

JAERI - M
91-105

線形システムに対する H_∞ 状態推定器の設計
— 周波数領域における設計法 —

1991年7月

鈴木 勝男・島崎 潤也・篠原 慶邦

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1991

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 株式会社原子力資料サービス

線形システムに対する H^∞ 状態推定器の設計

— 周波数領域における設計法 —

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

鈴木 勝男・島崎 潤也・篠原 慶邦

(1991年6月5日受理)

推定誤差のパワスペクトル行列の H^∞ ノルムを最小化する状態推定器の設計法を述べる。ここでは最適推定器の設計を周波数領域における H^∞ 最適制御標準問題に定式化し、推定器の伝達関数を見出す設計手順の形で述べられる。また、簡単な数値例に対して最適状態推定器を設計し、それが従来の L^2 -推定器より有効であることを数値シミュレーションにより示した。

Design of H^∞ -filter to Estimate a Linear System State
in the Frequency Domain

Katsuo SUZUKI, Junya SHIMAZAKI and Yoshikuni SHINOHARA

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received June 5, 1991)

A design procedure of a state estimator is described which minimizes the H^∞ -norm of the estimation error power spectrum matrix. This achieves the optimal estimator in the frequency domain by finding the estimator transfer function matrix that leads to an equalizing filter. Numerical simulations are performed to demonstrate a clear advantage of the H^∞ -estimate over the conventional l^2 -estimate.

Keywords: H^∞ -optimization Problem, H^∞ -norm Minimization Estimator,
Estimation Error Power Spectrum, l^2 -norm Minimization Estimator

目 次

1. はじめに	1
2. 問題の定式化	2
3. H^∞ 最適推定器の設計理論	6
4. 設計手順と数値例	11
4.1 設計手順	11
4.2 数 値 例	13
5. おわりに	16
参考文献	17
付 録	35

Contents

1. Introduction	1
2. Problem Formulation	2
3. Design Theory of H^∞ -norm Minimized Estimator	6
4. Design Procedure and Numerical Example	11
4.1 Design Procedure	11
4.2 Numerical Example	13
5. Conclusions	16
References	17
Appendices	35

1. はじめに

標準 H_∞ -最適制御問題[8]はある特殊な形のリカッチ方程式の解定数行列をフィードバック行列に用いることによって解くことができる。特に、システム状態が完全観測可能である場合 (unconstrained input regulation) には、定数フィードバック行列によって、最適制御問題が解けることが知られた。この結果を示した DGKF 論文[4] が発表されてから、 H_∞ 制御理論に基づく制御系設計の試みは次第に広まりつつある。

しかし、 H_∞ 制御理論の推定問題等への応用例はあまり見当たらない。この分野への最初の応用例としては最小分散等価フィルタとなる適当な重み行列を見出す問題として定式化されたものがある[1,2]。また、ある測定ノイズ下での地震波信号は H_∞ ノルム最小の意味で信号分離されると、 L^2 -最適分離されるよりも良い結果が得られたとの報告がある[3]。

本報告書は DGKF 論文の結果 (H_∞ 最適制御器は LQG 最適レギュレータと類似の構造をもち、その「推定器部分」も標準的な観測器の構造になっている) を応用した U. Shaked の状態推定フィルタの設計理論[5]を検討し、周波数領域における設計手順の形に整備取りまとめたものである。ここでは、推定誤差のパワスペクトル行列の H_∞ ノルムを最小化する推定器の設計問題を H_∞ 最適制御標準問題に定式化して扱う。この設計法は 文献[1,2] と異なり、適当に定めなければならない重み行列を用いることなく、問題に直接与えられたパラメータのみを用いて最適フィルタを設計出来る点が優れていると云える。

第2章では、状態推定問題を H_∞ 最適制御標準問題として定式化する。第3章では、周波数領域での設計理論を詳しく述べる。第4章ではその理論を設計手順に簡略化してまとめるとともに、この手順に従って状態推定器を設計する簡単な数値例を与える。この数値計算には MATLAB[6] を用いる。

2. 問題の定式化

本章では、 H^∞ ノルム最小の意味で、システム状態量の最適推定問題を H^∞ 制御標準問題に定式化する。システム $S(A, B, C)$ が与えられたとき、出力 y の測定値 z は雑音 n を伴って測定されるものとする。ここで、 (C, A) は可検出、 (A, B) は可安定とする。

$$\dot{x} = Ax + B\omega \quad (2.1a)$$

$$y = Cx \quad (2.1b)$$

$$z = y + n \quad (2.1c)$$

ただし、

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, \omega \in \mathbb{R}^q, n \in \mathbb{R}^m; A \in \mathbb{R}_{n, n}, B \in \mathbb{R}_{n, q}, C \in \mathbb{R}_{m, n}.$$

また、雑音 n に関してはベクトル要素 n_1, n_2, \dots, n_m は互に無相関であり、 n_i ; $i = 1, 2, \dots, m$ は単位強度 ($\sigma_i^2 = 1$) をもつ平均値ゼロ ($\mu_i = 0$) の定常白色雑音であると仮定する。雑音 ω も同様とする。従って、共分散行列は次の様になる (付録1 参照)。

$$\text{cov}(\omega(t), \omega(\tau)) = \delta(t-\tau)I \quad ; \forall t, \forall \tau \quad (2.2a)$$

$$\text{cov}(n(t), n(\tau)) = \delta(t-\tau)I \quad ; \forall t, \forall \tau \quad (2.2b)$$

この時、測定値 z のフィルタ H の通過出力と状態 x の線形関数 Kx (与えられた) との差 e をある意味で最小化することによって推定する問題を考える。これは次の様なブロック線図で表せる。ただし、 $K \in \mathbb{R}_{1, n}$ 、 $H(s) \in (RH_{1, n})^\infty$ とする。

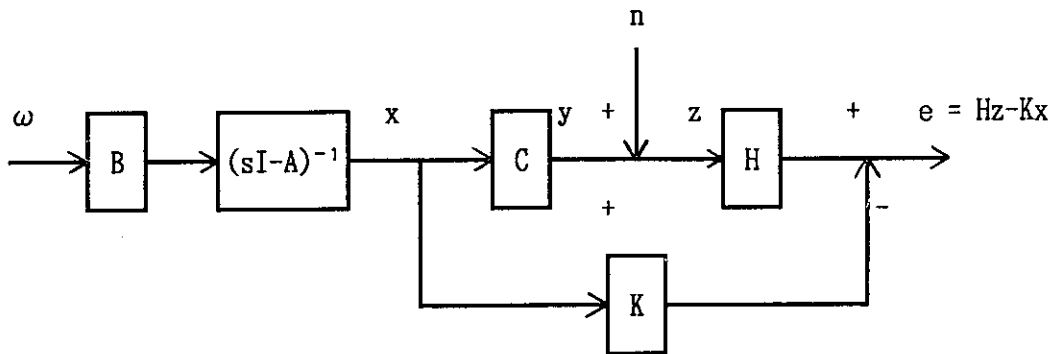


Fig. 2.1 Block diagram of the state estimation problem

この等価フィルタ H のひとつ工学的応用としては、雑音 ω 、 n の影響を最小化したという意味でフィルタ H の出力 Hx と Kx とを等しいと看做し、システム出力の測定値 z から制御入力 u を次式で定めて状態フィードバック制御系を構成することが挙げられる。

$$u = Kx \approx -Hz \tag{2.3}$$

さて、Fig. 2. 1 は次の様な H^∞ 制御標準ブロック線図[8]に書換えることが出来る。

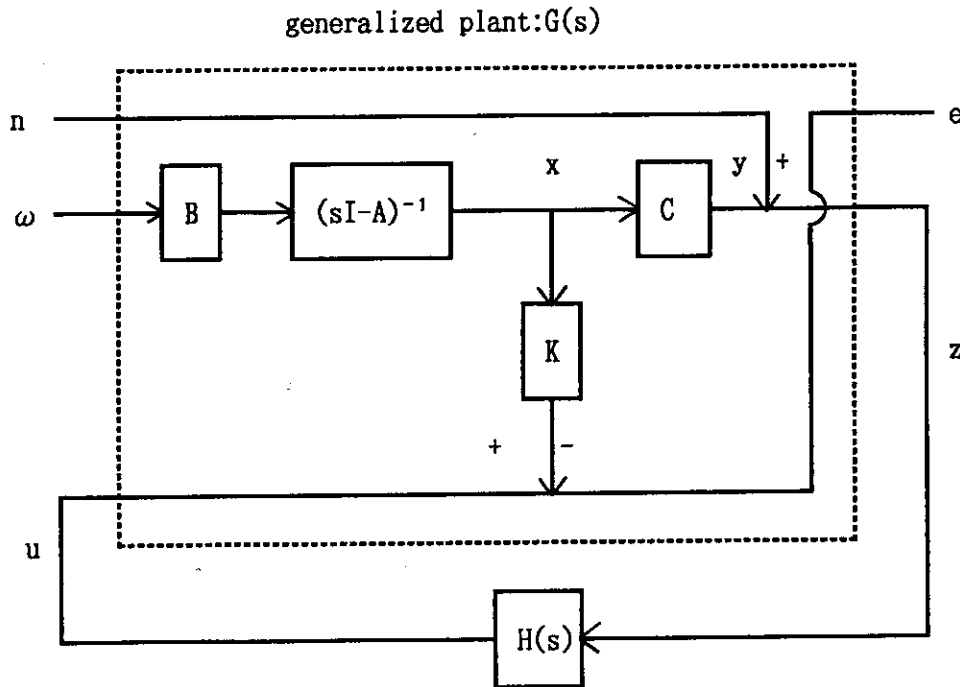


Fig. 2.2 Standard block diagram of H^∞ -control theory

よって、一般化プラントの伝達関数 $G(s)$ は外乱入力ベクトルを $(\omega, n)^T$ 、入力を u とし、出力を y 、制御量を e とするとき次の様になる。

$$G(s) := \begin{pmatrix} G_k(s) & 0 & \vdots & -1 \\ \hline & & & \\ G_c(s) & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4a}$$

ただし、

$$G_c(s) := C(sI-A)^{-1}B; (m, q)\text{-有理関数行列} \tag{2.4b}$$

$$G_k(s) := K(sI-A)^{-1}B; (l, q)\text{-有理関数行列} \tag{2.4c}$$

$$u := H(s)z \quad (2.4d)$$

従って、状態推定問題は H_{∞} 制御標準問題： $H(s)$ が $G(s)$ を安定化するという条件の下で、外乱入力ベクトル $(\omega, n)^T$ から制御量（推定誤差） e までの伝達関数行列 $T(s)$ の H_{∞} ノルムを最小化する $H(s)$ を見出す問題となる。この伝達関数行列は $H(s)$ の1次分数変換として次のように具体的に求まる[8-p.5]。

$$T(s) = [G_{11}(s) + G_{12}(s)K(s)(I - G_{22}(s)K(s))^{-1}G_{21}(s)]$$

(2.4a)式から

$$= [(G_k(s) - H(s)G_c(s)) \quad -H(s)] \quad (2.5)$$

を得る。

さて、測定信号 z が定常であるという仮定の下では、 e のパワスペクトル密度 $\Phi_{ee}(j\omega)$ は次式で与えられる（付録2参照）。

$$\Phi_{ee}(j\omega) = T(j\omega)T^*(j\omega) \quad (2.6)$$

一方、 $T(s) \in RH_{\infty}$ であるから、 $\|T\|_{\infty}$ は最大値の定理 (maximum modulus theorem) から

$$\begin{aligned} \|T\|_{\infty} &:= \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max}(\|T(j\omega)\|) \\ &= T(j\omega) \text{ の最大特異値の上限 } (\omega \in R) \\ &= T(j\omega)T^*(j\omega) \text{ の最大固有値の平方根の上限 } (\omega \in R) \\ &= \Phi_{ee}(j\omega) \text{ の最大固有値の平方根 } (\omega \in R) \end{aligned} \quad (2.7)$$

の関係が得られる（例えば、[7]）。よって、 $\|T\|_{\infty}$ を最小化することは誤差のパワスペクトル密度 $\Phi_{ee}(j\omega)$ の最大固有値を最小化することを意味する。

（注：これに対応する L^2 -ノルム最小化問題は標準カルマンフィルタ問題であり、次のスカラー関数

$$J[H(s)] = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[\Phi_{ee}(j\omega)] d\omega \quad (2.8)$$

を最小化する $H(s)$ を求める問題である。 $\text{trace}[\Phi_{..}(j\omega)]$ が (2. 6) 式から行列 $T(j\omega)$ の要素の絶対値の2乗 ($|t_{ij}(j\omega)|^2 = t_{ij}(j\omega)t_{ij}(j\omega)^*$) の総和 $S(j\omega)$ に等しい。すなわち、

$$\text{trace}[\Phi_{..}(j\omega)] = \sum_{i,j} |t_{ij}(j\omega)|^2 = \sum_{i,j} t_{ij}(j\omega)t_{ij}(j\omega)^*$$

この右辺は行列 $T(j\omega)$ のノルムと看做せるから、 l^2 -ノルム最小化のカルマンフィルタ問題とはこのノルムの ω に関する積分を最小化するように Fig. 2. 1 の等価フィルタ H を定めていることになる。))

3. H_∞ 最適推定器の設計理論

— 周波数領域における —

本章では、(2.5)式で表される伝達関数行列 $T(s)$ の H_∞ ノルムを最小化する Fig. 2.2 の制御器 $H(s)$ に関する周波数領域での設計理論を述べる。

まず、(2.5)式から次式を導く。

$$\begin{aligned} T(s)T(s)^H &= [(G_k(s)-H(s)G_c(s)) \quad -H(s)][(G_k(s)-H(s)G_c(s)) \quad -H(s)]^H \\ &= G_k G_k^H - G_k G_c^H H^H - H G_c G_k^H + H(\Delta \Delta^H)H^H \end{aligned} \quad (3.1a)$$

ただし、 $\Omega(s)^H := \Omega(-s)^T$ (Hermitian paracojugate) を表わす。また、

$$\Delta \Delta^H := I_m + G_c G_c^H \quad (3.1b)$$

なお、 $\Delta \Delta^H$ は $\Delta(j\omega)\Delta(j\omega)^H$ が測定信号 z のパワースペクトル密度 $\Phi_{zz}(j\omega)$ に等しいという物理的意味を有している(付録3参照)。

さて、(3.1b)の右辺は実有理関数体上のプロパーな (m, m) -正方行列であるから、可逆であることは明らかである[10-p.77]。また、それはパラエルミートである。故に、右辺はスペクトル分解を有するから(10-p.221の定理8.7あるいは7-pp.66-68)、 $\Delta(s)$ は (m, m) -有理関数正方行列の右スペクトル因子($\in (RH_{m, m})_\infty$)となるから、

$$\Delta, \Delta^{-1} \in (RH_{m, m})_\infty$$

である。この事実を用いれば、(3.1a)式は次式の様に平方化表現される。

$$\begin{aligned} T(s)T(s)^H &= [H\Delta - G_k G_c^H (\Delta^H)^{-1}][\Delta^H H^H - \Delta^{-1} G_c G_k^H] \\ &\quad - G_k G_c^H (\Delta^H)^{-1} \Delta^{-1} G_c G_k^H + G_k G_k^H \\ &= [H\Delta - G_k G_c^H (\Delta^H)^{-1}][\Delta^H H^H - \Delta^{-1} G_c G_k^H] \\ &\quad + G_k (I_q - G_c^H (\Delta^H)^{-1} \Delta^{-1} G_c) G_k^H \end{aligned}$$

すなわち、

$$T(s)T(s)^H = [H\Delta - G_k G_c^H (\Delta^H)^{-1}] [\Delta^H H^H - \Delta^{-1} G_c G_k^H] + \Phi_k(s) \quad (3.2a)$$

ただし、

$$\Phi_k(s) := G_k (I_q + G_c^H G_c)^{-1} G_k^H \quad (3.2b)$$

を得る（付録4参照）。ここで、 $\Phi_k(s)$ の項にはフィルタ $H(s)$ が含まれていないことに注意しておく。

さて、次の2つのスペクトル分解を得ておく（付録5参照）。第1のものは $1 \geq q$ と仮定して、 (q, q) -正方行列 $G_k^H G_k$ （ただし、 G_k は $(1, q)$ -行列である）の左スペクトル因子 Δ_k である。 Δ_k は (q, q) -正方行列である。 $1=q$ の場合は $\Delta_k = G_k$ でよい。

$$\Delta_k^H \Delta_k = G_k^H G_k \quad ; \quad \Delta_k, \Delta_k^{-1} \in (RH_{q, q})_\infty \quad (3.3a)$$

第2ものは次のスペクトル右分解因子 L_h である。

$$L_h L_h^H = h^2 [I_1 - G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H] \quad ; \quad L_h, L_h^{-1} \in (RH_{1, 1})_\infty \quad (3.3b)$$

ここで、 L_h は $(1, 1)$ -正方行列であり、 h は任意の正数である。

(3.3a)と(3.3b)式から、 $L_h L_h^H$ の $(1-q)$ 個の固有値は h^2 であり、他の q 個はゼロであることが解る（付録6参照）。そこで、 $(1, 1)$ -行列 Z_h を次のように定義する。

$$Z_h := TT^H + L_h L_h^H \quad (3.4)$$

$L_h(s)L_h^H(s)$ が半正定行列であることは既に付録6で示したから、任意の ω に対して、 $T(j\omega)T^H(j\omega)$ は半正定エルミート行列となる。また、エルミート行列に半正定エルミート行列を加えると元のエルミート行列の固有値は一様に増加するという事実[10-pp.272-273]が知られているから、 $\| \cdot \|_\infty$ に関して次の不等式が導ける（付録7参照）。

$$\| TT^H \|_\infty \leq \| Z_h \|_\infty \leq \| TT^H \|_\infty + h^2 \quad ; \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad (3.5a)$$

この式は任意の正数 h^2 で成立つことを意味するから

$$\| Z_h \|_\infty = \| TT^H \|_\infty \quad (3.5b)$$

とならなければならない。従って、 $\| TT^H \|_\infty$ を最小化することと $\| Z_h \|_\infty$ を最小化することとは同じである。

いま、任意の実数 h に対して、 Z_h の H_∞ ノルムを最小化する解が H であると仮定する

と、この H に対して Z_h は

$$Z_h(s) = h^2 I_1 \quad (3.6)$$

の形になることが知られている[11]。よって、(3.5b)式から $\|TT^H\|_\infty = h$ となるから、 $\|TT^H\|_\infty$ を最小化するには h の最小値 h_m を見出せばよいことになる。

(3.4)と(3.6)式からこの H は次式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} TT^H &= Z_h(s) - L_h L_h^H \\ &= h^2 I_1 - h^2 [I_1 - G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H] \\ &= h^2 G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.2a)式において、

$$G_k \Delta_2 U = H \Delta - G_k G_c^H (\Delta^H)^{-1} \quad (3.8a)$$

と分解出来ると仮定する。ただし、 $\Delta_2(s)$ は (q, q) -正方行列、 $U(s)$ は (q, m) の内関数型 (all-pass type) の行列である。すなわち、

$$UU^H = I_q \quad (3.9)$$

もし、(3.8a)式の Δ_2 と U が求めれば、 H は次の様に求めることが出来る。

$$H = G_k (G_c^H (\Delta^H)^{-1} + \Delta_2 U) \Delta^{-1} \quad (3.8b)$$

よって、問題は(3.8)式を満たす Δ_2 、 U をどの様に求めるかである (注: この式で内関数型 $U(s)$ は $G_c^H (\Delta^H)^{-1}$ の複素右半平面に存在する極 (noncausality poles) をキャンセルする役割を果す)。

まず、 Δ_2 を定めよう。(3.2a)と(3.8a)式及び(3.7)式から $\Delta_2(s)$ は次の様に行列のスペクトル分解因子であることが解る。

$$h^2 G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H = G_k \Delta_2 U (G_k \Delta_2 U)^H + G_k (I_q + G_c^H G_c)^{-1} G_k^H$$

故に、

$$\Delta_2 \Delta_2^H = h^2 \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} - (I_q + G_c^H G_c)^{-1} \quad (3.10)$$

この式は任意に定めた h に対して、 Δ_2 が右辺の右スペクトル因子として求まることを意味する。

次に、残る $U(s)$ を定めよう。いま、 $\tilde{\Delta}$ を次の様に定義する（付録8参照）。

$$\tilde{\Delta} \tilde{\Delta}^H := \Delta \Delta^H \quad (3.11)$$

ここで、 $\tilde{\Delta}$ のゼロ点はすべて右半平面に存在し、極はすべて左半平面に存在するように定める。 $\tilde{\Delta}$ の分子と Δ のそれとは互に素(coprime)となる（ $\because \Delta^{-1} \in (RH_{m,m})^\infty$ であるから、 Δ のゼロ点は全て左半平面に存在していなければならないことから明らかである）。

この式から $(\Delta^{-1} \tilde{\Delta})(\Delta^{-1} \tilde{\Delta})^H = I_m$ となる。すなわち、 $\Delta^{-1} \tilde{\Delta}$ は all-pass-type (内関数型) の実有理関数行列であることが解る。そこで、 $U_1(s)$ を内関数行列として、 $U(s)$ を次式の様定義しよう（これが (3.9) 式を満たすことは直ちに確かめられる）。

$$U(s) := U_1 \tilde{\Delta}^H (\Delta^H)^{-1} \quad (3.12)$$

$\tilde{\Delta}^H$ 、 $(\Delta^H)^{-1}$ は既知であるから、内関数 $U_1(s)$ が求まれば $U(s)$ が定まったことになる。次に、この U_1 はどのような条件を満たすように定めなければならないかを検討しよう。

(3.8) 式に (3.12) 式を代入すると、 U_1 は次式を満たすことが必要である。

$$H \Delta \Delta^H - G_c G_c^H = G_k \Delta_2 U_1 \tilde{\Delta}^H \quad (3.13)$$

いま、 $I_m + G_c G_c^H$ の右半平面に存在する相異なるゼロ点を $z_i; i=1, 2, \dots, p$ とする。 z_i に対応するゼロ出力入力方向 (zero-output-input direction) の d 次元ベクトルを $d_i; i=1, 2, \dots, p$ とする。ここで、 $G_k(z_i) \neq 0; i=1, 2, \dots, p$ と仮定すると、(3.1b) 式から次式を得る（付録9参照）。

$$-G_c(z_i)^H d_i = \Delta_2(z_i) U_1(z_i) \tilde{\Delta}(z_i)^H d_i; i = 1, 2, \dots, p \quad (3.14)$$

Δ_2 はスペクトル因子であり、 Δ_2^{-1} が存在するから次式が定義できる。

$$u_i := \tilde{\Delta}(z_i)^H d_i; i = 1, 2, \dots, p \quad (3.15a)$$

$$w_i := -\Delta_2(z_i)^{-1} G_c(z_i)^H d_i; i = 1, 2, \dots, p \quad (3.15b)$$

これを用いれば、 $U_1(s)$ は次式を満たさなければならない。

$$U_1(z_i) u_i = w_i; i = 1, 2, \dots, p \quad (3.16)$$

これが内関数行列 $U_1(s)$ が満たすべき条件式である。(3.16)式は文献[12]の $\lambda=1$ の特別な場合の H^∞ 方位補間問題となっているから、 $U_1(s)$ は w_1, d_1, z_1 を用いて陽に解くことが出来る。

従って、 U_1 の存在する必要条件が文献[12]の補題2の行列 $F(\lambda)$ が半正定であることから、 $\det F(1)=0$ とする h_m を求め(このクリティカルな値 h_m が h の最小値である)、それに対応する $U_{1m}(s)$ をもとめればよい。この U_{1m} を用いて(3.8b)式から最適推定器 H_m が定まり、この H_m によって TT^H の H^∞ ノルムが最小となるのである。以上を次のようにまとめて述べる事が出来る。

定理1: (2.6)式の誤差のスペクトル密度 $\Phi_{ee}(j\omega)$ の H^∞ ノルムを最小化する最適推定器 $H_o(s)$ は次の様に与えられる。

$\det F(1) = 0$ とする h_m^2 の値に対して求めた方位補間問題の解 $U_{1m}(s)$ と(3.12)式とを用いて、(3.8b)式から $H_o(s)$ が求める。

$$H_o(s) = H_{o1} + H_{o2} \quad (3.17)$$

とする。ここで、

$$H_{o1} := J_1 \Delta^{-1} \quad (3.17a)$$

$$H_{o2} := J_2 \Delta^{-1} \quad (3.17b)$$

ただし、

$$J_1 := [G_k G_o^H (\Delta^H)^{-1}]_+$$

$$J_2 := [G_k \Delta_z U]_+$$

ここで、 $[\Phi(s)]_+$ は RH^∞ に属する $\Phi(s)$ の加法的要素(causal part)を取り出す演算子である。

最後に、 H_{o1} は(2.8)式の J の l^2 -ノルムを最小化する問題の正確な解であり、カルマンフィルタの伝達関数行列であることを注意しておく[5]。

4. 設計手順と数値例

4. 1 設計手順

本節では MATLAB を利用することを念頭において、3章の設計理論を設計手順の形に実現して述べる[13]。

ステップ1: $I_m + G_c G_c^H$ の右スペクトル分解を求める。

$$\Delta \Delta^H := I_m + G_c G_c^H \quad ; \quad \Delta(s), \Delta(s)^{-1} \in (RH_{m,m})_\infty \quad (4.1)$$

ステップ2: ゼロ点がすべて右半平面に存在し、極が左半平面に存在するように $\tilde{\Delta}$ を次式で定める。

$$\tilde{\Delta} \tilde{\Delta}^H := \Delta \Delta^H \quad (4.2)$$

ステップ3: $G_k^H G_k$ の左スペクトル分解因子 Δ_k を求める。

$$\Delta_k^H \Delta_k = G_k^H G_k \quad ; \quad \Delta_k, \Delta_k^{-1} \in RH_\infty \quad (4.3)$$

ステップ4: 正数 h^2 を適当に設定し、次のスペクトル分解を実行する (h をパラメータとしてスペクトル因子 $\Delta_2(s;h)$ を求める)。

$$\Delta_2(s;h) \Delta_2^H(s;h) = h^2 \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} - (I_q + G_c^H G_c)^{-1} \quad (4.4)$$

このために、 $\Delta_c^H \Delta_c := I_q + G_c^H G_c$ の右スペクトル因子 Δ_c を初めに求めておく。これを用いて、(4.4) 式を MATLAB の M ファイル(sf1.m)を用いてスペクトル分解が出来る次の形に変形するである

$$\Delta_2(s;h) \Delta_2^H(s;h) = h^2 \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} - \Delta_c^{-1} (\Delta_c^{-1})^H \quad (4.4a)$$

ステップ5: $\Delta \Delta^H = I_m + G_c G_c^H$ の状態空間表現 $S(A, B, C, D)$ を求める。ここで、 $A \in R_{n,n}$, $B \in R_{n,d}$, $C \in R_{d,n}$, $D \in R_{d,d}$ である。この状態空間表現のシステム行列 $P(s)$ は次のような $(n+d, n+d)$ -行列である。

$$P(s) := \begin{pmatrix} sI_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (4.5a)$$

この $P(s)$ ゼロ点 $z_i; i=1, 2, \dots, p$ を MATLAB の M ファイル (tzero.m) を用いて求める。ゼロ点 $z_i; i=1, 2, \dots, p$ に対して、次式を満たす n 次元ベクトル r_i および d 次元ベクトル d_i を求める (これは $P(z_i)$ の null space の 1 次独立なベクトルとして求まる)。

$$P(z_i) \begin{pmatrix} r_i \\ d_i \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.5b)$$

ステップ 6 : この $d_i; i=1, 2, \dots, p$ を用いて、(3.15a) と (3.15b) 式から

$$u_i = \tilde{\Delta}(z_i) H d_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.6a)$$

$$w_i = -\Delta_2(z_i; h)^{-1} G_c(z_i) H d_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (4.6b)$$

を計算する。さらに、行列 \tilde{U}, W を次の様に定める

$$\tilde{U} := (u_1, u_2, \dots, u_p) \quad (4.6c)$$

$$W := (w_1, w_2, \dots, w_p) \quad (4.6d)$$

ステップ 7 : 文献[12-p.19]に基づき、 $F(1) := \{f_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,p}$ を構成する。

$$\text{ただし、} f_{ij} := (z_i + z_j)^{-1} (u_i^x u_j - w_i^x w_j)$$

ここで、行列 $F(1)$ が正定 (負定) ならば、ステップ 4 に戻り、 h^2 を減小 (増大) させて再び $F(1)$ を繰返し計算し、半正定となる迄、ステップ 4-7 を繰返す。半正定となるときの h が許容される最小の値 h_m^2 である (この h_m で $\det(F(1, h_m)) = 0$ となる)。

ステップ 8 : $\theta^t \theta = I_r$ なる実行列 $\theta \in R_{m,r}$ を適当に選ぶ[12]。

ステップ 9 : \tilde{C}, \tilde{A} を次式で定める[12]。

$$\tilde{C} := \theta \tilde{U} - W$$

$$\tilde{A} := \tilde{C}^* \theta \tilde{U} - F(1) \Lambda_z$$

ただし、

$$\Lambda_z = \text{diag}\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$$

ステップ10：行列 $U_1(s;1)$ を次式のように求める[12]。

$$U_1(s;1) := [I_m - \tilde{C}(sF(1) + \tilde{A})^{-1}\tilde{C}^*] \theta \quad (4.7)$$

ステップ11： $U(s)$ は次のように求める。

$$U(s) := U_1(s;1) \tilde{\Delta}^H (\Delta^H)^{-1} \quad (4.8)$$

ステップ12：最適推定器 $H_o(s)$ は (3. 8 a) 式から、

$$H_o(s) = J_1 \Delta^{-1} + J_2 \Delta^{-1} \quad (4.9)$$

ただし、

$$J_1 := [G_k G_c^H (\Delta^H)^{-1}]_+$$

$$J_2 := [G_k \Delta_2(s; h_m) U]_+$$

4. 2 数値例

本節では、上の設計手順に従い、MATLAB を用いて次に示す数値例の H_∞ 最適推定器を設計する。

(数値例)：Fig. 2. 1 の A、B、C を次のように与える。

$$A = \text{diag}(-1, -2, -3), \quad B = (25, 25, -25)^T, \quad C = (-1, 2 \ 1)$$

このとき、 $K=(1, 1, 1)$ として、 H_∞ ノルム最小の意味で K_x の最良定値を得る推定器を設計しよう。

(設計例)

ステップ0 : $G_c(s) = -50/[(s+1)(s+2)(s+3)]$, $G_k(s) = 25(s^2+6s+7)/[(s+1)(s+2)(s+3)]$ を求める。

ステップ1 : $1 + G_c G_c^H$ の右スペクトル分解 Δ を求める。

$$\Delta(s) = (s^3 + 8.6391s^2 + 30.3167s + 50.3587)/(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)$$

ステップ2 : ゼロ点がすべて右半平面に存在し、極が左半平面に存在するような $\tilde{\Delta}$ は次の様に定まる。

$$\tilde{\Delta}(s) = (s^3 - 8.6391s^2 + 30.3167s - 50.3587)/(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)$$

ステップ3 : 本例題では G_k がスカラ (正方行列) であるから、 $G_k^H G_k$ の左スペクトル分解因子 Δ_k は G_k それ自身となる。

$$\Delta_k = 25(s^2 + 6s + 7)/[(s + 1)(s + 2)(s + 3)]$$

ステップ4 : ステップ4-7を繰返し、 $F(1)$ を半正定とする h の最小値は

$$h_m = 9.37477$$

である。この時 Δ_z は次式となる。

$$\Delta_z(s; h_m) = (9.4s^6 + 126s^5 + 749.4s^4 + 2627.5s^3 + 5552.2s^2 + 6188.2s + 2630.8) [(25s^5 + 366s^4 + 2229s^3 + 7318s^2 + 12859s + 8813)]^{-1}$$

ステップ5 : $\Delta \Delta^H = I_m + G_c G_c^H$ のシステム行列 $P(s)$ の RHP に存在するゼロ点 z_i を求めると、

$$z_1 = 4.3195, \quad z_2 = 2.1598 - 2.6446i, \quad z_3 = 2.1598 + 2.6446i$$

が得られる。次にこのゼロ点 $z_i : i = 1, 2, 3$ に対して、 $P(z_i)$ の null space の1次独立なベクトルから、 d_i (本例では1次元ベクトルである) を求めると次の様に得られる。

$$d_1 = 0.8505, \quad d_2 = 0.9817 + 0.0003i, \quad d_3 = 0.9817 + 0.0003i$$

ステップ6 : この d_i を用いて、(3.15 a) と (3.15 b) 式から u_i, w_i を計算し

て次式を得る。

$$\tilde{U} = (35.4195, -9.4629 - 1.2532i, -9.4629 + 1.2532i)$$

$$W = (-2.6675, -1.1393 + 1.6645i, -1.1393 - 1.6645i)$$

ステップ7 : $F(1) := \{f_{ij}\}$ を構成する。ここで、 $f_{ij} := (\bar{z}_i + z_j)^{-1}(u_i^* u_j - h^{-2} w_i^* w_j)$

$$F(1; h_m) = \begin{pmatrix} 144.39 & -42.59 - 23.55i & -42.59 + 23.55i \\ -42.59 + 23.55i & 20.15 & 5.17 - 12.69i \\ -42.59 - 23.55i & 5.17 + 12.69i & 20.15 \end{pmatrix}$$

$F(1)$ が半正定となる h の最小値は $\det F(1)=0$ とする。因みに、行列 $F(1; h_m)$ の固有値は 177.36、0.0、7.34 である。

ステップ8 : $m = r = 1$ に注意して、 $\theta = 1$ と選ぶ。

ステップ9 : \tilde{C} 、 \tilde{A} は次の様に得られる。

$$\tilde{C} = (38.0869, -8.3237 - 2.9177i, -8.3237 + 2.9177i)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 7.2531 & -2.0616 - 1.0950i & -2.0616 + 1.0950i \\ -1.1086 + 0.0163i & 0.3890 + 0.3612i & 0.3890 - 0.3612i \\ -1.1086 - 0.0163i & 0.3039 + 0.2429i & 0.3890 - 0.3612i \end{pmatrix}$$

ステップ10 : 内関数 $U_1(s; h_m)$ を次式のように求める ($h_m = 9.37477$)。

$$U_1(s; h_m) = (-s^2 + 8.2434s - 22.7494)/(s^2 + 8.2434s + 22.7494)$$

ステップ11 : (3. 12) 式から $U(s)$ を計算すると次のようになる。

$$U(s) = (-s^5 - 0.4s^4 + 18.1s^3 + 3s^2 - 274.6s - 1145.6)(s^5 - 0.4s^4 - 18.1s^3 + 3s^2 + 274.6s - 1145.6)^{-1}$$

ここで、 $N_u(s) = D_u(-s)$ であることに注意する。

ステップ12 : 最適推定器 $H_0(s)$ は (3. 8 a) 式から次のように得られる。

$$H_0(s) = (-9.3748s^2 - 48.7618s - 54.8932)/(s^2 + 8.2434s + 22.7494)$$

5. おわりに

前章の例題の H_∞ 最適推定器のシミュレーションの結果を与える。

Fig. 5. 1 (a)は線形システムに正規性白色雑音を入力したときの状態の線形結合 Kx の推定結果を種々のサンプリング周期に対して図示したものである。Fig. 5. 1 (b)は同様にカルマンフィルタによる Kx の推定結果を図示したものである。

Fig. 5. 2 (a)は線形システムに正規性白色雑音を入力したときの状態の線形結合 Kx の推定結果を種々の測定雑音の強度に対して図示したものである。Fig. 5. 2 (b)は同様にカルマンフィルタによる Kx の推定結果を図示したものである。

Fig. 5. 3 (a)は線形システムに正弦波を入力したときの状態の線形結合 Kx の推定結果を種々の測定雑音強度に対して図示したものである。Fig. 5. 3 (b)は同様にカルマンフィルタによる Kx の推定結果を図示したものである。

Fig. 5. 4 (a)は線形システムに正規性白色雑音が加わった正弦波を入力したときの状態の線形結合 Kx の推定結果を種々の測定雑音強度に対して図示したものである。Fig. 5. 4 (b)は同様にカルマンフィルタによる Kx の推定結果を図示したものである。

Fig. 5. 5はカルマンフィルタを用いたときの伝達関数行列 $T(s)$ の H_∞ ノルムは H_∞ 最適推定器に対するノルム (h_m) より確かに大きいことを示すために用意したものである。

これらの結果と最適推定器 H_0 の伝達関数の次数 (2次) がカルマンフィルタのそれ (3次) に比べて低いことを考慮すると、本報で述べた H_∞ 最適推定器は状態フィードバック制御系の構成あるいは測定データの信号処理における有効な手段の一つとなり得ることを示唆しているように思われる。

参考文献

- 1) M. J. Grimble and A. Elsayed, : H^∞ design of digital linear filters, presented at the IEE Colloq. Digital Signal Processing, London, 1987.
- 2) A. Elsayed et al., : On H^∞ filtering in multivariable discrete-time systems, presented at the 1988 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, Finland, June 1988.
- 3) I. Yaesh and U. Shaked, : Optimal discrete-time multivariable deconvolution in the minimum H^∞ -norm sense, in Proc. 1990 Bilkent Int. Conf. New Trends in Commun., Contr., Signal Processing, Ankara, Turkey, July 1990.
- 4) J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar and B. Francis, : State-space solution to standard H^2 and H^∞ control problem, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 34 (8), August 1989.
- 5) U. Shaked, : H^∞ -minimum error state estimation of linear stationary process, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 35(5), May 1990.
- 6) 386-MATLAB User's Guide, 1990.
- 7) 鈴木、他 : H^∞ 制御 (I) -数学的準備-(1990)
- 8) 鈴木、他 : H^∞ 制御 (II) -標準問題とロバスト安定性-(1991)
- 9) 鈴木、他 : H^∞ 制御 (III) -モデルマッチング問題と性能限界-(1991)
- 10) 児玉、須田 : システム制御のためのマトリクス理論、計測自動制御学会、1978
- 11) H. Kwakernaak, : A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback systems, Int. J. Control. vol. 44, pp. 117-156, 1986.
- 12) 鈴木、他 : H^∞ 最適化問題解法のための内関数行列の陽表現導出、JAERI-M 91-079(1991)
- 13) 鈴木 : MATLAB を利用した H^∞ 最適状態推定器の設計例、1991年
- 14) 中溝 : 信号解析とシステム同定、コロナ社、1988年
- 15) A. G. J. MacFarlane and N. Karcanias, : Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory, Int. J. Control. vol. 24(1), pp. 33-74, 1976.

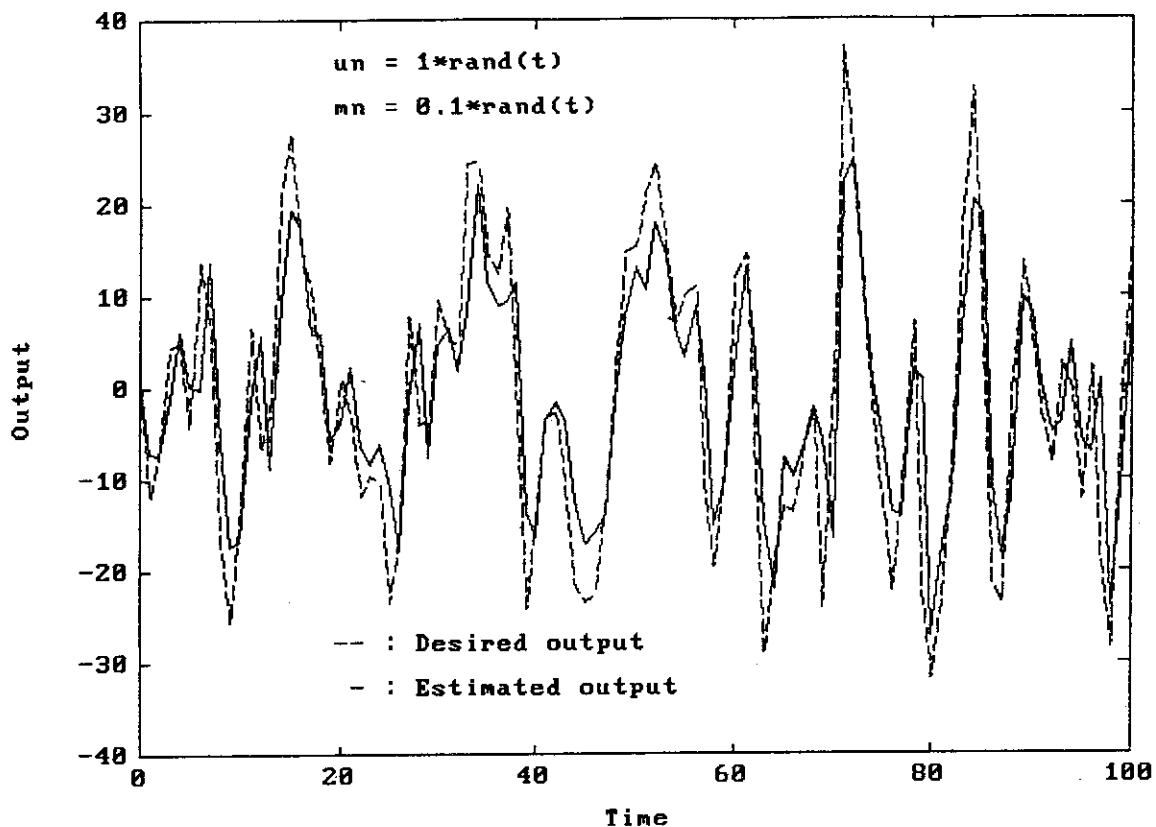


Fig. 5.1(a-1) Result of H_∞ -estimation : H_0 (sampling time = 1.0)

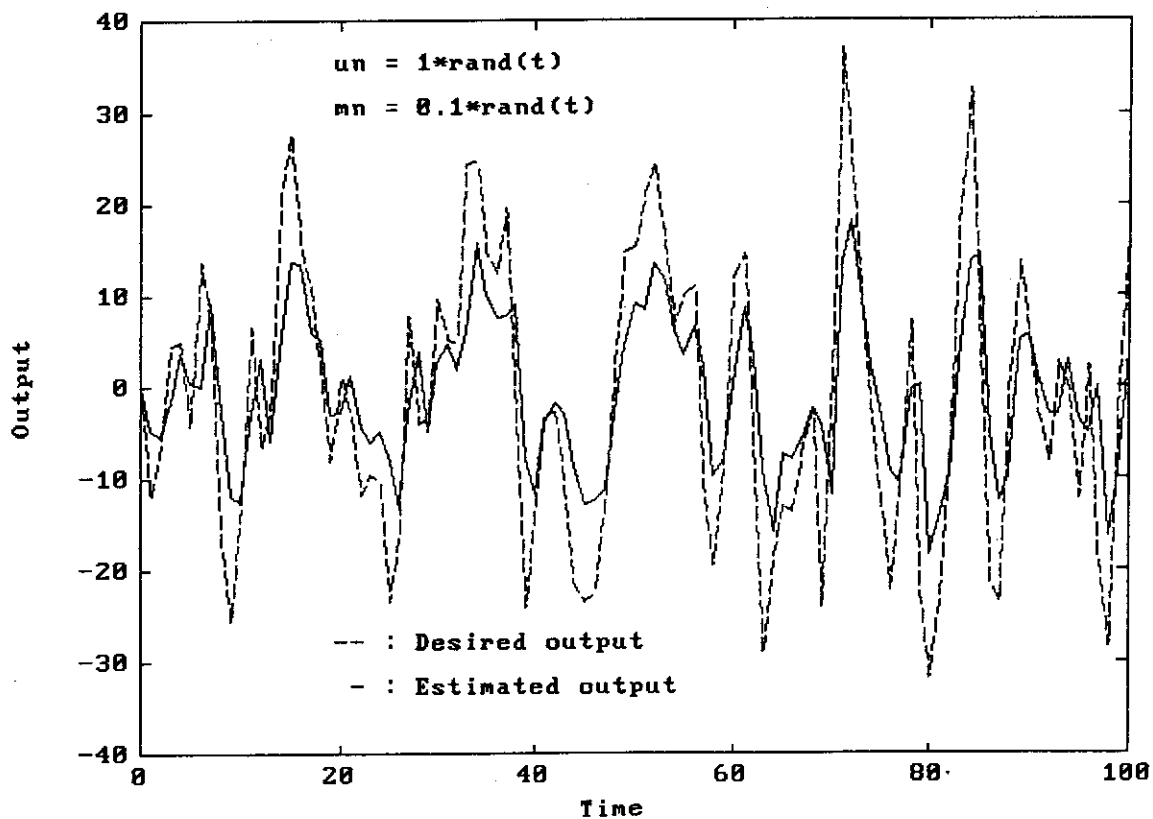


Fig. 5.1(b-1) Result of Kalman filter estimation : H_{01} (sampling time = 1.0)

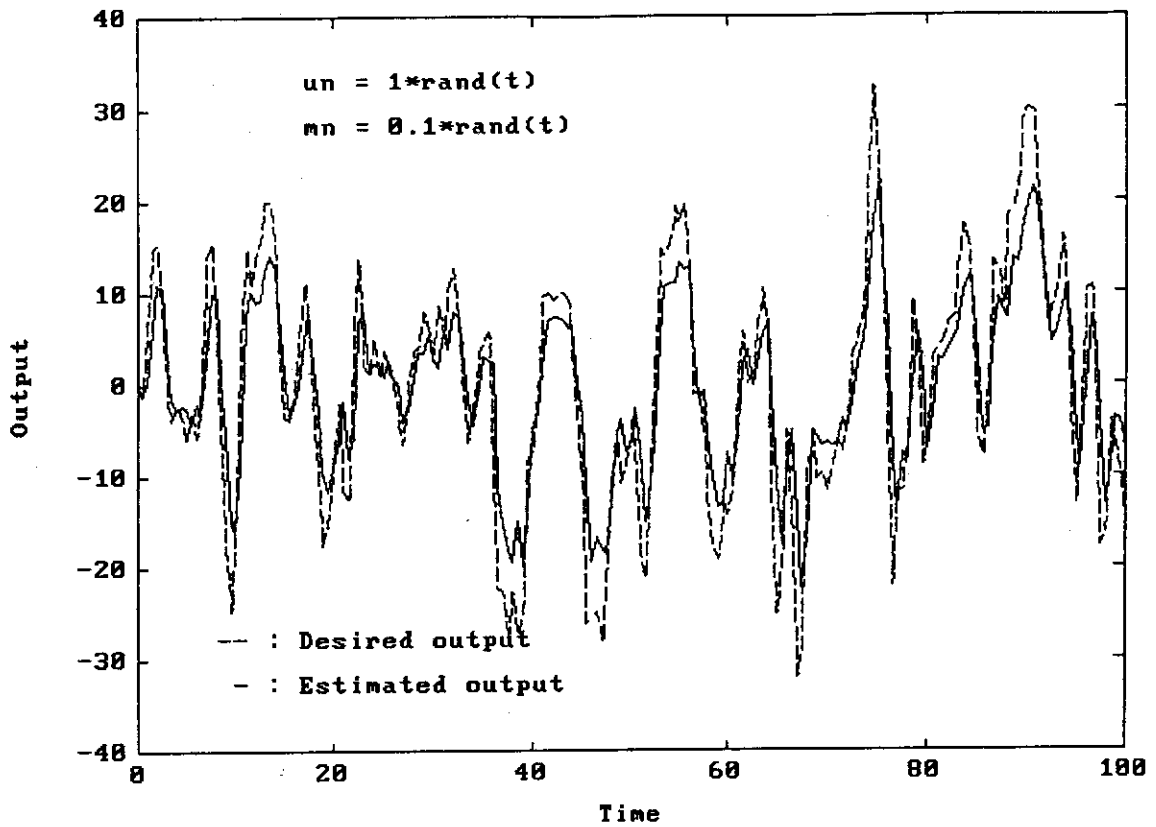


Fig. 5.1(a-2) Result of H_{∞} -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

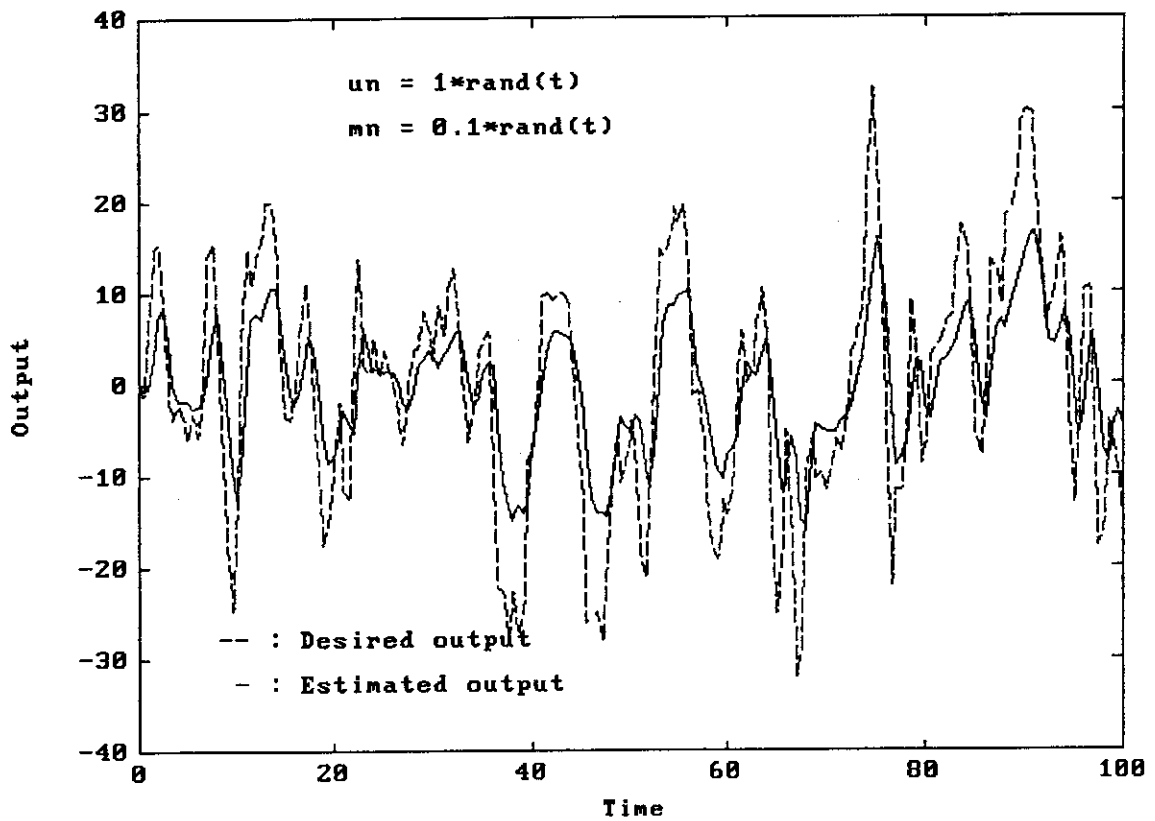


Fig. 5.1(b-2) Result of Kalman filter estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

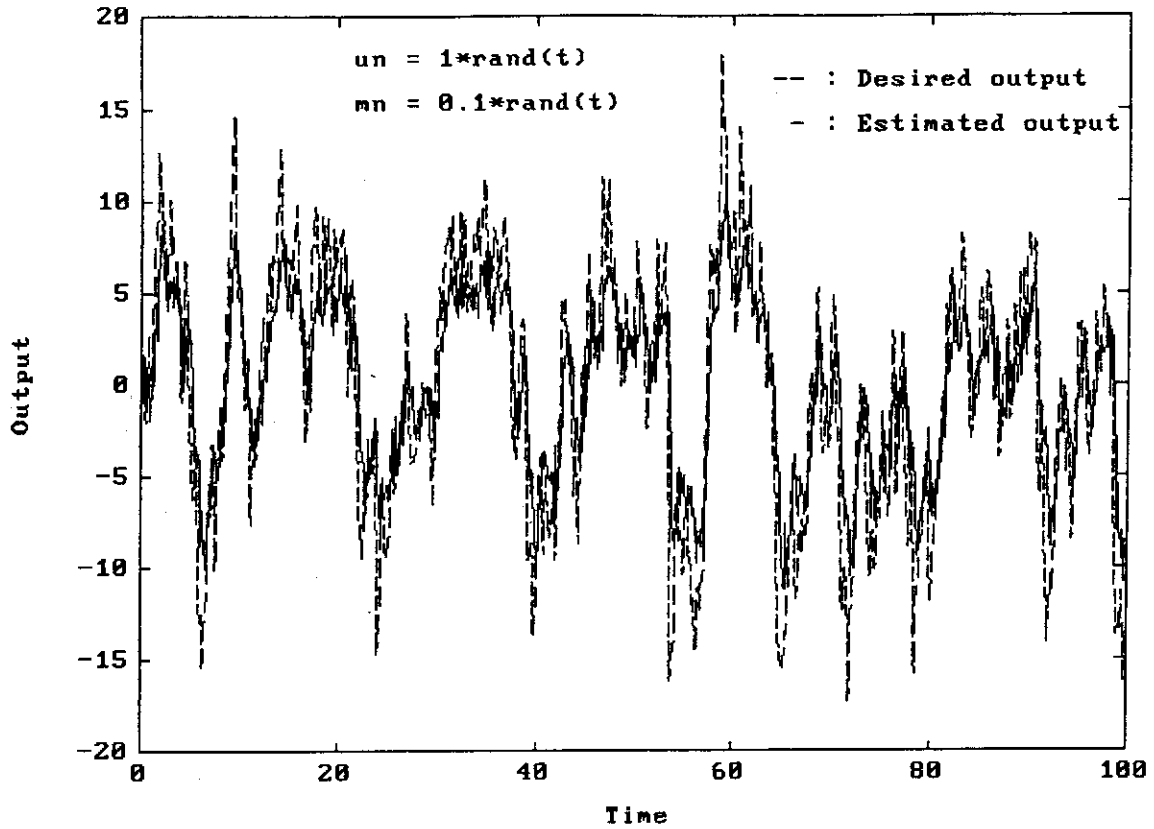


Fig. 5.1(a-3) Result of H_{∞} -estimation : H_0 (sampling time = 0.1)

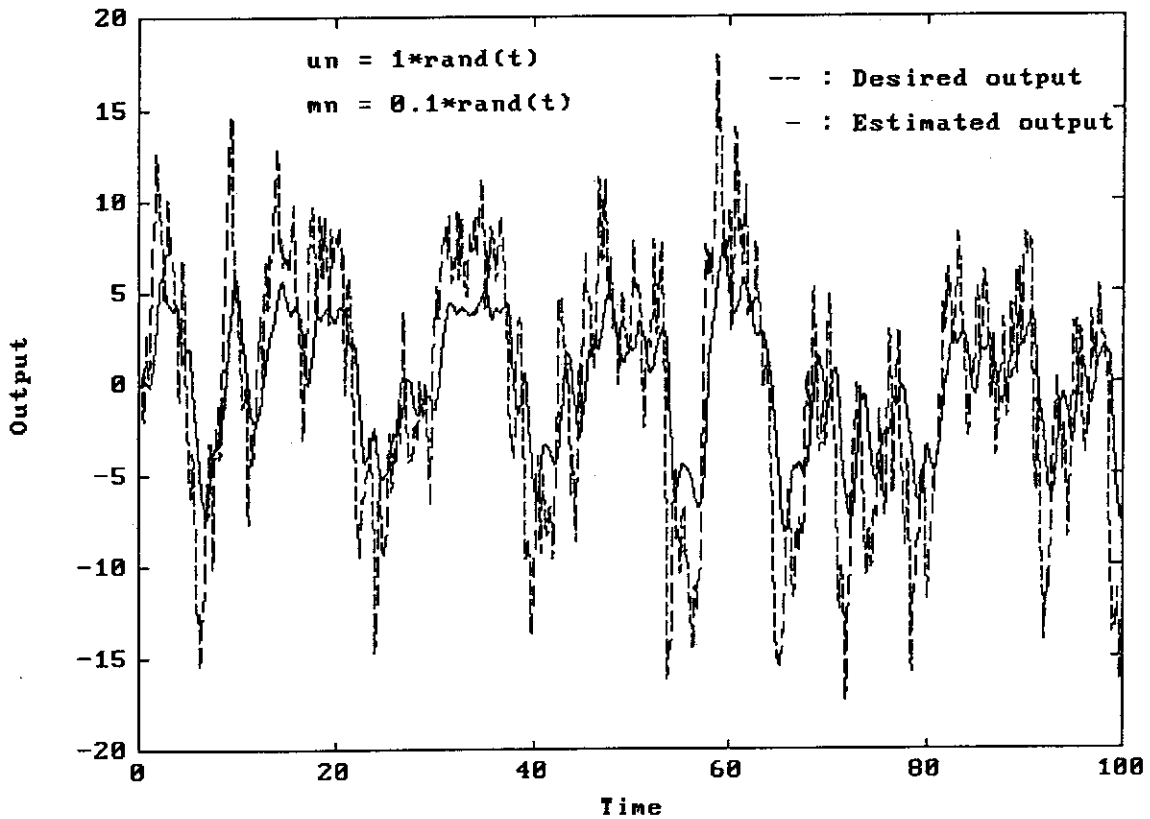


Fig. 5.1(b-3) Result of Kalman filter estimation : H_0 (sampling time = 0.1)

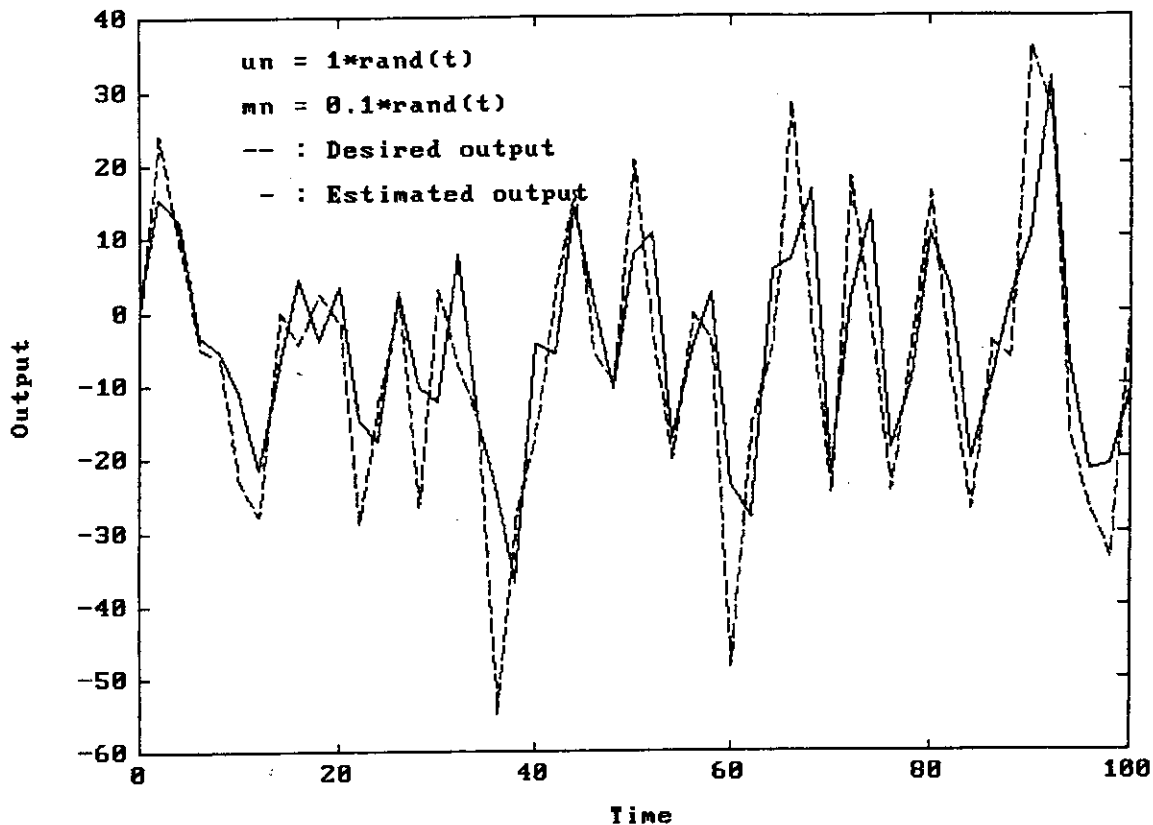


Fig. 5.1(a-4) Result of H_∞ -estimation : H_o (sampling time = 2.0)

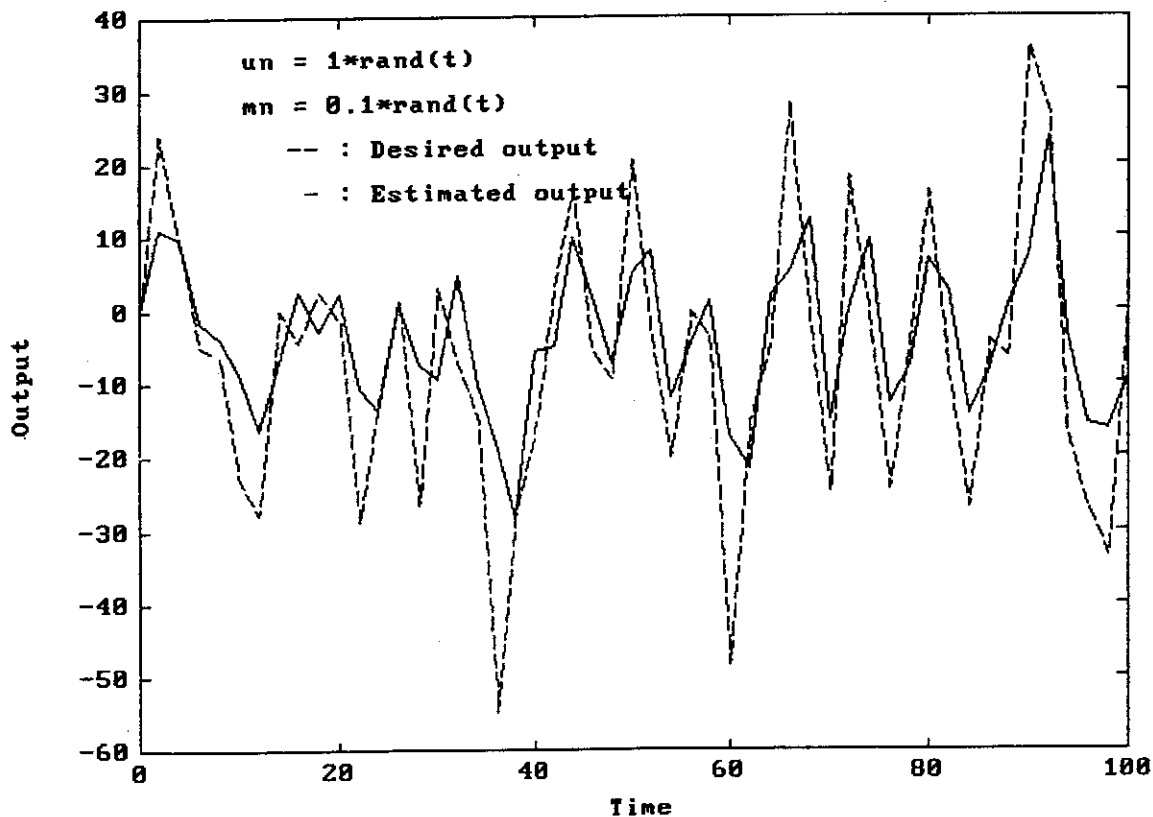


Fig. 5.1(b-4) Result of Kalman filter estimation : H_{o1} (sampling time = 2.0)

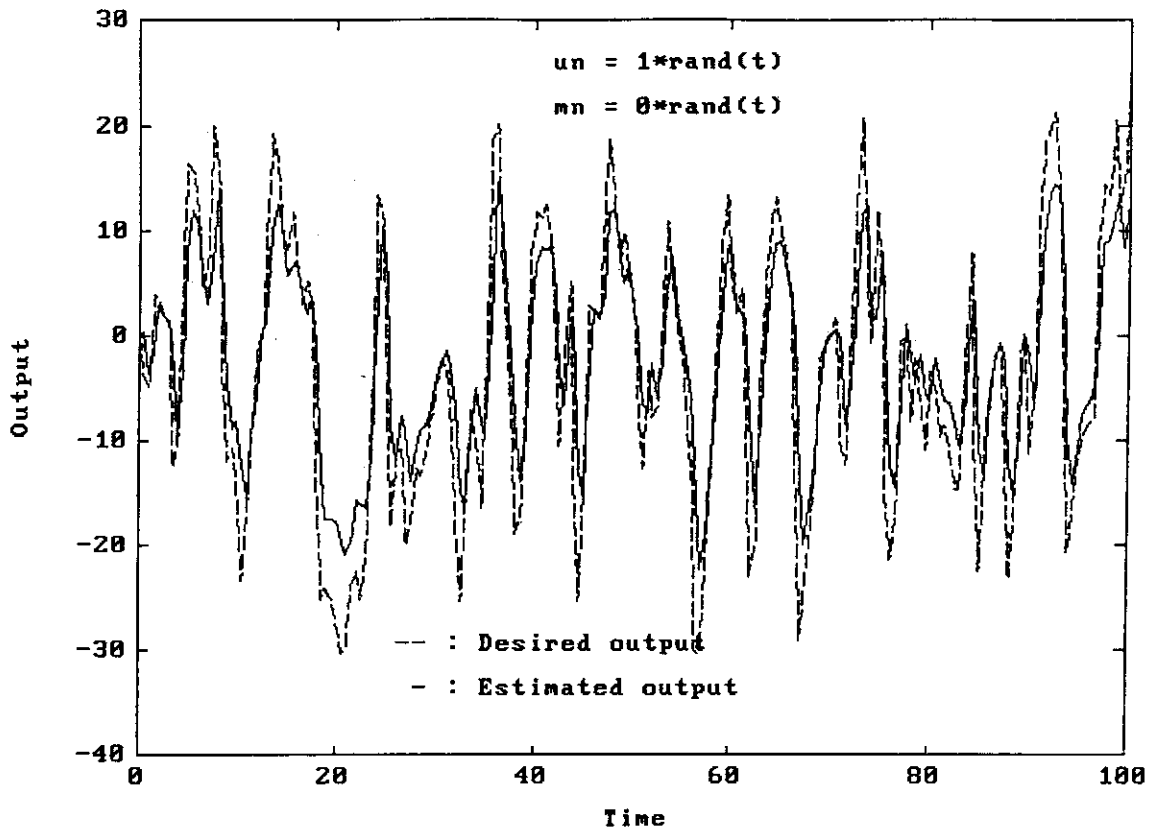


Fig. 5.2(a-1) Result of H_∞ -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

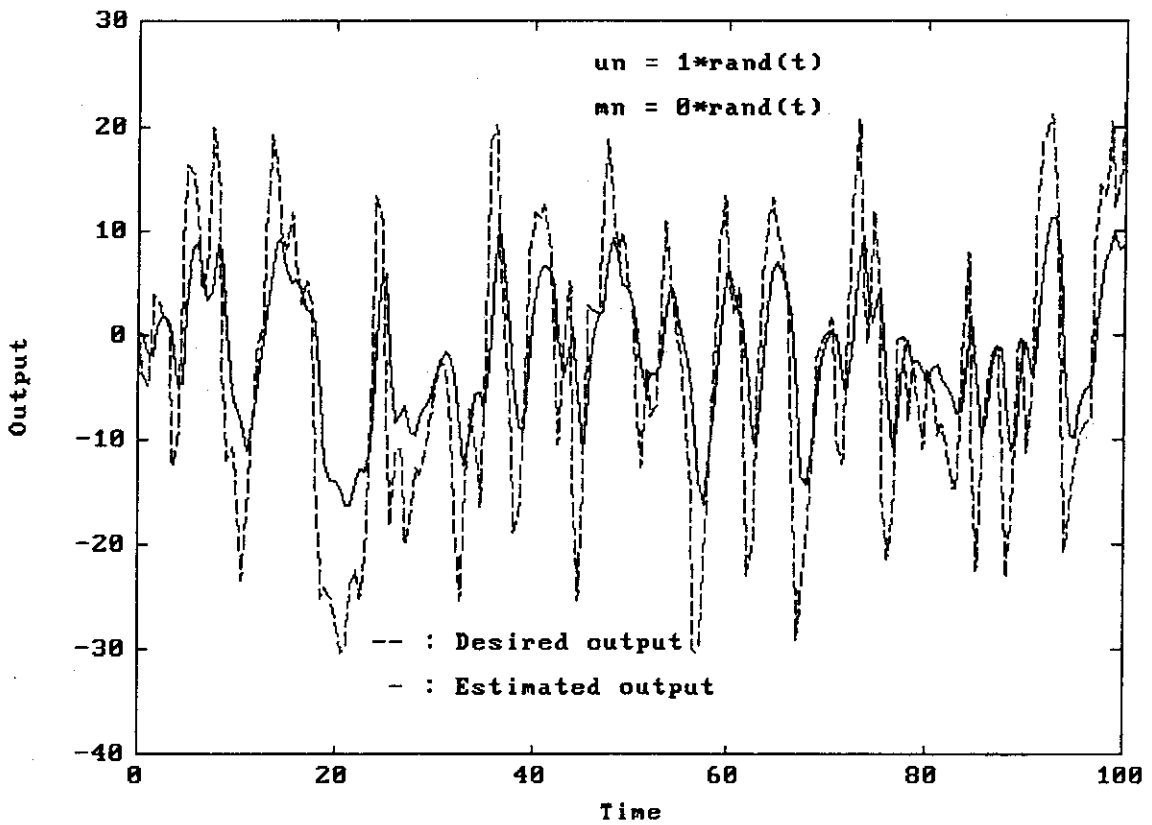


Fig. 5.2(b-1) Result of Kalman filter estimation : H_{01} (sampling time = 0.5)

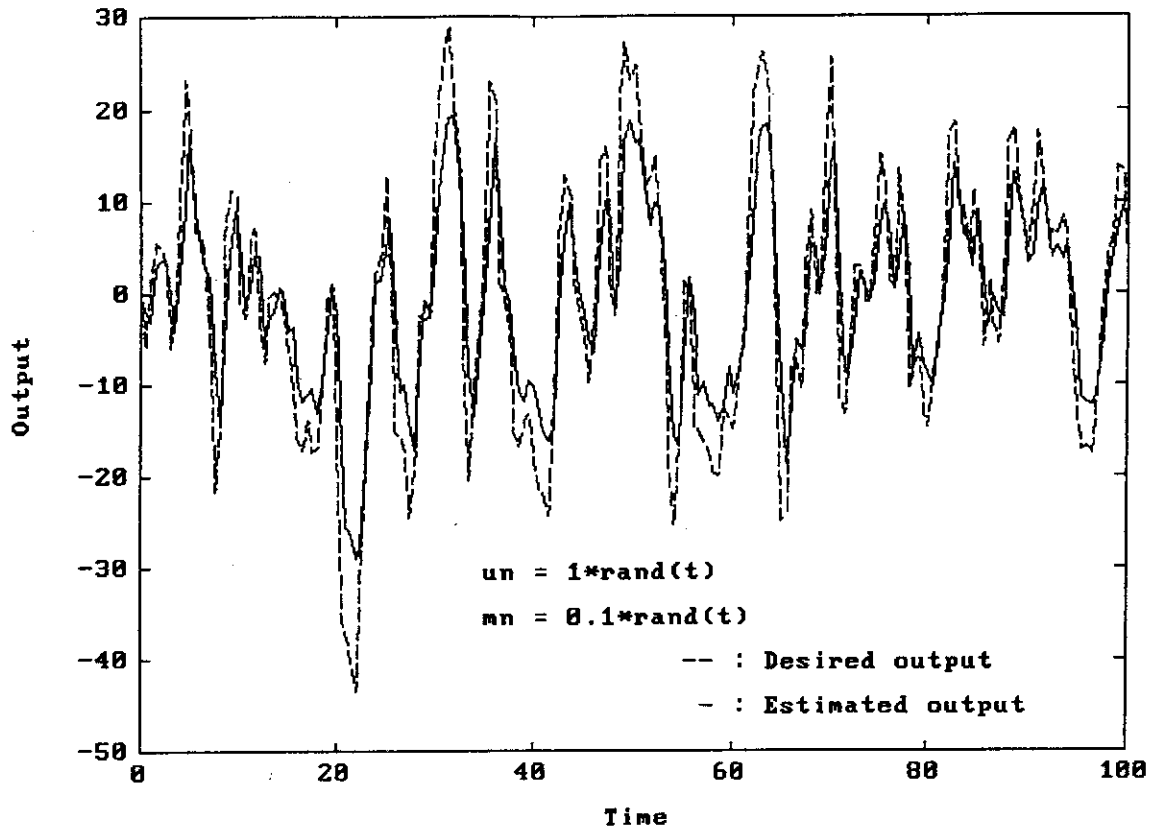


Fig. 5.2(a-2) Result of H_∞ -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

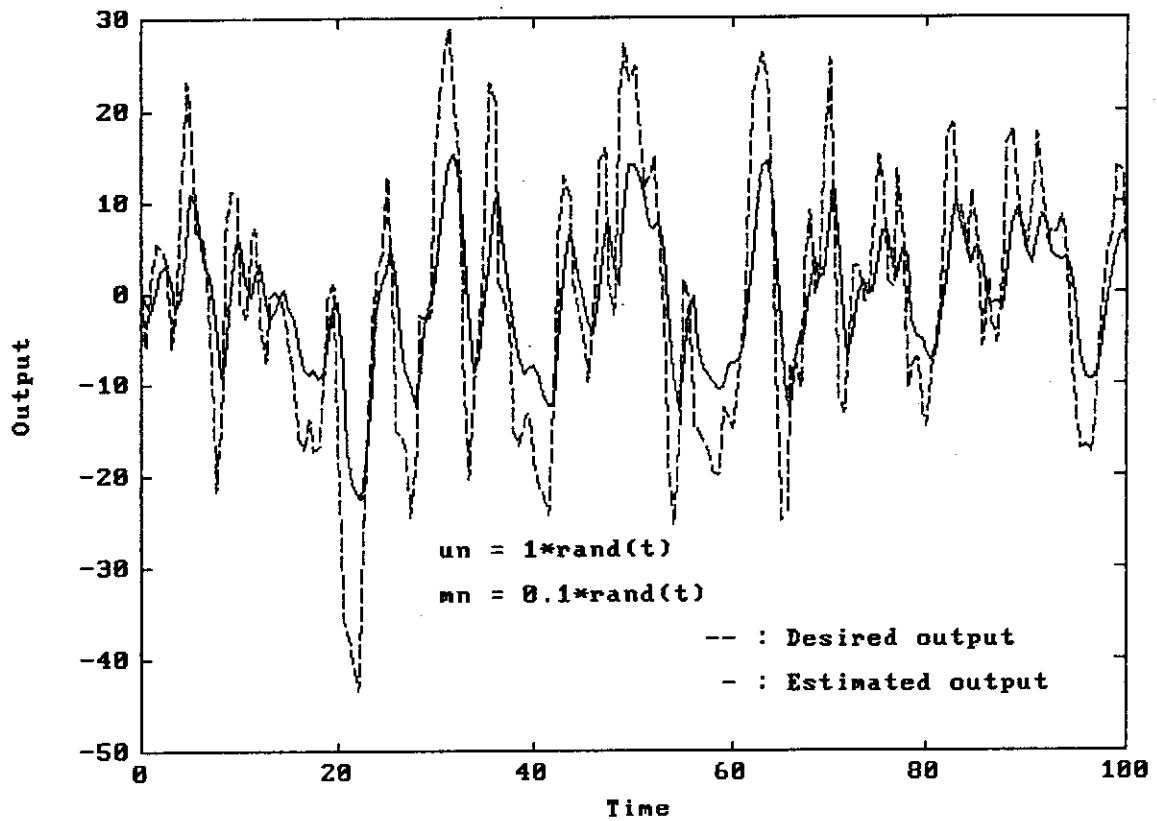


Fig. 5.2(b-2) Result of Kalman filter estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

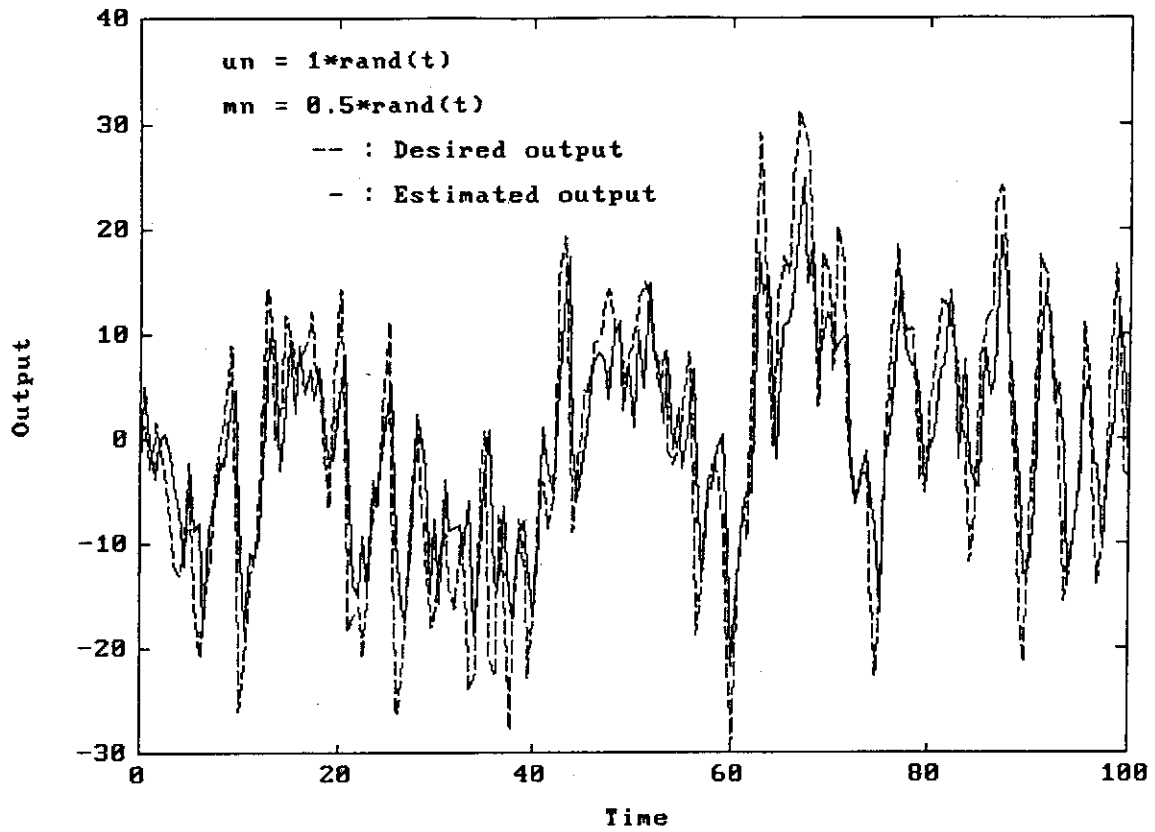


Fig. 5.2(a-3) Result of H_∞ -estimation : Ho (sampling time = 0.5)

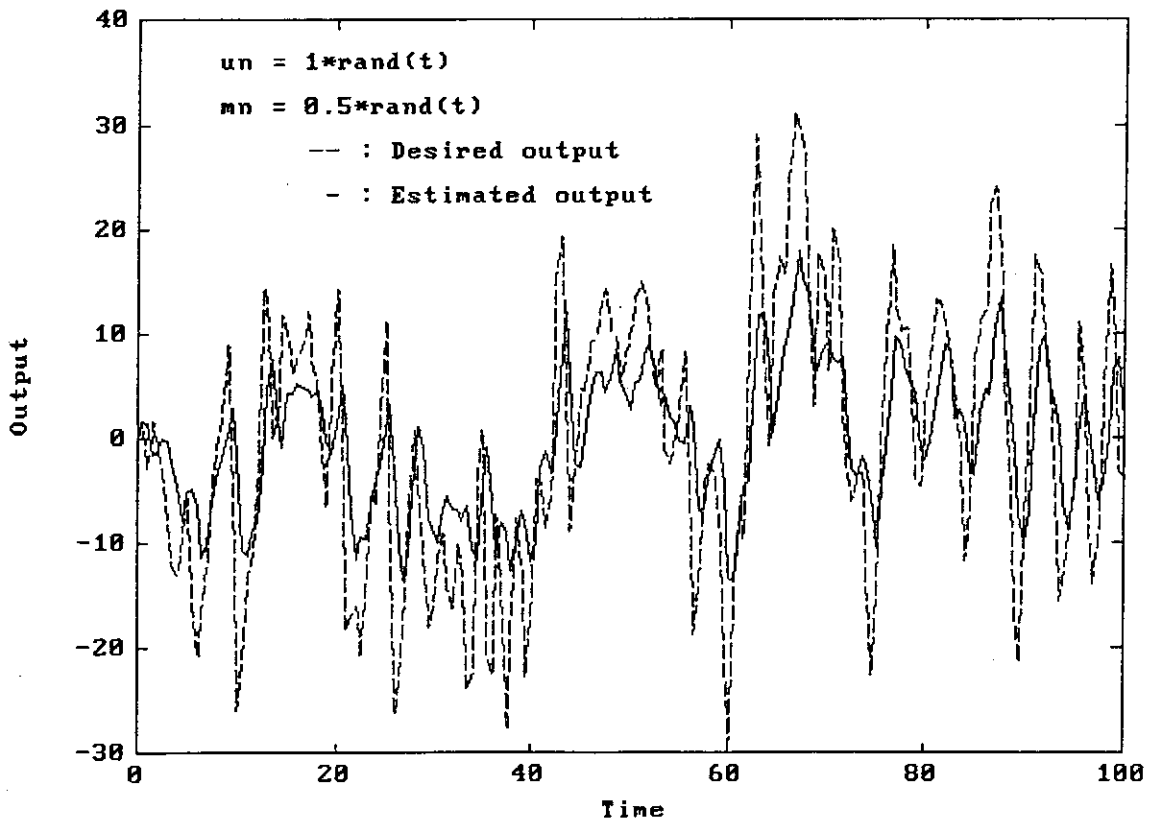


Fig. 5.2(b-3) Result of Kalman filter estimation : Ho1 (sampling time = 0.5)

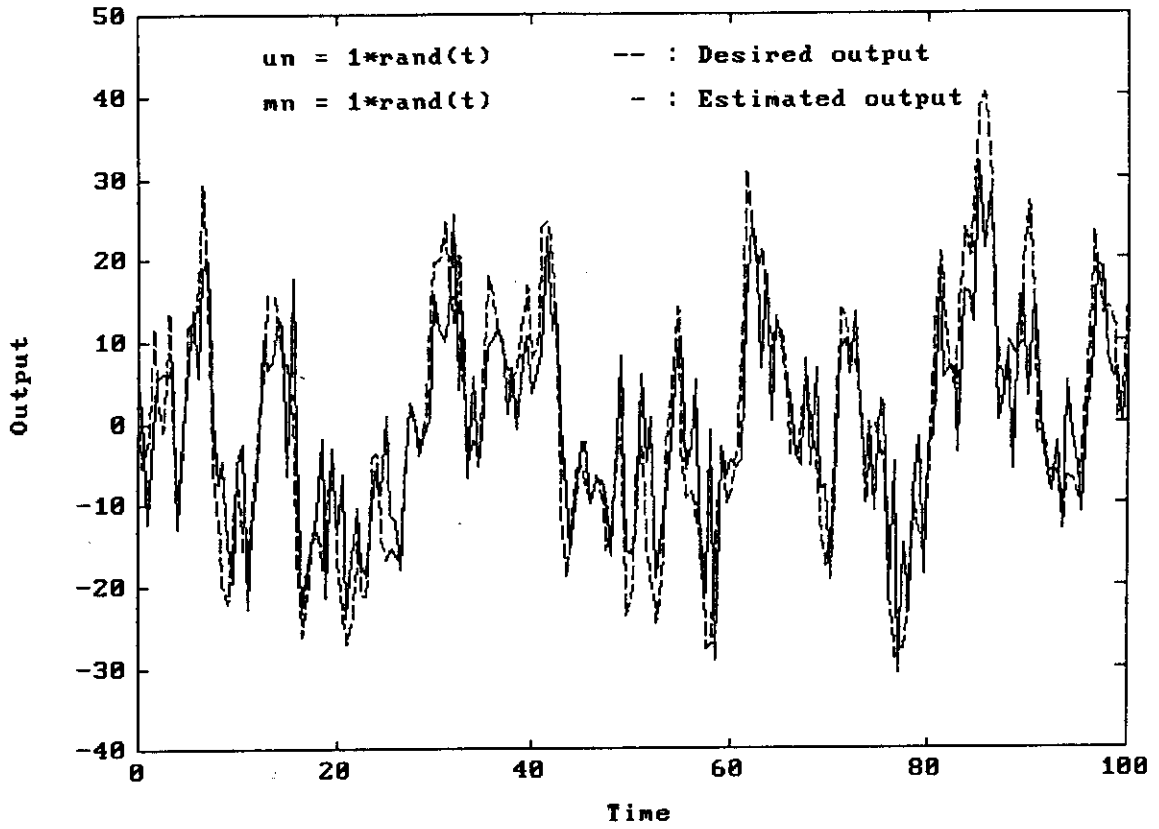


Fig. 5.2(a-4) Result of H_{∞} -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

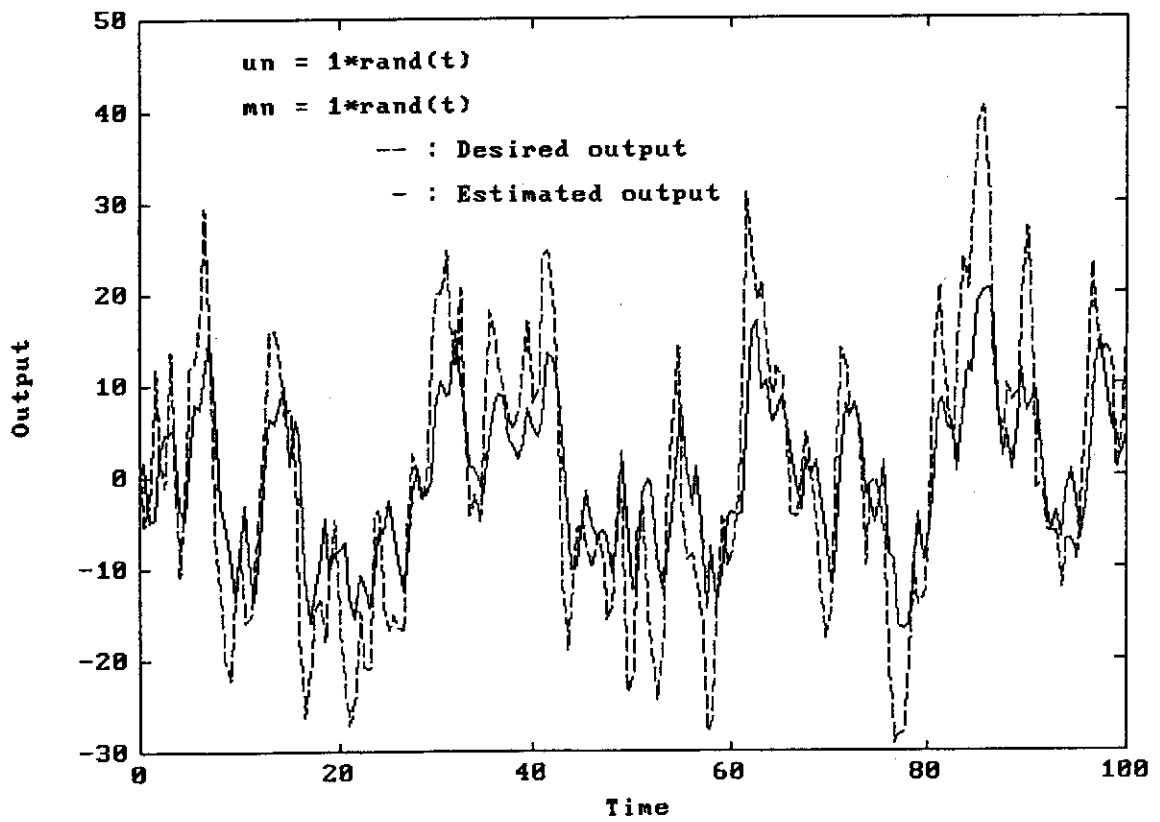


Fig. 5.2(b-4) Result of Kalman filter estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

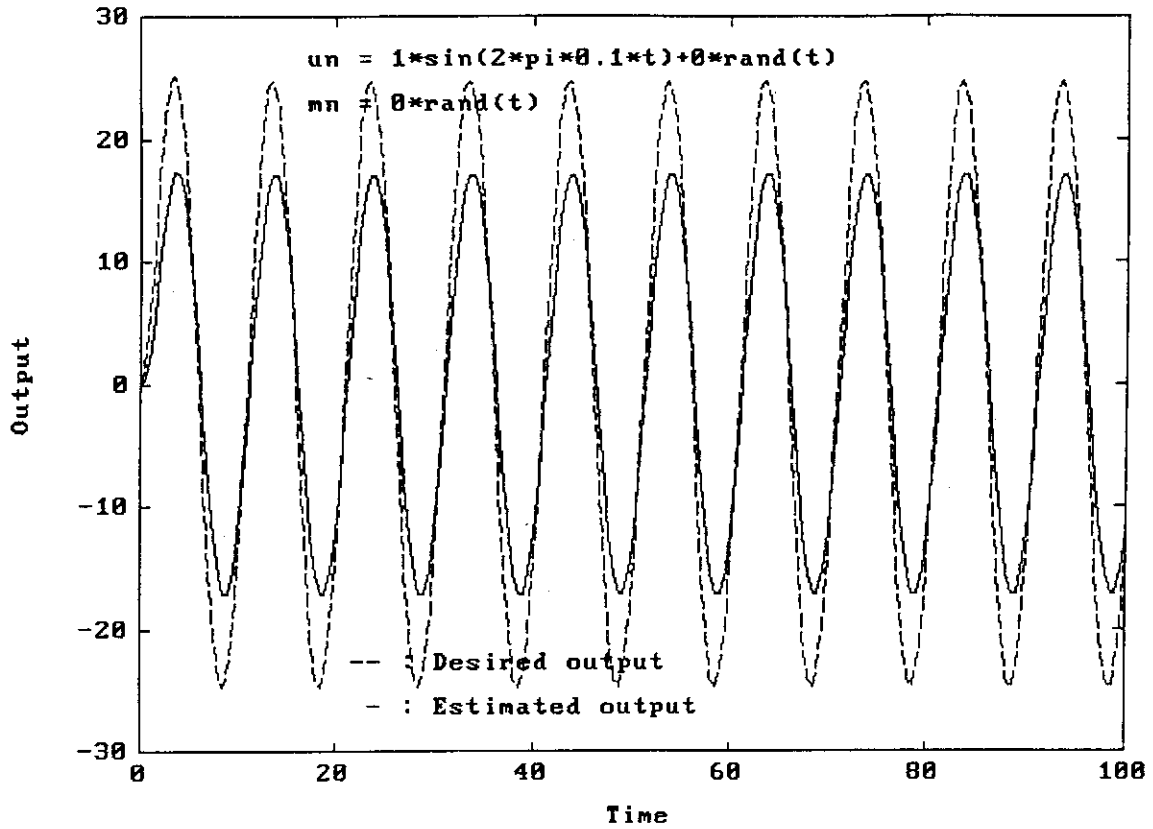


Fig. 5.3(a-1) Result of H_∞ -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

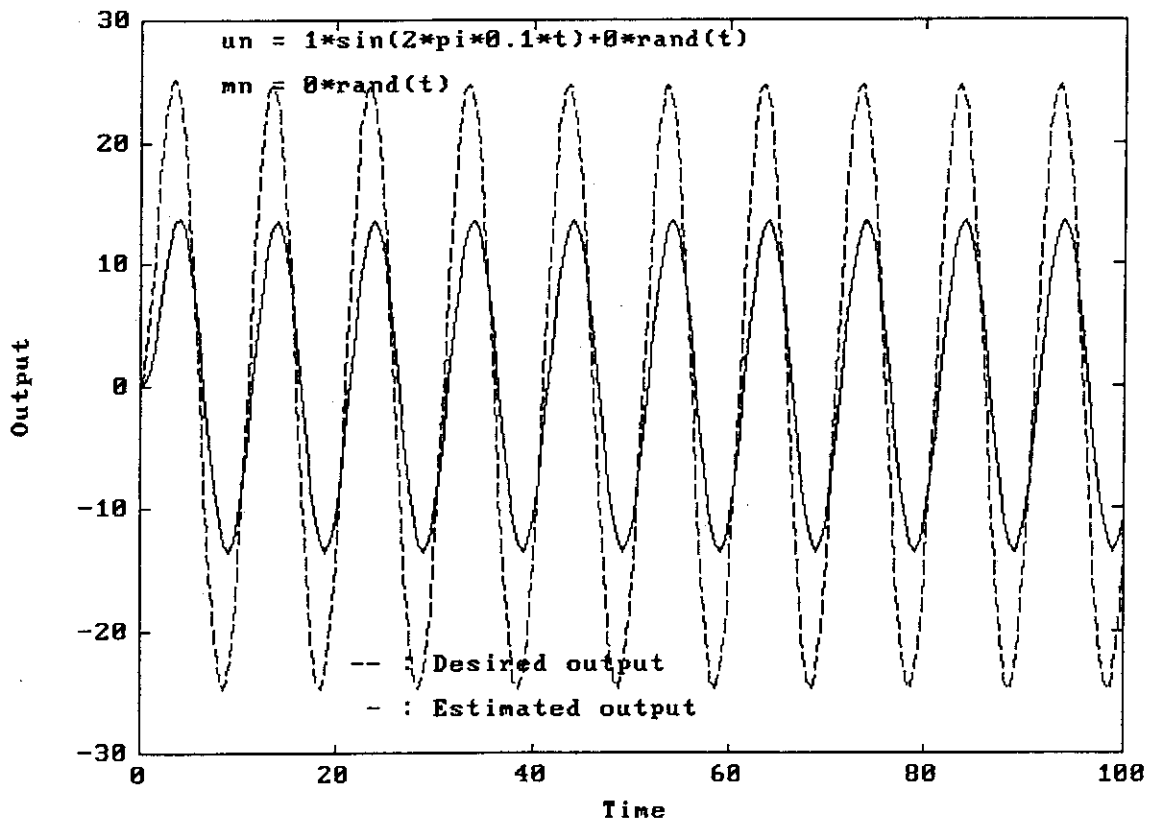


Fig. 5.3(b-1) Result of Kalman filter estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

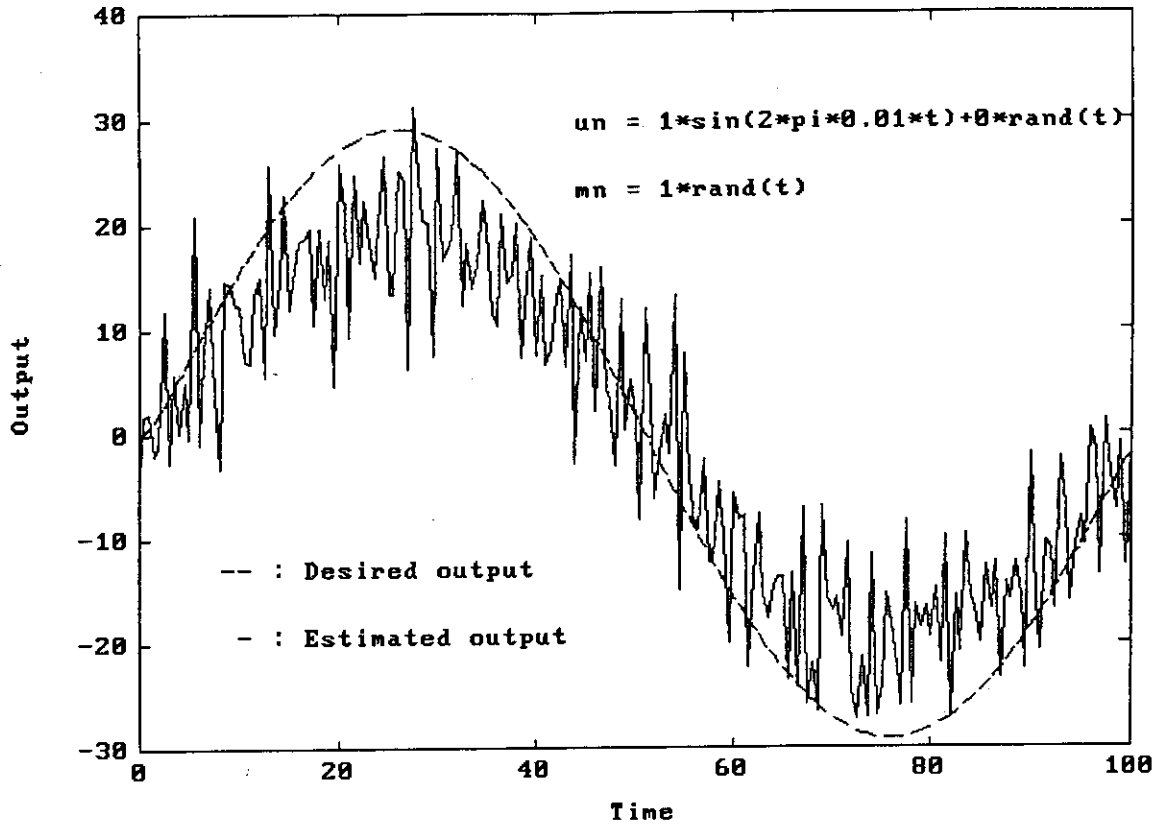


Fig. 5.3(a-2) Result of H_∞ -estimation : Ho (sampling time = 0.5)

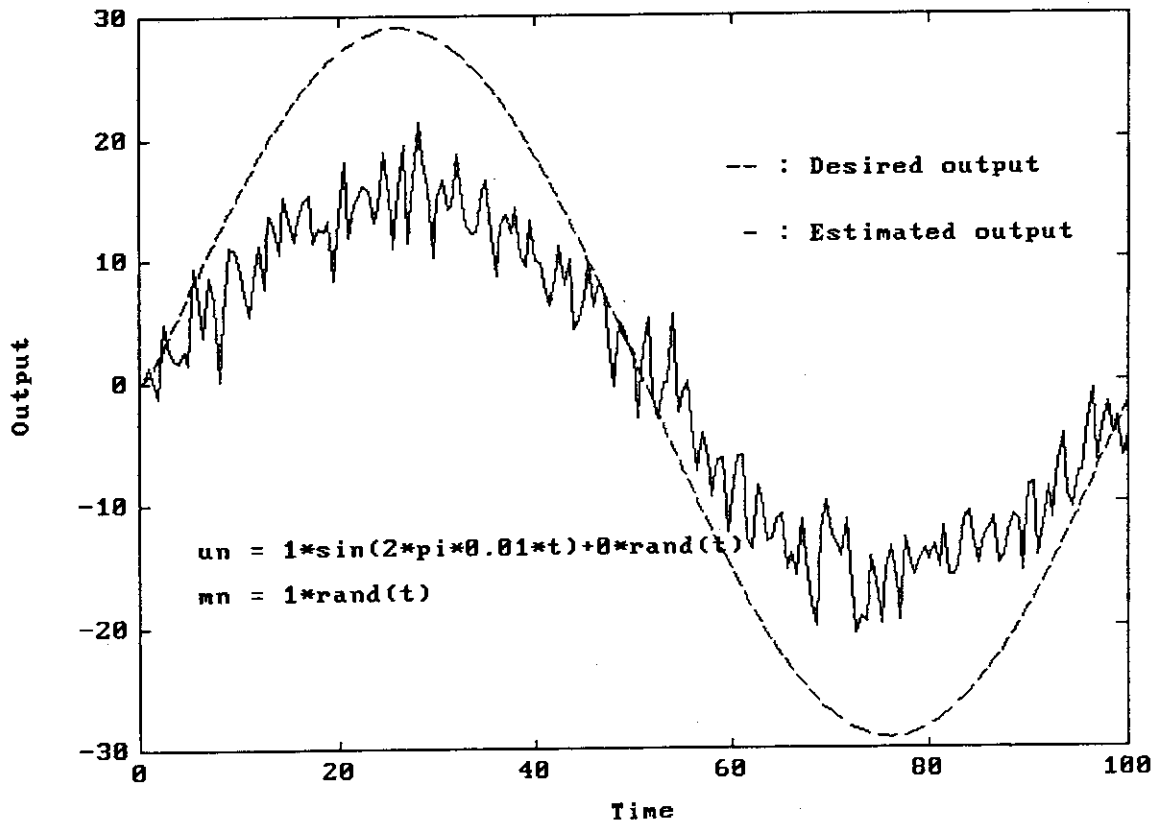


Fig. 5.3(b-2) Result of Kalman filter estimation : Ho1 (sampling time = 0.5)

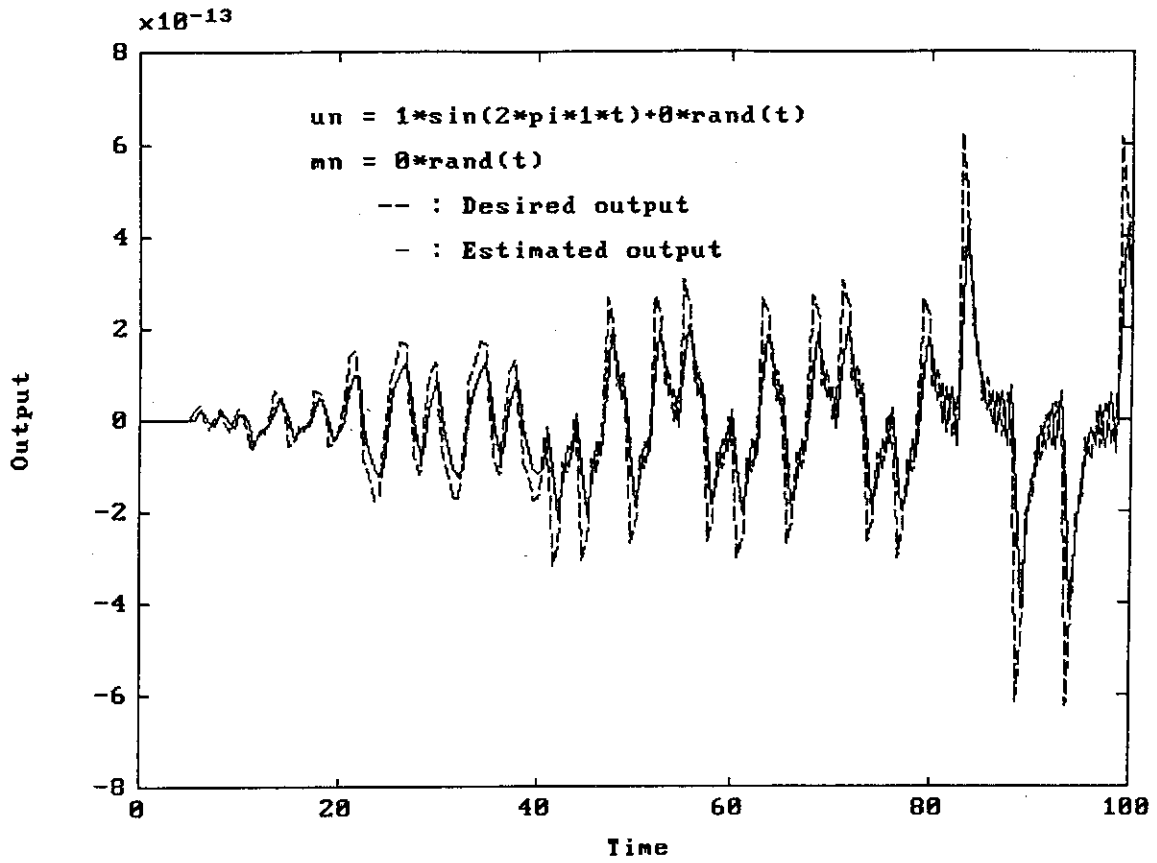


Fig. 5.3(a-3) Result of H^∞ -estimation : Ho (sampling time = 0.5)

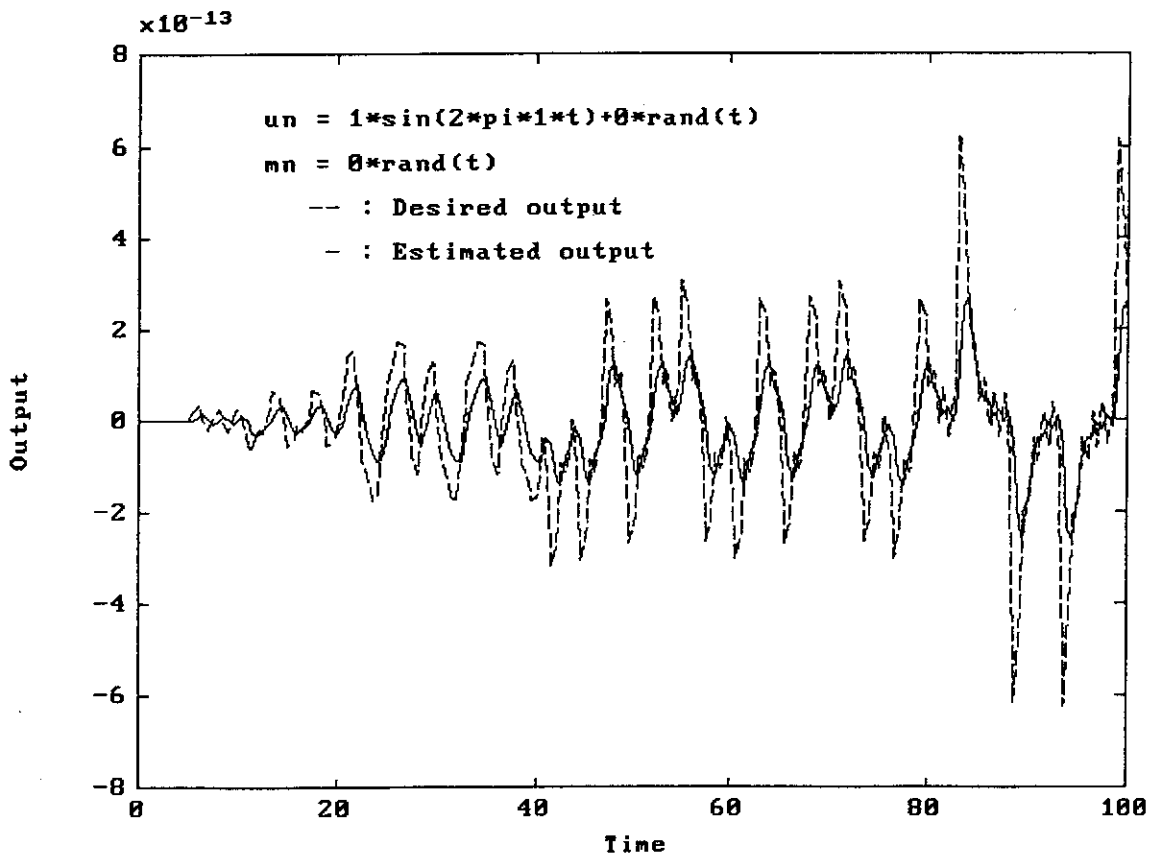


Fig. 5.3(b-3) Result of Kalman filter estimation : Ho1 (sampling time = 0.5)

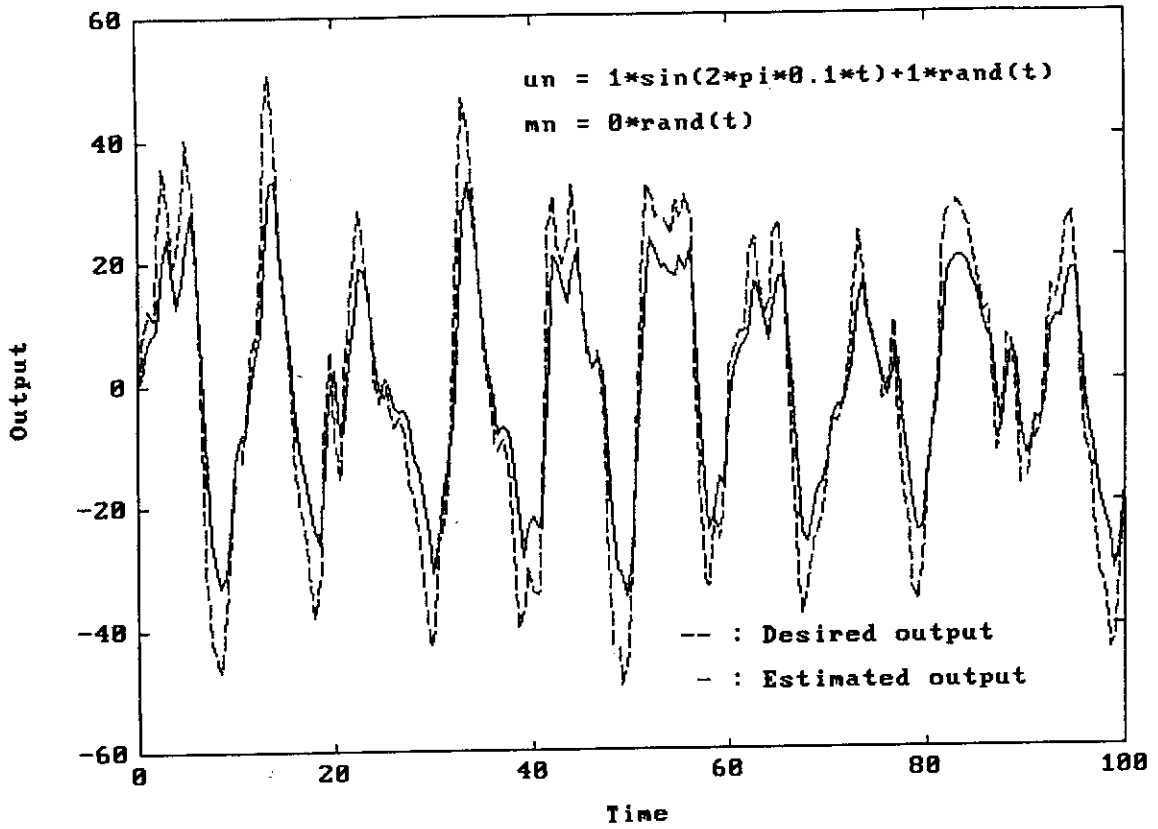


Fig. 5.4(a-1) Result of H_∞ -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

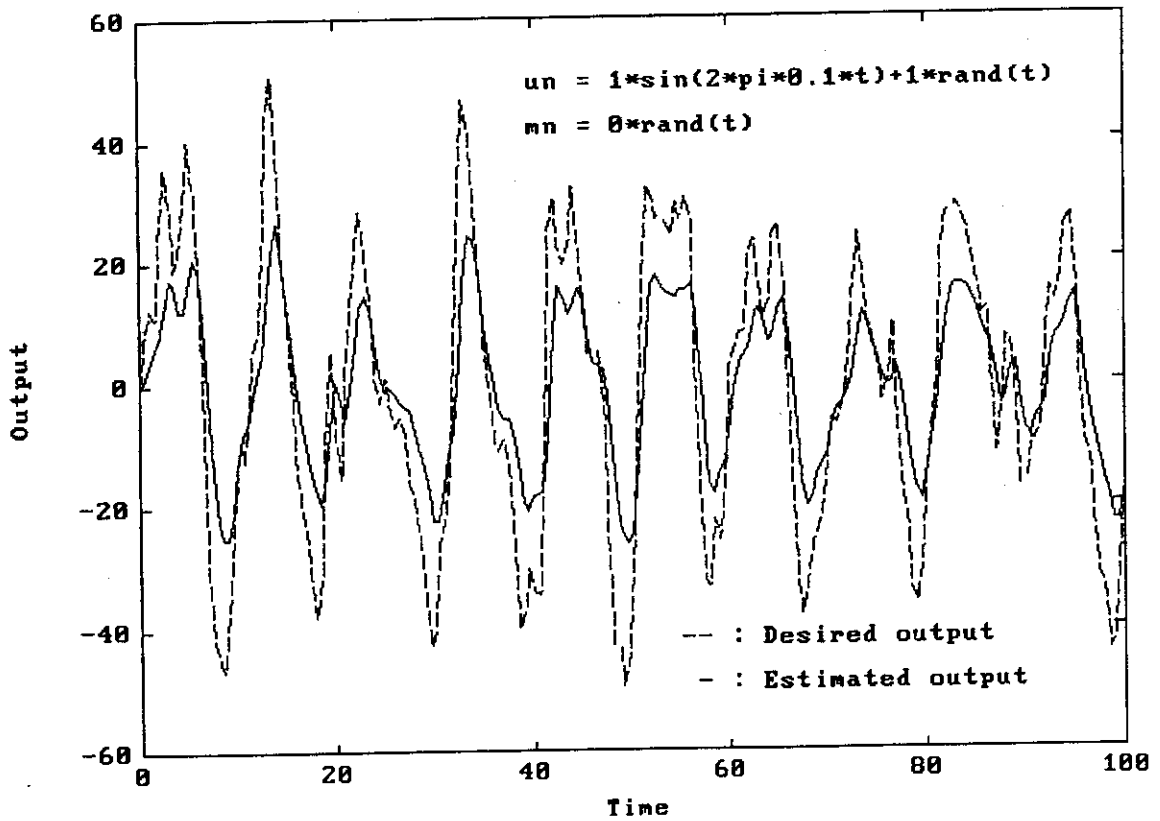


Fig. 5.4(b-1) Result of Kalman filter estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

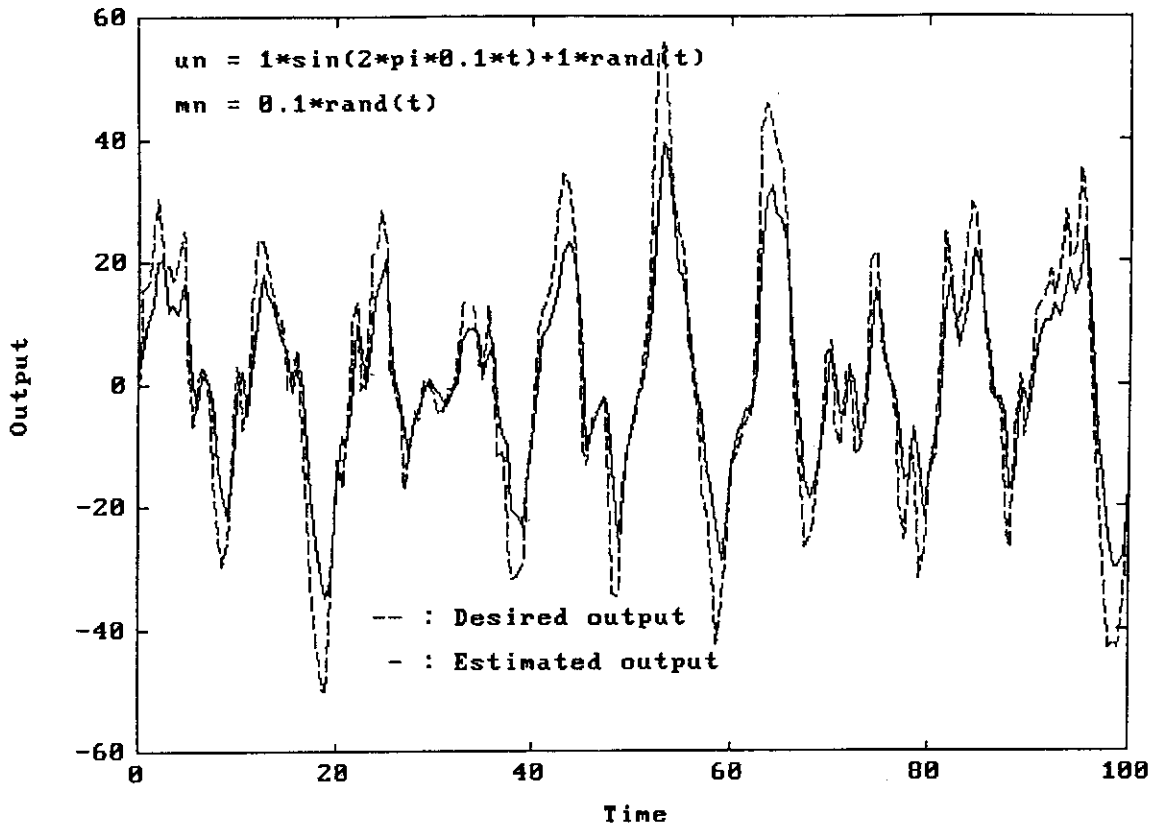


Fig. 5.4(a-2) Result of H_∞ -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

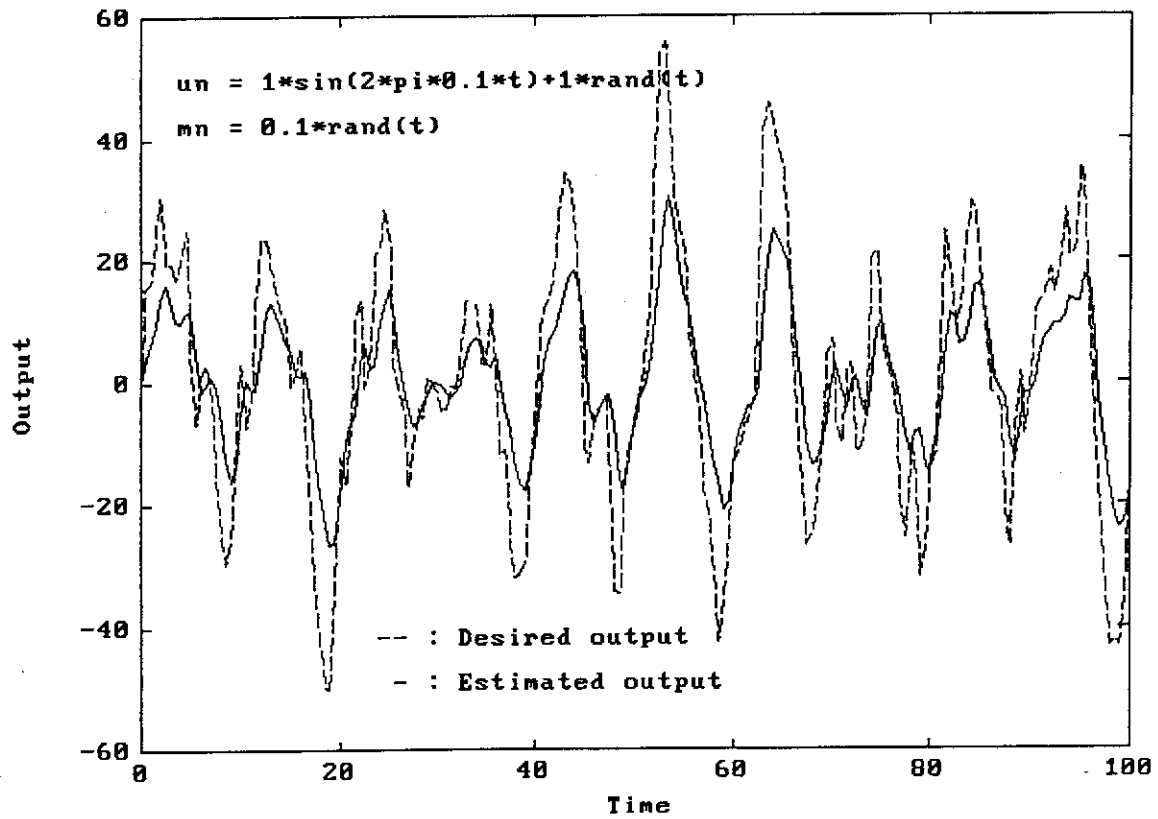


Fig. 5.4(b-2) Result of Kalman filter estimation : H_{01} (sampling time = 0.5)

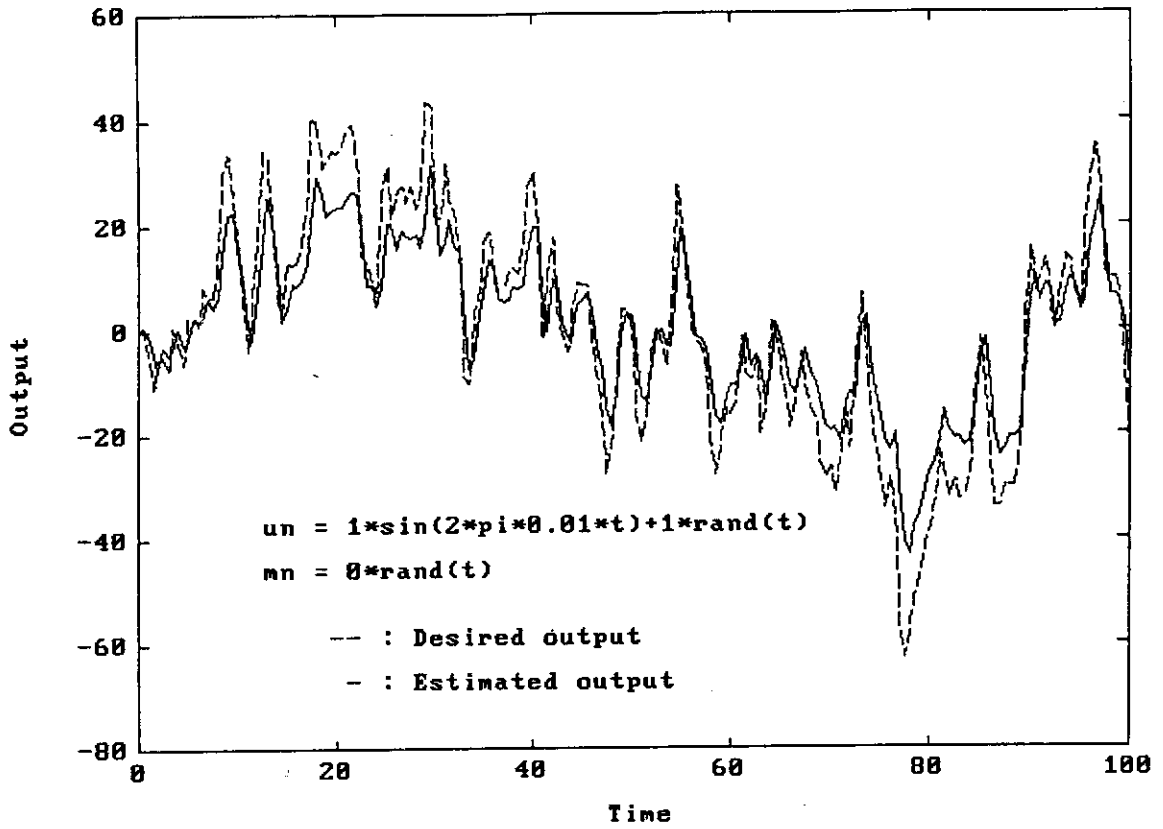


Fig. 5.4(a-3) Result of H^∞ -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

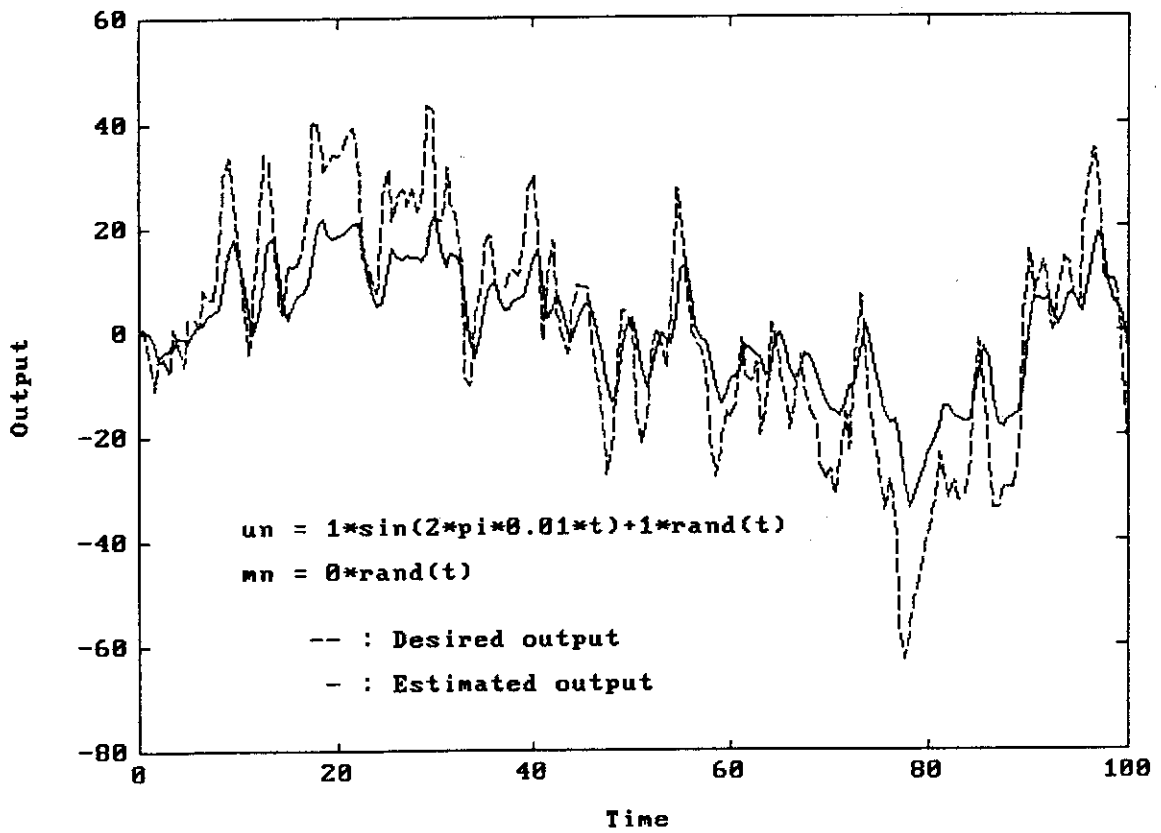


Fig. 5.4(b-3) Result of Kalman filter estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

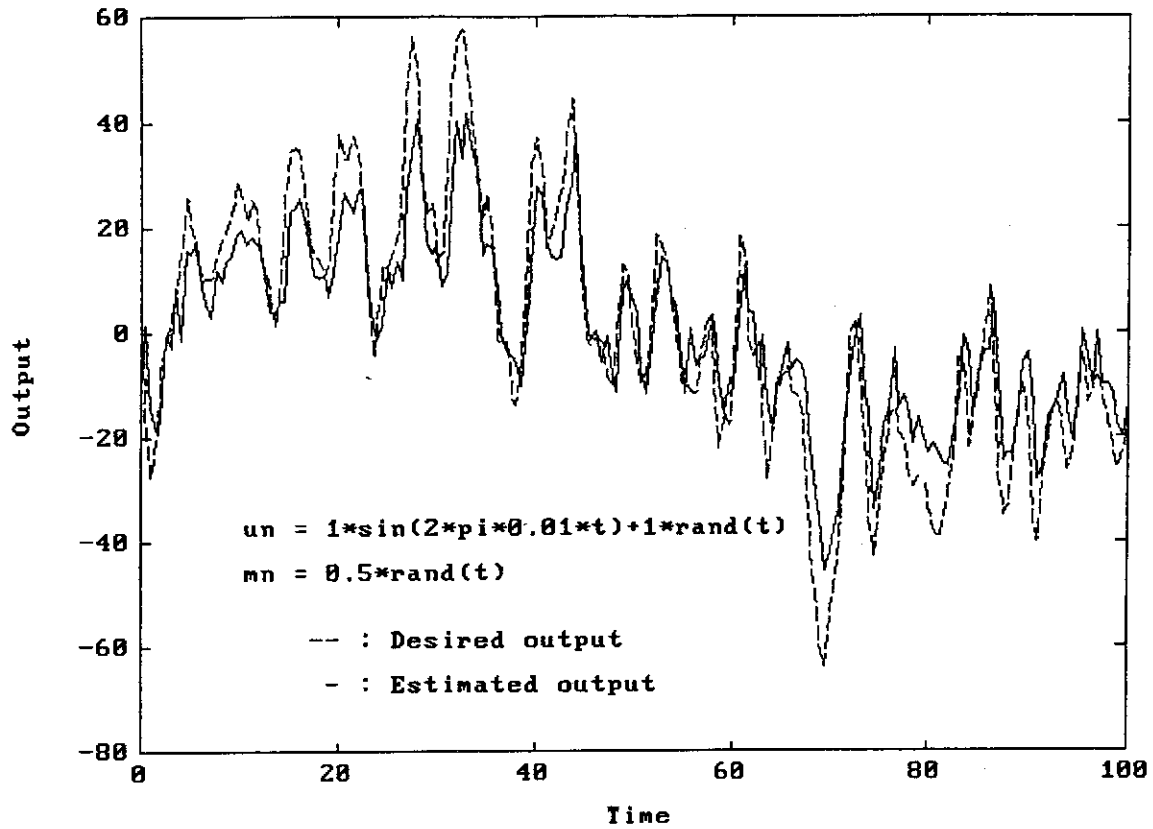


Fig. 5.4(a-4) Result of H_∞ -estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

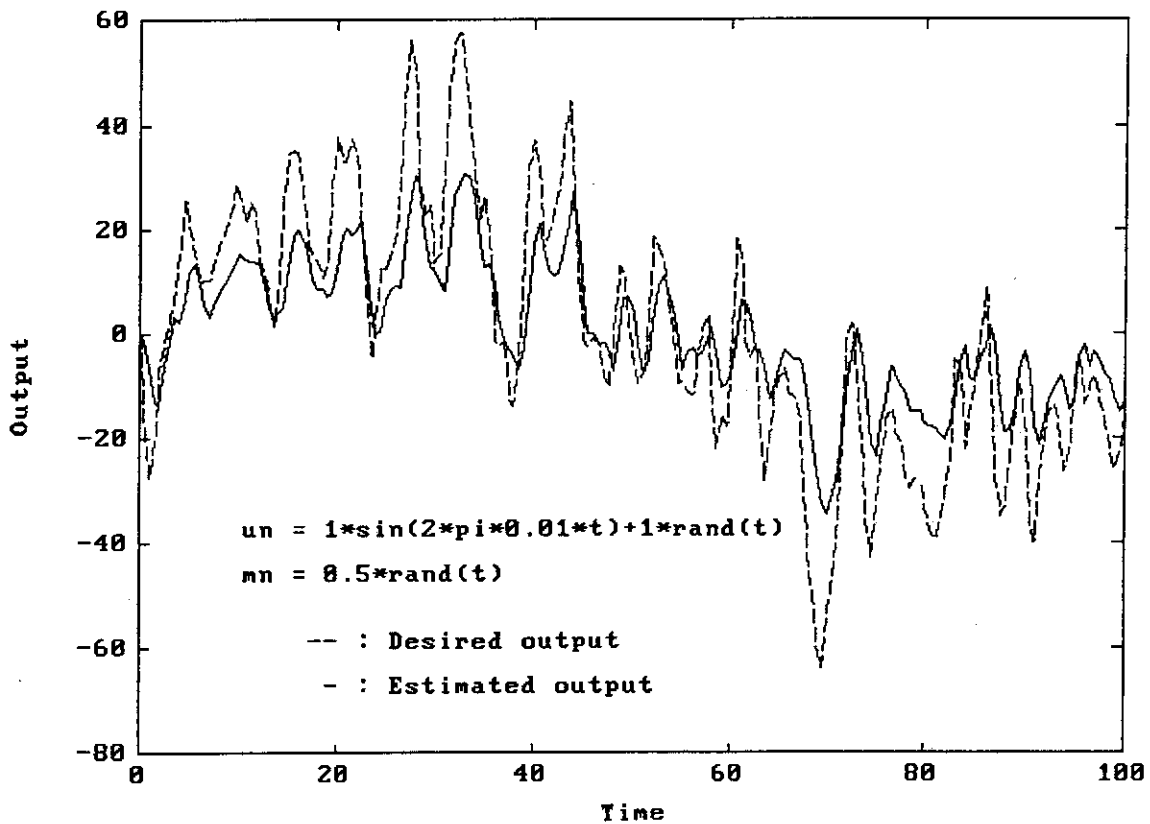


Fig. 5.4(b-4) Result of Kalman filter estimation : H_0 (sampling time = 0.5)

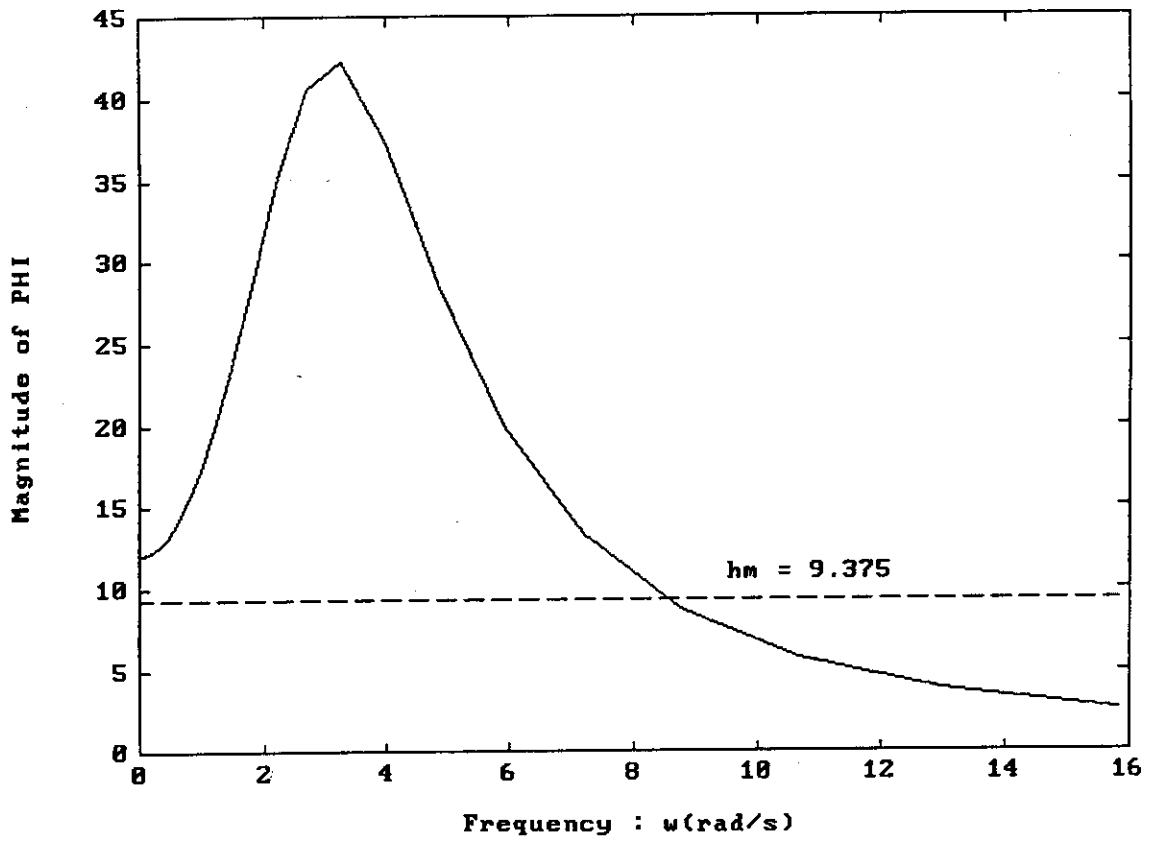


Fig. 5.5 Comparison of H_∞ -norm of $\Phi_k(s)$ in the Eq. ((3.2a))

付 録

付録1：(2.2)式の導出

共分散行列は次式で定義される。

$$\text{cov}(\omega(t), \omega(\tau)) := E[(\omega(t) - E\omega(t))(\omega(\tau) - E\omega(\tau))^T]$$

仮定(平均値=0)より、 $E\omega(t) = E\omega(\tau) = 0$ であるから、次の相関関数行列となる。

$$= E[\omega(t)\omega^T(\tau)]$$

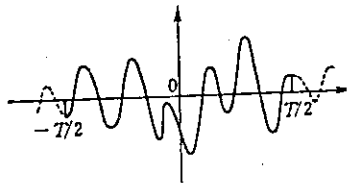
ベクトル $\omega(t)$ の要素 ω_1, ω_2 の無相関の仮定及び雑音は単位強度の白色雑音である仮定により、相関関数行列は対角要素がデルタ関数の対角行列となる。すなわち、任意の t, τ に対して、 $E[\omega(t)\omega^T(\tau)] = \delta(t-\tau)I_q$ であり、(2.2a)式を得る。

同様にして、 $E[n(t)n^T(\tau)] = \delta(t-\tau)I_m$ であり、(2.2b)式を得る。

付録2： $\Phi_{\omega\omega}(j\omega) = T(j\omega)T^*(j\omega)$ の導出

$-\infty < t < \infty$ において定義された雑音 $\omega(t), n(t)$ に対して任意の区間 $[-T/2, T/2]$ の部分を取り出して次の様に定義する(付図2.1参照)。

$$\omega_T(t) := \begin{cases} \omega(t) & ; |t| \leq T/2 \\ 0 & ; |t| > T/2 \end{cases} \quad (\text{付2.1})$$



付図2.1 $\omega_T(t)$ の定義

$n_T(t)$ も同様に定義する。 $\omega_T(t), n_T(t)$ のフーリエ変換を次の様になる。

$$\tilde{\omega}_T(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \omega_T(t)\exp(-j\omega t)dt \quad (\text{付2.2})$$

$$\tilde{n}_T(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} n_T(t)\exp(-j\omega t)dt \quad (\text{付2.3})$$

よって、入力ベクトル $(\omega_T(t) \ n_T(t))^T$ に対する制御量 $e(t)$ の周波数応答 $\tilde{e}_T(j\omega)$ は次式で与えられる。

$$\tilde{e}_T(j\omega) = T(j\omega) \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_T(j\omega) \\ \tilde{n}_T(j\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{付2.4})$$

さて、定常確率過程の $\{e(t)\}$ のパワースペクトル密度 $\Phi_{ee}(j\omega)$ は次の様に定義される[14]。

$$\Phi_{ee}(j\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} E\{\tilde{e}_T(j\omega)\tilde{e}_T^*(j\omega)/T\} \quad (\text{付2.5})$$

(付2.4)式を用いて $\{ \}$ を計算すると次式を得る。

$$\{ \} = T(j\omega) \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_T(j\omega)\tilde{\omega}_T^*(j\omega)/T & \tilde{\omega}_T(j\omega)\tilde{n}_T^*(j\omega)/T \\ \tilde{n}_T(j\omega)\tilde{\omega}_T^*(j\omega)/T & \tilde{n}_T(j\omega)\tilde{n}_T^*(j\omega)/T \end{pmatrix} T^*(j\omega) \quad (\text{付2.6})$$

(付2.2)式(付2.3)式を用いて行列の要素を計算することが出来る。例えば、

$$\tilde{\omega}_T(j\omega)\tilde{\omega}_T^*(j\omega)/T = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega\tau) d\tau \left[(1/T) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_T(t)\omega_T^*(t-\tau) dt \right]$$

ここで、 $[\]$ はベクトル $\omega_T(t)$ の相関関数行列であるから、それを $R_{w,w}(\tau:T)$ と書くと上式は次の様になる。

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{w,w}(\tau:T) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (\text{付2.7})$$

さて、 $R_{w,w}(\tau:T)$ とベクトル $\omega(t)$ の相関関数行列 $R_{w,w}(\tau)$ との次の関係式[14-P.25]

$$E\{R_{w,w}(\tau:T)\} = R_{w,w}(\tau)(1 - |\tau|/T)$$

を用いると、(付2.7)式は十分大きな T に対して次式となる。

$$E\{\tilde{\omega}_T(j\omega)\tilde{\omega}_T^*(j\omega)/T\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{w,w}(\tau)\exp(-j\omega\tau)d\tau \quad (\text{付2.8})$$

さて、 $R_{w,w}(\tau)$ はベクトル $w(t)$ の相関関数行列であり、ベクトル w の要素 $w_i(t)$ 、 $w_j(t)$ 間が無相関である仮定から、

$$R_{w,w}(\tau) = R_{w_i,w_j}(\tau)\delta_{i,j}I_q \quad (\text{付2.9})$$

である。従って

$$E\{\tilde{\omega}_T(j\omega)\tilde{\omega}_T^*(j\omega)/T\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{w_i,w_j}(\tau)\delta_{i,j}I_q\exp(-j\omega\tau)d\tau \quad (\text{付2.10})$$

右辺の対角要素は白色雑音の相関関数のフーリエ変換であるからウィーナ・ヒンチンの定理から白色雑音のパワースペクトル密度となる。いま、雑音強度が $\sigma_i = 1$; $i=1,2,\dots,q$ に規格化されていると仮定すると、上式は次のようになる。

$$= I_q \quad (\text{付2.11})$$

同様にして、

$$E\{\tilde{n}_T(j\omega)\tilde{n}_T^*(j\omega)/T\} = I_m \quad (\text{付2.12})$$

$$E\{\tilde{\omega}_T(j\omega)\tilde{n}_T^*(j\omega)/T\} = E\{\tilde{n}_T(j\omega)\tilde{\omega}_T^*(j\omega)/T\} = 0 \quad (\text{付2.13})$$

が導けるから、 $\Phi_{zz}(j\omega) = T(j\omega)T^*(j\omega)$ を得る。

付録3 : $\Phi_{zz} := \Delta\Delta^H$ 導出

Fig. 2.2 において外乱入力 $(\omega \ n)^T$ から出力 z までの伝達関数は $[G_c(s) \ I_m]$ であるから

$$\Phi_{zz} := [G_c(s) \ I_m][G_c(s) \ I_m]^H = G_c G_c^H + I_m = \Delta\Delta^H$$

を得る。

付録4 : (3. 2 b) 式の導出

次式を示せばよい。

$$I_q - G_c^H(\Delta^H)^{-1}\Delta^{-1}G_c = (I_q + G_c^H G_c)^{-1}$$

右辺を逆行列の補助定理によって、展開する。

$$\begin{aligned} (I_q + G_c^H G_c)^{-1} &= I_q^{-1} - I_q^{-1} G_c^H (I_m + G_c I_q^{-1} G_c^H)^{-1} G_c I_q^{-1} \\ &= I_q - G_c^H (I_m + G_c G_c^H)^{-1} G_c \end{aligned}$$

ここで、(3. 1 b) 式用いれば左辺を得る。

$$= I_q - G_c^H (\Delta \Delta^H)^{-1} G_c$$

付録5 : $G_k^H G_k$ と $h^2[I_1 - G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H]$ がスペクトル分解可能である説明

いずれもパラエルミート行列であり、 $s=\infty$ において正定である。また、 RL_∞ 空間に属することも解る。故に、スペクトル分解ができ RH_∞ 空間に因子とその逆元をもつ[7-pp.66-68]。

付録6 : $L_h L_h^H$ の固有値

複素数 s を固定すれば、 $G_k \Delta_k^{-1} \in C^{1 \times q}$ 、 $(\Delta_k^H)^{-1} G_k^H \in C^{q \times 1}$ であるから、これら行列の積である $G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H$ の固有値には $(1-q)$ のゼロが含まれる。他の q 個は非ゼロの固有値である (10-p.166, 系10)。

いま、このゼロ固有値に対応した $(G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H)$ の $(1-q)$ 本の1次独立な1次元固有ベクトルを x_0^i ; $i = 1, 2, \dots, (1-q)$ とすれば、次式が成立つ。

$$\begin{aligned} L_h L_h^H x_0^i &= h^2 [I_1 - G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H] x_0^i \\ &= h^2 x_0^i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, (1-q) \end{aligned}$$

故に、 $(1-q)$ 本の1次独立な1次元ベクトル x_0^i ; $i = 1, 2, \dots, (1-q)$ が h^2 に対して存在することになるから、 h^2 は $L_h L_h^H$ の $(1-q)$ 重根の固有値である。この時の固有ベクトル x_0^i ; $i = 1, 2, \dots, (1-q)$ は $G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H$ の固有値ゼロ ($(1-q)$ 重根) に対応する $(1-q)$ 本の1次独立な1次元固有ベクトルである。

次に、 $G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H$ の残り q 個の非ゼロの固有値が1であることを示そう。まず、スペクトル分解 (3. 3 a) 式から、

$$(\Delta_k^H)^{-1} G_k^H G_k \Delta_k^{-1} = I_q$$

を得る。明らかに、この式は固有値が1 (q 重根)で、それに対応する固有ベクトルとして1次独立な q 個の任意な q 次元複素ベクトルをとることが出来ることを示す。

一方、非ゼロの固有値に対しては次の事実が知られている[10-pp. 166-167]。すなわち、

$$\lambda_i(G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H) = \lambda_i((\Delta_k^H)^{-1} G_k^H G_k \Delta_k^{-1})$$

上の考察から右辺 = 1であるから、 $G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H$ の非ゼロの固有値は1であり、q重根であることが示された。そこで、それに対応する q 個の1次独立な 1次元固有ベクトルを $x_1^j; j=1, 2, \dots, q$ とすると次式が得られる。

$$\begin{aligned} L_h L_h^H x_1^i &= h^2 [I_1 - G_k \Delta_k^{-1} (\Delta_k^H)^{-1} G_k^H] x_1^i \\ &= 0 \\ &= 0 x_1^i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

これは q 個の1次独立な 1次元固有ベクトル $x_1^j; j=1, 2, \dots, q$ は $L_h L_h^H$ の固有ベクトルであり、固有値 0 は q 重根であることを意味する。

以上から、 $L_h L_h^H$ は q 重根のゼロと (1-q) 重根の h^2 とを固有値としてもつことが証明された。

付録7： (3. 5 a) および (3. 5 b) 式の導出

明らかに、 $Z_h := TT^H + L_h L_h^H \in RL_\infty$ であるから、 $H_\infty(I)$ p.19-(3.3.6) 式より、

$$\|Z_h\|_\infty := \text{ess sup} \{ \|Z_h(j\omega)\| \ ; \ -\infty < \omega < \infty \}$$

行列 A のノルムは $\|A\| := A$ の最大特異値 $= (\sigma_{\max}(A^*A))^{1/2}$ で定義されるから、

$$= \text{ess sup} \{ (\sigma_{\max}(Z_h(j\omega)^* Z_h(j\omega)))^{1/2} \ ; \ -\infty < \omega < \infty \}$$

ここで、 $Z_h(s)$ はパラエルミート行列であるから、 $Z_h(j\omega)^* = Z_h(j\omega)^H = Z_h(j\omega)$ である。

$$= \text{ess sup} \{ (\sigma_{\max}(Z_h(j\omega)^2))^{1/2} \ ; \ -\infty < \omega < \infty \}$$

文献10-p.166-系8より、 $\sigma_{\max}(A^2) = (\sigma_{\max}(A))^2$ であるから、

$$= \text{ess sup} \{ \sigma_{\max}(Z_h(j\omega)) \ ; \ -\infty < \omega < \infty \}$$

(3. 4) 式と $T^H(j\omega)=T^*(j\omega)$ 、 $L^H(j\omega)=L_h^*(j\omega)$ であるから、

$$= \text{ess sup}\{\sigma_{\max}(T(j\omega)T(j\omega)^* + L_h(j\omega)L_h(j\omega)^*); -\infty < \omega < \infty\}$$

ここで、 $T(j\omega)T(j\omega)^*$ 、 $L_h(j\omega)L_h(j\omega)^*$ はエリミート行列である。さらに、 $\forall h \in R$ に対して、 $L_h(j\omega)L_h(j\omega)^*$ の固有値が 0 と h^2 であることが解っているから、半正定である。文献10)-p. 272 定理10. 2から

$$\begin{aligned} &\geq \text{ess sup}\{\sigma_{\max}(T(j\omega)T(j\omega)^*); -\infty < \omega < \infty\} \\ &= \text{ess sup}\{[\sigma_{\max}(T(j\omega)T(j\omega)^*)^2]^{1/2}; -\infty < \omega < \infty\} \\ &= \text{ess sup}\{[\sigma_{\max}(T(j\omega)T(j\omega)^*)^*(T(j\omega)T(j\omega)^*)]^{1/2}; -\infty < \omega < \infty\} \\ &= \text{ess sup}\{\| (T(j\omega)T(j\omega)^*) \|; -\infty < \omega < \infty\} \end{aligned}$$

ここで、 $T(j\omega)^* = T(j\omega)^H$ であるから、

$$\begin{aligned} &= \text{ess sup}\{\| (T(j\omega)T(j\omega)^H) \|; -\infty < \omega < \infty\} \\ &= \| TT^H \|_{\infty} \end{aligned}$$

よって、

$$\| TT^H \|_{\infty} \leq \| Z_h \|_{\infty} \tag{付7.1}$$

一方、ノルムの公理から、

$$\| Z_h \|_{\infty} := \| TT^H + L_h L_h^H \|_{\infty} \leq \| TT^H \|_{\infty} + \| L_h L_h^H \|_{\infty} \tag{付7.2}$$

さて、 $\forall s$ に対して、 $L_h(s)L_h(s)^H$ の固有値は 0、 h^2 (h は任意の実数) であるから、 $\| \cdot \|_{\infty}$ の定義から

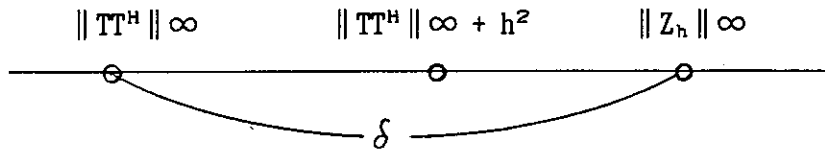
$$\| L_h L_h^H \|_{\infty} = h^2$$

である。故に、(付7. 1) と (付7. 2) 式から (3. 5 a) 式を得る。

(3. 5 b) 式は次の様にして得られる。いま、 $\| TT^H \|_{\infty} < \| Z_h \|_{\infty}$ と仮定する。正数 δ を次の様に定義する。

$$\delta := \|Z_h\|_\infty - \|TT^H\|_\infty > 0$$

h は任意の実数であるから、 $h^2 < \delta$ となる様に h を採ることが出来る。この h に対しては、下図のようになるから、(3.5 a) 式が成立たない (矛盾する)。



故に、(3.5 b) 式が得られる。

付録8 : (3.11) 式が定義可能である説明 (1)

$\Delta(s)$ は (3.1 b) 式のスペクトル因子であるから、 $\Delta \in (RH_{m,m})_\infty$ である。 Δ の分子を N とし、分母を D とする。 $N = \delta_+ \delta_-$ と書ける。ただし、 δ_+ は次数が m_+ であり、そのゼロ点がすべて右半平面にあり、 δ_- は次数が m_- であり、そのゼロ点がすべて左半平面にあるものである ($m_+ + m_- = m$)。

付録9 : ゼロ出力入力方向 m 次元ベクトル $d_i; i=1, 2, \dots, m$ の求め方

先ず、 $\Delta \Delta^H = I_m + G_c G_c^H$ の状態空間表現 $S(A, B, C, D)$ を求める。ここで、 $A \in R_{n,n}$ 、 $B \in R_{n,d}$ 、 $C \in R_{d,n}$ 、 $D \in R_{d,d}$ である。これに基づきシステム行列 $P(s)$ を次の様に定義する。これは $(n+d, n+d)$ -行列である。

$$P(s) := \begin{pmatrix} sI_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{付9.1}$$

$\det(P(s)) = 0$ となる $s = z_i$ をこのシステムの不変ゼロ点という。ブロック行列 $P(s)$ の行列式 $\det P(s)$ は次のように求まる [10-p.41, 定理2.3]。

$$\det P(s) = (\det D) \cdot \det((sI_n - A) - (-B)D^{-1}C) = (\det D) \cdot \det(sI_n - (A - BD^{-1}C))$$

よって、システムの不変ゼロ点は行列 $(A - BD^{-1}C)$ の固有値であることがわかる。いま、異なるゼロ点 $z_i; i = 1, 2, \dots, p$ とする。次式を満たす n 次元ベクトル r_i および d 次元ベクトル d_i が存在する [15, 12-p.14]。

$$P(z_i) \begin{pmatrix} r_i \\ d_i \end{pmatrix} = 0; i = 1, 2, \dots, p \tag{付9.2}$$

r_i をゼロ出力となる初期状態方向 (zero-state direction)、 d_i をゼロ出力となる入力ベクトル (ゼロ出力入力方向) という。すなわち、入力ベクトル $u_i(t)=d_i \exp(z_i t) 1(t)$ に対して、状態ベクトルは $x_i(t)=r_i \exp(z_i t)$ のように動き、その出力は

$$y_i=Cx_i(t) \equiv 0 \quad (t \geq 0) \quad (\text{付9.3})$$

である [15, 12-p.14]。

なお、システムゼロ点 z_i に対して、 $\Delta(z_i)\Delta^H(z_i) = 0$ である (\because 入出力関係は一般的に次式で表せる。

$$y(s) = \Delta(s)\Delta^H(s)u(s) \quad (\text{付9.4})$$

$u_i(s)=d_i/(z_i-s)$ に対して、(付9.3)式から

$$\Delta(s)\Delta^H(s)(1/z_i-s) \equiv 0$$

が任意の s で成立たなければならない。故に、少なくとも $\Delta(z_i)\Delta^H(z_i) = 0$ である)。