JAERI-M
91-079

H∞最適化問題解法のための内関数行列の陽表現導出

1991年5月

鈴木　勝男・島崎　潤也・篠原　慶邦

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-M レポートは，日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは，日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319－11茨城県那珂郡東海村）あて，お申しこしください。なお，このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

編集兼発行　日本原子力研究所
印　　刷　日立高速印刷株式会社

H∞最適化問題解法のための内関数行列の陽表現導出

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部
鈴木 勝男・島崎 潤也・篠原 慶邦

（1991年4月10日受理）

H∞最適化問題を解く際の最も重要な計算の一つは内関数行列を求めることである。これはH∞最適化理論やロバスト安定化理論の基本問題が$T_2 \in (H_{m,r})^\infty$と$T_1 \in (H_{m,m})^\infty$とが与えられたとき，

$$\lambda_m = \inf \{ \| T_2 - T_1 V \|_\infty \; ; \; V \in (H_{m,r})^\infty \}$$

を見い出し，それを達成するVを求める問題に定式化されるが，それはある形式の補間条件を満たす内関数行列を見出す問題と等価であることによる。

本報告書は最適ＬＱ閉ループ制御系の還送差行列を利用して，この内関数行列を陽に求めるU. Shaked の方法を詳細に検討し，それに基づくH∞最適化問題の解法を計算手順の形にまとめたものである。さらに，この計算手順に従い内関数行列を求めた数値例を示した。

東海研究所：〒319-11 茨城県那珂郡東海村白方字白根2-4

A Derivation of the Explicit Structure of Inner Matrices for H∞-Optimization

Katsuo SUZUKI, Junya SHIMAZAKI and Yoshikuni SHINOHARA

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received April 10, 1991)

One of the most important computational procedure in the solution of the H∞-minimization problems is the derivation of inner matrices. This comes from that the fundamental problem in H∞-optimization theory is formulated as follows. For a given $T_2(s)$ and $T_1(s)$, find

$$\lambda_m = \inf \{ \| T_2 - T_1 V \| \infty \ ; \ V \in (H_{m,r}) \infty \}$$

and all V attaining the infimum. It is known that this can be reduced to the equivalent problem to find the inner matrices which satisfy the interpolation requirement formulated specially.

This report describes in detail Shaked's method to enable to obtain an explicit expression of the inner matrix and also summarizes in the form of computational procedure resulting from this method. In addition, a simple numerical example solved by this method is shown.

Keywords : H∞ Optimization Problem, H∞ Control Theory, Robust Control, Inner Matrix.

目　　次

Contents

1．はじめに

H∞最適化問題を解く際の最も重要な計算の一つは内関数行列（inner matrix）を求めることである。これは H∞最適化理論やロバスト安定化理論の基本問題が B. Francis ら[1]によって次のように定式化されたことによる。すなわち、$T \in (H_{m,r})_\infty$と $U \in (H_{m,m})_\infty$とが与えられた時、

$$\lambda_m = \inf\{ \| T - UV \|_\infty \ ; \ V \in (H_{m,r})_\infty \} \tag{1.1}$$

を見い出し、かつその下限λ_mを達成する V を求めよというものである。そして、この最小化問題はある形式の補間条件を満たす内関数行列を見い出すことにより解決されることが知られている[1]。

この補間問題に対しては２つの解法が得られている。一つは Pick-Nevanlinna の補間定理（多変数に拡張した）に基づく古典関数論的解法であり、他のひとつはハンケル作用素ノルム近似によるものである[2]。後者は状態空間で議論するため計算は効率的であるが、結果の物理的な洞察が困難であるという欠点がある。前者に属する最新の成果は木村[3]の結果であり、これまでの方位補間（directional interpolation）問題に対して full-rank 行列を用いる解法[4]に見られる解の overdetermination という欠点を解決した。しかし、その解は繰返しアルゴリズムの形式で与えられ、閉じた表現（陽表現）ではない。また、補間問題の基本パラメータが結果にどの様に関わるか必ずしも明らかではない。

しかし、最近、U. Shaked は最適 LQ 閉ループ制御系の還送差行列（return difference matrix）が内関数行列であるという事実に着目して状態空間法と方位補間法とを併用して、補間条件を満たす内関数行列を問題の基本パラメータにより陽に表して求めることに成功した[5]。

本報告書では、第２章では、RH∞行列は内外関数行列分解が可能であるという事実（例えば、[6]）用いて、（１．１）式の H∞最適化問題が H∞補間問題に帰着されることを示す。第３章では、Shaked の解法を厳密に記述する。そこでは、システムの不変ゼロ点あるいは伝達ゼロ点におけるシステム行列（system matrix）の null-space ベクトル[7]を用いて、$\lambda = \lambda_m$における内関数行列の次数低減を説明する。第４章では３章の理論を H∞最適化問題の解を求める解法の手順にまとめると共に、その手順に従い、簡単な数値例に対して内関数行列を MATLAB[8] を用いて求める。また、その簡単なプログラム例も示す。

2. 問題の定式化

H∞最適化理論やロバスト安定化理論の基本問題は $T_1 \in (H_{r,r})\infty$、$T_2 \in (H_{m,r})\infty$が与えられたとき、次の H∞ノルムを最小化する $M_o \in (H_{m,r})\infty$を見出す問題に帰着する。すなわち、

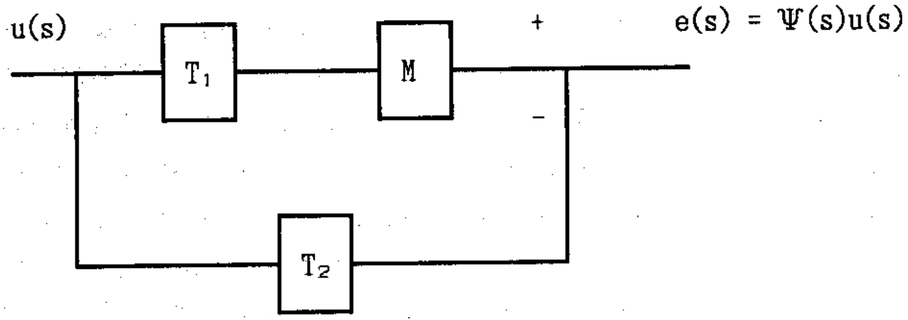
$$\lambda_m = \inf\{\|\Psi\|\infty,\ M \in (H_{m,r})\infty\} \tag{2.1a}$$

ここで、

$$\Psi := MT_1 - T_2 \tag{2.1b}$$

となるλ_mと最適解 M_oを求めることである。

M_o は下図に示すように 入力 u(s) から誤差 e(s) への伝達関数Ψ(s)の H∞ノルムを最小化する最適等価器 (optimal equalizing filter) に相当する。



文献[9]によれば、(2. 1) 式を達成する M_o は次式を満たすことが証明されている。

$$(\Psi_{Mo})^H(\Psi_{Mo}) = ((T_1)^H(M_o)^H - (T_2)^H)(M_oT_1 - T_2) = (\lambda_m)^2 I_r \tag{2.2}$$

この M_o を求めることを考えよう。まず、ある実数λ_1を与えて、次式を満たす実係数有理関数行列 $M(s;\lambda_1)$と $U(s;\lambda_1)$ とを求める。

$$M(s;\lambda_1)T_1 - T_2 = \lambda_1 U(s;\lambda_1) \tag{2.3}$$

ただし、$U(s;\lambda_1)$ は内関数型行列である。すなわち、

$$(U(s;\lambda))^H U(s;\lambda) = I_r,\ U(s;\lambda) \in (H_{m,r})\infty \tag{2.4}$$

次に、$\lambda=\lambda_2<\lambda$ なるλ_2 を与えて、同様な実係数有理関数行列 $M(s;\lambda_2)$と $U(s;\lambda_2)$とを求める。このようにλを次第に小さくする過程を繰返し、$\lambda<\lambda_m$ なるλに対して（2．3）式を満たすような実係数有理関数行列 $M(s;\lambda)$と $U(s;\lambda)$ が存在しなくなるλの下限λ_mを求める。この下限λ_m に対しては次式が成立つ。

$$M(s;\lambda_m)T_1 - T_2 = \lambda_m U(s;\lambda_m) \tag{2.5}$$

この $M(s;\lambda_m)$ によって（2．1）式が成立つことは明らかである。

これから明らかなように、任意に与えた実数値λに対して実係数有理関数行列 $M(s;\lambda)$と$U(s;\lambda)$を求めればよい。いま、$s=j\omega$ とおいた $T_1(j\omega)$ の階数が $0\leqq\omega\leqq\infty$において不変であると仮定して、$T_1(s)$の内外関数行列因子分解を次の様に行う[6, pp.75-82]。

$$T_1(s) = T_{1o}(s)T_{1i}(s) \tag{2.6}$$

ここで、$T_{1o}(s)$ は外関数行列であり、$T_{1o}\in(RH_{r,r})\infty$かつ左逆元 $(T_{1o})^{-1}$を$(RH_{r,r})\infty$の中に持つ。$T_{1i}(s)$ は内関数行列である。すなわち、$T_{1i}\in(RH_{r,r})\infty$ かつ $T_{1i}(T_{1i})^H = I_r$を満たす。

（2．6）式を（2．3）式に代入し、$(T_{1i})^H$ を右から掛けると次式を得る。

$$MT_{1o} - T_2(T_{1i})^H = \lambda U(T_{1i})^H \tag{2.7}$$

したがって、

$$[-T_2(T_{1i})^H]_- = [\lambda U(T_{1i})^H]_- \tag{2.8}$$

である。ここで、$[\Phi(s)]_-$ は $RH\infty$に属さない$\Phi(s)$の加法的要素を取り出す演算子である。（2．8）式が成立つことは、$M\in(H_{m,r})\infty$、$T_{1o}\in(H_{r,r})\infty$であるから、$MT_{1o}\in(H_{m,r})\infty$であることより $[MT_{1o}]_-=0$ であるから明らかである。

よって、（2．8）式を満たす最小のλ_m と $U(s;\lambda_m)$ が求まり、その $U(s;\lambda_m)$ が（2．4）式を満たしていれば、（2．7）式より $M(s)$ は次の様に求まり問題が解決される。

$$M = (T_2(T_{1i})^H + \lambda_m U(\lambda_m)(T_{1i})^H)(T_{1o})^{-1} \tag{2.7a}$$

さて、問題を簡単にするために $(T_{1i})^H$ の特異点 (singularities) s_i, $i=1,2,\ldots p$ はすべて異なると仮定する。よって、s_i は複素右半平面 (RHP : right half plane) に属してすべて異なることになる（$\because T_{1i}(s)\in(RH_{r,r})\infty$ であるから）。

この仮定のもとでは（2．8）式を満たすひとつの明らかな十分条件は

$$-T_2(s_i) = \lambda U(s_i), \quad i = 1,2,\ldots p$$

である[9]。しかし、この条件は（２．８）式が成立するための過度な十分条件であり、この解を実際に応用すると不必要に高次の制御系（overdesign）となり、不都合である場合がある。これを避けるため、Shaked[5] は木村の方位補間法[3]を採用し、次の様に扱うことを提案した。

$(T_{1i}(s))^H$ の異なる１位の孤立特異点が $Re(s)>0$ に p 個存在するとし、それを $s_k : k=1,2,\ldots p$ する。$s=s_k$ における留数行列 $R(s_k,(T_{1i})^H)$; $k=1,2,\ldots p$ は次式で求まる。

$$R(s_k,(T_{1i})^H) = \lim_{s\to s_k} (s-s_k)(T_{1i}(s))^H , \quad (k=1,2\ldots p) \qquad (2.9)$$

さて、$R(s_k,(T_{1i})^H)$ は r 次元複素ベクトル u_k、$v_k \in C^r$ として、

$$R(s_k,(T_{1i})^H) = u_k(v_k)^t , \quad k=1,2,\ldots,p \qquad (2.10)$$

と表すことが出来る（∵ $rank(R(s_k,(T_{1i})^H)) = 1$であるから。詳細は付録１参照）。すなわち、留数行列 $R(s_k,(T_{1i})^H)$ からベクトル u_k ; $k=1,2,..,p$ を定めることが出来る。

（２．８）式はこの u_k ; $k=1,2,..,p$ が次式を満たす時に限り成立する（付録２参照）。

$$-T_2(s_k)u_k = \lambda U(s_k)u_k \; ; \; k = 1,2,\ldots p \qquad (2.11)$$

いま、u_k と $T_2(s_k)$ とから、次の m 次元ベクトル $\omega_k \in C^m$ を定義する。

$$\omega_k := -T_2(s_k)u_k \; ; \; k = 1,2,\ldots p \qquad (2.12)$$

これらのベクトル u_k、ω_k を用いると H∞補間条件は（２．１１）式から、最終的に次の問題に帰着するさせることが出来る。

「ある内関数行列 $T_{1i}(s)$ の $(T_{1i}(s))^H$のゼロ点のうち $Re(s_k)>0$ である s_k に対して、上記のように $u_k \in C^r$ 及び $\omega_k \in C^m$ を定める時（ただし、$m \geq r$）、

$$\lambda^{-1}\omega_k = U(s_k)u_k \; ; \; k = 1,2,\ldots,p \qquad (2.13a)$$

$$(U(s))^H U(s) = I_r \qquad (2.13b)$$

を満たす最小のλの値とそれに対応する内関数行列 $U(s;\lambda_m) \in (RH_{m,r})\infty$ を求める」

これは（２．１３ａ）式が（２．１１）式に等価であることから直ちに解る。

3．内関数陽表現の導出

本章では（2．13）式を満たす内関数行列 $U(s)$ を求める。そのために、$U(s)$ が次の様な構造を持つと仮定し、その $U(s)$ が（2．13）式を満たすように 定数行列 $A \in R_{p,p}$、$C \in R_{m,p}$、$\theta \in R_{m,r}$ を定める問題に変換する。

$$U(s) = [I_m - C(sI_p + A)^{-1}C^t]\theta \qquad (3.1)$$

ここで、θ は次の条件を満たす任意の行列である。

$$\theta^t \theta = I_r \qquad (3.2)$$

先ず始めに次の補題1と補題2を示そう。

補題1：（3．1）式が安定かつプロパーであり（すなわち、$U(s) \in (RH_{m,r})\infty$）、さらに（2．13b）を満たすためのひとつの十分条件は（3．1）式の A、C が

$$A + A^t = C^t C \qquad (3.3)$$

を満たすことである。

（証明）：プロパーであることは $U(s)$ の形から明らかである。$U(s)$ の安定性は

$$G(s) = C(sI_p + A)^{-1}C^t = C(sI_p - (-A))^{-1}C^t$$

の安定性と同じである。$G(s)$ は次の状態方程式の伝達関数と看做せる。

$$\dot{x} = (-A)x + C^t u$$

$$y = Cx$$

このシステムが大域的に漸近安定であるための必要十分条件はある（半）正定対称行列 Q に対して、次のリアプノフ行列方程式

$$(-A)^t P + P(-A) = -Q$$

を満たす正定対称行列 P が存在することである[11, pp. 94-95]。（3．3）式は上式にお

いて$Q=C^tC$、$P=I_p$ と置いたものに等しい。すなわち、（３．３）式は正定行列 $P=I_p$ が半正定対称行列 $Q=C^tC$ に対して存在していることを示すから $G(s)$ は安定である。

次に、$(U(s))^H U(s)=I_r$ であることを示そう。左辺を計算する。

$$(U(s))^H U(s) = \theta^t[I_m - C(-sI_p + A^t)^{-1}C^t][I_m - C(sI_p + A)^{-1}C^t]\theta$$

$$= I_r - \theta^t C(-sI_p + A^t)^{-1}C^t\theta - \theta^t C(sI_p + A)^{-1}C^t\theta$$

$$+ \theta^t C(-sI_p + A^t)^{-1}C^tC(sI_p + A)^{-1}C^t\theta$$

ここで、（３．３）式を次式のように変形する。

$$C^tC = (-sI_p + A^t) + (sI_p + A)$$

これを上式に代入すると、

$$(U(s))^H U(s) = I_r$$

を得る。なお、θは（３．２）式を満す任意の定数行列でよい。以上から補題１が証明された。（注：これは $U(s)$ が内関数行列であるための十分条件である）

補題２：次の行列を定義する。

$$F(\lambda):=\{f_{ij}\} \tag{3.4a}$$

ただし、

$$f_{ij}:= (\bar{s}_i + s_j)^{-1}((u_i)^* u_j - \lambda^{-2}(\omega_i)^*\omega_j) \tag{3.4b}$$

ここで、x^* はベクトル x の転置複素共役ベクトルを表す。

このとき、（３．３）式を満たす定数行列 A、C から作られる（３．１）式の $U(s)$ が補間条件（２．１３）式を満たすならば、$F(\lambda)$ は半正定行列（$F(\lambda)\geqq 0$）である。すなわち、$F(\lambda)\geqq 0$であることが（３．１）式で構成される $U(s)$ が補間条件（２．１３）を満たすための必要条件である。

（証明）：先ず、$(U(s_i))^* U(s_j)$ を計算する。

$$(U(s_i))^* U(s_j) = \theta^t[I_m - C(\bar{s}_i I_p + A^t)^{-1}C^t][I_m - C(s_j I_p + A)^{-1}C^t]\theta$$

$$= I_r - \theta^t C(\bar{s}_i I_p + A^t)^{-1}C^t\theta - \theta^t C(s_j I_p + A)^{-1}C^t\theta$$

$$+\ \theta^t C(\bar{s}_i I_p + A^t)^{-1} C^t C (s_j I_p + A)^{-1} C^t \theta$$

ここで、（3．3）式を次式のように変形する。

$$C^t C = A + A^t + \bar{s}_i I_p + s_j I_p - (\bar{s}_i + s_j) I_p$$

これを上式に代入すると、

$$(U(s_i))^* U(s_j) = I_r - \theta^t C(\bar{s}_i I_p + A^t)^{-1}(s_j I_p + A)^{-1} C^t \theta (\bar{s}_i + s_j)$$

を得る。故に、

$$I_r - (U(s_i))^* U(s_j) = \theta^t C(\bar{s}_i I_p + A^t)^{-1}(s_j I_p + A)^{-1} C^t \theta (\bar{s}_i + s_j).$$

これに左から $(u_i)^*$ を、右から u_j を掛けると次式を得る。

$$(\bar{s}_i + s_j)^{-1}(u_i)^*(I_r - (U(s_i))^* U(s_j)) u_j = (u_i)^* \theta^t C(\bar{s}_i I_p + A^t)^{-1}(s_j I_p + A)^{-1} C^t u_j \quad \cdots\cdots(3.5)$$

ここで、p次元ベクトル $\tilde{f}_j$ とそれを列ベクトルとする行列 $(\tilde{F})^{1/2}$を定義する。

$$\tilde{f}_j := (s_j I_p + A)^{-1} C^t \theta u_j \ ;\ j = 1,2,\ldots p \qquad (3.6a)$$

$$\tilde{F}^{1/2} := [\tilde{f}_1\ \ \tilde{f}_2\ \cdots\cdots \tilde{f}_p] \qquad (3.6b)$$

さて、（2．13）と（3．6a）式を用いると、（3．5）式の左辺と右辺はそれぞれ次の様になる。

$$左辺 = (\bar{s}_i + s_j)^{-1}((u_i)^* u_j - (U(s_i)u_i)^* U(s_j) u_j)$$

$$= (\bar{s}_i + s_j)^{-1}((u_i)^* u_j - \lambda^{-2}(\omega_i)^* \omega_j)$$

（3．4b）式を用いて、

$$= f_{ij}\ ;\ i,j = 1,2,\ldots.p$$

となる。また、

$$右辺 = (\tilde{f}_i)^* \tilde{f}_j \ ; \ i, j = 1, 2, \ldots p$$

よって、

$$f_{ij} = (\tilde{f}_i)^* \tilde{f}_j \ ; \ i, j = 1, 2, \ldots p \tag{3.7}$$

を得る。これは（３．４ａ）と（３．６ｂ）から、

$$F(\lambda) = (\tilde{F}^{1/2})^* \tilde{F}^{1/2} \tag{3.8}$$

と表せるエルミート行列である。また、（３．８）式から、$\forall x \in C^p$に対して

$$x^* F(\lambda) x = (\tilde{F}^{1/2} x)^* (\tilde{F}^{1/2} x) \geqq 0 \tag{3.9}$$

となるから、 $F(\lambda)$ は半正定エルミート行列である。すなわち、$F(\lambda) \geqq 0$ である（証終）。
（３．４ａ）と（３．４ｂ）は次式と等価である。

$$\tilde{U}^* \tilde{U} - \lambda^{-2} W^* W = \bar{\Lambda}_s F(\lambda) + F(\lambda) \Lambda_s \tag{3.10a}$$

ただし、

$$\tilde{U} = (u_1, u_2, \cdots, u_p) \tag{3.10b}$$

$$W = (\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_p) \tag{3.10c}$$

$$\Lambda_s = \mathrm{diag}\{s_1, s_2, \cdots s_p\} \tag{3.10d}$$

（３．１０）式は補題２の必要条件として用いられるエルミート行列 $F(\lambda)$ が $\tilde{U}$、$\tilde{W}$ 及びΛ_sを既知として、実数λをパラメータとして解くことによって得られることを意味する。
この (p, p) 行列 $F(\lambda)$ が半正定であれば、 (p, p) の平方根行列は必ずしも一意ではないが定義することができる[10, pp.214-216]。例えば、平方根行列 $F^{1/2}(\lambda)$ を次のように定義する。

$$F^{1/2}(\lambda) := P^* \Lambda^{1/2} P$$

ここで、行列 P は $F(\lambda) = P^* \Lambda P$ となるユニタリ行列である。Λは $F(\lambda)$ の固有値（$\geqq 0$）を対角要素とする実対角行列 $\mathrm{diag}(a_1, a_2, .., a_p)$である。任意のユニタリ行列 U_1 として、

$$(U_1F^{1/2}(\lambda))^*(U_1F^{1/2}(\lambda)) = (P^*\Lambda^{1/2}P)(U_1{}^*U_1)(P^*\Lambda^{1/2}P) = F(\lambda)$$

を得るから、（３．８）式と比較して次式を得る。

$$\tilde{F}^{1/2} = U_1F^{1/2}(\lambda) \tag{3.11}$$

（注：ここで、λを固定すれば $F^{1/2}(\lambda)$ は定数行列である。上の等式がユニタリ行列 U_1 の任意性を許容して成立するには、$\tilde{F}^{1/2}$ にそれに対応する機構が存在していなければならない。（３．６ａ）が実行列θを含むことがそれである。）

さて、次の結果を証明しよう。

補題３：（３．４ａ）、（３．４ｂ）式で定義される $F(\lambda)$ が正定あり、かつ（３．１）式に含まれる実定数行列 A、C が、U_1 を (p,p) の任意のユニタリ行列とし、θを（３．２）式を満たす任意の (m,r) の実数行列として、次式を満たすならば、（３．１）式で定義される U(s) は H∞補間問題（２．１３）式の解となる。

$$CU_1F^{1/2}(\lambda) = \theta\tilde{U} - \lambda^{-1}W \tag{3.12a}$$

$$AU_1F^{1/2}(\lambda) = C^t\theta\tilde{U} - U_1F^{1/2}(\lambda)\Lambda_s \tag{3.12b}$$

（証明）：$F(\lambda)$ が正定であるから、補題２から（３．１）式の U(s) が H∞補間問題の解であるための必要条件は満たされている。

さて、（３．１２）式を用いて、U(s) が H∞補間問題の解であることを証明しよう。

$$\begin{aligned} U(s_i)u_i &= [I_m - C(s_iI_p + A)^{-1}C^t]\theta u_i \\ &= \theta u_i - C(s_iI_p + A)^{-1}C^t\theta u_i \end{aligned} \tag{3.13}$$

一方、（２．１２ｂ）は（３．１１）式を用いると次式となる。

$$A\tilde{F}^{1/2} = C^t\theta\tilde{U} - \tilde{F}^{1/2}\Lambda_s$$

ここで、（３．６ｂ）と（３．１０ｄ）式を用いると、上式は次の p 個の列ベクトルに対する等式で置き換えられる。

$$A\tilde{f}_j = C^t\theta u_j - s_j\tilde{f}_j \; ; \; j = 1,2,\ldots,P$$

よって、次式を得る。

$$C^t \theta u_j = (s_j I_p + A)\tilde{f}_j \ ; \ j = 1,2,\ldots,P$$

これを（３．１３）式に代入すると、

$$U(s_i)u_i = \theta u_i - C\tilde{f}_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,p \qquad (3.14)$$

となる。ところが、（３．１２ａ）式を（３．１１）式を用いて両辺の列ベクトルで表すと、

$$C\tilde{f}_k = \theta u_k - \lambda^{-1}\omega_k \ ; \ k = 1,2,\ldots,p \qquad (3.15)$$

を得る。したがって、（３．１４）式は

$$U(s_i)u_i = -\lambda^{-1}\omega_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,p \qquad (3.15)$$

となる。すなわち、（３．１）式で定めた U(s) は H∞補間問題の（２．１３ａ）式を満たすことが解る。

残るは U(s) が内関数行列であること、すなわち（２．１３ｂ）式を（３．１２）式から示すことである。このためには補題１により、（３．１２ａ）と（３．１２ｂ）を満たす A、C が

$$A + A^t = C^t C$$

を満たしていることを示せばよい。（３．１２ａ）式から次式を得る。

$$((F^{1/2}(\lambda))^* U_1^* C^t - \tilde{U}^* \theta^t)(CU_1 F^{1/2}(\lambda) - \theta\tilde{U}) = \lambda^{-2} W^* W$$

左辺を展開して次式を得る。

$$(F^{1/2}(\lambda))^* U_1^* (C^t C) U_1 F^{1/2}(\lambda) = \lambda^{-2} W^* W - \tilde{U}^*\tilde{U} + (F^{1/2}(\lambda))^* U_1 C^t \theta \tilde{U} + \tilde{U}^* \theta^t C U_1 F^{1/2}(\lambda)$$

この式は（３．１０ａ）式を用いると次のようになる。

$$(F^{1/2}(\lambda))^* U_1^* (C^t C) U_1 F^{1/2}(\lambda)$$

$$= -\bar{\Lambda}_s F(\lambda) - F(\lambda)\Lambda_s + (F^{1/2}(\lambda))^* U_1 C^t \theta \tilde{U} + \tilde{U}^* \theta^t C U_1 F^{1/2}(\lambda)$$

ここで、（３．８）と（３．１１）式を用いれば上式は次の様になる。

$$= (F^{1/2}(\lambda))^* U_1{}^* [C^t \theta \tilde{U} - U_1 F^{1/2}(\lambda)\Lambda_s] + [\tilde{U}^* \theta^t C - \bar{\Lambda}_s (F^{1/2}(\lambda))^* U_1{}^*] U_1 F^{1/2}(\lambda)$$

さらに、（３．１２ｂ）式を用いれば結局次式となる。

$$= (F^{1/2}(\lambda))^* U_1{}^* [A + A^t] U_1 F^{1/2}(\lambda)$$

ここで、両辺を比較すれば

$$C^t C = A + A^t$$

を得る。すなわち、（３．１２）を満たす実行列 A、C は補題１の十分条件を満たしているから、U(s) は内関数行列であると結論出来る。以上で、補題３が証明された。

以上の結果は $F(\lambda)$ が正定である時のみ正しい。一方、$\lambda=\lambda_m$（λの最小値）において $F(\lambda)$の階数の減少が生じるので、$F(\lambda_m)$ が正定である保証はない。そこで、 $F(\lambda)$の階数に依存しない結果を得ることが望ましい。いま、次の行列を定義する。

$$\tilde{C} := C U_1 F^{1/2}(\lambda) \qquad (3.16a)$$

$$\tilde{A} := (F^{1/2}(\lambda))^* U_1{}^* A U_1 F^{1/2}(\lambda) \qquad (3.16b)$$

このようにすると、補題３から直ちに次の結果が導ける。
定理１：（３．４ａ）と（３．４ｂ）式で定義される $F(\lambda)$ が正定であるような任意の正数λに対して、次式で定義する U(s)：

$$U(s;\lambda) := [I_m - \tilde{C}(sF(\lambda) + \tilde{A})^{-1}\tilde{C}^*]\theta \qquad (3.17)$$

が内関数行列（$\in(RH_{m,r})\infty$）であり、かつ H∞補間問題（２．１３）式の解であるための十分条件はθを$\theta^t\theta=I_r$ を満たす$\forall\theta\in R^{m,r}$として、（３．１６）式の $\tilde{C}$、$\tilde{A}$ が次式を満たすことである。

$$\tilde{C} = \theta\tilde{U} - \lambda^{-1} W \qquad (3.18a)$$

$$\tilde{A} = \tilde{C}^* \theta \tilde{U} - F(\lambda)\Lambda_s \qquad (3.18b)$$

（証明）：先ず、（３．１８ａ）式は（３．１２ａ）式から直ちに解る。

また、（３．１８ｂ）式は（３．８）と（３．１１）式を用いれば次の様に書換えられる。

$$(F^{1/2}(\lambda))^* U_1^* [AU_1 F^{1/2}(\lambda) - C^t \theta \tilde{U} + U_1 F^{1/2}(\lambda)\Lambda_s] = 0$$

さて、$F(\lambda)$ が正定であり U_1 がユニタリ行列であるから $\det\{(F^{1/2}(\lambda))^* U_1^*\} \neq 0$ である。すなわち、

$$\mathrm{rank}\{(F^{1/2}(\lambda))^* U_1^*\} = p \text{ (full rank)}$$

であることに注意すれば、上式において［＊］=0 でなければならない。すなわち、

$$AU_1 F^{1/2}(\lambda) - C^t \theta \tilde{U} + U_1 F^{1/2}(\lambda)\Lambda_s = 0$$

となり、（３．１２ｂ）式が得られる。この計算の過程は逆に辿れる。よって、（３．１８）式は（３．１２）式と同等であることが解る。

最後に、（３．１７）式が H∞補間条件（２．１３ａ）の解であることを示さなければならない。このためには

$$\tilde{C}(sF(\lambda) + \tilde{A})^{-1}\tilde{C}^* = C(sI_p + A)^{-1}C^t \tag{3.19}$$

であることを示せば十分である。さて、（３．１６）、（３．８）及び（３．１１）式を用いて左辺を変形する。

$$\text{左辺} = CU_1 F^{1/2}(\lambda)[sF(\lambda) + (F^{1/2}(\lambda))^* U_1^* A U_1 F^{1/2}(\lambda)]^{-1}(CU_1 F^{1/2}(\lambda))^*$$

ここで、$\det\{U_1 F^{1/2}(\lambda)\} \neq 0$ に注意すれば

$$= CU_1 F^{1/2}(\lambda)(U_1 F^{1/2}(\lambda))^{-1}(sI_p + A)^{-1}\{(U_1 F^{1/2}(\lambda))^*\}^{-1} U_1 F^{1/2}(\lambda))^* C^t$$

$$= C(sI_p + A)^{-1}C^t$$

となり、（３．１９）式が証明出来た（証終）。

証明から明らかなように、この定理は $F(\lambda)$が正定であること、言換えれば正数$\lambda > \lambda_m$ の範囲のλで真であることに注意する必要がある。しかし、本定理の価値は次の点にある。すなわち、（３．１７）式の表現における逆行列の要素は分子のλの次数が分母のそれより大きい有理式であるから、$\det(F(\lambda_m)) = 0$ とするλ_m からの正の増分（$\lambda - \lambda_m$）に対する $\lambda = \lambda_m$ における摂動増分は正則であるため、λをλ_mに望むだけ近づけても定理は成立しているのである。

一方、$\lambda=\lambda_m$ において U(s) の次数（行列のサイズ）は減少する。次に、状態空間表現に対するシステム行列[7]と呼ばれる P(s) を用いてこれを示そう。U(s) が H∞補間条件（２．１３）を満たすとき、（３．８）式から $F(\lambda_m)$ は 行列 $C^{m,r}$の中の半正定エルミート行列であることを既に見た。従って、$\Phi\in C^{(p-d),p}$ の複素行列を用いて

$$F(\lambda_m) = \Phi^*\Phi \tag{3.20}$$

のように表せる[10, p.208,例題8.2]。ただし、rankΦ=p-d（= $F(\lambda_m)$ の正の固有値の個数）である。したがって、残り d 個の固有値はゼロである。d は $F(\lambda_m)$ の階数不足数（rank deficiency）と云われる。

さて、Φの右逆元（right inverse）を $Q\in C^{p,p-d}$ とする。すなわち、

$$\Phi Q = I_{p-d} \tag{3.21a}$$

ここで、rank(Q)=p-d である（付録３参照）。

また、full rank な右零化因子（right annihilator）を $N\in C^{p,d}$ とする。すなわち、

$$\Phi N = 0_{p-d,d} \tag{3.21b}$$

ここで、rank(N)=d である（付録３参照）。

Q、N を用いて次の行列Σを定義する。正則行列となり、Σ^{-1} が存在する（付録４参照）。

$$\Sigma := [Q \quad N] \tag{3.22}$$

これら Q、N およびΣを用いると（３．１７）式の $U(s;\lambda)$ が$\lambda=\lambda_m$ において次の様に表せる（付録５参照）。

$$U(s;\lambda_m) = [I_m - \tilde{C}\Sigma P(s)^{-1}\Sigma^*\tilde{C}^*]\theta \tag{3.23a}$$

ここで、P(s) は (p,p) 行列 で次の様に定義される。

$$P(s) := \begin{pmatrix} sI_{p-d} - Q^*\tilde{A}Q & -Q^*\tilde{A}N \\ N^*\tilde{A}Q & N^*\tilde{A}N \end{pmatrix} \tag{3.23b}$$

この P(s) は次の係数行列をもつ状態空間表現$S(A_1,B_1,C_1,D_1)$に対するシステム行列と呼ばれるものである[7]。

$$A_1 = Q^* \tilde{A} Q \in C^{p-d,\, p-d} \tag{3.24a}$$

$$B_1 = Q^* \tilde{A} N \in C^{p-d,\, d} \tag{3.24b}$$

$$C_1 = N^* \tilde{A} Q \in C^{d,\, p-d} \tag{3.24c}$$

$$D_1 = N^* \tilde{A} N \in C^{d,\, d} \tag{3.24d}$$

さて、$\det(P(s)) = 0$ となる $s = z_i$ をこのシステムのゼロ点という。$\det(P(s))$ は s の (p-d) 次多項式である。いま、ゼロ点がすべて異なると仮定するとゼロ点は (p-d) 個存在する。それぞれのゼロ点 z_i ; $i = 1,2,..,p-d$ に対して、次式を満たす (p-d) 次元ベクトル r_i および d 次元ベクトル d_i が存在する[7]。

$$P(z_i)\begin{pmatrix} r_i \\ \\ d_i \end{pmatrix} = 0 \quad ; \; i = 1,2,..,p-d \tag{3.25a}$$

r_i をゼロ出力となる初期状態方向 (zero-state direction) 、d_i をゼロ出力となる入力ベクトルという[7]。すなわち、入力ベクトル $u_i(t)=d_i\exp(z_i t)1(t)$ に対して、状態ベクトル $x(t)=r_i\exp(z_i t)$ のように動き、出力は $y=Cx(t)\equiv 0(t\geqq 0)$ である[7, pp. 50-52]。

また、次式を満たす (p-d) 次元行ベクトル $(y_i)^t$ および d 次元行ベクトル $(g_i)^t$ が存在する[7]。

$$[(y_i)^t \quad (g_i)^t]P(z_i) = 0 \quad ; \; i = 1,2,..,p-d \tag{3.25b}$$

これら r_i、d_i、$(y_i)^t$、$(g_i)^t$; $i=1,2,..,p-d$ から次の行列を定義する。

$$R := [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_{p-d}] \in C^{p-d,\, p-d} \tag{3.26a}$$

$$D := [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_{p-d}] \in C^{d,\, p-d} \tag{3.26b}$$

$$Y := \begin{pmatrix} (y_1)^t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (y_{p-d})^t \end{pmatrix} \in C^{p-d,\, p-d} \tag{3.26c}$$

$$G := \begin{pmatrix} (g_1)^t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (g_{p-d})^t \end{pmatrix} \in C^{p-d,\, d} \tag{3.26d}$$

以上を次の様にまとめることが出来る。

定理２：①$\lambda=\lambda_m$ に対する H∞補間問題の解（３．１７）及び（３．１８）の内関数行列の極は（３．２３ｂ）で表される行列 P(s) の行列式 det(P(s)) のゼロ点である。②$\lambda>\lambda_m$ の場合には、それらゼロ点は $-(F(\lambda)^{-1/2})^*\tilde{A}F(\lambda)^{-1/2}$ の固有値である。③$\lambda\rightarrow\lambda_m$ まで減少すると、U(s) の極のうち d 個が∞となる。残り (p-d 個) の極はシステムＳ(A_1, B_1, C_1, D_1)のシステム行列 P(s) のゼロ点に一致する。ここで、d は $F(\lambda_m)$ のランク不足数である。④これらのゼロ点が互に異なり、$\mathrm{rank}(N^*\tilde{A}N) = d$ (full rank) である場合には、$U(s;\lambda_m)$は次の対角状態空間表現Ｓ(A_2, B_2, C_2, D_2)を持つ。

$$A_2 := \mathrm{diag}(z_1,\ z_2,\ \cdots, z_{p-d}) \tag{3.27a}$$

$$B_2 := [YQ^* + GN^*]\tilde{C}^*\theta \tag{3.27b}$$

$$C_2 := \tilde{C}[QR + ND] \tag{3.27c}$$

$$D_2 := [I_m - \tilde{C}N(N^*\tilde{A}N)^{-1}N^*\tilde{C}^*]\theta \tag{3.27d}$$

ここで、

$$D_2{}^*D_2 = I_r \tag{3.28}$$

（証明）：①：付録５の（付５．２）式から明らかである（∵Σ、Σ*が正則であるから）。

②：$\lambda>\lambda_m$ であるから、H∞補間問題の解は（３．１７）式で与えられる。この極は方程式

$$\det(sF(\lambda) + \tilde{A}) = 0$$

の根である。$F(\lambda)$ に（３．８）と（３．１１）式を代入すると

$$sF(\lambda) + \tilde{A} = (F(\lambda)^{1/2})^*\{sI + (F(\lambda)^{-1/2})^*\tilde{A}(F(\lambda)^{-1/2})\}F(\lambda)^{1/2}$$

となり、$\det(F(\lambda)^{1/2})\neq 0$ であることに注意すれば、

$$\det(sF(\lambda)+\tilde{A}) = \det(F(\lambda)^{1/2})^{*}\{sI+(F(\lambda)^{-1/2})^{*}\tilde{A}(F(\lambda)^{-1/2})\}F(\lambda)^{1/2}$$

$$= \det\{sI+(F(\lambda)^{-1/2})^{*}\tilde{A}(F(\lambda)^{-1/2})\} = 0$$

を得る。故に、極は $-(F(\lambda)^{-1/2})^{*}\tilde{A}F(\lambda)^{-1/2}$ の固有値である。

③：①と②から明らかである（詳細は付録６参照）。

④：$\lambda=\lambda_m$ のとき、$\det P(s)=0$ のゼロ点 z がすべて異なると仮定すると、ゼロ点は（p-d）個存在する。何故ならば、$N^{*}\tilde{A}N$ が $\mathrm{rank}(N^{*}\tilde{A}N)=d$ (full rank)であるから、$\det(N^{*}\tilde{A}N)\neq 0$ であるから、$\det P(s)=0$ は s の（p-d）次の多項式であるとなるからである[10, pp.38-41]。したがって、$P(s)^{-1}$ の分母が（p-d）次の多項式であるから次の様に部分分数展開が出来る。

$$P(s)^{-1} = \tilde{D} + \sum_{i=1}^{p-d} \alpha_i(\beta_i)^t/(s-z_i) \tag{3.29a}$$

ここで、明らかに $\tilde{D}$ は定数行列（$\in C^{p,p}$）である。また、

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} r_i \\ \\ d_i \end{pmatrix} \tag{3.29b}$$

$$(\beta_i)^t = ((y_i)^t \ \ (g_i)^t) \tag{3.29c}$$

であることが示せる（付録７参照）。さらに、$s\to\infty$とするとき、

$$\tilde{D} = \lim_{s\to\infty} P(s)^{-1} = \mathrm{diag}\{\,0_{p-d},\ (N^{*}\tilde{A}N)^{-1}\} \tag{3.30}$$

となることが解る（付録８参照）。

解 $U(s;\lambda_m)$ が（３．２７）で表せる状態空間表現$S(A_2,B_2,C_2,D_2)$を持つことは状態空間表現$S(A_2,B_2,C_2,D_2)$の伝達関数行列 $G(s)$ と $U(s;\lambda_m)$ とが等しくなることを示すことが示せることから解る（付録９参照）。これにより、$U(s;\lambda_m)$ の次数が p 次から（p-d）次に減少することが解る。

最後に、（３．２８）式は直接計算することにより次のように示すことが出来る。

$$D_2{}^*D_2 = \theta^t[I_m - \tilde{C}N(N^*\tilde{A}^*N)^{-1}N^*\tilde{C}^*][I_m - \tilde{C}N(N^*\tilde{A}N)^{-1}N^*\tilde{C}^*]\theta$$

ここで、この式の [*][*] の部分は

$$[*][*] = Im - \tilde{C}N(N^*\tilde{A}^*N)^{-1}N^*\tilde{C}^* - \tilde{C}N(N^*\tilde{A}N)^{-1}N^*\tilde{C}^* + (\tilde{C}N(N^*\tilde{A}^*N)^{-1}N^*\{\tilde{C}^*\tilde{C}\}N(N^*\tilde{A}N)^{-1}N^*\tilde{C}^*)$$

である。付録１０で示すように次式が成立つから、

$$\tilde{A} + \tilde{A}^* = \tilde{C}^*\tilde{C} \tag{3.31}$$

これを上式の $\{\tilde{C}^*\tilde{C}\}$ に代入すると、

$$[*][*] = I_m$$

を得る。したがって、$\theta^t\theta = I_r$であることに注意すれば（３．２８）式を得る。

最後に、$T_1(s)$ が複素右半平面にただ一つのゼロ点しか持たないような特別な場合にこの定理を適用すると次のような結果を得る。

系：$T_1(s)$ $(\in(H_{r,r})\infty)$ のゼロ点のうち複素右半平面に属するものはただ一つである場合（p=1）には、H∞補間問題の解 $U(s;\lambda_m)$ は次の様に定数行列となる。

$$U(s;\lambda_m) = [I_m - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{C}^t]\theta \tag{3.32}$$

ただし、

$$\tilde{C} = \theta u_1 - (\|\omega_1\|_2)^{-1}\omega_1 \tag{3.33a}$$

$$\tilde{A} = 1 - (\|\omega_1\|_2)^{-1}\omega_1{}^t\theta u_1 \tag{3.33b}$$

ここで、u_1 は r 次元実ベクトル空間の単位長さの任意のベクトル（$\|u_1\|_2 = 1$）である。

（証明）：$T_1(s)\in(H_{r,r})\infty$ のゼロ点 z_1 がただ一つであるからそれは実数でなければならない。ベクトル u_1 が r 次元実ベクトルであり、ω_1 は m 次元実ベクトルであることを先ず示そう。$T_1(s)$ を内外関数因子分解：

$$T_1(s) = T_{1o}(s)T_{1i}(s)$$

において、$Re(z_1)>0$ であるから、因子 $(s - z_1)$ は $T_{1i}(s)$ のゼロ因子として含まれる（∵$T_{1o}(s)$ は外関数であるからそのゼロ点はすべて左半平面に存在していなければならないから[12, p.14]）。また、内関数 $T_{1i}(s)$ のゼロ点と極は虚軸に関して鏡像の位置関係に

あるから、実数 z_1 は $(T_{11}(s))^H$ の極である。従って、$s=z_1$ における $(T_{11}(s))^H$ の留数行列は実定数行列（$\in C^{r,r}$）となる。故に、（２．１０）式から、u_1 は r 次元実ベクトルとして定まる。よって、ω_1 は（２．１２）式から

$$\omega_1 := -T_2(z_1)u_1$$

により定まるから m 次元実ベクトルである。

さて、$(T_{11}(s))^H$ の複素右半平面に属する極は $s=z_1$ ただ一つであるから、$p=1$ である。（３．４）式から $F(\lambda)$ は次のただひとつの要素

$$f_{11} = (\bar{z}_1 + z_1)^{-1}(u_1{}^* u_1 - \lambda^{-2}\omega_1{}^*\omega_1)$$

$$= (\bar{z}_1 + z_1)^{-1}(u_1{}^t u_1 - \lambda^{-2}\omega_1{}^t\omega_1)$$

$$= (\bar{z}_1 + z_1)^{-1}(1 - \lambda^{-2}(\|\omega_1\|_2)^2)$$

からなる行列となる。$\lambda=\lambda_m$ において、$\det(F(\lambda_m)) = 0$ であるから、

$$\lambda_m{}^{-1} = (\|\omega_1\|_2)^{-1} \tag{3.34}$$

と求まる。（３．１８ａ）に（３．３４）式を用いると次式を得る。

$$\tilde{C} = \theta u_1 - (\|\omega_1\|_2)^{-1}\omega_1$$

また、（３．１８ｂ）式から

$$\tilde{A} = \tilde{C}^t\theta u_1 - F(\lambda_m)\Lambda_s$$

$$= \{u_1{}^t\theta^t - (\|\omega_1\|_2)^{-1}\omega_1{}^t\}\theta u_1 - 0\Lambda_s$$

$$= 1 - (\|\omega_1\|_2)^{-1}\omega_1{}^t\theta u_1$$

以上で $\tilde{C}$、$\tilde{A}$ 及び $F(\lambda_m)=0$ が定まったから、（３．１７）式に代入すると求める内関数 $U(s;\lambda_m)$ は次のような定数行列として得られる。

$$U(s;\lambda_m) = [I_m - \tilde{C}(sF(\lambda_m) + \tilde{A})^{-1}\tilde{C}^*]\theta$$

$$= (I_m - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{C}^t)\theta$$ （証終）。

4．解法の手順と数値例

4．1　解法の手順

2章の $H\infty$最適化問題：$T_1(s)\in(H_{r,r})\infty$、$T_2(s)\in(H_{m,r})\infty$が与えられたとき、

$$\lambda_m = \inf\{\|M(s)T_1(s)-T_2(s)\|\infty,\ M(s)\in(H_{m,r})\infty\} \tag{4.1}$$

なる最小値λ_mと最適解 $M_o(s)\in(H_{m,r})\infty$を見出す問題を3章で述べた理論に基づいて解く手順を以下に述べる。

ステップ1：$T_1(s)$ の内外関数行列分解形を次の様に求める。

$$T_1(s) = T_{1o}(s)T_{1i}(s)$$

ここで、$T_{1o}(s)$ は外関数行列であり、$T_{1o}\in(RH_{r,r})\infty$である。
$T_{1i}(s)$ は内関数行列であり、$T_{1i}\in(RH_{r,r})\infty$ かつ $T_{1i}(T_{1i})^H = I_r$

ステップ2：$(T_{1i}(s))^H$ の1位の孤立特異点 s_k ; $k = 1,2,...,p$ を求め、（2．9）式により留数行列 $R(s_k,(T_{1i}(s))^H)$; $k = 1,2,..,p$ を計算する。（2．10）式のように書き換えて r 次元ベクトル u_k ; $k = 1,2,..,p$ を求める。さらに、行列

$$\tilde{U} := (u_1,u_2,\cdots,u_p)$$

を構成する。

ステップ3：m 次元ベクトルω_k と行列 W を次のように定義する。

$$\omega_k := -T_2(s_k)u_k\ ;\ k = 1,2,..,p$$

$$W := (\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_p)$$

ステップ4：$F(\lambda):=\{f_{ij}\}$ を構成する。ここで、$f_{ij} := (\bar{s}_i+s_j)^{-1}(u_i^*u_j - \lambda^{-2}\omega_i^*\omega_j)$

ステップ5：$\det F(\lambda)=0$ となるλのうち、$F(\lambda_m)$ を半正定とする最小のλ_m を求める。
また、そのときの $F(\lambda_m)$ を求める。

ステップ6：$\theta^t\theta=I_r$ なる実行列 $\theta\in R_{m,r}$ を適当に選ぶ。

ステップ7：$\tilde{C}$、$\tilde{A}$ を次式で定める。

$$\tilde{C}:=\theta\tilde{U}-\lambda_m^{-1}W$$

$$\tilde{A}:=\tilde{C}^*\theta\tilde{U}-F(\lambda_m)\Lambda_s$$

ただし、

$$\Lambda_s=\mathrm{diag}\{s_1,s_2,\cdots s_p\}$$

ステップ8：行列 $U(s;\lambda_m)$ を次式のように定義して、（２．１３）式を満たす解とする。

$$U(s;\lambda_m):=[I_m-\tilde{C}(sF(\lambda_m)+\tilde{A})^{-1}\tilde{C}^*]\theta$$

ステップ9：次式で $M_o(s)$ を定義し、（４．１）式の解とする。

$$M_o(s):=[T_2(s)T_{1i}(s)^H+\lambda_mU(s;\lambda_m)T_{1i}(s)^H]T_{1o}(s)^{-1}$$

４．２　数値例

本節では、前節の解法手順に従い、次に示す数値例について内関数行列を求める。また、MATLAB[8]を用いて作成したプログラム例も参考のため示す。

数値例：次のように $T_1(s)\in(H_{2,2})\infty$、$T_2(s)\in(H_{2,2})\infty$ が与えられたとき、（２．１３）式を満たす内関数行列 $U(s;\lambda_m)$ を見出す。

$$T_1(s)=\begin{pmatrix}(10s+4)(s-1)/(10s+5)(s+1) & -3/(10s+5)\\ -3(s-1)/(10s+5)(s+1) & (10s-4)/(10s+5)\end{pmatrix}$$

$$T_2(s)=(-3)/5(s+2)\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-4/5(s+3)\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}+3/2(s+4)\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$$

（解）ステップ1：$T_1(s)$ の内外関数行列因子分解を MATLAB ROBUST CONTROL TOOLBOX に

内蔵されている iofr.m-file (row type) を用いて得る。ただし、iofr は T(s) に対して

$$T(s)=T_i(s)T_o(s)、T_i(s)\ :\ \text{inner},\ T_o(s)\ :\ \text{outer}$$

を与えるから、$T_1(s)^t$ に対して iofr.m を適用する必要がある。これにより、

$$T_1(s)^t = T_i(s)T_o(s)$$

を得れば、T_{1i} は

$$T_{1i}(s) := T_i(s)^t$$

と求められる。このプログラムと計算結果を次に示す。

（プログラム）

```
 %                     hkreidai.m file                      %
%  Numerical Example for Explicit structure of inner matrix %
%                  by U. SHAKED.1991/03/06                  %
%Inner-outer factorization of T1(s) using tfm2ss and iofr-m %
%Step1;Representation on state space of T1(s) using tfm2ss.m%
  N11 = [10 -6 -4];
      N21 = [0 -3  3];
          N12 = [0 -3 -3];
              N22 = [10  6 -4];
  num = [N11
         N21
         N12
         N22];
  den = [10 15 5];
  [a,b,c d] = tfm2ss(num,den,2,2);
%Step2; Inner-outer factorization of (T1(s))' using iofr.m  %
%           (T1(s))' = (at,bt,ct,dt) = (a',c',b',d')        %
  at = a';
     bt = c';
        ct = b';
           dt = d';
  [mtxin,mtxinp,mtxout,dim] = iofr(at,bt,ct,dt);
% Inner matrix T1i(s) of T1(s);theta = (ai bi;ci di), dim=4 %
   theta = mtxin';
         ai = theta(1:4,1:4);
            bi = theta(1:4,5:6);
               ci = theta(5:6,1:4);
                  di = theta(5:6,5:6);
%  Matrix bi shows two dimensional vector of input (u1,u2)' %
  u1 = 1;
   [num1,den1] = ss2tf(ai,bi,ci,di,u1);
  u2 = 2;
   [num2,den2] = ss2tf(ai,bi,ci,di,u2);
```

（計算結果）

$$T_{11}(s) = (1/\Delta)\begin{pmatrix} s^4+0.9s^3-0.8s^2-0.9s-0.2 & -0.3s^3-0.75s^2-0.6s-0.15 \\ -0.3s^3-0.15s^2+0.3s+0.15 & s^4+2.1s^3+1.0s^2-0.3s-0.2 \end{pmatrix}$$

ただし、

$$\Delta = s^4 + 3.0s^3 + 3.25s^2 + 1.5s + 0.25$$

ステップ２：$(T_{11}(s))^H$の特異点を求める。MATLAB-CONTROL SYSTEM TOOLBOX の tf2zp.m を用いて、$T_{11}(s)$の各行列要素 t_{ij} の極 $(s^{ij})_k$; $k=1,2,..p^{ij}$ を求めれば、$(T_{11}(s))^H$の特異点は $-(s^{ij})_k$; $k=1,2,..p^{ij}$ となる。このプログラムと計算結果を次に示す。

```
                                                                    %
%
%   Obtaining singular points of T1i(s) using tfzp.m file          %
   [z1,p1,k1] = tf2zp(num1,den1)
   [z2,p2,k2] = tf2zp(num2,den2)
                                                                   %%
%%%                                                                 %
%                    (T1i(s))H = (T1i(-s))T
```

それぞれの特異点 $(s_1=0.5,\ s_2=1.0)$ における $(T_{11}(s))^H$ の留数行列を（２．９）式で計算すると、次のようになる。

$$R(0.5,(T_{11}(s))^H) = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.9 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (-0.3 \quad -0.9)$$

よって、

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$R(1.0,(T_{11}(s))^H) = \begin{pmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (2.4 \quad 1.2)$$

よって、

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って、

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と得られる。

ステップ3：ω_1、ω_2 は次の様に求まる。

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \ \omega_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

従って、

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

ステップ4：$F(\lambda):=\{f_{ij}\}$ は次の様に構成される。

$$f_{11} := 1.0*(2.0 - \lambda^{-2}*1.0), \qquad f_{12} := 0.66667*(1.0 - \lambda^{-2}*0.8)$$

$$f_{21} := 0.66667*(1.0 - \lambda^{-2}*0.8), \ f_{22} := 0.5*(1.0 - \lambda^{-2}*0.68)$$

すなわち、

$$F(\lambda) := \begin{pmatrix} 2.0 & 0.66667 \\ 0.66667 & 0.5 \end{pmatrix} - \lambda^{-2} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5333 \\ 0.5333 & 0.34 \end{pmatrix}$$

ステップ5：$\det F(\lambda)=0$ となるλを求めると、$\lambda_1=0.3780$, $\lambda_2=0.8375$ である。
F(0.3780)は半正定でない（例えば、固有値をもとめると -6.8807、0.0007 である）。一方、

F(0.8375) は半正定である（例えば、固有値をもとめると 0.586、-0.0023であるが計算誤差の下で半正定と看做してよい）。よって、λ_m、$F(\lambda_m)$ は

$$\lambda_m = 0.8375, \qquad F(\lambda_m) = \begin{pmatrix} 0.5744 & -0.09369 \\ -0.09369 & 0.01528 \end{pmatrix}$$

となる。

ステップ6：$\theta^t\theta = I_r$ なる θ は $R_{2,2}$ から選べるから任意の直交行列でよい。ここでは簡単のために、$\theta = I_2$ と選ぶ。

ステップ7：$\tilde{C}$、$\tilde{A}$ を次式で定める。ここで、

$$\Lambda_s = \mathrm{diag}\{0.5,\ 1.0\}$$

であるから

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} -0.194 & 0.0448 \\ -1 & -0.2388 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.5188 & -0.1003 \\ 0.3304 & 0.0295 \end{pmatrix}$$

となる。

ステップ8：（2．13）式を満たす解 $U(s;\lambda_m)$は次式のように得られる。

$$sF(\lambda_m) + \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.5744s + 0.5188 & -0.09369s - 0.1003 \\ -0.09369s + 0.3304 & 0.01528s + 0.0295 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det\{sF(\lambda_m) + \tilde{A}\} = 0.04643(s + 1.0434)$$

$$(sF(\lambda_m) + \tilde{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3291 & 2.0178 \\ 2.0178 & 12.3713 \end{pmatrix} + 1/(s+1.0434)\begin{pmatrix} 0.292 & 0.0548 \\ -9.222 & -1.7352 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}(sF(\lambda_m) + \tilde{A})^{-1}\tilde{C}^t = \begin{pmatrix} 0.0021 & -0.0654 \\ -0.0654 & 1.9983 \end{pmatrix} + 1/(s+1.0434) \begin{pmatrix} 0.0872 & 0.4909 \\ -0.3544 & -1.9959 \end{pmatrix}$$

よって、U(s) は次の様に求まる。

$$U(s) = \begin{pmatrix} 0.9979 & 0.0654 \\ 0.0654 & -0.9983 \end{pmatrix} + 1/(s+1.0434) \begin{pmatrix} -0.0872 & -0.4909 \\ 0.3544 & 1.9959 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_m = 0.8375$$

5．おわりに

H∞最適化理論やロバスト安定化理論の基本問題が $T_1 \in (H_{m,r})\infty$ と $T_2 \in (H_{m,m})\infty$ とが与えられた時、

$$\lambda_m = \inf\{\|T_1 - MT_2\|\infty \ ; \ M \in (H_{m,r})\infty\} \tag{1.1}$$

を見い出し、その下限を達成する M を求めよという問題に定式化され、それが（２．１３）式で表される補間条件を満たす内関数行列 U を見い出すことにより解決されることをのべた。そして、その解 U を与えられた問題のパラメータによって陽に求める Shaked の理論を詳細に検討し記述してきた。さらに、その理論に基づく解法の計算手順化を行った。

以下に、本理論および解法の前提（制約）条件あるいは現実の問題に適用する際に遭遇する困難についてまとめる。

①$T_1(s)$ が内外関数行列因子分解が可能であるには「$s=j\omega$ とおいた $T_1(j\omega)$ の階数が $0 \leqq \omega \leqq \infty$ において不変である」という条件が必要である。

②留数行列の階数が１であり、これからベクトル u_k が定まるためには、$T_{11}{}^H$ の１位の孤立特異点 s_k がすべて相異なる必要がある。

③ $T_1(s)$ と $T_2(s)$ は１位の特異点を共有してはならない。

④ $F(\lambda)$ の次数（サイズ）が大きくなると、$\det F(\lambda)=0$ の根 λ_r を見出すこと及びその中から $F(\lambda_r)$ を半正定とする最小の λ_m を求める計算量が増大する。

⑤有理関数行列の逆行列を求める計算過程が存在する。

なお、これらは現実問題に即して解決できる場合のあることを付言しておく。

参考文献

1)Francis, B. A., Helton, J. W. and Zames, G.,: H∞ optimal feedback controllers for linear multivariable systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-29, pp. 888-900, 1984.

2)Glover, K., : All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L∞-error bounds, Int. J. Contr., vol. 39, pp. 1115-1193, 1984.

3)Kimura, H., : Directional interpolation approach to H∞-optimization and robust stabilization , IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, pp. 1085-1093, 1987.

4)Delsarte, Ph., Genin, Y., and Kamp, Y.,: The Nevanlinna-Pick problem for matrix-valued functions, SIAM J. Appl. Math. Ann., vol. 36, pp. 47-61, 1979.

5)Shaked, U., : The explicit structure of inner matrices and its application in H∞-optimization, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-34, pp. 734-738, 1989.

6)鈴木、他：H∞制御（I）-数学的準備- p77, 1990

7)MacFarlane, A. G. J. and Karcanias, N.,: Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory, Int. J. Contr., vol. 24, pp. 33-74, 1976.

8)386-MATLAB User's Guide, 1990.

9)Kwakernaak, H.,: A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback sysytem, Int. J. Contr., vol. 44, pp. 117-156, 1986.

10)児玉、須田：システム制御のためのマトリクス理論、計測自動制御学会、1978

11)伊藤、他：線形制御系の設計理論、計測自動制御学会(1978)

12)鈴木、他：H∞制御（III）-モデルマッチング問題と性能限界-、1991

付　　録

付録1．$\mathrm{rank}(R(s_k,(T_{11})^H)) = 1$； $k=1,2,\ldots,p$ の証明

$T_{11}(s)$ はプロパーな有理関数を要素とする (r,r) -行列である。よって、$a_{ij}(s)$、$b_{ij}(s)$ $(b_{ij}(s)\neq 0)$ を多項式として (i,j) 要素は $(a_{ij}(s)/b_{ij}(s))$ と表せる。ただし、$a_{ij}(s)$ の次数は $b_{ij}(s)$ のそれ以下である。また、$a_{ij}(s)$ と $b_{ij}(s)$ は互に素であると仮定する。いま、$b_{ij}(s)$ $(i,j = 1,2,\ldots,r)$ の最小公倍多項式を $\alpha(s)$ とすれば、$\alpha_1(s)(T_{11}(s))^H$ は多項式行列になるから、適当なユニモジュラな多項式行列 $P(s)$、$Q(s)$ を用いて、次のようにスミス正準形に変換することが出来る[10, pp. 114-116]。

$$\alpha_1(s)(T_{11}(s))^H = P(s)\begin{pmatrix} \gamma_1(s) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \gamma_2(s) & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \gamma_r(s) \end{pmatrix} Q(s) \qquad (付1.1)$$

ここで、単因子$\gamma_i(s)$は恒等的に$\neq 0$, $i=1,2,.,r$である（∵特異点を除く$\forall s$で$T_{11}(s)(T_{11}(s))^H = I_r$から、$\mathrm{rank}(\alpha(s)(T_{11}(s))^H) = r$ でなければならないから）。

（付1．1）の両辺を$\alpha_1(s)$ で割り、対角要素の分母子の共通因子（もしあれば）を約分して既約とする。その結果を$\gamma_i(s)/\alpha_1(s) = n_i(s)/d_i(s)$ $(i=1,2,\ldots,r)$ とすると、（付1．1）から次式を得る。

$$(T_{11}(s))^H = P(s)\begin{pmatrix} n_1(s)/d_1(s) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & n_i(s)/d_i(s) & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & n_r(s)/d_r(s) \end{pmatrix} Q(s) \qquad (付1.2)$$

$\gamma_i(s)$ は単因子であったから、$\gamma_i(s) \mid \gamma_{i+1}(s)$ $(i=1,2,\ldots r-1)$ が成立つ。故に、

$$n_i(s) \mid n_{i+1}(s)\ ,(i=1,2,..r-1) \qquad (付1.3a)$$

$$d_{i+1}(s) \mid d_i(s)\ ,(i=1,2,..r-1) \qquad (付1.3b)$$

となる。ここで、実は $d_1(s)$ は $d_1(s) = \alpha_1(s)$ であり[10, p.116]、$(T_{11}(s))^H$ の全要素の分母の最小公倍多項式である。この根がすべて単根である（p 個在るとする）と仮定すれば、$d_1(s)$ は次の1次因子の積に分解される。

$$d_1(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_p)\ ;\ s_i\neq s_j,\ i\neq j \qquad (付1.4)$$

さて、$(T_{11}(s))^H$ のマクミラン次数δ_M は$(T_{11}(s))^H$のすべての小行列式の分母（$d_i(s)$；

i=1,2,..r）の最小公倍多項式の次数である[10, p.115]から、

$$\delta_M = p \qquad (付1.5)$$

である。$T_{1i}(s)$ は内関数であるから、$T_{1i}(s)\in RH\infty$である。ゆえに、$(T_{1i}(s))^H \bar{\in} RH\infty$ を得る。ここで、$(T_{1i}(s))^H$ が次の様に部分分数に展開される[10, pp.116-117]。

$$(T_{1i}(s))^H = H_0 + \sum_{k=1}^{p} H_k/(s - s_k) \qquad (付1.6)$$

かつ、

$$\delta_M = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{rank}(H_k) \qquad (付1.7)$$

ただし、H_0 は $(T_{1i}(\infty))^H$ の定数行列であり、H_k は $s = s_k$ における留数行列：

$$H_k := (R(s_k, (T_{1i})^H)) = [(s-s_k)(T_{1i}(s))^H]_{s=sk} \; ; \; k=1,2,\ldots,p$$

である。明らかに、$\mathrm{rank}(H_k)\geqq 1$ $(k=1,2\ldots,p)$ であるから（∵もし $\mathrm{rank}(H_k) = 0$ ならば、$H_k = 0$ となり、s_k が極として存在しないことになり矛盾する）、（付１．５）式から

$$\mathrm{rank}(H_k) = 1 \; ; \; k = 1,2\ldots,p \qquad (付1.8)$$

を得る（証終）。

付録２．$[-T_2(s)(T_{1i}(s))^H]_- = \lambda[U(s)(T_{1i}(s))^H]_- \Leftrightarrow -T_2(s_k)u_k = \lambda U(s_k)u_k$; k=1,2,,p の証明

（→の証明）：先ず、

$$-T_2(s)(T_{1i}(s))^H = [-T_2(s)(T_{1i}(s))^H]_- + [-T_2(s)(T_{1i}(s))^H]_+ \qquad (付2.1)$$

$$\lambda U(s)(T_{1i}(s))^H = \lambda[U(s)(T_{1i}(s))^H]_- + \lambda[U(s)(T_{1i}(s))^H]_+ \qquad (付2.2)$$

と書き表せる。ここで、$[\Phi(s)]_+$ および $[\Phi(s)]_-$ は$\Phi(s)$の極が複素左半平面に存在する加法部分と複素右半平面に存在する加法部分とをそれぞれ表す。

条件式から次式を得る。

$$-T_2(s)(T_{1i}(s))^H - [-T_2(s)(T_{1i}(s))^H]_+ = \lambda U(s)(T_{1i}(s))^H - \lambda[U(s)(T_{1i}(s))^H]_+$$

両辺に $(s-s_k)$ を掛け、$s \to s_k$ とすると、$Re(s_k)>0$ であるから $[*]_+$ の部分はゼロに収束し、次の結果を得る。

$$-T_2(s_k)R(s_k,(T_{1i}(s))^H) = \lambda U(s_k)R(s_k,(T_{1i}(s))^H) \ ; \ k = 1,2,\ldots p$$

（２．１０）式より、

$$[-T_2(s_k)u_k - \lambda U(s_k)u_k](v_k)^T = 0 \ ; \ k = 1,2,\ldots p$$

となる。この式が $T_2(s)$ に関係なく定まる u_k、$v_k \neq 0$、$\forall T_2(s) \in (RH_{m,r})\infty$ に対して成立つためには

$$-T_2(s_k)u_k - \lambda U(s_k)u_k = 0 \ ; \ k = 1,2,\ldots p \qquad (付2.3)$$

でなければならない（→の証明終）。

（←の証明）：条件式は（２．１０）式を用いて

$$\begin{aligned}-T_2(s_k)u_k(v_k)^T &= -T_2(s_k)R(s_k,(T_{1i})^H)\\ &= (s-s_k)\{-T_2(s)(T_{1i}(s))^H\} + o(s-s_k)\\ &= (s-s_k)[-T_2(s)(T_{1i}(s))^H]_-\\ &\quad + (s-s_k)[-T_2(s)(T_{1i}(s))^H]_+ + o(s-s_k)\end{aligned}$$

と書換えられる。ここで、δを十分小さくすると、$|s-s_k|<\delta$となる任意の s に対して、

$$-T_2(s_k)u_k(v_k)^T \fallingdotseq (s-s_k)[-T_2(s)(T_{1i}(s))^H]_- \ ; \ k = 1,2,\ldots p \qquad (付2.4)$$

となる。同様にして、$|s-s_k|<\delta$となる任意の s に対して、次式を得る。

$$\lambda U(s_k)u_k(v_k)^T \fallingdotseq (s-s_k)\lambda[U(s)(T_{1i}(s))^H]_- \ ; \ k = 1,2,\ldots p \qquad (付2.5)$$

故に、$|s - s_k| < \delta$となる任意の s に対して、

$$[-T_2(s)(T_{1i}(s))^H]_- = \lambda [U(s)(T_{1i}(s))^H]_- \;;\; k = 1,2,\ldots p \qquad (付2.6)$$

が成立つ。故に、$T_2(s)$、$(T_{1i}(s))^H$、$U(s)$ は有理関数行列の解析性により、有限個の特異点を除く複素平面で（付２．６）式が成立つことが云える（←の証明終）。

付録３．①rank(Q) = p-d および ②rank(N) = d の証明

①：（３．２１ａ）から、

$$p - d = \mathrm{rank}(I_{p-d}) = \mathrm{rank}(\Phi Q)$$

である。故に、

$$p - d \leqq \min\{\mathrm{rank}(\Phi), \mathrm{rank}(Q)\} = \min\{p-d, \mathrm{rank}(Q)\}$$

ところで、$Q \in C^{p,\,p-d}$ だから、$\mathrm{rank}(Q) \leqq p-d$ である。これから、

$p-d \leqq \mathrm{rank}(Q) \leqq p-d$

となるから、rank(Q) = p-d である。

②：複素定数行列$\Phi \in C^{p-d,\,p}$ は $\mathrm{rank}\Phi = p-d$ であるから、$\Phi n = 0$ なる方程式の $n \neq 0$ なる１次独立な p 次元ベクトル解は $p - (p-d) = d$ 本存在する[10, p68, 系]。従って、この d 本のベクトル n_i を列ベクトルとする (p,d) 行列：

$$N = [n_1, n_2, \cdots, n_d]$$

とすればよい。

付録４．Σ^{-1} の存在

Q、N の列ベクトルが一次独立でないと仮定する。例えば、ある q_i が n_j : $j = 1,2,..,d$ の一次結合で表せたとすると、$\Phi q_i = 0$ となり、$\Phi Q = I_{p-d}$ に矛盾する。逆に、ある n_i が q_j : $j = 1,2,..,p\text{-}d$ の一次結合で表せたとすると、$\Phi n_i \neq 0$ となり、$\Phi Q = 0_{p-d,\,d}$ に矛盾する。既に、$\{q_i\}_{i=1,2,\ldots,p-d}$ および $\{n_j\}_{j=1,2,\ldots,d}$ は一次独立となるから、Σの p 本の列ベクトルは互に一次独立である。よって、$\mathrm{rank}\Sigma = p$ (full rank) である。

付録5．（3．23a）及び（3．23b）の導出

先ず、次式が成立つ。

$$\Sigma^{*}F(\lambda_{m})\Sigma = \begin{pmatrix} I_{p-d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(付5.1)}$$

（3．20）式から、

$$\begin{aligned}(\Sigma^{*})^{-1}\Sigma^{*}F(\lambda_{m})\Sigma\Sigma^{-1} &= (\Phi\Sigma\Sigma^{-1})^{*}(\Phi\Sigma\Sigma^{-1}) \\ &= (\Phi[Q \quad N]\Sigma^{-1})^{*}(\Phi(Q \quad N]\Sigma^{-1}) \\ &= (\Sigma^{-1})^{*}[I_{p-d} \quad 0]^{*}[I_{p-d} \quad 0]\Sigma^{-1} \\ &= (\Sigma^{*})^{-1}\begin{pmatrix} I_{p-d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Sigma^{-1}\end{aligned}$$

となる。両辺を比較すれば（付5．1）が得られる。

さて、$\lambda=\lambda_{m}$ における（3．17）式が（3．23）式となることを示すためには両式を比較すれば

$$(sF(\lambda_{m}) + \tilde{A})^{-1} = \Sigma(P(s))^{-1}\Sigma^{*} \qquad \text{(付5.2)}$$

であることを示せばよい。すなわち、

$$\Sigma^{*}(sF(\lambda_{m}) + \tilde{A})\Sigma = P(s)$$

を示せばよい。これを導こう。

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= s\Sigma^{*}F(\lambda_{m})\Sigma + \Sigma^{*}\tilde{A}\Sigma \\ &= s\begin{pmatrix} Ip\text{-}d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q^{*} \\ N^{*} \end{pmatrix}\tilde{A}(Q \quad N) \\ &= P(s)\end{aligned}$$

よって、$\lambda=\lambda_m$ においては $U(s;\lambda_m)$ は（３．２３）式よって与えられることが証明された。

付録６．定理２の③の証明

②から $\lambda>\lambda_m$ に対しては、$U(s;\lambda)$ の極は $-(F(\lambda)^{-1/2})^*\tilde{A}F(\lambda)^{-1/2}$ の固有値である。λ を λ_m に限りなく近づけた極限では、（３．８）式から $F(\lambda_m)$ が半正定エルミート行列になるから、その d 個の固有値はゼロである。よって、$F(\lambda_m)^{-1/2}$ の d 個の固有値が∞になる。故に、$-(F(\lambda)^{-1/2})^*\tilde{A}F(\lambda)^{-1/2}$ の d 個の固有値は $\lambda\to\lambda_m$ において∞となる。

一方、①から、$U(s;\lambda_m)$ の極は (p-d) 次多項式 detP(s) のゼロ点に一致することが解っているから、$\lambda\to\lambda_m$ において、$-(F(\lambda)^{-1/2})^*\tilde{A}F(\lambda)^{-1/2}$ の固有値はそのゼロ点に一致する。

付録７．（３．２９ｂ）と（３．２９ｃ）式の証明

（３．２９ａ）式の両辺にスカラー$\Psi(s)=\det P(s)=(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{p-d})$を掛けると、次式を得る。

$$\Psi(s)P(s)^{-1}=\Psi(s)\tilde{D}+\sum_{i=1}^{p-d}\phi_i(s)\alpha_i(\beta_i)^t \qquad (付7.1)$$

ただし、$\phi_i(s)$は$\Psi(s)$から因子 $(s-z_i)$ を除いた (p-d-1) 次多項式である。左から P(s) を掛けると、

$$\Psi(s)P(s)P(s)^{-1}=\Psi(s)P(s)\tilde{D}+\sum_{i=1}^{p-d}\phi_i(s)P(s)\alpha_i(\beta_i)^t$$

となる。ここで、$s\to z_i$ $(i=1,2,\ldots p-d)$ とすると、$\phi_i(z_i)\neq0$、$P(s)P(s)^{-1}=I_p$ であるから次式を得る。

$$0_p=0_p+\phi_i(z_i)P(z_i)\alpha_i(\beta_i)^t$$

すなわち、

$$(P(z_i)\alpha_i)(\beta_i)^t=0\ ;\ i=1,2,\ldots,p-d$$

ここで、$\det(P(z_i))=0$ だから,

$$P(z_i)\alpha_i=0\ ;\ i=1,2,\ldots,p-d$$

を満たすような p 次元ベクトル$\alpha_i \neq 0$ が存在するからそれをとればよい。すなわち、

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} r_i \\ \\ d_i \end{pmatrix} \quad ; \; i = 1,2,\ldots,p\text{-}d$$

が成立つ。同様にして、（付7．1）に右から P(s) を掛けることにより、

$$\alpha_i(\beta_i)^t P(zi) = 0 \; ; \; i = 1,2,\ldots,p\text{-}d$$

を得るから、$(\beta_i)^t = ((y_i),\ (g_i)^t)$; $i = 1,2,\ldots,p\text{-}d$ である。

付録8．（3．30）式の証明

s を適当に十分大きくすると、（3．23b）式のブロック行列

$$P_{11}(s) = sI_{p-d} + Q^*\tilde{A}Q$$

は $\det(P_{11}(s)) \neq 0$ となる。故に、P(s) の逆行列は次の様に求まる[10, pp.41-42]。

$$P(s)^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p-d} & -P_{11}{}^{-1}P_{12} \\ \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11}{}^{-1} & 0 \\ \\ 0 & (P_{22} - P_{21}P_{11}{}^{-1}P_{12})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p-d} & 0 \\ \\ -P_{21}P_{11}{}^{-1} & I_d \end{pmatrix}$$

ただし、

$$P_{11} := sI_{p-d} + Q^*\tilde{A}Q, \quad P_{12} := Q^*\tilde{A}N, \quad P_{21} := N^*\tilde{A}Q, \quad P_{22} := N^*\tilde{A}N$$

この式で $s \to \infty$ とすると、$P_{11}(s)^{-1} \to 0$ と（3．29a）式から次式を得る。

$$\tilde{D} = \lim P(s)^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p-d} & 0 \\ \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \\ 0 & P_{22}{}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p-d} & 0 \\ \\ 0 & I_d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0_{p-d} & 0 \\ \\ 0 & (N^*\tilde{A}N)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(0_{p-d},\ (N^*\tilde{A}N)^{-1})$$

となり、（3．30）式が得られた。

付録9．（3．27）式の確認

先ず、$U(s;\lambda_m)$ に（3．29a）式を代入すると次式となる。

$$U(s;\lambda_m) = [I_m - \tilde{C}\Sigma\{\tilde{D} + \sum_{i=1}^{p-d} \alpha_i(\beta_i)^t/(s-z_i)\}\Sigma^*\tilde{C}^*]\theta$$

$$= [I_m - \tilde{C}\Sigma\tilde{D}\Sigma^*\tilde{C}^*]\theta - \tilde{C}\Sigma\{\sum_{i=1}^{p-d} \alpha_i(\beta_i)^t/(s-z_i)\}\Sigma^*\tilde{C}^*\theta$$

ここで、 $\Sigma=[Q\ N]$ と $\tilde{D}$ に（3．30）式を代入すると、上式は次の様になる。

$$= [Im - \tilde{C}N(N^*\tilde{A}N)^{-1}N^*\tilde{C}^*]\theta - \tilde{C}\Sigma\{\sum_{i=1}^{p-d} \alpha_i(\beta_i)^t/(s-z_i)\}\Sigma^*\tilde{C}^*\theta$$

（3．27d）式から

$$= D_2 - \tilde{C}\Sigma\{\sum_{i=1}^{p-d} \alpha_i(\beta_i)^t/(s-z_i)\}\Sigma^*\tilde{C}^*\theta \qquad (付9.1)$$

を得る。

さて、システム$S(A_2,B_2,C_2,D_2)$の伝達関数行列 $G(s)$ は次式である。

$$G(s) = D_2 + C_2(sI_{p-d} - A_2)^{-1}B_2$$

$$= D_2 + \tilde{C}[QR + ND] \left(sI_{p-d} - \begin{pmatrix} z_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & z_{p-d} \end{pmatrix} \right)^{-1} [YQ^* + GN^*]\tilde{C}^*\theta$$

$$= D_2 + \tilde{C}[Q \quad N]\begin{pmatrix} R \\ \\ D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/(s-z_1) & & \\ & \cdot & \\ & & 1/(s-z_{p-d}) \end{pmatrix}[Y \quad G]\begin{pmatrix} Q^* \\ \\ N^* \end{pmatrix}\tilde{C}\theta$$

$$= D_2 + \tilde{C}\Sigma[\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots \alpha_{p-d}]\begin{pmatrix} 1/(s-z_1) & & \\ & \cdot & \\ & & 1/(s-z_{p-d}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\beta_1)^t \\ \cdot \\ (\beta_{p-d})_t \end{pmatrix}\Sigma^*\tilde{C}\theta$$

$$= D_2 + \tilde{C}\Sigma(\sum_{i=1}^{p-d}\alpha_i(\beta_i)^t/(s-z_i))\Sigma^*\tilde{C}\theta \qquad (付9.2)$$

よって、（付９．１）式と比較すれば、システム$S(A_2,B_2,C_2,D_2)$の伝達関数行列 $G(s)$と$U(s;\lambda_m)$ が等しいことが解る。

付録１０．（３．３１）式の証明

（３．１８b）式から

$$\tilde{A} + \tilde{A}^* = \{\tilde{C}^*\theta\tilde{U} - F(\lambda)\Lambda_s\} + \{U^*\theta^t\tilde{C} - \Lambda_s^*F^*(\lambda)\}$$

$$= \{\tilde{C}^*\theta\tilde{U} + U^*\theta^t\tilde{C}\} - F(\lambda)\Lambda_s - \Lambda_s^*F^*(\lambda)$$

ここで、$\Lambda_s^*=\bar{\Lambda}_s$（$\because \Lambda_s$ が対角複素行列だから）、$F(\lambda) = F^*(\lambda)$（$\because F(\lambda)$が（３．８）式からエルミート行列）であることに注意すれば、

$$= \{\tilde{C}^*\theta\tilde{U} + U^*\theta^t\tilde{C}\} - F(\lambda)\Lambda_s - \bar{\Lambda}_sF(\lambda) \qquad (付10.1)$$

を得る。

一方、（３．１８a）式から

$$\tilde{C}^*\tilde{C} = (\tilde{U}^*\theta^t - \lambda^{-1}W^*)(\theta\tilde{U} - \lambda^{-1}W)$$

$$= \tilde{U}^*\tilde{U} + \lambda^{-2}W^*W - \lambda^{-1}W^*\theta\tilde{U} - \lambda^{-1}\tilde{U}^*\theta^tW$$

である。一方、（３．１０a）式と（３．１８a）式から

$$\lambda^{-2}W^*W = \tilde{U}^*\tilde{U} - F(\lambda)\Lambda_s - \bar{\Lambda}_sF(\lambda)$$

$$\lambda^{-1}W = \theta\tilde{U} - \tilde{C}$$

である。これを代入すれば、

$$\tilde{C}^*\tilde{C} = \tilde{U}^*\tilde{U} + \{\tilde{U}^*\tilde{U} - F(\lambda)\Lambda_s - \bar{\Lambda}_s F(\lambda)\} - (\tilde{U}^*\theta^t - C^*)\theta\tilde{U} - \tilde{U}^*\theta^t(\theta\tilde{U} - \tilde{C})$$

$$= \{\tilde{C}^*\theta\tilde{U} + U^*\theta^t\tilde{C}\} - F(\lambda)\Lambda_s - \bar{\Lambda}_s F(\lambda) \qquad (付10.2)$$

を得る。

付録11：$T_1(s)$ のシステム行列 P(s) を用いたゼロ出力-入力ベクトル u_k の計算法

```
%            zrinptdr.m file       April 2, 1991                      %
%       Obtaining zero-input-direction vector of T1(s)               %
%  Representation on state space of T1(s) using tfm2ss.m             %
  N11 = [10 -6 -4];
      N21 = [0 -3  3];
          N12 = [0 -3 -3];
              N22 = [10  6 -4];
  num = [N11
         N21
         N12
         N22];
  den = [10 15 5];
  [a,b,c d] = tfm2ss(num,den,2,2);
% Invariant zeros(MacFarlane) or Transmission zeros(Matlab) %
%       of state space system (a,b,c,d) obtained above       %
  tz = tzero(a,b,c,d);
  tz = tz';
%                                                            %
% System matrix P(s) of T1(s) by Macfarlane's definition ;   %
%                    P(s):= [sI+a b;c d]                     %
%       P(s1) = P(0.5) and P(s2) = P(1.0) are defined        %
% The null spaces of the matrices ps1 and ps2 defined above %
  tz1=tz(3);
     tz2=tz(4);
  ps1=[tz1*eye(4)-a -b; c d];
     ps2=[tz2*eye(4)-a -b; c d];
  null1 = null(ps1)
        null2 = null(ps2)
%                    Zero-input-direction: di                 %
  d1 = null1(5:6,1)
  d2 = null2(5:6,1)
```