

J A E R I - M
90-227

6 リンク・マニピュレータの機構表現について

1990年12月

佐々木 忍

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合せは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、
お申しこみください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡
東海村日本原子力研究所内）で複写による実費領布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division Department
of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-
ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1990

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 ニッセイエプロ株式会社

6 リンク・マニピュレータの機構表現について

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1990年12月3日受理)

多関節形ロボット・マニピュレータに対する逆運動学の解法は、多くの三角関数を含む非線形性のために取扱いが極めて困難であると考えられている。しかしながら、その主要な原因の1つとして、与えられた方程式系を漠然とした考え方で時には力づくで処理しようとする論法の弱点に気がつかないことがあるのかもしれない。もっとも重要なことは、機構の関係式のなかで、できるだけ計算の負担を軽減するために効果的な定式化を行うグループを見つけだし、より簡潔な記述に置き換えるように留意することである。

本報では、指先の位置・姿勢が個々の関節変数によりいかに影響されるかを解析的に調べて1組の有用な方程式系を与え、それが解の容易な誘導に役だったことについて言及する。この考え方には、あらゆる6リンク・マニピュレータに適用できる便利なものである。

On the Non-trivial Kinematic Representations
for Six-link Manipulators

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken .

(Received December 3, 1990)

A solution technique of the inverse kinematics for multi-joint robot manipulators has been considered to be one of the most cumbersome treatment due to non-linearity properties inclusive of trigonometric functions. As one of the major causes, however, it might be responsible for the fact that we are oblivious to the weakness of approaches to deal with a set of equations given with vague considerations and/or occasionally by forces. The most important is to find out a class of truly non-trivial formulations among the kinematic equations from a viewpoint of lightening or avoiding a burden of computation as far as possible. Additionally, it is required to pay attention so as to reduce them to more simplified descriptions.

In this paper, an analytical examination was made as to how to position and orientation of hand are influenced by the individual joint variables. As the result of it, a useful set of equations was presented to be contributive to derive the solutions with ease. This idea is favorably applicable to all types of six-link manipulators.

Keywords: Kinematics, Six-link Manipulator, Reduction of Dimensionality,
Optimization Technique

目 次

1. はじめに	1
2. 指先の位置・姿勢の関係式	2
3. 問題の解法	9
4. おわりに	13
謝 辞	13
参考文献	13

Contents

1. Introduction	1
2. Representation of the Position and Orientation at Hand	2
3. How to solve it	9
4. Concluding Remarks	13
Acknowledgement	13
References	13

1. はじめに

マニピュレータは、アクチュエータにより駆動される開ループ形の空間リンク機構で、各関節の相対的な運動をとおしてハンドの位置を目標方向に定め、対象物のマニピュレーションを行う目的で設計されたものである。こうした制御を前提とする機構の解析的研究は、順運動学と逆運動学の2つの問題が中心となる。すなわち、各関節角の変位(回転または旋回)を与えて指先の位置・姿勢を求める前者と、逆に指先の位置・姿勢から各関節角の変位を決定する後者に分類できる。

ところで、リンク構成が剛体自由度として6より小さいと、3次元空間内で所望の位置と姿勢のいずれかを満足させることができず、また過剰であれば解が確定しないので問題解決に対してなんらかの条件付加が必要となる。そこで、ごく特殊なケースを除いて、6自由度のマニピュレータを念頭におくことが実用性の立場から一般的である。その解析方法はこれまでいろいろ議論されてきたが、一般的に論ずるには座標変換行列を利用するものがもっとも便利である。先導研究となつたDenavit-Hartenbergの考え方を基にPaulによる同次座標変換法を用いると、関節角と指先位置・姿勢との対応関係が統一的に記述でき、マニピュレータの機構解析に大きな役割を果している。^{1), 2)}

本報では、同次座標変換行列の演算から導き出せる機構関係式について再度検討し、さらに逆問題解決への新たな糸口を探る意図から、最も効率的な表現を提案するとともに、各軸の関節解を得るまでの取扱いについて言及する。本手法は、6自由度のマニピュレータに対して共通して利用できる考え方である。

2. 指先位置・姿勢の関係式

マニピュレータは、作業空間内で指先の位置・姿勢が自由に変化できるように、リンクを有機的に連結させてできあがった機構である。剛体物理により、マニピュレータを任意の方向から任意の位置にアプローチできるためには、最低6自由度が必要であることがわかる。数学的には、各関節の独立変数を θ_i としてつきの機構方程式で表現できる。

$$F_i = F_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (i=1, \dots, 6) \quad (1)$$

これは、6つの関節変数がつくる空間から位置・姿勢を含むデカルト空間への写像と考えてもよい。デカルト空間で、最初の3つの物理量 F_1, F_2, F_3 はマニピュレータの指先位置を定め、残る3つ F_4, F_5, F_6 はマニピュレータの姿勢を表す。本報では、冗長性を持たないこの6リンクの体系に焦点をあてて議論を行う。

ここで、以下で使用する記号について下記の約束をしておく。

- i) $s_i = \sin \theta_i, c_i = \cos \theta_i, s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j), c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j),$
- ii) $n = (n_x, n_y, n_z)^T, o = (o_x, o_y, o_z)^T, a = (a_x, a_y, a_z)^T$: マニピュレータの指先姿勢を決定するための座標軸上の単位ベクトル
- iii) P_x, P_y, P_z : 基準座標系における指先の位置座標
- iv) $F_{jk} = (\partial F_j / \partial \theta_k), \theta_{jk} = (\partial \theta_j / \partial \theta_k), P_{xj} = (\partial P_x / \partial \theta_j), \dots$: 関節変数に関する偏微分

さて、直列連鎖機構のなかで、隣接リンク間の関係は、Denavit-Hartenbergの記法を用いたつきの同次変換行列により系統的に導き出せる。

$$A_i = \begin{vmatrix} c_i & -\gamma_i s_i & \eta_i s_i & a_i c_i \\ s_i & \gamma_i c_i & -\eta_i c_i & a_i s_i \\ 0 & \eta_i & \gamma_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

ここで、 γ_i, η_i は、関節軸 z_{i-1}, z_i 間のねじれ角の正弦、余弦を表す。

$$\gamma_i = \cos \alpha_i, \eta_i = \sin \alpha_i \quad (3)$$

この同次変換行列により、指先の位置・姿勢はベースを起点に6個の行列を順に左から右に乗じて決定される。この行列積 T_6 (以下、ハンド行列と呼ぶ)は結合則が成立するところから、最初の行列と残り5つの積として表すことができる。すなわち、

$$T_6 = \prod_{i=1}^6 A_i = \begin{vmatrix} C_1 - \gamma_1 s_1 & \eta_1 s_1 & a_1 c_1 \\ s_1 & \gamma_1 c_1 - \eta_1 s_1 & a_1 s_1 \\ 0 & \eta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}^A L_1 & {}^A M_1 & {}^A N_1 & {}^A X_1 \\ {}^A L_2 & {}^A M_2 & {}^A N_2 & {}^A X_2 \\ {}^A L_3 & {}^A M_3 & {}^A N_3 & {}^A X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

一方、行列 T_6 は、最初の5つの積 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ に最後の行列 A_6 を掛合わせた形でつぎのように表現することも可能である。

$$T_6 = \begin{vmatrix} {}^B L_1 & {}^B M_1 & {}^B N_1 & {}^B X_1 \\ {}^B L_2 & {}^B M_2 & {}^B N_2 & {}^B X_2 \\ {}^B L_3 & {}^B M_3 & {}^B N_3 & {}^B X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_6 - \gamma_6 s_6 & \eta_6 s_6 & a_6 c_6 \\ s_6 & \gamma_6 c_6 - \eta_6 s_6 & a_6 s_6 \\ 0 & \eta_6 & \gamma_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

(4), (5)における上の5つの同次変換行列積の要素 ${}^A L_j$, ${}^B M_j$ などは、つぎの記法で表した関数と考えられる。

$${}^A L_j, {}^A M_j, {}^A N_j, {}^A X_j \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (j=1, 2, 3) \quad (6)$$

$${}^B L_j, {}^B M_j, {}^B N_j, {}^B X_j \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (j=1, 2, 3) \quad (7)$$

例えば、 ${}^A L_j$ は関節変数 θ_2 から θ_6 により合成された関係式を意味する。他の要素についても同様である。特に、(5)において通常、指先ではリンク座標系の指定がなく開放となるため $\gamma_6=1$, $\eta_6=0$ とすることができます。

さて、(4), (5)の行列を展開すると、マニピュレータの先端位置のx-座標 P_x は、

$$P_x = {}^A X_1 c_1 - {}^A X_2 \gamma_1 s_1 + {}^A X_3 \eta_1 s_1 + a_1 c_1 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (8)$$

と書き表され、関節変数 θ_1 から θ_6 で構成された関数を表す。

他方、(5)の展開から、

$$P_x = a_6({}^B L_1 c_6 + {}^B M_1 s_6) + d_6 {}^B N_1 + {}^B X_1 = a_6 n_x + d_6 {}^B N_1 + {}^B X_1 \\ \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (9)$$

を得る。つまり、 ${}^B L_1 c_6 + {}^B M_1 s_6$ はx方向の方向余弦 n_x (定数)と書き直され、残る2つの項は5つの関節変数より構成されるため、(9)で示した関数形となる。

したがって、(8),(9)から P_x は、関節変数 θ_1 から θ_5 で構成されることが分る。
同様にして、ハンド行列 T_6 に対する12個の要素を書き上げるとつぎのようになる。

$$P_x = {}^A X_1 C_1 - {}^A X_2 \gamma_1 s_1 + {}^A X_3 \eta_1 s_1 + a_1 c_1 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$= a_6 ({}^B L_1 C_6 + {}^B M_1 S_6) + d_6 {}^B N_1 + {}^B X_1 = a_6 n_x + d_6 {}^B N_1 + {}^B X_1$$

$$\equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5)$$

$$P_y = {}^A X_1 S_1 + {}^A X_2 \gamma_1 C_1 - {}^A X_3 \eta_1 C_1 + a_1 s_1 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$= a_6 ({}^B L_2 C_6 + {}^B M_2 S_6) + d_6 {}^B N_2 + {}^B X_2 = a_6 n_y + d_6 {}^B N_2 + {}^B X_2$$

$$\equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5)$$

$$P_z = {}^A X_2 \eta_1 S_1 + {}^A X_3 \gamma_1 + d_1 \equiv f(\theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$= a_6 ({}^B L_3 C_6 + {}^B M_3 S_6) + d_6 {}^B N_3 + {}^B X_3 = a_6 n_z + d_6 {}^B N_3 + {}^B X_3$$

$$\equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5)$$

$$a_x = {}^B L_1 S_6 \eta_6 - {}^B M_1 C_6 \gamma_6 + {}^B N_1 \gamma_6 = {}^B N_1 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5)$$

$$= {}^A N_1 C_1 - {}^A N_2 S_1 \gamma_1 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$a_y = {}^B N_2 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5)$$

$$= {}^A N_1 S_1 + {}^A N_2 C_1 \gamma_1 - {}^A N_3 C_1 \eta_1 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$a_z = {}^B N_3 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5)$$

$$= {}^A N_2 \eta_1 + {}^A N_3 \gamma_1 \equiv f(\theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$o_x = -{}^B L_1 S_6 \gamma_6 + {}^B M_1 C_6 \gamma_6 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$= {}^A M_1 C_1 - {}^A M_2 S_1 \gamma_1 + {}^A M_3 S_1 \eta_1 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$o_y = -{}^B L_2 S_6 \gamma_6 + {}^B M_2 C_6 \gamma_6 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$= {}^A M_1 S_1 + {}^A M_2 C_1 \gamma_1 - {}^A M_3 C_1 \eta_1 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$o_z = -{}^B L_3 S_6 \gamma_6 + {}^B M_3 C_6 \gamma_6 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$= {}^A M_2 \eta_1 + {}^A M_3 \gamma_1 \equiv f(\theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$n_x = {}^B L_1 C_6 + {}^B M_1 S_6 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$n_y = {}^B L_2 C_6 + {}^B M_2 S_6 \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$n_z = {}^B L_3 C_6 + {}^B M_3 S_6 \equiv f(\theta_2, \dots, \theta_6)$$

これより、指先の位置・姿勢に対する独立変数の寄与の状況が明確になり、つぎのように整理できる。

$$P_x = P_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (10)$$

$$P_y = P_y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (11)$$

$$P_z = P_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5) \quad (12)$$

$$a_x = a_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (13)$$

$$a_y = a_y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (14)$$

$$a_z = a_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5) \quad (15)$$

$$o_x = o_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (16)$$

$$o_y = o_y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (17)$$

$$o_z = o_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_6) \quad (18)$$

$$n_x = n_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (19)$$

$$n_y = n_y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (20)$$

$$n_z = n_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_6) \quad (21)$$

ところで、6自由度を対象とした先の(1)式における F_1, F_2, F_3 は、位置関係を記した(10)～(12)に相当し、姿勢に関する F_4, F_5, F_6 は、上の9個の中から独立性を考慮して3つだけを選択する必要がある。その選択についての基準はないが、方向余弦の性質を念頭に置きながら当然関係式の中にできるだけ関節変数が少ない単純な式を選ぶのが得策であろう。組合せとしていくつか考えられるが、1つの候補として

$$P_x = P_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (22)$$

$$P_y = P_y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (23)$$

$$P_z = P_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5) \quad (24)$$

$$a_x = a_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) \quad (25)$$

$$a_z = a_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5) \quad (26)$$

$$o_z = n_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_6) \quad (27)$$

を(1)に対する関数形とする。もちろん、解析を行う対象の式が極めて複雑な場合、計算の便宜を考えて、姿勢のパラメータを(13)～(21)のなかで適宜変更することは可能である。例えば、 a_x の代りに a_y を、また o_z の代りに n_z で置き換えること等…。(ただし、 a_z はつねに方程式系のなかで候補として残しておいたほうがよいであろう。)

さて、この方程式系に対する解の誘導は、以前取上げたように、3変数系への次元の低下を基本方針とする。^{3), 4)} 幸い、(25), (26)2式から θ_4, θ_5 を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (これを基準変数と呼ぶ)について解き、これを(22)～(24)に代入することで3変数の連立方程式が得られる。このとき、(27)と切り離して取り扱えることがわかる。(27)の役割は、全部の解が決った後で最後の θ_6 を求めるために利用する。

これは1つのアプローチであり、式が複雑な場合多少工夫することが望ましい。そこで、 a_y の要素をも多少考慮にいれると、簡単に計算できる場合がある。 a_x, a_y の要素は先の行列展開により、

$$a_x = {}^A N_1 c_1 - {}^A N_2 s_1 \gamma_1 + {}^A N_3 s_1 \eta_1 \quad (28)$$

$$a_y = {}^A N_1 s_1 + {}^A N_2 c_1 \gamma_1 - {}^A N_3 c_1 \eta_1 \quad (29)$$

$$a_z = {}^A N_2 \eta_1 + {}^A N_3 \gamma_1 \quad (30)$$

となり、各コンポーネント ${}^A N_i$ などがつぎのように θ_1 で表示できる。

$${}^A N_1 = a_x c_1 + a_y s_1 \quad (31)$$

$${}^A N_2 \gamma_1 - {}^A N_3 \eta_1 = a_y c_1 - a_x s_1 \quad (32)$$

以下、機構関係式(22)～(27)の表現を使うと、マニピュレータの関節解がある程度容易に発見できることを具体的なマニピュレータをとおして説明する。

考察の対象とした6リンク・マニピュレータの外観図をFig.1に与える。運動学の関係式はつぎのようになる。

$$n_x = -(s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) c_6 + s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}), \quad (33)$$

$$n_y = (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) c_6 + s_6 (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}), \quad (34)$$

$$n_z = (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) c_6 - s_{23} s_4 s_6, \quad (35)$$

$$o_x = (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) c_6 + s_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4), \quad (36)$$

$$o_y = (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) c_6 - s_6 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4), \quad (37)$$

$$o_z = -(s_{23} s_4) c_6 + s_6 (s_{23} s_5 c_4 - c_{23} c_5), \quad (38)$$

$$a_x = s_1 s_{23} s_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 - s_4 c_1 c_5, \quad (39)$$

$$a_y = c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1 - s_1 s_4 c_5, \quad (40)$$

$$a_z = -(s_{23} c_4 c_5 + s_5 c_{23}), \quad (41)$$

$$P_x = -a_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) c_6 + a_6 s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) - a_5 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) - (a_3 + a_4) s_1 s_{23} - a_2 s_1 s_2, \quad (42)$$

$$P_y = a_6 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) c_6 + a_6 s_6 (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) + a_5 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) + (a_3 + a_4) s_{23} c_1 + a_2 s_2 c_1, \quad (43)$$

$$P_z = a_6 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) c_6 - a_6 s_6 (s_{23} s_4) + a_5 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) + (a_3 + a_4) c_{23} + a_2 c_2 + a_1. \quad (44)$$

さて、(31),(32)に示した関係は、Fig.1に示すマニピュレータの場合

$$-{}^A N_1 = s_4 c_5 = -(a_y s_1 + a_x c_1) = w_1(\theta_1) \quad (45)$$

$${}^A N_2 \gamma_1 - {}^A N_3 \eta_1 = c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5 = a_y c_1 - a_x s_1 = w_2(\theta_1) \quad (46)$$

となり、これを(41)の a_z と関係づけると

$$c_4 c_5 = w_2 c_{23} - a_z s_{23} (= \zeta_1), \quad (47)$$

$$s_5 = -(a_z c_{23} + w_2 s_{23}) (= \zeta_2), \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 700(\text{mm}) \\
 a_2 &= 500(\text{mm}) \\
 a_3 + a_4 &= 350(\text{mm}) \\
 a_5 &= 150(\text{mm}) \\
 a_6 &= 280(\text{mm})
 \end{aligned}$$

- $-200 \leq \theta_1 \leq 200$ (deg)
- $-30 \leq \theta_2 \leq 120$ (deg)
- $-90 \leq \theta_3 \leq 90$ (deg)
- $-180 \leq \theta_4 \leq 180$ (deg)
- $-90 \leq \theta_5 \leq 90$ (deg)
- $-60 \leq \theta_6 \leq 60$ (deg)

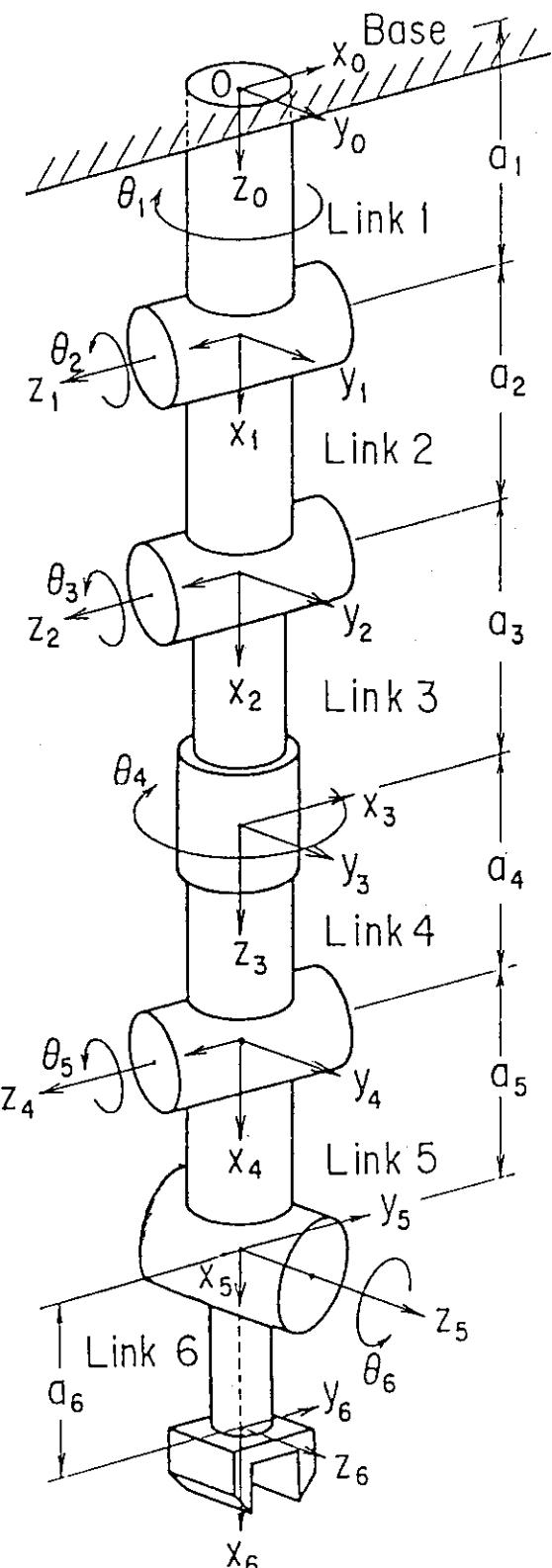


Fig.1 A Six-Link Manipulator Studied

が導き出されて、 θ_4, θ_5 がつぎのように基準変数で表現できる。

$$\tan \theta_4 = \frac{-(a_y s_1 + a_x c_1)}{w_2 c_{23} - a_z s_{23}} = \frac{w_1}{\zeta_1}, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \tan \theta_5 &= \frac{-(a_z c_{23} + w_2 s_{23})}{(w_1 / s_4)} = \frac{-s_4 (a_z c_{23} + w_2 s_{23})}{w_1} \\ &= s_4 \zeta_2 / w_1, \end{aligned} \quad (50)$$

ここに、

$$\zeta_1 = w_2 c_{23} - a_z s_{23} \neq 0, \quad (51)$$

$$w_1 = -(a_y s_1 + a_x c_1) \neq 0. \quad (52)$$

θ_4, θ_5 が決定したことから、(5)に示した記法を使って、マニピュレータの指先位置(42), (43), (44)はつぎのように簡潔に表せる。

$$P_x = a_6 n_x + a_5 {}^B L_1 - (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) s_1 \quad (53)$$

$$P_y = a_6 n_y + a_5 {}^B L_2 + (a_{34} s_{23} + a_2 s_2) c_1 \quad (54)$$

$$P_z = a_6 n_z + a_5 {}^B L_3 + (a_{34} c_{23} + a_2 c_2) + a_1 \quad (55)$$

ただし、

$${}^B L_1 = -(s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) \quad (56)$$

$${}^B L_2 = s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4 \quad (57)$$

$${}^B L_3 = c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4 \quad (58)$$

$$a_{34} = a_3 + a_4$$

明らかに、これは(22)～(24)に対して次元をつぎのような3変数系に減じたものである。

$$P_x = P_x(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (59)$$

$$P_y = P_y(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (60)$$

$$P_z = P_z(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (61)$$

以上で、6リンク・マニピュレータに対する機構方程式(1)は、(59)～(61)の形に整理できた。この解法については、非線形計画法のアルゴリズムと融合させて、現在強力な探索手法を開発中であるため、ここでは従来提案した増分補正を取り入れた線形化モデル⁴⁾のみに限定して説明を行う。

3. 問題の解法

前節で取上げた問題は、3変数の非線形方程式(59)～(61)を解くことに帰着できた。本報では、この解の発見方法としてシステム最適化技法を用いる。システム最適化に必要な要素としては、システムの数学的モデル、すなわち(59)～(61)と最適性基準つまり目的関数とがあげられる。ここでは、目的関数として、つぎのようなマニピュレータの先端における現在位置と目標値との偏差から構成されたユークリッド・ノルムを採用する。

$$J = \{P_x - \underline{P}_x\}^2 + \{P_y - \underline{P}_y\}^2 + \{P_z - \underline{P}_z\}^2 \quad (62)$$

ただし、 $\underline{P}_x, \underline{P}_y, \underline{P}_z$ は指先の目標位置とする。

明らかに、これは3変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のみを含んだ表現となる。反復法を使って、この目的関数が最小つまり、ゼロに漸近するときの各関節値を求めることが解法手順の中心となる。

ところで、指先位置 P_x, P_y, P_z の関係式には非線形要素を含むことから、直接解くことは困難であるため、初期値 θ_0 の近傍で線形近似する。すなわち、

$$P_x(\theta_0 + \Delta\theta) = P_x(\theta_0) + L_1 \Delta\theta_1 + L_2 \Delta\theta_2 + L_3 \Delta\theta_3 \quad (63)$$

$$P_y(\theta_0 + \Delta\theta) = P_y(\theta_0) + M_1 \Delta\theta_1 + M_2 \Delta\theta_2 + M_3 \Delta\theta_3 \quad (64)$$

$$P_z(\theta_0 + \Delta\theta) = P_z(\theta_0) + N_1 \Delta\theta_1 + N_2 \Delta\theta_2 + N_3 \Delta\theta_3 \quad (65)$$

(但し、 $\theta_0 = (\theta_1^\circ, \theta_2^\circ, \theta_3^\circ)$ とする。)

ここに、微小変位の各係数 L_i, M_i, N_i は、つぎのように定まり、また $(\partial P_x / \partial \theta_i)$ などは(69)～(71)を用いる。

$$L_i = P_{xi} + \sum_{k=4}^5 P_{xk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (66)$$

$$M_i = P_{yi} + \sum_{k=4}^5 P_{yk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (67)$$

$$N_i = P_{zi} + \sum_{k=4}^5 P_{zk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (68)$$

$$\begin{aligned} P_{x1} &= -(a_5 C + G_1 c_1) \\ P_{x2} &= -(a_5 E + G_2) s_1 \\ P_{x3} &= P_{x2} + a_2 s_1 c_2 \\ P_{x4} &= -a_5 B s_5 \\ P_{x5} &= a_5 a_x \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
 P_{y1} &= a_5A - G_1S_1 \\
 P_{y2} &= (a_5E + G_2)C_1 \\
 P_{y3} &= P_{y2} - a_2C_1C_2 \\
 P_{y4} &= -a_5Ds_5 \\
 P_{y5} &= a_5a_y
 \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
 P_{z1} &= 0 \\
 P_{z2} &= -a_5H_1 - G_1 \\
 P_{z3} &= P_{z2} + a_2S_2 \\
 P_{z4} &= -a_5Fs_5 \\
 P_{z5} &= a_5a_z
 \end{aligned} \tag{71}$$

ただし、各パラメータはつきのようになる。

$$\begin{aligned}
 H_1 &= S_{23}C_5 + S_5C_{23}C_4 \\
 H_2 &= S_4S_5 \\
 G_1 &= a_{34}S_{23} + a_2S_2 \\
 G_2 &= a_{34}C_{23} + a_2C_2 \\
 A &= -S_1H_1 - C_1H_2 \\
 B &= C_1C_4 - S_1S_4C_{23} \\
 C &= C_1H_1 - S_1H_2 \\
 D &= S_1C_4 + C_1S_4C_{23} \\
 E &= C_{23}C_5 - S_{23}S_5C_4 \\
 F &= -S_{23}S_4
 \end{aligned} \tag{72}$$

また、(66)～(68)の θ_4 , θ_5 に関する微分演算は、(49), (50)式の両辺の対数を取り容易に求められる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \theta_{41} &= S_4C_4\{(-w_2/w_1) + (w_1C_{23}/\zeta_1)\} \\
 \theta_{42} &= S_4C_4(-\zeta_2/\zeta_1) \\
 \theta_{43} &= \theta_{42}
 \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_{51} &= S_5C_5\{-(w_1S_{23}/\zeta_2) + (w_2/w_1) + (\cot\theta_4)\theta_{41}\} \\
 \theta_{52} &= S_5C_5\{-(\zeta_1/\zeta_2) + (\cot\theta_4)\theta_{42}\} \\
 \theta_{53} &= \theta_{52}
 \end{aligned} \tag{74}$$

以上でマニピュレータの指先位置の基準変数に関する線形化を行った。そこで、(63), (64), (65)の各計算値と与えられた指先目標値との偏差を2乗ノルムで表し、この値を1つの収束判定基準が満たされるまで更新を続け所望の関節解を導く。目的関数は

$$J = \{P_x(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P}_x\}^2 + \{P_y(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P}_y\}^2 + \{P_z(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P}_z\}^2 \quad (75)$$

となり、これを展開してつぎのようになる。

$$J = \sum_{i,j=1}^3 R_{ij} \Delta\theta_i \Delta\theta_j - 2 \sum_{i=1}^3 b_i \Delta\theta_i + M \quad (76)$$

ここに、

$$\begin{aligned} m_1 &= P_x(\theta_0) - \underline{P}_x, \quad m_2 = P_y(\theta_0) - \underline{P}_y, \quad m_3 = P_z(\theta_0) - \underline{P}_z, \\ M &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \end{aligned} \quad (77)$$

したがって、目的関数Jを極小にする各関節変数の微小変位は、(76)の導関数を零におくこと($\partial J / \partial \Delta\theta_i$)_{i=1,2,3}=0でつぎの3元連立方程式の解として求まる。

$$\left| \begin{array}{ccc|c} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \Delta\theta_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \Delta\theta_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \Delta\theta_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right| \quad (78)$$

但し、

$$\begin{aligned} R_{11} &= G(L_1, L_1, M_1, M_1, N_1, N_1) \\ R_{12} &= G(L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2) = R_{21} \\ R_{13} &= G(L_1, L_3, M_1, M_3, N_1, N_3) = R_{31} \\ R_{22} &= G(L_2, L_2, M_2, M_2, N_2, N_2) \\ R_{23} &= G(L_2, L_3, M_2, M_3, N_2, N_3) = R_{32} \\ R_{33} &= G(L_3, L_3, M_3, M_3, N_3, N_3) \\ b_1 &= -G(m_1, L_1, m_2, M_1, m_3, N_1) \\ b_2 &= -G(m_1, L_2, m_2, M_2, m_3, N_2) \\ b_3 &= -G(m_1, L_3, m_2, M_3, m_3, N_3) \\ G(a, b, c, d, e, f) &= ab + cd + ef \end{aligned} \quad (79)$$

方程式の係数R_{ij}は対称行列を構成し、解はガウス・ザイデル法や掃きだし法などで簡単に求めることができる。このようにして算出された各増分値 $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ により関節角の初期推定値 θ_i °が

$$\theta_i = \theta_i^* + \Delta\theta_i \quad (i=1,2,3) \quad (80)$$

と更新される。この時点では、関節解を線形化しない原式(62)に代入してノルムの大きさを再計算する。その大きさが指定された収束半径内にあれば解として採択され、そうでない場合は、(80)の θ_i を初期値として一連の操作を最初に戻って繰返す。ただし、線形性の仮定により $\Delta\theta$ は大きく拘束される。 $\Delta\theta$ の値が多少大きくても安定した解を導くためにつぎのように補正して計算を行った。

i) 初期変位が300(mm)以内の場合 ($i=1, 2, 3$)

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 1.5 \quad (|\Delta\theta_i| > 1(\text{deg})) \quad (81)$$

ii) それを越える場合 ($i=1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i &= \Delta\theta_i / 1.5 \quad (10(\text{deg}) > |\Delta\theta_i| > 1(\text{deg})) \\ \Delta\theta_i &= \Delta\theta_i / 2.0 \quad (30(\text{deg}) > |\Delta\theta_i| > 10(\text{deg})) \\ \Delta\theta_i &= \Delta\theta_i / 3.0 \quad (|\Delta\theta_i| > 30(\text{deg})) \end{aligned} \quad (82)$$

収束解 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ が求まると、(49), (50)に代入して、残る θ_4, θ_5 が決定する。

最後に、 θ_6 は、 o_z, n_z の式を関係づけてつぎのように定まる。

$$\tan\theta_6 = \frac{^B M_3 n_z - ^B L_3 o_z}{^B L_3 n_z + ^B M_3 o_z} \quad (83)$$

ただし、

$$^B M_3 = -S_{23} S_4 \quad (84)$$

$$^B L_3 n_z + ^B M_3 o_z \neq 0 \quad (85)$$

以上が計算手順の概要である。

計算結果等は、1部文献4)でも紹介しているように通常の線形化ヤコビ法に比べてはあるかに優位性をもつことが明らかとなった。

なお、本報でのべた手順のうち、ノルムの計算(75)が θ_6 に依存せずに実行でき、この点が文献4)のアルゴリズムよりも改善されている。計算能力についての議論は、開発中の非線形モデルとの比較を含めて別の機会に詳述する。

4. おわりに

6関節形マニピュレータの位置・姿勢は、各関節の相対運動により規定されるが、6関節がすべて画一的に影響するのではなくて、位置・姿勢を構成するベクトル要素のなかで、先端に最も近い関節角 θ_6 は、逆問題を解く過程では、直接的にはあまり大きな意味を持たないことが判明した。それは、 θ_6 を除いた残りの関節変数で所望の解が引出せ、それらの値から従属的に θ_6 が決定できるからである。本文で示したように、方向余弦の効率的な選択による関係式の樹立は、6自由度をもつマニピュレータの解法として共通した取り扱いが可能となるであろう。

謝辞

本研究の機会を与え、また本報告書作成の上で有益なアドバイスをいただいた原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝致します。

参考文献

- 1) J. Denavit & R. S. Hartenberg : A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Applied Mechanics, 22, June, 215/221, (1955).
- 2) R. C. Paul : Robot Manipulators - Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
- 3) 佐々木 : 最適化手法を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題に関する新しい方法, JAERI-M 89-067, Jun. (1989).
- 4) 佐々木 : 関節変数の分離に基づく逆運動学の解法, 計測自動制御学会論文集 26-6, pp 685/695 (1990).

4. おわりに

6関節形マニピュレータの位置・姿勢は、各関節の相対運動により規定されるが、6関節がすべて画一的に影響するのではなくて、位置・姿勢を構成するベクトル要素のなかで、先端に最も近い関節角 θ_6 は、逆問題を解く過程では、直接的にはあまり大きな意味を持たないことが判明した。それは、 θ_6 を除いた残りの関節変数で所望の解が引出せ、それらの値から従属的に θ_6 が決定できるからである。本文で示したように、方向余弦の効率的な選択による関係式の樹立は、6自由度をもつマニピュレータの解法として共通した取り扱いが可能となるであろう。

謝辞

本研究の機会を与え、また本報告書作成の上で有益なアドバイスをいただいた原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝致します。

参考文献

- 1) J. Denavit & R. S. Hartenberg : A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Applied Mechanics, 22, June, 215/221, (1955).
- 2) R. C. Paul : Robot Manipulators - Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
- 3) 佐々木 : 最適化手法を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題に関する新しい方法, JAERI-M 89-067, Jun. (1989).
- 4) 佐々木 : 関節変数の分離に基づく逆運動学の解法, 計測自動制御学会論文集 26-6, pp 685/695 (1990).

4. おわりに

6関節形マニピュレータの位置・姿勢は、各関節の相対運動により規定されるが、6関節がすべて画一的に影響するのではなくて、位置・姿勢を構成するベクトル要素のなかで、先端に最も近い関節角 θ_6 は、逆問題を解く過程では、直接的にはあまり大きな意味を持たないことが判明した。それは、 θ_6 を除いた残りの関節変数で所望の解が引出せ、それらの値から従属的に θ_6 が決定できるからである。本文で示したように、方向余弦の効率的な選択による関係式の樹立は、6自由度をもつマニピュレータの解法として共通した取り扱いが可能となるであろう。

謝辞

本研究の機会を与え、また本報告書作成の上で有益なアドバイスをいただいた原子炉制御研究室篠原慶邦室長に深謝致します。

参考文献

- 1) J. Denavit & R. S. Hartenberg : A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Applied Mechanics, 22, June, 215/221, (1955).
- 2) R. C. Paul : Robot Manipulators - Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
- 3) 佐々木 : 最適化手法を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題に関する新しい方法, JAERI-M 89-067, Jun. (1989).
- 4) 佐々木 : 関節変数の分離に基づく逆運動学の解法, 計測自動制御学会論文集 26-6, pp 685/695 (1990).