JAERI-M
91-168

トカマクにおける磁場リップルとのサイクロトロン共鳴による磁気モーメントの発展

1 9 9 1 年10月

田中　正俊*

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-M レポートは，日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは，日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて，お申しこしください。なお，このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

編集兼発行　日本原子力研究所
印　　刷　いばらき印刷㈱

トカマクにおける磁場リップルとのサイクロトロン共鳴による磁気モーメントの発展

日本原子力研究所那珂研究所核融合工学部
田中正俊*

（1991年9月20日受理）

トカマクのトロイダル磁場リップルが磁力線に沿って走る粒子のサイクロトロン運動と共鳴する場合がある。この共鳴は断熱不変量である磁気モーメントの値を変化させる。磁気モーメントに対する運動方程式を離散化して，引き続く共鳴点をこえた時の写像として定式化する。それに基づいて磁気モーメントの変化の線形安定性及び運動がストキャティックになった場合の拡散係数を導く。

那珂研究所：〒311 － 01 茨城県那珂郡那珂町大字向山 801 － 1
*特別研究員

Evolution of Magnetic Moment due to the Cyclotron Resonance with Field Ripples in a Tokamak

Masatoshi TANAKA*

Department of Fusion Engineering Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received September 20, 1991)

Toroidal field ripples of tokamaks resonate under certain conditions with the cyclotron motion of charged particles streaming along the magnetic field lines. This resonance may yield the evolution of the magnetic moment, a good adiabatic invariant of the motion in magnetic fields. The equation of motion for the magnetic moment is discretized to a mapping which describes the evolution of the magnetic moment across the successive resonances. On the basis of the mapping, derived the linear stability of the motion in the phase space and the diffusion constant of the magnetic moment when the motion becomes stochastic.

Keywords: Tokamak, Cyclotron Resonance, Magnetic Moment, Field Ripples

* Science Adviser

目　　次

Contents

1. はじめに

ゆるやかに変化する磁場中の荷電粒子はほぼ周期的な回転運動（サイクトロン運動）を行いつつ複雑な軌道を画く。このサイクトロン運動の自由度に対応する作用変数は，常数因子を別にすれば磁気閉じ込めで常用されている荷電粒子の磁気モーメント

$$\mu=\frac{v_{\perp}^{2}}{2B} \tag{1.1}$$

に他ならない（$v_{\perp}$ は磁場に垂直方向の速度成分，また以下質量は m＝1とする)。したがって μ は磁場中の荷電粒子の運動に対する断熱不変量である。

磁気モーメントの断熱不変性は粒子の運動に対する強い拘束条件となる。良く知られているように $\mu=const.$ はミラー磁場によるプラズマ閉じ込めの基礎であり，またミラー磁場に限らず磁気閉じ込め解析に広く用いられている。しかし磁場のゆるやかな変化を小さなパラメータ ε で特徴づけたとすると，磁気モーメントの断熱不変性とは一般的には $1/\varepsilon$ のオーダーの時間まで μ の変化が無視できるということである。より長い時間，例えば $1/\varepsilon^2$ さらに無限大の時間まで μ が一定であることを保証するものではない。一方磁気閉じ込めて考えている粒子の閉じ込め時間はいうまでもなく $1/\varepsilon$ よりずっと長く，また衝突時間も同様の場合がある。このとき実際に磁気モーメントの変化が ε にどのように依存するか，その評価が重要になる。$\mu=const.$ はミラー閉じ込めの原点であり，この問題はミラー磁場について詳しく調べられている。[1)]

くり返しになるが，磁気モーメントはサイクロトロン運動の自由度に対する作用変数である。その値は他の運動自由度，例えば磁力線に沿っての運動とのカップリングによって変化しうる。当然のことながらカップルする運動が周期的でサイクロトロン運動と共鳴するとき影響が大きい。例えばミラー磁場ではミラー間の往復運動どの共鳴が重要であるが，そのときの μ の変化は exp（$-1/\varepsilon$）のオーダであること，すなわち $\mu=const.$ は非常に良く成立つことが知られている。また外場との共鳴も磁気モーメントを変化させる。(さらに系のパラメータの変化に伴って粒子の相軌道がセパラトリックスを横切るときにも断熱不変性の破れることが知られている)。[2)]

いまミラー間の往復運動とサイクロトロン運動の共鳴による μ の変化は exp（$-1/\varepsilon$）で $\mu=const.$ は非常に良く成立っていると述べた。exp（$-1/\varepsilon$）は ε のどんな巾より小さいが，このことは磁気モーメントが $1/\varepsilon^n$（$n\to\infty$）のオーダーの時間まで，すなわち無限大の時間まで一定値をとるということではない。ε がある臨界値を越えると，相空間での運動はランダムになり μ は拡散法則に従って変化するようになる。このとき閉じ込めの観点から問題となるのは μ の拡散係数の大きさである。

軸対称な磁場配位のトカマクは粒子軌道の閉じ込めに関して非常に良い性能をもっている。DT 反応で生成されるエネルギーの大きいアルファ粒子も，プラズマ電流が数 MA 以上であれば，その大部分の軌道は閉じ込め領域を出て行くことはない。しかし実際のトカマクではコイルが分割して配置されているため，トロイダル磁場は一様ではない。軸対称性を乱すこの磁場の

リップルはとくにエネルギーの大きい粒子の軌道閉込めに大きな影響を与える。リップルを小かくするためには，コイルを大型化する，あるいはコイルの個数を増してギャップをせまくすることが必要であるが，これはコスト，技術の両面で問題がある。このため閉じ込め性能を考えてどの程度の大きさのリップルまで許容できるか，すでに詳しい検討が行われている。[3]（リップルと同様，トカマクの実験で観測されているmhd振動も磁場の軸対称性を乱し，したがって粒子の軌道閉じ込め性能を悪化させる。まだ詳しい評価はなされていない)。

磁場リップルの周期を $2\pi/N$，すなわちトロイダル磁場の強さがトーラス方向に周期 $2\pi/N$ で変化するとする。トカマクでは磁力線はほぼトーラス方向を向いているので，トーラス中心軸から距離 R のところを磁力線に沿って走る粒子に対するサイクロトロン共鳴の条件は

$$k_{11}v_{11}=\frac{R}{N}v_{11}=\omega_c$$

となる。ここで $\omega_c=|e|B/c$ はサイクロトロン角周波数，また v_{11} は磁力線方向の速さである。ここではこの共鳴の効果によって運動がランダムになった場合の磁気モーメントの拡散係数を評価する。磁場リップルとのサイクロトロン共鳴はHintonによって最初取上げられ，次いでPutvinskiによってトロイダル効果を考慮して調べられている。[4]

以下§2で磁気モーメントとそれに共役なサイクロトロン運動の位相角に対する運動方程式を導き，§3でそれを解いて粒子が共鳴点を通過するときの磁気モーメントの変化を求める。これを用いて§4でその変化をプラズマ断面上の写像として定式化する。最後に§5で写像の安定性と十分不安定になった場合の磁気モーメントの拡散係数を評価する。また関連する事項についてのメモを付録とした。

2. μ および ϕ の運動方式

磁気モーメント μ に共役な角変数はサイクロトロン運動の位担角 ϕ である（常数因子は無視)。この節では真空静磁場のばあいについて μ, ϕ の運動方程式を導く。

まず磁気モーメントから始める。$\mu=v_\perp^2/2B$ を時間微分して

$$\dot{\mu}=\frac{v_\perp}{B}\dot{v}_\perp-\frac{v_\perp^2}{2B^2}\dot{B} \tag{2.1}$$

この右辺を μ, ϕ, v_{11} の関数の形に変形する。[5] まず右辺の第1項の $\dot{v}_\perp$ を書きかえる。

$$\boldsymbol{v}=v_\perp\boldsymbol{e}+v_{11}\boldsymbol{b} \tag{2.2}$$

と表わすと（$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ は磁場に垂直，平行方向の単位ベクトル）

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{v}_\perp\boldsymbol{e}+v_\perp\dot{\boldsymbol{e}}+\dot{v}_{11}\boldsymbol{b}+v_{11}\dot{\boldsymbol{b}}. \tag{2.3a}$$

リップルはとくにエネルギーの大きい粒子の軌道閉込めに大きな影響を与える。リップルを小かくするためには，コイルを大型化する，あるいはコイルの個数を増してギャップをせまくすることが必要であるが，これはコスト，技術の両面で問題がある。このため閉じ込め性能を考えてどの程度の大きさのリップルまで許容できるか，すでに詳しい検討が行われている。[3]（リップルと同様，トカマクの実験で観測されているmhd振動も磁場の軸対称性を乱し，したがって粒子の軌道閉じ込め性能を悪化させる。まだ詳しい評価はなされていない)。

磁場リップルの周期を$2\pi/N$，すなわちトロイダル磁場の強さがトーラス方向に周期$2\pi/N$で変化するとする。トカマクでは磁力線はほぼトーラス方向を向いているので，トーラス中心軸から距離Rのところを磁力線に沿って走る粒子に対するサイクロトロン共鳴の条件は

$$k_{11}v_{11}=\frac{R}{N}v_{11}=\omega_c$$

となる。ここで$\omega_c=|e|B/c$はサイクロトロン角周波数，またv_{11}は磁力線方向の速さである。ここではこの共鳴の効果によって運動がランダムになった場合の磁気モーメントの拡散係数を評価する。磁場リップルとのサイクロトロン共鳴はHintonによって最初取上げられ，次いでPutvinskiによってトロイダル効果を考慮して調べられている。[4]

以下§2で磁気モーメントとそれに共役なサイクロトロン運動の位相角に対する運動方程式を導き，§3でそれを解いて粒子が共鳴点を通過するときの磁気モーメントの変化を求める。これを用いて§4でその変化をプラズマ断面上の写像として定式化する。最後に§5で写像の安定性と十分不安定になった場合の磁気モーメントの拡散係数を評価する。また関連する事項についてのメモを付録とした。

2. μおよびϕの運動方式

磁気モーメントμに共役な角変数はサイクロトロン運動の位担角ϕである（常数因子は無視)。この節では真空静磁場のばあいについてμ，ϕの運動方程式を導く。

まず磁気モーメントから始める。$\mu=v_\perp^2/2B$を時間微分して

$$\dot{\mu}=\frac{v_\perp}{B}\dot{v}_\perp-\frac{v_\perp^2}{2B^2}\dot{B} \tag{2.1}$$

この右辺をμ，ϕ，v_{11}の関数の形に変形する。[5] まず右辺の第1項の$\dot{v}_\perp$を書きかえる。

$$\boldsymbol{v}=v_\perp\boldsymbol{e}+v_{11}\boldsymbol{b} \tag{2.2}$$

と表わすと（$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{b}$は磁場に垂直，平行方向の単位ベクトル）

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\mathrm{v}}\_\boldsymbol{e}+v_\perp\dot{\boldsymbol{e}}+\dot{v}_{11}\boldsymbol{b}+v_{11}\dot{\boldsymbol{b}}. \tag{2.3a}$$

またニュートンの運動方程式

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\omega_c v_{\perp}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b} \tag{2.3b}$$

がある。ここで $\omega_c=eB/c$。(2.3 b) から $\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{e}=0$，また $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}=1$ から $\boldsymbol{e}\cdot\dot{\boldsymbol{e}}=0$ に注意して (2.3 a) から

$$\begin{aligned}\dot{v}_{\perp}&=-v_{11}\boldsymbol{e}\cdot\dot{\boldsymbol{b}}\\&=-v_{\perp}v_{11}\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{e}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}-v_{11}^2\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{2.4}$$

がえられる。ここで

$$\dot{\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{v}_{\perp}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+v_{11}(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$$

を用いた。ここで $(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$ を次のように２つの形に変形する。真空磁場 ($\nabla\times\boldsymbol{B}=0$) なので

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\nabla B^2-\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=B\nabla B \tag{2.5a}$$

一方 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{b}$ を用いて

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}&=(B\boldsymbol{b}\cdot\nabla)B\boldsymbol{b}\\&=B^2(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+B\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)B\end{aligned} \tag{2.5b}$$

(2.5 a)，(2.5 b) と $\boldsymbol{e}$ のスカラー積をとって

$$\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=\frac{1}{B}\boldsymbol{e}\cdot\nabla B$$

これを (2.4) の第２項に代入すると

$$\dot{v}_{\perp}=-v_{\perp}v_{11}\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{e}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}-\frac{\mathrm{v}_{11}^2}{\mathrm{B}}\boldsymbol{e}\cdot\nabla B \tag{2.6}$$

がえられる。

一方 (2.1) 第２項の $\dot{B}$ は

$$\dot{B}=V_{\perp}\boldsymbol{e}\cdot\nabla B+v_{11}\boldsymbol{b}\cdot\nabla B \tag{2.7}$$

である。(2.6)，(2.7) を (2.1) に代入すると

$$\dot{\mu}=-\frac{v_{\perp}}{2B^2}(v_{\perp}^2+2v_{11}^2)\boldsymbol{e}\cdot\nabla B-\frac{v_{\perp}^2v_{\perp}}{2B}\left(2\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\frac{1}{B}\boldsymbol{b}\cdot\nabla B\right) \tag{2.8}$$

がえられる。

(2.8) の右辺の計算を進める。サイクロトロン運動の位相角 ϕ を用いて

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_1\cos\phi-\boldsymbol{e}_2\sin\phi \tag{2.9}$$

とおく。$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$。但し $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ の取り方の任意性は後にきめる。これを代入すると，(2.8) の第２項の $2\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{e}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$ は次のようになる。

$$2\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{e}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{b} \\ +\cos2\phi[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{b}] \\ -\sin2\phi[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla+\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{b}] \tag{2.10}$$

このうちϕによらない始めの２項は

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2=\nabla\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$$

と書ける。ここで右辺の第１項は

$$0=\nabla\cdot\boldsymbol{B}=B\nabla\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\nabla B$$

を用いて

$$\nabla\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{B}\boldsymbol{b}\cdot\nabla B$$

また第２項は

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\left(\frac{1}{2}\nabla b^2-\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})\right)=0$$

したがって

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=-\frac{1}{B}\boldsymbol{b}\cdot\nabla B$$

これを (2.10), さらに (2.8) に代入すると, (2.8) の第２項のϕによらない項は相殺し

$$\dot{\mu}=-\frac{v_\perp}{2B^2}(v_\perp^2+2v_{11}^2)\boldsymbol{e}\cdot\nabla B \\ -\frac{v_\perp^2 v_{11}}{2B}[\cos2\phi(\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{b}) \\ -\sin2\phi(\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{b})] \tag{2.11}$$

がえられる。エネルギーの保存則を用いれば v_{11} はμで表わされるので (2.11) の右辺は共役な変数μ, ϕの関数で，これが求めているμの運動方程式である。

一方$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$の選び方には任意性が残っているが，ここで

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{b}\times\nabla\mathrm{B}|}\boldsymbol{b}\times\nabla B$$

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{b}=\frac{1}{|\boldsymbol{b}\times\nabla B|}(\nabla B-(\boldsymbol{b}\cdot\nabla B)\boldsymbol{b})=\frac{1}{|\boldsymbol{b}\times\nabla B|}\nabla_\perp B \tag{2.12}$$

とすると，(2.11) の右辺に現われる$\boldsymbol{e}\cdot\nabla B$は

$$\boldsymbol{e}\cdot\nabla\mathrm{B}=\cos\phi\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla B=\cos\phi\,|\nabla_\perp B|$$

したがって磁力線の曲率半径，$1/\rho=|\nabla_\perp B|/B$を用いると磁気モーメント$\boldsymbol{\mu}$に対する運動方程式は次の形になる。

$$\dot{\mu}=-\frac{v_\perp(v_\perp^2+2v_{11}^2)}{2B^2}\frac{1}{\rho}\cdot\cos\phi+(\cos2\phi,\ \sin2\phi の項) \qquad (2.13)$$

次に角変数ϕに対する運動方程式を導く。(2.2)，(2.9) から得られる

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}=v_\perp\cos\phi,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2=-v_\perp\sin\phi$$

を時間微分して$\dot{\phi}$について解くと

$$\dot{\phi}=-\frac{1}{v_\perp}[(\boldsymbol{v}\dot{\cdot}\boldsymbol{e}_1)\sin\phi+(\boldsymbol{v}\dot{\cdot}\boldsymbol{e}_2)\cos\phi] \qquad (2.14)$$

となる。右辺に現われる ($\boldsymbol{v}\dot{\cdot}\boldsymbol{e}_1$)，($\boldsymbol{v}\dot{\cdot}\boldsymbol{e}_2$) は運動方程式を用いると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\dot{\cdot}\boldsymbol{e}_1)&=\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_1\\&=-\omega_c v_\perp\sin\phi-v_\perp\sin\phi\boldsymbol{e}_2\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_1+v_{11}\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_1\\(\boldsymbol{v}_1\dot{\cdot}\boldsymbol{e}_2)&=-\omega_c v_\perp\cos\phi+v_\perp\cos\phi\boldsymbol{e}_1\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_2+v_{11}\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_2\end{aligned}$$

となって，これを (2.4) に代入すると

$$\dot{\phi}=\omega_c+(\sin^2\phi\boldsymbol{e}_2\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_1-\cos^2\phi\boldsymbol{e}_1\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_2)-\frac{v_{11}}{v_\perp}(\sin\phi\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_1+\cos\phi\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{e}}_2)$$

となる。$\dot{\boldsymbol{e}}_1$，$\dot{\boldsymbol{e}}_2$を

$$\dot{\boldsymbol{e}}_1=v_\perp[\cos\phi(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_1-\sin\phi(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_1]+v_{11}(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_1$$

等として，簡単のための位相によらない項のみ書くこと

$$\begin{aligned}\dot{\phi}=\omega_c&+\frac{v_{11}}{2}[\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_1]\\&-\frac{v_{11}}{2}[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{e}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_1]+(\cos\phi,\ \sin\phi,\ \cos2\phi,\ \sin2\phi の項)\end{aligned} \qquad (2.15)$$

となる。$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$を磁場方向に微分して得られる

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_1=0$$

を用いると (2.15) の第1項は

$$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_1=2\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2$$

と書ける。一方第3項は消える。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\cdot[(\boldsymbol{e}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2-(\boldsymbol{e}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_1]&=\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{e}_1\nabla\cdot\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\nabla\cdot\boldsymbol{e}_1-\nabla\times(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)]\\&=-\boldsymbol{b}\cdot\nabla\times\boldsymbol{b}=0\end{aligned}$$

ここで真空磁場に対して成立つ関係式

$$0=\nabla\times\boldsymbol{B}=B\nabla\times\boldsymbol{b}+\nabla B\times\boldsymbol{b}$$

を用いた。これらを (2.15) に代入すると，位相 ϕ に対する運動方程式は最終的に次のように書ける。

$$\dot{\phi}=\omega_c+v_{\parallel}\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2+(\cos\phi,\ \sin\phi,\ \cos2\phi,\ \sin2\phi\text{の項}) \tag{2.16}$$

(2.11) あるいは (2.13) と (2.16) がそれぞれ μ, ϕ に対する運動方程式である。

なお，$\boldsymbol{v}_\perp=v_\perp\boldsymbol{e}$ のうち，∇B ドリフトの速度

$$\boldsymbol{v}_g=\frac{c(v_\perp^2+2v_\parallel^2)}{2eB^3}\boldsymbol{B}\times\nabla B$$

は ∇B に垂直であるので，すなわち $\boldsymbol{e}\cdot\nabla B=0$ であるので，磁気モーメントに対する運動方程式における主要項，(2.11) の第１項には寄与しない。

3. 共鳴点を通過したときの μ の変化

円断面，高アスペクト比 ($\varepsilon=r/R_0\ll1$) のトカマクを考え，磁場は最も簡単に次のように与える。

$$\begin{aligned}&B_r=0\\&B_\theta=B_{\theta0}(r)(1-\varepsilon\cos\theta)\\&B_\phi=B_\phi=B_0(1-\varepsilon\cos\theta+\delta\cos N\phi)\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで $\delta=\delta\ (r,\ \theta)\ll1$ は磁場リップルの振巾を表わす。$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ の条件から B_r, B_θ をリップル依存の項を含むが，粒子の運動は実際上 B_ϕ と $B_{\theta0}$ で決まるのでそれらは無視した。またトカマクでは $B_{\theta0}/B_0=\varepsilon/q\ll1$ (q: 安全係数) であるので，$B=B_\phi$, したがって磁力線の曲率半径 ρ は次で与えられる。

$$\frac{B}{\rho}=|\nabla_\perp B|=|\nabla B-(\boldsymbol{b}\cdot\nabla B)\boldsymbol{b}|$$

$$\simeq\frac{B_0}{R_0}(1-\delta'\cos N\phi) \tag{3.2}$$

$$\delta'=R_0\left(\frac{\partial\delta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\delta}{\partial\theta}\right)$$

以下 $\delta'=const.\ll1$ と見なす。

これを磁気モーメントに対する運動方程式 (2.13) の右辺に代入する。(3.2) の第１項の寄与はサイクロトロン運動の位相角 ϕ で平均すると消え，主要項のみ残すと結局次のようになる。

$$\frac{d\mu}{dt}=\sqrt{\frac{\mu}{2B_0}}\frac{(v_0^2-\mu B_0)}{R_0}\delta'\,[\cos(N\phi+\phi)+\cos(N\phi-\phi)] \tag{3.3}$$

ここで $v_0^2=v_\perp^2+v_\parallel^2=const.$ である。

を用いた。これらを (2.15) に代入すると，位相ϕに対する運動方程式は最終的に次のように書ける。

$$\dot{\phi}=\omega_c+v_{11}\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{e}_2+(\cos\phi,\ \sin\phi,\ \cos2\phi,\ \sin2\phi\text{の項}) \tag{2.16}$$

(2.11) あるいは (2.13) と (2.16) がそれぞれμ，ϕに対する運動方程式である。

なお，$\boldsymbol{v}_\perp=v_\perp\boldsymbol{e}$のうち，$\nabla B$ドリフトの速度

$$\boldsymbol{v}_g=\frac{c(v_\perp^2+2v_{11}^2)}{2eB^3}\boldsymbol{B}\times\nabla B$$

は∇Bに垂直であるので，すなわち$\boldsymbol{e}\cdot\nabla B=0$であるので，磁気モーメントに対する運動方程式における主要項，(2.11) の第1項には寄与しない。

3. 共鳴点を通過したときのμの変化

円断面，高アスペクト比 ($\varepsilon=r/R_0\ll1$) のトカマクを考え，磁場は最も簡単に次のように与える。

$$\begin{aligned} B_r&=0\\ B_\theta&=B_{\theta0}(r)(1-\varepsilon\cos\theta)\\ B_\phi&=B_\phi=B_0(1-\varepsilon\cos\theta+\delta\cos N\phi)\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで$\delta=\delta\ (r,\ \theta)\ll1$は磁場リップルの振巾を表わす。$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$の条件から$B_r$，$B_\theta$をリップル依存の項を含むが，粒子の運動は実際上$B_\phi$と$B_{\theta0}$で決まるのでそれらは無視した。またトカマクでは$B_{\theta0}/B_0=\varepsilon/q\ll1$ (q：安全係数) であるので，$B=B_\phi$，したがって磁力線の曲率半径ρは次で与えられる。

$$\frac{B}{\rho}=|\nabla_\perp B|=|\nabla B-(\boldsymbol{b}\cdot\nabla B)\boldsymbol{b}|$$

$$\simeq\frac{B_0}{R_0}(1-\delta'\cos N\phi) \tag{3.2}$$

$$\delta'=R_0\left(\frac{\partial\delta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\delta}{\partial\theta}\right)$$

以下$\delta'=const.\ll1$と見なす。

これを磁気モーメントに対する運動方程式 (2.13) の右辺に代入する。(3.2) の第1項の寄与はサイクロトロン運動の位相角ϕで平均すると消え，主要項のみ残すと結局次のようになる。

$$\frac{d\mu}{dt}=\sqrt{\frac{\mu}{2B_0}}\frac{(v_0^2-\mu B_0)}{R_0}\delta'\left[\cos(N\phi+\phi)+\cos(N\phi-\phi)\right] \tag{3.3}$$

ここで$v_0^2=v_1^2+v_{11}^2=const.$である。

リップルの振中は$\delta \ll 1$と考えてよいので，（3.3）を$\delta = 0$のときの粒子軌道に沿って積分する。§2の最後に述べたように，∇Bドリフトは磁気モーメントの変化に寄与しないので，磁力線方向の運動とサイクロトロン運動のみ考える。最低次の近似として，磁力線方向の速度にのみトロイダル効果を考え，またϕについては（2.16）の第1項のみ，すなわち$\dot{\phi} = \omega_c$とする。時間変数をポロイタル方向の角度θに変えると（$dt =$ （qR_0/v_{11}） $d\theta$），（3.3）は次の方程式の解に沿って積分すればよいことになる。

$$\frac{d\phi}{d\theta} = q \tag{3.4a}$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{qR_0\omega_c}{v_{11}(\theta)} \tag{3.5a}$$

したがって（3.3）の右辺の振動項の位相は

$$\begin{aligned}\chi_{\pm}(\theta) &= N\phi \pm \phi \\ &= N\phi_0 \pm \phi_0 + Nq\int_0^{\theta}\left(1 \pm \frac{v_{11*}}{v_{11}(\theta')}\right)d\theta'\end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで

$$v_{11*} = \frac{R_0\omega_c}{N}$$

$$\begin{aligned}v_{11}(\theta) &= \pm\sqrt{v_0^2 - v_{\perp}^2} = \pm\sqrt{v_0^2 - 2\mu B} \\ &= \pm v_{110}\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\kappa^2} = \frac{2\varepsilon v_{\perp 0}^2}{v_{110}^2}$$

である。（3.3）を積分するとμの増分

$$\mu - \mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{2B_0}}(v_0^2 - \mu B_0)q\delta' \int_0^{\theta} d\theta' \frac{1}{v_{11}(\theta')}(\cos\chi_+(\theta') + \cos\chi_-(\theta')) \tag{3.7}$$

が求められる。

$Nq \gg 1$とすると$\chi_{\pm}(\theta)$の変化は速く，

$$\left.\frac{d\chi_{\pm}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_*} = 0 = 1 \pm \frac{v_{11*}}{v_{11}(\theta_*)} \tag{3.8}$$

を充すθ_*の近傍以外では打消し合ってしまう。この$\theta = \theta_*$の点でリップル磁場とのサイクロトロン共鳴がおこる。共鳴点が存在するためには，

$$0 < \sin^2\frac{\theta_*}{2} = \kappa^2\left(1 - \frac{v_{11*}^2}{v_{110}^2}\right) < 1 \tag{3.9}$$

でなければならない。また$\theta = \theta_*$が共鳴点ならば，上下対称性から$\theta = 2\pi - \theta_*$も共鳴点となる。

次に$v_{110} > 0$として(3.7)の積分を評価する。積分に寄与するのは$\chi_-(\theta)$の項のみである($v_{110} < 0$に対しては$\chi_+(\theta)$, 計算は全く同じ)。共鳴が存在するとして，共鳴点のまわりに位相を展開する。

$$\chi_-(\theta)=\chi_-(\theta_*)+\frac{1}{2}\chi''_-(\theta_*)(\theta-\theta_*)^2 \tag{3.10}$$

$$\chi_-(\theta_*)=N\phi_0+\psi_0+Nq\int_0^{\theta_*}\left(1-\frac{v_{11*}}{v_{11}(\theta')}\right)d\theta'$$

$$\chi''(\theta_*)=Nqv_{11*}\frac{v'_{11}(\theta_*)}{v^2_{11}(\theta_*)}$$

$\chi''(\theta)$は,

$$v_{11}\ (\theta_*)\ =v_{11*},$$

$$v''_{11}(\theta_*)=-\frac{v^2_{110}}{2v_{11}(\theta_*)}\frac{1}{\kappa^2}\sin\frac{\theta_*}{2}\cos\frac{\theta_*}{2}$$

$$=-\frac{v^2_{110}}{2v^2_{11*}}\frac{1}{\kappa^2}\kappa\sqrt{1-\frac{v_{11*}}{v^2_{110}}}\sqrt{1-\kappa^2(1-\frac{v^2_{11*}}{v^2_{110}})}$$

なので

$$\chi''_-(\theta_*)=-\frac{Nqv^2_{110}}{v^2_{11*}}\frac{1}{\kappa}\sqrt{1-\frac{v^2_{11*}}{v^2_{110}}}\sqrt{1-\kappa^2\left(1-\frac{v^2_{11*}}{v^2_{110}}\right)} \tag{3.11}$$

となる。

共鳴点の近傍での積分を次のように行う。

$$\int_{-\theta_*-\triangle}^{\theta_*+\triangle}d\theta'\frac{1}{v_{11}(\theta')}\cos\chi_-(\theta')$$

$$\simeq\frac{1}{v_{11}(\theta_*)}\left[\cos\chi_-(\theta_*)\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{\chi''_-(\theta_*)}{2}t^2\right)dt-(\cos\rightarrow\sin)\right]$$

$$=\frac{1}{v_{11*}}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{\chi''_-(\theta_*)}}\cos(\chi_-(\theta_*)-\frac{\pi}{4})$$

これを（3.7）に代入すると磁気モーメントの増分は

$$\mu-\mu_0=A(\mu_0)\cos\left(\chi_-(\theta_*)-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A(\mu_0)=\sqrt{\frac{\pi\mu_0}{B_0\mid\chi''_-(\theta_*)\mid}}\frac{q\delta'}{v_{11*}}(v_0^2-\mu_0B_0) \tag{3.12}$$

となる。ここで$\chi''_-\ (\theta_*)$ は（3.11）で与えられている。

なおこの共鳴の巾は$v_{110}\simeq v_{11*}$とすると

$$\triangle\theta\simeq N^{-\frac{3}{2}}q^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

となり，上記の積分の評価はNqが十分大きいときの漸近形を与える。

4. 写　　像

§3で評価したように，リップル磁場との共鳴がなければ磁気モーメントは保存されるが，もし共鳴があって，しかもその共鳴巾$\triangle\theta \ll 1$であるならば，磁気モーメントは粒子が共鳴点$\theta=\theta_*$を通過するときキックを受けて変化することになる。衝突を無視すれば粒子の運動は周期的であり，共鳴点を何回も通過し，その度に磁気モーメントは変化する。その効果を写像によって表わす。

いまトーラス外側$\theta=0$の所を通過して$\theta=\theta_*$の共鳴点に向う粒子を考え，その磁気モーメントをμ_nとする。$\theta=\theta_*(\mu_n)$の共鳴点を通過すると磁気モーメント変化して$\mu_{n+1/2}$となる。$\kappa>1$の通過粒子を考えると，この粒子はもう一度$\theta=2\pi-\theta_*(\mu_{n+1/2})$の共鳴点を通過して磁気モーメントは$\mu_{n+1}$となり，これで$\theta$方向の1周期になる。（補捉粒子はバナナ軌道をとるので，共鳴点を1周期に4回通過する。その分だけ計算は複雑になるが同様なので省略する）。

§3と同様$v_{110}>0$の場合を考える。$\chi_-(\theta)-\pi/4$を$\chi(\theta)$，さらに

$$\chi(\theta_*)=\chi_n,\quad \chi(2\pi-\theta_*)=\chi_{n+\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

と書くと，共鳴点を過ぎるときの磁気モーメントの変化は

$$\mu_{n-\frac{1}{2}}-\mu_n=A(\mu_n)\cos\chi_n \tag{4.2a}$$
$$\mu_{n+1}-\mu_{n+\frac{1}{2}}=A(\mu_{n+\frac{1}{2}})\cos\chi_{n+\frac{1}{2}} \tag{4.2b}$$

でえられる。

次に共鳴点間での位相χの変化を計算する。

$$\begin{aligned}\chi_{n+\frac{1}{2}}-\chi_n&=Nq\int_{\theta_*}^{2\pi-\theta_*}\left(1-\frac{v_{11*}}{v_{11}(\theta)}\right)d\theta\\&=Nq(2\pi-2\theta_*)-\frac{4Nqv_{11*}}{v_{110}}\left[K\left(\frac{1}{\kappa_{n+1/2}}\right)-F\left(\frac{\theta_*}{2},\frac{1}{\kappa_{n+1/2}}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.3a}$$

$$\begin{aligned}\chi_{n+1}-\chi_{n+\frac{1}{2}}&=Nq\int_{2\pi-\theta_*}^{2\pi+\theta_*}\left(1-\frac{v_{11*}}{v_{11}(\theta)}\right)d\theta\\&=2Nq\theta_*-\frac{4Nq\theta_{11*}}{V_{110}}F\left(\frac{\theta_*}{2},\frac{1}{\kappa_{n+1}}\right)\end{aligned} \tag{4.3b}$$

ここで$K(1/\kappa)$は第2種完全楕円積分，$F(\phi,1/\kappa)$は第2種楕円積分である。その引数$1/\kappa$はそれぞれの区間での磁気モーメントの関数である$(1/\kappa^2\equiv 2\varepsilon v_{\perp 0}^2/v_{110}^2=4\varepsilon B_0\mu/(v_0^2-2\mu B_0))$。また$\theta_*$も同様。上式の右辺をそれぞれ$L(\kappa_{n+1/2})$, $M(\kappa_{n+1})$とおくと，

$$\chi_{n+\frac{1}{2}}-\chi_n=L(\kappa_{n-1/2}) \tag{4.4a}$$
$$\chi_{n+1}-\chi_{n+\frac{1}{2}}=M(\kappa_{n+1}) \tag{4.4b}$$

となる。

(4.2), (4.4) の写像によって，通過粒子が $\theta=\theta_*$，$\theta=2\pi-\theta_*$ の2つの共鳴点を通過し，θ 面を1周したときの μ，χ の変化が決められる。μ の変化，したがって κ の変化は小さいとして，(4.4) の右辺を線形化する。以下簡単化のための変数 μ，χ を $\mu_n=\mu$，$\mu_{n-1/2}=\mu_{1/2}$ 等と書く。L，M の展開の原点をそれぞれ κ_α，κ_β として

$$
\begin{aligned}
&L(\kappa_{1/2})=L(\kappa_\alpha)+L'(\kappa\alpha)(\kappa_{1/2}-\kappa_\alpha)\\
&M(\kappa_1)=M(\kappa_\beta)+M'(\kappa_\beta)(\kappa_\alpha-\kappa_\beta)+M'(\kappa_\beta)(\kappa_1-\kappa_\alpha)
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

とする。ここで κ_α，κ_β を次のようにとる。

$$
\begin{aligned}
&L(\kappa_\alpha)=2\pi m\\
&M(\kappa_\beta)+M'(\kappa_\beta)(\kappa_\alpha-\kappa_\beta)=2\pi n
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$qN\gg1$ であるので，$\kappa_\alpha\simeq\kappa_\beta$，$|\kappa_{1/2}-\kappa_\alpha|\ll\kappa_\alpha\,|\kappa_1-\kappa_\alpha|\ll\kappa_\alpha$ を充すことが出来る。位相 χ は 2π の整数倍シフトしても良いので，$m=n=0$ として (4.4) は次のように変形される。

$$\chi_{1/2}-\chi=L\xi_{1/2} \tag{4.7a}$$

$$\chi_1-\chi_{1/2}=M\xi_1 \tag{4.7b}$$

$$L=L'(\kappa_\alpha),\ M=M'(\kappa_\beta)$$

ここで ξ は

$$\xi=\kappa-\kappa_\alpha \tag{4.8}$$

で定義される新しい変数である。なお (4.3 a, b) から直ちに分るように $L>0$，$M>0$ である。

次に μ に対する写像 (4.2) を変形する。μ は κ の関数

$$\mu=\mu(\kappa)=\frac{v_0^2}{2B_0}\frac{1}{1+2\varepsilon\kappa^2} \tag{4.8}$$

であり，

$$
\begin{aligned}
&\mu_{1/2}-\mu=\mu'(\kappa)(\kappa_{1/2}-\kappa)=\mu'(\kappa)(\xi_{1/2}-\xi)\\
&\mu_1-\mu_{1/2}=\mu'(\kappa_{1/2})(\kappa_1-\kappa_{1/2})=\mu'(\kappa_{1/2})(\xi_1-\xi_{1/2})
\end{aligned}
$$

これから (4.2) は

$$\xi_{1/2}-\xi=K(\kappa)\cos\chi \tag{4.9a}$$

$$\xi_1-\xi_{1/2}=K(\kappa_{1/2})\cos\chi_{1/2} \tag{4.9b}$$

$$K(\kappa)=\frac{A(\mu(\kappa))}{\mu'(\kappa)}$$

となる。$\mu'(\kappa)<0$ なので $K(\kappa)<0$ である。

ここで元にもどって (4.2), (4.4) の写像のヤコービアンを計算する。n から $n+1/2$ への写像，(4.2 a) (4.4 a) から

$$J(\mu_{1/2},\chi_{1/2},\mu,\chi)=1+A'(\mu)\cos\chi \tag{4.10}$$

で一般に１にならない。$n+1/2$ から $n+1$ への写像のヤコービアンも同様に１にならない。このことは（4.2）（5.3）の写像が共鳴のダイナミックスをコンシステントに取り入れてないためである。すなわち今までの計算では μ に対する共鳴の効果のみ考えて，それに共役な角変数，サイクロトロン運動の位相 ϕ に対する共鳴の効果を無視している。この効果は ϕ に対する運動方程式（2.16）の $\cos\phi$，$\sin\phi$ の項に含まれているが，それらを考慮することは容易でない。ここでは次のように進むことにする。

ξ，χ に対する写像（4.9）（4.7）のヤコービアンを計算する。n から $n+1/2$ の写像に対して，

$$J(\xi_{1/2}, \chi_{1/2}, \xi, \chi)=1+K'(\kappa)\cos\chi$$

で一般に１にならない。しかし次のように考えられる。まず A は δ のオーダーの量である。また前にも述べたように $qN\gg1$ であるので $|\kappa-\kappa_\alpha|\ll\kappa_\alpha$，したがって $K(\kappa)\simeq K(\kappa_\alpha)=const.$ とすることが許され，ヤコービアンは１となると考えることが出来る。$n+1/2$ から $n+1$ への写像も同様である。（4.9）は

$$\xi_{1/2}-\xi=K\cos\chi \qquad (4.11a)$$

$$\xi_1-\xi_{1/2}=K\cos\chi_{1/2} \qquad (4.11b)$$

$$K=\frac{A(\mu(\kappa_\alpha))}{\mu'(\kappa_\alpha)}$$

となる。

（4.7）（4.11）の変換のヤコービアンは１で，共鳴の効果を互に共役な離散化した変数の写像として扱うことが出来ることになった。

ここで $L(\kappa)$，$M(\kappa_{1/2})$ の線形化について補足する。展開の原点 κ_α は $L(\kappa_\alpha)=2\pi m$ になるよう定めた。このことは $\theta=\theta_*$ の共鳴点を出発した粒子が，同じ位相で $\theta=2\pi-\theta_*$ の共鳴点に到着するよう $\kappa=\kappa_\alpha$ を選んだことに相当する。すなわち θ_*，$2\pi-\theta_*$ でのサイクロトロン共鳴と θ 面での位相 χ の動きが共鳴するように $\kappa=\kappa_\alpha$ を選んだことになる。この意味では κ_β も $M(\kappa_\beta)=2\pi n$ のように選び，$qN\gg1$ なので $\kappa_\alpha\simeq\kappa_\beta$，したがって $M'(\kappa_\beta)(\kappa_\alpha-\kappa_\beta)=0$ となるとした方が良いかも知れない。

また（4.2），（4.4）は次のようにも変形できる。[6] n から $n+1/2$ の写像を考える。$L(\kappa)=L(\kappa(\mu))=L_\mu(\mu)$ を $L_\mu(\mu_\alpha)=2\pi m$ となる μ_α を原点として展開し，新しい変数として

$$I=L_\mu'(\mu_\alpha)(\mu-\mu_\alpha)$$

をとると，（4.2 a）（4.4 a）は

$$I_{1/2}-I=K_\alpha\cos\chi$$

$$\chi_{1/2}-\chi=I_{1/2}$$

$$K_\alpha=A(\mu_\alpha)L_\mu'(\mu_\alpha)$$

$n+1/2$ から $n+1$ への変換もほぼ同様で

$$I_1-I=K_\beta\cos\chi_{1/2}$$
$$\chi_1-\chi=NI_1$$
$$K_\beta=A(\mu_\beta)L_\mu'(\mu_\alpha)$$
$$N=\frac{M_\mu'(\mu_\beta)}{L_\mu'(\mu_\alpha)}$$

またμ_βは$G_\mu(\mu_\beta)+(\mu_\alpha-\mu_\beta)G_\mu'(\mu_\beta)=2\pi n$。($\xi$, χ) の組とはスケール変換だけの差である。

5. 不安定性と拡散

磁場リップルとサイクロトロン運動の共鳴が局在化しているとき（$qN\gg 1$），θ面を一周したときの共役な変数ξ, χに対する写像を§4で導いた。ここではその不安定性，またξの拡散過程について簡単に考える。

前節の（4.11），（4.7）をまとめて記す。

$$\xi_{1/2}=\xi+K\cos\chi \tag{5.1a}$$
$$\xi_1=\xi_{1/2}+K\cos\chi_{1/2} \tag{5.1b}$$
$$\chi_{1/2}=\chi+L\xi_{1/2} \tag{5.1c}$$
$$\chi_1=\chi_{1/2}+M\chi_1 \tag{5.1d}$$
$$K<0,L,M>0$$

まず最低次の不動点を求める。$\xi_1=\xi$, $\chi_1=\chi$とおいて

$$\xi_{1/2}=\xi+K\cos\chi \tag{5.2a}$$
$$\xi=\xi_{1/2}+K\cos\chi_1 \tag{5.2b}$$
$$\chi_{1/2}=\chi+L\xi_{1/2} \tag{5.2c}$$
$$\chi=\chi_{1/2}+M\xi \tag{5.2d}$$

を解く。

（5.2 a）と（5.2 b）から

$$\cos\chi+\cos\chi_{1/2}=0 \tag{5.3}$$

したがって2つの場合がある。

$$\begin{aligned}&(\text{case a})\quad \chi_{1/2}=\chi+\pi(2m+1)\\&(\text{case b})\quad \chi_{1/2}=-\chi+\pi(2n+1)\end{aligned} \tag{5.4}$$

一方（5.2 c）（5.2 d）から

$$I_1 - I = K_\beta \cos\chi_{1/2}$$
$$\chi_1 - \chi = N I_1$$
$$K_\beta = A(\mu_\beta) L_\mu'(\mu_\alpha)$$
$$N = \frac{M_\mu''(\mu_\beta)}{L_\mu''(\mu_\alpha)}$$

またμ_βは$G_\mu(\mu_\beta) + (\mu_\alpha - \mu_\beta) G_\mu'(\mu_\beta) = 2\pi n$。$(\xi, \chi)$の組とはスケール変換だけの差である。

5．不安定性と拡散

磁場リップルとサイクロトロン運動の共鳴が局在化しているとき（$qN \gg 1$），θ面を一周したときの共役な変数ξ, χに対する写像を§4で導いた。ここではその不安定性，またξの拡散過程について簡単に考える。

前節の（4.11)，（4.7）をまとめて記す。

$$\xi_{1/2} = \xi + K\cos\chi \tag{5.1a}$$
$$\xi_1 = \xi_{1/2} + K\cos\chi_{1/2} \tag{5.1b}$$
$$\chi_{1/2} = \chi + L\xi_{1/2} \tag{5.1c}$$
$$\chi_1 = \chi_{1/2} + M\chi_1 \tag{5.1d}$$
$$K < 0, L, M > 0$$

まず最低次の不動点を求める。$\xi_1 = \xi$, $\chi_1 = \chi$とおいて

$$\xi_{1/2} = \xi + K\cos\chi \tag{5.2a}$$
$$\xi = \xi_{1/2} + K\cos\chi_1 \tag{5.2b}$$
$$\chi_{1/2} = \chi + L\xi_{1/2} \tag{5.2c}$$
$$\chi = \chi_{1/2} + M\xi \tag{5.2d}$$

を解く。

（5.2 a）と（5.2 b）から

$$\cos\chi + \cos\chi_{1/2} = 0 \tag{5.3}$$

したがって2つの場合がある。

$$\begin{aligned} &(\text{case a}) \quad \chi_{1/2} = \chi + \pi(2m+1) \\ &(\text{case b}) \quad \chi_{1/2} = -\chi + \pi(2n+1) \end{aligned} \tag{5.4}$$

一方（5.2 c）（5.2 d）から

$$\xi_{1/2} = -\frac{M}{L}\xi$$

したがって（5.2 a）から

$$\xi = -\frac{KL}{L+M}\cos\chi$$

これを用いると（5.2 d）から

$$\chi - \chi_{1/2} = -\frac{KLM}{L+M}\cos\chi \tag{5.5}$$

したがって固定点を与える χ は次の方程式からきめられる。

（case a）

$$\cos\chi = \frac{\pi(L+M)}{KLM}(2m+1) \tag{5.6a}$$

（case b）

$$\cos\chi = \frac{\pi(L+M)}{KLM}\left(2n+1-\frac{2\chi}{\pi}\right) \tag{5.6b}$$

（5.6）が実根が固定点の χ，したがってこれから他の量も定まる。

固定点が存在したとして，その安定性をしらべるため固定点のまわりで展開する。変動分 $\delta\xi$，$\delta\chi$ を $\delta\xi_1$，$\delta\chi_1$ に移す線形変換を T とする。

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\xi_{1/2}}, \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\chi_{1/2}} \\ \dfrac{\partial\chi_1}{\partial\xi_{1/2}}, \dfrac{\partial\chi_1}{\partial\chi_{1/2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\xi_1, \chi_1) \to (\xi_{1/2}, \chi_{1/2}) \\ \\ (\xi_{1/2}, \chi_{1/2}) \to (\xi, \chi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, -K\sin\chi_{1/2} \\ M, 1-KM\sin\chi_{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, -K\sin\chi \\ L, 1-KL\sin\chi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-KL\sin\chi_{1/2}, & -K\sin\chi - K\sin\chi_{1/2}(1-KL\sin\chi) \\ M-L(1-KM\sin\chi_{1/2}), & -KM\sin\chi + (1-KM\sin\chi_{1/2})(1-KL\sin\chi) \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

T の行列式は 1 なので，T の固有値は trace

$$\mathrm{T_r}T = 2 - K(L+M)(\sin\chi + \sin\chi_{1/2}) + K^2LM\sin\chi\sin\chi_{1/2} \tag{5.8}$$

を用いて

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{T_r}T}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{T_r}T}{2}\right)^2 - 1}$$

となる。したがって

$$|\,\mathrm{T_r}T\,| > 2 \tag{5.9}$$

のとき，２つの固有値 λ_1，$\lambda_2 = 1/\lambda_1$ は共に実数で，θ 面を k 回まわったときの ξ の増分 $(\Delta\xi)_k$ は

$$(\Delta\xi)_k \simeq a\lambda_1^k + b\lambda_1^{-k}$$

となって k とともに増大する。すなわち固定点は不安定である。

(6.3) の case a, case b, に対応して T の trace は

(case a)

$$\mathrm{T}_r T = 2 - K^2 LM \sin^2\chi \tag{5.10a}$$

(case b)

$$\mathrm{T}_r T = 2 - 2K(L+M)\sin\chi + K^2 LM \sin^2\chi \tag{5.10b}$$

で与えられる。

まず case a のばあいを考える。L, $M>0$ であるので不安定条件は

$$K^2 LM \sin^2\chi > 4$$

(5.6 a) を右辺の絶対値は 1 より小さいとして代入すると

$$K^2 > \frac{4}{LM} + \frac{(L+M)^2}{L^2M^2}\pi^2(2m+1)^2 \tag{5.11}$$

となる。K はリップルの振巾 δ に比例しているので，これから δ に対する条件が出て来る。$m=0$，すなわち χ と $\chi_{1/2}$ の位相差が最小値 π のとき最も不安定になる。

次に (case b) について最も簡単な $n=0$ のばあいのみ考える。(5.6 b) は

$$\cos\chi = \alpha\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.12}$$

$$\alpha = -\frac{2(L+M)}{KLM} > 0$$

となり，自明な解として

$$\chi = \frac{\pi}{2}$$

がある。このとき

$$\mathrm{T}_r T = 2 - 2K(L+M) + K^2 LM \sin^2\chi$$

$K<0$，L, $M>0$ であるのでこの解は常に不安定で，δ に臨界値は存在しない。

次に (5.12) の他の解を求める。

$$f(\chi) = \cos\chi - \alpha\chi + \frac{\alpha\pi}{2}$$

とおき，χ の変域として $0 \leq \chi < 2\pi$ をとる。

$$f'(\chi) = -\sin\chi - \alpha$$

したがって$\alpha\geq 1$のときは$f(\chi)$は単調減少，一方$f(0)=1+\alpha\pi/2>0$なので，この場合にはすでに述べた自明の解$\chi=\pi/2$以外は存在しない。次に$0<\alpha<1$とする。

$$\sin\chi_m=-\alpha<0$$

とχ_mを定義すると，$f(\chi)$は第3象限で極小値

$$minf(\chi)=-\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha(\chi_m-\frac{\pi}{2})<0$$

また第4象限で極大値

$$maxf(\chi)=\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha(\chi_m-\frac{\pi}{2})$$

をとる。一方$f(3\pi/2)=-\alpha\pi<0$，$f(2\pi)=1-3\pi/2\alpha$なので$maxf(\chi)>0$ならば第4象限に$f(\chi)=0$の根がある。$f(2\pi)$の正負，すなわち$0\leq\alpha<2/3\pi$，$2/3\pi<\alpha<1$に応じて1根，2根である。それをχ_0とすると不安定条件は

$$K\sin\chi_0>\frac{2(L+M)}{LM} \tag{5.13}$$

となる。

不安定条件が充分に満たされ運動がランダムになったとしてξ，したがって磁気モーメントμの拡散係数を評価する。そのため(5.1)をまとめて次のように書く。

$$\xi_{n+1}=\xi_n+K\cos\chi_n \tag{5.14a}$$
$$\chi_{n+1}=X_n+P_n\xi_{n+1} \tag{5.14b}$$

$$P_n=1+\lambda\cos n\pi,\ \lambda=\frac{L-M}{L+M}$$

ここで$(L+M)\xi/2$，$(L+M)K/2$を更めてξ，Kと書いた。また$n=even$ (5.1 a, c) に，$n=odd$が (5.1 b, d) に対応する。P_nがnに依存しているので$\lambda=0$のばあい以外は標準写像にならない。

$\lambda=0$のとき拡散係数の最低次，すなわち準線形近似の評価は簡単である。θ面をk回まわったときのξの増分は (5.14 a) から

$$\Delta\xi=\xi_{2k}-\xi_0=K\sum_{n=0}^{2k-1}\cos\chi_n \tag{5.15}$$

ここでχ_nが独立，かつランダムな変量とすると

$$\overline{\Delta\xi}=\langle\Delta\xi\rangle=0$$
$$\overline{(\Delta\xi)^2}=\langle(\Delta\xi)^2\rangle=kK^2 \tag{5.16}$$

となる。なお，$\bar{A}$，$\langle A\rangle$はそれぞれAの時間平均，相空間での平均値を表わす。両者はエルゴード性により等しい。したがって拡散係数は

$$D=\lim_{k\to\infty}\frac{\overline{(\Delta\xi)^2}}{2k}=\frac{K^2}{2} \tag{5.17}$$

となる。

$\lambda=-1$のときは$\chi_{2n+1}=\chi_{2n}$で

$$<(\Delta\xi)^2>=2kK^2, D=K^2 \tag{5.18}$$

となる。一方$\lambda=1$のときは$\chi_{2n}=\chi_{2n-1}$で

$$<(\Delta\xi)^2>=(k-1)K^2, D=\frac{K^2}{2} \tag{5.19}$$

となる。

もう少し精密に扱う。ξ, χの初期値がξ_0, χ_0のとき$\xi_n=\xi_n$, $\chi_n=\chi_n$となる確率密度をW (ξ_n, χ_n, n | ξ_0, χ_0, 0) とする。ξの拡散係数はWを用いて次のように定義できる。

$$D=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\int d\xi_{2k}d\chi_{2k}W(\xi_{2k},\chi_{2k},2k\mid\xi_0,\chi_0,0)(\xi_{2k}-\xi_0)^2 \tag{5.20}$$

kの大きいときξ_{2k}は$\sqrt{k}$に比例して増大するので右辺の$(\xi_{2k}-\xi_0)^2\simeq\xi_{2k}^2$としてよい。$W$を$\chi$と$\xi$についてフーリエ級数，フーリエ積分に展開し，その係数をwと記す。

$$W(\xi,\chi,n\mid\xi_0,\chi_0,0)=\sum_m\int dqe^{im\chi-iq\xi}w_n(m,q) \tag{5.21}$$

これを (5.20) に代入するとχの積分から$m=0$，またqの積分は2回部分積分して

$$D=\lim_{k\to\infty}\frac{-\pi}{k}\int dqd\xi e^{iq\xi}\frac{\partial^2}{\partial q^2}[w_{2k}(0,q)]$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{-2\pi^2}{k}\frac{\partial^2}{\partial q^2}w_{2k}(0,q)\mid_{q=0} \tag{5.22}$$

となる。

(5.14) からθ面を1周したときのξ, χの関係を導く。まず (5.14 a) から

$$\xi_{2n+2}=\xi_{2n}+K(\cos\chi_{2n}+\cos\chi_{2n+1}) \tag{5.23}$$

次に (5.14 b), (5.14 a) からξ_{2n+1}を消去して

$$\begin{aligned}\chi_{2n+2}&=\chi_{2n}+P_{2n}\xi_{2n+1}+P_{2n+1}\xi_{2n+2}\\&=\chi_{2n}+(P_{2n}+P_{2n+1})(\xi_{2n}+K\cos\chi_{2n})+P_{2n+1}K\cos\chi_{2n+1}\\&=\chi_{2n}+\xi_{2n}+K\cos\chi_{2n}+(1-\lambda)K\cos\chi_{2n+1}\end{aligned}$$

がえられる。χ_{2n+1}は (5.14) からχ_{2n}, ξ_{2n}で次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\chi_{2n+1}&=\chi_{2n}+P_{2n}(\xi_{2n}+K\cos\chi_{2n})\\&=\chi_{2n}+(1+\lambda)\xi_{2n}+(1+\lambda)K\cos\chi_{2n}\end{aligned} \tag{5.24}$$

したがって

$$\cos\chi_{2n+1}=\mathrm{Re}\,e^{i(\chi_{2n}+(1+\lambda)\xi_{2n})}e^{i(1+\lambda)K\cos\chi_{2n}}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}J_l((1+\lambda)K)\cos(\chi_{2n}+(1+\lambda)\xi_{2n}+l(\chi_{2n}-\frac{\pi}{2}))$$

ここでJ_l (x) はベッセル関数。K について最低次の項のみとって

$$\cos\chi_{2n+1}=J_0((1+\lambda)K)\cos(\chi_{2n}+(1+\lambda)\xi_{2n}) \tag{5.25}$$

と近似する。以上からθ面を１周したときの関係として

$$\xi_{2n+2}=\xi_{2n}+K(\cos\chi_{2n}+J_0\cos(\chi_{2n}+(1+\lambda)\xi_{2n})) \tag{5.26a}$$

$$\chi_{2n+2}=\chi_{2n}+\xi_{2n}+K(\cos\chi_{2n}+(1-\lambda)J_0\cos(\chi_{2n}+(1+\lambda)\xi_{2n})) \tag{5.26b}$$

がえられる。ここで$J_0=J_0$ ((１+λ) K)。

確率密度 W にもどる。W は当然次の方程式を充す。

$$W(\xi,\chi,2n\mid\xi_0,\chi_0,0)$$

$$=\int d\xi'\,d\chi'\,W(\xi,\chi,2n\mid\xi',\chi'\,2(n-1))W(\xi',\chi',2(n-1)\mid\xi_0,\chi_0,0) \tag{5.27}$$

ここで (5.23) (5.24) から

$$W(\xi,\chi,2n\mid\xi',\chi',2(n-1))$$
$$=\delta(\xi-\xi'-K(\cos\chi'+J_0\cos(\chi'+(1-\lambda)\xi')))$$
$$\cdot\,\delta(\chi-\chi'-\xi'-K(\cos\chi'+(1-\lambda)J_0\cos(\chi'+(1-\lambda)\xi'))) \tag{5.28}$$

である。

(5.27) に exp ($-$i$q\xi$) をかけξ, χ で積分すると

$$(2\pi)^2 w_{2n}(0,q)$$

$$=\int d\xi d\chi e^{-iq\xi}\int d\xi'\,d\chi'\,\delta(\xi-\xi(\xi',\chi'))\delta(\chi-\chi(\xi',\chi'))$$

$$\cdot\sum_m\int dq'\,e^{iq'\xi'+im'\chi'}w_{2n-2}(m',q')$$

ここで (5.28) のδ関数をδ ($\xi-\xi$ (ξ', χ')) 等と書いた。$d\xi$, $d\chi$ で積分すると

$$=\int d\xi'\,d\chi'\sum_{m'}\int dq'\,e^{iq'\xi'-iq\xi(\xi',\chi')+im'\chi'}w_{2n-2}(m',q')$$

ここで

$$e^{-iq\xi(\xi',\chi')}=e^{iq\xi'}e^{-iqK\cos\chi'}e^{-iqKJ_0\cos(\chi'+(1-\lambda)\xi')}$$

$$=e^{-iq\xi'}(\sum_{l=0}^{\infty}J_l(qK)e^{il(\chi'-\frac{\pi}{2})})(\sum_{l=0}^{\infty}J_l(qKJ_0)e^{il(\chi'-(1-\lambda)\xi'-\frac{\pi}{2})})$$

$$\simeq e^{-iq\xi'}J_0(qK)J_0(qKJ_0)$$

と前と同様近似すると

$$(2\pi)^2 w_{2n}(0,q)$$
$$=J_0(qK)J_0(qKJ_0)\int d\xi' d\chi' \sum_{m'}\int dq' e^{i(q'-q)\xi'+im'\chi'} w_{2n-2}(m',q')$$

となる。$d\xi'$，$d\chi'$ で積分すると $2\pi\delta$ $(q-q')$，δ (m') が表われ，m' での和，q' での積分を行うと

$$w_{2n}(0,q)=J_0(qK)J_0(qKJ_0)w_{2n-2} \tag{5.29}$$

となる。したがって

$$w_{2n}(0,q)=(J_0(qK))^n(J_0(qKJ_0))^n w_0(0,q) \tag{5.30}$$

ここで w_0 は

$$w_0(0,q)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\xi d\chi e^{-iq\xi}\delta(\xi-\xi_0)\delta(\chi-\chi_0)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}e^{-iq\xi_0}$$

である。

最後に (5.22) を用いて拡散係数 D を評価する。q で微分するさい D に帰与しない項をおとして

$$\frac{\partial w_{2n}}{\partial q}=\frac{e^{-iq\xi_0}}{(2\pi)^2}nK(J_0(qK)^{n-1})(J_0(qKJ_0)^{n-1})(J_0'(qK)+J_0J_0'(qKJ_0))$$

$$\frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial q^2}=\frac{e^{-iq\xi_0}}{(2\pi5^2}nK^2(J_0(qK)^{n-1})(J_0(qKJ_0^{n-1})(J_0''(qK)+J_0^2J_0''(qKJ_0))$$

ここで $q=0$ とする。J_0 (0) $=1, J_0''(0)=(J_2(0)-J_0(0))/2=-1/2$ なので

$$\frac{\partial^2 w_{2n}}{\partial q^2}\Big|_{q=0}=-\frac{nK^2}{2(2\pi)^2}(1+J_0^2)$$

したがって (5.22) から ξ に対する拡散係数は

$$D\simeq\frac{K^2}{4}(1+J_0^2((1+\lambda)K)) \tag{5.32}$$

となる。

J_0 (x) $\simeq 1-x^2/4$ とすると

$$D\simeq\frac{K^2}{2}\left(1-\frac{(1+\lambda)^2K^2}{4}\right) \tag{5.33}$$

となる。粗い扱いで得られた (5.17)，(5.18)，(5.19) と比べると $\lambda=-1$ のときの (5.18) が再現できない。

磁気モーメント μ に対する拡散係数は § 4 での変数の変更を考えると

$$D \simeq \frac{A^2}{4} \tag{5.34}$$

となる。ここでAは(3.12)を与えられる。

謝　　　辞

機会を与えて下さった吉川理事，飯島所長，島本部長また竹田室長に感謝の意を表します。

参 考 文 献

1）例えば V. B. Chirikov, Sov. J. Plasma, Phys. **4** (1978) 289.

2）A. I. Neishtadt, ibid **12** (1986) 568.

3）例えば谷，高速イオン及びアルファ粒子の物理研究調査報告書（プラズマ・核融合学会，1991年）付録A1.
またP. N. Yushmanov, in " Reviews of Plasma Physics" vol. 16 (Consultants Bureau, 1990)

4）F. L. Hinton, FRCR－212 (1980)
S. V. Putvinski, JETP Letters **36** (83) 397
またP. N. Yushmanov，文献[2)]

5）参考として D. V. Sivukhin, in" Reviews of Plasma Physics" vol. 1 (Consultants Bureau, 1965)

6）V. B. Chirikov, Physics Report **52**, No. 5 (1979)

7）A. I. Morozov and L. S. Soloviev, in " Reviews of Plasma Physics" vol. 2 (Consultants Bureau 1966).

8）例えば A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman " Regular and Stochastic Motion" (Springer, 1983).

9）例えば金子，"定数係数線型偏微分方程式"（岩波書店，1976）.

$$D \simeq \frac{A^2}{4} \tag{5.34}$$

となる。ここでAは（3.12）を与えられる。

謝　　辞

機会を与えて下さった吉川理事，飯島所長，島本部長また竹田室長に感謝の意を表します。

参考文献

1）例えば V. B. Chirikov, Sov. J. Plasma, Phys. **4**（1978）289.

2）A. I. Neishtadt, ibid **12**（1986）568.

3）例えば谷，高速イオン及びアルファ粒子の物理研究調査報告書（プラズマ・核融合学会，1991年）付録A1.
また P. N. Yushmanov, in " Reviews of Plasma Physics" vol. 16（Consultants Bureau, 1990）

4）F. L. Hinton, FRCR－212（1980）
S. V. Putvinski, JETP Letters **36**（83）397
また P. N. Yushmanov, 文献[2]

5）参考として D. V. Sivukhin, in" Reviews of Plasma Physics" vol. 1（Consultants Bureau, 1965）

6）V. B. Chirikov, Physics Report **52**, No. 5（1979）

7）A. I. Morozov and L. S. Soloviev, in " Reviews of Plasma Physics" vol. 2（Consultants Bureau 1966).

8）例えば A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman " Regular and Stochastic Motion" (Springer, 1983).

9）例えば金子，"定数係数線型偏微分方程式"（岩波書店，1976).

$$D \simeq \frac{A^2}{4} \tag{5.34}$$

となる。ここでAは(3.12)を与えられる。

謝　　　辞

機会を与えて下さった吉川理事，飯島所長，島本部長また竹田室長に感謝の意を表します。

参　考　文　献

1）例えば V. B. Chirikov, Sov. J. Plasma, Phys. **4** (1978) 289.

2）A. I. Neishtadt, ibid **12** (1986) 568.

3）例えば谷，高速イオン及びアルファ粒子の物理研究調査報告書（プラズマ・核融合学会，1991年）付録A1.
またP. N. Yushmanov, in " Reviews of Plasma Physics" vol. 16 (Consultants Bureau, 1990)

4）F. L. Hinton, FRCR－212 (1980)
S. V. Putvinski, JETP Letters **36** (83) 397
またP. N. Yushmanov，文献[2)]

5）参考として D. V. Sivukhin, in" Reviews of Plasma Physics" vol. 1 (Consultants Bureau, 1965)

6）V. B. Chirikov, Physics Report **52**, No. 5 (1979)

7）A. I. Morozov and L. S. Soloviev, in " Reviews of Plasma Physics" vol. 2 (Consultants Bureau 1966).

8）例えば A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman " Regular and Stochastic Motion" (Springer, 1983).

9）例えば金子，"定数係数線型偏微分方程式"（岩波書店，1976).

付　　　録

ここでは断片的に磁気モーメントの断熱不変性に関連する事項をメモとして述べる。

付録1　作用変数の断熱不変性

一般に正準共役な運動量，座標をp_i, q_iとすると，相空間の任意の閉じた曲線$C(t)$に沿っての積分

$$\int_{C(t)}\sum_i p_i dq_i$$

は運動の不変量となる。ここで$C(t)=C(p_i(t),\ q_i(t))$，すなわち曲線$C(t)$上の各点は運動方程式に従って動くとしている。したがって運動が解けなければ$C(t)$が定まらず，積分を実行して不変量を求めることができない。

しかし次のような場合がある。いくつかの運動自由度が独立でしかも周期的な場合である。より詳しくいえば，ハミルトン・ヤコービの方程式が一部の変数の組p_α, q_αについて変数分離ができ，それらの組について運動が多重周期的である場合である。このとき全体の運動，相空間（p_i, q_i）内の運動を相平面（p_α, q_α）に射影すると，それは閉じた軌道を画く。$C(t)$としてこの軌道をとれば，運動に伴って$C(t)$上の点は$C(t)$上の点に移り，$C(t)$は変形することはない。相平面（p_α, q_α）での運動の1周期にわたる積分

$$J_\alpha=\frac{1}{2\pi}\oint p_\alpha dq_\alpha \tag{A1.1}$$

は作用変数といわれ，このばあい運動の不変量となる。(回転に相当する周期運動では軌道は閉じないが，この場合には自然な周期2πをとればよい)。以下suffix αをはぶく。

（A1，1）から明らかなようにJは角運動量の次元をもつ。それに共役な角度の次元をもつ変数をϕと記す（角変数)。(p, q）から（J, ϕ）へ正準変換する。
その条件は

$$P\dot{q}-H(p,q)=J\dot{\phi}-K(J)+\frac{d}{dt}F$$

である。ここで$H(p,\ q)$はハミルトニアン。J, ϕで書いたハミルトニアンKはϕによらない。任意関数Fとして

$$F=S(q,J)-J\phi$$

ととると

$$p\dot{q}-H(p,q)=-\phi\dot{J}-K(J)+\frac{\partial S}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial S}{\partial J}\dot{J} \tag{A1.2}$$

$\dot{q}$, $\dot{J}$の係数を比べて

$$p=\frac{\partial S}{\partial q},\ \phi=\frac{\partial S}{\partial J} \qquad \text{(A1.3)}$$

$$K(J)=H\left(\frac{\partial S}{\partial q},q\right)$$

をうる。$S=S$ (q, J) は変換の母関数である。J, ϕ の運動方程式は

$$\dot{J}=-\frac{\partial K}{\partial \phi}=0$$

$$\dot{\phi}=\omega(J)\equiv\frac{\partial K}{\partial J} \qquad \text{(A1.4)}$$

となる。

ここでハミルトニアンHがゆるやかに変化するパラメータλに依存する場合を考える。おそい時間$\tau=\varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$) を導入して$\lambda=\lambda$ (τ) とおく。変換の母関数を$S=S$ (q, J, λ) と書くと (A 1.2) の右辺に, $\partial S/\partial t=\varepsilon\partial S/\partial\lambda\cdot d\lambda/d\tau$が加わり,

$$K(J,\phi,\lambda)=K(J,\lambda)+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{d\tau} \qquad \text{(A1.5)}$$

の形になる。ここで右辺第1項のK (J, λ) はλの値を固定したときのハミルトニアン。したがって

$$\dot{J}=-\varepsilon\frac{\partial^2 S}{\partial\lambda\partial\phi}\frac{d\lambda}{d\tau} \qquad \text{(A1.6)}$$

となる。ここで次に注意する。(A 1.3) からJを固定すると$dS=pdq$, すなわち$J=const.$ できまる軌道を一周するごとにSの値は

$$\Delta S=\oint pdq=2\pi J \qquad \text{(A1.7)}$$

だけ増加する。母関数Sは$2\pi J$の整数倍を除いて定まる多価関数である。しかしこのとびは$2\pi J=const.$ であって, λで微分した$\partial S/\partial\lambda$は1価関数である。一方 (A 1.3) で定義されるϕにもSの多価性がうつり, 軌道を1周したときの増分 (ϕの周期) は

$$\Delta\phi=\oint d\phi=\frac{d}{dJ}2\pi J=2\pi \qquad \text{(A1.8)}$$

である。したがって (A 1.6) をϕについて平均すると

$$\langle\dot{J}\rangle=-\varepsilon\frac{d\lambda}{d\tau}\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)d\phi=0 \qquad \text{(A1.9)}$$

となる。こうしてεの1次オーダーで作用変数Jは断熱不変となることが示された。

磁場中の運動ではサイクロトロン運動の自由度に対応する断熱不変量が常に存在する。この周期運動に対する正準運動量と座標は角運動量$p_\theta=r_c^2\omega_c$と位相角$q=\theta$である (r_cはラーマ半径, $\omega_c=\dot{\theta}$はサイクロトロン角周波数)。したがってこの運動に対する作用積分は

$$J_1=\frac{1}{2\pi}\oint p_\theta d\theta=\frac{1}{2\pi e}\mu \qquad \text{(A1.10)}$$

$$\mu=\frac{v_\perp^2}{2B},\quad v_\perp=r_c\omega_c$$

となる。サイクロトロン運動に比べてゆるやかな磁場変化等を考えると，J_1 したがって磁気モーメント μ が断熱不変量となる。

付録2　磁場中の運動に対する断熱不変量

磁場中の運動に対して磁気モーメントは常に断熱不変量となる（(A 1，10))。サイクロトロン運動以外に周期的な運動の自由度があれば，それに対応する作用変数も断熱不変量となる。その運動周期はサイクロトロン運動の周期より十分長いとして，サイクロトロン運動で平均したドリフト近似の方程式から出発する。

静磁場の場合を考えるとドリフト速度 $\boldsymbol{v}_g$ は次のように書ける[7]。

$$\boldsymbol{v}_g=\frac{v_\parallel}{B}\nabla\times\boldsymbol{A}^*$$

$$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}+\frac{cv_\parallel}{eB}\boldsymbol{B} \tag{A2.1}$$

ここで $\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャル。粒子の全エネルギー（＝（$v_\perp^2+v_\parallel^2$）／2）と μ（$=v_\perp^2/2B$）を与えると $\boldsymbol{v}_g$ がきまる（$v_\parallel$ の符号は別にきめて)。

（A 2.1）は $\boldsymbol{v}_g$ が各点で $\nabla\times\boldsymbol{A}^*$ に平行（あるいは反平行）であることを示している。すなわち

$$\boldsymbol{v}_g\times(\nabla\times\boldsymbol{A}^*)=0 \tag{A2.2}$$

である。この方程式は次のラグランジュアンから導かれる。

$$L=\boldsymbol{v}_g\cdot\boldsymbol{A}^* \tag{A2.3}$$

ここで L はサイクロトロン運動の中心の位置 $\boldsymbol{r}_g$ と $\boldsymbol{v}_g$ の関数である。$\dot{\boldsymbol{r}}_g=\boldsymbol{v}_g$。ラグランジュ方程式をつくると

$$0=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_g}\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_g}$$

$$=(\boldsymbol{v}_g\cdot\nabla)\boldsymbol{A}^*-\nabla(\boldsymbol{v}_g\cdot\boldsymbol{A}^*)=\boldsymbol{v}_g\times(\nabla\times\boldsymbol{A}^*)$$

となって（A 2.2）が導かれる。あるいは次のようにしてもよい[7]。磁場中の運動の運動方程式，ラグランジュアン

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{e\,\dot{\boldsymbol{r}}}{c}\times\boldsymbol{B}$$

$$L=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2+\frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}$$

で $m=0$ とすれば（A 2.2），（A 2.3）となる。

ここで磁場を次のように表現する。

$$\boldsymbol{B}=\nabla\chi \tag{A2.4a}$$
$$=\nabla\alpha\times\nabla\beta \tag{A2.4b}$$

(A 2.4 b) に対応してベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\alpha\nabla\beta-\beta\nabla\alpha) \tag{A2.4c}$$

となる。(A 2.4 a), (A 2.4 c) を代入すると

$$L=\boldsymbol{v}_g\cdot\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{v}_g\cdot\left\{\frac{1}{2}(\alpha\nabla\beta-\beta\nabla\alpha)+\frac{cv_{\parallel}}{eB}\nabla\chi\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha\boldsymbol{v}_g\cdot\nabla\beta-\beta\boldsymbol{v}_g\cdot\nabla\alpha)+\frac{cv_{\parallel}}{eB}\boldsymbol{v}_g\cdot\nabla\chi$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha\dot{\beta}-\beta\dot{\alpha})+\frac{cv_{\parallel}}{cB}\dot{\chi} \tag{A2.5}$$

一方 (α, β, χ) は直交座標系を作っているので，ラグランジュアンは$L=L$ (α, β, χ, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\chi}$) とかける。これから正準運動量を求めると，座標と運動量の組として

$$q=\alpha,\ p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}}=-\frac{\beta}{2} \tag{A2.6a}$$

$$q=\beta,\ p_\beta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}=\frac{\alpha}{2} \tag{A2.6b}$$

$$q=\chi,\ p_\chi=\frac{\partial L}{\alpha\dot{\chi}}=\frac{cv_{\parallel}}{eB} \tag{A2.6c}$$

が定まる。(A 2.6 a) と (A 2.6 b) は座標と運動量を交換したものに過ぎないので，一方の例えば (A 2.6 b) だけ考えればよい。(サイクロトロン運動を消したので運動の自由度は2しか残っていない。あるいは$\boldsymbol{A}$の不定性を利用して (A 2.4 c) の代りに

$$\boldsymbol{A}=\alpha\nabla\beta \tag{A2.4c$'$}$$

を使ってもよい)。(A 2.6 a) (A 2.6 c) に対応する運動が周期的であれば，それぞれの断熱不変量が定まる。

(A 2.6 c) から磁力線に沿った往復運動に対する断熱不変量

$$J_2=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{cv_{\parallel}}{eB}d\chi=\frac{c}{2\pi e}\oint v_{\parallel}dl \tag{A2.7}$$

が導かれる。

一方 (A 2.4 b) (あるいは (A 2.6 a)) は磁力線に垂直な運動に対応する ($\alpha=const$, $\beta=const$ は磁力線を指定する)。ここでαとして磁束ϕをとり，一方βとして$\phi=const$の面上で磁力線を指定する変数θをとる (α, βからϕ, θへのヤコービアンが1になるよう適当に規格化する)。θについて運動が周期的ならば (周期を2πとする) 断熱不変量が存在する。

$$J_3=2\pi\oint\frac{\phi}{2}d\theta=\frac{\phi}{2} \tag{A2.8}$$

すなわち磁束ϕが断熱不変量になる。

（A 2.1）にもどって考えると，$\boldsymbol{A}^*$の第1項，磁力線に沿ったドリフト運動を表わす項から（A 2.8）が，第2項の磁力線に垂直な∇Bドリフトを表わす項から（A 2.7）が導かれることになる。

付録3　磁気モーメントの長時間変化（例示）

A 1で述べたように作用変数Jの断熱不変性とは，系に含まれるパラメータのゆっくりした変化をおそい時間$\tau=\varepsilon t$（$\varepsilon \ll 1$）で表わしたとき，εの1次のオーダーで$J=const.$であること，いいかえれば$t<1/\varepsilon$のオーダの時間までJの変化が無理できるということである。多くの具体例でJの変化がεの高次の項に比例し，$t\gg 1/\varepsilon$の時間までその値が保たれることが知られている。またεの巾展開によって高次の項まで系統的に断熱不変量を構成する手段が確立されている[8]。

ここでは磁気モーメントの変化を初等的，しかもパラメータの変化のなめらかさの影響を評価しやすい例で考える。

一様な静磁場，それに垂直でなめらかに変化する外力を考える。磁場をz方向，外力をy方向とすると，運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{v}_x&=\omega_c v_y\\ \dot{v}_y&=-\omega_c v_x+F(t)\end{aligned} \tag{A3.1}$$

である。これを次のように書く。

$$\dot{\xi}+i\omega_c\xi=iF \tag{A3.2}$$
$$\xi=v_x+iv_y$$

外力Fは$t=-\infty$で0，ゆるやかに変化して$t=\infty$で一定値になるとする。$t=-\infty$で粒子は$\xi=\mathrm{i}v_0\mathrm{e}^{-i\omega_c t}$というサイクロトロン運動をしているとすると，（A 3.2）の解は

$$\xi(t)=iv_0e^{-i\omega_c t}+ie^{-i\omega_c t}\int_{-\infty}^{t}F(t')e^{i\omega_c t'}dt'$$

で与えられる。第2項を部分積分して$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}$ドリフトの項を分離すると，

$$\xi(t)-\frac{F(t)}{\omega_c}=iv_0e^{-i\omega_c t}-\frac{1}{\omega_c}e^{-i\omega_c t}\int_{-\infty}^{t}\dot{F}(t')e^{i\omega_c t'}dt' \tag{A3.3}$$

と書ける。（なお速く変化する項（この例では$\exp(i\omega_c t)$）を積分し，おそく変化する項（この例では$F(t)$）を微分する部分積をくり返して，小さなパラメータについての漸近展開を行うことは標準的な方法である）。（A 3.3）から磁気モーメント$\mu=v_\perp^2/2B$の変化$\Delta\mu=\mu(\infty)-\mu(-\infty)$は，

$$\frac{\mu(\infty)-\mu(-\infty)}{\mu(-\infty)}=\frac{|iv_0-I(\omega_0)|^2}{v_0^2}-1 \tag{A3.4}$$

$$I(\omega_c)=\frac{1}{\omega_c}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{F}(t)e^{i\omega_c t}dt$$

で与えられる。$\dot{F}(t)$ のフーリエ変換（に比例する）$I(\omega_c)$ を求めればよい。

計算せずに判ることは，$\dot{F}(t)$ が $-\infty<t<\infty$ で絶対値可積分のとき，$\omega_c\to\infty$ で $I(\omega_c)\to 0$ (Riemann−Lebesgue の定理)，すなわち μ は保存される。$I(\omega_c)$ がどのように 0 に近づくか，次に例で示す。

外力 $F(t)$ を次の形にとる。

$$F(t)=F_0\frac{\int_{-\infty}^{t}f(t')dt'}{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt}\quad, f(t)\geq 0 \tag{A3.5}$$

明らかに $F(-\infty)=0$，$F(\infty)=F_0$，また部分積分してドリフト項を分離しているが明らかに一階微分が可能である。

非常になめらかに変化する外力の例としてローレンツ型の

$$f(t)=\frac{1}{1+\varepsilon^2t^2} \tag{A3.6a}$$

をとる。このとき $f(t)$ は無限回連続微分が可能で

$$I(\omega_c)=\frac{F_0}{\omega_c}e^{-\frac{\omega_c}{\varepsilon}}$$

したがって

$$\frac{\Delta\mu}{\mu(-\infty)}=\frac{F_0^2}{\omega_c^2v_0^2}e^{-\frac{2\omega_c}{\varepsilon}} \tag{A3.6b}$$

となって $\Delta\mu$ は小さなパラメータ ε/ω_c について指数関数的に小さい。$f(t)$ としてガウス型の非常になめらかに変化する外力をとったときも結果は同様である。

一方連続であるが $t=0$ で微分できない例として

$$f(t)=e^{-\varepsilon|t|} \tag{A3.7a}$$

ととると，

$$I(\omega_c)=\frac{F_0}{\omega_c}\frac{\varepsilon^2}{\omega_c^2+\varepsilon^2}\simeq\frac{F_0\varepsilon^2}{\omega_c^3}$$

$$\frac{\Delta\mu}{\mu(-\infty)}=\frac{F_0^2}{\omega_c^2v_0^2}\left(\frac{\varepsilon}{\omega_c}\right)^4 \tag{A3.7b}$$

となる。さらに1回微分が不連続になる例として

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-\varepsilon t} & t>0\end{cases} \tag{7.4a}$$

をとると，

$$I(\omega_c)=\frac{F_0\varepsilon}{\omega_c}\frac{\varepsilon-i\omega}{\omega_c^2+\varepsilon^2}\simeq\frac{F_0\varepsilon}{\omega_c^3}(\varepsilon-i\varepsilon_c)$$

$$\frac{\Delta\mu}{\mu(-\infty)}=-\frac{2F_0v_0}{\omega_c}\frac{\varepsilon}{\omega} \tag{7.4b}$$

となり，$\Delta\mu$ の ε 依存性はさらに下って ε/ω_c のオーダーになってしまう。

$\Delta\mu$ の小さなパラメータ ε/ω_c 依存性は($\dot{F}(t)$，したがって $f(t)$ のフーリエ変換 $I(\omega_c)$ できる。フーリエ変換はよく知られているように関数の減少度となめらかさを交換する。この問題は詳しく研究されており，[9] 上記はその例にすぎない。