

JAERI-M

9 1 6 4

流れの線形安定性問題の解法について、

第 1 報

— $\alpha R \gg 1$, 1位の転移点を1つ有するOrr-Sommerfeld方程式の固有値問題の漸近解を用いた解法—

(2次元準平行流—Jeffery-Hamel流に対する計算コード)

1980年11月

藤 村 薫

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している
研究報告書です。入手、複製などのお問合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県
那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out
in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be
addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute,
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

流れの線形安定性問題の解法について, 第1報

- $\alpha R \gg 1$, 1位の転移点を1つ有する Orr - Sommerfeld 方程式の固有値問題の
漸近解を用いた解法 —
(2次元準平行流 - Jeffery - Hamel 流に対する計算コード)

日本原子力研究所東海研究所高温工学部

藤 村 薫

(1980年10月9日受理)

流れの内在的安定性の線形理論における基礎方程式である Orr - Sommerfeld 方程式の固有値問題を, 漸近解を用いた方法で解く数値計算コードを作成した。このコードは攪乱の波数 α と Reynolds 数 R の積 $\alpha R \gg 1$ での, 1位の転移点を1つ有する場合の速度場に適用することができ, ここではそういった流れの代表例として2次元 Poiseuille 流をも含む Jeffery - Hamel 流に対する計算コードについて詳述する。このコードは上記の様な種々の流れ場に直ちに拡張しうるものである。

On the calculation of linear stability with the aid of asymptotic solutions of Orr-Sommerfeld equation, Part 1
- The treatment of the linear stability problems for $\alpha R \gg 1$ containing one simple turning point -
(Two dimensional quasi-parallel flow : Jeffery-Hamel flow)

Kaoru FUJIMURA

Division of High Temperature Engineering,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received October 9, 1980)

The numerical treatment of Orr-Sommerfeld equation which is the fundamental equation of linear hydrodynamic stability theory is described. Present calculation procedure is applied to the two-dimensional quasi-parallel flow for which linearized disturbance equation (Orr-Sommerfeld equation) contains one simple turning point and $\alpha R \gg 1$.

The numerical procedure for this problem and one numerical example for Jeffery-Hamel flow (J-H III₁) are presented.

These treatment can be extended to the other velocity profiles by slight modifications.

Key words ; Orr-Sommerfeld Equation, Linear Stability Theory, Asymptotic Expansions, One Simple Turning Point Problem, Airy Function, WKB Approximations, Dominant-Recessive Solutions, Frobenius' Method, Jacobian Elliptic Functions, Jeffery-Hamel Solutions.

目 次

1. Orr - Sommerfeld 方程式の固有値問題	1
1.1 Orr - Sommerfeld 方程式の漸近解	3
1.2 Rayleigh方程式の解 (非粘性方程式の Tollmien解)	4
1.3 dominant - recessive solutions	5
1.4 Airy関数解	6
1.5 固有値問題	9
1.6 中立曲線の漸近枝について	11
参考文献	13
2. Tietjens 関数	16
2.1 Tietjens 関数の計算	16
2.2 Tietjens 関数の数値計算プログラムについて	18
参考文献	19
3. Jeffery - Hamel 流について	20
3.1 J - H 解	20
3.2 準平行流近似下での J - H 解と Orr - Sommerfeld 方程式	21
3.3 J - H 解の高階微分	22
3.4 J - H I, III ₁ のパラメーターの決定	23
参考文献	24
4. Jacobi の楕円関数の計算プログラムについて	25
4.1 母数 k, 補母数 k', q, 定数 K, および補数 K'	25
4.2 \wp 関数	27
4.3 Jacobi の第 1 種楕円関数 sn, cn, dn	27
4.4 sn 関数の逆関数	29
4.5 Legendre - Jacobi の第 2 種楕円積分 E (u)	29
4.6 Weierstrass の \wp 関数との関係について	30
4.7 計算プログラムについて	31
参考文献	32
5. Orr - Sommerfeld 問題の数値的取り扱いについて	36
5.1 計算手順について	36
5.2 計算プログラムについて	37
5.3 プログラムの使用法	38
5.4 計算結果について	41
参考文献	42

Appendix L1	Tietjens 関数の計算プログラムリスト	46
L2	Orr - Sommerfeld 問題の計算プログラムリスト	49
L3	入力データ, 出力データの例	68

CONTENTS

1. Eigen value problem of Orr-Sommerfeld equation	1
1.1 Asymptotic solutions of Orr-Sommerfeld equation	3
1.2 Solutions of Rayleigh equation (Tollmien solutions of inviscid equation)	4
1.3 Dominant-recessive solutions	5
1.4 Airy function solutions	6
1.5 Eigen value problem	9
1.6 On the asymptotes of neutral curve	11
2. Tietjens function	16
2.1 Calculation of Tietjens function	16
2.2 Computational procedure for Tietjens function	18
3. Jeffery-Hamel flow	20
3.1 J-H solutions	20
3.2 J-H solutions and Orr-Sommerfeld equation under the quasi-parallel flow approximation	21
3.3 Derivatives of J-H solutions	22
3.4 Determination of parameters of J-H I, III ₁	23
4. On the computational program for Jacobian elliptic functions .	25
4.1 Modulus k , complementary modulus k' , q , constant K and its complement K'	25
4.2 \wp functions	27
4.3 Jacobian elliptic functions of 1 st kind sn, cn, dn	27
4.4 Inverse function of sn	29
4.5 Legendre-Jacobi's elliptic integral of 2 nd kind $E(u)$	29
4.6 Relation between Weierstrassian \wp function and sn, cn, dn ..	30
4.7 On the computational program	31
5. On the numerical treatment of Orr-Sommerfeld problems	36
5.1 Numerical procedure	36
5.2 On the computational program	37
5.3 Usage of program	38
5.4 Numerical example	41
Appendix	
L-1 Program listing for Tietjens function	46
L-2 Program listing for Orr-Sommerfeld problems	49
L-3 Examples of input and output data	68

1. Orr-Sommerfeld 方程式の固有値問題

ここでは、1位の転移点を1つ有する場合の、 $\alpha R \gg 1$ でのOrr-Sommerfeld方程式の漸近解について述べ、さらに、中立安定曲線を求めるのに必要な固有値問題を第1近似的に構成する。

流体力学における安定性理論とは、流れの秩序運動（例えば層流状態）が、ある種の攪乱に対して安定か否かを判定することを目的としたものである。ここで安定であるとは、攪乱の加えられた状態から元の秩序運動への復元（攪乱の減衰）を意味し、不安定とは、攪乱の増幅を伴い1つの秩序運動から他の準秩序運動への移行（攪乱の位相速度 $c_r = 0$ ：定在波型攪乱, Rayleigh-Taylor 不安定）もしくは無秩序運動への移行（ $c_r \neq 0$ ：進行波型攪乱, Tollmien-Schlichting 不安定）を意味する。主流速度分布自体が不安定を引き起こす場合、内在的不安定と呼び Tollmien-Schlichting 不安定に対応する。また、重力場、電磁力、温度場、回転力等の不安定性が主流の不安定性を引き起こす場合を外力型不安定と呼び、これには Rayleigh-Taylor 不安定と Tollmien-Schlichting 不安定のいずれかが対応する。ここでは内在的不安定のみを取り扱う。

流体運動の内在的不安定性理論にとって最も重要な基礎方程式はよく知られた Orr-Sommerfeld 方程式である。この方程式は、無限小攪乱に対する線形安定性理論ではそれ自身が基礎方程式を構成し、また、今回は触れない有限振幅攪乱に対する非線形問題では線形作用素として（とくに弱非線形理論では摂動の第零近似解として）非常に大きな役割を果たす。

数学的には転移点を含む方程式の中でも最も難解な問題の1つ⁽⁴⁾とされているこの Orr-Sommerfeld 方程式の一様に漸近する（uniformly validな）解（摂動展開）を構成することは非常に複雑であり、1位の転移点を1つ有する場合に対して、Wasow, Lin & Rabenstein, Eagles, Reid, Lakin & Reid らによって行われてきたが、与えられた速度分布に対する中立曲線（攪乱の線形増幅率 c_i が0、安定と不安定の境目であり中立安定）を第1近似的に求めるだけの目的にそれらの摂動解を用いることはあまりに複雑であり、古くから行われてきた $c_i \cong 0$ での展開法に基づく形式解が実際上有用である（Reid⁽⁴⁾, Lin⁽⁷⁾⁽⁸⁾）。

まず、今取り扱う流れは、非圧縮性流体で2次元準平行流であるとする。Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1-1)$$

と連続の式

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1-2)$$

において、 \mathbf{v} , p を主流成分 $\bar{\mathbf{v}}$, \bar{p} と変動分 $\hat{\mathbf{v}}$, \hat{p} に分離し、さらに流れの関数 ψ を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \bar{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}} \\ p &= \bar{p} + \hat{p} \\ \phi &= \bar{\phi} + \hat{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

式 (1-3) を式 (1-1), (1-2) に代入し, 主流に対する式を引き去り \bar{p} を消去すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \hat{\phi} - \frac{\partial(\bar{\phi}, \Delta \hat{\phi})}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\hat{\phi}, \Delta \bar{\phi})}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\hat{\phi}, \Delta \hat{\phi})}{\partial(x, y)} = \frac{1}{R} \Delta^2 \hat{\phi} \quad (1-4)$$

ただし, 式 (1-4) は最大流速と, 例えば流路幅の半分を用いて無次元化してある。

式 (1-4) 左辺第 4 項は非線形項であり, ここでは初期攪乱として与えた無限小攪乱の 2 次の微小量として無視するが, 非線形問題においてはこの項が本質的な役割 (非線形相互作用による主流の変形や高調波の励起) を果たす。準平行流の仮定の下に $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = U(y)$, さらに $\hat{\phi}$ についての線形性から, $\hat{\phi}$ を Fourier 成分に分解する。

$$\hat{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(y) e^{in\alpha(x-ct)} \quad (1-5)$$

$n=1$ の場合についての安定性を調べればよいので式 (1-5) を式 (1-4) に代入すると線形理論の基礎方程式として

$$(U-c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi - U'' \phi = \frac{1}{i\alpha R} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \phi \quad (1-6)$$

境界を y_1, y_2 とすると境界条件は

$$\phi(y_1) = \phi'(y_1) = \phi(y_2) = \phi'(y_2) = 0 \quad (1-7)$$

で与えられる。ここに $c = c_r + ic_i$, $\phi = \phi_1(y)$ であり i は虚数単位である。式 (1-6) は前出の Orr-Sommerfeld 方程式であり, 対称速度分布の場合, 偶関数攪乱が一般により不安定であることから境界条件は中心線の位置を $y = y_2$ と呼び直すことにより,

$$\phi(y_1) = \phi'(y_1) = \phi'(y_2) = \phi'''(y_2) = 0 \quad (1-8)$$

に書き換えられる。

式 (1-5) から明らかなように, ここでの取り扱いには z 方向に一様であり, また, x 方向に周期的な攪乱のみを取り扱うことになる。近年空間的不安定性の研究も盛んに行われているが, ここでは安定性問題の最も基本的な時間的不安定性に言及するに止める。

また, 式 (1-4) において $\hat{\phi}^2 \sim O(\epsilon^2)$ として無視できるのは $|\hat{\phi}| \ll 1$ の場合に限られるため, 線形理論で不安定といっても, 攪乱の大きさ $|\hat{\phi}|$ は無限大に増幅するわけではなく, 線形増幅率 c_i で増幅した後は非線形理論に従ってある平衡振幅に達する。

1.1 Orr - Sommerfeld 方程式の漸近解

Wasow によって、1位の転移点を1つ有する場合の形式解が以下のように求められることが示された。まず、Orr - Sommerfeld 方程式は

$$\mathcal{N}[\phi] + \lambda^2 M[\phi] = 0 \quad (1-9)$$

$$\mathcal{N}[\phi] = \sum_{k=0}^4 a_k(y) \phi^{(4-k)} \quad (1-10)$$

$$\mathcal{M}[\phi] = \sum_{k=0}^2 b_k(y) \phi^{(2-k)} \quad (1-11)$$

と書ける。ただし、 $\lambda \gg 1$ ここで、 $a_k(y)$ 、 $b_k(y)$ は $x=0$ 近傍で正則とし、とくに、 $a_0(y) = 1$ とする。さらに、 $y=0$ は1位の転移点であること、すなわち、

$$b_0(0) = 0, \quad b'_0(0) \neq 0 \quad (1-12)$$

を仮定する。(Orr - Sommerfeld 方程式において主流速度と攪乱の位相速度の一致する点 $y = y_c (U(y_c) = c_r)$ がここでは $y=0$ に置き換っている。)

$$Q(y) = \int_0^y \sqrt{-b_0(t)} dt \quad (1-13)$$

とおくと、式(1-9)の4つの形式解は

$$e^{\lambda Q(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{1\nu}(y) \lambda^{-\nu} \quad (1-14)$$

$$e^{-\lambda Q(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{2\nu}(y) \lambda^{-\nu} \quad (1-15)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{3\nu}(y) \lambda^{-2\nu} \quad (1-16)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{4\nu}(y) \lambda^{-2\nu} \quad (1-17)$$

で表せる。ここに

$$\sigma_{10}(y) = \sigma_{20}(y) = \eta(y) \quad (1-18)$$

$$\eta(y) = b_0(y)^{-5/4} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_c^x - [b_0(t) a_1(t) - b_1(t)] / b_0(t) dt \right\} \quad (1-19)$$

c は任意定数である。また $\sigma_{30}(y)$ 、 $\sigma_{40}(y)$ は $1/\lambda^2$ の項を省略した方程式 $\mathcal{M}[\phi] = 0$ の2根

である。

これら4つの形式解式(1-14)~(1-17)のうち最初の2つは dominant-recessive 解であり、残り2つは balanced 解である。dominant-recessive 解は anti-Stokes lines $\text{re}[\lambda Q(y)] = 0$ にはさまれた扇形領域 (sector) によって性質を異にし、いわゆる Stokes 現象を示す。

1.2 Rayleigh 方程式の解 (非粘性方程式の Tollmien 解)

式(1-16), (1-17)の balanced 解を求めることを考える。式(1-16), (1-17)の第1近似 $\sigma_{30}(y)$, $\sigma_{40}(y)$ は $1/\lambda^2$ の項を省略した方程式 $\mathcal{L}[\phi] = 0$ から求められる。 $\mathcal{L}[\phi] = 0$ は Orr-Sommerfeld 方程式では

$$(U-c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \phi - U'' \phi = 0 \quad (1-20)$$

であり、Rayleigh 方程式と呼ばれる。この式は $\alpha R \gg 1$ の下で Orr-Sommerfeld 方程式を αR の逆べき展開した場合の第1近似式であり、このことから、非粘性方程式である。式(1-20)の解法として種々のものが提案されている。波数 α を1次の微小量として α^2 展開を行う Heisenberg の方法、半無限領域の場合に用いられる α 展開、式(1-20)の確定特異点まわりの級数解を Frobenius の方法を用いて求める Tollmien の方法、複素領域での直接積分等のうち、ここでは Conte & Miles, Reid, Hughes & Reid らに従って、上記の Tollmien の方法に直接積分を併用する方法を用いる。式(1-20)を $y \approx y_c$ として

$$\phi'' - \alpha^2 \phi - \frac{U''}{U-c} \phi = 0 \quad (1-21)$$

と書き直しておく。今、少なくとも局所的に $y = y_c$ の近傍では、 $(y-y_c)^2 \left(\alpha^2 + \frac{U''}{U-c} \right)$ は正則であるとする。そのためには $U_c'' \neq 0$ でありさえすればよい。このとき、 $y = y_c$ が式(1-21)の確定特異点であるので、 $y = y_c$ まわりの級数解の形で独立解が求められる。式(1-21)に対応する決定方程式の2根(特性根) ρ は $\rho = 0, 1$ であり、よく知られた Frobenius の方法を用いて独立解を得ることができる。それらは、

$$\phi_A = (y - y_c) P_A (y - y_c) \quad (1-22)$$

$$\phi_B = P_B (y - y_c) + \frac{U_c''}{U_c'} \phi_A \log(y - y_c) \quad (1-23)$$

で与えられる。ここに $P_A(y - y_c)$, $P_B(y - y_c)$ は各々 $(y - y_c)$ の多項式である。この2式を式(1-21)に代入することにより ϕ_A , ϕ_B の具体形、すなわち

$$P_A(y - y_c) = 1 + \frac{U_c''}{2U_c'} (y - y_c) + \frac{1}{6} \left(\frac{U_c''}{U_c'} + \alpha^2 \right) (y - y_c)^2 + \dots \quad (1-24)$$

$$P_B(y-y_c) = 1 + \left(\frac{U_c'''}{2U_c'} - \frac{U_c''^2}{U_c'^2} + \frac{1}{2}\alpha^2 \right) (y-y_c)^2 + \dots \quad (1-25)$$

が得られる。初期条件としては

$$\phi_A(y_c) = 0, \quad \phi_A'(y_c) = 1 \quad (1-26)$$

$$P_B(0) = 1, \quad P_B'(0) = 0 \quad (1-27)$$

である。こうして得られた2根が独立であるための条件は Wronskian $W(\phi_A, \phi_B) \neq 0$ であり、実際今の場合

$$W(\phi_A, \phi_B) = -1 \quad (1-28)$$

である。式(1-21)の ϕ' の項の係数が0であることから、 $W(\phi_A, \phi_B)$ は至る所で-1となる。式(1-22), (1-23)はTollmien解と呼ばれる。

ところで、Tollmien解を級数解のみで表現したのでは相当多数の項を考慮しないと収束が悪い。そのため、 $y = y_c$ の近傍 $|y - y_c| \leq \Delta$ (ただし、 Δ は適当な微小量)でのみTollmien解を用い、それ以外の領域では、Tollmien解を初期条件として式(1-20)を直接積分すればよい (ここでは $\Delta = 0.02$, Reidでは $\Delta = 0$, Hughes & Reidでは $\Delta \leq 0.25$)。 $y \leq y_c - \Delta$, $y \geq y_c + \Delta$ にはもはや特異点が存在しないから実軸上で積分すればよい。この解析接続と直接積分の精度は前述の $W(\phi_A, \phi_B) = -1$ によって保証される。なお、Milesの変換により、式(1-20)を1階のRiccati型の式に直して解く方法もあることを記しておく。この方法は中立曲線の漸近枝の計算上有用である。

このようにして得られた ϕ_A, ϕ_B は、 ϕ_B に $y = y_c$ で対数特異点を持つことから、その分枝が不定である。このことに関しては後に述べることになる。

なお、Reid, Hughes & Reidは ϕ_A と P_B を全領域にわたって求め、最後にそれらから式(1-22), (1-23)の形で独立解を求めているが、その利点は実領域の直接積分で済むこと、欠点としては、 $|y - y_c| > \Delta$ の領域でも $y = y_c$ 以外に式(1-21)が特異点を有する場合、例えば円柱座標系における場合などに式(1-22), (1-23)が全領域では成立しない点が挙げられる。本法では、逆に複素領域での数値積分を実行することと、全体としての解の見通しがつきにくいこと等が挙げられる。2次元準平行流では両者の計算結果の間には差異は転移点が1つである限り現れない。

1.3 dominant-recessive solutions

前節では非粘性方程式 $\mathcal{L}[\phi] = 0$ の独立な2つの解 ϕ_A, ϕ_B を求めた。これらはすでにみたように balanced 解の第1近似解であった。ここでは他の2つの解 ϕ_3, ϕ_4 の性質について触れることにする。それらは dominant-recessive 解であり、WKB法を用いて次のように求められる。すなわち

$$\phi(y) = \exp\left(\int g(y) dy\right) \quad (1-29)$$

を Orr - Sommerfeld 方程式に代入し, $(\alpha R)^{-1/2}$ 展開より

$$\phi_3(y) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} (U-c)^{-5/4} \exp\{- (\alpha R)^{1/2} Q(y)\} \quad (1-30)$$

$$\phi_4(y) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} (U-c)^{-5/4} \exp\{+ (\alpha R)^{1/2} Q(y)\} \quad (1-31)$$

ただし

$$Q(y) = \int_{y_c}^y \{i(U-c)\}^{1/2} dy \quad (1-32)$$

式 (1-30), (1-31) の解の性質を特徴づけるのはすみやかに変化する \exp の項であり, この項は $\phi_{3,4}$ の高階微分にもそのまま現れる。2 節で触れたようにここでは, anti-Stokes lines:

$$\operatorname{re}\{\lambda Q(y)\} = 0 \quad (1-33)$$

が重要な役割を演じる。今, $\arg(\alpha R) = 0$ とする。このとき式 (1-33) は,

$$\operatorname{re}\{(iU_c')^{1/2}(y-y_c)^{3/2}\} = 0 \quad (1-34)$$

と書ける。すなわち, WKB 解に対する anti-Stokes lines C_1, C_2, C_3 は, 図 1 に示すように転移点 $y = y_c$ から $2\pi/3$ の等角度間隔で放射状に延びており,

$$\arg(y-y_c) = (\dots, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \dots) \quad (1-35)$$

である。dominant - recessive の関係は anti-Stokes lines C_1, C_2, C_3 にはさまれた各扇形領域 S_1, S_2, S_3 's では表 1 に示すとおりである。

1.4 Airy 関数解

粘性解の漸近解が前節で与えられた。ここでは粘性解のうち転移点近傍の解を取り扱う。

今, 独立変数の変換

$$\zeta = (y - y_c) / \epsilon \quad (1-36)$$

$$\epsilon = (i \alpha R U_c')^{-1/3} \quad (1-37)$$

により, $y = y_c$ を中心とする半径 $O(\alpha R)^{-1/3}$ 程度の近傍で摂動展開可能な Orr - Sommerfeld 方程式の近似解は

$$\phi^{iv} = i \alpha R U_c' (y - y_c) \phi'' \quad (1-38)$$

から与えられる。すなわち, $\phi(y) = \chi^{(0)}(\zeta)$ について

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta\right) \frac{d^2}{d\zeta^2} \chi^{(0)} = 0 \quad (1-39)$$

式(1-39)のうち2つの解は

$$\chi_1^{(0)}(\zeta) = \varepsilon \zeta \quad (1-40)$$

$$\chi_2^{(0)}(\zeta) = 1 \quad (1-41)$$

であり、他の2解は Airy 関数を用いて与えられる。

$$\chi_3^{(0)} = (\varepsilon U_c')^{-5/4} \int_{\infty_1}^{\zeta} d\zeta \int_{\infty_1}^{\zeta} \text{Ai}(\zeta) d\zeta \quad (1-42)$$

$$\chi_4^{(0)} = (\varepsilon U_c')^{-5/4} \int_{\infty_2}^{\zeta} d\zeta \int_{\infty_2}^{\zeta} P_2(\zeta) d\zeta \quad (1-43)$$

ここに ∞_1 は扇形領域 S_1 内で無限大におよぶ積分路、 ∞_2 は扇形領域 S_2 内でのそれを意味する。ただし、 $P_2(\zeta) = \text{Ai}(e^{2\pi i/3} \zeta)$ である。 $\chi_4^{(0)}$ として $\text{Bi}(\zeta)$ を用いず $P_2(\zeta)$ を用いる理由は Reidによる。式(1-40)、(1-41)は非粘性解 $\phi_A(y)$ 、 $\phi_B(y)$ の第1項になっている。

$\chi_3^{(0)}$ 、 $\chi_4^{(0)}$ の漸近形は

$$\chi_3^{(0)}(\zeta) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} (\varepsilon U_c')^{-5/4} \zeta^{-5/4} \exp\left(-\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) \quad (1-44)$$

扇形領域 $|\arg \zeta| < \pi$ (Poincaréの意味で)

$$\chi_4^{(0)}(\zeta) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} (\varepsilon U_c')^{-5/4} \zeta^{-5/4} \exp\left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2}\right) \quad (1-45)$$

扇形領域 $-5\pi/3 < \arg \zeta < \pi/3$ (Poincaréの意味で)

これら式(1-44)、(1-45)は摂動展開の共通領域 $|\varepsilon| \ll |y - y_c| \ll 1$ でWKB解(dominant-recessive解)に一致する。

扇形領域 S_1 : $|\arg \zeta| < \pi/3$ で $\text{Ai}(\zeta)$ はsubdominantであり、このことから $\phi_3 = \chi_3^{(0)}$ 、又、sector S_2 : $-\pi < \arg \zeta < -\pi/3$ で $P_2(\zeta)$ はsubdominantであり、 $\phi_4 = \chi_4^{(0)}$ である。ただし、 $\arg \zeta = \arg(y - y_c) + \pi/6$

さて、3節で保留にしてあった対数特異点まわりの分枝は、以上の議論、すなわち、Airy関数解の漸近形が $-7\pi/6 < \arg(y - y_c) < \pi/6$ でWKB解に接続することを考えて

$$y < y_c \text{ では } \arg(y - y_c) = -\pi \quad (1-46)$$

$$y > y_c \text{ では } \arg(y - y_c) = 0$$

と決定できる。

なお、これまでは常に $\arg U_c' = 0$ としてきた。 $\arg U_c' \neq 0$ では anti-Stokes lines:

$\operatorname{re}\{\lambda Q\} = 0$ の条件は

$$\arg(y - y_c) = -\frac{1}{3} \arg U_c' + \left\{ \dots, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots \right\} \quad (1-48)$$

ここで図1の sector S_1 に注目すると S_1 内で ϕ_3 は subdominant であった。 $\arg U_c' = 6\pi, 12\pi, \dots$ とするに従って

$$\arg U_c' = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\pi \\ 12\pi \\ 18\pi \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} - 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} - 4\pi \\ -\frac{\pi}{2} - 6\pi \\ \vdots \end{pmatrix} < \arg(y - y_c) < \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} - 2\pi \\ \frac{\pi}{6} - 4\pi \\ \frac{\pi}{6} - 6\pi \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \phi_3 : \begin{pmatrix} \text{subdominant} \\ \text{dominant} \\ \text{subdominant} \\ \text{dominant} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ところで、Airy 関数解の変数 $\zeta = (i \alpha R U_c')^{1/3} (y - y_c)$ に着目すると、この場合にも

$$\arg U_c' = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\pi \\ 12\pi \\ 18\pi \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{Ai}(\zeta) \text{ の subdominant な扇形領域 } |\arg \zeta| < \pi/3 : \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} - 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} - 4\pi \\ -\frac{\pi}{2} - 6\pi \\ \vdots \end{pmatrix} < \arg(y - y_c) < \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} - 2\pi \\ \frac{\pi}{6} - 4\pi \\ \frac{\pi}{6} - 6\pi \\ \vdots \end{pmatrix}$$

であり、このことから、 $\phi_3 = \chi_3^{(0)}$ のためには $\arg U_c' = 0, \pm 12\pi, \pm 24\pi, \dots$ が適当な選択であることがわかる。実際、 $\arg U_c' = 0$ と $\arg U_c' = 12\pi$ を用いた計算結果には全く差異はない。なお当然、 $\arg U_c'$ の値に対応して ϕ_B の対数特異点まわりの分枝は変更を受ける。

さらに、高次微小量を打ち切った方程式

$$\phi^{iv} = i \alpha R (U - c) \phi'' \quad (1-49)$$

に対して Langer 変換

$$\phi''(y) = y'^{1/2} F(\zeta) \quad (1-50)$$

を施して

$$F'' = [i \alpha R (U - c) y'^2 - \frac{1}{2} \{y, \zeta\}] F \quad (1-51)$$

の Schwarz 微分 $\{y, \zeta\} = \frac{y'''}{y'} - \frac{3y''^2}{2y'^2} = 0$ から標準方程式 (related equation; comparison equation) を解いて直接 Airy 関数解が求められるが、ここでは割愛する。

また、ここでは、固有値問題の第1近似を求めることを目的としているため、高次近似である ϕ_B に対する粘性効果の補正 (viscous correction) や転移点のごく近傍をも含む扇状領域

$$\frac{1}{6} \pi < \arg(y - y_c) < \frac{5\pi}{6} \quad (\text{viscous sector})$$

での摂動展開による漸近解を求めることなど

についても触れない。

また Orr - Sommerfeld 方程式の adjoint 方程式

$$(D^2 - \alpha^2)^2 \phi = i \alpha R \{(D^2 - \alpha^2)(U - c) \phi - U'' \phi\} = 0 \quad (1-52)$$

もここでは取り扱わないが、これは弱非線形問題や弱非定常問題で非常に重要であることを注意しておく。また、この (1-52) から Orr - Sommerfeld 方程式が self - adjoint でないこともわかる。

1.5 固有値問題

以上のようにして一応 Orr - Sommerfeld 方程式の4つの独立な漸近解が得られた。これらが同次境界条件式 (1-8) を満足するためには固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \phi_1(y_1) & \phi_1'(y_1) & \phi_1'(y_2) & \phi_1'''(y_2) \\ \phi_2(y_1) & \phi_2'(y_1) & \phi_2'(y_2) & \phi_2'''(y_2) \\ \phi_3(y_1) & \phi_3'(y_1) & \phi_3'(y_2) & \phi_3'''(y_2) \\ \phi_4(y_1) & \phi_4'(y_1) & \phi_4'(y_2) & \phi_4'''(y_2) \end{vmatrix} = E(\alpha, R, c) = 0 \quad (1-53)$$

が成立すればよい。式 (1-53) が求める固有値問題であり、これを解いて $\alpha - R$, $\alpha - c$ 等の関係を求めればよい。式 (1-53) はこのまま解くことは困難であるが、まず、位相速度 c_r は通常 1 に比べて小さく、 $y_c \cong y_1$ であることから $\phi_3(y_1)$, $\phi_3'(y_1)$, $\phi_4(y_1)$, $\phi_4'(y_1)$ は各々 $\chi_3^{(0)}(\zeta_1)$, $\chi_3^{(0)'(\zeta_1)}$, $\chi_4^{(0)}(\zeta_1)$, $\chi_4^{(0)'(\zeta_1)}$ に置き換え、 $\alpha R \gg 1$ を考慮することにより第1近似的に解くことができる。E = 0 の構成は Reid に従うとより簡潔である。すなわち、まず、固体壁 $y = y_1$ 近くでは粘性効果は $(\alpha R)^{-1/2}$, 転移点 $y = y_c$ 近くでは $(\alpha R)^{-1/3}$ まで及ぶ。したがって流路中央 $y = y_2$ では粘性効果は指数関数的に小さく、 $y = y_2$ を含む扇形領域 S_1 で dominant であった ϕ_4 は除外される。したがって、Orr - Sommerfeld 方程式の解として ϕ_A , ϕ_B と ϕ_3 の線形結合を考えればよい。 ϕ_3 は扇形領域 S_1 で subdominant であるので $y = y_2$ での境界条件としては非粘性解 ϕ_A と ϕ_B のみに課せられる $\phi'(y_2) = \phi'''(y_2) = 0$, $\phi = A\phi_A + B\phi_B$ 。ところで非粘性方程式 (3-1) は2階であるから、 $\phi'(y_2) = 0$ がみたされれば $\phi'''(y_2) = 0$ は自

動的に成り立つ。このことから

$$\phi(y) = \frac{\phi_A(y)}{\phi_A'(y_2)} - \frac{\phi_B(y)}{\phi_B'(y_2)} \quad (1-54)$$

さらにあと2つの境界条件(1-8)から次の特性方程式

$$\frac{\phi'(y_1)}{\phi(y_1)} = \frac{\phi_3'(y_1)}{\phi_3(y_1)} \quad (1-55)$$

が得られる。

ここで、式(1-55)の右辺は粘性解のみに依存し、いわゆる粘性関数 $G(Z)$ 、又は Tietjens 関数 $F(z)$ 等により表される。

式(1-54)は考えている主流や座標系によりその形を異にする。しかし、いずれの場合も、転移点が1つである限り、固有方程式は式(1-55)で表される。

$$w = \left[1 + \frac{U_1' \phi(y_1)}{c \phi'(y_1)} \right]^{-1}, \quad U_1' = U'(y_1) \quad (1-56)$$

とおけば固有方程式は

$$\frac{w-1}{w} = G(Z) \quad (1-57)$$

もしくは

$$\frac{w-1}{(1+\lambda)w} = F(Z), \quad 1+\lambda = \frac{U_1'}{c}(y_c - y_1) \quad (1-58)$$

ここに $G(Z) = (Z^{3/2} e^{-\pi i/4} - 5/4)^{-1}$, $Z = c(\alpha R / U_1'^2)^{1/3}$, また,

$$F(Z) = \frac{\int_{\infty_1}^{\zeta_1} d\zeta \int_{\infty_1}^{\zeta} \text{Ai}(\zeta) d\zeta}{\zeta_1 \int_{\infty_1}^{\zeta_1} \text{Ai}(\zeta) d\zeta}, \quad \zeta_1 = z e^{-5\pi i/6}, \quad z = (\alpha R U_c')^{1/3} (y_c - y_1) \quad (1-59)$$

である。以後 Tietjens 関数を用いた取り扱いのみを議論する。

転移点は前に述べたように、通常固体壁近傍に位置しており、その限りでは $\phi_3(y) = \chi_3^{(0)}(\zeta)$ である。したがって Airy 関数解式(1-42)から

$$\frac{\phi_3'(y)}{\phi_3(y)} = (i \alpha R U_c')^{1/3} \frac{\int_{\infty_1}^{\zeta} \text{Ai}(\zeta) d\zeta}{\int_{\infty_1}^{\zeta} d\zeta \int_{\infty_1}^{\zeta} \text{Ai}(\zeta) d\zeta} \quad (1-60)$$

であり、 $y = y_1$ では

$$\frac{\phi_3'(y_1)}{\phi_3(y_1)} = \frac{1}{y_1 - y_c} \frac{\zeta_1 \int_{\infty_1}^{\zeta_1} \text{Ai}(\zeta) d\zeta}{\int_{\infty_1}^{\zeta_1} d\zeta \int_{\infty_1}^{\zeta} \text{Ai}(\zeta) d\zeta} \quad (1-61)$$

ここに $\zeta_1 = (i \alpha R U_c')^{1/3} (y_1 - y_c)$

ここで、式(1-59)を導入すれば式(1-58)が得られるわけである。式(1-58)を解くには複素平面上での図式解法によるのが最も簡単である。図2にその一例を示す。Hughes & Reidによる自動解法(automated root finder)は同じく図式解法ではあるが、各zを与えたとき自動的に式(1-58)をみたす(α, c)を求めるようにしたものである。

なお、このようにして、z, α, cが求まればそのときのRは

$$R = z^3 / \alpha U_c' (y - y_c)^3 \quad (1-62)$$

から求められる。

以上の手順で中立曲線が求められる。

1.6 中立曲線の漸近枝について

α → 0, αR → ∞ の極限を考える。このとき式(1-55)左辺を直接以下のように評価する。α → 0 のとき3節に述べた Heisenberg の方法が有効であるが、Reid, Hughes & Reid に従う方が明快である。Miles 変換 (Miles⁽⁴⁰⁾)

$$\Omega(y) = \frac{\phi}{(U-c)[U'\phi - (U-c)\phi']} \quad (1-63)$$

を非粘性方程式に導入すれば

$$\Omega' = \alpha^2 Y \Omega^2 - Y^{-1}, \quad Y = (U-c)^2 \quad (1-64)$$

の Riccati 方程式が得られる。式(1-58)におけるwはその定義式(1-56)と(1-63)から

$$w = 1 + U_1' c \Omega(y_1) \quad (1-65)$$

と書ける。流路内流の場合 ω(y) = 1/Ω(y) により

$$\omega' = -\alpha^2 Y - Y^{-1} \omega^2, \quad \omega(y_2) = 0 \quad (1-66)$$

この Riccati 方程式を α² 展開で解くと

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_2 \alpha^2 + \omega_4 \alpha^4 + O(\alpha^6) \\ \omega_2' &= -Y \\ \omega_4' &= Y^{-1} \omega_2^2 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-67)$$

$$\omega_2 = \int_y^{y_2} Y dy, \quad \omega_4 = - \int_y^{y_2} Y^{-1} \omega_2^2 dy, \quad \dots \quad (1-68)$$

ただし積分路はこれまでと同じである。

式(1-65)を式(1-58)に代入して $z \rightarrow 2.297; \infty$ から

$$R \sim 1.002 U_1'^5 \left(\int_{y_1}^{y_2} U^2 dy \right)^{-3} \alpha^{-7} \quad (1-69)$$

$$c \sim 2.296 \frac{\alpha_2}{U_1'} \int_{y_1}^{y_2} U^2 dy \quad (1-70)$$

$$R \sim \frac{1}{2\pi^2} \frac{U_1'^{11}}{U_1'^2} \left(\int_{y_1}^{y_2} U^2 dy \right)^{-5} \alpha^{-11} \quad (1-71)$$

$$c \sim \frac{\alpha^2}{U_1'} \int_{y_1}^{y_2} U^2 dy \quad (1-72)$$

が得られる。

参 考 文 献

- (1) Eagles, P.M. : Quart. J. Mech. Appl. Math. (1969) 22-2
129-182
- (2) Erdélyi, A. : Asymptotic Expansions (Dover, 1956)
- (3) Hughes, T.H. & Reid, W.H. : J. Fluid Mech. (1965) 23-4
715-735
- (4) Hughes, T.H. & Reid, W.H. : J. Fluid Mech. (1965) 23-4
737-747
- (5) 犬井鉄郎 : 特殊関数 (岩波書店, 1962)
- (6) Lakin, W.D., Ng, B.S. & Reid, W.H. : Phil. Trans. Roy. Soc. A
(1978) 289 347-371
- (7) Lin, C.C. : Quart. Appl. Math. (1945) 3 117-142, 218-234,
277-301
- (8) Lin, C.C. : The Theory of Hydrodynamic Stability
(Camb. Univ. Press, 1955)
- (9) Lin, C.C. & Rabenstein, A.L. : Studies in Appl. Math.
(1970) 49 311-340
- (10) Miles, J.W. : J. Fluid Mech. (1962) 13 427-432
- (11) Pike, E.R. : Quart. J. Mech. Appl. Math. (1964) 17-1
105-124, 369-379
- (12) Reid, W.H. : in Basic Developments in Fluid Dynamics
vol.1 (Academic Press, 1965)
- (13) 巽友正, 後藤金英 : 流れの安定性理論 (産業図書, 1976)
- (14) 徳田尚之 : 日本物理学会誌 (1976) 31-7 561-567
- (15) Wasow, W. : Annals of Math. (1948) 49-4 852-871

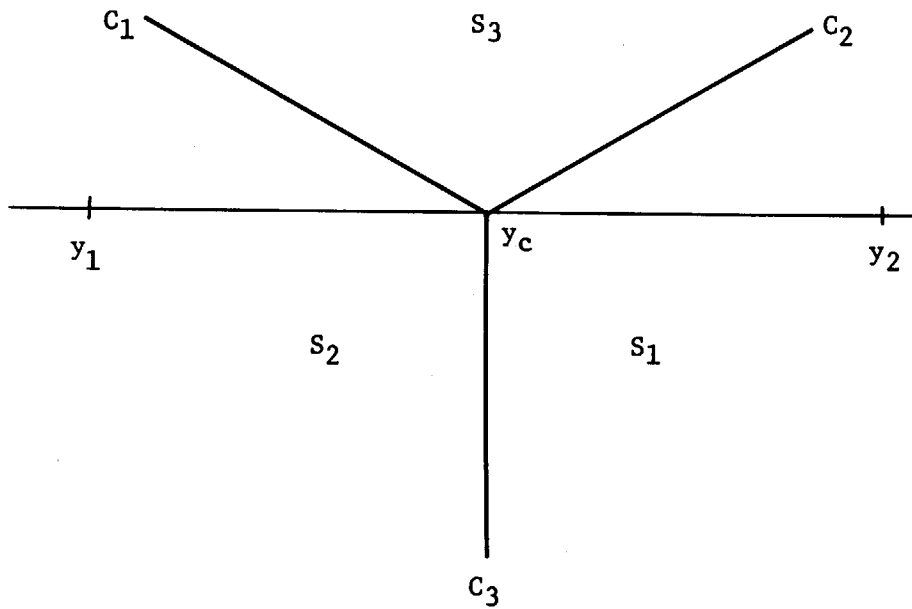


Fig. 1 The local behavior of the anti-Stokes lines in the y -plane for U_c' real and positive.

Table 1 Dominant-recessive relations of viscous solutions in the sectors S_1, S_2, S_3 's.

Sector	$\arg (y-y_c)$	θ_3	θ_4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_3	$(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$	dominant	subdominant
S_1	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$	subdominant	dominant
S_2	$(-\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{2})$	dominant	subdominant
S_3	$(-\frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6})$	subdominant	dominant
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

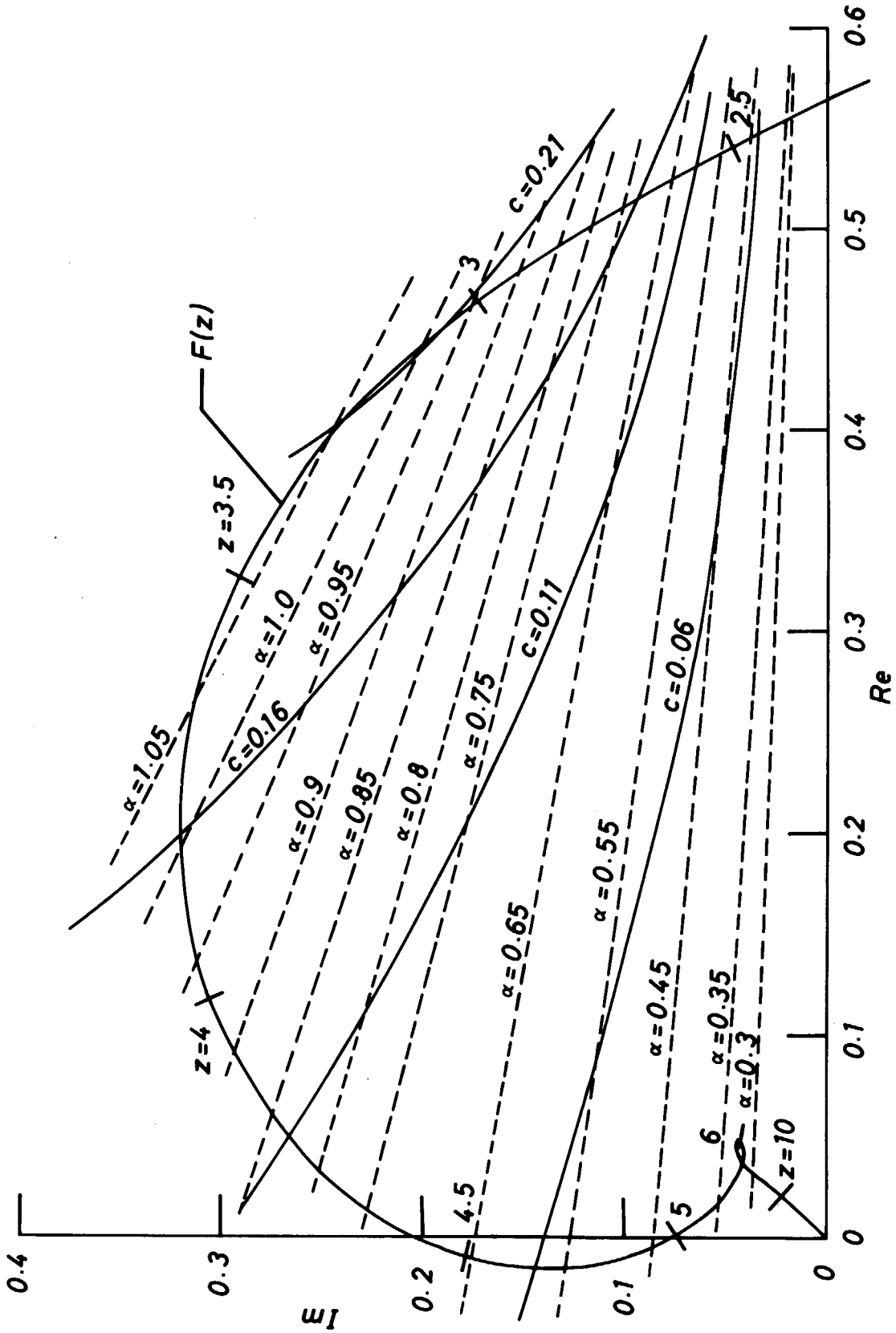


Fig.2 Argand diagram for J-H III₁ ; $k=0.95, \gamma=-3.203$

2. Tietjens 関数

ここでは 1.5 に現れた、1 位の転移点問題としての Orr - Sommerfeld 方程式の固有値問題に非常に大切な Tietjens 関数を取り扱う。Tietjens 関数の漸近的挙動についての取り扱いには立ち入らない。(Reid⁽⁶⁾)

Tietjens 関数はその名の示すとおり O. Tietjens によって初めて数値的に計算されたことに始まり、その後 H. Schlichting, J. Pretsch, C. C. Lin, D. Meksyn, H. Holstein らにより幾度も数表化されたが、J. W. Miles の数表の出現により一応決定版とみなされたようである。以前はよく C. C. Lin の数表が引用されていたが、adjoint Tietjens 関数の数表を求めている Reid と Hughes も、Tietjens 関数は Miles の結果を用いていることからそのあたりの事情がうかがえる。

その後 Chen, Joseph and Sparrow, H. E. Huppert らは、Tietjens 関数をベキ級数形に表現して、固有値問題を解く際のサブルーチンとして容易に使用しうるように改良を重ねているが、現状として Miles の数表に対する決定的な改訂版は出ていない。

ここでは $\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}_r + \mathcal{F}_i = [1 - F(z)]^{-1}$ (C. C. Lin 以降 $F(z)$ より $\mathcal{F}(z)$ の方が隆盛であったが、Reid に従うと $F(z)$ の方が有効である。) と $F(z)$ を Miles に従って再計算し、Miles の数表を確認するとともに、その際用いる複素領域における Runge - Kutta - Gill スキームの有効性をも点検する。この RKG スキームは安定性計算にひんばんに利用できる。

2.1 Tietjens 関数の計算

ここでは主に Miles⁽⁵⁾ の表式のみを再録し、その導出に必要な複雑な手続きは省略する。

(注) としたものは今回あえて補った分である)

Tietjens 関数は前にみたように Airy 関数を用いて

$$F(z) = \frac{\int_{\infty 1}^{\zeta_1} d\zeta \int_{\infty 1}^{\zeta} \text{Ai}(\zeta) d\zeta}{\zeta_1 \int_{\infty 1}^{\zeta_1} \text{Ai}(\zeta) d\zeta}, \quad \zeta_1 = z e^{-5\pi i/6} \quad (2-1)$$

または Hankel 関数を用いて

$$F(z) = \frac{\int_{\infty}^z dz \int_{\infty}^z f_3(z) dz}{z \int_{\infty}^z f_3(z) dz}, \quad f_3(z) = z^{1/2} H_{1/3}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (iz)^{3/2} \right] \quad (2-2)$$

で定義される。

$f_3(z)$ が

$$f_3''(\zeta) - i\zeta f_3(\zeta) = 0, \quad f_3(\infty) = 0 \quad (2-3)$$

をみたすことを加味して $\mathcal{F}(z)$ は

$$\mathcal{F}(z) = [1 - F(z)]^{-1} = -z \int_{\infty}^{-z} f_3(\zeta) d\zeta / \int_{\infty}^{-z} \zeta f_3(\zeta) d\zeta \quad (2-4)$$

式(2-3) から

$$\int_{\infty}^{\zeta} \zeta f_3(\zeta) d\zeta = -i f_3'(\zeta) \quad (2-5)$$

これから式(2-4) は

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z}{i f_3'(-z)} \int_{\infty}^{-z} f_3(\zeta) d\zeta \quad (2-6)$$

と表される。

$$\int_0^{\infty} f_3(\zeta) d\zeta = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) e^{-11\pi i/12} \quad (2-7)$$

(注) ただし公式 $\int_0^{\infty} x^{\mu-1} H_{\nu}^{(1)}(ax) dx = -\frac{2^{\mu-1} i}{\pi a^{\mu}} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right) e^{(\mu-\nu)\pi i/2}$;

$|\operatorname{re}(\nu)| < \operatorname{re}(\mu) < 3/2$ を用いている。例えば Watson)

ここで、

$$g(z) = \frac{e^{3\pi i/4}}{2\sqrt{3}} f_3(\zeta) = \operatorname{Ai}(ze^{-5\pi i/6}), \quad z = \zeta e^{\pi i} \quad (2-8)$$

を導入し、式(2-7)、(2-8)を式(2-6)と式(2-3)に代入すると

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z}{i g'(z)} \left[\frac{1}{3} e^{-i\pi/6} + \int_0^z g(z) dz \right] \quad (2-9)$$

$$g''(z) + iz g(z) = 0 \quad (2-10)$$

を得る。ここで

$$g(0) = [3^{2/3} \Gamma(2/3)]^{-1}, \quad g'(0) = [3^{1/3} \Gamma(1/3)]^{-1} e^{i\pi/6} \quad (2-11)$$

(注) 式(2-11)は例えば Erdélyi)

式(2-11)を初期条件にして式(2-10)を数値積分して式(2-9)に代入すれば $\mathcal{F}(z)$ が求まり

$$F(z) = 1 - \mathcal{F}(z)^{-1} \quad (2-12)$$

から Tietjens 関数が求まる。以上が Miles の手順である。さらに Miles は $z \gg 1$ での漸近形を Lommel 関数を用いて求めている。Lommel 関数を用いると Watson の公式から

$$\zeta \int_{\infty}^{\zeta} f(\zeta) d\zeta = -i [w S_{0, \frac{1}{3}}(w) f'(\zeta) + w^2 \zeta^{-1} S_{-1, -\frac{2}{3}}(w) f(\zeta)] \quad (2-13)$$

$$w = \frac{2}{3} \zeta^{3/2} e^{3\pi i/4} \quad (2-14)$$

ここで $S_{\mu, \nu}$ は Lommel 関数である。Lommel 関数と Hankel 関数の漸近展開を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &\sim 1 + \frac{e^{\pi i/4}}{z^{3/2}} + \frac{9}{4} \frac{e^{\pi i/2}}{z^3} + \frac{263}{32} \frac{e^{3\pi i/4}}{z^{9/2}} + O(z^{-6}) \\ &\sim 1 + \frac{e^{-5\pi i/4}}{\zeta^{3/2}} + \frac{9}{4} \frac{e^{-\pi i/2}}{\zeta^3} + \frac{263}{32} \frac{e^{\pi i/4}}{\zeta^{9/2}} + O(\zeta^{-6}) \end{aligned} \quad (2-15)$$

を得る。

(注) Miles では式 (2-13) 右辺第 2 項の ζ^{-1} が欠落しているが式 (2-15) が正しいことから誤植であろう)

2.2 Tietjens 関数の数値計算プログラムについて

前節に示したように、式 (2-11) の初期条件の下に式 (2-10) を数値積分し、式 (2-9) に代入すれば Tietjens 関数の値が求まる。プログラムリストを Appendix L-1 に示す。この計算は副次的なものであるからプログラムの詳細には触れない。ただ、式 (2-9) の積分は台形公式、式 (2-10) の積分には複素領域における Runge-Kutta-Gill スキームを実領域に置き直したスキームを用いた。また、後に示す固有値問題のサブルーチンとこの RKG 法は共通である。計算結果は Appendix L-2 中、サブルーチン VISTFR に $F_r(z)$ 、VISTFI に $F_i(z)$ を Miles, Lin の結果とともに収納した。これによると、実部 $F_r(z)$ の差異は全く認められず、虚部 $F_i(z)$ の方は z の値が 4.8 から少し差が現れ、 $z = 10.0$ で差異は 0.345% 程度になる。実用上はこの差異は固有値問題の誤差として許容しうるものである。また、通常問題になる臨界 Reynolds 数近傍では z はこのように大きくはなく、 $z \geq 4.8$ は後述の中立曲線上のこぶ (kink point) 付近に相当する。以後の計算には、Miles の数表が十分信頼できるという確信の下に一応 Miles の値を用いた。

参 考 文 献

- (1) Chen, T.S., Joseph, D.D. & Sparrow, E.M. : Phys.Fluids
(1966) 9 2519
- (2) Erdélyi, A. : Asymptotic Expansions (Dover, 1956)
- (3) Holstein, H. : Z. angew. Math. Mech. (1950) 30 25-49
- (4) Huppert, H.E. : Phys.Fluids (1970) 13-3 829-831
- (5) Lin, C.C. : Quart. Appl. Math. (1945) 3 117-142
- (6) Miles, J.W. : J. Fluid Mech. (1960) 8 593-610
- (7) Reid, W.H. : in Basic Developments in Fluid Dynamics
vol.1 (Academic Press, 1965)
- (8) Watson, G.N. : A Treatise on the Theory of Bessel Functions
(Camb. Univ. Press, 1962)

3. Jeffery-Hamel 流について

ここでは、線形安定性を調べる速度分布として、Navier-Stokes 方程式の数少ない厳密解である Jeffery-Hamel 流について Fraenkel, Eagles の結果を再録し、固有値問題の計算上必要な諸量を挙げておく。

Navier-Stokes 方程式の数少ない厳密解の 1 つに、Jeffery-Hamel (以後 J-H) 解がある。これは、角度 $2\theta_0$ で交わる 2 平面の間の定常流であり、発散する流れと収束する流れの 2 通りに大別される。前者は 2 平面の交線からのわき出し、後者は吸い込みという流れのモデル化である。この J-H 流は数多くの教科書^{(1),(4),(5)}にも取り上げられ、発散流の場合、非常に不安定であること、収束流の場合逆に安定であり、 $R \rightarrow \infty$ で非粘性解 (Euler 方程式の解) に収束することなどが知られている。具体的な J-H 流の解析は、Jeffery と Hamel による厳密解の発見に続いて、Rosenhead, Millsaps & Pohlhausen, さらに、Fraenkel らにより詳細に行われた。

これら既存の解析結果を用いて安定性の計算を行うとき、Rosenhead は Weierstrass の \wp 関数を用いているため数値的取り扱いが面倒である。また、Millsaps & Pohlhausen も Fraenkel と同じく、Jacobi の楕円関数を用いているが、発散流に対する Eagles の安定性計算との比較上ここでは Fraenkel 理論に従うことにする。

3.1 J-H 解

Fraenkel⁽³⁾によって得られた結果は次のとおりである。

J-H I (発散する流れ) $0.5 < m < 1$

$$\begin{cases} \theta_0 = aP^{1/2}, & P(m, a) = 4m - 2 - 3\text{sn}^2 \text{ad}c^2 a & (3-1) \\ R_v = 6P^{-1/2} \{2E_*(a) - a - \text{sn} \text{ad}c a + a\text{sn}^2 \text{ad}c^2 a\} & (3-2) \\ g(y) = 6P^{-1/2} R^{-1} a (\text{sn}^2 \text{ad}c^2 a - \text{sn}^2 \text{aydc}^2 \text{ay}) & (3-3) \end{cases}$$

J-H II_n (発散する流れ) $0.5 < m < 1$

$$\begin{cases} \theta_0 = bQ^{1/2}, & Q = 1 + m - 3\text{msn}^2 b & (3-4) \\ R_v = 6Q^{-1/2} \{E_*(b) - b\text{dn}^2 b\} & (3-5) \\ g(y) = 6Q^{-1/2} R^{-1} mb (\text{sn}^2 b - \text{sn}^2 by), & (n-1)K \leq b \leq nK & (3-6) \end{cases}$$

J-H III_n (収束する流れ) $0.5 < m < 1$

$$\begin{cases} \theta_0 = bQ^{1/2}, & Q = 1 + m - 3m \text{cd}^2 b & (3-7) \\ R_v = 6Q^{-1/2} \{E_*(b) - m \text{sn}b \text{cd} b - (1-m) b \text{nd}^2 b\} & (3-8) \\ g(y) = 6Q^{-1/2} R^{-1} mb (\text{cd}^2 b - \text{cd}^2 by), & (n-1)K \leq b \leq nK & (3-9) \end{cases}$$

J-H_{∞-} (J-H III₁ の $r_v \rightarrow -\infty$ での漸近形を以下 J-H_{∞-} と仮称する)

$$\begin{cases} \beta_\infty = \tanh^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}}, & z = y + 1 & (3-10) \\ g(y) \sim 3 \tanh^2 \left(\left| \frac{R_v \theta_0}{2} \right|^{1/2} z + \beta_\infty \right) - 2 & & (3-11) \end{cases}$$

ただし, J-H I は発散する流れの基本モードであり変曲点を有しない。J-H III₁ は J-H I に対応する収束する流れを与える。J-H II_{1,2,...} と J-H III_{2,3,...} はいずれも変曲点, 逆流域を有し, そのためここでの 1 位の転移点を 1 つ有する取り扱いの範囲外である。ここでは従って, J-H I, III₁, ∞₋ を取り扱う。

また, 添字 v は体積流量から作った流速で無次元化したことを示す。すなわち,

$$R_v = \frac{1}{2\nu} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} u r dy \quad (3-12)$$

また,

$$r_v = \theta_0 R_v \quad (3-13)$$

$$m = k^2, \quad k \text{ は Jacobi の第 1 種楕円関数の母数} \quad (3-14)$$

$$\begin{aligned} E_*(z|m) &= \int_0^{\text{sn}(z|m)} (1-t^2)^{-1/2} (1-mt^2)^{1/2} dt \\ &= \int_0^z \text{dn}^2(\zeta|m) d\zeta \end{aligned} \quad (3-15)$$

以上のままでは, J-H I については, a と m , J-H III₁ については b と m のいずれも 2 つのパラメーターが独立に含まれている。ところで, 次節に示すように準平行流の仮定の下にパラメーターは母数 k のみとなり式 (3-1) ~ (3-9) は数値計算上より見通しの良いものになる。

3.2 準平行流近似下での J-H 解と Orr-Sommerfeld 方程式

Eagles により, $r/R \rightarrow 0$ のとき, 主流に対する線形化された攪乱方程式は Orr-Sommerfeld 方程式に帰着することが示された。式 (3-1) から式 (3-9) の諸式は $r/R \rightarrow 0$ のとき

J-H I: $0.5 < m < 1$

$$\begin{cases} 3 \text{sn}^2(a|m) \text{dc}^2(a|m) = 4m - 2 & (3-16) \\ \rho = 2 E_*(a|m) - a - \text{sn}(a|m) \text{dc}(a|m) + a \text{sn}^2(a|m) \text{dc}^2(a|m) & (3-17) \\ r_v = 6 a \rho & (3-18) \\ U_v = \frac{a}{\rho} \{ \text{sn}^2(a|m) \text{dc}^2(a|m) - \text{sn}^2(ay|m) \text{dc}^2(ay|m) \} & (3-19) \end{cases}$$

J-H II_n : 0.5 < m < 1

$$\begin{cases} 3 m c n^2 (b|m) = 2 m - 1 & (3-20) \\ \rho = E_*(b|m) - b d n^2 (b|m) & (3-21) \\ r_v = 6 b \rho & (3-22) \\ U_v = \frac{m b}{\rho} \{ \operatorname{sn}^2 (b|m) - \operatorname{sn}^2 (b y|m) \} & (3-23) \end{cases}$$

J-H III_n : 0.5 < m < 1

$$\begin{cases} 1 + m = 3 m c d^2 b & (3-24) \\ \rho = E_*(b|m) - m \operatorname{sn} (b|m) c d (b|m) - (1 - m) b n d^2 (b|m) & (3-25) \\ r_v = 6 b \rho & (3-26) \\ U_v = \frac{m b}{\rho} \{ c d^2 (b|m) - c d^2 (b y|m) \} & (3-27) \end{cases}$$

これらに対応する Orr-Sommerfeld方程式は $r/R \ll 1$ で

$$\phi^{iv} - 2 \alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi = i \alpha R \{ (U - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U'' \phi \} \quad (3-28)$$

$$\phi(-1) = \phi'(-1) = \phi'(0) = \phi'''(0) = 0 \quad (3-29)$$

で与えられる。ここで諸量は中心流速で規格化している。すなわち、J-H解の計算においては平均流速、安定性計算では中心流速を規格化の代表速度として採用する。後者の場合、したがって添字 v は付かない。

以上の表式を用いて第1章に従って数値計算すればよいわけであるが、實際上、第1章の式(1-24)、(1-25)からも明らかなようにUの高階微分が必要となる。次節にそれらの必要量を挙げておく。

3.3 J-H解の高階微分

J-H I, III₁の高階微分として本質的なものは、 $\operatorname{sn}^2 \theta d c^2 \theta$ と $c d^2 \theta$ の微分である。第4章に示すように、 $c d^2 \theta$ の高階微分式の $c n \theta$ と $d n \theta$ を全て入れ替えれば $d c^2 \theta$ のそれに対する表現が得られる。したがって、ここでは $\operatorname{sn}^2 \theta \cdot f(\theta)$ (ただし、 $f(\theta)$ は $d c^2 \theta$)、 $c d^2 \theta$ に対する高階微分を示す。

$$(c d^2 \theta)' = 2 c n' \theta c n \theta n d^2 \theta - 2 c n^2 \theta d n' \theta n d^3 \theta \quad (3-30)$$

$$\begin{aligned} (c d^2 \theta)'' &= 2 c n'' \theta c n \theta n d^2 \theta + 2 c n'^2 \theta n d^2 \theta - 8 c n' \theta d n' \theta c n \theta n d^3 \theta \\ &\quad + 6 d n'^2 \theta c n^2 \theta n d^4 \theta - 2 c n^2 \theta d n'' \theta n d^3 \theta \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} (c d^2 \theta)''' &= 2 c n''' \theta c n \theta n d^2 \theta + 6 c n'' \theta c n' \theta n d^2 \theta - 12 c n'' \theta d n' \theta c n \theta n d^3 \theta \\ &\quad - 12 c n'^2 \theta d n' \theta n d^3 \theta - 12 c n' \theta d n'' \theta c n \theta n d^3 \theta + 36 c n' \theta d n'^2 \theta c n \theta n d^4 \theta \\ &\quad + 18 d n'' \theta d n' \theta c n^2 \theta n d^4 \theta - 24 d n'^3 \theta c n^2 \theta n d^5 \theta - 2 d n''' \theta c n^2 \theta n d^3 \theta \end{aligned} \quad (3-32)$$

$$\begin{aligned}
 (cd^2\theta)^{iv} &= 2cn^{iv}\theta cn\theta nd^2\theta + 8cn'''\theta cn'\theta nd^2\theta - 16cn'''\theta dn'\theta cn\theta nd^3\theta \\
 &+ 16cn''^2\theta nd^2\theta - 48cn''\theta cn'\theta dn'\theta nd^3\theta - 24cn''\theta dn''\theta cn\theta nd^3\theta \\
 &+ 72cn''\theta dn'^2\theta cn\theta nd^4\theta - 24cn'^2\theta dn''\theta nd^3\theta + 72cn'^2\theta dn'^2\theta nd^4\theta \\
 &- 16cn'\theta dn'''\theta cn\theta nd^3\theta + 144cn'\theta dn''\theta dn'\theta cn\theta nd^4\theta \\
 &- 192cn'\theta dn'^3\theta cn\theta nd^5\theta + 24dn'''\theta dn'\theta cn^2\theta nd^4\theta \\
 &+ 18dn''^2\theta cn^2\theta nd^4\theta - 144dn''\theta dn'^2\theta cn^2\theta nd^5\theta \\
 &+ 120dn'^4\theta cn^2\theta nd^6\theta - 2dn^{iv}\theta cn^2\theta nd^3\theta
 \end{aligned} \tag{3-33}$$

$$(sn^2\theta \cdot f)' = 2sn'\theta sn\theta \cdot f + sn^2\theta \cdot f' \tag{3-34}$$

$$(sn^2\theta \cdot f)'' = 2sn''\theta sn\theta \cdot f + 2sn'^2\theta \cdot f + 4sn'\theta sn\theta \cdot f' + sn^2\theta \cdot f'' \tag{3-35}$$

$$\begin{aligned}
 (sn^2\theta \cdot f)''' &= 2sn'''\theta \cdot f + 6sn''\theta sn'\theta \cdot f + 6sn''\theta sn\theta \cdot f' + 6sn'^2\theta \cdot f' \\
 &+ 6sn'\theta sn\theta \cdot f'' + sn^2\theta \cdot f'''
 \end{aligned} \tag{3-36}$$

$$\begin{aligned}
 (sn^2\theta \cdot f)^{iv} &= 2sn^{iv}\theta sn\theta \cdot f + 8sn'''\theta sn'\theta \cdot f + 8sn'''\theta sn\theta \cdot f' \\
 &+ 24sn''\theta sn'\theta \cdot f' + 6sn''^2\theta \cdot f + 12sn''\theta sn\theta \cdot f'' \\
 &+ 12sn'^2\theta \cdot f'' + 8sn'\theta sn\theta \cdot f''' + sn^2\theta \cdot f^{iv}
 \end{aligned} \tag{3-37}$$

したがって $sn^2\theta dc^2\theta$ に対しては式 (3-34) から式 (3-37) の $f^{(n)}$ に、式 (3-30) から式 (3-33) で c と d を完全に入れ替えた式を代入すればよい。

J-H_∞ に対しては、 $\tanh^2\theta$ に対する微分のみでよい。

$$(\tanh^2\theta)' = 2\operatorname{sech}^2\theta \tanh\theta \tag{3-38}$$

$$(\tanh^2\theta)'' = -4\operatorname{sech}^2\theta \tanh^2\theta + 2\operatorname{sech}^4\theta \tag{3-39}$$

$$(\tanh^2\theta)''' = 8\operatorname{sech}^2\theta (\tanh^3\theta - 2\operatorname{sech}^2\theta \tanh\theta) \tag{3-40}$$

$$(\tanh^2\theta)^{iv} = 8\operatorname{sech}^2\theta (-2\tanh^4\theta + 11\operatorname{sech}^2\theta \tanh^2\theta - 2\operatorname{sech}^4\theta) \tag{3-41}$$

3.4 J-H I, III₁ のパラメーターの決定

J-H I では式 (3-16), J-H III₁ では式 (3-24) により、第2のパラメーター a, b が m の関数として求められる。

J-H I :

$$A = \frac{sn^2 a (1 - k^2 sn^2 a)}{1 - sn^2 a} \tag{3-42}$$

とおくと

$$sn a = \sqrt{\frac{(1+A) \pm \sqrt{(1+A)^2 - 4Ak^2}}{2k^2}} \tag{3-43}$$

J-H III₁ :

$$B = \frac{1+m}{3m} \quad (3-44)$$

とおくことにより

$$\operatorname{sn} b = \sqrt{\frac{B-1}{Bk^2-1}} \quad (3-45)$$

から a , b が求められる。この際 sn 関数の逆関数が必要であるが、詳細は第4章に述べる。

また、母数 k ($m = k^2$) がもう1つのそして唯一のパラメーターであるが、これは J-H I, III₁ 共に $\frac{1}{2} < m < 1$ であることがわかる。したがって $r/R \rightarrow 0$ での J-H 解は1つのパラメーター m で完全に記述される。この点が Fraenkel 流儀の特徴である。

参 考 文 献

- (1) Batchelor, G.K. : An Introduction to Fluid Dynamics
(Camb. Univ. Press, 1967)
- (2) Eagles, P.M. : J. Fluid Mech. (1966) 24-1 191-207
- (3) Fraenkel, L.E. : Proc. Roy. Soc. A (1962) 267 119-138
- (4) Imai, I. : Fluid Dynamics vol.1 (Shokabo, 1973)
in Japanese
- (5) Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. : Fluid Mechanics
(Pergamon, 1959)
- (6) Millsaps, K. & Pohlhausen, K. : J. Aero. Sci. (1953)
20 187-196
- (7) Rosenhead, L. : Proc. Roy. Soc. A (1940) 175 436-467

4. Jacobi の楕円関数の計算プログラムについて

ここでは Jeffery-Hamel 流の解析に不可欠な Jacobi の楕円関数の計算方法について触れることにする。

二重連結領域における等角写像の問題や一般力学における質点振子の問題、流体力学における地面効果の問題や Jeffery-Hamel 流の解等をはじめとして、数学、物理学、工学の多くの問題に楕円関数は不可欠である。それらの内で、最近の大型計算機の進歩に伴って、楕円関数を用いずに解決できる問題も少なくないが、解析解の果たす役割は依然非常に大きく、とくに二重周期性に本質的に起因する現象の解明に楕円関数の果たす役割は絶大である。

解析解を最終的に現象と対応させようとするとき、もしくは解析解を用いてさらに複雑な計算をしようとするとき、楕円関数の具体的な数値が必要となる。現在、楕円関数に関する数表もいくつか存在するが、数表から全ての計算を行うことは今日としては時代遅れの感がある。他方、大型計算機の組み込み関数や科学サブルーチンライブラリー (SSL) に含まれる程なじみの深いものでもない。

ここでは、楕円関数の中でも取り扱いの容易な Jacobi の第 1 種楕円関数と ϑ 関数、それらの母数と補母数、定数 K とその補数 K' 、Legendre-Jacobi の第 2 種楕円積分 E 等についての数値計算方法をまとめて列挙する。Weierstrass の楕円関数 (\wp 関数, ζ 関数や σ 関数) は実用上 Jacobi の楕円関数より使用頻度が少なく、また、Jacobi の楕円関数を用いて求められるのでここでは取り扱わないことにする。

ここでは主に実変数に対する計算方法を示すが、楕円関数は元来複素平面上でその二重周期性を示す。基本的にはここに述べる変数を複素変数に置き換えるだけで複素平面上に拡張される。

4.1 母数 k , 補母数 k' , q , 定数 K , および補数 K'

ここに示すのは非常に伝統的な計算方法であり、どの文献もこの方法に基づいている。

まず母数 k が実数かつ $0 < k < 1$ の場合のみ取り扱う。母数 k が与えられたとき、補母数 k' は

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (4-1)$$

で与えられる。

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \quad (4-2)$$

とおけば

$$q = \epsilon + 2\epsilon^5 + 15\epsilon^9 + 150\epsilon^{13} + 1707\epsilon^{17} + O(\epsilon^{21}) \quad (4-3)$$

なる q を用いて

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \frac{2(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots)}{1 + \sqrt{k'}} \quad (4-4)$$

から定数 K が与えられる。

$$K' = \frac{K}{\pi} \log \frac{1}{q} \quad (4-5)$$

から K の補数 K' も直ちに求められる。この方法は収束も早く次に掲げる Landen の変換を用いた方法と結果は完全に一致する。

友近⁽⁷⁾に上記の方法とともに紹介された Landen の変換を用いる方法も数値計算上非常に便利である。

母数 k に対する補母数を k' として Landen の変換を逐次適用して得られるところの母数を k_1, k_2, \dots, k_n とし、それに対応する補母数をそれぞれ k'_1, k'_2, \dots, k'_n とする。

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad k_2 = \frac{1 - k'_1}{1 + k'_1}, \quad \dots, \quad k_n = \frac{1 - k'_{n-1}}{1 + k'_{n-1}} \quad (4-6)$$

を用いて

$$K = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + k_n) \quad (4-7)$$

により K が求められる。 K' はこの方法では q が未知であるため式 (4-5) が使えない。ところが好都合なことに、

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4-8)$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4-9)$$

なる関係がある。(すなわち、 K は実は第 1 種完全楕円積分である。) したがって、 K と k の関係は K' と k' の関係に等しい。式 (4-6), (4-7) の k と k' , K と K' を入れ替えただけで K' の値は求まる。 q は

$$q = e^{-\pi K'/K} \quad (4-10)$$

から求めれば全ての量が求められたことになる。後に示す母数等に関するサブルーチンではこれら 2 通りの方法が含まれており、IF 文の変更のみでどちらでも使用できる。ただし、これら両者の優劣はない。

4.2 ϑ 関数

楕円関数の本質はその二重周期性にある。したがって、ここで述べる ϑ 関数は第 1 種楕円関数ではない。しかし、後述の Jacobi の楕円関数を求めるのに ϑ 関数は必要であるばかりでなく、しばしば理論計算に ϑ 関数は登場する。 ϑ 関数の定義より Fourier 級数として

$$\vartheta_1(v) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)\pi v \quad (4-11)$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} 2q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos(2n+1)\pi v \quad (4-12)$$

$$\vartheta_3(v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2q^{n^2} \cos 2n\pi v \quad (4-13)$$

$$\vartheta_4(v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2q^{n^2} \cos 2n\pi v \quad (4-14)$$

で与えられる。通常この q 級数展開で ϑ 関数は求められる。 $|q|$ が 1 に比べて適当に小さい場合、これらの級数の収束は非常によい。ところが、 q の値がある程度大きくなると、 ϑ_1 、 ϑ_4 では毎回符号の変わる量の総和をとることから精度が悪くなる。さいわい、 q 級数展開の他に無限乗積表示式が知られている。それらは、

$$\vartheta_1(v) = 2q^{1/4} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \quad (4-15)$$

$$\vartheta_2(v) = 2q^{1/4} \cos \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \quad (4-16)$$

$$\vartheta_3(v) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \quad (4-17)$$

$$\vartheta_4(v) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \quad (4-18)$$

である。ここでは、上記の事情から、 ϑ_1 と ϑ_4 については無限乗積展開、 ϑ_2 と ϑ_3 については q 級数展開により ϑ 関数の値を求めた。

4.3 Jacobi の第 1 種楕円関数 sn , cn , dn

一般に楕円関数として前述のように ϑ 関数より Jacobi の楕円関数の方が数値計算上適している。それは、これまで求めた諸量を用いて直ちに数値が求められるからでもある。Jacobi の楕円関数の定義は、

$$\operatorname{sn} u = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)} \quad (4-19)$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)} \quad (4-20)$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)} \quad (4-21)$$

ただし, ここで

$$v = \frac{u}{2K} \quad (4-22)$$

である。また, sn , cn , dn ともに, 母数に依存している。したがって, 母数をも強調するとき, $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ 又は, $\operatorname{sn}(u|k)$, $\operatorname{cn}(u|k)$, $\operatorname{dn}(u|k)$ と書く。さらに,

$$\frac{1}{\operatorname{sn}} = \operatorname{ns} \quad (4-23)$$

$$\frac{1}{\operatorname{cn}} = \operatorname{nc} \quad (4-24)$$

$$\frac{1}{\operatorname{dn}} = \operatorname{nd} \quad (4-25)$$

$$\frac{\operatorname{sn}}{\operatorname{cn}} = \operatorname{sc} \quad (4-26)$$

$$\frac{\operatorname{cn}}{\operatorname{dn}} = \operatorname{cd} \quad (4-27)$$

$$\frac{\operatorname{dn}}{\operatorname{sn}} = \operatorname{ds} \quad (4-28)$$

また, sn , cn , dn を s , c , d と略記する。

また, Jacobi の楕円関数の微分は

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \quad (4-29)$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \quad (4-30)$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \quad (4-31)$$

で与えられる。これらの関係を何度も用いると高階微係数が求められる。サブルーチンには4階導関数までが含まれている。

また、Jacobiの楕円関数には、

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1 \quad (4-32)$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1 \quad (4-33)$$

なる関係が成り立つことを付記しておく。この一見通常の三角関数と類似の関係の成り立つことが、Jacobiの楕円関数のWeierstrassの \wp 関数よりも親しみ易い要因ともいえる。

4.4 sn関数の逆関数

Newton-Raphson法等で最初から求めたのでは、所望の精度を得るのに多大の時間を要する。そればかりでなく、楕円関数は二重周期性を有しているため、元来Newton-Raphson法には不向きである。

$$\frac{\sqrt{1-k^2 x^2} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1-k^2 x^2} + \sqrt{k'}} = \frac{2(q \cos 2\pi v + q^9 \cos 6\pi v + \dots)}{1 + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^{16} \cos 8\pi v + \dots} = b \quad (4-34)$$

とおくと近似的に

$$b = 2q \cos 2\pi v \quad (4-35)$$

から

$$v = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \frac{b}{2q} \quad (4-36)$$

を得る。式(4-36)から直ちに u が求まる。

ただし、この方法だけではあまり精度が良くない。ここで得られた u の値を出発点としてNewton-Raphson法を用いて精度を上げる。ただし、前述のとおり、二重周期性が障害となり、注意しないと、何周期も遠くの点に落ちてしまうことになる。sn関数の周期は、 $4K$ と $2iK'$ を基本周期としている。実変数の場合、考えている基本周期平行四辺形に対応する区間(u_0 , $u_0 + 4K$)の $1/4$ の外にNewton-Raphson法で求めた値が出てしまえば、sn関数が奇関数であることも考慮して(u_0 , $u_0 + K$)内に戻してやればよい。この操作をその都度行うことにより周期性に対する困難は回避できる。次に、sn関数は $u \approx K$ で勾配が平坦になり精度が悪くなる。したがって、 $\operatorname{sn} u \geq 0.97$ では、精密化のときには $\operatorname{cn} u$ に置き換えた。

cn関数、dn関数等の逆関数はsn関数との関係式(4-32)、(4-33)を用いることによりsn関数の逆関数に帰着できる。

4.5 Legendre-Jacobiの第2種楕円積分 $E(u)$

一般の第2種楕円積分は

$$\begin{aligned} & \int \operatorname{sn}^2 u \, du, & \int \operatorname{cn}^2 u \, du, & \int \operatorname{dn}^2 u \, du, \\ & \int \operatorname{ns}^2 u \, du, & \int \operatorname{nc}^2 u \, du, & \int \operatorname{nd}^2 u \, du, \\ & \int \operatorname{sc}^2 u \, du, & \int \operatorname{sd}^2 u \, du, & \int \operatorname{cd}^2 u \, du, \\ & \int \operatorname{cs}^2 u \, du, & \int \operatorname{ds}^2 u \, du, & \int \operatorname{dc}^2 u \, du \end{aligned}$$

の12個の積分のうちのいずれか1つにすることができるがこれらの全ては $\int \operatorname{dn}^2 u \, du$ で表すことができる。したがってここでは

$$E(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du \tag{4-37}$$

を台形公式で求める。E(K)は第2種完全楕円積分である。

4.6 Weierstrass の \wp 関数との関係について

Weierstrass の \wp 関数は

$$[\wp'(u)]^2 = 4[\wp(u)]^3 - g_2 \wp(u) - g_3 \tag{4-38}$$

をみす。この右辺を因数に分解して、

$$[\wp'(u)]^2 = 4\{\wp(u) - e_1\}\{\wp(u) - e_2\}\{\wp(u) - e_3\} \tag{4-39}$$

ここで、基本周期を $2\omega_1, 2\omega_3$ とすると、

$$-2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3 \tag{4-40}$$

なる $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を用いて、

$$\wp'(\omega_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3 \tag{4-41}$$

から

$$\wp(\omega_1) = e_1, \quad \wp(\omega_2) = e_2, \quad \wp(\omega_3) = e_3 \tag{4-42}$$

であり、また、

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0 & (4-43) \\ e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4} g_2 & (4-44) \\ e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3 & (4-45) \end{cases}$$

をみす。 e_α と k, k' の間には、

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \tag{4-46}$$

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \quad (4-47)$$

なる関係がある。

これらの定数を用いると

$$\operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u, k) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\mathcal{P}(u) - e_3}} \quad (4-48)$$

$$\operatorname{cn}(\sqrt{e_1 - e_3} u, k) = \frac{\sqrt{\mathcal{P}(u) - e_1}}{\sqrt{\mathcal{P}(u) - e_3}} \quad (4-49)$$

$$\operatorname{dn}(\sqrt{e_1 - e_3} u, k) = \frac{\sqrt{\mathcal{P}(u) - e_2}}{\sqrt{\mathcal{P}(u) - e_3}} \quad (4-50)$$

の関係式が成り立ち \mathcal{P} 関数の値を Jacobi の楕円関数を用いて表せることになる。

4.7 計算プログラムについて

これまでに述べてきたように、計算には変数の他に母数 k の値が必要である。Appendix L-2 に含まれているのは以下のものである。

1) SUBROUTINE MODLUS (FK, CMK, CK, CCK, Q)

名称は母数 modulus の略であり、母数を入力、他 4 つが出力である。対応は

k : FK, k' : CMK, K : CK, K' : CCK, q : Q

である。

2) FUNCTION THETA (I, V, Q)

ϑ 関数を求める。I = 1, 2, 3, 4 に応じて $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ の値が求められる。対応は

v : V, q : Q

3) FUNCTION SN (I, U, FK)

4) FUNCTION CN (I, U, FK)

5) FUNCTION DN (I, U, FK)

これらは Jacobi の楕円関数を求めるものであり、I = 0, 1, 2, 3, 4 に応じて、その階の導関数が求まる。ある母数 k について異なる u の値の計算をすることが実用上多いため、 k 以外は COMMON にとっている。対応は、

u : U, k : FK, k' : OO1, K : OO2, K' : OO3, q : OO4

6) FUNCTION ARCSN (X, FK)

7) FUNCTION ARCSN2 (XO, FK, CR)

sn 関数の逆関数であり、後者は精密化である。ここでもやはり k', K, K', q は COMMON にとっておく。それ以外の対応は、

$\operatorname{sn}(u, k)$: X, ARCSN で求めた $\operatorname{sn}^{-1}(u, k)$: XO

$\operatorname{sn}(u, k)$: CR (ARCSN 2 で)

ARCSN2 は常に ARCSN から呼ばれるので単独では用いられない。

8) FUNCTION E (U, FK)

第2種楕円積分である。ここでも補母数 k' 等は COMMON にとっておく。対応は全て上と同じである。

以上のうち MODLUS は単独で、THETA は k に対する q さえわかっておれば単独で通常は MODLUS と一緒に、SN, CN, DN は MODLUS と THETA と、ARCSN は MODLUS, THETA, SN, CN, ARCSN2 と、E は MODLUS, THETA, DN とともに用いる。これらはすべて倍精度であり、最初に断ったように、 $0 < k < 1$ をみたさねばならない。引き数、関数値ともに実数型である。

こうして作成したプログラムを用いた sn, cn, dn の計算値を表 2 ~ 4 に示す。これらは既存の数表値と完全に一致している。

参 考 文 献

- (1) Belyakov, V.M., Kravtsova, P.I. & Rappoport, M.G. : Tables of Elliptical Integrals Part 1 (Pergamon Press, 1965)
- (2) Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. & Tricomi, F.G. (Bateman Manuscript Project) : Higher Transcendental Functions vol.2 (McGraw-Hill, 1960)
- (3) 林 桂一, 森口繁一 : 高等関数表 (岩波書店, 1967)
- (4) Jahnke, E., Emde, F. & Lösh, F. : Tables of Higher Functions (McGraw-Hill, 1960) 6 th.ed.
- (5) Oberhettinger, F. & Magnus, W. : Anwendung der Elliptischen Functionen in Physik und Technik (Springer-Verlag, 1949)
- (6) 寺沢寛一 : 自然科学者のための数学概論 (増訂版) (岩波書店, 1954)
- (7) 友近 晋 : 楕円関数論 (河出書房, 1942; 現代工学社, 1973, 復刻版)
- (8) Whittaker, E.T. & Watson, G.N. : A Course of Modern Analysis (Camb.Univ.Press, 1927) 4 th.ed.

Table 2 sn(u, k)

$\frac{k^2}{u/k}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	1.160478	0.165052	0.170305	0.176451	0.183829	0.193003	0.205039	0.222332	0.252516
0.2	0.316409	0.324737	0.334255	0.345330	0.358531	0.374805	0.395906	0.425708	0.476180
0.3	0.463494	0.474134	0.486204	0.500129	0.516554	0.536537	0.561999	0.597068	0.653943
0.4	0.567892	0.609118	0.621738	0.636142	0.652916	0.673002	0.698071	0.731602	0.783383
0.5	0.716357	0.726543	0.737880	0.750672	0.765367	0.782671	0.803810	0.831254	0.871635
0.6	0.816300	0.824251	0.833015	0.842794	0.853880	0.866729	0.882114	0.901549	0.928934
0.7	0.895774	0.900939	0.906583	0.912819	0.919808	0.927799	0.937204	0.948818	0.964613
0.8	0.953408	0.955939	0.958687	0.961699	0.965046	0.968833	0.973233	0.978575	0.985653
0.9	0.988313	0.988983	0.989707	0.990497	0.991369	0.992350	0.993481	0.994840	0.996612
1.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Table 3 $cn(u, k)$

$\frac{k^2}{u/k}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.987040	0.986285	0.985392	0.984310	0.982958	0.981198	0.978754	0.974971	0.967593
0.2	0.948623	0.945805	0.942483	0.938482	0.933518	0.927104	0.918291	0.904861	0.879348
0.3	0.886100	0.880453	0.873845	0.865951	0.856255	0.843877	0.827138	0.802191	0.756544
0.4	0.801577	0.793080	0.783226	0.771573	0.757431	0.739641	0.716029	0.681732	0.621539
0.5	0.697734	0.687122	0.674932	0.660675	0.643594	0.622435	0.594886	0.555893	0.490156
0.6	0.577628	0.566225	0.553251	0.538237	0.520470	0.498779	0.471036	0.432678	0.370246
0.7	0.444509	0.433946	0.422028	0.408366	0.392369	0.373082	0.348781	0.315823	0.263668
0.8	0.301685	0.293566	0.284465	0.274109	0.262082	0.247717	0.229821	0.205892	0.168785
0.9	0.152439	0.148031	0.143111	0.137538	0.131099	0.123453	0.113995	0.101456	0.0822475
1.0	-0.599051×10^{-7}	-0.572584×10^{-7}	-0.553116×10^{-7}	-0.531098×10^{-7}	-0.505704×10^{-7}	-0.475612×10^{-7}	-0.438469×10^{-7}	-0.389377×10^{-7}	-0.314472×10^{-7}

Table 4 $dn(u, k)$

$\frac{k^2}{u/K}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.998712	0.997272	0.995640	0.993754	0.991516	0.988762	0.985176	0.980028	0.970882
0.2	0.994982	0.989398	0.983098	0.975858	0.967330	0.956929	0.943547	0.924672	0.892148
0.3	0.989200	0.977261	0.963889	0.948656	0.930906	0.909548	0.882559	0.845463	0.784298
0.4	0.981964	0.962182	0.940230	0.915494	0.887046	0.853371	0.811719	0.756179	0.669089
0.5	0.974004	0.945742	0.914691	0.880112	0.840896	0.795271	0.740083	0.668740	0.562341
0.6	0.966108	0.929582	0.889846	0.846097	0.797148	0.741126	0.674768	0.591412	0.472624
0.7	0.959041	0.915239	0.868005	0.816520	0.759590	0.695352	0.620607	0.528957	0.403198
0.8	0.953468	0.904011	0.851044	0.793759	0.730988	0.660922	0.580493	0.483645	0.354456
0.9	0.949907	0.896874	0.840324	0.779465	0.713157	0.639644	0.555964	0.456327	0.325711
1.0	0.948683	0.894427	0.836660	0.774597	0.707107	0.632455	0.547722	0.447213	0.316227

5. Orr-Sommerfeld 問題の数値的取り扱いについて

第1章において Orr-Sommerfeld 方程式の漸近解を用いた固有値問題を構成した。ここではそうして作られた固有値問題の実際的な取り扱いについて触れ、作成したプログラム並びに、J-H III₁ の代表例に対する結果を示す。

第1章のようにして解析解を用いて構成された固有値問題も、もはや $R \rightarrow \infty$ での漸近枝以外は解析的に扱えない。

漸近解を用いた固有値問題の構成は非常に古く、Tollmien, Schlichting らにはじまり、Lin により確立整備されたといえる。その後 Reid により、より一層スマートに再構成され、現在では Lakin & Reid らにより標準方程式 (related equation; comparison equation) を用いた一様に漸近する (uniformly valid な) 摂動解を用いての第1近似固有値問題が構成されている。

他方、最初から Orr-Sommerfeld 方程式を数値積分して数値的に固有値問題を解く方法がある。これには3つの流派がある。まず、差分法については、有名な Thomas の2次元 Poiseuille 流に対する計算にはじまり、Eagles の J-H I, II_{1,2} に対する計算、Hughes の2次元 Poiseuille 流に対するもの、Jordinson の境界層流での計算など枚挙にいとまがない。次は、外力型不安定理論に多用される直交関数展開法であり、Dolph & Lewis の2次元 Poiseuille 流、Clenshaw & Elliott の2次元 jet などの計算にはじまり Orszag の2次元 Poiseuille 流に対する精密化、さらに、Grosch & Salwen らにみられるような時間的に周期的な主流に対する計算にも用いられている。最後に、Runge-Kutta-Gill 法や Milne の方法などを用いた初期値問題としての取り扱いがある。これは、Nachtsheim, Kaplan らにより始められ、Gram-Schmit の直交化等のテクニックを導入して差分法などの境界値問題的取り扱いに劣らない結果を求めうるまでになっており、近年では Mizushima & Gotoh による垂直流体層の熱対流の問題などに有効に用いられている。

これら数値解法にも当然欠点がある。まず、 $\alpha R \gg 1$ では解の激しい変化のため所望の精度を得るためには高精度の数値処理を要すること (つまり、今回の対象であるような R の大きな主流に対してはむしろ不向きである)、どの解法にしても、あらかじめ固有値の存在範囲の予想が必要であり、それは漸近解法によること等である。逆に解析的な方法は $\alpha R \gg 1$ 、または今回扱わなかった $\alpha R \ll 1$ を除く中間 Reynolds 数域で無力なこと、転移点が2つ以上の場合や2位以上の場合に (1位の転移点2つは例外として) 現在のレベルでは扱えないことなどが挙げられ一長一短である。しかし、少なくとも、収束する J-H 流のように、相当高 Reynolds 数域までの計算を行うとき解析的手法は威力を発揮する。

5.1 計算手順について

計算のアウトラインは以下のとおりである。

- 1) J-H流のパラメーター k を与え, J-H I の a , J-H III₁ の b 等を求める。
- 2) 与えられた $(k, \frac{a}{b})$ に対する中心流速を求める。
- 3) (α, c) を与える。
- 4) y_c を $U = c$ から求める。
- 5) U の高階微分を求める。
- 6) Frobenius の方法を用いて $y = y_c \pm \Delta$ での ϕ_A, ϕ_B を求める。
- 7) Runge-Kutta-Gill スキームを用いて $y = -1, 0$ での ϕ_A, ϕ_B を求める。
- 8) 第1章の式 (1-58) の左辺を求める。
- 9) 図式解法により交点を求める。
- 10) 得られた z, α, c に対して再度 4)~8) を繰り返し, R を求める。

すでにみたように, この計算は本来複素領域で行うべきものであるが, ここではすべての量を実部と虚部に分離し, 独立に実領域における連立問題として取り扱った。この取り扱いは Nachtsheim にもみられる。

5.2 計算プログラムについて

作成したプログラムリストを Appendix L-2 に示す。その構成要素は以下のとおりである。
 メインプログラム: 前節 1)~10) の手順をコントロールする他, J-H I, III₁ のパラメーター, 流速分布, 漸近枝の係数, Wronskian $W(\phi_A, \phi_B)$ の個別な出力もできる。

(Frobenius の方法による Tollmien 解, Wronskian, 図式解法の, プロットを要するものと, 自動的に交点を求める方法を含む。)

YS (サブルーチン): 与えられた c に対し y_c を算出する。Newton-Raphson 法による。

CRKG (サブルーチン): 複素領域における Runge-Kutta-Gill スキームを実領域に置き直したものであり, その内容は Nachtsheim のスキームとほぼ同一である。

PATH (サブルーチン): 積分路とメッシュを決めるものであり, 特異点を避けられるようになっている。

FUNC (サブルーチン): CRKG スキームを Rayleigh 方程式に用いる際, Rayleigh 方程式を 1 階連立方程式に書き直すものであり, 複素領域を実領域に置き直したものである。

PQ (サブルーチン): Rayleigh 方程式の最高階微分 (ϕ'') の係数 (leading coefficient) を 1 にした際の各係数を与える。これも複素領域を実領域に置き直したものの。

ZS (サブルーチン): 2 直線の交点を求めるものであり, 固有値問題の図式解法に用いる。

VISTFR (関数): z の値を指定すると Tietjens 関数 $F(z)$ の実部 $F_r(z)$ を与えるものであり, Miles, 今回の追試, Lin の 3 者の数表が含まれている。

VISTFI (関数): 同上で, これは虚部 $F_i(z)$ を与える。

BRANCH (サブルーチン): J-H流のパラメーターを指定すると第1章の式 (1-69) ~ (1-72)

に従い下側及び上側漸近枝の係数を算出する。

UCON (サブルーチン) : 母数 k を指定すると J-H 解の他にパラメーター $(\frac{a}{b})$, ρ , r 等を計算する。

UPROF (サブルーチン) : UCON の後に用い、速度分布と 4 階までの導関数を計算する。2 次元 Poiseuille 流, J-H I, J-H III₁, さらに J-H ∞ - ままで含まれており、また、J-H III₂..., J-H II₁... 等も一応計算しうる。(J-H II₁... については高階導関数は求められない)

AHTAN (関数) : $\tanh^{-1} x$ の計算を行う関数で実数型。

ARCSN (関数) : Jacobi の楕円関数 sn の逆関数。第 4 章に詳述済み。

ARCSN 2 (関数) : ARCSN の精密化。

F 1 (関数) : 第 3 章の式 (3-30) ~ (3-33) の計算を行う。 $(dc^2\theta)^{(n)}$ の場合は単に引数の C と D を代えるだけでよい。

F 2 (関数) : 第 3 章の式 (3-34) ~ (3-37) の計算を行う。

SN (関数) : Jacobi の sn 関数。

CN (関数) : Jacobi の cn 関数。

DN (関数) : Jacobi の dn 関数。

THETA (関数) : ϑ 関数。

MODLUS (サブルーチン) : 母数 k を指定して、 k' , K , K' , q を算出する。

E (関数) : Legendre - Jacobi の第 2 種楕円積分。

これらのうち ARCSN 以降 (F 1, F 2 を除いて) は第 4 章に詳述済みである。

プログラム中、コメント冒頭に C が 5 つ並んでいるものは、第 1 章に述べた全領域で Tollmien 解を適用する場合のものである。すでに述べたように両者の間には差異はない。

5.3 プログラムの使用法

1) 通常の固有値問題の場合

- i) まず任意に与えた (α, c) に対して第 1 章の式 (1-58) 左辺を計算する。そのためには、入力データとしては、

カード番号	カラム	内 容	Format 形式
1	1-20	母数 k (注 ¹) と $(\frac{a}{b})$	2 F 10.0
2	1-10	コントロールカード (注 ²) : 0.0	1 F 10.0
3	1-20	α の初期値とキザミ幅	2 F 10.0
4	1-20	c の初期値とキザミ幅	2 F 10.0

- ii) こうして出力された各値を複素平面上に $F(z)$ とともにプロットする (図 2)。
- iii) 交点を 2 直線の交点であると近似的にみなし、そのために必要な 2 組の (α, c) と 2 つの z の値を読み取る。
- iv) 再度計算機にそれらの値を入力する。

カード番号	カラム	内 容	Format形式
1	1-20	母数 k (注1) と $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	2 F 10.0
2	1-10	コントロールカード(注2) : 100.0	1 F 10.0
(注4) [3	(α, c) の1組め	2 F 10.0
	4	(α, c) の2組め	2 F 10.0
	5	z の2つの値	2 F 10.0
6	1-10	コントロールカード(注3) : 0.0	1 F 10.0

その結果が中立曲線を与える。

- 2) Hughes & Reidによる自動的に交点を求める方法 (automated root finder technique)
ある z の値に対する $F(z)$ に、第1章の式(1-58)左辺が十分近い(2点間の距離の2乗を $F_r + F_i$ で割ったものがここでは 2×10^{-5} 以下の場合にその c を固有値とするものである。ただし、今回の J-H 流には計算時間がかかり過るため用いなかった。速度分布の計算が単純な場合便利である。

カード番号	カラム	内 容	Format形式
1	1-20	母数 k (注1) と $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	2 F 10.0
2	1-10	コントロールカード(注2) : 200.0	1 F 10.0
3	1-20	α の予想初期値ときざみ幅	2 F 10.0
4	1-20	c の予想初期値ときざみ幅	2 F 10.0
5	1-30	z の初期値, きざみ幅, z 個数 (注5)	3 F 10.0

以上で1つの z に対する (c, α, R) が求まり、とくに中立曲線上のこぶ (kink point) 付近の計算に便利である。

- 3) ある母数 k , $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (注1) に対して r , 中心流速, K 等の値を求めたいときは以下のように入力すればよい。

カード番号	カラム	内 容	Format形式
1	1-20	母数 k (注1) と $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	2 F 10.0
2	1-10	コントロールカード(注2) : 300.0	F 10.0
(注6) [3	母数 k (注1) と $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	2 F 10.0
4	1-10	コントロールカード(注3) : 100000.0	F 10.0

- 4) 速度分布を求めるとき以下のように入力する。

カード番号	カラム	内 容	Format形式
1	1-20	母数 k (注1) と $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	2 F 10.0
2	1-10	コントロールカード(注2) : 400.0	F 10.0

- 5) 漸近枝の係数 (第1章の式(1-69) ~ (1-72)) を求めるには 3) と同様の入力をする。

カード番号	コラム	内 容	Format形式
1	1-20	母数 $k^{(注1)}$ と $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	2 F 10.0
2	1-10	コントロールカード ^(注2) : 500.0	F 10.0
(注6) [3	1-20	母数 $k^{(注1)}$ と $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	2 F 10.0
4	1-10	コントロールカード ^(注3) : 100000.0	F 10.0

6) 最後に, Wronskian $W(\phi_A, \phi_B)$ を求めるには 1) i) と同様に入力する。すなわち,

カード番号	コラム	内 容	Format形式
1	1-20	母数 $k^{(注1)}$ と $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	2 F 10.0
2	1-10	コントロールカード ^(注2) : 900.0	F 10.0
3	1-20	α の初期値ときざみ幅	2 F 10.0
4	1-20	c の初期値ときざみ幅	2 F 10.0
5	1-10	コントロールカード ^(注3) : 100000.0	F 10.0

(注1) まず, 母数 k は $\frac{1}{2} < m < 1$ から $\frac{1}{\sqrt{2}} < k < 1$ であることは当然であるが, 入力データとして次のように約束する。

$k \geq 10$	J-H II ₁	→ $k = k - 10$
$k > 0$	J-H I	→ $k = k$
$k = 0$	2次元 Poiseuille 流	→ $k = k$
$-10 < k < 0$	J-H III ₁	→ $k = -k$
$k \leq -10$	J-H ∞ -	→ $r = -k + 10$

上記の右欄のように変換した後に計算をすることになっている。

また, a, b は通常 0 を入力しておく, 第 3 章に述べた式 (3-43), (3-45) に従って a, b を決定する。J-H II_{1,2}, ... または J-H III_{2,3}, ... の速度分布等を求めるための b の値として K を考慮して J-H II _{n} , J-H III _{n} , $(n-1)K \leq b \leq nK$ を入力できる形になっている。

(注2) コントロールカード 1 枚で上記に述べた 7 通りの計算をするようになっている。

(注3) 計算終了用のコントロールカードであり, このカードを読み取ると同時に全計算を終了する。

(注4) 1) の iii) で得られた幾通りもの (α, c) と z の 2 組ずつ (3 枚 1 組) のカードを続けて入力する。これら 3 枚の順序は重要であり, 1 枚でも欠落したりするとすべてそれ以降の計算は駄目になる。

(注5) 自動的に固有値を求める点 z の個数の指定に用い 0 なら個数は 10 が選ばれる。

(注6) 必要なだけこれ以降同種のカードをつづけて入力する。第 1 枚目のカードも当然有効である。

これらのうち, 本来の中心的目的である 1) について, J-H III₁, $r = -3.203$ ($k = 0.95$) の中立曲線のこぶ (kink point) 付近に対する入力データ, 出力データ例を L-3 に示す。

5.4 計算結果について

以上のプログラムを用いて行った J-H III₁ のうちの $r = -3.203$ ($k = 0.95$) に対する計算結果を示す。

まず, $r = -3.203$ の場合の中立曲線の全貌を図 3 に示す。同図には第 1 章の式 (1-69) ~ (1-72) から求めた漸近枝も併記してある。上側漸近枝のこぶ (kink) は Reid, Hughes & Reid らにより指摘され, 漸近解特有のものと考えられていた (この kink は Tietjens 関数の $5.5 < z < 7.0$ 付近のループに本質的に起因する)。ところが Hughes の差分法を用いた計算からも同一のものが認められ, 現在では Orr - Sommerfeld 方程式に特有のものと考えられている。図 3 から $r = -3.203$ というわずかの傾き角 (実際, 同図の臨界 Reynolds 数は $R_c = 20500$ であり, $\theta_0 = 1.56 \times 10^{-4}$ という微小量である) で 2 次元 Poiseuille 流の場合の約 4 倍に臨界 Reynolds 数が増加することがわかる。図 3 に対応する α, c, z, R の値を表 5 に示す。なお, Wronskian $W(\phi_A, \phi_B) = -1$ からの誤差は 0.003 % 以下である。

J-H I, J-H III₁, J-H ∞ - 等 J-H 族全体として大観することは別の機会にゆずることにする。

参 考 文 献

- (1) Clenshaw, C.W. & Elliott, D. : Quart. J. Mech. Appl. Math. (1960)
13-3 300-313
- (2) Dolph, C.L. & Lewis, D.C. : Quart. Appl. Math. (1958) 16-2
97-110
- (3) Eagles, P.M. : J. Fluid Mech. (1966) 24-1 191-207
- (4) Grosch, C.E. & Salwen, H. : J. Fluid Mech. (1968) 34-1 177-205
- (5) Hughes, T.H. : ANL-7855 (1971)
- (6) Hughes, T.H. & Reid, W.H. : J. Fluid Mech. (1965) 23-4 715-735
- (7) Hughes, T.H. & Reid, W.H. : J. Fluid Mech. (1965) 23-4 737-747
- (8) Jordinson, R. : J. Fluid Mech. (1970) 43-4 801-811
- (9) Kaplan, R.E. : ASRL TR 116-1 (1964)
- (10) Lakin, W.D., Ng, B.S. & Reid, W.H. : Phil. Trans. Roy. Soc. A
(1978) 289 347-371
- (11) Lin, C.C. : Quart. Appl. Math. (1945) 117-142, 218-234, 277-301
- (12) Lin, C.C. : The Theory of Hydrodynamic Stability
(Camb. Univ. Press, 1955)
- (13) Mizushima, J. & Gotoh, K. : J. Fluid Mech. (1976) 73-1 65-75
- (14) Nachtsheim, P.R. : NASA TN D-2414 (1964)
- (15) Orszag, S.A. : J. Fluid Mech. (1971) 50-4 689-703
- (16) Reid, W.H. : in Basic Developments in Fluid Dynamics
vol.1 (Academic Press, 1965)
- (17) Thomas, L.H. : Phys. Rev. (1953) 91-4 780-783

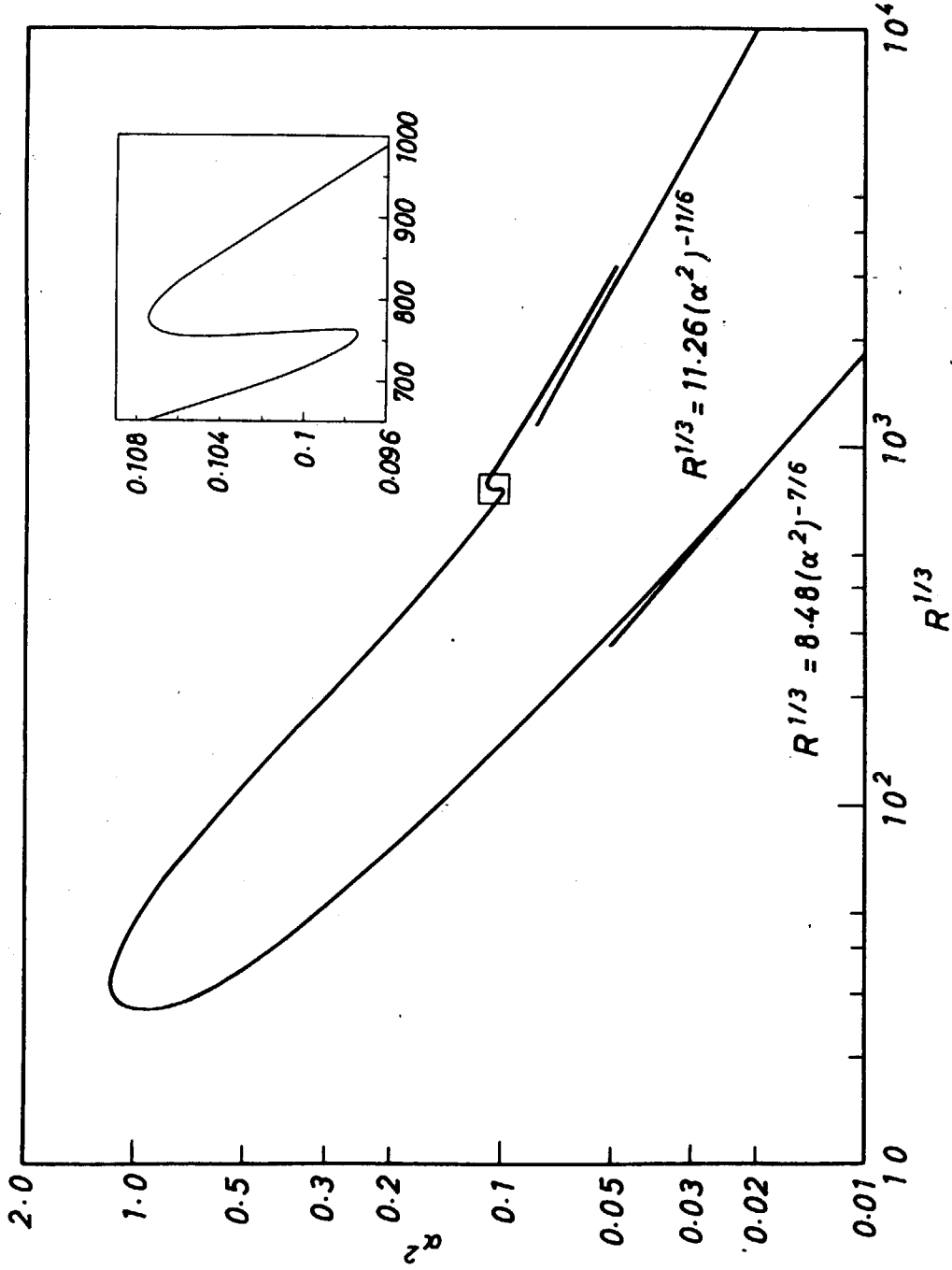


Fig.3 Neutral stability curve for J-H III ; $k=0.95$, $\gamma=-3.203$

Table 5 Eigen values on the neutral curve
for J-H III₁ ; k=0.95, $\gamma=-3.203$

c	α	Z	R
0.01147	0.15	2.316	0.3767 + 9
0.01942	0.2	2.331	0.5910 + 8
0.02943	0.25	2.349	0.1386 + 8
0.04083	0.3	2.371	0.4432 + 7
0.05373	0.35	2.397	0.1714 + 7
0.06689	0.4	2.425	0.8018 + 6
0.08172	0.45	2.457	0.4043 + 6
0.09611	0.5	2.492	0.2323 + 6
0.1122	0.55	2.530	0.1381 + 6
0.1404	0.65	2.616	0.6524 + 5
0.1544	0.7	2.664	0.4789 + 5
0.1676	0.75	2.717	0.3696 + 5
0.1796	0.8	2.775	0.2984 + 5
0.1942	0.85	2.8737	0.2364 + 5
0.2005	0.9	2.914	0.2192 + 5
0.2073	0.95	3.002	0.2050 + 5
0.2111	1.0	3.115	0.2059 + 5
0.2080	1.05	3.295	0.2428 + 5
0.1797	1.05	3.641	0.5125 + 5
0.1568	1.0	3.837	0.9565 + 5
0.1402	0.95	3.965	0.1563 + 6
0.1259	0.9	4.070	0.2480 + 6
0.114	0.85	4.116	0.3800 + 6
0.1026	0.8	4.254	0.5929 + 6
0.09151	0.75	4.339	0.9485 + 6
0.08187	0.7	4.423	0.1508 + 7
0.07023	0.65	4.506	0.2731 + 7
0.06325	0.6	4.594	0.4303 + 7
0.05515	0.55	4.687	0.7538 + 7
0.0485	0.5	4.784	0.1299 + 8
0.03911	0.45	4.897	0.2965 + 8
0.03203	0.4	5.036	0.6614 + 8
0.02542	0.35	5.219	0.1688 + 9
0.02271	0.328	5.369	0.2752 + 9
0.02259	0.327	5.377	0.2816 + 9
0.02247	0.326	5.385	0.2883 + 9
0.02236	0.325	5.393	0.2949 + 9
0.02212	0.323	5.408	0.3090 + 9

Table 5 (continued)

c	α	Z	R
0.02202	0.322	5.428	0.3177 + 9
0.02169	0.319	5.467	0.3431 + 9
0.02158	0.318	5.480	0.3520 + 9
0.02196	0.317	5.493	0.3613 + 9
0.02135	0.316	5.506	0.3707 + 9
0.02126	0.315	5.541	0.3841 + 9
0.02116	0.314	5.569	0.3966 + 9
0.02106	0.313	5.596	0.4094 + 9
0.02102	0.312	5.692	0.4355 + 9
0.02102	0.312	5.715	0.4399 + 9
0.02119	0.313	5.784	0.4441 + 9
0.02133	0.314	5.826	0.4435 + 9
0.02128	0.315	5.873	0.4434 + 9
0.02161	0.316	5.907	0.4412 + 9
0.02175	0.317	5.941	0.4391 + 9
0.02189	0.318	5.975	0.4370 + 9
0.02202	0.319	6.009	0.4351 + 9
0.02242	0.322	6.111	0.4298 + 9
0.02255	0.323	6.151	0.4295 + 9
0.02267	0.324	6.187	0.4283 + 9
0.0228	0.325	6.238	0.4304 + 9
0.02292	0.326	6.289	0.4326 + 9
0.02304	0.327	6.361	0.4396 + 9
0.02259	0.327	6.656	0.5088 + 9
0.02281	0.326	6.730	0.5381 + 9
0.02266	0.325	6.785	0.5641 + 9
0.02252	0.324	6.831	0.5886 + 9
0.02237	0.323	6.873	0.6129 + 9
0.02169	0.318	7.045	0.7364 + 9
0.02155	0.317	7.075	0.7625 + 9
0.02142	0.316	7.105	0.7895 + 9
0.02128	0.315	7.133	0.8165 + 9
0.02102	0.313	7.188	0.8731 + 9
0.02088	0.312	7.215	0.9031 + 9
0.02075	0.311	7.241	0.9333 + 9
0.01693	0.28	8.069	0.2644 + 10
0.01466	0.26	8.763	0.5624 + 10
0.01254	0.24	9.641	0.1297 + 11

Appendix L1 Tietjens 関数の計算プログラムリスト

```

● FACOM DSIV/F4 FORTRAN IV (GE) V0.111
●
● C
● C TIEIJENS FUNCTION F(Z) AFTER NILES
● C
● 000001 HEAD(5,000) Z0
● 000002 DU 1 1=1,100
● 000003 SI=1
● 000004 Z=Z0+0.1+S1
● 000005 CALL INTORL(Z1,Z2,FN,F1,GN,G1)
● 000006 AZ=ZGN
● 000007 AI=Z0+1
● 000008 L=6100+GN**2
● 000009 CI=FN*U+Z0007D
● 000010 O2=-F1+U.1000000
● 000011 IFN=(AI*01-AG*02)/C
● 000012 IFI=(AI*02-AG*01)/C
● 000013 I1=100002*FI*02
● 000014 I2=100001*FI*02
● 000015 I3=FI/11
● 000016 IR=1.-I2
● 000017 IJ=I3
● 000018 WRITE(6,000) Z,IFN,IFI,I+011
● 000019 GOU FORMAT(F10.5)
● 000020 GOU FORMAT(I2L,*,E10.2,*,E10.2,*,E10.2,*,E10.2,*,E10.2,*,E10.2,*,E10.2,*)
● 000021 I CONTINUE
● C
● 000022 STOP
● 000023 END

```

```

● 000001 SUBROUTINE INTORL(Z1,Z2,FN,F1,GN,G1)
● C
● C
● 000002 DIMENSION Y(10),YI(10)
● 000003 DIMENSION AK(200),AI(200)
● C
● 000004 NS=60
● 000005 LU 1 J=1,N
● 000006 CJ=J
● 000007 SNN
● 000008 SNN=1./SN
● 000009 Z=Z0+S*SN
● 000010 CALL GAMA(Z,Y,YI)
● 000011 AK(J)=FN(Z)
● 000012 AI(J)=FI(Z)
● 000013 I CONTINUE
● 000014 GOY(1)
● 000015 GI=YI(1)
● 000016 CALL FICUN(F1,F11,F20,F21)
● 000017 AI(1)=F11
● 000018 AI(1)=F11
● 000019 F1=0.
● 000020 F1=0.
● 000021 DELTA=200*SNN
● C
● 000022 LU 2 J=1,N
● 000023 FN=FN+0.5*(AK(I+1)+AK(I))*DELTA
● 000024 FI=FI+0.5*(AI(I+1)+AI(I))*DELTA
● 000025 I CONTINUE
● C
● 000026 RETURN
● 000027 END

```

```

● 000001 SUBROUTINE GAMMA(Z,GZ)
● C
● C GAMMA FUNCTION G(Z) IN THE DOMAIN OF REAL SPACE
● C
● 000002 ZI=1./Z
● 000003 N=L
● 000004 EPS=1.E-20
● 000005 UZ=Z1
● 000006 F=0.
● 000007 I CONTINUE
● 000008 N=N+1
● 000009 SNN
● 000010 S=1./SN
● 000011 A=1./Z
● 000012 O=1.+Z*5
● 000013 AI=A**2
● 000014 OI=1./O
● 000015 U=AI*OI
● 000016 GZ=GZ+U
● C
● 000017 AF=GZ-F
● 000018 CF=AF/GZ
● 000019 IF(LEF-LE*U.) CF=CF
● 000020 IF(LEF-LE*EPS) GO TO 10
● 000021 IF(N*0.200)
● 000022 F=GZ
● 000023 GO TO 1
● 000024 I CONTINUE
● C
● 000025 GOU FORMAT(12L,*,GAMMA FUNCTION G(Z) : N=*,I5,2X,*,Z=*,E12.4,2X,
● 000026 *G(Z)=*,E15.8)
● 000027 RETURN
● 000028 END

```

```

000001 SUBROUTINE URK6(Z,YK,YI)
C
C HUNGE-KUTTA-GILL METHOD IN THE DOMAIN OF COMPLEX VARIABLES
000002 DIMENSION MSH(10),MSI(10),A(1000),V(1000),DX(20),DY(20)
000003 DIMENSION FR(10),FI(10),MR(10),MI(10),GR(10),YR(10),YI(10)
000004 DIMENSION KAF(20),KFI(10)
C
000005 JJ=1
000006 J=1
000007 CALL LUND(KF,NTP,MM,MSR,MSI,MIR,MOR,MII,MOI)
000008 MOR=2
000009 CALL PATH(MSR,MSI,MIR,MOR,MII,MOI,X,Y,DX,DY,NTP,MM,KK,KAF,KFI)
000010 AI=A(J)
000011 YI=Y(J)
000012 CALL FUNC(JJ,M,AI,YI,YR,YI,FR,FI)
000013 JJ=0
000014 DO 1 I=1,M+1
000015 YR(I)=0.
000016 YI(I)=0.
000017 AI(I)=0.
000018 FI(I)=0.
000019 1 CONTINUE
C
000020 CALL FUNC(JJ,M,AI,YI,YR,YI,FR,FI)
000021 JJ=JJ+1
C
000022 K=1
000023 DO 2 J=2,KK
000024 IF(L.EE.KAF(K)+1) K=K+1
000025 MI=MI(K)
000026 MI=DY(K)
000027 AI=K(J)
000028 YI=Y(J)
C
000029 LS=0.5
000030 DO 3 L=1,4
000031 IF(L.EQ.1) A=0.5
000032 IF(L.EQ.2) A=1.-SUNT(D5)
000033 IF(L.EQ.3) A=1.+SUNT(D5)
000034 IF(L.EQ.4) A=1./6.
000035 IF(L.EQ.1.DM.L.EQ.6) S=2.
000036 IF(L.EQ.2.DR.L.EQ.2) S=1.
000037 LMA
000038 IF(L.EQ.4) C=0.5
C
000039 CALL FUNC(JJ,M,AI,YI,YR,YI,FR,FI)
000040 DO 4 I=1,M+1
000041 FI=FR(I)
000042 FY=FI(I)
000043 AR=DI*FI-DZ*FY
000044 AI=DI*FY-DZ*FI
000045 RR=AR-BOHR(I)
000046 RI=AI-BOI(I)
000047 YR(I)=YR(I)+RR
000048 YI(I)=YI(I)+RI
000049 AI(I)=AR(I)+BOHR-CAI
000050 FI(I)=RI(I)+BOI-CAI
C
000051 4 CONTINUE
000052 2 CONTINUE
C
000053 3 CONTINUE
000054 GO TO(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100)
000055 601 FURNAL(5A,13,23,33,1P0,13,5)
C
000056 RETURN
000057 END

000001 SUBROUTINE FUNC(JJ,M,AI,YI,YR,YI,FR,FI)
C
C ZY/UXZ+P1DY/LX+P2Y=Q
C IN THE DOMAIN OF COMPLEX VARIABLES
000002 DIMENSION Y(1),YI(1),YR(1),FI(1)
000003 MM=2
000004 IF(JJ.EQ.-1) GO TO 99
000005 IF(JJ.NE.C) GO TO 10
000006 YR(1)=X1
000007 YI(1)=Y1
000008 CALL FIGUN(P1K,P1I,P2K,P2I)
000009 YR(2)=F1K
000010 YI(2)=F1I
000011 YR(3)=F2K
000012 YI(3)=F2I
000013 10 CONTINUE
000014 X1=YR(1)
000015 Y1=YI(1)
000016 CALL PA(X1,Y1,P1K,P1I,P2K,P2I,GR,M1)
000017 FR(1)=0.
000018 FI(1)=0.
000019 FR(2)=YK(2)
000020 FI(2)=YI(2)
000021 FR(3)=GR-(P1K*YR(3)+P1I*YI(3))-(P2K*YR(2)+P2I*YI(2))
000022 FI(3)=MI-(P1K*YI(3)+P1I*YR(2))-(P2K*YI(2)+P2I*YR(2))
C
000023 99 CONTINUE
C
000024 RETURN
000025 END

000001 SUBROUTINE P_(X1,Y1,P1K,P1I,P2K,P2I,GR,M1)
C
C COEFFICIENT OF Z-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION
C
000002 P1K=C.
000003 P2K=0.
000004 P1I=0.
000005 P2I=X1
000006 K=0.
000007 M1=0.
C
000008 RETURN
000009 END

```

```

000001 SUBROUTINE PATH(MSR,MSI,MIR,MUR,MII,MUI,A,Y,DX,DY,
C *NIP,MM,NAF,CAF)
C
C C
C C
C C
000002 DIMENSION MSR(1),MSI(1),X(1),Y(1),DX(1),DY(1)
000003 DIMENSION AF(1),CAF(1)
C
000004 MM=NN
000005 IF(NIP.EQ.0) GO TO 10
000006 M0 1 1=1,NIP
000007 X(1)=MSR(1)
000008 Y(1)=MSI(1)
000009 CAF(1)=CAF(1)
000010 1 CONTINUE
000011 MSR(1)=MIR
000012 MSR(NIP+2)=MUR
000013 MSI(1)=MII
000014 MSI(NIP+2)=MUI
000015 AF(1)=0
000016 AF(NIP+2)=0
000017 M0 2 1=2,NIP+1
000018 MSR(1)=X(1)
000019 MSI(1)=Y(1)
000020 AF(1)=CAF(1)
000021 2 CONTINUE
000022 XI=(MUR-MIR)/SN
000023 YI=XI
000024 ISS=0
000025 IS=0
000026 M0 3 J=1,NIP+1
000027 UHR=MSR(J+1)-MSR(J)
000028 S1=UHR/XI
000029 IS=S1
000030 S2=S1
000031 ISS=ISS+IS
000032 UX(J)=UHR/S1
000033 FX=CAF(J)
000034 FAC=CAF(J+1)
000035 LMI=MSI(J+1)-MSI(J)+S1*(FAC-FA1)*DX(J)
000036 LY(J)=LMI/S1
000037 CAF(J)=ISS+1
000038 WRITE(6,900) J,CAF(J),UX(J),DY(J)
000039 3 CONTINUE
000040 DX(J+1)=DX(J)
000041 DY(J+1)=DY(J)
000042 J=1
000043 DO 4 1=1,ISS+1
000044 IF(1.EQ.1) X(1)=MSR(1)
000045 IF(1.EQ.1) Y(1)=MSI(1)
000046 IF(1.EQ.1) J=J+1
000047 IF(1.EQ.1) J=J-1
000048 X(1+1)=X(1)+DX(J)
000049 Y(1+1)=Y(1)+DY(J)
000050 WRITE(6,901) 1,X(1),Y(1)
000051 4 CONTINUE
000052 KA=ISS+1
C
C
000053 M0 TO 99
000054 10 CONTINUE
000055 DX(1)=(MUR-MIR)/SN
000056 DY(1)=(MUI-MII)/SN
000057 M0 11 1=1,MM+1
000058 S1=1-1
000059 X(1)=MIR+S1*DX(1)
000060 Y(1)=MII+S1*DY(1)
000061 11 CONTINUE
000062 KA=MM+1
000063 CAF(1)=KA
000064 M00 FORMAT(1X,A,'*',14,5A,'**',14,5A,'**',E10.2,5A,'*',E10.2)
000065 M01 FORMAT(2X,A,'*',14,5A,'**',E10.2,5A,'*',E10.2)
000066 99 CONTINUE
C
000067 RETURN
000068 END

```

```

000001 SUBROUTINE COND(KF,NIP,MM,MSR,MSI,MIR,MUR,MII,MUI)
C
C C
C C
C C
000002 DIMENSION MSR(1),MSI(1)
000003 DIMENSION AF(1)
000004 NIP=0
000005 MM=500
000006 AF(1)=1
000007 AF(2)=-1
000008 MSR(1)=0.2
000009 MSR(2)=0.6
000010 MSI(1)=0.2
000011 MSI(2)=-0.2
000012 MIR=0.
000013 MUR=1.
000014 MII=0.
000015 MUI=0.
C
000016 RETURN
000017 END

```

```

000001 SUBROUTINE FIGUR(F1,F11,F2,F21)
C
C C
C C
C C
000002 F1=C.
000003 F11=0.
000004 F2K=1.
000005 F21=0.
000006 Z1=2./3.
000007 Z2=1./3.
000008 CALL RGARMA(Z1,GZ1)
000009 CALL RGARMA(Z2,GZ2)
000010 A=3+Z1
000011 a=3+Z2
000012 F1=1./A+GZ1)
000013 F2=1./B+GZ2)
000014 F11=F1
000015 F11=0.
000016 F2K=F2+0.866C24
000017 F21=F2+0.5
C
000018 RETURN
000019 END

```



```

000099      NT=1
000100      NN=1
000101
000102      1111 READ(5,500) Z0,D2,CNT      GO TO 222
000103      NT=10
000104      NN=500
000105      NI=11
000106      NJ=11
000107      IF(CNT.GT.1.) NT=CNT+0.1
000108      222 CONTINUE
000109      DO 1222 NI=1,NT
000110      IF(KR.NE.200)
000111      IF(KKF.EQ.13)      GO TO 1333
000112      SI=NI-1
000113      ZZ=Z0+SI*D2
000114      IF(KR.EQ.200) ZC=ZZ
000115      IF(ZZ.GT.10.) STOP
000116      ZF=VISTFR(ZZ)
000117      ZF1=VISTF1(ZZ)
000118      A1=AA1
000119      C1=CC1
000120      DA=DAA
000121      DC=DCC
000122      F2=1.E+8
000123      1333 CONTINUE
C
000124      DO 1444 N2=1,NN
000125      IF(KR.NE.200)
000126      IF(KKF.EQ.13)      GO TO 1555
000127      IF(N2.EQ.1) GO TO 1555
000128      SNI=NI-1
000129      SNJ=NJ-1
000130      DA=(AJ2-AJ1)/SNJ
000131      DC=(C12-C11)/SNI
000132      A1=AA1
000133      C1=CC1
000134      A1=A1-DA
000135      C1=C1-DC
000136      1555 CONTINUE
000137      DO 1 J=1,NJ
000138      SJ=J
000139      A=AS+SDA
000140      JJ=J+2
000141      AJ(JJ)=A
000142      IF(KR.NE.100)
000143      A=A1
000144      IF(J.NE.1) A=A2
000145      333 DO 2 I=1,NI
000146      II=I
000147      CR=C1+TI+DC
000148      III=I+2
000149      CI(III)=CR
000150      IF(KKF.EQ.13) CR=CC
000151      IF(KKF.EQ.13) A=AAA
000152      IF(KR.NE.100)
000153      CR=CA1
000154      IF(I.NE.1) CR=CR2
000155      IF(KKF.EQ.13) CR=CC
C
000156      444 CONTINUE
000157      KF=1
000158      IS=10
000159      IT=10
000160      XI=-1.
000161      XM=0.
000162      CALL YS(X1,CR,FK,BX,THETA,R,UM,AS)
000163      XC=X5
000164      X51=X5-0.02
000165      X52=X5+0.02
000166      IF(X51.LE.-0.99) X51=X1
000167      IF(X51.LE.-0.99) IS=10
000168      IF(X52.GE.-0.01) X52=XM
000169      IF(X52.GE.-0.01) IT=10
C
C
C      - FROBENIUS METHOD -
C
000170      Y1=X51-X5
000171      Y2=X52-X5
000172      JUPROF=1
000173      CALL UPROF(JUPROF,XS,FK,BX,THETA,R,U1)
000174      U1=U1/UM
000175      JUPROF=2
000176      CALL UPROF(JUPROF,XS,FK,BX,THETA,R,U2)
000177      U2=U2/UM
000178      JUPROF=3
000179      CALL UPROF(JUPROF,XS,FK,BX,THETA,R,U3)
000180      U3=U3/UM
000181      JUPROF=4
000182      IF(FK.EQ.0.)
000183      * CALL UPROF(JUPROF,XS,FK,BX,THETA,R,U4)
000184      IF(FK.LT.-1.E+4)
000185      * CALL UPROF(JUPROF,XS,FK,BA,THETA,R,U4)
000186      UM=U4/UM
000187      Y11=Y1+2
000188      Y22=Y2+2
000189      AA=A+2
000190      U21=U2/U1
000191      U31=U3/U1
000192      U212=U21+2
000193      E1=0.5*U21
000194      E2=(U31+AA)/6.
000195      E3=0.
000196      IF(FK.EQ.0.)
000197      * E3=(2.*AA+U2/3.-U4+0.5-U31+U2)/(12.*U1)
000198      IF(FK.LE.-1.E+4)
000199      * E3=(2.*AA+U2/3.-U4+0.5-U31+U2)/(12.*U1)
000200      H1=0.
000201      H2=0.5*U31-U212+0.5*AA
000202      H3=0.
000203      IF(FK.EQ.0.)
000204      * H3=(U2+0.5*U4-2.*U31+U2/3.-3.*U212+U2/4.)/(6.*U1)
000205      IF(FK.LE.-1.E+4)
000206      * H3=(U2+0.5*U4-2.*U31+U2/3.-3.*U212+U2/4.)/(6.*U1)
000207      PA1=1.+E1+Y1+E2+Y11+E3+Y111
000208
000209
000210
000211
000212
000213
000214
000215
000216
000217
000218
000219
000220
000221
000222
000223
000224
000225
000226
000227
000228
000229
000230
000231
000232

```

```

000204 PAZ=1.+E1*Y2+E2*Y22+E3*Y222 02330
000205 PB1=1.+H1*Y1+H2*Y11+H3*Y111 02340
000206 PB2=1.+H1*Y2+H2*Y22+H3*Y222 02350
000207 PHVA1=Y1*PA1 02360
000208 PHVA2=Y2*PA2 02370
000209 VV=-V1 02380
000210 DNE=1. 02390
000211 PAI=2.*ARSIN(DNE) 02400
000212 ISI=0 02410
000213 IF(VV.LE.1.E-8) ISI=20 02420
000214 IF(VV.LE.1.E-8) GO TO 66 02430
000215 PHVB1=PB1*U21*Y1*PA1*ALOG(VV) 02440
000216 PHVB1R=PHVB1 02450
000217 PHVB11=U21*Y1*PA1*PA1*(-1.) 02460
000218 PHA1D=1.+2.*E1*Y1+3.*E2*Y11+4.*E3*Y111 02470
000219 PHB1D=H1*2.+H2*Y1+3.*H3*Y11+U21*PHA1D*ALOG(VV)+U21*PA1 02480
000220 PHB1D1=-PA1*U21*PHA1D 02490
000221 66 CONTINUE 02500
000222 PHA2D=1.+2.*E1*Y2+3.*E2*Y22+4.*E3*Y222 02510
000223 PHVB2=PB2*U21*Y2*PA2*ALOG(V2) 02520
000224 PHVB2R=PHVB2 02530
000225 PHVB21=0. 02540
000226 PHB2D=H1*2.+H2*Y2+3.*H3*Y22+U21*PHA2D*ALOG(V2)+U21*PA2 02550
000227 PHB2D1=0. 02560
C 02570
C 02580
C 02590
C 02600
000228 PH1D=H1*2.+H2*Y1+3.*H3*Y11 02610
000229 PH2D=H1*2.+H2*Y2+3.*H3*Y22 02620
000230 IF(KR.NE.0) CR=-CR 02630
000231 IF(I3.EQ.-10) GO TO 11 02640
000232 R1R=X51 02650
000233 RDR=X1 02660
000234 R1I=0. 02670
000235 RDI=0. 02680
000236 F1R=PHVA1 02690
000237 F1I=0. 02700
000238 F2R=PHA1D 02710
000239 F2I=0. 02720
C C C C C 02730
C C C C C 02740
C C C C C 02750
C C C C C 02760
000240 G1R=PHVB1R 02770
000241 G1I=PHVB1I 02780
000242 G2R=PHB1DR 02790
000243 G2I=PHB1DI 02800
000244 CALL CRK6(FX,BX,A,CR,THETA,R,UN,X5,F1R,F1I,F2R,F2I, 02810
G1R,G1I,G2R,G2I,R1R,R1I,RDR,RDI,FR,FI) 02820
C 02830
000245 IF(CA.LE.0.) CR=-CR 02840
000246 IF(KR.NE.0) CR=-CR 02850
000247 IF(I1.EQ.-10) GO TO 22 02860
000248 R1R=X52 02870
000249 RDR=XN 02880
000250 R1I=0. 02890
000251 RDI=0. 02900

000252 F1R=PHVA2 02910
000253 F1I=0. 02920
000254 F2R=PHA2D 02930
000255 F2I=0. 02940
C C C C C 02950
C C C C C 02960
C C C C C 02970
C C C C C 02980
000256 G1R=PHVB2R 02990
000257 G1I=0. 03000
000258 G2R=PHB2DR 03010
000259 G2I=0. 03020
000260 CALL CRK6(FX,BX,A,CR,THETA,R,UN,X5,F1R,F1I,F2R,F2I, 03030
G1R,G1I,G2R,G2I,R1R,R1I,RDR,RDI,GR,G1) 03040
000261 IF(CA.LE.0.) CR=-CR 03050
C 03060
000262 IF(I3.EQ.10) GO TO 33 03070
000263 P11=PHVA1 03080
000264 P21R=PHVB1R 03090
000265 P21I=PHVB1I 03100
000266 P11D=PHA1D 03110
000267 P21DR=PHB1DR 03120
000268 P21DI=PHB1DI 03130
000269 IF(I51.NE.20) GO TO 22 03140
000270 P11=0. 03150
000271 P21R=1. 03160
000272 P21I=0. 03170
000273 P11D=1. 03180
000274 P21DR=0. 03190
000275 P21DI=0. 03200
000276 IF(I1.EQ.10) GO TO 33 03210
000277 P12=PHVA2 03220
000278 P12D=PHA2D 03230
000279 P22R=PHVB2R 03240
000280 P22I=PHVB2I 03250
000281 P22DR=PHB2DR 03260
000282 P22DI=PHB2DI 03270
000283 33 CONTINUE 03280
000284 YD=XG-X1 03290
000285 YN=XN-XC 03300
000286 IF(I3.EQ.-10) GO TO 77 03310
000287 IF(I51.EQ.-20) GO TO 77 03320
000288 P11=FR(2) 03330
000289 P11D=FR(3) 03340
C C C C C 03350
C C C C C 03360
C C C C C 03370
C C C C C 03380
000291 P21R=FR(4)+U21*P11*ALOG(YD) 03390
000292 P21I=-PA1*U21*P11 03400
000293 P21DR=U21*(-P11/YD+P11D*ALOG(YD))+FR(5) 03410
000294 P21DI=-PA1*U21*P11D 03420
000295 77 CONTINUE 03430
000296 IF(I1.EQ.-10) GO TO 44 03440
C C C C C 03450
C C C C C 03460
C C C C C 03470
C C C C C 03480

```

```

● CCCC P221=0. 03490
● CCCC P22DR=L21*(P12/YN+P12D*ALD6(YN))+GR(5) 03500
● CCCC P22D1=0. 03510
● 000297 P12=GR(2) 03520
● 000298 P12=GR(3) 03530
● 000299 P22R=GR(4) 03540
● 000300 P221=GI(4) 03550
● 000301 P22DR=GR(5) 03560
● 000302 P22D1=GI(5) 03570
● 000303 44 CONTINUE 03580
● C - WRONSKIAN - 03590
● C 000304 WRONS1=0. 03600
● 000305 WRONS2=0. 03610
● 000306 IF(KR.NE.900) GO TO 88 03620
● 000307 WRONS1=(P11+P21DA-P11D+P21R)**2+(P11+P21DI-P11D+P21I)**2 03630
● 000308 WRONS1=-SQRT(WRONS1) 03640
● 000309 WRONS2=P12+P22DR-P12D+P22R 03650
● 88 CONTINUE 03660
● 000310 P22D=P22DR 03670
● 000311 S1=P11/P12D 03680
● 000312 S2=P21R/P22D 03690
● 000313 T1=P11D/P12D 03700
● 000314 T2=P21DA/P22D 03710
● 000315 V=P21I/P22D 03720
● 000316 W=P21D1/P22D 03730
● 000317 YD=XC-X1 03740
● 000318 Y=T1-T2 03750
● 000319 S=S1-S2 03760
● 000320 V=W+YH 03770
● 000321 TT=2 03780
● 000322 MM=2 03790
● 000323 TTW=TT*MM 03800
● 000324 03810
● C - CORRESPONDING TIETJENS FUNCTION F(Z) - 03820
● C 000325 IF(TTW.LE.1.E-8) GO TO 55 03830
● 000326 IF(YD.LE.1.E-8) GO TO 55 03840
● 000327 TFR=(S+TW)/(TT+MM)/YD 03850
● 000328 TFI=(S+TW)/(TT+MM)/YD 03860
● 000329 FF=U1A+V0=3 03870
● 000330 IF(KKF.EQ.13) ANA=ZC=3/FF 03880
● 000331 IF(KR.EQ.200) TFR=2FR 03890
● 000332 IF(KR.EQ.200) TFI=2FI 03900
● 000333 IF(KR.NE.200) EV=0. 03910
● 000334 IF(KKF.EQ.13) WRITE(6,607) ZC,A,CC,TFR,TFI,TFX,TFY,ARR,EV 03920
● 000335 IF(KKF.EQ.13) 03930
● 000336 IF(KR.EQ.900) WRITE(6,630) A,CR,TFR,TFI,WRONS1,WRONS2 03940
● 000337 IF(KR.EQ.900) 03950
● 000338 IF(KR.NE.200) WRITE(6,606) A,CR,TFR,TFI,FF 03960
● 000339 03970
● C - AUTOMATED ROOT FINDER PART 1 - 04000
● C 000340 EV=(ZFA-TFR)**2+(ZFI-TFI)**2 04010
● 000341 F1=EV 04020
● 000342 IF(F1.LT.F2) IMIN=III 04030
● 04040
● 000343 IF(F1.LT.F2) JM1N=JJJ 04070
● 000344 IF(F1.LT.F2) F2=F1 04080
● 000345 F11=F1/(ZFA+ZFI) 04090
● 000346 IF(F11.LE.-2.E-5) GO TO 1888 04100
● 000347 04110
● 55 CONTINUE 04120
● 99 CONTINUE 04130
● 000348 IF(KKF.EQ.13) GO TO 888 04140
● 000349 IF(KR.EQ.0) GO TO 2 04150
● 000350 IF(KR.EQ.900) GO TO 2 04160
● 000351 IF(KR.EQ.200) GO TO 2 04170
● 000352 MNR=MNR+1 04180
● 000353 MNR=MNR+6 04190
● 000354 FR(MNR)=TFR 04200
● 000355 FI(MNR)=TFI 04210
● 000356 IF(CR1.EQ.CR2) GO TO 777 04220
● 000357 2 CONTINUE 04230
● 000358 IF(KR.EQ.0) GO TO 1 04240
● 000359 IF(KR.EQ.900) GO TO 1 04250
● 000360 IF(KR.EQ.200) GO TO 1 04260
● 000361 777 IF(A1.EQ.A2) GO TO 888 04270
● 000362 1 CONTINUE 04280
● 000363 888 IF(KR.EQ.0) GO TO 999 04290
● 000364 IF(KR.EQ.900) GO TO 999 04300
● 000365 IF(KR.EQ.200) GO TO 1777 04310
● 000366 1777 CONTINUE 04320
● 000367 IF(KKF.EQ.13) GO TO 2111 04330
● 04340
● C - AUTOMATED ROOT FINDER PART 2 - 04350
● C 000371 AJ1=AJ(JMIN-2) 04360
● 000372 AJ2=AJ(JMIN+2) 04370
● 000373 C11=C1(IMIN-2) 04380
● 000374 C12=C1(IMIN+2) 04390
● 000375 IF(IMIN.EQ.3) C11=C1(IMIN) 04400
● 000376 IF(IMIN.EQ.4) C11=C1(IMIN-1) 04410
● 000377 IF(JMIN.EQ.3) AJ1=AJ(JMIN) 04420
● 000378 IF(JMIN.EQ.4) AJ1=AJ(JMIN-1) 04430
● 000379 IF(IMIN.EQ.NI+1) C12=C1(IMIN+1) 04440
● 000380 IF(IMIN.EQ.NI+2) C12=C1(IMIN) 04450
● 000381 IF(JMIN.EQ.NJ+1) AJ2=AJ(JMIN+1) 04460
● 000382 IF(JMIN.EQ.NJ+2) AJ2=AJ(JMIN) 04470
● 000383 04480
● 000384 1999 CONTINUE 04490
● 000385 IF(KKF.EQ.13) GO TO 1444 04500
● 04510
● C - GRAPHIC ROOT FINDER TECHNIQUE - 04520
● C 000386 KRF=0 04530
● 000387 X1=FR(7) 04540
● 000388 X2=FR(8) 04550
● 000389 X3=VISTFR(Z1) 04560
● 000390 X4=VISTFR(Z2) 04570
● 000391 Y1=F1(7) 04580
● 000392 Y2=F1(8) 04590
● 000393 Y3=VISTF1(Z1) 04600
● 000394 Y4=VISTF1(Z2) 04610

```

```

000395      I10=0
000396
000397      110 X1=F1(7)          GO TO 120      04650
000398      X2=F1(8)          04660
000399      X3=V1STF1(Z1)    04670
000400      X4=V1STF1(Z2)    04680
000401      Y1=FR(7)        04690
000402      Y2=FR(8)        04700
000403      Y3=V1STFR(Z1)  04710
000404      Y4=V1STFR(Z2)  04720
000405      I10=I10+1      04730
000406      120 CONTINUE   04740
C
000407      IF(I10.GE.2) WRITE(6,606) X1,X2,X3,X4,Y1,Y2,Y3,Y4
000408      IF(I10.GE.2)          GO TO 111      04750
000409      V21=Y2-Y1          04760
000410      V22=Y2-Y1          04770
000411      V23=Y4-Y3          04780
000412      X21=X2-X1          04790
000413      X22=X3-X1          04800
000414      X23=X4-X1          04810
000415      IF(ABS(X21).LE.1.E-8) KAF=1000
000416      IF(ABS(X22).LE.1.E-8) KAF=1000
000417      IF(KAF.EQ.1000)          GO TO 110      04820
000418      XY22=V21/X21
000419      XY44=Y23/X43
000420      XY=XV22-XY44
000421      TFX=(V31-XY22*X1-XY44*X3)/XY
000422      TFY=XY22*(V31-X31+XY44)/(XY22-XY44)+Y1
000423      TFX1=TFX
000424      TFY1=TFY
000425      IF(KAF.EQ.1000) TFX=TFY1
000426      IF(KAF.EQ.1000) TFY=TFX1
000427      CALL ZS(Z1,Z2,X3,X4,TFX,ZC)
000428      CALL ZS(CR1,CR2,X1,X2,TFY,CC)
000429      WRITE(6,690) ZC,CC
000430      AAA=A
000431      KKF=13
000432      IF(KR.EQ.100)          GO TO 1444      04830
000433      1888 AAA=A/(JMIN)
000434      CC=C/(JMIN)
000435      KKF=13
000436      1444 CONTINUE
000437      IF(KR.EQ.100)          GO TO 1222      04840
000438      2111 KKF=0
000439      1222 CONTINUE
000440
000441      500 FORMAT(8F10.0)          GO TO 222      05100
000442      600 FORMAT(/,10X,'* * * K,CK,B,T,GAMMA,U*,6E15.6,* * * *,//)
000443      601 FORMAT(15X,'X,U,U1,U2,U3,U4*,6E15.6)
000444      602 FORMAT(20X,'UPPER BRANCH',E12.4,'*(-11)*,2X,E12.4,'(12)*,2X,
000445      *LOWER BRANCH',E12.4,'*(-7)*,2X,E12.4,'(12)*')
000446      606 FORMAT(10X,'A',E15.6,5X,'C',E15.6,5X,'TFR',E15.6,5X,'TF1',
000447      E15.6,5X,'K',E15.6)
000448      607 FORMAT(2X,'Z,A,C,TFR,TFI,FR,F1,R,EY*,FS,1.0E12.4,/)
000449      608 FORMAT(2X,'TWO POINTS ARE TOO CLOSE',6E12.4,/)
000450      609 FORMAT(5X,'A,CR,TFR,TFI,WRDMS1,2*,2X,6E15.6)
000451      606 FORMAT(/,15X,'TRANSITION POINT IS TOO CLOSE',1X,
000452      *TO THE BOUNDARY')
000453      690 FORMAT(10X,'ZC,CC*,2E15.6)
C
000454      999 IF(KAF.EQ.13)          GO TO 111      05230
C
000455      STOP
000456      END
05240
05250
05260
05270
05280
05290

```

```

000001 SUBROUTINE YS(XD,CR,FK,BA,T,R,UN,XS) 05300
C
C - INTERSECTION BY NEWTON-RAPHSON METHOD - 05310
C 000002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z) 05320
C 000003 COMMON 05330
C * /EF/ DD1,DD2,DD3,DD4 05340
C 000004 NN=100 05350
C 000005 NN=500 05360
C 000006 X=XD 05370
C 000007 DO 1 I=1,NN 05380
C 000008 CALL UPDF(1,X,FK,BA,T,R,U1) 05390
C 000009 U1=U1/UN 05400
C 000010 IF(I.EQ.1) X=X+CR/U1 05410
C 000011 IF(I.EQ.1) GO TO 3 05420
C 000012 CALL UPDF(0,X,FK,BA,T,R,U) 05430
C 000013 U=U/UN 05440
C 000014 X=X+CR/U1-U/U1 05450
C 000015 3 CONTINUE 05460
C 000016 CALL UPDF(0,X,FK,BA,T,R,F1) 05470
C 000017 F1=F1/UN 05480
C 000018 IF(I.EQ.1) GO TO 2 05490
C 000019 F2=F2-F1 05500
C 000020 IF(F21.LT.D-0) F21=-F21 05510
C 000021 IF(F21.LE.-1.E-6) GO TO 99 05520
C 000022 2 F2=F1 05530
C 000023 1 CONTINUE 05540
C 000024 99 XS=X 05550
C 000025 RETURN 05560
C 000026 END 05570

```

```

000001 SUBROUTINE CRKG(FK,BA,AA,CR,CA,R,UN,XS,FIR,F11,F2R,F2I, 05610
C * GIR,G11,G2R,G2I,MIR,M11,MOR,M01,YR,Y11) 05620
C KUNGE-KUTTA-GILL METHOD IN THE DOMAIN OF COMPLEX VARIABLES 05630
C 000002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z) 05640
C 000003 DIMENSION HSR(10),HSI(10),X1(3000),Y(3000),DX(20),DY(20) 05650
C 000004 DIMENSION FR(10),FI(10),GR(10),GI(10),VR(10),VI(10) 05660
C 000005 DIMENSION KKF(20),KKF(10) 05670
C 000006 COMMON 05680
C * /EF/ DD1,DD2,DD3,DD4 05690
C 000007 SQR(A)=DSQRT(A) 05700
C 000008 JJ=-1 05710
C 000009 JJ=1 05720
C 000010 NTP=0 05730
C 000011 OS=0.5 05740
C 000012 DM=MOR-MIR 05750
C 000013 IF(DM.LE.0.) DM=-DM 05760
C 000014 SS=0.01 05770
C 000015 IF(CR.LE.0.) SS=0.005 05780
C 000016 S=DM/SS 05790
C 000017 IF(CR.LE.0.) CR=-CR 05800
C 000018 NN=S 05810
C 000019 CALL PATH(HSR,HSI,MIR,MOR,M11,M01,X,Y,DX,DY,NTP,MM,KK,KKF,KF) 05820
C 000020 X1=X(J) 05830
C 000021 Y1=Y(J) 05840
C 000022 CALL FUNC(JJ,M,FK,BA,AA,CR,CA,R,UN,XS,X1,Y1,FIR,F11,F2R,F2I, 05850
C * GIR,G11,G2R,G2I,YR,Y1,FR,FI) 05860
C 000023 JJ=0 05870
C 000024 DO 1 I=1,NN 05880
C 000025 YR(I)=C 05890
C 000026 YI(I)=0 05900
C 000027 GR(I)=0 05910
C 000028 GI(I)=0 05920
C 000029 1 CONTINUE 05930
C 000030 CALL FUNC(JJ,M,FK,BA,AA,CR,CA,R,UN,XS,X1,Y1,FIR,F11,F2R,F2I, 05940
C * GIR,G11,G2R,G2I,YR,Y1,FR,FI) 05950
C 000031 JJ=JJ+1 05960
C 000032 K=1 05970
C 000033 DO 2 J=2,NN 05980
C 000034 IF(J.GE.KKF(K)+1) K=K+1 05990
C 000035 DI=DX(K) 06000
C 000036 DJ=DY(K) 06010
C 000037 X1=X(I,J) 06020
C 000038 Y1=Y(I,J) 06030
C 000039 DO 3 L=1,4 06040
C 000040 IF(L.EQ.1) A=0.5 06050
C 000041 IF(L.EQ.2) A=1.-SQRT(OS) 06060
C 000042 IF(L.EQ.3) A=1.+SQRT(OS) 06070
C 000043 IF(L.EQ.4) A=1./OS 06080
C 000044 IF(L.EQ.1.DR.L.EQ.4) B=2. 06090
C 000045 IF(L.EQ.2.DR.L.EQ.3) B=1. 06100
C 000046 C=A 06110
C 000047 IF(L.EQ.4) C=D.5 06120
C 000048 CALL FUNC(JJ,M,FK,BA,AA,CR,CA,R,UN,XS,X1,Y1,FIR,F11,F2R,F2I, 06130
C * GIR,G11,G2R,G2I,YR,Y1,FR,FI) 06140
C 000049 DO 4 I=1,M+1 06150
C 000050 F1=FR(I) 06160
C 000051 F2=FI(I) 06170
C 000052 AI=D1+F1-D2+F2 06180
C 000053 AI=D1+F2-D2+F1 06190
C 000054 RR=A*(AR-B*GR(I)) 06200
C 000055 RI=A*(AI-B*GI(I)) 06210
C 000056 YR(I)=YR(I)+RR 06220
C 000057 YI(I)=YI(I)+RI 06230
C 000058 GR(I)=GR(I)+B*RR-C*AR 06240
C 000059 GI(I)=GI(I)+B*RI-C*AI 06250
C 000060 4 CONTINUE 06260
C 000061 3 CONTINUE 06270
C 000062 2 CONTINUE 06280
C 000063 601 FORMAT(15,9E12.4) 06290
C 000064 RETURN 06300
C 000065 END 06310

```

```

000001 SUBROUTINE PATH(HSR,MSI,MIR,MOR,MII,MOI,X,Y,DX,DY,
          =NTP,MM,KK,KF,KF)
          C
          C
          C INTEGRAL PATH AROUND MANY SINGULARITIES (MSR,MSI)
          KF=1 ; _I-_-L ; KF=-1 ; -L*_I-
          C
000002 IMPLICIT REAL*8(A-M,D-Z)
000003 DIMENSION MSR(1),MSI(1),X(1),Y(1),DX(1),DY(1)
000004 DIMENSION KF(1),KF(1)
          C
000005 607 FORMAT(20X,4E15.6)
000006 SM=MM
000007 IF(NTP.EQ.0) GO TO 10
000008 DO 1 I=1,NTP
000009 X(I+1)=MSR(I)
000010 Y(I+1)=MSI(I)
000011 KF(I+1)=KF(I)
000012 1 CONTINUE
000013 MSR(1)=MIR
000014 MSR(NTP+2)=MOR
000015 MSI(1)=MII
000016 MSI(NTP+2)=MOI
000017 KF(1)=0
000018 KF(NTP+2)=0
000019 DO 2 I=2,NTP+1
000020 MSR(I)=X(I)
000021 MSI(I)=Y(I)
000022 KF(I)=KF(I)
000023 2 CONTINUE
000024 XI=(MOR-MIR)/SM
000025 YI=XI
000026 IS=0
000027 IS=0
000028 DO 3 J=1,NTP+1
000029 DMR=MSR(J+1)-MSR(J)
000030 S1=DMR/XI
000031 IS=S1
000032 S1=IS
000033 IF(S1.EQ.0.) IS=3
000034 IF(S1.EQ.0.) S1=IS
000035 IS=ISS*IS
000036 WK(J)=DMR/S1
000037 FK1=KF(J)
000038 FK2=KF(J+1)
000039 DDY=DX(J)
000040 IF(DDY.LE.0.) DDY=0.01
000041 DMI=MSI(J+1)-MSI(J)+3.*(FK2-FK1)*DDY
000042 DY(J)=DMI/S1
000043 KF(J)=ISS*1
000044 WRITE(6,600) J,KF(J),DX(J),DY(J)
000045 DX(J+1)=DX(J)
000046 DY(J+1)=DY(J)
000047 3 CONTINUE
000048 J=1
000049 DO 4 I=1,ISS+1
000050 IF(I.EQ.1) X(I)=MSR(I)
000051 IF(I.EQ.1) Y(I)=MSI(I)
000052 IF(I.GE.KK+KJ) J=J+1
          C
000053 IF(I.EQ.ISS+1) J=J-1
000054 X(I+1)=X(I)+DX(J)
000055 Y(I+1)=Y(I)+DY(J)
000056 4 CONTINUE
000057 KK=ISS+1
000058 GO TO 99
000059 10 CONTINUE
000060 DMI=(MOR-MIR)/SM
000061 DY(1)=(MOI-MII)/SM
000062 DO 11 I=1,MM+1
000063 SI=I-1
000064 X(I)=MIR+SI*DX(1)
000065 Y(I)=MII+SI*DY(1)
000066 11 CONTINUE
000067 KK=MM+1
000068 KF(1)=KK
000069 600 FORMAT(10X,'J',I4,5X,'KF',I4,5X,'DX',E10.2,5X,'DY',E10.2)
000070 601 FORMAT(20X,'I',I4,5X,'X',E10.2,5X,'Y',E10.2)
000071 99 CONTINUE
          C
000072 RETURN
000073 END
          C
06410
06420
06430
06440
06450
06460
06470
06480
06490
06500
06510
06520
06530
06540
06550
06560
06570
06580
06590
06600
06610
06620
06630
06640
06650
06660
06670
06680
06690
06700
06710
06720
06730
06740
06750
06760
06770
06780
06790
06800
06810
06820
06830
06840
06850
06860
06870
06880
06890
06900
06910
06920
06930
06940
06950
06960
06970
06980
06990
07000
07010
07020
07030
07040
07050
07060
07070
07080
07090
07100
07110
07120
07130
07140
07150
07160
07170
07180
07190
07200

```

```

000001 SUBROUTINE FUNC(JJ,M,FK,BX,A,CR,C,R,UM,XS,X1,Y1,F1R,F1I,F2R,F2I, 07210
      GR,G1I,G2R,G2I,VR,YI,FR,FI) 07220
C 07230
C 07240
C 07250
C 07260
C 07270
C 07280
C 07290
C 07300
C 07310
C 07320
C 07330
C 07340
C 07350
C 07360
C 07370
C 07380
C 07390
C 07400
C 07410
C 07420
C 07430
C 07440
C 07450
C 07460
C 07470
C 07480
C 07490
C 07500
C 07510
C 07520
C 07530
C 07540
C 07550
C 07560
C 07570
C 07580
C 07590
C 07600
C 07610
C 07620
C 07630
C 07640
C 07650
      UZV/DXZ+PIDY/DX+PZY=Q
      IN THE DOMAIN OF COMPLEX VARIABLES
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION VR(1),VI(1),FR(1),FI(1)
      COMMON
      *EF/ DO1,DO2,DO3,DO4
      N=4
      IF(JJ.EQ.-1) GO TO 99
      IF(JJ.NE.0) GO TO 10
      VR(1)=X1
      VI(1)=Y1
      VR(2)=F1R
      VI(2)=F1I
      VR(3)=F2R
      VI(3)=F2I
      VR(4)=GR
      VI(4)=G1I
      VR(5)=G2R
      VI(5)=G2I
      10 CONTINUE
      XI=VR(1)
      YI=VI(1)
      XZ=VR(2)
      YZ=VI(2)
      X3=VR(3)
      Y3=VI(3)
      CALL PQ(FX,BX,A,CR,C,R,UM,XS,X1,Y1,XZ,X3,P1R,P1I,P2R,P2I,
      * GR,G1I,S1R,S1I,S2R,S2I,TR,VI)
      FR(1)=1.
      FI(1)=0.
      FR(2)=VR(3)
      FI(2)=VI(3)
      FR(3)=GR-(P1R*VR(3)+P1I*VI(3))-(P2R*VR(2)+P2I*VI(2))
      FI(3)=G1I-(P1R*VI(3)+P1I*VR(3))-(P2R*VI(2)+P2I*VR(2))
      FR(4)=VR(5)
      FI(4)=VI(5)
      FR(5)=TR-(S1R*VR(5)+S1I*VI(5))-(S2R*VR(4)+S2I*VI(4))
      FI(5)=TI-(S1R*VI(5)+S1I*VR(5))-(S2R*VI(4)+S2I*VR(4))
C
C 09 CONTINUE
C
C 000035 RETURN
C 000036 END

```

```

000001 SUBROUTINE P4(FX,BX,A,CR,T,R,UM,XS,X1,Y1,XZ,X3,P1R,P1I,P2R,P2I, 07440
      GR,G1I,S1R,S1I,S2R,S2I,TR,VI) 07470
C 07480
C 07490
C 07500
C 07510
C 07520
C 07530
C 07540
C 07550
C 07560
C 07570
C 07580
C 07590
C 07600
C 07610
C 07620
C 07630
C 07640
C 07650
      COEFFICIENT OF 2-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON
      *EF/ DO1,DO2,DO3,DO4
      J=0
      CALL UPDRF(J,X1,FK,BX,T,R,U)
      UM=U/UM
      J=1
      CCCCC CALL UPDRF(J,XS,FK,BX,T,R,U1S)
      CCCCC U1S=U1S/UM
      J=2
      CCCCC CALL UPDRF(J,XS,FK,BX,T,R,U2S)
      CCCCC U2S=U2S/UM
      CALL UPDRF(J,X1,FK,BX,T,R,U2)
      UZ=UZ/UM
      UC=U-CR
      CCCCC YC=X1-XS
      P1R=0.
      P1I=0.
      P2R=-(AA*UZ/UC)
      P2I=0.
      GR=0.
      G1I=0.
      S1R=0.
      S1I=0.
      S2R=-(AA*UZ/UC)
      S2I=0.
      CCCCC TR=-UZS/(U1S*YC)+(Z.*X3-XZ/YC)
      TR=0.
      TI=0.
C
C 000025 RETURN
C 000026 END

```

```

000001 SUBROUTINE ZS(X1,X2,Y1,Y2,YS,XS) 08040
C 08050
C 08060
C 08070
C 08080
C 08090
C 08100
C 08110
C 08120
C 08130
C 08140
C 08150
C 08160
C 08170
C 08180
C 08190
      - LINEAR INVERSE INTERPOLATION -
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      ABS(A)=ABS(A)
      YS1=YS-Y1
      Y21=Y2-Y1
      X21=X2-X1
      IF(ABS(Y21).LE.1.E-8) XS=0.5*(X1+X2)
      IF(ABS(Y21).LE.1.E-8) GO TO 99
      A=YS1/Y21
      XS=X1+X21*A
C
C 99 RETURN
C
C 000011 RETURN
C 000012 END

```



```
000001 DOUBLE PRECISION FUNCTION VISTFI(Z)
C
C THE VALUE OF TIETJENS FUNCTION ( IMAGINARY PART ) -
C INTERNAL FACTOR
C K=1 : CALCULATED BY J.M.MILES
C K=2 : CALCULATED BY K.FUJIMURA
C K=3 : CALCULATED BY C.G.LIN
C
000002 IMPLICIT REAL*8(A-M,D-Z)
000003 DIMENSION G1(100),G2(60),G3(20),G4(20),F(100)
000004 ABS(A)=DABS(A)
C
000005 DATA G1/-0.3880E+1,-0.1936E+1,-0.1286E+1,-0.9593 , -0.7616 ,
* -0.6284 , -0.5317 , -0.4578 , -0.3989 , -0.3503 ,
* -0.3090 , -0.2731 , -0.2412 , -0.2122 , -0.1853 ,
* -0.1601 , -0.1360 , -0.1128 , -0.9996E-1,-0.6742E-1,
* -0.4491E-1,-0.2227E-1, 0.4422E-3, 0.2394E-1, 0.4772E-1,
* 0.7202E-1, 0.9685E-1, 0.1222 , 0.1479 , 0.1739 ,
* 0.1998 , 0.2252 , 0.2495 , 0.2719 , 0.2915 ,
* 0.3071 , 0.3174 , 0.3213 , 0.3180 , 0.3072 ,
* 0.2893 , 0.2656 , 0.2378 , 0.2081 , 0.1785 ,
* 0.1507 , 0.1258 , 0.1045 , 0.8690E-1, 0.7289E-1,
* 0.6212E-1, 0.5416E-1, 0.4855E-1, 0.4482E-1, 0.4257E-1,
* 0.4143E-1, 0.4109E-1, 0.4130E-1, 0.4194E-1, 0.4293E-1,
* 0.4432E-1, 0.4597E-1, 0.4851E-1, 0.5169E-1, 0.5506E-1,
* 0.5903E-1, 0.6481E-1, 0.7144E-1, 0.7944E-1, 0.8916E-1,
* 0.4234E-1, 0.4146E-1, 0.4054E-1, 0.3959E-1, 0.3863E-1,
* 0.3769E-1, 0.3676E-1, 0.3587E-1, 0.3502E-1, 0.3421E-1,
* 0.3343E-1, 0.3270E-1, 0.3201E-1, 0.3135E-1, 0.3073E-1,
* 0.3014E-1, 0.2957E-1, 0.2902E-1, 0.2851E-1, 0.2801E-1,
* 0.2752E-1, 0.2705E-1, 0.2659E-1, 0.2615E-1, 0.2572E-1,
* 0.2530E-1, 0.2488E-1, 0.2448E-1, 0.2409E-1, 0.2371E-1/
000006 DATA G2/-0.3879E+1,-0.1935E+1,-0.1285E+1,-0.9589 ,
* -0.7613 , -0.6281 , -0.5314 , -0.4575 , -0.3986 ,
* -0.3497 , -0.3138 , -0.2819 , -0.2529 , -0.2260 ,
* -0.2007 , -0.1766 , -0.1535 , -0.1314 , -0.1103 ,
* -0.4491E-1,-0.2227E-1, 0.4422E-3, 0.2394E-1, 0.4772E-1,
* 0.7202E-1, 0.9685E-1, 0.1222 , 0.1479 , 0.1739 ,
* 0.1998 , 0.2252 , 0.2495 , 0.2719 , 0.2915 ,
* 0.3071 , 0.3174 , 0.3213 , 0.3180 , 0.3072 ,
* 0.2893 , 0.2656 , 0.2378 , 0.2081 , 0.1785 ,
* 0.1507 , 0.1258 , 0.1045 , 0.8690E-1, 0.7289E-1,
* 0.6212E-1, 0.5416E-1, 0.4855E-1, 0.4482E-1, 0.4257E-1,
* 0.4143E-1, 0.4109E-1, 0.4130E-1, 0.4194E-1, 0.4293E-1,
* 0.4432E-1, 0.4597E-1, 0.4851E-1, 0.5169E-1, 0.5506E-1,
* 0.5903E-1, 0.6481E-1, 0.7144E-1, 0.7944E-1, 0.8916E-1,
* 0.4234E-1, 0.4146E-1, 0.4054E-1, 0.3959E-1, 0.3863E-1,
* 0.3769E-1, 0.3676E-1, 0.3587E-1, 0.3502E-1, 0.3421E-1,
* 0.3343E-1, 0.3270E-1, 0.3201E-1, 0.3135E-1, 0.3073E-1,
* 0.3014E-1, 0.2957E-1, 0.2902E-1, 0.2851E-1, 0.2801E-1,
* 0.2752E-1, 0.2705E-1, 0.2659E-1, 0.2615E-1, 0.2572E-1,
* 0.2530E-1, 0.2488E-1, 0.2448E-1, 0.2409E-1, 0.2371E-1/
000007 DATA G3/-0.3879E+1,-0.1935E+1,-0.1285E+1,-0.9589 ,
* -0.7613 , -0.6281 , -0.5314 , -0.4575 , -0.3986 ,
* -0.3497 , -0.3138 , -0.2819 , -0.2529 , -0.2260 ,
* -0.2007 , -0.1766 , -0.1535 , -0.1314 , -0.1103 ,
* -0.4491E-1,-0.2227E-1, 0.4422E-3, 0.2394E-1, 0.4772E-1,
* 0.7202E-1, 0.9685E-1, 0.1222 , 0.1479 , 0.1739 ,
* 0.1998 , 0.2252 , 0.2495 , 0.2719 , 0.2915 ,
* 0.3071 , 0.3174 , 0.3213 , 0.3180 , 0.3072 ,
* 0.2893 , 0.2656 , 0.2378 , 0.2081 , 0.1785 ,
* 0.1507 , 0.1258 , 0.1045 , 0.8690E-1, 0.7289E-1,
* 0.6212E-1, 0.5416E-1, 0.4855E-1, 0.4482E-1, 0.4257E-1,
* 0.4143E-1, 0.4109E-1, 0.4130E-1, 0.4194E-1, 0.4293E-1,
* 0.4432E-1, 0.4597E-1, 0.4851E-1, 0.5169E-1, 0.5506E-1,
* 0.5903E-1, 0.6481E-1, 0.7144E-1, 0.7944E-1, 0.8916E-1,
* 0.4234E-1, 0.4146E-1, 0.4054E-1, 0.3959E-1, 0.3863E-1,
* 0.3769E-1, 0.3676E-1, 0.3587E-1, 0.3502E-1, 0.3421E-1,
* 0.3343E-1, 0.3270E-1, 0.3201E-1, 0.3135E-1, 0.3073E-1,
* 0.3014E-1, 0.2957E-1, 0.2902E-1, 0.2851E-1, 0.2801E-1,
* 0.2752E-1, 0.2705E-1, 0.2659E-1, 0.2615E-1, 0.2572E-1,
* 0.2530E-1, 0.2488E-1, 0.2448E-1, 0.2409E-1, 0.2371E-1/
000008 DATA G4/-0.3802E-1,-0.2731E-1,-0.2121E-1,-0.1600E-1,-0.1127E-1,-0.0674E-1,
*
* -0.0222E-1,-0.0239E-1,-0.0720E-1, 0.1222E-1, 0.1739E-1, 0.2252E-1,
* 0.2719E-1, 0.3070E-1, 0.3213E-1, 0.3072E-1, 0.2659E-1, 0.2081E-1,
* 0.1447E-1, 0.0987E-1 /
C
000009 K=1
000010 IF(K.NE.2) GO TO 2
000011 LD 1 J=1,100
000012 IF(J.LE.60) F(J)=G2(J)
000013 IF(J.GE.81) F(J)=G4(J)+0.0
000014 1 CONTINUE
000015 2 CONTINUE
000016 Z=10.+Z*0.1
000017 I=Z
000018 Z=(Z-0.1)+0.1
000019 IF(K.EQ.1) VISTFI=G1(I)
000020 IF(K.EQ.1) GO TO 9
000021 IF(K.EQ.2) VISTFI=F(I)
000022 IF(K.EQ.2) GO TO 9
000023 IF(K.EQ.3) S1=1-9
000024 S1=S1/2.
000025 IS=S1+0.1
000026 A=ABS(S1-SIS)
000027 IF(A.LE.1.E-2) VISTFI=G3(I)
000028 IF(A.LE.1.E-2) GO TO 9
000029 IS=S1+0.1
000030 IS1=S1-1+0.1
000031 IS2=S1+1+0.1
000032 VISTFI=(G3(IS1)+G3(IS2))*0.5
C
000033 9 RETURN
000034 END
```

000001		SUBROUTINE BRANCH(FK, BX, T, R, UBR, UBC, SRL, SCL)	09950
	C		09960
	C	- COEFFICIENT OF LOWER & UPPER BRANCH	09970
	C	FOR THE SYMMETRICAL FLOW IN A CHANNEL -	09980
	C		09990
	C	R UBR=A**(-11)	10000
	C	C UBC=A**2	10010
	C	R LBR=A**(-7)	10020
	C	C LUC=A**2	10030
	C		10040
000002		IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)	10050
000003		DIMENSION X(200)	10060
000004		COMMON	10070
		*/EF/ DD1,DD2,DD3,DD4	10080
000005		ARSIN(A)=DARSIN(A)	10090
000006		OML=1.	10100
000007		PAI=2.*ARSIN(ONE)	10110
000008		NN=100	10120
000009		SN=NN	10130
000010		DELTA=1./SN	10140
000011		CALL UPRDF(0,0.,FK,BX,T,R,UN)	10150
	C		10160
000012		CALL UPRDF(1,-1.,FK,BX,T,R,U1)	10170
000013		CALL UPRDF(2,-1.,FK,BX,T,R,U2)	10180
000014		U1=U1/UN	10190
000015		U2=U2/UN	10200
000016		GO 1 J=1,NN	10210
000017		SJ=J	10220
000018		Z=DELTA*SJ-1.	10230
000019		CALL UPRDF(0,Z,FK,BX,T,R,U)	10240
000020		U=U/UN	10250
000021		X(J+1)=U**2	10260
000022		1 CONTINUE	10270
	C		10280
000023		X(1)=0.	10290
000024		E1=0.	10300
000025		GO 2 I=1,NN	10310
000026		E1=E1+0.5*(X(I+1)+X(I))*DELTA	10320
000027		2 CONTINUE	10330
000028		UBC=E1/01	10340
000029		SCL=2.296*UBC	10350
000030		U11=U1**11	10360
000031		U22=U2**2	10370
000032		E5=E1**5	10380
000033		PAI2=PAI**2	10390
000034		UBR=0.5/PAI2*U11/(U22+E5)	10400
000035		U15=U1**5	10410
000036		E3=E1**3	10420
000037		SRL=1.002*U15/E3	10430
	C		10440
000038		RETURN	10450
000039		END	10460

```

000001 SUBROUTINE UCON(FK,BX,ROM,GAMMA,SCD) 10470
C C - MODULUS' VALUES K,B,ROM,G,(SM=DC)**2,CD**2 IN J-H I,II,III,II - 10480
C C 10490
000002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z) 10500
000003 COMMON 10510
000004 *EF/ DD1,DD2,DD3,DD4 10520
000005 SQR(A)=DSQRT(A) 10530
000006 SFX=FK 10540
C C IF(FK.NE.0.) 60 TO 11 10550
C C - FOR PLANE POISUEILLE FLOW - 10560
C C 10570
000007 BX=0. 10580
000008 ROM=0. 10590
000009 GAMMA=0. 10600
000010 SCD=0. 10610
000011 11 CONTINUE 60 TO 99 10620
000012 IF(FK.LT.0.) 60 TO 22 10630
000013 IF(FK.GE.1.E+1) 60 TO 44 10640
C C - FOR J-H I - 10650
C C 10660
000015 FKA=FK**2 10670
000016 TK=FKA 10680
000017 FKA=FK**2 10690
000018 A=(4.*TK-2.)/3. 10700
000019 A1=(1.+A)**2-4.*A*TK 10710
000020 A2=SQRT(A1) 10720
000021 B1=1.+A*A2 10730
000022 B2=1.+A*A2 10740
000023 B=B2 10750
000024 B=B2/(2.*TK) 10760
000025 S=SQRT(B) 10770
000026 AS=ARCSN(S,FKA) 10780
000027 E1=E(AS,FKA) 10790
000028 S1=SN(0,AS,FKA) 10800
000029 S2=S1**2 10810
000030 C1=CN(0,AS,FKA) 10820
000031 D1=DN(0,AS,FKA) 10830
000032 C2=C1**2 10840
000033 D2=D1**2 10850
000034 DC1=D1/C1 10860
000035 DC2=D2/C2 10870
000036 SDC=S2*DC2 10880
000037 ROM=2.*E1-AS-S1*DC1+AS*SDC 10890
000038 GAMMA=6.*AS*ROM 10900
000039 R=GAMMA 10910
000040 SCD=SDC 10920
000041 BX=AS 10930
000042 60 TO 99 10940
000043 44 CONTINUE 10950
C C - FOR J-H II-1 - 10960
C C 10970
000044 FKA=FK-1.E+1 10980
000045 FKA=FK**2 10990
C C 11000
000046 A=1.+FKA 11010
000047 B=A/(3.+FKA) 11020
000048 S=SQRT(B) 11030
000049 AS=ARCSN(S,FKA) 11040
000050 E1=E(AS,FKA) 11050
000051 S1=SN(0,AS,FKA) 11060
000052 D1=DN(0,AS,FKA) 11070
000053 S2=S1**2 11080
000054 D2=D1**2 11090
000055 ROM=E1-AS*D2 11100
000056 GAMMA=6.*AS*ROM 11110
000057 BX=AS 11120
000058 SCD=S2 11130
000059 60 TO 99 11140
000060 22 CONTINUE 11150
000061 IF(FK.LT.-1.E+1) 60 TO 33 11160
C C - FOR J-H III-1 - 11170
C C 11180
000062 FKA=FK 11190
000063 FKA=FK**2 11200
000064 TK=FKA 11210
000065 FKA=TK**2 11220
000066 IF(BX.EQ.0.) 60 TO 1 11230
000067 BS=BK 60 TO 2 11240
000068 1 CONTINUE 11250
000069 A=(1.+TK)/(3.+TK) 11260
000070 B=(A-1.)/(A*TK-1.) 11270
000071 S=SQRT(B) 11280
000072 BS=ARCSN(S,FKA) 11290
000073 2 CONTINUE 11300
000074 S1=SN(0,BS,FKA) 11310
000075 C1=CN(0,BS,FKA) 11320
000076 D1=DN(0,BS,FKA) 11330
000077 E1=E(BS,FKA) 11340
000078 CD1=C1/D1 11350
000079 C2=C1**2 11360
000080 D2=D1**2 11370
000081 CD2=C2/D2 11380
000082 ROM=E1-TK*S1*CD1-(1.-TK)*BS/D2 11390
000083 GAMMA=6.*BS*ROM 11400
000084 R=GAMMA 11410
000085 T=0. 11420
000086 IF(BX.EQ.0.) 60 TO 3 11430
000087 Q=1.+TK-3.*TK*CD2 11440
000088 QS=SQRT(Q) 11450
000089 T=BS*QS 11460
000090 3 CONTINUE 11470
000091 BX=BS 11480
000092 SCD=CD2 60 TO 99 11490
000093 33 CONTINUE 11500
C C - ASYMPTOTIC PROFILE FOR LARGE R - 11510
C C 11520
000094 BX=0. 11530
000095 GAMMA=FK+1.E+1 11540
C C 11550
000096 ROM=GAMMA 11560
000097 SCD=0. 60 TO 99 11570
C C 11580
000098 99 CONTINUE 11590
000099 FK=SPK 11600
C C 11610
000101 RETURN 11620
000102 END 11630
000103 11640
000104 11650
11660
11670
11680
11690
11700
11710

```

```

000001 SUBROUTINE UPROF(J,X,FK,BX,T,R,U) 11720
C C C - VELOCITY PROFILE AND ITS DERIVATIVES - 11730
000002 IMPLICIT REAL*8(A-N,O-Z) 11740
000003 COMMON 11750
000004 *FEP/ DD1,DD2,DD3,DD4 11760
000005 CDSH(A)=DCDSH(A) 11770
000006 TANH(A)=DTANH(A) 11780
000007 SQR(A)=DSQR(A) 11790
000008 SFK=FK 11800
C C C IF(FK.NE.O.) 60 TO 11 11810
- PLANE POISEUILLE FLOW - 11820
000009 XX=X**2 11830
000010 IF(J.EQ.O) S=1.-XX 11840
000011 IF(J.EQ.O) 60 TO 99 11850
000012 IF(J.EQ.1) S=-2.*X 11860
000013 IF(J.EQ.1) 60 TO 99 11870
000014 IF(J.EQ.2) S=-2. 11880
000015 IF(J.EQ.2) 60 TO 99 11890
000016 IF(J.EQ.3) S=0. 11900
000017 IF(J.EQ.3) 60 TO 99 11910
000018 IF(J.EQ.4) S=0. 11920
000019 60 TO 99 11930
000020 11 CONTINUE 11940
000021 IF(FK.LT.O.) 60 TO 22 11950
000022 IF(FK.GE.1.E+1) 60 TO 44 11960
C C C - J-H FLOW IN DIVERGING TYPE - 12000
- J-H I - 12010
000023 RDN=T 12020
000024 SDC=R 12030
000025 AS=BK 12040
000026 YA=AX 12050
000027 SM1=SN(O,Y,FK) 12060
000028 CM1=CN(O,Y,FK) 12070
000029 DM1=DN(O,Y,FK) 12080
000030 SM2=SN1**2 12090
000031 CM2=CM1**2 12100
000032 DM2=DM1**2 12110
000033 DC=DM2/CM2 12120
000034 IF(J.EQ.O) 12130
* S=AS/RDN*(SDC-SM2+DC) 60 TO 99 12140
IF(J.EQ.O) 12150
000035 12160
C C C SD=SM1 12170
000036 CD=CM1 12180
000037 DD=DM1 12190
000038 S1=SM(1,Y,FK) 12200
000039 C1=CN(1,Y,FK) 12210
000040 D1=DN(1,Y,FK) 12220
000041 S2=0. 12230
000042 C2=0. 12240
000043 D2=0. 12250
000044 S3=0. 12260
000045 12270
C C C C3=0. 12300
000046 D3=0. 12310
000047 S4=0. 12320
000048 C4=0. 12330
000049 D4=0. 12340
000050 IF(J.EQ.1) S=F2(1,SD,S1,S2,S3,S4,CD,C1,C2,C3,C4,DD,D1,D2,D3,D4) 12350
* AS**2/RDN*(-1.) 12360
000051 IF(J.EQ.1) 60 TO 99 12370
C C C S2=SM(2,Y,FK) 12380
000052 C2=CN(2,Y,FK) 12390
000053 D2=DN(2,Y,FK) 12400
000054 IF(J.EQ.2) S=F2(2,SD,S1,S2,S3,S4,CD,C1,C2,C3,C4,DD,D1,D2,D3,D4) 12410
* AS**3/RDN*(-1.) 12420
000055 IF(J.EQ.2) 60 TO 99 12430
C C C S3=SM(3,Y,FK) 12440
000056 C3=CN(3,Y,FK) 12450
000057 D3=DN(3,Y,FK) 12460
000058 IF(J.EQ.3) S=F2(3,SD,S1,S2,S3,S4,CD,C1,C2,C3,C4,DD,D1,D2,D3,D4) 12470
* AS**4/RDN*(-1.) 12480
000059 IF(J.EQ.3) 60 TO 99 12490
C C C S4=SM(4,Y,FK) 12500
000060 C4=CN(4,Y,FK) 12510
000061 D4=DN(4,Y,FK) 12520
000062 IF(J.EQ.4) S=F2(4,SD,S1,S2,S3,S4,CD,C1,C2,C3,C4,DD,D1,D2,D3,D4) 12530
* AS**5/RDN*(-1.) 60 TO 99 12540
000063 12550
000064 44 CONTINUE 12560
C C C - J-H II-1 - 12570
000065 FK=FK-1.E+1 12580
000066 SCD=R 12590
000067 AS=BK 12600
000068 FKA=FK**2 12610
000069 YA=AX 12620
000070 SM1=SN(O,Y,FK) 12630
000071 CM1=CN(O,Y,FK) 12640
000072 SM2=SM1**2 12650
000073 IF(J.EQ.O) 12660
* S=FK*AS/RDN*(SCD-SM2) 60 TO 99 12670
000074 IF(J.EQ.O) 12680
000075 IF(J.NE.O) S=0. 60 TO 99 12690
000076 IF(J.NE.O) 60 TO 99 12700
C C C - J-H FLOW IN CONVERGING TYPE - 12710
000077 12720
000078 22 CONTINUE 12730
000079 IF(FK.LE.-1.E+1) 60 TO 33 12740
C C C - EXACT PROFILES - 12750
- J-H III-1 - 12760
000080 12770
000081 12780
000082 12790
000083 12800
000084 12810
C C C FK=FK 12820
000085 TK=TK**2 12830
000086 RDN=T 12840

```

```

000085      CD2=R          12880
000086      B5=B5X        12890
000087      Y=B5*X       12900
000088      CN1=CN(0,Y,FK) 12910
000089      DN1=DN(0,Y,FK) 12920
000090      CN2=CN1+2     12930
000091      DN2=DN1+2     12940
000092      CD=CN2/DN2   12950
C
000093      IF(J.EQ.0) S=TK*B5/RDW*(CD2-CD) 12960
000094      IF(J.EQ.0)   12970
GO TO 99 12980
C
000095      CO=CN1       12990
000096      DO=DN1       13000
000097      C1=CN(1,Y,FK) 13010
000098      D1=DN(1,Y,FK) 13020
000099      C2=0.        13030
000100      D2=0.        13040
000101      C3=0.        13050
000102      D3=0.        13060
000103      C4=0.        13070
000104      D4=0.        13080
000105      IF(J.EQ.1) S=F1(1,CO,C1,C2,C3,C4,DO,D1,D2,D3,D4) 13090
*          *TK*B5=2/RDW*(-1.) 13100
000106      IF(J.EQ.1)   13110
000107      C2=CN(2,Y,FK) 13120
000108      D2=DN(2,Y,FK) 13130
000109      IF(J.EQ.2) S=F1(2,CO,C1,C2,C3,C4,DO,D1,D2,D3,D4) 13140
*          *TK*B5=3/RDW*(-1.) 13150
000110      IF(J.EQ.2)   13160
GO TO 99 13170
C
000111      C3=CN(3,Y,FK) 13180
000112      D3=DN(3,Y,FK) 13190
000113      IF(J.EQ.3) S=F1(3,CO,C1,C2,C3,C4,DO,D1,D2,D3,D4) 13200
*          *TK*B5=4/RDW*(-1.) 13210
000114      IF(J.EQ.3)   13220
GO TO 99 13230
C
000115      C4=CN(4,Y,FK) 13240
000116      D4=DN(4,Y,FK) 13250
000117      IF(J.EQ.4) S=F1(4,CO,C1,C2,C3,C4,DO,D1,D2,D3,D4) 13260
*          *TK*B5=5/RDW*(-1.) 13270
000118      IF(J.EQ.4)   13280
GO TO 99 13290
000119      ** CONTINUE 13300
C
C          - ASYMPTOTIC PROFILE FOR LARGE R - 13310
C
000120      T=FK+1.E+1    13320
000121      N1=1.+K       13330
000122      TR=T         13340
000123      TT=0.5*TR    13350
000124      TTT=TT       13360
000125      IF(TTT.LE.0.) TTT=-TT 13370
000126      TRDQ=SQRT(TTT) 13380
000127      B=2./B0      13390
000128      B=SQRT(B)   13400
000129      B1=AMTAN(B) 13410
000130      THETA=TRDQ*T+1*B1 13420
000131      B2=TANH(THETA) 13430
C
000132      B3=B2+2       13440
000133      IF(J.EQ.0) S=3.+B3-2. 13450
000134      IF(J.EQ.0)   13460
GO TO 99 13470
000135      B4=COSH(THETA) 13480
000136      B5=B4+2       13490
000137      IF(J.EQ.1) S=B4+TRDQ+B2/B5 13500
000138      IF(J.EQ.1)   13510
GO TO 99 13520
000139      IF(J.EQ.2) S=-6.+TT*(1./B5-2.+B3)/B5 13530
000140      IF(J.EQ.2)   13540
GO TO 99 13550
000141      IF(J.EQ.3) S=-24.*(B2+B3-2.+B2/B5)/B5+TRDQ+TT 13560
000142      IF(J.EQ.3)   13570
GO TO 99 13580
000143      B6=B5+2       13590
000144      IF(J.EQ.4) S=24.+TT*B6-2*(1-2.+B3+2*11.*B3/B5-2./B6)/B5 13600
000145      ** CONTINUE 13610
000146      U=S          13620
000147      FK=B*FK      13630
C
600 FORMAT(10X,'S,ASORBS,S1,E1,ADU',5E15.6) 13640
000149      RETURN     13650
000150      END         13660

```

```

000001      DOUBLE PRECISION FUNCTION AMTAN(X)
C
C
C
C
000002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
000003      ALOG(A)=DLOG(A)
000004      A=(1.+X)/(1.-X)
000005      AMTAN=0.5*ALOG(A)
C
000006      RETURN
000007      END

```

13660
13670
13680
13690
13700
13710
13720
13730
13740
13750
13760
13770
13780

```

000001      DOUBLE PRECISION FUNCTION ARCSN(X,FK)
C
C
C
C
000002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
000003      COMMON
000004      *FEP/ DD1,DD2,DD3,DD4
000005      SORT(A)=DSORT(A)
000006      ARCSN(A)=DARCSN(A)
000007      ARSIN(A)=DARSIN(A)
000008      CMK=DD1
000009      CK=DD2
000010      Q=DD4
000011      CRK=FK**2
000012      XR=**2
000013      ONE=1.
000014      PAI=2.*ARSIN(ONE)
000015      A=SQRT(1.-XR+CK)
000016      B=SQRT(CMK)
000017      C=(A-B)/(A+B)
000018      D=0.5+C/Q
000019      E=ARCSN(D)
000020      V=0.5*PI/PAI
000021      U=2.*C*A*V
000022      UU=ARCSN2(U,FK,X)
000023      U=UU
000024      ARCSN=U
C
000025      RETURN
000026      END

```

13790
13800
13810
13820
13830
13840
13850
13860
13870
13880
13890
13900
13910
13920
13930
13940
13950
13960
13970
13980
13990
14000
14010
14020
14030
14040
14050
14060
14070
14080
14090

```

000001      DOUBLE PRECISION FUNCTION ARCSN2(XD,FK,CR)
C
C
C
C
000002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
000003      COMMON
000004      *FEP/ DD1,DD2,DD3,DD4
000005      SORT(A)=DSORT(A)
000006      KKF=0
000007      IF(CR.GE.0.97) KKF=13
000008      AA=CR
000009      IF(KKF.EQ.13) CR=SQRT(1.-CR**2)
000010      NN=500
000011      DO 1 I=1,NN
000012      UI=SN(1,X,FK)
000013      IF(KKF.EQ.13) UI=CN(1,X,FK)
000014      IF(I.EQ.1) X=X+CR/UI
000015      IF(I.EQ.1)
000016      U=SN(D,X,FK)
000017      IF(KKF.EQ.13) U=CN(D,X,FK)
000018      X=X+CR/UI-U/UI
000019      3 CONTINUE
000020      F1=SN(D,X,FK)
000021      IF(KKF.EQ.13) F1=CN(D,X,FK)
000022      IF(I.EQ.1)
000023      F2=F1-F1
000024      IF(F21.LT.0.) F21=F21
000025      IF(F21.LT.1.E-8)
000026      2 F2=F1
000027      1 CONTINUE
000028      99 CONTINUE
C
C
C
C
000029      CR=DD2
000030      30 CONTINUE
000031      IF(X.LE.0.) X=-X
000032      IF(X.LE.-CK)
000033      IF(X.LE.-2.*CK) X=2.*CK-X
000034      IF(X.GT.2.*CK)
000035      20 CONTINUE
000036      X=X-4.*CK
000037      IF(X.GE.2.*CK)
000038      60 TO 20
000039      10 CONTINUE
C
000041      CR=AA
000042      ARCSN2=X
C
000043      RETURN
000044      END

```

14100
14110
14120
14130
14140
14150
14160
14170
14180
14190
14200
14210
14220
14230
14240
14250
14260
14270
14280
14290
14300
14310
14320
14330
14340
14350
14360
14370
14380
14390
14400
14410
14420
14430
14440
14450
14460
14470
14480
14490
14500
14510
14520
14530
14540
14550
14560
14570
14580
14590
14600
14610
14620
14630

JAERI-M 9164

000001	DOUBLE PRECISION FUNCTION	14440
	*F1(I,CO,C1,C2,C3,C4,DO,D1,D2,D3,D4)	14450
	- DERIVATIVES OF CD=2 I DC=2 -	14460
	CD=2 : F1(I,C*5,D*5)	14470
	DC=2 : F1(I,D*5,C*5)	14480
000002	IMPLICIT REAL*8(A-M,D-Z)	14700
000003	A=1./DO	14710
000004	CO=CDO=2	14720
000005	AZ=A=2	14730
000006	A3=A=3	14740
000007	IF(I.EQ.1) F=2.*C1*CO*A2-2.*CO*D1*A3	14750
000008	IF(I.EQ.1) GO TO 99	14760
000009	C12=C1=2	14770
000010	D12=D1=2	14780
000011	A4=A=4	14790
000012	IF(I.EQ.2) F=2.*C2*CO*A2+2.*C12*A2-8.*C1*D1*CO*A3	14800
000013	*6.*D12*CO2*A4-2.*CO2*D2*A3	14810
000014	IF(I.EQ.2) GO TO 99	14820
000015	C	14830
000016	D13=D1=3	14840
000017	A5=A=5	14850
000018	IF(I.EQ.3) F=2.*C3*CO*A2+6.*C2*C1*A2-12.*C2*D1*CO*A3	14860
000019	-12.*C12*D1*CO*A4-24.*C1*D2*CO*A3+36.*C1*D2*CO*A4	14870
000020	+18.*D2*D1*CO2*A4-24.*D13*CO2*A5-2.*D3*CO2*A3	14880
000021	IF(I.EQ.3) GO TO 99	14890
000022	C	14900
000023	D22=D2=2	14910
000024	C22=C2=2	14920
000025	D14=D1=4	14930
000026	A6=A=6	14940
000027	IF(I.EQ.4) F=2.*C4*CO*A2+8.*C3*C1*A2-16.*C3*D1*CO*A3	14950
000028	*8.*C22*A2-8.*C2*C1*D1*A3-24.*C1*D2*CO*A3	14960
000029	+72.*C2*D12*CO2*A4-24.*C12*D2*A3+72.*C12*D12*A4	14970
000030	-16.*C1*D3*CO*A3+144.*C1*D2*D1*CO*A4	14980
000031	-192.*C1*D13*CO2*A4+24.*D3*D1*CO2*A4	14990
000032	+18.*D22*CO2*A4-144.*D2*D12*CO2*A5	15000
000033	+120.*D14*CO2*A6-2.*D4*CO2*A3	15010
000034	99 CONTINUE	15020
000035	F1=F	15030
000036	C	15040
000037	RETURN	15050
000038	END	15060

000001	DOUBLE PRECISION FUNCTION	15100
	*F2(J,S0,S1,S2,S3,S4,CO,C1,C2,C3,C4,DO,D1,D2,D3,D4)	15110
	- DERIVATIVES OF (SM=CO)=2 -	15120
	IMPLICIT REAL*8(A-M,D-Z)	15130
000002	GO=DO/CO	15140
000003	C1=F1(I,DO,D1,D2,D3,D4,CO,C1,C2,C3,C4)	15150
000004	S02=S0=2	15160
000005	IF(J.EQ.1) F=2.*S1*S0*GO*S02+6	15170
000006	IF(J.EQ.1) GO TO 99	15180
000007	C	15190
000008	G2=F1(I2,DO,D1,D2,D3,D4,CO,C1,C2,C3,C4)	15200
000009	S12=S1=2	15210
000010	IF(J.EQ.2) F=2.*S2*S0*GO+2.*S12*GO+4.*S1*S0*G1+S02*G2	15220
000011	IF(J.EQ.2) GO TO 99	15230
000012	C	15240
000013	G3=F1(I3,DO,D1,D2,D3,D4,CO,C1,C2,C3,C4)	15250
000014	IF(J.EQ.3) F=2.*S3*S0*GO+6.*S2*S1*GO+8.*S2*S0*G1+6.*S12*G1	15260
000015	*6.*S1*S0*G2+S02*G3	15270
000016	IF(J.EQ.3) GO TO 99	15280
000017	C	15290
000018	G4=F1(I4,DO,D1,D2,D3,D4,CO,C1,C2,C3,C4)	15300
000019	S32=S3=2	15310
000020	IF(J.EQ.4) F=2.*S4*S0*GO+8.*S3*S1*GO+8.*S3*S0*G1+24.*S2*S1*G1	15320
000021	+6.*S22*GO+12.*S2*S0*G2+12.*S12*G2+8.*S1*S0*G3	15330
000022	+S02*G4	15340
000023	99 CONTINUE	15350
000024	F2=F	15360
000025	C	15370
000026	RETURN	15380
000027	END	15390

```

000001      DOUBLE PRECISION FUNCTION SM(I,U,FK)              15430
    C C C C
    - ELLIPTIC FUNCTION OF FIRST KIND 1
    - JACOBIAN ELLIPTIC FUNCTION SM(U,K) AND ITS DERIVATIVES -15440
    15470
000002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
000003      COMMON
    *EF/ DD1,DD2,DD3,DD4
    SORT(A)=DSQRT(A)
000004      CK=DD2
000005      G=DD4
000006      A=SQRT(FK)
000007      CKK=FK**2
000008      V=U*G./CK
000009      C
000010      SN=THETA(1,V,G)/(THETA(4,V,G)+A)
000011      S=SN
000012      IF(I.EQ.0) GO TO 99
000013      C=CN(O,U,FK)
000014      D=DN(O,U,FK)
000015      SM=C/D
000016      S1=SN
000017      IF(I.EQ.1) GO TO 99
000018      CC=C**2
000019      DD=D**2
000020      SM=-S*(DD*CKK+CC)
000021      S2=SN
000022      IF(I.EQ.2) GO TO 99
000023      S3=S**2
000024      SM=C*(4.*CKK+S3-DD-CKK*CC)
000025      IF(I.EQ.3) GO TO 99
000026      SM=-S*(4.*CKK+S3*DD**4.*CKK**2*S3*CC-DD**2
    * -(CKK*CC)**2-14.*CKK*CC*DD)
000027      GO TO 99
000028      C 99 CONTINUE
000029      RETURN
000030      END
    15470
    15700
    15800
    15810

000001      DOUBLE PRECISION FUNCTION CN(I,U,FK)              15820
    C C C C
    - ELLIPTIC FUNCTION OF FIRST KIND 1
    - JACOBIAN ELLIPTIC FUNCTION CN(U,K) AND ITS DERIVATIVES -15830
    15860
000002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
000003      COMMON
    *EF/ DD1,DD2,DD3,DD4
    SORT(A)=DSQRT(A)
000004      CK=DD1
000005      CK=DD2
000006      G=DD4
000007      A=SQRT(FK)
000008      B=SQRT(CKK)
000009      T=B/A
000010      V=U*G./CK
000011      CKK=FK**2
000012      C
000013      CN=T*THETA(2,V,G)/THETA(4,V,G)
000014      C=CN
000015      IF(I.EQ.0) GO TO 99
000016      S=SN(O,U,FK)
000017      D=DN(O,U,FK)
000018      CN=-S/D
000019      C1=CN
000020      IF(I.EQ.1) GO TO 99
000021      S3=S**2
000022      DD=D**2
000023      CN=C*(DD-CKK*S3)
000024      C2=CN
000025      IF(I.EQ.2) GO TO 99
000026      CN=-C1*(DD-CKK*S3)-2.*C1*(-2.*CKK*S+C=D)
000027      IF(I.EQ.3) GO TO 99
000028      CC=C**2
000029      CN=-C2*(DD-CKK*S3)-4.*C1*(-2.*CKK*S+C=D)
    * -2.*C1-CKK*DD*(CC-S3)+CKK**2*S3*CC
    * -CKK*S3*(DD+CKK*CC)-CKK*CC*DD)
000030      GO TO 99
000031      C 99 CONTINUE
000032      RETURN
000033      END
    16000
    16010
    16020
    16030
    16040
    16050
    16060
    16070
    16080
    16090
    16100
    16110
    16120
    16130
    16140
    16150
    16160
    16170
    16180
    16190
    16200
    16210
    16220
    16230

000001      DOUBLE PRECISION FUNCTION DN(I,U,FK)              16240
    C C C C
    - ELLIPTIC FUNCTION OF FIRST KIND 1
    - JACOBIAN ELLIPTIC FUNCTION DN(U,K) AND ITS DERIVATIVES -16250
    16280
000002      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
000003      COMMON
    *EF/ DD1,DD2,DD3,DD4
    SORT(A)=DSQRT(A)
000004      CK=DD1
000005      CK=DD2
000006      G=DD4
000007      A=SQRT(CKK)
000008      V=U*G./CK
000009      CKK=FK**2
000010      C
000011      DN=A*THETA(3,V,G)/THETA(4,V,G)
000012      D=DN
000013      IF(I.EQ.0) GO TO 99
000014      S=SN(O,U,FK)
000015      C=CN(O,U,FK)
000016      DN=-CKK*S/C
000017      D1=DN
000018      IF(I.EQ.1) GO TO 99
000019      S3=S**2
000020      CC=C**2
000021      DN=-CKK*D*(CC-S3)
000022      D2=DN
000023      IF(I.EQ.2) GO TO 99
000024      DD=D**2
000025      DN=-CKK*S*C*(CKK*(S3-CC)-4.*DD)
000026      IF(I.EQ.3) GO TO 99
000027      DN=-CKK*D*(14.*CKK*S3*CC-CKK*S3**2-CKK*CC**2
    * -4.*DD*CC**4.*S3*DD)
000028      GO TO 99
000029      C 99 CONTINUE
000030      RETURN
000031      END
    16300
    16310
    16320
    16330
    16340
    16350
    16360
    16370
    16380
    16390
    16400
    16410
    16420
    16430
    16440
    16450
    16460
    16470
    16480
    16490
    16500
    16510
    16520
    16530
    16540
    16550
    16560
    16570
    16580
    16590
    16600
    16610
    16620
    16630
    
```



```

000001 SUBROUTINE MODLUS(FK,CMK,CK,CGK,G) 17720
C 17730
C 17740
C 17750
C 17760
C 17770
C 17780
000002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z) 17790
000003 SQR1(A)=SQRT(A) 17800
000004 ALDB(A)=DLOG(A) 17810
000005 EXP(A)=DEXP(A) 17820
000006 ARSIN(A)=DARSIN(A) 17830
000007 J=0 17840
000008 IF(FK.LE.0.) 17850
000009 IF(FK.GE.1.) GO TO 66 17860
000010 ONE=1. 17870
000011 PAI=2.*ARSIN(ONE) 17880
000012 A=FK**2 17890
000013 CMK=SQR1(1.-A) 17900
000014 C=SQR1(CMK) 17910
000015 IF(FK.GE.0.01) 17920
000016 E=0.5*(1.-C)/(1.+C) GO TO 10 17930
000017 ES=E**5 17940
000018 E9=E**9 17950
000019 E13=E**13 17960
000020 E17=E**17 17970
000021 Q=E+2.*E5+15.*E9+150.*E13+1707.*E17 17980
000022 Q4=Q**4 17990
000023 Q16=Q**16 18000
000024 B=2.*(1.+2.*Q4+2.*Q16)/(1.+C) 18010
000025 CK=PAI*0.5*0**2 18020
000026 CGK=CK+ALOG(Q)/PAI 18030
000027 GO TO 20 18040
C 18050
C 18060
C 18070
C 18080
C 18090
C 18100
C 18110
C 18120
C 18130
C 18140
C 18150
C 18160
C 18170
C 18180
C 18190
C 18200
C 18210
C 18220
C 18230
C 18240
C 18250
C 18260
C 18270
C 18280
C 18290
000028 10 CONTINUE 18300
000029 CD=2./PAI 18310
000030 F1=FK 18320
000031 IF(J.EQ.1) F1=CMK 18330
000032 DO 1 I=1,500 18340
000033 F11=F1**2 18350
000034 F2=SQRT(1.-F11) 18360
000035 F20=1.+F2 18370
000036 F=0.5*F20 18380
000037 CD=CD*F 18390
000038 F1=-1.+2./F20 18400
000039 EPS=1.-F 18410
000040 IF(EPS.LE.0.) EPS=-EPS 18420
000041 IF(EPS.LE.1.E-8) GO TO 2 18430
000042 1 CONTINUE 18440
000043 2 CONTINUE 18450
000044 CD=1./CD 18460
000045 IF(J.EQ.1) 18470
000046 IF(J.EQ.0) CK=CD 18480
000047 IF(J.EQ.0) J=1 18490
000048 IF(J.EQ.1) GO TO 10 18500
000049 3 CONTINUE 18510
C 18520
C 18530
C 18540
C 18550
C 18560
C 18570
C 18580
C 18590
C 18600
C 18610
C 18620
C 18630
C 18640
C 18650
C 18660
C 18670
000050 CGK=CU 18680
000051 C1=-PAI*CGK/CK 18690
000052 Q=EXP(C1) 18700
000053 20 CONTINUE 18710
000054 GO TO 99 18720
000055 66 WRITE(6,600) 18730
000056 600 FORMAT(/,'X',*,' * * MODULUS FK IS OUT OF DOMAIN (0,1) * * *') 18740
000057 STOP 18750
000058 99 CONTINUE 18760
C 18770
C 18780
C 18790
C 18800
C 18810
C 18820
C 18830
C 18840
C 18850
C 18860
C 18870
C 18880
C 18890
C 18900
C 18910
C 18920
C 18930
C 18940
C 18950
C 18960
C 18970
C 18980
C 18990
C 19000
000001 DOUBLE PRECISION FUNCTION E(U,FK) 19020
C 19030
C 19040
C 19050
C 19060
C 19070
C 19080
C 19090
C 19100
C 19110
C 19120
C 19130
C 19140
C 19150
C 19160
C 19170
C 19180
C 19190
C 19200
C 19210
C 19220
C 19230
C 19240
C 19250
C 19260
C 19270
C 19280
C 19290
000002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z) 19300
000003 DIMENSION X(1001) 19310
000004 COMMON 19320
000005 * /EF/ DD1,DD2,DD3,DD4 19330
000006 NN=100 19340
000007 SN=NN 19350
000008 DELTA=U/NN 19360
000009 DO 1 J=1,NN 19370
000010 S=J 19380
000011 Z=DELTA*SJ 19390
000012 X(J+1)=DN(0,Z,FK)**2 19400
1 CONTINUE 19410
C 19420
C 19430
C 19440
C 19450
C 19460
C 19470
C 19480
C 19490
C 19500
C 19510
C 19520
C 19530
C 19540
C 19550
C 19560
C 19570
C 19580
C 19590
C 19600
C 19610
C 19620
C 19630
C 19640
C 19650
C 19660
C 19670
000013 X(1)=1. 19680
000014 E1=0. 19690
000015 DO 2 I=1,NN 19700
000016 E1=E1+0.5*(X(I+1)+X(I))*DELTA 19710
2 CONTINUE 19720
000017 E=E1 19730
000018 19740
C 19750
C 19760
C 19770
C 19780
C 19790
C 19800
C 19810
C 19820
C 19830
C 19840
C 19850
C 19860
C 19870
C 19880
C 19890
C 19900
C 19910
C 19920
C 19930
C 19940
C 19950
C 19960
C 19970
C 19980
C 19990
C 20000
000019 RETURN 19990
000020 END 20000

```

L3 入力データ, 出力データの例

J-H III, k = 0.95, $\gamma = -3.203$

入力データ

-0.95
0.
0.31 0.001
0.01e 0.000e
0.

出力データ (ここでの GAMMA は γ である)

*** K, CK, B, F, GAMMA, U		-0.950000E+00	0.255001E+01	0.141646E+01	-0.216069E-02	-0.228626E+01	0.140466E+01	***	
A	0.311000E+00	C	0.180000E-01	TFR	-0.665172E-01	TF1	0.455178E-01	K	0.302218E-06
A	0.311000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.218072E-01	TF1	0.435953E-01	K	0.342554E-06
A	0.311000E+00	C	0.204000E-01	TFR	0.193963E-01	TF1	0.418217E-01	K	0.386337E-06
A	0.311000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.574888E-01	TF1	0.401802E-01	K	0.433708E-06
A	0.311000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.926079E-01	TF1	0.386566E-01	K	0.484811E-06
A	0.311000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.125644E+00	TF1	0.372385E-01	K	0.539789E-06
A	0.311000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.156250E+00	TF1	0.359154E-01	K	0.598784E-06
A	0.311000E+00	C	0.244000E-01	TFR	0.184842E+00	TF1	0.346779E-01	K	0.661939E-06
A	0.312000E+00	C	0.189000E-01	TFR	-0.731167E-01	TF1	0.460872E-01	K	0.303189E-06
A	0.312000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.281305E-01	TF1	0.441410E-01	K	0.343655E-06
A	0.312000E+00	C	0.204000E-01	TFR	0.132280E-01	TF1	0.423455E-01	K	0.387579E-06
A	0.312000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.516564E-01	TF1	0.406837E-01	K	0.435103E-06
A	0.312000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.871945E-01	TF1	0.391412E-01	K	0.486370E-06
A	0.312000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.120235E+00	TF1	0.377056E-01	K	0.541524E-06
A	0.312000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.151030E+00	TF1	0.363661E-01	K	0.600709E-06
A	0.312000E+00	C	0.244000E-01	TFR	0.178800E+00	TF1	0.351133E-01	K	0.664068E-06
A	0.313000E+00	C	0.188000E-01	TFR	-0.797344E-01	TF1	0.466618E-01	K	0.304161E-06
A	0.313000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.344712E-01	TF1	0.446917E-01	K	0.344757E-06
A	0.313000E+00	C	0.204000E-01	TFR	0.724288E-02	TF1	0.428740E-01	K	0.388821E-06
A	0.313000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.458078E-01	TF1	0.411160E-01	K	0.436497E-06
A	0.313000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.815654E-01	TF1	0.396303E-01	K	0.487929E-06
A	0.313000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.114810E+00	TF1	0.381770E-01	K	0.543260E-06
A	0.313000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.145796E+00	TF1	0.368209E-01	K	0.602634E-06
A	0.313000E+00	C	0.244000E-01	TFR	0.174745E+00	TF1	0.355527E-01	K	0.666196E-06
A	0.314000E+00	C	0.188000E-01	TFR	-0.663703E-01	TF1	0.472416E-01	K	0.305133E-06
A	0.314000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.402293E-01	TF1	0.452473E-01	K	0.345898E-06
A	0.314000E+00	C	0.204000E-01	TFR	0.140950E-02	TF1	0.434073E-01	K	0.390063E-06
A	0.314000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.399430E-01	TF1	0.417044E-01	K	0.437892E-06
A	0.314000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.759208E-01	TF1	0.401236E-01	K	0.489488E-06
A	0.314000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.109370E+00	TF1	0.386526E-01	K	0.544996E-06
A	0.314000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.140548E+00	TF1	0.372799E-01	K	0.604560E-06
A	0.314000E+00	C	0.244000E-01	TFR	0.169675E+00	TF1	0.359960E-01	K	0.668325E-06
A	0.315000E+00	C	0.188000E-01	TFR	-0.930244E-01	TF1	0.478265E-01	K	0.306105E-06
A	0.315000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.472049E-01	TF1	0.458078E-01	K	0.346960E-06
A	0.315000E+00	C	0.204000E-01	TFR	-0.497773E-02	TF1	0.439454E-01	K	0.391306E-06
A	0.315000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.340621E-01	TF1	0.422217E-01	K	0.439286E-06
A	0.315000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.702606E-01	TF1	0.406217E-01	K	0.491047E-06
A	0.315000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.103916E+00	TF1	0.391325E-01	K	0.546731E-06
A	0.315000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.135284E+00	TF1	0.377430E-01	K	0.606485E-06
A	0.315000E+00	C	0.244000E-01	TFR	0.164591E+00	TF1	0.364434E-01	K	0.670453E-06
A	0.316000E+00	C	0.188000E-01	TFR	-0.996955E-01	TF1	0.484167E-01	K	0.307076E-06
A	0.316000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.535979E-01	TF1	0.463735E-01	K	0.348061E-06
A	0.316000E+00	C	0.204000E-01	TFR	-0.111132E-01	TF1	0.444883E-01	K	0.392548E-06
A	0.316000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.281650E-01	TF1	0.427436E-01	K	0.440681E-06
A	0.316000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.645848E-01	TF1	0.411241E-01	K	0.492606E-06
A	0.316000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.984457E-01	TF1	0.396167E-01	K	0.548467E-06
A	0.316000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.130007E+00	TF1	0.382102E-01	K	0.608410E-06
A	0.316000E+00	C	0.244000E-01	TFR	0.159493E+00	TF1	0.368947E-01	K	0.672581E-06
A	0.317000E+00	C	0.188000E-01	TFR	-0.106387E+00	TF1	0.490122E-01	K	0.308048E-06
A	0.317000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.600082E-01	TF1	0.469441E-01	K	0.349163E-06
A	0.317000E+00	C	0.204000E-01	TFR	-0.172630E-01	TF1	0.450361E-01	K	0.393790E-06
A	0.317000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.222519E-01	TF1	0.432702E-01	K	0.442076E-06
A	0.317000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.586935E-01	TF1	0.416310E-01	K	0.494165E-06
A	0.317000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.929609E-01	TF1	0.401053E-01	K	0.550203E-06
A	0.317000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.124715E+00	TF1	0.386817E-01	K	0.610336E-06
A	0.317000E+00	C	0.244000E-01	TFR	0.154381E+00	TF1	0.373502E-01	K	0.674710E-06
A	0.318000E+00	C	0.188000E-01	TFR	-0.113095E+00	TF1	0.496129E-01	K	0.309020E-06
A	0.318000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.664359E-01	TF1	0.475198E-01	K	0.350264E-06
A	0.318000E+00	C	0.204000E-01	TFR	-0.234341E-01	TF1	0.455887E-01	K	0.399032E-06
A	0.318000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.163227E-01	TF1	0.438014E-01	K	0.443470E-06
A	0.318000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.531867E-01	TF1	0.421424E-01	K	0.495723E-06
A	0.318000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.874811E-01	TF1	0.405982E-01	K	0.551938E-06
A	0.318000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.119408E+00	TF1	0.391573E-01	K	0.612261E-06
A	0.318000E+00	C	0.244000E-01	TFR	0.149255E+00	TF1	0.378097E-01	K	0.676836E-06
A	0.319000E+00	C	0.188000E-01	TFR	-0.119821E+00	TF1	0.502189E-01	K	0.309992E-06
A	0.319000E+00	C	0.196000E-01	TFR	-0.728809E-01	TF1	0.481006E-01	K	0.351366E-06
A	0.319000E+00	C	0.204000E-01	TFR	-0.296195E-01	TF1	0.461463E-01	K	0.396275E-06
A	0.319000E+00	C	0.212000E-01	TFR	0.103774E-01	TF1	0.443374E-01	K	0.444865E-06
A	0.319000E+00	C	0.220000E-01	TFR	0.474644E-01	TF1	0.426583E-01	K	0.497282E-06
A	0.319000E+00	C	0.228000E-01	TFR	0.819463E-01	TF1	0.410955E-01	K	0.553676E-06
A	0.319000E+00	C	0.236000E-01	TFR	0.114067E+00	TF1	0.396372E-01	K	0.614187E-06

以上の数値を複素平面上に $F(z)$ とともにプロットする。これらのうち \circ 印を付けたものが α を固定したときの複素平面上の交点に最も近い2つの (α, c) の組である。これらの (α, c) と、交点を作る2つの相隣る離散点 z_1, z_2 を抽出し、以下のように入力する。

入力データ

```

-0.95
100.
0.311
0.0206 0.0208
7.2 7.3
0.312
0.0206 0.021
7.1 7.2
0.312
0.0206 0.021
5.6 5.7
0.312
0.0206 0.021
5.7 5.8
0.313
0.0206 0.0212
5.5 5.6
0.313
0.0206 0.0212
7.1 7.2
0.313
0.0206 0.0212
5.6 5.7
0.314
0.0206 0.0212
5.5 5.6
0.314
0.0206 0.0212
7.1 7.2
0.314
0.0206 0.0212
5.8 5.9
0.315
0.0212 0.0214
5.5 5.6
0.315
0.0212 0.0214
7.1 7.2
0.315
0.0212 0.0214
5.7 6.
0.316
0.0212 0.0216
5.4 5.5
0.316
0.0212 0.0216
7. 7.1
0.316
0.0212 0.0216
5.9 6.
0.317
0.0214 0.0218
5.4 5.5
0.317
0.0214 0.0218
7. 7.1
0.317
0.0214 0.0218
5.9 6.
0.318
0.0214 0.0218
5.4 5.5
0.318
0.0214 0.0218
7. 7.1
0.318
0.0214 0.0218
6. 6.1
0.319
0.0216 0.022
5.4 5.5
0.319
0.0216 0.022
6.9 7.
0.319
0.0216 0.022
6. 6.1
0.322
0.022 0.0224
5.4 5.5
0.322
0.022 0.0224
6.9 7.
0.322
0.022 0.0224
6.1 6.
0.324
0.0222 0.0226
5.4 5.5
0.

```

出力データ

* * * < , < K, B, T, SAMMA, U -0.950000+00 0.2590010+01 0.141046L+01 -0.2160690-02 -0.2200260+01 0.1404640+01 * * *									
A	0.3110000+00	C	0.2060000-01	TFR	0.2919580-01	TFI	0.4139960-01	K	0.3978380-06
A	0.3110000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.3880790-01	TFI	0.4398540-01	K	0.4095650-06
ZC,CC	0.7241290+01		0.2075430-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	7.2	0.31100+00	0.20750-01	0.36630-01	0.41080-01	0.36610-01	0.41080-01	0.93330+09	0.0
A	0.3120000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.3265980-01	TFI	0.4149890-01	K	0.4108620-06
A	0.3120000+00	C	0.2100000-01	TFR	0.4234710-01	TFI	0.4108750-01	K	0.4228760-06
ZC,CC	0.7215330+01		0.2088470-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	7.2	0.31200+00	0.20520-01	0.36900-01	0.41320-01	0.36680-01	0.41320-01	0.90310+09	0.0
A	0.3120000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.3255980-01	TFI	0.4149890-01	K	0.4108820-06
A	0.3120000+00	C	0.2100000-01	TFR	0.4234710-01	TFI	0.4108750-01	K	0.4228760-06
ZC,CC	0.5714520+01		0.2102280-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.7	0.31200+00	0.21020-01	0.43420-01	0.41040-01	0.43430-01	0.41040-01	0.43990+09	0.0
A	0.3120000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.3255980-01	TFI	0.4149890-01	K	0.4108820-06
A	0.3120000+00	C	0.2100000-01	TFR	0.4234710-01	TFI	0.4108750-01	K	0.4228760-06
ZC,CC	0.5691550+01		0.2100740-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.7	0.31200+00	0.21010-01	0.42700-01	0.41070-01	0.42700-01	0.41070-01	0.43550+09	0.0
A	0.3130000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.2689520-01	TFI	0.4201700-01	K	0.4121990-06
A	0.3130000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.4500660-01	TFI	0.4119190-01	K	0.4364970-06
ZC,CC	0.5595720+01		0.2106090-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.6	0.31300+00	0.21060-01	0.39310-01	0.41480-01	0.39230-01	0.41480-01	0.40940+09	0.0
A	0.3130000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.2689520-01	TFI	0.4201700-01	K	0.4121990-06
A	0.3130000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.4500660-01	TFI	0.4119190-01	K	0.4364970-06
ZC,CC	0.7187320+01		0.2101810-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	7.2	0.31300+00	0.21020-01	0.37290-01	0.41560-01	0.37200-01	0.41570-01	0.87310+09	0.0
A	0.3130000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.2689520-01	TFI	0.4201700-01	K	0.4121990-06
A	0.3130000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.4500660-01	TFI	0.4119190-01	K	0.4364970-06
ZC,CC	0.5784450+01		0.2118730-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.8	0.31300+00	0.21150-01	0.45260-01	0.41220-01	0.45250-01	0.41220-01	0.44410+09	0.0
A	0.3140000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.2091400-01	TFI	0.4253980-01	K	0.4135160-06
A	0.3140000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.3994180-01	TFI	0.4170450-01	K	0.4378920-06
ZC,CC	0.5562530+01		0.2115970-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.6	0.31400+00	0.21160-01	0.38060-01	0.41790-01	0.38020-01	0.41790-01	0.39660+09	0.0
A	0.3140000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.2091400-01	TFI	0.4253980-01	K	0.4135160-06
A	0.3140000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.3994180-01	TFI	0.4170450-01	K	0.4378920-06
ZC,CC	0.7160200+01		0.2114940-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	7.2	0.31400+00	0.21150-01	0.37570-01	0.41810-01	0.37530-01	0.41810-01	0.84440+09	0.0
A	0.3140000+00	C	0.2080000-01	TFR	0.2091400-01	TFI	0.4253980-01	K	0.4135160-06
A	0.3140000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.3994180-01	TFI	0.4170450-01	K	0.4378920-06
ZC,CC	0.5225760+01		0.2132710-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.8	0.31400+00	0.21330-01	0.45840-01	0.41450-01	0.45990-01	0.41440-01	0.44350+09	0.0
A	0.3150000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.3406080-01	TFI	0.4222180-01	K	0.4392860-06
A	0.3150000+00	C	0.2140000-01	TFR	0.4336450-01	TFI	0.4181070-01	K	0.4518670-06
ZC,CC	0.5594170+01		0.2125910-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.5	0.31500+00	0.21260-01	0.36830-01	0.42100-01	0.36810-01	0.42100-01	0.84440+09	0.0
A	0.3150000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.3406080-01	TFI	0.4222180-01	K	0.4392860-06
A	0.3150000+00	C	0.2140000-01	TFR	0.4336450-01	TFI	0.4181070-01	K	0.4518670-06
ZC,CC	0.7132530+01		0.2128170-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	7.1	0.31500+00	0.21260-01	0.37330-01	0.42050-01	0.37860-01	0.42050-01	0.81650+09	0.0
A	0.3150000+00	C	0.2120000-01	TFR	0.3406080-01	TFI	0.4222180-01	K	0.4392860-06
A	0.3150000+00	C	0.2140000-01	TFR	0.4336450-01	TFI	0.4181070-01	K	0.4518670-06
ZC,CC	0.5873090+01		0.2147870-01						
Z,A,C,TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.9	0.31500+00	0.21460-01	0.46980-01	0.41650-01	0.47030-01	0.41650-01	0.44340+09	0.0

JAERI-M 9164

* * * K ₁ CK ₈ T ₁ GAMMA _U -0.950000D+00 0.259001D+01 0.141046D+01 -0.216069D-02 -0.228026D+01 0.140464D+01 * * *										
A	0.324000D+00	C	0.222000D-01	TFR	0.277424D-01	TFI	0.448815D-01	K	0.519011D-06	
A	0.324000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.455019D-01	TFI	0.440524D-01	K	0.547647D-06	
ZC,CC	0.663113D+01		0.225164D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	6.8		0.3240D+00	0.2252D-01	0.4164D-01	0.4422D-01	0.4179D-01	0.4423D-01	0.5886D+09	0.0
A	0.324000D+00	C	0.222000D-01	TFR	0.277424D-01	TFI	0.448815D-01	K	0.519011D-06	
A	0.324000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.455019D-01	TFI	0.440524D-01	K	0.547647D-06	
ZC,CC	0.618720D+01		0.226731D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.2		0.3240D+00	0.2267D-01	0.4868D-01	0.4390D-01	0.4275D-01	0.4390D-01	0.4283D+09	0.0
A	0.323000D+00	C	0.222000D-01	TFR	0.334872D-01	TFI	0.443474D-01	K	0.517409D-06	
A	0.323000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.511423D-01	TFI	0.435221D-01	K	0.545957D-06	
ZC,CC	0.540847D+01		0.221235D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.4		0.3230D+00	0.2212D-01	0.3004D-01	0.4451D-01	0.3011D-01	0.4450D-01	0.3090D+09	0.0
A	0.323000D+00	C	0.222000D-01	TFR	0.334872D-01	TFI	0.443474D-01	K	0.517409D-06	
A	0.323000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.511423D-01	TFI	0.435221D-01	K	0.545957D-06	
ZC,CC	0.637337D+01		0.223749D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	6.9		0.3230D+00	0.2237D-01	0.4129D-01	0.4399D-01	0.4121D-01	0.4399D-01	0.6129D+09	0.0
A	0.323000D+00	C	0.222000D-01	TFR	0.334872D-01	TFI	0.443474D-01	K	0.517409D-06	
A	0.323000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.511423D-01	TFI	0.435221D-01	K	0.545957D-06	
ZC,CC	0.415149D+01		0.225453D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	6.2		0.3230D+00	0.2255D-01	0.4877D-01	0.4364D-01	0.4873D-01	0.4364D-01	0.4295D+09	0.0
A	0.325000D+00	C	0.224000D-01	TFR	0.309940D-01	TFI	0.449970D-01	K	0.534846D-06	
A	0.325000D+00	C	0.228000D-01	TFR	0.485438D-01	TFI	0.441727D-01	K	0.564088D-06	
ZC,CC	0.539292D+01		0.223576D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.4		0.3250D+00	0.2236D-01	0.2910D-01	0.4509D-01	0.2913D-01	0.4508D-01	0.2949D+09	0.0
A	0.325000D+00	C	0.228000D-01	TFR	0.485438D-01	TFI	0.441727D-01	K	0.564088D-06	
A	0.325000D+00	C	0.224000D-01	TFR	0.309940D-01	TFI	0.449970D-01	K	0.534846D-06	
ZC,CC	0.678532D+01		0.226605D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	6.8		0.3250D+00	0.2266D-01	0.4249D-01	0.4446D-01	0.4242D-01	0.4446D-01	0.5641D+09	0.0
A	0.325000D+00	C	0.224000D-01	TFR	0.309940D-01	TFI	0.449970D-01	K	0.534846D-06	
A	0.325000D+00	C	0.228000D-01	TFR	0.485438D-01	TFI	0.441727D-01	K	0.564088D-06	
ZC,CC	0.623811D+01		0.227965D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.2		0.3250D+00	0.2280D-01	0.4848D-01	0.4418D-01	0.4848D-01	0.4418D-01	0.4304D+09	0.0
A	0.326000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.341764D-01	TFI	0.451147D-01	K	0.551027D-06	
A	0.326000D+00	C	0.230000D-01	TFR	0.515212D-01	TFI	0.442951D-01	K	0.580883D-06	
ZC,CC	0.538509D+01		0.224724D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.4		0.3260D+00	0.2247D-01	0.2851D-01	0.4538D-01	0.2864D-01	0.4538D-01	0.2883D+09	0.0
A	0.326000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.341764D-01	TFI	0.451147D-01	K	0.551027D-06	
A	0.326000D+00	C	0.230000D-01	TFR	0.515212D-01	TFI	0.442951D-01	K	0.580883D-06	
ZC,CC	0.672959D+01		0.228079D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	6.7		0.3260D+00	0.2281D-01	0.4327D-01	0.4469D-01	0.4319D-01	0.4469D-01	0.5381D+09	0.0
A	0.326000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.341764D-01	TFI	0.451147D-01	K	0.551027D-06	
A	0.326000D+00	C	0.230000D-01	TFR	0.515212D-01	TFI	0.442951D-01	K	0.580883D-06	
ZC,CC	0.628920D+01		0.229236D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	6.3		0.3260D+00	0.2292D-01	0.4825D-01	0.4445D-01	0.4821D-01	0.4445D-01	0.4326D+09	0.0
A	0.327000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.284913D-01	TFI	0.456527D-01	K	0.552718D-06	
A	0.327000D+00	C	0.230000D-01	TFR	0.459383D-01	TFI	0.448235D-01	K	0.582665D-06	
ZC,CC	0.537724D+01		0.225921D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.4		0.3270D+00	0.2259D-01	0.2814D-01	0.4567D-01	0.2815D-01	0.4567D-01	0.2816D+09	0.0
A	0.327000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.284913D-01	TFI	0.456527D-01	K	0.552718D-06	
A	0.327000D+00	C	0.230000D-01	TFR	0.459383D-01	TFI	0.448235D-01	K	0.582665D-06	
ZC,CC	0.665615D+01		0.229600D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	6.7		0.3270D+00	0.2296D-01	0.4422D-01	0.4491D-01	0.4419D-01	0.4491D-01	0.5089D+09	0.0
A	0.327000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.284913D-01	TFI	0.456527D-01	K	0.552718D-06	
A	0.327000D+00	C	0.230000D-01	TFR	0.459383D-01	TFI	0.448235D-01	K	0.582665D-06	
ZC,CC	0.636144D+01		0.230395D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	6.4		0.3270D+00	0.2304D-01	0.4759D-01	0.4474D-01	0.4762D-01	0.4474D-01	0.4396D+09	0.0
A	0.328000D+00	C	0.228000D-01	TFR	0.316431D-01	TFI	0.457723D-01	K	0.569295D-06	
A	0.328000D+00	C	0.226000D-01	TFR	0.227913D-01	TFI	0.461954D-01	K	0.554408D-06	
ZC,CC	0.536936D+01		0.227098D-01							
Z ₁ A ₁ C ₁ TFR,TFI,FR,FI,R,EV	5.4		0.3280D+00	0.2271D-01	0.2767D-01	0.4596D-01	0.2765D-01	0.4596D-01	0.2752D+09	0.0