A(2,2,i)H(2,i) + A(3,2,i)H(3,i) \\ A(1,3,i)H(1,i) + A(2,3,i)H(2,i) + A(3,3,i)H(3,i) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

したがって、 $A_{1,0}v_1$ は

$$\begin{aligned} H(1,i+1) &= CC(1,i) + BBB(1,i) + A(1,1,i)H(1,i) + A(2,1,i)H(2,i) \\ &\quad + A(3,1,i)H(3,i) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} H(2, i+1) &= CC(2, i) + BBB(2, i) + A(1, 2, i)H(1, i) + A(2, 2, i)H(2, i) \\ &\quad + A(3, 2, i)H(3, i) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} H(3, i+1) &= CC(3, i) + BBB(3, i) + A(1, 3, i)H(1, i) + A(2, 3, i)H(2, i) \\ &\quad + A(3, 3, i)H(3, i) \end{aligned} \quad (3.25)$$

として計算される。

(d) リンク質量中心の加速度について

$$\begin{aligned} (A_{1, \square} s_1) &= (-1/2)(A_{1, \square} R_{1-1, i}) = (-1/2)[a_1 c_1, a_1 s_1, d_1]^T \\ &= (AR(1, i), AR(2, i), AR(3, i))^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

各項のベクトル外積を配列 CAR, BAR, B2, で表し, (3.23)~(3.25)を使って

$$(A_{1, \square} \dot{\omega}_1) \times (A_{1, \square} s_1) = \begin{vmatrix} CX(1, i+1) \\ CX(2, i+1) \\ CX(3, i+1) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} AR(1, i) \\ AR(2, i) \\ AR(3, i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} CAR(1, i) \\ CAR(2, i) \\ CAR(3, i) \end{vmatrix} \quad (3.27)$$

$$(A_{1, \square} \dot{\omega}_1) \times (A_{1, \square} s_1) = \begin{vmatrix} B(1, i+1) \\ B(2, i+1) \\ B(3, i+1) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} AR(1, i) \\ AR(2, i) \\ AR(3, i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} BAR(1, i) \\ BAR(2, i) \\ BAR(3, i) \end{vmatrix} \quad (3.28)$$

$$(A_{1, \square} \dot{\omega}_1) \times ((A_{1, \square} \dot{\omega}_1) \times (A_{1, \square} s_1)) = \begin{vmatrix} B(1, i+1) \\ B(2, i+1) \\ B(3, i+1) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} BAR(1, i) \\ BAR(2, i) \\ BAR(3, i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B2(1, i) \\ B2(2, i) \\ B2(3, i) \end{vmatrix} \quad (3.29)$$

とした後, 加速度を配列和で表現する。

$$\overline{A_{1, \square} a_1} = (AA(1, i), AA(2, i), AA(3, i))^T \quad (3.30)$$

$$AA(1, i) = CAR(1, i) + B2(1, i) + H(1, i+1) \quad (3.31)$$

$$AA(2, i) = CAR(2, i) + B2(2, i) + H(2, i+1) \quad (3.32)$$

$$AA(3, i) = CAR(3, i) + B2(3, i) + H(3, i+1) \quad (3.33)$$

(e) リンク質量中心に及ぼす慣性力について

$$A_{1, \square} F_1 = m_1 \begin{vmatrix} AA(1, i) \\ AA(2, i) \\ AA(3, i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F(1, i) \\ F(2, i) \\ F(3, i) \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

(f) リンク質量中心に及ぼす全モーメントについて

$A_{1,i} \odot I_i A_{0,i}$ を座標系 $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ のなかでリンク i の重心まわりの慣性行列とし、軸慣性モーメントのみを考慮し、慣性乗積を無視する。

$$A_{1,i} \odot I_i A_{0,i} (A_{1,i} \odot \omega_i) =$$

$$\begin{vmatrix} J(1,1,i) & J(1,2,i) & J(1,3,i) \\ J(2,1,i) & J(2,2,i) & J(2,3,i) \\ J(3,1,i) & J(3,2,i) & J(3,3,i) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} CX(1,i+1) \\ CX(2,i+1) \\ CX(3,i+1) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} J(1,1,i)CX(1,i+1) + J(1,2,i)CX(2,i+1) + J(1,3,i)CX(3,i+1) \\ J(2,1,i)CX(1,i+1) + J(2,2,i)CX(2,i+1) + J(2,3,i)CX(3,i+1) \\ J(3,1,i)CX(1,i+1) + J(3,2,i)CX(2,i+1) + J(3,3,i)CX(3,i+1) \end{vmatrix}$$

したがって、対角要素だけを取り出して、2次の配列 J, XJC, XJB, BIB を定義して、重心でのモーメントが以下のようにして(3.37)で決定する。

$$\begin{vmatrix} J(1,i)CX(1,i+1) \\ J(2,i)CX(2,i+1) \\ J(3,i)CX(3,i+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XJC(1,i) \\ XJC(2,i) \\ XJC(3,i) \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

$$I_i(A_{1,i} \odot \omega_i) =$$

$$\begin{vmatrix} J(1,i)B(1,i+1) \\ J(2,i)B(2,i+1) \\ J(3,i)B(3,i+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XJB(1,i) \\ XJB(2,i) \\ XJB(3,i) \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

$$(A_{1,i} \odot \omega_i) \times [I_i(A_{1,i} \odot \omega_i)] =$$

$$\begin{vmatrix} B(1,i+1) \\ B(2,i+1) \\ B(3,i+1) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} XJB(1,i) \\ XJB(2,i) \\ XJB(3,i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} BIB(1,i) \\ BIB(2,i) \\ BIB(3,i) \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

$$A_{1,i} \odot N_i = \begin{vmatrix} AN(1,i) \\ AN(2,i) \\ AN(3,i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XJC(1,i) \\ XJC(2,i) \\ XJC(3,i) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} BIB(1,i) \\ BIB(2,i) \\ BIB(3,i) \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

(g) モーメントと力について

リンク先端に働く負荷 $A_{n+1,i} \odot f_{n+1}$ やモーメント $A_{n+1,i} \odot n_{n+1}$ を与えて、逆方向に計算していく。

$$A_{1,i+1} \odot f_{1,i+1} = (RF(1,i+1), RF(2,i+1), RF(3,i+1))^T \quad (3.38)$$

$$A_{1,i+1} \odot n_{1,i+1} = (U(1,i+1), U(2,i+1), U(3,i+1))^T \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} RF(1, i) \\ RF(2, i) \\ RF(3, i) \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{ccc} A(1, 1, i+1) & A(1, 2, i+1) & A(1, 3, i+1) \\ A(2, 1, i+1) & A(2, 2, i+1) & A(2, 3, i+1) \\ A(3, 1, i+1) & A(3, 2, i+1) & A(3, 3, i+1) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} RF(1, i+1) \\ RF(2, i+1) \\ RF(3, i+1) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} F(1, i) \\ F(2, i) \\ F(3, i) \end{array} \right| \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} A_{i+1, 0} R_{i-1, i} &= A_{i+1, i} A_{i, 0} R_{i-1, i} = \\ \left| \begin{array}{c} A(1, 1, i+1) \\ A(2, 1, i+1) \\ A(3, 1, i+1) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} a_i \\ d_i \gamma_i \\ d_i \gamma_i \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{c} YK(1, i) \\ YK(2, i) \\ YK(3, i) \end{array} \right| \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} (A_{i+1, 0} R_{i-1, i}) x (A_{i+1, 0} f_{i+1}) &= \\ \left| \begin{array}{c} YK(1, i) \\ YK(2, i) \\ YK(3, i) \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} RF(1, i+1) \\ RF(2, i+1) \\ RF(3, i+1) \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{c} YKR(1, i) \\ YKR(2, i) \\ YKR(3, i) \end{array} \right| \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} (A_{i+1, 0} n_{i+1}) + (A_{i+1, 0} R_{i-1, i}) x (A_{i+1, 0} f_{i+1}) &= \\ \left| \begin{array}{c} U(1, i+1) \\ U(2, i+1) \\ U(3, i+1) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} YKR(1, i) \\ YKR(2, i) \\ YKR(3, i) \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{c} U2(1, i) \\ U2(2, i) \\ U2(3, i) \end{array} \right| \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} A_{i, i+1} [(A_{i+1, 0} n_{i+1}) + (A_{i+1, 0} R_{i-1, i}) x (A_{i+1, 0} f_{i+1})] &= \\ \left| \begin{array}{c} A(1, 1, i)U2(1, i) + A(1, 2, i)U2(2, i) + A(1, 3, i)U2(3, i) \\ A(2, 1, i)U2(1, i) + A(2, 2, i)U2(2, i) + A(2, 3, i)U2(3, i) \\ A(3, 1, i)U2(1, i) + A(3, 2, i)U2(2, i) + A(3, 3, i)U2(3, i) \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{c} AU2(1, i) \\ AU2(2, i) \\ AU2(3, i) \end{array} \right| \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$(A_{i, 0} R_{i-1, i} + A_{i, 0} s_i) = -(AR(1, i), AR(2, i), AR(3, i))^T$$

$$\begin{aligned} (A_{i, 0} R_{i-1, i} + A_{i, 0} s_i) x (m_i A_{i, 0} \bar{a}_i) &= \\ - \left| \begin{array}{c} AR(1, i) \\ AR(2, i) \\ AR(3, i) \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} F(1, i) \\ F(2, i) \\ F(3, i) \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{c} AR(3, i)F(2, i) - AR(2, i)F(3, i) \\ AR(1, i)F(3, i) - AR(3, i)F(1, i) \\ AR(2, i)F(1, i) - AR(1, i)F(2, i) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} PF(1, i) \\ PF(2, i) \\ PF(3, i) \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$U(1, i) = AU2(1, i) + PF(1, i) + AN(1, i) \quad (3.45)$$

$$U(2, i) = AU2(2, i) + PF(2, i) + AN(2, i) \quad (3.46)$$

$$U(3, i) = AU2(3, i) + PF(3, i) + AN(3, i) \quad (3.47)$$

(h) 関節の駆動トルクと駆動力について

$$\begin{aligned} \tau_i &= (A_{i, 0} n_i)^T (A_{i, i-1} e_i) + b_i \dot{q}_i \\ [U(1, i), U(2, i), U(3, i)]^T \left| \begin{array}{c} A(1, 1, i) \\ A(1, 2, i) \\ A(1, 3, i) \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| + b_i \dot{q}_i \\ = A(3, 1, i)u(1, i) + A(3, 2, i)u(2, i) + A(3, 3, i)u(3, i) + b_i \dot{q}_i & \end{aligned} \quad (3.48)$$

4. 計算例

本節で、開発した動力学モデルの解析例を示す。対象とした6リンク・マニピュレータの概略をFig. 4に与える。また、Denavit-Hartenbergの記法で定めた座標系をFig. 5に、リンクの各パラメータをTable 1に示す。

つぎに、駆動トルクを計算するうえで必要な各関節の運動について考える。
最初に、関節を駆動する角速度をFig. 6のような台形タイプの速度分布で与えることにする。すなわち、移動時間Tを3つに等分して、最初の部分で各関節の駆動機構が一定の加速度で運動し、加速度ゼロを経過した後逆符号の加速度で目標点に到達するモデルを取り入れる。これを式で表わせば、

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \begin{cases} a & (0 \leq t \leq T/3) \\ 0 & (T/3 \leq t \leq 2T/3) \\ -a & (2T/3 \leq t \leq T) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdots \cdots \text{(領域 I)} \\ \cdots \cdots \text{(領域 II)} \\ \cdots \cdots \text{(領域 III)} \end{array}$$

となる。上の式を積分して、両端の境界条件から

領域 I では

$$q(t) = (1/2)at^2$$

領域 II では

$$q(t) = aT(6t-T)/18$$

領域 III では

$$q(t) = -a(t-T)^2/2 + 2aT^2/9$$

と決定することがわかる。また、始点、終点間の関節角の変動幅を $\Delta\theta$ とすると、計算に用いる加速度が、移動時間Tと $\Delta\theta$ により

$$a = \frac{9\Delta\theta}{2T^2}$$

と表わせる。

こうした関節運動の条件下で、マニピュレータの指先が作業空間内を出発点A(-0.1, 0.35, 1.63)から最終点B(-0.10, 0.35, 1.83)(単位 m)までその姿勢を一定($n_x=n_y=0, n_z=1, o_y=o_z=0, o_x=1$)に保持してこの直線軌道上を移動したときの、各関節に作用するトルクを算出しよう。この軌道は、逆運動学のアルゴリズムを利用して、A点での関節変数($\theta_1=2.7533, \theta_2=0.1502, \theta_3=85.7259, \theta_4=-33.7722, \theta_5=-85.0428, \theta_6=33.6731$)(deg), とB

点での関節変数($\theta_1=10.4705, \theta_2=8.7346, \theta_3=44.3932, \theta_4=-17.1186, \theta_5=-51.8741, \theta_6=13.6195$)(deg)に対応する。各関節に作用するトルクをFig.7からFig.12に示す。なお、各リンクの質量は、($m_1=20, m_2=10, m_3=2, m_4=10, m_5=10, m_6=2$)(kg)として計算を行った。

- $a_1 = 700(\text{mm})$
 $a_2 = 500(\text{mm})$
 $a_3 + a_4 = 350(\text{mm})$
 $a_5 = 150(\text{mm})$
 $a_6 = 280(\text{mm})$
- $-200 \leq \theta_1 \leq 200(\text{deg})$
 - $-30 \leq \theta_2 \leq 120(\text{deg})$
 - $-90 \leq \theta_3 \leq 90(\text{deg})$
 - $-180 \leq \theta_4 \leq 180(\text{deg})$
 - $-90 \leq \theta_5 \leq 90(\text{deg})$
 - $-60 \leq \theta_6 \leq 60(\text{deg})$

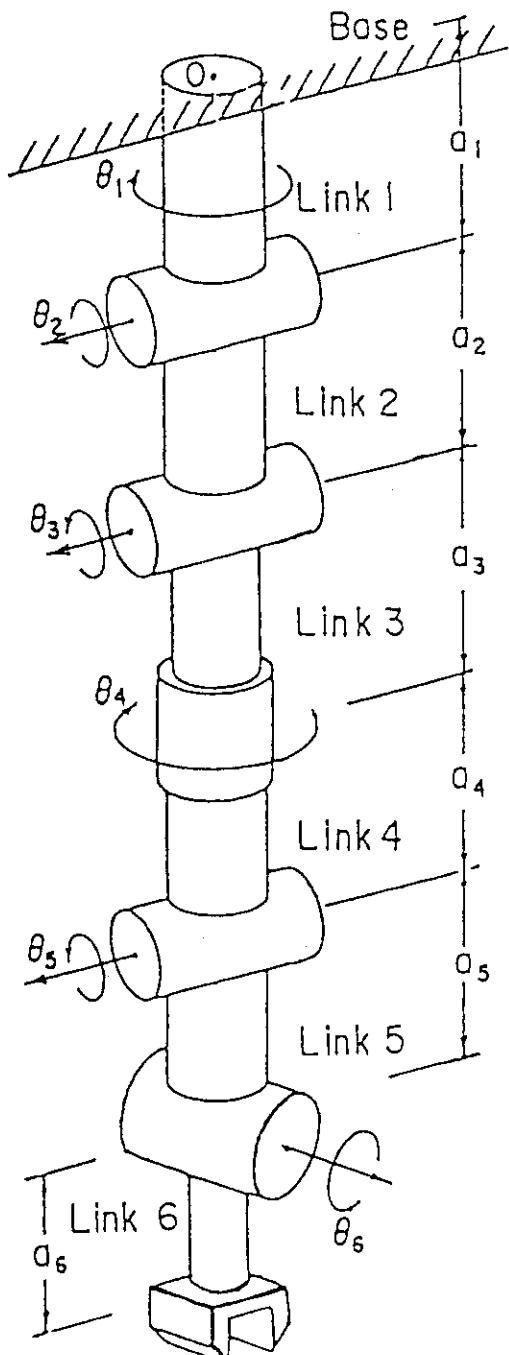


Fig.4 Schematic representation of a six-link manipulator

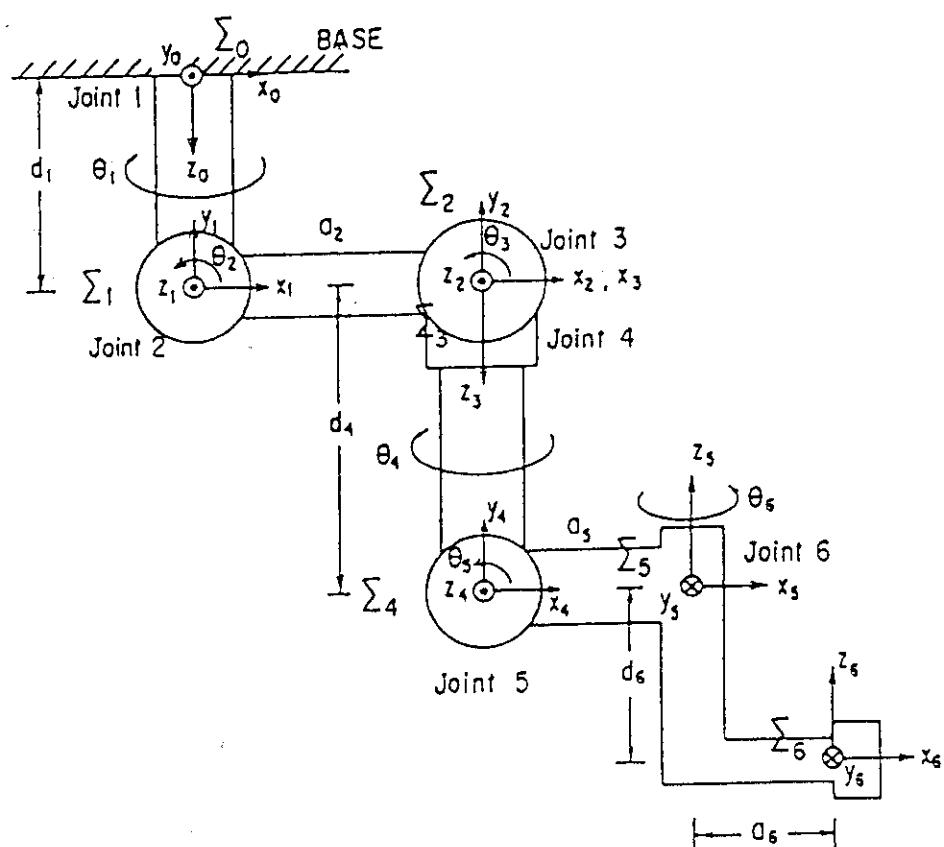


Fig.5 Definition of link co-ordinates systems

Table 1 Link parameters for a six-link manipulator

関節	関節角	ねじれ角 α_i		リンク長さ a_i	X-軸間の距離 d_i	
1	θ_1	α_1	-90(deg)	a_1	0(mm)	d_1
2	θ_2	α_2	0(deg)	a_2	500(mm)	d_2
3	θ_3	α_3	90(deg)	a_3	0(mm)	d_3
4	θ_4	α_4	-90(deg)	a_4	0(mm)	d_4
5	θ_5	α_5	-90(deg)	a_5	150(mm)	d_5
6	θ_6	α_6	0(deg)	a_6	280(mm)	d_6

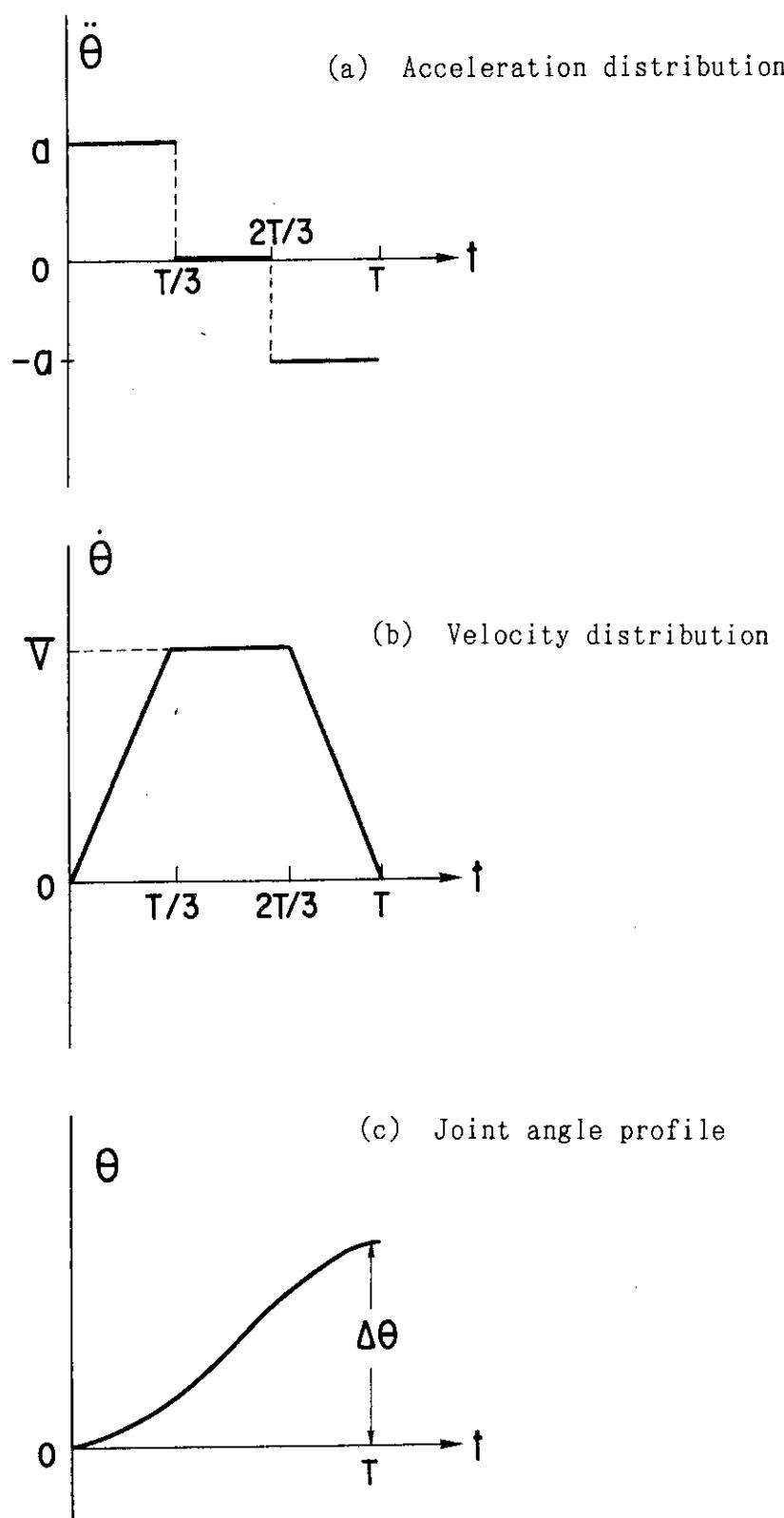


Fig.6 Distribution of velocity and acceleration of joint angle

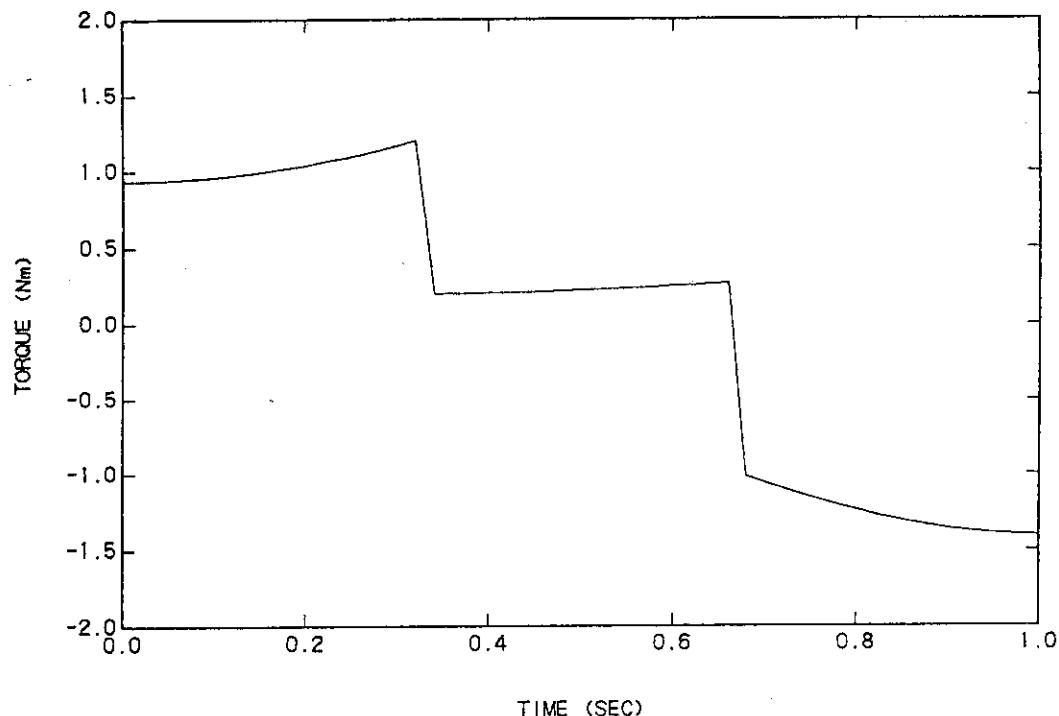


Fig.7 Calculated torque at joint 1

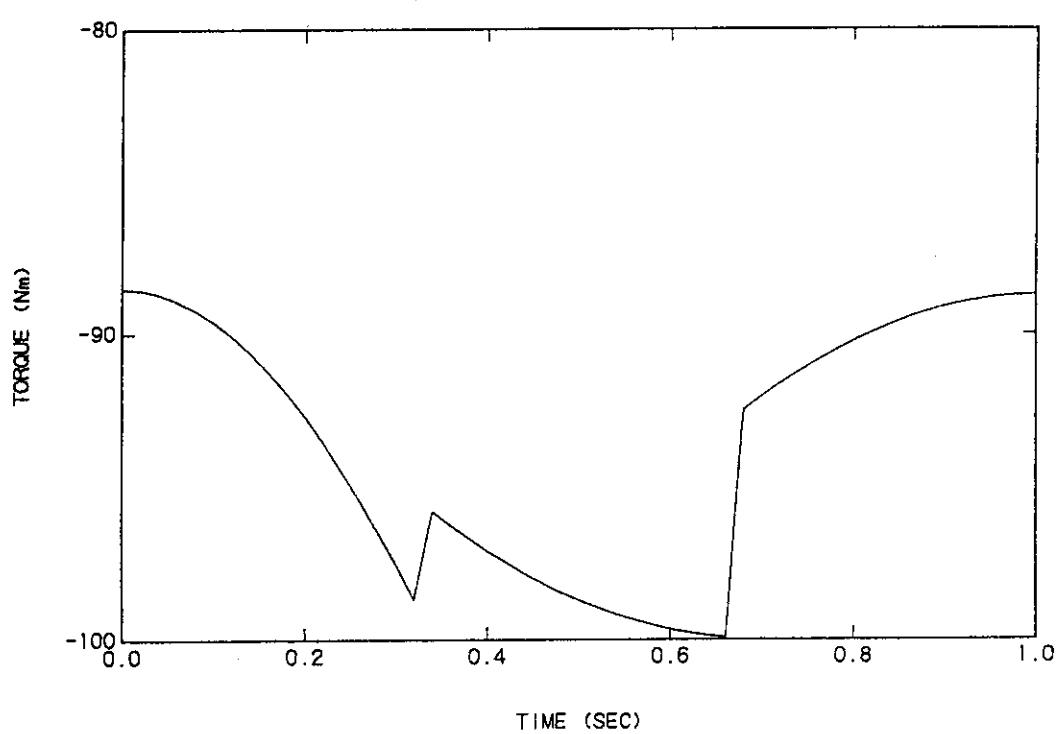


Fig.8 Calculated torque at joint 2

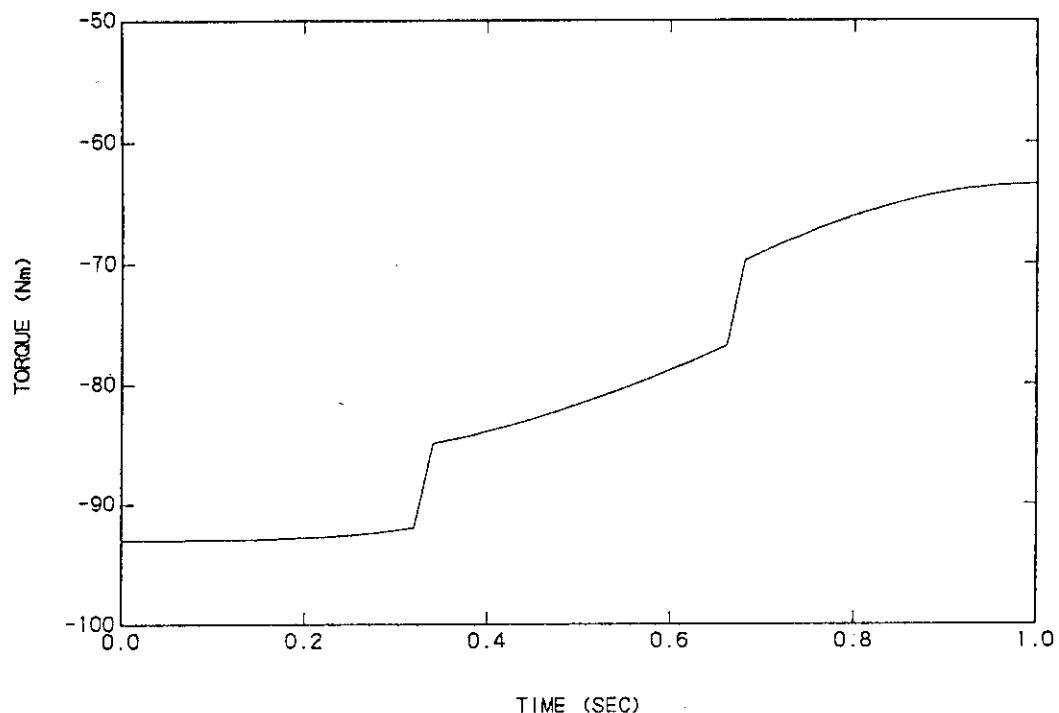


Fig.9 Calculated torque at joint 3

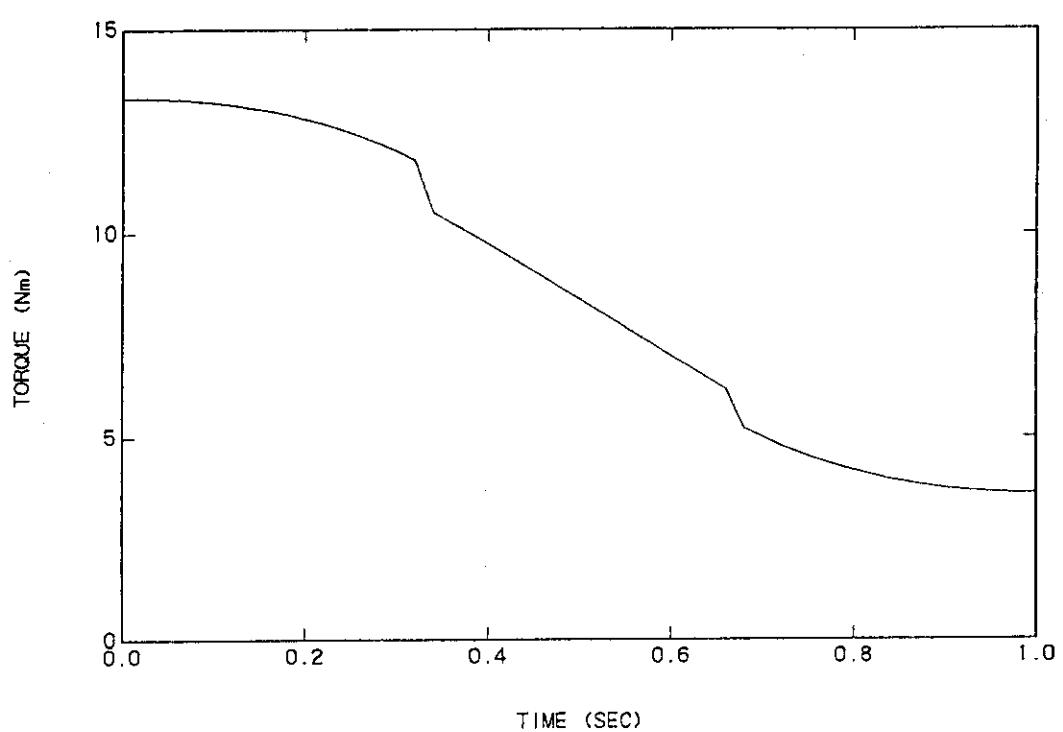


Fig.10 Calculated torque at joint 4

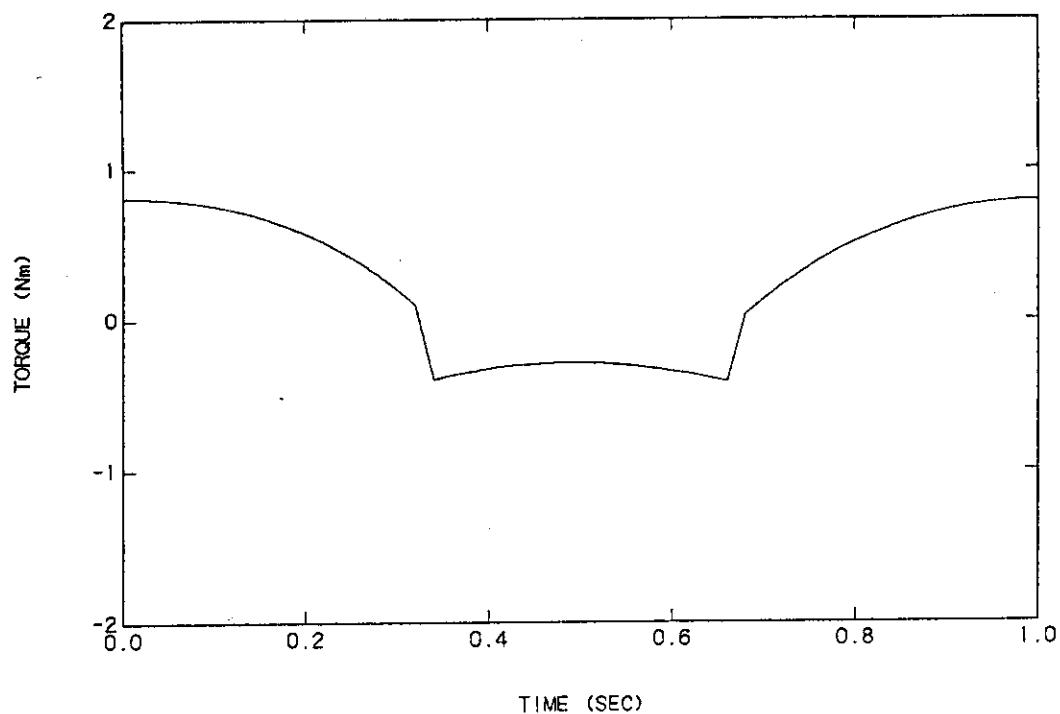


Fig.11 Calculated torque at joint 5

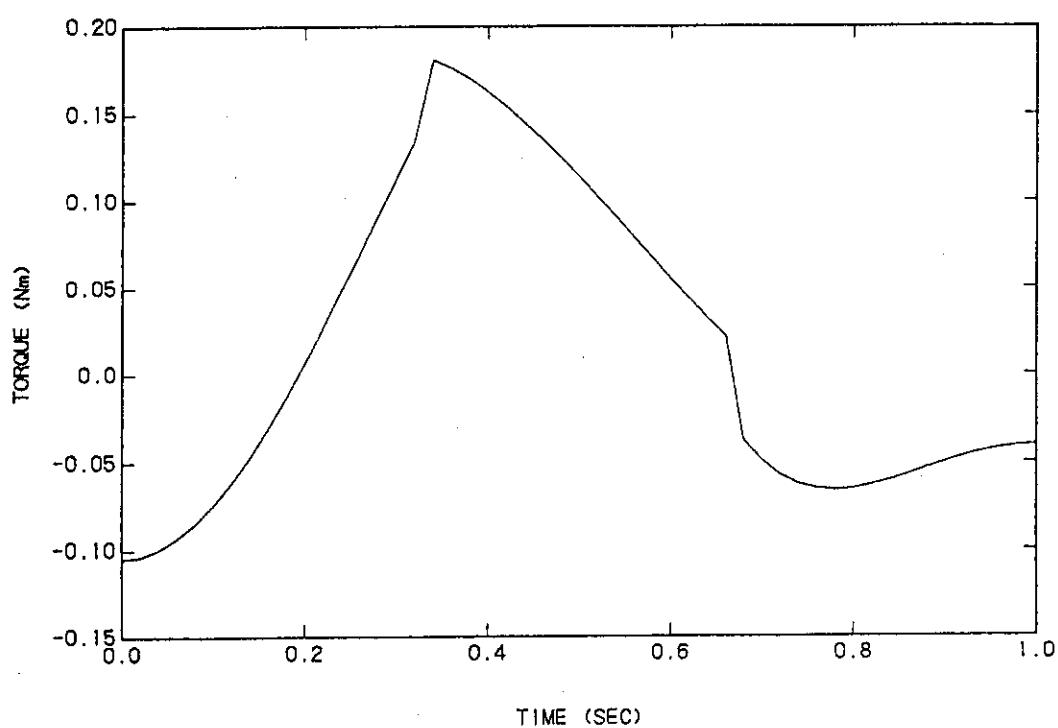


Fig.12 Calculated torque at joint 6

5. おわりに

マニピュレータの動力学モデルをNewton-Eulerの運動方程式を利用して導き出した。6自由度の複雑な力学系に対して漸化式で表現した解法は、導出過程がきわめて単純化され効率的な計算が可能であることがわかった。Lagrangeの方程式から解析的に誘導される6つの干渉しあった非線形微分方程式に比べると扱いやすいことは事実である。ただ、Newton-Eulerの方程式から出発する現在のアプローチは計算時間の短縮化の点で確かに優れているが、関節運動に関する方程式の構造が再帰計算のなかに埋もれて一目瞭然というわけにはいかないため、制御則の設計等に利用するには不向きかもしれない。しかしながら、6自由度機構の動特性をパソコンクラスの計算機でも簡単に模擬できる点は大いに利用価値がある。今後は、マニピュレータの高速動作にも対応できるように、各関節に独立の演算を受持たせるいわゆる並列処理計算の実現と適切なプロセッサの選択が残された課題であろう。

謝　　辞

本報の閲読に対して原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝します。

5. おわりに

マニピュレータの動力学モデルをNewton-Eulerの運動方程式を利用して導き出した。6自由度の複雑な力学系に対して漸化式で表現した解法は、導出過程がきわめて単純化され効率的な計算が可能であることがわかった。Lagrangeの方程式から解析的に誘導される6つの干渉しあった非線形微分方程式に比べると扱いやすいことは事実である。ただ、Newton-Eulerの方程式から出発する現在のアプローチは計算時間の短縮化の点で確かに優れているが、関節運動に関する方程式の構造が再帰計算のなかに埋もれて一目瞭然というわけにはいかないため、制御則の設計等に利用するには不向きかもしれない。しかしながら、6自由度機構の動特性をパソコンクラスの計算機でも簡単に模擬できる点は大いに利用価値がある。今後は、マニピュレータの高速動作にも対応できるように、各関節に独立の演算を受持たせるいわゆる並列処理計算の実現と適切なプロセッサの選択が残された課題であろう。

謝　　辞

本報の閲読に対して原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝します。

5. おわりに

マニピュレータの動力学モデルをNewton-Eulerの運動方程式を利用して導き出した。6自由度の複雑な力学系に対して漸化式で表現した解法は、導出過程がきわめて単純化され効率的な計算が可能であることがわかった。Lagrangeの方程式から解析的に誘導される6つの干渉しあった非線形微分方程式に比べると扱いやすいことは事実である。ただ、Newton-Eulerの方程式から出発する現在のアプローチは計算時間の短縮化の点で確かに優れているが、関節運動に関する方程式の構造が再帰計算のなかに埋もれて一目瞭然というわけにはいかないため、制御則の設計等に利用するには不向きかもしれない。しかしながら、6自由度機構の動特性をパソコンクラスの計算機でも簡単に模擬できる点は大いに利用価値がある。今後は、マニピュレータの高速動作にも対応できるように、各関節に独立の演算を受持たせるいわゆる並列処理計算の実現と適切なプロセッサの選択が残された課題であろう。

謝　香辛

本報の閲読に対して原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝します。

参考文献

- 1) J.J. Uicker : Dynamic Behavior of Spacial Linkages, *J. Eng. for Ind.* 91, No.1, 251/258 (1969)
- 2) 松家, 野口 : 3次元リンク機構動力学解析の現状, 精密機械, Vol.49-12, 108/115 (1983)
- 3) 計測と制御, ロボットアームの制御, Vol.25-1 (1986)
- 4) T.R. Kane and D.A. Levinson : The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics, *The International Journal of Robotics Research*, Vol.2-3, 3/21 (1983)
- 5) M. Vukobratovic and V. Potkonjak : Two New Methods for Computer Forming of Dynamic Equations of Active Mechanisms : *Journal of Mechanism and Machine Theory*, Vol. 14-3 (1979)
- 6) J.M. Hollerbach : A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity, *IEEE Transaction on System, Man, and Cybernetics SMC-10*, 11, 730/736 (1980)
- 7) M.W. Walker and D.E. Orin : Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 104, 205/211 (1982)
- 8) J.Y.S. Luh, M.W. Walker and R.P.C. Paul : On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulators, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.102, 69/76 (1980)
- 9) M. Vukobratovic et al.: Scientific Fundamentals of Robotics 1; Dynamics of Manipulation Robots, Springer-Verlag (1982)
- 10) M. Vukobratovic et al.: Scientific Fundamentals of Robotics 4; Real-Time Dynamics of Manipulation Robots, Springer-Verlag (1985)
- 11) M. Brady and et al. : Robot Motion : Planning and Control, The MIT Press (1982)
- 12) 佐々木 : Lagrangeの力学に基づくマニピュレータ動特性方程式の完全な記述, JAERI-M 89-121 (1989)
- 13) 佐々木他 : ロボット・マニピュレータの動特性解析(2リンク機構の計算機シミュレーション), JAERI-M 89-219 (1989)
- 14) 佐々木 : ヤコビ行列の一般的表現とその簡易計算法(マニピュレータの指先速度と関節速度の関係), JAERI-M 88-087 (1988)
- 15) J. Denavit and R.S. Hartenberg : A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.22, 215/221 (1955)

- 16) P.C. Paul : Robot Manipulators ; Mathematics, Programming and Control, The MIT Press (1981)
- 17) ゴールドスタイン(野間,瀬川訳): 古典力学, 吉岡書店 (1959)
- 18) 原島 : 力学, 裳華房 (1963)

付 錄

A. 剛体運動についての要項^{17), 18)}1) 剛体の運動方程式と慣性モーメント

質量mの質点Pが慣性系に対して速度vで運動しているときその運動量はmvで、慣性系の定点O(座標原点にとる)についてこの運動量のモーメントすなわち、角運動量は

$$L = r \times mv = m(r \times v) \quad (A.1)$$

と表される。その時間変化

$$\frac{dL}{dt} = m(r \times \frac{dv}{dt}) = r \times F = N \quad (A.2)$$

はOのまわりの力のモーメントに等しいことがわかる。これはいくつかの質点が互に作用を及ぼしあったり、また外部から力を受けて運動する質点系にも適用できる。

ところで、質点系として任意の2質点間の距離が運動を通じて変わらないものは剛体と呼ばれる。通常の固体は弾性変形するが、その変形を無視することができるとき剛体として取扱うことができる。この剛体の運動を調べるには、6自由度に対して6個の独立な式が必要である。それらは、重心での運動方程式

$$M\ddot{r}_G = \sum F_i \quad (F_i: \text{外力}) \quad (A.3)$$

と角運動量の式

$$\frac{dL}{dt} = \sum (r_i \times F_i) = N \quad (A.4)$$

でもって完全に表現できる。 $F_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$ は、質点iに働く外力で、Mは質点系の質量とする。

いま、固定軸(例えばz-軸)のまわりの剛体運動を考えると、それは、角運動量の式でz成分について取扱えばよい。すなわち、

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = N_z$$

$$L_z = \sum_i m_i (x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}) \quad (A.5)$$

が容易に導きだせる。(A.5)を円柱座標(r_i, ϕ_i)を使って書換える($x_i = r_i \cos \phi_i, y_i = r_i \sin \phi_i$)と、剛体の性質からどの点においても($d\phi_i/dt = \omega = \text{一定}$ となり

$$L_z = \sum_i (m_i r_i^2) \omega \quad (A.6)$$

を得る。ここで、剛体の固定軸のまわりの慣性モーメントを

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (A.7)$$

とすると、

$$L_z = I \omega \quad (A.8)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = N_z, \quad I \frac{d^2\phi}{dt^2} = N_z \quad (A.9)$$

となる。(A.3)の並進運動はよく知られたニュートンの運動方程式であるが、この場合、質量Mは線加速度のつきにくさ、つまり、並進運動の際の抵抗を示すものと考えられる。一方、物体が回転する場合、回転を起こさせる原因は回転軸の周りの力のモーメントNであり、回転角加速度のにつにくさが抵抗となる。これが慣性モーメントと称するもので、質量の大きさや回転軸からの距離に関係する量であり、回転運動を支配するキー・パラメータとなる。慣性モーメントIは剛体の回転についての慣性の大小を示すものであり、剛体の質量分布と軸が与えられれば、その軸に関して容易に計算できる。

ここで、Fig.A.1に示すような剛体内の点Oを通る任意の直線Lのまわりの慣性モーメントを求めよう。明らかに、点P_iの直線Lに関する慣性モーメントは、 $I = \sum m_i \overline{P_i Q_i}^2$ の計算から導き出せるであろう。直線Lの方向余弦を(λ, μ, ν)、OP_i, OQ_iの角度を ϕ_i 、それぞれ単位ベクトルをn₁, n₂とすると

$$n_1 \cdot n_2 = (\lambda i + \mu j + \nu k) \cdot ((x_i/r_i)i + (y_i/r_i)j + (z_i/r_i)k) = \cos \phi_i \quad (A.10)$$

$$\cos \phi_i = \lambda (x_i/r_i) + \mu (y_i/r_i) + \nu (z_i/r_i) \quad (A.11)$$

の関係が引出せる。また、距離 $\overline{P_i Q_i}$ は

$$\begin{aligned} \overline{P_i Q_i}^2 &= r_i^2 \sin^2 \phi_i = r_i^2 (1 - \cos^2 \phi_i) \\ &= r_i^2 - (\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i)^2 \end{aligned}$$

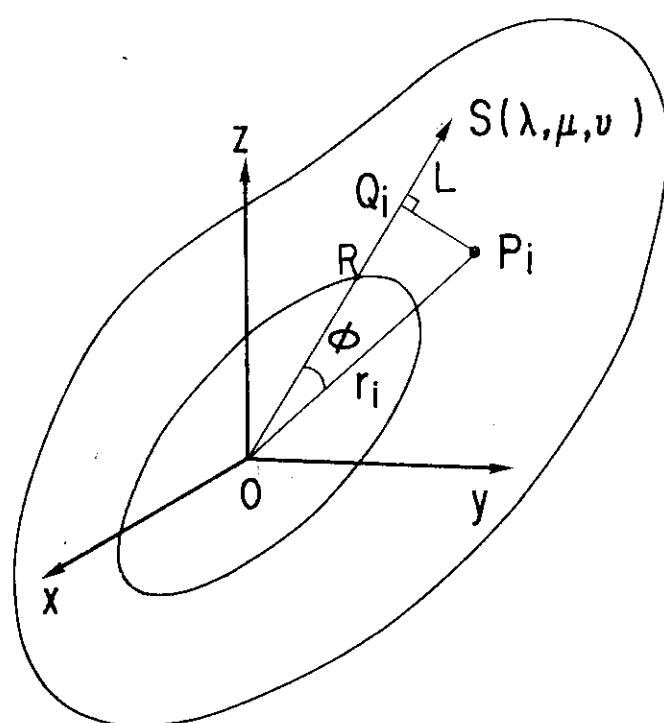


Fig.A.1 Moment of inertia around a straight line

$$\begin{aligned}
&= (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i)^2 \\
&\approx (y_i^2 + z_i^2) \lambda^2 + (z_i^2 + x_i^2) \mu^2 + (x_i^2 + y_i^2) \nu^2 - \\
&\quad 2(\mu \nu y_i z_i + \nu \lambda z_i x_i + \lambda \mu x_i y_i)
\end{aligned}$$

と表せるから、したがつて、

$$\sum m_i \overline{P_i Q_i}^2 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) \lambda^2 + \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) \mu^2 + \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \nu^2 - \\
2 \sum m_i (\mu \nu y_i z_i + \nu \lambda z_i x_i + \lambda \mu x_i y_i) \quad (A.12)$$

となり、直線Lのまわりの慣性モーメントがつぎのように求まる。

$$I = \sum m_i \overline{P_i Q_i}^2 = I_{xx} \lambda^2 + I_{yy} \mu^2 + I_{zz} \nu^2 - 2I_{yz} \mu \nu - 2I_{zx} \nu \lambda - 2I_{xy} \lambda \mu \quad (A.13)$$

ここに、

$$I_{xx} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad I_{zz} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (A.14)$$

$$I_{yz} = \sum m_i y_i z_i, \quad I_{zx} = \sum m_i z_i x_i, \quad I_{xy} = \sum m_i x_i y_i \quad (A.15)$$

である。(A.14)の I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} は、0を原点とするx, y, z軸まわりの慣性モーメントをまた、(A.15)はx, y, z軸についての慣性乗積を表す。(前者はA, B, C, 後者はF, G, Hと記すこともある。)

このように、剛体内の1点0を通る任意の直線のまわりの慣性モーメントは、直交3軸の慣性モーメントと慣性乗積により求めることができる。

ところで、(A.13)について

$$\begin{aligned}
&I_{xx}(\lambda^2/I) + I_{yy}(\mu^2/I) + I_{zz}(\nu^2/I) - 2I_{yz}(\mu \nu / I) - 2I_{zx}(\nu \lambda / I) \\
&- 2I_{xy}(\lambda \mu / I) = 1 \\
&I_{xx}(\lambda a)^2 + I_{yy}(\mu a)^2 + I_{zz}(\nu a)^2 - 2I_{yz}(\mu a)(\nu a) - 2I_{zx}(\nu a)(\lambda a) \\
&- 2I_{xy}(\lambda a)(\mu a) = 1 \quad (A.16)
\end{aligned}$$

$$\text{と書くことができる。ただし, } a^2 = (1/I) \quad (A.17)$$

いま、直線L上、原点0からaにある点Rの座標を(x, y, z)とすれば、その軌跡は

$$x = \lambda a, \quad y = \mu a, \quad z = \nu a \quad (A.18)$$

より

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy = 1 \quad (A.19)$$

で表され、楕円面をもつ慣性楕円体の式となる。x, y, z軸を改めて主軸にとると、

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 = 1 \quad (\text{A.20})$$

と簡潔化できる。この座標系では慣性乗積が零 ($I_{yz}=I_{zx}=I_{xy}=0$) となり、この主軸に対して方向余弦が λ, μ, ν である直線のまわりの慣性モーメントは、(A.13) より

$$I = I_{xx}\lambda^2 + I_{yy}\mu^2 + I_{zz}\nu^2 \quad (\text{A.21})$$

となる。主軸に対してのこの慣性モーメントを主慣性モーメントと呼ぶ。

2) オイラーの運動方程式

(A.1) を質点系に適用した場合、角運動量は

$$L = \sum (r_i \times m_i v_i) = \sum m_i (r_i \times v_i) \quad (\text{A.22})$$

と表される。剛体が固定点0のまわりに角速度 ω で回転している時は

$$v_i = \omega \times r_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}) \quad (\text{A.23})$$

すなわち、

$$\begin{aligned} v_{ix} &= \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ v_{iy} &= \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ v_{iz} &= \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

なる速度が得られる。したがって、角運動量ベクトルを成分で記述すると

$$\begin{aligned} L_x &= \sum m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) = \sum m_i ((y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z) \\ L_y &= \sum m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) = \sum m_i ((x_i^2 + z_i^2) \omega_y - y_i z_i \omega_z - x_i y_i \omega_x) \\ L_z &= \sum m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) = \sum m_i ((x_i^2 + y_i^2) \omega_z - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

となり、(A.10), (A.15) を利用するとつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{xy}\omega_x \\ L_z &= I_{zz}\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{yz}\omega_y \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

さらに、簡単な記述をすると

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.27})$$

となる。 \mathbf{I} を慣性テンソルと呼ぶ。

ところで、慣性系に対して $\boldsymbol{\omega}$ の角速度で回るベクトル \mathbf{L} の時間微分は、本文2.1節でも触れたように

$$\frac{d^* \mathbf{L}}{dt} = \frac{d^*(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} = \mathbf{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (\text{A.28})$$

と書ける。 $*$ を省略して成分表示すると

$$(dL/dt)_x = dL_x/dt + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_x \quad (\text{A.29})$$

$$(dL/dt)_y = dL_y/dt + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_y \quad (\text{A.30})$$

$$(dL/dt)_z = dL_z/dt + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_z \quad (\text{A.31})$$

と表せる。 x, y, z を慣性主軸とすると、(A.26)で $I_{xy}=I_{yz}=I_{zx}=0$ とおくと(A.29)は

$$\begin{aligned} N_x &= (dL/dt)_x = dL_x/dt + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_x \\ &= I_{xx}(d\omega_x/dt) + (I_{zz}-I_{yy})\omega_y\omega_z \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

となる。残りの式(A.30), (A.31)についても同様にして、

$$N_y = I_{yy}(d\omega_y/dt) + (I_{xx}-I_{zz})\omega_z\omega_x \quad (\text{A.33})$$

$$N_z = I_{zz}(d\omega_z/dt) + (I_{yy}-I_{xx})\omega_x\omega_y \quad (\text{A.34})$$

が得られる。(A.28)～(A.34)は、剛体の慣性系に対する角速度の慣性主軸成分の変化を表現したもので、オイラーの運動方程式と称する。アームの運動解析において中心的な役割を果す。

B. 回転する座標系の単位ベクトルの時間変化と角速度の関係¹⁴⁾

本文2.1節で取上げた直交座標系 Σ と Σ^* が原点0を共有しているとしよう。 Σ と Σ^* の間の座標変換は、単位ベクトル*i*, *j*, *k* と i^* , j^* , k^* の関係として

$$(i^*, j^*, k^*) = (i, j, k)A(t) \quad (B.1)$$

と記述できる。ただし、変換行列 $A(t)$ を時間の関数とみなしてつぎの3x3マトリクスで表現する。

$$A(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} \quad (B.2)$$

(B.1)の微分を行うと、

$$\begin{aligned} (\dot{d}i^*/dt, \dot{d}j^*/dt, \dot{d}k^*/dt) &= (i, j, k)[dA(t)/dt] \\ &= (i^*, j^*, k^*)A^{-1}(t)[dA(t)/dt] = (i^*, j^*, k^*)A^T(t)[dA(t)/dt] \end{aligned} \quad (B.3)$$

となる。ここで、逆行列は直交性により転置行列に置き換えられた。

続いて、(B.3)の行列演算を行う。

$$A^T(t) \dot{A}(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{21}(t) & a_{31}(t) \\ a_{12}(t) & a_{22}(t) & a_{32}(t) \\ a_{13}(t) & a_{23}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{a}_{11}(t) & \dot{a}_{12}(t) & \dot{a}_{13}(t) \\ \dot{a}_{21}(t) & \dot{a}_{22}(t) & \dot{a}_{23}(t) \\ \dot{a}_{31}(t) & \dot{a}_{32}(t) & \dot{a}_{33}(t) \end{vmatrix}$$

以下、時間の陽的表示(t)を省略して

$$\begin{aligned} A^T \dot{A} = & \\ \begin{vmatrix} a_{11}\dot{a}_{11} + a_{21}\dot{a}_{21} + a_{31}\dot{a}_{31} & a_{11}\dot{a}_{12} + a_{21}\dot{a}_{22} + a_{31}\dot{a}_{32} & a_{11}\dot{a}_{13} + a_{21}\dot{a}_{23} + a_{31}\dot{a}_{33} \\ a_{12}\dot{a}_{11} + a_{22}\dot{a}_{21} + a_{32}\dot{a}_{31} & a_{12}\dot{a}_{12} + a_{22}\dot{a}_{22} + a_{32}\dot{a}_{32} & a_{12}\dot{a}_{13} + a_{22}\dot{a}_{23} + a_{32}\dot{a}_{33} \\ a_{13}\dot{a}_{11} + a_{23}\dot{a}_{21} + a_{33}\dot{a}_{31} & a_{13}\dot{a}_{12} + a_{23}\dot{a}_{22} + a_{33}\dot{a}_{32} & a_{13}\dot{a}_{13} + a_{23}\dot{a}_{23} + a_{33}\dot{a}_{33} \end{vmatrix} & \end{aligned} \quad (B.4)$$

を得る。用いた \dot{a}_{ij} 等は時間tに関する微分記号である。

さて、(B.2)で定めた行列Aの要素(a_{ij})は座標変換行列の性質から方向余弦を表すもので、

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1 \quad (B.5)$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \quad (B.6)$$

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \quad (B.7)$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0 \quad (B.8)$$

$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0 \quad (B.9)$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0 \quad (B.10)$$

なる関係式で結ばれている。(B.5)～(B.10)を時間tで微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11}a_{11} + \dot{a}_{21}a_{21} + \dot{a}_{31}a_{31} &= 0 \\ \dot{a}_{12}a_{12} + \dot{a}_{22}a_{22} + \dot{a}_{32}a_{32} &= 0 \\ \dot{a}_{13}a_{13} + \dot{a}_{23}a_{23} + \dot{a}_{33}a_{33} &= 0 \\ (\dot{a}_{13}a_{12} + \dot{a}_{23}a_{22} + \dot{a}_{33}a_{32}) + (a_{12}\dot{a}_{13} + a_{22}\dot{a}_{23} + a_{32}\dot{a}_{33}) &= 0 \\ (a_{11}\dot{a}_{13} + a_{21}\dot{a}_{23} + a_{31}\dot{a}_{33}) + (a_{13}\dot{a}_{11} + a_{23}\dot{a}_{21} + a_{33}\dot{a}_{31}) &= 0 \\ (a_{12}\dot{a}_{11} + a_{22}\dot{a}_{21} + a_{32}\dot{a}_{31}) + (a_{11}\dot{a}_{12} + a_{21}\dot{a}_{22} + a_{31}\dot{a}_{32}) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。この関係を利用すると、(B.4)はつぎのような交代行列の計算に帰着する。

$$A^T A = \begin{vmatrix} 0 & -N & M \\ N & 0 & -L \\ -M & L & 0 \end{vmatrix} \quad (B.11)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } L &= a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} \\ M &= a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ N &= a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} \end{aligned} \quad (B.12)$$

こうして導き出した(B.11)に基づき、(B.3)で与えた回転運動による各軸ベクトルの変位は

$$\begin{aligned} di^*/dt &= Nj^* - Mk^*, \\ dj^*/dt &= -Ni^* + Lk^*, \\ dk^*/dt &= Mi^* - Lj^* \end{aligned} \quad (B.13)$$

と表現できる。

さて、ここで単位ベクトル i^*, j^*, k^* に立ち戻ってみる。単位ベクトル i^* のスカラーリー積 $i^* \cdot i^* = 1$ の両辺を微分して

$$(di^*/dt) \cdot i^* = 0 \quad (B.14)$$

となることから、 (di^*/dt) は i^* に垂直であることがわかる。そこで、 j^* を (di^*/dt) に垂直な単位ベクトルとすると、 (di^*/dt) はつぎのように記述できる。

$$di^*/dt = \lambda j^* \quad (B.15)$$

考察の対象は右手座標系であるから、単位ベクトル k^* は i^*, j^* を使って

$$k^* = i^* \times j^* \quad (B.16)$$

と表せる。その時間変化も容易に求まる。

$$\begin{aligned} dk^*/dt &= d(i^* \times j^*)/dt = (di^*/dt) \times j^* + i^* \times (dj^*/dt) \\ &= i^* \times (dj^*/dt) \end{aligned} \quad (B.17)$$

ここに、 (dj^*/dt) は j^* に垂直であるから、 $i^* \times (dj^*/dt)$ すなわち、 (dk^*/dt) は i^* にも k^* にも垂直となる。したがって、

$$dk^*/dt = \mu j^* \quad (B.18)$$

と書ける。さらに、右手系の定義から

$$j^* = k^* \times i^* \quad (B.19)$$

を使って、

$$\begin{aligned} dj^*/dt &= (dk^*/dt) \times i^* + k^* \times (di^*/dt) = \mu j^* \times i^* + k^* \times \lambda j^* \\ &= (\lambda k^* - \mu i^*) \times j^* \end{aligned} \quad (B.20)$$

が導かれる。 $\omega = \lambda k^* - \mu i^*$ とおくと、 i^*, j^*, k^* の微分係数は

$$\begin{aligned} di^*/dt &= \lambda j^* = \lambda (k^* \times i^*) = \lambda k^* \times i^* = (\omega + \mu i^*) \times i^* = \omega \times i^* \\ dj^*/dt &= \omega \times j^* \\ dk^*/dt &= \mu j^* = \mu (k^* \times i^*) = k^* \times \mu i^* = k^* \times (\lambda k^* - \omega) \\ &= -k^* \times \omega = \omega \times k^* \end{aligned}$$

と計算できる。つまり、

$$\begin{aligned} di^*/dt &= \omega \times i^* \\ dj^*/dt &= \omega \times j^* \\ dk^*/dt &= \omega \times k^* \end{aligned} \quad (B.21)$$

が得られる。ベクトル ω は回転する座標系 Σ^* の角速度を表し、 x^*, y^*, z^* 各軸へのその成分 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を使ってつぎのように表す。

$$\omega = \omega_1 i^* + \omega_2 j^* + \omega_3 k^* = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \quad (B.22)$$

そこで、この成分を使うと、(B.21)は

$$\begin{aligned} di^*/dt &= j^* \omega_3 - k^* \omega_2 \\ dj^*/dt &= k^* \omega_1 - i^* \omega_3 \\ dk^*/dt &= i^* \omega_2 - j^* \omega_1 \end{aligned} \quad (B.23)$$

と書き換えられる。(B.21), (B.23)が単位ベクトルの微分係数である。(B.13)を利用すると、方向余弦から ω が定まる。