JAERI-M
9197

保障措置システムの解析(Ⅰ)

1980年12月

猪川　浩次・西村　秀夫

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI－M 9197

保障措置システムの解析（Ⅰ）

日本原子力研究所動力炉開発・安全性研究管理部
猪川 浩次・西村 秀夫

（1980年10月24日受理）

伝統的計量管理とその検証理論に基づく現行保障措置システムのシステム・アナリシスを行なった。本報告書で取り扱ったのは施設者の計量データの検証方法，MUFの評価法，棚卸し頻度の決定法および査察計画法である。

JAERI-M 9197

Safeguards System Analysis (I)

Koji IKAWA and Hideo NISHIMURA

Division of Power Reactor Projects, JAERI

(Received October 24, 1980)

A system analysis on the implementing safeguards system based on the traditional materials accountancy was done. This report describes about verification methods applied to operator's measurement data, MUF evaluation method, theories on the decision of PIT frequency and designing of inspection plan.

Keywords: Existing Safeguards System, Paired Comparison Methods, Verification of MUF, Inspection Planning, Diversion Strategies, Inspection Strategies, Application of Game Theory to Safeguards.

目　　次

Contents

1. はじめに

核不拡散条約に基づく保障措置の目的は，そのモデル協定案（INFCIRC/153）(註)，第28条によれば，「有意量の核物質の平和目的以外の用途への転用をタイムリィに検出すること，および早期検知によりそのような転用の発生を抑止すること」にあると定義されている。又，保障措置の主要手段としては計量管理（Materials Accountancy）を用いることとされている。

本報告書は，保障措置のための計量管理システムに関して解析した結果を報告するものであるが，こゝで取り扱う計量管理システムは伝統的に用いられて来ている静的な計量管理に関するものであって，最近クローズアップして来ている「改良保障措置」のための動的計量管理あるいはNear-Real-Time Materials Accountancy等については言求していない。これについては　部分的には他の報告書(20)，(21)，(22)で取り扱っているが，総合的には本報告書の第2部で取り扱う予定である。

静的計量管理とは，物質収支をとるのにクリーン・アウト実在庫測定を基本戦略としているものであり，これは施設の操業への影響が多大であることから，年1～4回程度しか出来ないものである。転用の検出は，物質収支により確定するMUF（Material Unaccounted For－不明損失量と訳されている）によって行ないうるものであるから，検出可能な時間は短かくて3ケ月，長くて1年ということになり，これでは「早期探知」とは云い難い。これを改善するために動的計量管理が考えられるようになったのであるが，しかし，現行の保障措置は静的計量管理のみが実施経験をもつものであり，その意味に於て，その重要性は極めて高い。

本報告書は，昭和46年以来，著者等が行なって来た保障措置に関する研究成果を一区切りつけるために，昭和50年にまとめていた原稿を再検討して出版するものである。

＊IAEAの内部文書番号

2. 静的計量管理に基づく保障措置の基礎理論

2.1 概　要

保障措置の目的は，INFCIRC/153(註)，Article28によれば，「有意量の核物質の平和目的以外の用途への転用をタイムリィに検出すること，および早期検知によりそのような転用の発生を抑止すること」にあると定義されている。

こゝでひとつの物質収支区域（Material Balance Areaの略MBAと称する）を想定しよう。このMBAの物質収支期間の最大核物質取扱い量，測定・分析に係る誤差量，核物質の流れ，誤差の伝播などに関する情報は，そのMBAの所属する施設に関する設計情報（Design Information）によって査察者側に対して明らかにされている。それ故，ある物質収支期間において設計情報に記載された通りの操業がなされた場合には，その期間の物質収支にどの程度の誤差（MUF）が出て，その精度の限界（σ_{MUF}）はどの程度のものであるかゞ予想出来る。一方，実際の操業は必ずしも設計情報に記載された通りになるとは限らず，核物質取扱い量，計量に係わる誤差などは設計情報とは異なったものになる。此の期間の物質収支の結果，MUF_0というMUFが出たとする。又，精度の限界はσ_{MUF}の代りにS_{MUF}が得られたとする。このときS_{MUF}という計量誤差の限界からみて，MUF_0は計量誤差の内に入っているのか，それともMという有意量の核物質がその物質収支から脱落して行方不明になってMUF_0の中に入って来ているのか，これを統計検定理論を用いて判定することが出来る。又，σ_{MUF}は此のMBAの計量誤差の最大値を与えるものであるから，当然S_{MUF}はそれより小さい値でなければならないが，そうでない時には，核物質の処理量が設計情報に記載された最大値を超えたのか，それとも測定・分析・サンプリング等の誤差が設計情報の記載値を超えた，つまり劣悪な計量会計管理がなされたのか，あるいはそれらの両方であると結論される。このような場合には，もはやMUF_0の導出過程の信頼度は低く，従ってその値から，転用が在ったのかどうかを判定することは困難となってしまう。通常査察はこのようなことが発生しないようになされるものであって，核物質処理量の監視，計量管理の技術水準の維持を監視している。

一方，MUF_0が有意量Mを超えていることが確実になった場合には，そのMBAに対して査察者側の機関は警報を発し，それ相応の処置をとることになろうが，この有意量Mの大きさが原子爆弾1個を作る程に充分な大きさ，つまり，閾値TAを超えている場合には，その行方を求明すべく，何らかの特別な検証活動を開始することになろう。この場合，既にそれが原爆に変っていたのでは手遅れである。このような事態の発生を防ぐためには，棚卸しの期間の長さ，報告書提出のタイミング，通常査察のタイミング，検証活動における有意量MとTAの関係などに充分の配慮が必要となる。この点を定量的に考察したのがこの後で述べるいくつかの項で

（註）　核兵器不拡散条約（NPT）に基づく保障措置のモデル協定であって，INFCIRC はIAEAの内部文書を表わす略号である。

ある。

さらにもうひとつ重要なことがある。それは，報告されたMUF_0の値は有意量Mより小さく，S_{MUF} からみて計量誤差の範囲内であったとしよう。しかし，果して，MUF_0の値は正しいのかどうかの問題が残る。S_{MUF} の方は上述の通常査察により，査察者による独立測定によって確認出来るから，これは正しかったとしよう。このとき，MUF_0の値が正しいかどうかは，どうして検証するのか。これは通常査察によって，施設者の保存する（義務）記録データ（計量記録，運転記録）と，報告しているバッチデータの照合，ならびに査察者の独立測定の結果との間の差（D）によって検証することが出来る。これを常に実行出来るように，査察者は，通常査察に於て適切なサンプリング計画の下に核物質をサンプルし，施設者の測定データ（記録データとして残されているものであって，報告用に処理されたバッチデータではない）との間の差を検出し，その資料を基に，物質収支期間中の施設者の全測定量に対応する査察者の推定量を作成出来るようにしておかなくてはならない。このようにすることによって，施設者が，仮に転用をしながらそれを隠すようなデータを報告してMUFの帳尻だけを適当な値にする，すなわち，データの偽造をしたような場合にも，これを検出することが可能となる。

上記で問題になるのは査察者のサンプリング計画である。施設者を正直者であるとみなすか，潜在的転用意図者であるとみなすか，その取り扱いに依ってサンプリング計画は異なったものになってくる。転用をどんな場合にも厳重に防ぐためには，施設者は潜在的転用意図者であるとの仮設を立てなくてはならない。その場合にも，サンプリング計画は一義的には定まらない。何故ならば，転用者が，転用核物質をMUFの中に僅かづつ分散しているのか，S_{MUF} の中で誤差データを操作してその中に転用量を分散しているのか，それとも記録データを偽造して帳尻だけを合わせているのか，あるいは，これらの転用方法を適当にまぜ合わせているのか，など，転用意図者の戦略が問題になるからである。こゝに，査察者と潜在的転用意図者の戦略のぶつかり合いが発生し，それを解決するためにゲーム理論の適用が必要となってくる。

保障措置の技術的履行をするのにあたって，これを更に複雑にする問題がもうひとつある。上述の思想に基づいてサンプリング計画を立てたとしても，得られたサンプルサイズがあまりにも大きい場合，それは，実は正直者であって転用の意図も事実もなかった施設者にとっては大変な迷惑になるし，査察者にとっても，査察業務量が大きくて費用も無駄になってしまう。結局，費用対効果を考慮して，施設者の正常な操業を妨げないようなサンプリング計画を立てなくてはならない。この考慮はクリーン・アウト実在庫測定をベースとした棚卸しのタイミング，および頻度の決定に於てもなされなくてはならない。転用から原爆製造までの物理的時間を考慮したクリティカル・タイムの理論が実用化されていないのは，此の理論を適用すると，例えば高濃縮ウランあるいはプルトニウムを取扱うプラントは10日毎，低濃縮ウランや燃焼度の高い使用済燃料を用いるプラントでも1ヶ月毎に棚卸しをしなくてはならないという結論に到達してしまい，これでは正直者の正常操業をあまりにも妨げるものであるとして避けられたからである。(註) しかしながら，潜在的転用意図者にとっては棚卸し頻度の減少は大変有利な

（脚註） INFCE以来，再びクリティカル・タイム理論は別の形でクローズ・アップして来た。転用は転換時間以内に検出せよというIAEAのクライテリアが提案されたのである。このため，これに対処するための動的計量管理，あるいはNear-Real-Time計量管理の概念が顕れて来た。この概念では，クリーン・アウト実在庫測定の替りに，操業中の在庫測定技術を用いることになる。

戦略獲得になるから，結局査察側が，その思想上許容出来る範囲迄後退し，代わりに，より迷惑度の少ないサンプルサイズの増大を計るなどの点で，ある意味では，若干危険を覚悟の上で妥協せざる得なかったのである。この場合，査察者の検出力は若干下がることになる。この辺の取扱いは，保障措置を適用しようとする査察側の思想，立場によって，いろいろの変化がありうる。同じ査察側でも，ＩＡＥＡと国の立場の違いを微妙に反映するのはこの辺の取扱いである。

2.2 施設者の計量データの検証に関する理論

2.2.1 概　　要

機関の行なうべき検証活動の主なものは，各ＭＢＡで発生した不明損失量ＭＵＦに関する検証と，ＭＢＡ相互の間に発生する受払間差異Ｓ／ＲＤに関する検証である。この検証は，これらの中に転用とか盗難などのようなものが含まれているのか，それとも単なる計量誤差なのかの検証である。2.2節ではこれらの検証に必要とされる統計量と，予備的な検証理論について述べ，2.3節に於てＭＵＦの検証理論について述べることにする。尚，Ｓ／ＲＤの検証については，予備的な検証理論として後に出てくる対データ比較統計法の中で取扱う。（2.2節の一部については，参考文献(14)の中で詳述しているものがあり，それらについては本報告では概略ないしは一部のみを述べるのに止めた。）

2.2.2 ＭＵＦとその誤差分散 σ^2_{MUF} の定義と計算方法

(1) ＭＵＦの誤差分散の定義

あるＭＢＡに於て観測されたＭＵＦは一般に次のように表わされる量である。

$$MUF = BI + R - EI - S - W \qquad (2.2-1)$$

上式でＢＩは初期在庫，Ｒは受入量，ＥＩは末期在庫，Ｓは払出量そしてＷは測定済の廃棄物量のそれぞれ測定値である。これらの値は測定値であるためにすべて誤差を含んだものであり，従って観測値のＭＵＦも当然誤差を含んだものとなる。そこで，真のＭＵＦを MUF_T として上式を誤差を含んだ形に書き直すと以下のように表わせる。

$$MUF_T = (BI \pm \delta_{BI}) + (R \pm \delta_R) - (EI \pm \delta_{EI}) - (S - \delta_S) - (W \pm \delta_W) \qquad (2.2-2)$$

$$= MUF \pm \delta_{MUF} \qquad (2.2-3)$$

δ で表現されるものは通常の誤差論に従えば誤差限界と呼ばれるものである。上式に含まれる測定値がすべて正規分布に従う変数であると仮定すると，その標準偏差 σ によって誤差限界は

$$\delta = Z_{1-(\alpha/2)} \times \sigma \qquad (2.2-4)$$

で表わされるものである。たゞし，$Z_{1-(\alpha/2)}$ は有意水準 α（後述）における累積正規分布のパーセント点と呼ばれるものであり，これは累積正規分布表から読みとることが出来る。

正規分布をする変数の代数和はやはり正規分布をするので，ＭＵＦも正規分布をするものと考えることが出来る。従って，（2.2－3）式は

$$MUF_T = MUF \pm Z_{1-(\alpha/2)} \cdot \sigma_{MUF} \qquad (2.2-5)$$

と表わすことが出来る。なお，計量管理が完璧に実施され，転用，盗難，隠れた在庫などが無く，MUFを構成する要素が（2.2－2）式で表わされるものだけであるとき，真のMUF（MUF_T）の期待値は零である。このことはMUFの検証に重要な意味を持ってくることであり，これについては2.3節MUFの検証理論のところで詳述することにする。

さて，（2.2－5）式のσ_{MUF}はMUFの標準偏差と呼ばれるものであり，これはMUFの誤差分散σ^2_{MUF}により与えられる。これは（2.2－1）式の分散をとることにより

$$\sigma^2_{MUF} = \sigma^2_{BI} + \sigma^2_R + \sigma^2_{EI} + \sigma^2_S + \sigma^2_W \qquad (2.2-6)$$

の形で得られるものである。

右辺の各項を求めるにあたって，従来IAEAが提唱して来たモデル（これを通常モデルと呼ぶことにする）と，Jaech が提唱した詳細計算モデル[10]（これをJaech モデルと呼ぶことにする）がある。

(2) 通常モデルによるσ^2_{MUF}の計算法

（2.2－1）式の右辺各項は，通常の場合同じような形式で測定されるものと考えてさしつかえない。したがって，その誤差分散の算出方法も代表的なものについてだけ述べることにする。この意味で，（2.2－6）式の右辺の1項をσ^2_Xで表わす。

保障措置の対象となる核物質は，すべてバッチ毎に報告されることになっているが，測定は必ずしもバッチ毎ではない。ひとつのバッチは数個以上のアイテムで構成される場合が多く，そのようなバッチでは，まずアイテム毎に測定が行なわれ，それらの合計値がバッチの値として報告されることになる。バッチ毎の測定の場合，そのバッチにはアイテムが1個だけ入っているものとして取扱えばよいので，以下のσ^2_Xの計算方法は，アイテム毎の測定がなされるものと仮定する。

今，Xのカテゴリィ（例えばBI）に入る核物質がN個のバッチで構成されており，そのj番目のバッチにはK_j個のアイテムが含まれているものとする。バッチjのアイテムiに含まれている同位元素重量をX_{ij}で表わすとき，このカテゴリィに含まれる全同位元素重量Xは次式で表わすことが出来る。

$$X = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{K_j} X_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{K_j} G_{ij} \times P_{ij} \times C_{ij} \qquad (2.2-7)$$

たゞし，

G：核物質の重量。核物質がUO_2であればUO_2の重量

P：エレメント・ファクター（元素重量比，UO_2のときU/UO_2）

C：アイソトープ・ファクター（同位元素比，例えばU^{235}/U）

であり，これらは真値と測定誤差を用いて

$$\left.\begin{aligned} G_{ij} &= G^0_{ij} + \varepsilon_{ij} + \theta_j \\ P_{ij} &= P^0_{ij} + \eta_{ij} + \Delta_j \end{aligned}\right\} \qquad (2.2-8)$$

$$C_{ij} = C^0_{ij} + \zeta_{ij} + \gamma_j$$

のように表わすことが出来る。上式に於て，右辺第1項が真値，第2項はランダム・エラー，第3項はシステマティック，エラーであって，これはアイテムに依存しないものとしている。これらを用いてXを表わすと次のようになる。但し，2次以下の微小項を無視する。

$$X = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{K_j} \left[G^0_{ij} P^0_{ij} C^0_{ij} + P^0_{ij} C^0_{ij} \varepsilon_{ij} + C^0_{ij} G^0_{ij} \eta_{ij} + G^0_{ij} P^0_{ij} \zeta_{ij} \right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \theta_j \sum_{i=1}^{K_j} P^0_{ij} C^0_{ij} + \sum_{j=1}^{N} \Delta_j \sum_{i=1}^{K_j} C^0_{ij} G^0_{ij} + \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \sum_{i=1}^{K_j} G^0_{ij} P^0_{ij} \qquad (2.2-9)$$

したがって，求めるXの測定誤差分散 σ^2_X は

$$\sigma^2_X = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{K_j} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)^2 \sigma^2_{\varepsilon ij} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta_{ij}}\right)^2 \sigma^2_{\eta ij} + \left(\frac{\partial X}{\partial \zeta_{ij}}\right)^2 \sigma^2_{\zeta ij} \right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \theta_j}\right)^2 \sigma^2_{\theta j} + \left(\frac{\partial X}{\partial \Delta_j}\right)^2 \sigma^2_{\Delta j} + \left(\frac{\partial X}{\partial \gamma_j}\right)^2 \sigma^2_{\gamma j} \right] \qquad (2.2-10)$$

により求めることが出来る。途中経過を省略して結果だけを示すとこれは以下のように求められる。

$$\sigma^2_X = \sum_{j=1}^{N} (K_j G^0_j P^0_j C^0_j)^2 \left[\frac{1}{K_j} \left\{ \delta^2_{\varepsilon j} + \delta^2_{\eta j} + \delta^2_{\zeta j} \right\} + \left\{ \delta^2_{\theta j} + \delta^2_{\Delta j} + \delta^2_{\gamma j} \right\} \right] \qquad (2.2-11)$$

上式の $(K_j G^0_j P^0_j C^0_j)$ はバッチ j に含まれる真の同位元素重量であるが，この式の実際の適用にあたっては報告書に記載されたバッチデータを用いればよい。又，δ は変動係数と呼ばれるものであり，平均値 μ と標準偏差 σ により

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} \qquad (2.2-12)$$

で与えられるものである。尚，上記の算出にあたって，ランダムエラーの変動係数はアイテムに依らないものと仮定した。

測定がバッチ毎に行なわれない場合には，(2.2−11)式は簡単になり，以下のように与えられる。

$$\sigma^2_X = N^2 (G^0 P^0 C^0)^2 \left[\frac{1}{N} \left\{ \delta^2_\varepsilon + \delta^2_\eta + \delta^2_\zeta \right\} + \left\{ \delta^2_\theta + \delta^2_\Delta + \delta^2_\gamma \right\} \right. \qquad (2.2-13)$$

上式の $(G^0 P^0 C^0)$ はひとつのバッチに含まれる真の同位元素重量で，前と同様，報告書に記載のバッチデータを使用すればよい。又，δ はバッチに対する変動係数である。

σ^2_X をBI，R，EI，S，W について求め，その和をとれば σ^2_{MUF} を求めることが出来る。

(3) Jaech モデルによる σ^2_{MUF} の計算法

通常モデルでは測定，分析，サンプリングなどの間の誤差の相関々係をほとんど全く無視している。Jaech は，通常モデルのように σ^2_{MUF} をBI〜Wのような5つの項目にわけて，それぞれの分散を独自に求めるという方法を採用せずに，物質収支期間中に対象となった核物質の

測定，サンプリング，分析を逐一追跡し，そのプロセスで発生した誤差の伝播を考慮して，それぞれの対象核物質がもった誤差分散を求め，それらの総和でもって σ^2_{MUF} を算出している。この方法によると，通常モデルで無視した誤差の共分散も考慮され，得られる精度は高くなる。

このモデルで考えている測定操作には5つの基本型がある。即ち，重量測定あるいは容積推定，エレメント・ファクターを決めるためのサンプリングおよび分析，アイソトープ・ファクターを決めるためのサンプリングおよび分析である。また，各々の測定操作の型式に応じて，さらに特定の操作が決まってくる。その対応関係と操作の数を表2.2.1に示す。又，こゝで取扱う誤差の種類を表2.2.2に示す。このモデルでも誤差は変動係数によって表現する。（EFはエレメント・ファクター，IFはアイソトープ・ファクター）

表2.2.1　測定操作の基本型

型　　式	特　定　操　作
重量測定あるいは容積推定	スケールiによる重量測定或は容器iの容積　$i=1\sim n_i$
EFのためのサンプリング	物質型jからのサンプリング又はサンプリング法jによるサンプリング　$j=1\sim n_j$
EFのための分析	分析法　k　　$k=1\sim n_k$
IFのためのサンプリング	物質型ℓからのサンプリング又はサンプリング法ℓによるサンプリング　$\ell=1\sim n_\ell$
IFのための分析	分析法　m　　$m=1\sim n_m$

表2.2.2　変　動　係　数

測定操作	長　期 システマティック	短　期 システマティック	ラ　ン　ダ　ム
重量測定，容積推定	σ_δ	σ_ϕ	σ_ε
EF用サンプリング	σ_Δ	σ_ψ	σ_η
EF用分析	σ_θ	σ_β	σ_ω
IF用サンプリング	σ_λ	σ_π	σ_μ
IF用分析	σ_γ	σ_α	σ_ν

このモデルでは測定操作はすべて長期および短期システマティック・エラーおよびランダム・エラーをもつことになるが，実際の適用にあたっては対応する変動係数が零になることもある。

ある特定の測定操作が行なわれると，対応した誤差要素の型が決まり，それらの組み合わせによりひとつの分散項が作られる。MUFはこのような測定操作により測定ないしは推定された核物質の代数和で与えられるものであるから，その測定誤差による分散 σ^2_{MUF} はそれぞれの測定操作に於て発生した上記の誤差分散項の代数和として与えられるものとなる。即ち，一般式で表わすと，

$$\sigma^2_{MUF}=\sum_{i=1}^{n_i}\left[C_{\delta i}\,\sigma^2_{\delta i}+C_{\phi i}\,\sigma^2_{\phi i}+C_{\varepsilon i}\,\sigma^2_{\varepsilon i}\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{n_j}\left[C_{\Delta j}\,\sigma^2_{\Delta j}+C_{\psi j}\,\sigma^2_{\psi j}+C_{\eta j}\,\sigma^2_{\eta j}\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\sum_{m=1}^{n_m}\left[C_{\gamma m}\,\sigma^2_{\gamma m}+C_{\alpha m}\,\sigma^2_{\alpha m}+C_{\nu m}\,\sigma^2_{\nu m}\right] \qquad (2.2-14)$$

問題は，特定の測定操作の組み合わせから，上式の係数Cの値を決めることであるが，こゝでは通常の場合がそうであるように，短期システマティック・エラーに関するものを除いたCの求め方を示しておくことにする。短期システマティック・エラーの考慮は，Jaech モデルの特徴であり，精密さの表現になっているものではあるが，これを除いたとしても，測定のプロセスを追跡するというこのモデルの最大の特色が消えることはない。

a）重量あるいは容積測定に関する誤差分散

(i) 長期システマティック・エラー分散

$$C_{\delta i}\,\sigma^2_{\delta i}=\left(\sum_p X^i_p\right)^2\sigma^2_{\delta i} \qquad (2.2-15)$$

$\sum_p$ はスケール i で測定されたアイテム p の元素重量 X^i_p に関する和

(ii) ランダム・エラー分散

$$C_{\varepsilon i}\,\sigma^2_{\varepsilon i}=\left\{\sum_p\left(X^i_p\right)^2/N^i_p\right\}\times\sigma^2_{\varepsilon i} \qquad (2.2-16)$$

N^i_p はアイテム p がスケール i で繰り返し測定された回数で，通常は 1.
$\sum_p$ は(i)と同じ。

b）エレメント・ファクター（EF）を決める為のサンプリングに関する誤差分散

(i) 長期システマティック・エラー分散

$$C_{\Delta j}\,\sigma^2_{\Delta j}=\left(\sum_p X^j_p\right)^2\cdot\sigma^2_{\Delta j} \qquad (2.2-17)$$

$\sum_p$ は物質型 j からの，又はサンプリング法 j によるエレメント・ファクターをもつアイテム p の元素重量 X^j_p に関する和

(ii) ランダム・エラー分散

$$C_{\eta j}\,\sigma^2_{\eta j}=\left[\sum_q^{N^j_{ef}}\left\{\left(\sum_p X^{jq}_p\right)^2/N^{jq}_{sef}\right\}\right]\cdot\sigma^2_{\eta j} \qquad (2.2-18)$$

$\sum_p$ は，物質型 j からの，又はサンプリング法 j によるサンプリングに基づいて決められた共通エレメント・ファクター q をもつアイテム p の元素重量 X^{jq}_p に関する和。N^j_{ef} は物質型 j 又はサンプリング法 j により決められた異なるエレメント・ファクターの種類の数。N^{jq}_{sef} は q のエレメント・ファクターを決定する為に採取したサンプルの個数

c) エレメント・ファクターを決める為の分析に関する誤差分散

(i) 長期システマティック・エラー分散

$$C_{\theta k} \cdot \sigma^2_{\theta k} = \left(\sum_p X^k_p\right)^2 \cdot \sigma^2_{\theta k} \qquad (2.2-19)$$

$\sum_p$は，分析法kによってエレメント・ファクターを決定されたアイテムpの元素重量X^k_pに関する和

(ii) ランダム・エラー分散

$$C_{\omega k} \cdot \sigma^2_{\omega k} = \left[\sum_q^{N^k_{ef}} \left(\sum_p X^{kq}_p\right)^2 / N^{kq}_{aef}\right] \cdot \sigma^2_{\omega k} \qquad (2.2-20)$$

$\sum_p$は，分析法kに基づいて決められた共通のエレメント・ファクターqをもつアイテムpの元素重量X^{kq}_pに関する和。N^k_{ef}は，分析法kにより決められた異なるエレメント・ファクターの種類の数。N^{kq}_{aef}はqのエレメント・ファクターを決定する為に分析の繰返し回数。

次のd)とe)は対象とする核物質が同位元素である場合に上記の外に追加適用されるものであり，この場合には，上記a)b)c)の中の元素重量はすべて同位元素重量に置き換えられなければならない。例えば，対象とする核物質がプルトニウムを含む核物質である場合，保障措置上問題となるのはプルトニウムの正味の重量であり，この場合，上記a)b)c)のみの適用となるが，対象がウランを含む核物質の場合には，U−235の重量が問題となり，当然アイソトープ・ファクターの分析が入ってくるため，誤差分散の算出にあたっては上記の外に下記のd)e)の適用が必要となる。

d) アイソトープ・ファクター(IF)を決めるためのサンプリングに関する誤差分散

(i) 長期システマティック・エラー分散

$$C_{\lambda \ell} \cdot \sigma^2_{\lambda \ell} = \left(\sum_p X^\ell_p\right)^2 \cdot \sigma^2_{\lambda \ell} \qquad (2.2-21)$$

$\sum_p$は，物質型ℓからの，又はサンプリング法ℓに基づくアイソトープ・ファクターをもつアイテムpの同位元素重量X^ℓ_pに関する和

(ii) ランダム・エラー分散

$$C_{\mu \ell} \cdot \sigma^2_{\mu \ell} = \left[\sum_q^{N^\ell_{if}} \left\{\left(\sum_p X^{\ell q}_p\right) / N^{\ell q}_{sif}\right\}\right] \cdot \sigma^2_{\mu \ell} \qquad (2.2-22)$$

$\sum_p$は，物質型ℓからの，又はサンプリング法ℓに基づく共通アイソトープ・ファクターqをもつアイテムpの同位元素重量$X^{\ell q}_p$に関する和。N^ℓ_{if}は，物質型ℓ又はサンプリング法ℓにより決められた異なるアイソトープ・ファクターの種類の数。$N^{\ell q}_{sif}$はqのアイソトープ・ファクターを決定する為に採取されたサンプルの個数。

e) アイソトープ・ファクターを決めるための分析に関する誤差分散

(i) 長期システムマティック・エラー分散

$$C_{\gamma m}\,\sigma^2_{\gamma m}=\left(\sum_p X^m_p\right)^2\cdot\sigma^2_{\gamma m} \qquad (2.2-23)$$

$\sum_p$は，分析法mを用いて決定されたアイソトープ・ファクターをもつアイテムpの同位元素重量X^m_pに関する和

(ii) ランダム・エラー分散

$$C_{\nu m}\cdot\sigma^2_{\nu m}=\left[\sum_q^{N^m_{if}}\left\{\left(\sum_p X^{mq}_p\right)^2/N^{mq}_{sif}\right\}\right]\cdot\sigma^2_{\nu m} \qquad (2.2-24)$$

$\sum_p$は，分析法mに基づく共通アイソトープ・ファクターqをもつアイテムpの同位元素重量X^{mq}_pに関する和。N^m_{if}は，分析法mにより決められた異なるアイソトープ・ファクターの種類の数。N^{mq}_{sif}は，qのアイソトープ・ファクターを決定するために繰り返された分析の回数。

（2.2－15）式から（2.2－24）式までを用いて求めた分散項の総和をとるとき，それがJaechモデルによるσ^2_{MUF}となる。尚，此のモデルは第3節で取扱うBNWL－1852において採用されているものである。

(4) σ^2_{MUF}とS^2_{MUF}の定義の相違

IAEAの報告書[15,16]の中ではMUFの分散としてσ^2_{MUF}とS^2_{MUF}の形が表われてくる。これは非常に混乱を招き易い用語の定義であるので注意を要する。

保障措置の対象となる核物質を取扱う施設では，その施設の核物質に関する特色を明記した設計情報を提出しなければならない。これには第1節の設計情報のところでも触れたように，MBAの性格記述，測定システム，測定対象の量，質ならびに存在形態，測定手法ならびに測定誤差と誤差伝播などに関する情報が起載されており，これらは機関によるアドホック査察によって検証されたものである。これらの情報から，ある物質収支期間に於ける核物質の実際の処理量（在庫を含めて）が判ると（2.2－11）式あるいは（2.2－13）式，あるいはJaechモデルによって，MUFの分散を求めることが出来る。これがIAEAの定義するσ^2_{MUF}である。施設者は，各測定点（KMP）に於て，設計情報で確認されている測定方法で測定することが原則であり，その際の誤差の大きさも設計情報に記載された値以上にならないようにしなければならない。従って，σ^2_{MUF}は，その施設の計量管理が設計情報を満足しているかどうかの判断基準を与えるものになる。

一方，此の期間の計量管理の実際は，必ずしも設計情報の記載通りになっているとは限らないとみるのが普通であろう。KMPの場所によっては，設計情報に記載された誤差よりも大きい誤差を含んだ測定がなされる場合もあり，その逆の場合もありうるだろう。従って，その期間に現実に行なわれた測定における誤差分散，あるいは変動係数が判れば，それらの値を設計情報に記載されている値の替わりに用いることによって，現実の測定データによるMUFの分散を求めることが出来る。これがIAEAの定義するS^2_{MUF}である。

こゝで問題になることは，施設者が実際に行なった測定の誤差分散を如何にして求めるかということである。これの算出を施設者に任せるわけには行かない。何とすれば，施設者が転用をしていた場合には真の誤差分散が報告される可能性は少ないからである。したがって，これ

は査察者自身が推測するしか方法はなく，その手段としては，独立測定を実施した払出側と受入側の差異（S／RD)による対データ比較統計法（2.4）によって推測するか，あるいは施設者の記録データに対応する現実の核物質を査察者が独立測定し，それによって得られた対データに対データ比較統計法を適用することによって推定する。あるいは施設者の測定そのものに査察者が立合い，同時に査察者も独立測定することによって対データを作って上記の方法を適用するか，のいずれかであろう。しかし，最后の手段の適用は，施設者の正常操業を妨げる可能性が高いので，かなり制限されることになろうから，結局残りの２つのいずれか，あるいは両方ということになろう。

その場合，特に注意しなくてはならないのは，対象とした施設者データは必ずしも真の核物質量の測定データではなく，あくまで施設者の残した記録データであるということである。施設者が転用者であるときには，記録データは偽造されている可能性が高く，従って，その記録データから導出された測定誤差分散は実際に行なわれた測定の誤差分散ではあり得ないと考えなくてはならない。即ち，その場合の誤差分散には転用を隠蔽するためのバイアスの分散が含まれていると考えるべきである。こゝでバイアスとは，施設者が設計情報により表示しているシステマティック・エラー分散によって説明される量以上の系統的誤差のことを意味する。実は，査察者が検出しなくてはならないのはこのバイアスなのである。

このバイアスの検出は，次に述べる累積バイアスの検証によって実施出来るが，そこで零以上の有意なバイアスが検出された場合，その理由が，施設者が設計情報に於てシステマティック・エラー分散（σ^2_{0s})の値を低く表示し過ぎていた為であると考えられる場合には，σ^2_{0s} の値を適当に調整してやらなくてはならない。このことは，必然的に S^2_{MUF} が調整されることを意味する。一方，σ^2_{0s} は現実的な値であると評価される場合には，バイアスの原因は施設者の記録データの中にあるとみなすことが出来るから，この場合には記録データの方を修正する必要が生じる。この場合にも，記録データが修正されゝば，S^2_{MUF} も修正されることになる。又，バイアスの量が大き過ぎるときは，施設者のデータは信頼出来ないものと判断せざるを得ない。これらについては，３節で具体的に説明する。

2.2.3　累積バイアス $\hat{D}$ とその分散 $\sigma^2_{\hat{D}}$ の定義と計算方法

ＭＵＦの検証は，測定誤差の側からの検証だけでは不充分である。仮に，施設者に転用の事実がなかった場合には，ＭＵＦは測定誤差からだけで検証できる。この場合，検証に必要な道具は，前に述べた σ^2_{MUF} および S^2_{MUF} だけでよい。一方，施設者が，いろいろなバッチから僅かずつ核物質を抜き取り，報告には抜取前のデータを記載していた場合，即ち，データの偽造により転用を隠していた場合には，真のＭＵＦの検証は測定誤差からだけでは不可能である。何となれば，施設者により報告されたＭＵＦデータには転用された核物質量は含まれておらず，したがってこのＭＵＦデータは測定誤差の範囲内に入ってしまうからである。

このような事態の発生を防ぐためには，査察者は，通常査察により常に施設者の報告データと記録データの照合，及び，記録データが真の核物質量の値であるかどうかを監視し，検証しておく必要がある。即ち，施設者の記録データに対応する核物質の現物を査察者は独立測定し，施設者が記録データとして残した測定値と査察者の測定値の差ｄ，即ち，施設者のバイアスの

大きさを検定し，棚卸期間中の累積バイアス$\hat{D}$を検定しておかなくてはならない。

MUFの検証では，まず累積バイアス$\hat{D}$が統計的に零である事を確認した後に測定誤差サイドからの検証を実施するか，あるいは，MUFと$\hat{D}$をまとめて（MUF+$\hat{D}$）という統計量に関する有意検定をするかのいずれかであるが（2.3参照），いずれにしても，累積バイアス$\hat{D}$と，その分散$\sigma_{\hat{D}}^2$に関する情報が必要となってくる。以下に，これらの求め方を説明する。

あるアイテムに含まれる元素重量を確定するために，次の3種類の方法が行なわれるものと仮定する。対象とする核物質が同位元素である場合にも同様の考察が行なえるので，こゝでは元素重量のみを対象として選ぶことにする。

計量法1. 各アイテムについて核物質重量（例えばUO_2の目方）と，エレメント・ファクターを測定し，その積として，そのアイテムの元素重量を求める。

計量法2. 各アイテムについて非破壊検査（NDA）により，元素重量を直接測定する。

計量法3. 各アイテムについて核物質重量は測定するが，エレメント・ファクターについては適当なサンプリングによる測定をした結果の平均値を用いることによって，各アイテムの元素重量を求める。

こゝで，物質形状，核物質重量，エレメント・ファクターなど，計量的に類似の性質をもつアイテムから構成される集団をストラータと呼び，対象とする核物質はいくつかのストラータに分割されているものとする。

こゝで，計量法1.の適用されたストラータについてその全数をNS_1，i番目のストラータのアイテム数をN_i，査察者のサンプル数をn_i，アイテムqに対する施設者の計量した元素重量をY_{iq}，対応する査察者の計量値をy_{iq}とする。又，計量法2.の適用されたストラータについてその全数をNS_2，j番目のストラータのアイテム数をN_j，査察者のサンプル数をn_j，施設者の測定した元素重量をZ_{iq}，対応する査察者の測定値をz_{jq}とする。同様にして，計量法3.の適用されたストラータについて，その全数をNS_3，k番のストラータのアイテム数をN_k，査察者のサンプル数をn_k，アイテムqに対する施設者の計量した核物質量（例えばUO_2の目方）をW_{kq}，査察者の対応する計量値をw_{kq}，施設者がサンプリングにより決めた平均エレメント・ファクターを$\overline{U}_k$，査察者のそれを$\overline{u}_k$とする。このとき，累積バイアス$\hat{D}$は次式により求められる。

$$\hat{D}=\sum_{i=1}^{NS_1}\left[\frac{N_i}{n_i}\sum_{q=1}^{n_i}(y_{iq}-Y_{iq})\right]+\sum_{i=1}^{NS_2}\left[\frac{N_j}{n_j}\sum_{q=1}^{n_j}(z_{jq}-Z_{jq})\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{NS_3}\left[\overline{u}_k\left\{\frac{N_k}{n_k}\sum_{q=1}^{n_k}(w_{kq}-W_{kq})+\sum_{q=1}^{N_k}W_{kq}\right\}-\overline{U}_k\sum_{q=1}^{N_k}W_{kq}\right] \qquad (2.2-25)$$

一方，それぞれの測定値に対する誤差分散（絶対値）を

$\sigma_{s\ell}^2$，$\sigma_{r\ell}^2$ ：スケールℓのシステマティック・及びランダム・エラー分散

σ_{sp}^2，σ_{rp}^2 ：分析法pの　〃　〃

σ_{st}^2，σ_{rt}^2 ：NDA装置tの　〃　〃

但し，$\ell=1,2,\cdots,L$；　$p=1,2,\cdots,P$　；$t=1,2,\cdots,T$

で表わし，誤差伝播モデルとして加算モデルを用いると，累積バイアス$\hat{D}$の分散は

$$\sigma^2_{\hat{D}}=\sum_{\ell=1}^{L}A_{1\ell}\sigma^2_{s\ell}+\sum_{\ell=1}^{L}A_{2\ell}\sigma^2_{r\ell}+\sum_{p=1}^{P}A_{3p}\sigma^2_{sp}+\sum_{p=1}^{P}A_{4p}\sigma^2_{rp}$$

$$+\sum_{t=1}^{T}A_{5t}\sigma^2_{st}+\sum_{t=1}^{T}A_{6t}\sigma^2_{rt} \qquad (2.2-26)$$

で表わされる。但し，上記の各係数は以下によって与えられる。

$A_{1\ell}=\left[\sum_i N_i\bar{U}_i\right]^2$　　$\sum_i$は施設者或は査察者がスケールℓを用いて測定するストラータについての和

$A_{2\ell}=\sum_i\frac{1}{n_i}\left[N_i\bar{U}_i\right]^2$　　$\sum_i$は上に同じ

$A_{3p}=\left[\sum_i N_i X_i\right]^2$　　$\sum_i$は施設者あるいは査察者が分析法pを用いて測定したストラータについての和

$A_{4p}=\sum_i\frac{1}{n_i}\left[N_i X_i\right]^2$　　$\sum_i$は施設者あるいは査察者が計量法1.で分析法pを用いて測定したストラータについての和

$+\sum_i\frac{1}{M_i}\left[N_i X_i\right]^2$　　$\sum_i$は施設者が計量法3.で分析法pをもちいて測定するストラータについての和

$+\sum_i\frac{1}{m_i}\left[N_i X_i\right]^2$　　$\sum_i$は査察者が計量法3.で分析法pを用いて測定するストラータについての和

$A_{5t}=\left[\sum_i N_i\right]^2$　　$\sum_i$は施設者或は査察者がNDA装置tを用いて測定したストラータについての和

$A_{6t}=\sum_i\frac{N_i^2}{n_i}$　　$\sum_i$は上に同じ

たゞし，X_i はi番目のストラータに含まれるアイテムについての平均の核物質重量，M_i はエレメント・ファクターを決定するために施設者の採取したサンプル数，m_i は同様に査察のサンプル数である。

尚，$\hat{D}$および$\sigma^2_{\hat{D}}$は，棚卸しにおける施設者と査察者の実在庫の推定値の差に関する検定にもそのまゝ適用できるものである。又，棚卸しから棚卸しまでの期間の累積バイアスとその分散という当初の考え方からすれば，これらを出来るだけ小さく保つには査察者のサンプル・サイズnを如何にとるべきかという問題にかゝわってくることが予想出来る。この問題に関しては2.5サンプリング計画の決定に関する理論に於て詳述する。

（2.2−26）式により$\sigma^2_{\hat{D}}$を計算する場合，特に次の点に注意を払わなければならない。即ち，この式の中で用いる計量誤差分散には，施設者の計量に関するものには施設者の表示した値，査察者に関するものには査察者の表示した値を，それぞれ使用しなくてはならないということである。したがって，施設者の値としては設計情報に記載されている値を使用しなくては

ならないということである。その理由は，（2.2−25）式で定義した$\hat{D}$の中で施設者の計量値として使用したものは施設者の記録データであって，必ずしも真の核物質量の測定データとは限らないのであり，それ故にこそ，その記録データの真偽を検証するために査察者は独立測定を実施し，差の$\hat{D}$を求めたのである。この$\hat{D}$には，当然，査察の測定誤差とサンプリング誤差も含まれるものであるが，施設者が転用をしていた場合にはその転用量が含まれているものである。それ故，$\hat{D}$の検証に用いるべき$\sigma^2_{\hat{D}}$の中には，施設者の転用によって歪められ，あるいは転用を隠蔽するために故意に操作された可能性のある記録データから推定される（次に述べる対データ比較統計で可能）誤差分散を用いてはならないのである。

2.2.4 対データ比較統計法によるS／RDおよび計量誤差分散の検証と推定

n個のアイテムに対し，2つのパーティがそれぞれ独立に測定したデータが対になって存在するとき，この対データを解析する手法を対データ比較統計法と呼んでいる。この解析により明らかに出来ることは

i）両パーティの測定値の差（S／RD）は測定誤差の範囲内にあるのか

ii）両パーティの表明しているそれぞれの測定誤差には統計的有意差はないか

iii）両パーティの測定誤差の真の値はそれぞれいくらと推定されるか

iv）両パーティの測定値から真の平均値はいくらと推定されるか

などである。この2つのパーティとして，払出側と受入側を採るとき，これはいわゆるS／RDの検定となり，施設者と査察者と採るとき，査察者の独立測定による施設者データの検証となる。

尚，対データ比較統計法の適用は，両パーティの測定方法が同一であるのか，それとも異っているのかは問題にしない。両者とも同一のアイテムを実際に測定していることが重要である。

又，同一アイテムの測定をしていた場合でも，n個のアイテムの測定の途中で，測定器の較正などによりシステマティック・エラーに変動が生ずる場合がある。これは両パーティの対データの差をグラフ上にプロットしてみることにより確かめることが出来る。その結果，変動なしと判断されるときは下記のデータ比較統計検定1により対データ比較統計が実施出来る。又，変動ありと判断されるときは，対データ比較統計検定2の方法が適用出来る。この場合には，両者によるシステマティック・エラーの合成分散も推定される。ただし，この検定2の方は参考文献(14)の参照を願うとして，こゝでは記述を省略する。

対データ比較統計検定1　（システマティック・エラーが不変のとき）

パーティ1のアイテムiに対する測定値をx_i，パーティ2の対応する測定値をy_iとする。

$$\left.\begin{aligned} x_i &= z_i + \varepsilon_i + \delta \\ y_i &= z_i + \eta_i + \Delta \end{aligned}\quad (i=1,2,\cdots,n)\right\} \qquad (2.2-27)$$

たゞし

z_i＝アイテムiの真値で，平均値μ_Z，ランダム誤差分散σ^2_Z．

ε_i，η_i＝ランダム・エラー。平均値零。σ^2_ε，σ^2_ηの分散をもつ

δ，Δ＝システマティク・エラー．σ^2_δ，σ^2_Δの分散をもつ，共に零でない平均値をもちうるが，アイテムには依存しない。

(1) 分散の検定

σ_ε^2 および σ_η^2 の検定をするために，以下の統計量を求めておく。

$$S_x^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2/n\right\}\right],\quad S_y^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2/n\right\}\right]$$

$$S_{xy}=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i\right)/n\right]$$

(2.2−28)

$$S_u^2=S_x^2+S_y^2+2S_{xy}\quad,\quad S_v^2=S_x^2+S_y^2-2S_{xy}\quad,\quad S_{uv}=S_x^2-S_y^2$$

(2.2−29)

〔仮設検定 1〕

両パーティのランダム・エラー分散の間に有意差はあるか

帰無仮設 $H_{01}:\sigma_\varepsilon^2=\sigma_\eta^2$; 対立仮設 $H_{11}:\sigma_\varepsilon^2\neq\sigma_\eta^2$

この検定は，以下の t を求めて t ー検定を実施する。

$$t=r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}\qquad たゞし\quad r=\frac{S_{uv}}{S_u\cdot S_v}\qquad(2.2-30)$$

t は自由度 n − 2 の t 分布をする。有意水準を α としたとき，$|t|$ が臨界値 $t_{1-(\alpha/2)}$ を越えるとき，H_{01} は棄却され，$\sigma_\varepsilon^2\neq\sigma_\eta^2$ と決論される。

〔仮設検定 2〕

σ_ε^2 と σ_η^2 に対し，両パーティがそれぞれある値を主張しているとき，それらの値が連体的に妥当かどうか。表明されている値を，それぞれ $\sigma_{\varepsilon0}^2$，$\sigma_{\eta0}^2$ とする。

帰無仮設 H_{02}： $\sigma_\varepsilon^2=\sigma_{\varepsilon0}^2$ および $\sigma_\eta^2=\sigma_{\eta0}^2$

対立仮設 H_{12}： $\sigma_\varepsilon^2\neq\sigma_{\varepsilon0}^2$ あるいは $\sigma_\eta^2\neq\sigma_{\eta0}^2$

又は， $\sigma_\varepsilon^2\neq\sigma_{\varepsilon0}^2$ および $\sigma_\eta^2\neq\sigma_{\eta0}^2$

まず，σ_Z^2 の推定値 $\hat{\sigma}_Z^2$ を求める。

$$\hat{\sigma}_Z^2=\frac{S_x^2\sigma_{\eta0}^4+2S_{xy}\cdot\sigma_{\varepsilon0}^2\sigma_{\eta0}^2+S_y^2\sigma_{\varepsilon0}^2}{(\sigma_{\varepsilon0}^2+\sigma_{\eta0}^2)^2}-\frac{\sigma_{\varepsilon0}^2\sigma_{\eta0}^2}{\sigma_{\varepsilon0}^2+\sigma_{\eta0}^2}\qquad(2.2-31)$$

これを用いて

$$\ell n\left[L(\hat{\Omega})\right]=-n-0.5n\cdot\ell n(S_x^2S_y^2-S_{xy})^2\qquad(2.2-32)$$

$$\ell n\left[L(\hat{\omega}_3)\right]=-0.5n\cdot\ell n f-\frac{n}{2f}\left[(\hat{\sigma}_Z^2+\sigma_{\eta0}^2)S_x^2-2\hat{\sigma}_Z^2S_{xy}+(\hat{\sigma}_Z^2+\sigma_{\varepsilon0}^2)S_y^2\right]$$

(2.2−33)

$$たゞし\quad f=\hat{\sigma}_Z^2(\sigma_{\varepsilon0}^2+\sigma_{\eta0}^2)+\sigma_{\varepsilon0}^2\sigma_{\eta0}^2$$

これから

$$\lambda_3 = 2\{\ell n[L(\hat{\Omega})] - \ell n[L(\hat{\omega}_3)] \qquad (2.2-34)$$

を求めると λ_3 は自由度2の χ^2 分布をする。有意水準を α としたとき $\lambda_3 > \chi^2_\alpha$ ならば H_{02} は棄却され，対立仮設 H_{12} が採択される。

〔仮設検定　3〕

パーティ2は σ^2_η に対し $\sigma^2_{\eta 0}$ であったと主張しているが，パーティ1は σ^2_ε に対して値を表明していない。このとき $\sigma^2_{\eta 0}$ は妥当かどうかを検定する。

帰無仮設　$H_{03}: \sigma^2_\eta = \sigma^2_{\eta 0}$ ；　対立仮設　$H_{13}: \sigma^2_\eta \neq \sigma^2_{\eta 0}$

この場合 σ^2_Z と σ^2_ε の推定値 $\hat{\sigma}^2_Z$ と $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$ を次式により求める。

$$\hat{\sigma}^2_Z = \frac{S_x^2 \sigma^4_{\eta 0} + 2 S_{xy} \hat{\sigma}^2_\varepsilon \sigma^2_{\eta 0} + S_y^2 \sigma^4_\varepsilon}{(\hat{\sigma}^2_\varepsilon + \sigma^2_{\eta 0})^2} - \frac{\hat{\sigma}^2_\varepsilon \sigma^2_{\eta 0}}{\hat{\sigma}^2_\varepsilon + \sigma^2_{\eta 0}} \qquad (2.2-35)$$

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{S_y^2 \hat{\sigma}^4_Z - 2 S_{xy} \hat{\sigma}^2_Z (\hat{\sigma}^2_Z + \sigma^2_{\eta 0}) + S_x^2 (\hat{\sigma}^2_Z + \sigma^2_{\eta 0})}{(\sigma^2_{\eta 0} + \hat{\sigma}^2_Z)^2} - \frac{\sigma^2_{\eta 0} \hat{\sigma}^2_Z}{\sigma^2_{\eta 0} + \hat{\sigma}^2_Z} \qquad (2.2-36)$$

両式は互に相手の変数を含んでいるので，繰返し法で解く。この結果を用いて

$$\ell n[L(\hat{\omega}_4)] = -0.5\, n \cdot \ell n\, g - \frac{n}{2g}[(\hat{\sigma}^2_Z + \sigma^2_{\eta 0}) S_x^2 - 2\hat{\sigma}^2_Z S_{xy} + (\hat{\sigma}^2_Z + \hat{\sigma}^2_\varepsilon) S_y^2] \qquad (2.2-37)$$

たゞし　$g = \hat{\sigma}^2_Z (\hat{\sigma}^2_\varepsilon + \sigma^2_{\eta 0}) + \hat{\sigma}^2_\varepsilon \sigma^2_{\eta 0}$

(2.2−32)式から $\ell n[L(\hat{\Omega})]$ を求め，

$$\lambda_4 = 2\{\ell n[L(\hat{\Omega})] - \ell n[L(\hat{\omega}_4)]\} \qquad (2.2-38)$$

を求めると，λ_4 は自由度1の χ^2 分布をする。有意水準 α のとき，$\lambda_4 > \chi^2_\alpha$ ならば H_{04} は棄却され，$\sigma^2_\eta \neq \sigma^2_{\eta 0}$ と決論される。

(2) 分散の推定

ケース	仮設検定	検定結果	σ^2_ε および σ^2_η の推定値
1	なし	−	i) $\sigma^2_\varepsilon = S_x^2 - S_{xy}$ ，$\sigma^2_\eta = S_y^2 - S_{xy}$ (2.2−39) ii) もしどちらかが負ならばそれを0とし，他を S_v^2 とする iii) $S_{xy} < 0$ ならば $\sigma^2_\varepsilon = S_x^2$ ，$\sigma^2_\eta = S_y^2$ (2.2−40)
2	H_{01}	棄却	ケース1に同じ
3	H_{01}	採択	$\sigma^2_\varepsilon = \sigma^2_\eta = S_v^2/2$ (2.2−41)

ケース	仮設検定	検定結果	σ_ε^2 および σ_η^2 の推定値
4	H_{03}	棄却	ケース1と同じ
5	H_{03}	採択	$\sigma_\eta^2=\sigma_{\eta 0}^2$; $\sigma_\varepsilon^2=\hat{\sigma}_\varepsilon^2$
6	H_{02}	棄却	(2.2−37)式より σ_ε^2, σ_η^2 を計算し, $R_\varepsilon=\ell n(\sigma_\varepsilon^2/\sigma_{\eta 0}^2)$, $R_\eta=\ell n(\sigma_\eta^2/\sigma_{\eta 0}^2)$ (2.2−42) を求める。 i) $\lvert R_\eta\rvert<\lvert R_\varepsilon\rvert$ あるいは $\sigma_\varepsilon^2<0$ なら〔仮設検定3〕を実施 ii) $\lvert R_\eta\rvert>\lvert R_\varepsilon\rvert$ あるいは $\sigma_\eta^2<0$ なら σ_ε^2 と σ_η^2 の役割を逆転させて〔仮設検定3〕を実施する。
7	H_{02}	採択	$\sigma_\varepsilon^2=\sigma_{\varepsilon 0}^2$, $\sigma_\eta^2=\sigma_{\eta 0}^2$ (2.2−43)

(3) 平均値の差の検定と真の平均値の推定

パーティ1，2の平均値の間に統計的に有意差があるかどうかを検定する。即ち，その差が，(2)で検定され，評価された測定誤差分散 σ_ε^2, σ_η^2 により説明される値なのか，それとも，測定誤差以上の差が入っているのかどうかを検定する。

こゝでシステマティック・エラーの分散 σ_δ^2, σ_Δ^2 は与えられているものと仮定する。もし与えられていない場合には，零とする。ただし，どちらか一方のパーティが表明しており，表明していないパーティのそれも同程度であると予想されるときには，両方とも与えられた値をもつものと仮定してよい。しかし，そのような予想の立たないときは表明していないパーティのシステマティック・エラー分散は0とみなすことにする。

$$\sigma_d^2=(\sigma_\delta^2+\sigma_\Delta^2)+\frac{\sigma_\varepsilon^2+\sigma_\eta^2}{n} \qquad (2.2-44)$$

両パーティの平均値 $\bar{x}$, $\bar{y}$ から

$$Z=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma_d} \qquad (2.2-45)$$

を求めると，これは正規分布に従う。従って仮設検定

帰無仮設 $H_{04}:\mu_x=\mu_y$; 対立仮設 $H_{14}:\mu_x\neq\mu_y$

において，有意水準を α としたとき $\lvert Z\rvert>Z_{1-(\alpha/2)}$ の場合には H_{04} を棄却し，$\mu_x\neq\mu_y$ と決論される。この場合，平均値の差には測定誤差以上のものが含まれていることになる。S／RDの検定の場合には，この差が転用によるものなのか，それとも受け入れ側，あるいは払出側のいずれかの測定誤差が大きくなり，恐らくは設計情報の記載値からはずれて劣悪な計量管理をやっているのか，などの検討が，再び必要となってくるであろう。

一方，帰無仮設が採択されて，両者の平均値の差に統計的有意差なしと判断された場合，し

かし真の平均値はいくらなのかを知ることが保障措置上大切になる。これは次のように加重平均により求めることが出来る。

$$\hat{\mu}_Z = \frac{W_x \cdot \bar{x} + W_y \cdot \bar{y}}{W_x + W_y} \qquad (2.2-46)$$

たゞし

$$W_x = \left(\sigma_\delta^2 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\right)^{-1}, \quad W_y = \left(\sigma_\Delta^2 + \frac{\sigma_\eta^2}{n}\right)^{-1} \qquad (2.2-47)$$

又，真の平均値 $\hat{\mu}_Z$ の分散は

$$\sigma_{\hat{\mu}Z}^2 = (W_x + W_y)^{-1} \qquad (2.2-48)$$

で与えられる。

2.3 MUFの評価に関する理論

2.3.1 概　要

MUFの評価には，MUFの値を推定するまでに用いられた施設者データの検証を含むが，こゝでは，推定されたMUFの値そのものゝ検証について述べることにする。施設者データの検証を含めたMUF評価の手続については第2.3.3節で述べる。

上記の範囲に限定されたMUF評価法には，1972年のIAEA/PL-488以降1974年までの間に考えられていた評価法と[15,16]，1974年にBATTELLEグループにより提唱され[11]，1975年のViennaに於ける会議でIAEAから提出されたSM-201/99[17]に於て再び紹介された評価法の2通りの方法がある。BATTELLEグループの呼び方に従うと，前者は「施設者MUF検証法（Operator's MUF Approach）」であり，後者は「（$\hat{D}$+MUF）検証法（（$\hat{D}$+MUF）Approach）」である。両者の特徴は以下のとおりである。

施設者MUF検証法

この検証法では，査察者の測定データは施設者の記録データが正当であるかどうかを検定するためにのみ利用され，正当であると評価された場合には，MUFの検証はすべて施設者データ（MUF，σ_{MUF}^2，S_{MUF}^2）のみによって遂行される。その段階では，査察者のデータはもはや何らの役割もしない。

（$\hat{D}$+MUF）検証法

この方法では，査察者の測定データのもつ重要性は高い。即ち，査察者の測定データは，施設者が自己の記録データに持ち込んだバイアスを，修正し，調整する役割をもつデータ群として見直されている。但し，その際，そのようなバイアスの有意性についての判定は問題にしない。この検証法では，施設者MUF検証法に於けるMUFの替りに（$\hat{D}$+MUF）が用いられ，S_{MUF}^2 の替りに $\sigma_{(\hat{D}+MUF)}^2$ が用いられる。

これらの検証法の具体的内容を説明する前に，MUF検証に用いられる一般的な統計手法について概略しておく。既述の対データ比較統計に於ても，原理的にはこゝで述べる手法が用いられている。

観測値MUFは，2.2.2で述べたように，正規分布に従うと考えることが出来る。一般に確率変数xが，平均値μ，標準偏差σの正規分布に従うとき，その確率密度函数f(x)は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (2.3-1)$$

で表わされ，このような分布に従う確率変数がx以下の値をとる確率$\Phi(x)$は

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx \qquad (2.3-2)$$

で与えられる。$\Phi(x)$を累積正規分布函数と呼ぶ。上記の積分は

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma} \qquad (2.3-3)$$

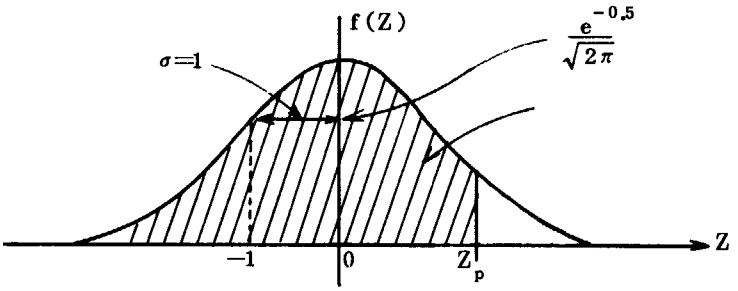
と変数変換することにより，平均値0，標準偏差1をもつ確率変数Zの標準正規分布に変換することが出来る。即ち，

$$\Phi(Z_p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z_p}e^{-Z^2/2}\,dZ \qquad (2.3-4)$$

たゞし，上記のpは，確率変数ZがZ_p以下の値をとる確率を表わしており，$p=\Phi(Z_p)$で表わされるものであって，標準正規分布の確率パーセント点と呼ばれるものである。

従って，正規分布に従う確率変数xが或る値x_0以下の値をとる確率pは，

$$p=P_r(x\leqq x_0)$$
$$=P_r\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\leqq\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=\Phi(Z_p) \qquad (2.3-5)$$



として求める事が出来る。$\Phi(Z_p)$の値は，Z_pの函数として通常の統計関係の書物には表が記載されており，又，電算機により精度高く求めることも容易である。

(2.3−5)式は次のようにも解釈することが出来る。即ち，平均値μ，標準偏差σの正規分布に従う確率変数xが観測されたとき，$Z=(x-\mu)/\sigma$を計算して，これがある与えられた確率pに於ける確率パーセント点Z_p以下であれば，xは100P%の信頼度でもってx_0以下であるといえる。という風に解釈できる。このときx_0は，(2.3−5)式より

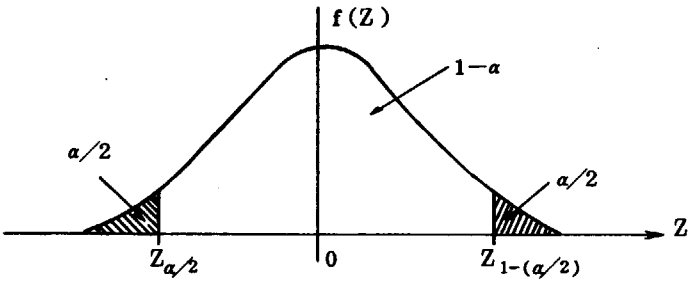
$$\frac{x_0-\mu}{\sigma}=Z_p \quad 即ち \quad x_0=\mu+Z_p\sigma \qquad (2.3-6)$$

で与えられる。

この解釈から，確率変数xの信頼巾を定義することが出来る。これは通常，f(Z)分布の両側に($\alpha/2$)ずつの確率面積をとり，これに対応するパーセント点をそれぞれ$Z_{(\alpha/2)}$および$Z_{1-(\alpha/2)}$とするとき，xの平均値μが100(1−α)%の信頼度でもって納まる誤差の巾とし

て定義される。このときαを有意水準と呼んでいる。定義により，

$$\Pr(Z_{\alpha/2}<Z<Z_{1-(\alpha/2)})$$
$$=\Pr\left(Z_{\alpha/2}<\frac{x-\mu}{\sigma}<Z_{1-(\alpha/2)}\right)$$
$$=1-\alpha \qquad (2.3-7)$$



対象条件より　$Z_{\alpha/2}=-Z_{1-(\alpha/2)}$　(2.3−8)

であるから，(2.3−7)式は

$$\Pr(x-Z_{1-(\alpha/2)}\sigma<\mu<x+Z_{1-(\alpha/2)}\sigma)=1-\alpha \qquad (2.3-9)$$

となる。これは，

$$\mu=x\pm Z_{1-(\alpha/2)}\sigma \qquad (2.3-10)$$

と書くことも出来る。これが求める信頼巾である。$\alpha=0.05$のとき，$Z_{1-(\alpha/2)}=Z_{0.975}=1.96$であり，このとき確率変数xの平均値$\mu$は100(1−$\alpha$)=95%の信頼度でもって，(x−1.96$\sigma$)と(x+1.96$\sigma$)の間にあるということが出来る。たゞし，これはあくまで確率論的な見方であり，平均値μがこの区間に入らない確率は5%あることを忘れてはならない。即ち，μについて(2.3−10)式で表わされる信頼巾の中にあると判定したとき，その判定が誤りである確率は5%あるということである。この意味で，αのことを統計学では，「正しい命題を誤りと思う誤りを犯す確率」と定義し，「第1種過程」と呼んでいる。

保障措置の目的のためのMUFの検証は，(2.3−10)式によって実行することが出来る。

2.3.2 施設者MUF検証法

MUFの観測値をMUF_0，平均値すなわち真のMUFの期待値をMUF_T，標準偏差をS_{MUF}とすると，(2.3−10)式は

$$MUF_T=MUF_0\pm Z_{1-(\alpha/2)}\cdot S_{MUF} \qquad (2.3-11)$$

となる。これは(2.3−5)式で示したものである。MUFの検証は上式により実行するが，そのプロセスの概略は下記の通りである。

(1) 施設者の記録データの検証。これは累積バイアスの検証と対データ比較統計により実施される。後者は既述のものであるが，前者は次のようにして実行する。

(i) 既述の方法により累積バイアス$\hat{D}$とその分散$\sigma^2_{\hat{D}}$を算出する。

(ii) 帰無仮設　$H_0:\hat{D}=0$，対立仮設　$H_1:\hat{D}\neq 0$を問う。この仮設検定は，第1種過設をαとしたときの両側検定

$$\Pr(\hat{D}>D_c\mid H_0)=\Pr(\hat{D}<-D_c\mid H_0)=\alpha/2$$

を満足するD_cを見つけることに相当する。$\hat{D}$は正規分布に従うと仮定すると，

$$\Pr\left(\frac{\hat{D}-0}{\sigma_{\hat{D}}}>\frac{D_c-0}{\sigma_{\hat{D}}}\right)=\Pr\left(\frac{\hat{D}-0}{\sigma_{\hat{D}}}<\frac{-D_c-0}{\sigma_{\hat{D}}}\right)=\frac{\alpha}{2}$$

よって

$$\frac{D_c}{\sigma_{\hat{D}}}=Z_{1-(\alpha/2)} \qquad \therefore\ D_c=Z_{1-(\alpha/2)}\cdot\sigma_{\hat{D}} \qquad (2.3-12)$$

したがって，$\hat{D}$がD_cよりも大きいとき，帰無仮設H_0は棄却され，累積バイアスは100(1−α)%の信頼度で0でない有意量とみなされ，施設者データは受け入れられないと結論される。この場合には，施設者のシステマティック誤差分散を調整するか，施設者データの修正を行なうべく更に査察を実施するかになる。一方，$\hat{D}<D_c$のとき，$\hat{D}$と0の間の有意差は無しと判定され，施設者データは受け入れられる。

(2) 計量水準の検定。施設者データと設計情報からσ^2_{MUF}を求め，(1)で検証された測定誤差分散を用いてS^2_{MUF}を求める。$\sigma^2_{MUF}<S^2_{MUF}$ならば，施設者の計量管理は劣悪なものと判断される。この場合には，施設者のMUF値に対する信頼性は失われ，MUFに関する統計検定はもはや不可能となり，こゝで打ち切られて，しかるべき処置がとられることになる。$\sigma^2_{MUF}\geqq S^2_{MUF}$のとき，施設者の計量管理は所要水準に達しているものと判定され，次に進む。

(3) 真のMUF，MUF_Tの信頼巾を求める(2.3−11)式。上・下限を

$$MUF_{Tmin}=MUF_0-Z_{1-(\alpha/2)}S_{MUF},\quad MUF_{Tmax}=MUF_0+Z_{1-(\alpha/2)}S_{MUF} \qquad (2.3-13)$$

としたとき

$$MUF_{Tmin}<MUF_T<MUF_{Tmax} \qquad (2.3-14)$$

である。

(4) MUF_Tと戦略量との比較評価。不明損失量の大小に対する判定は，保障措置の目的から純粋に戦略的に行なわれるものである。この戦略に対応する量を戦略量といゝ，0，M，TAの3種が採られている。MはSignificant Amount と呼ばれ，有意量ないし相当量と訳されており，TAはThreshold Amount と呼ばれ，しきい量と訳される。Mはそれぞれ対象となる施設の核物質に関する特色を反映する量であり，処理量，濃縮度などの計量管理能力を考慮した上で，最終的には保障措置の目的遂行の観点から戦略的に定められる量であって，したがって本来施設毎に異なる量である。また，TAは原爆1個分の核物質量に相当する量として定められる量である。

上記のMの量と，(2)の要請$\sigma^2_{MUF}\geqq S^2_{MUF}$とは密接に関係する。設計情報の段階で各KMPに於ける誤差分散は世界的水準に達しているものであることが要請される。これは即ち，σ^2_{MUF}がある程度以上大きくならない事を要請することと同じである。その要請は，少くとも，

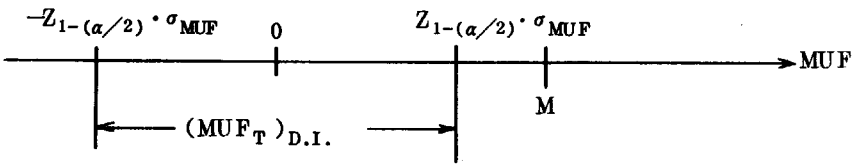
$$(MUF_{Tmax})_{D.I}\leqq Z_{1-(\alpha/2)}\cdot\sigma_{MUF}<M \qquad (2.3-15)$$

という条件を満足することである。$(MUF_{Tmax})_{D.I}$は設計情報の段階で予想されるMUFの上限を示すものである。

これを図に表わしたのが右図である。これから自明であるように，

$\sigma^2_{MUF} < S^2_{MUF}$

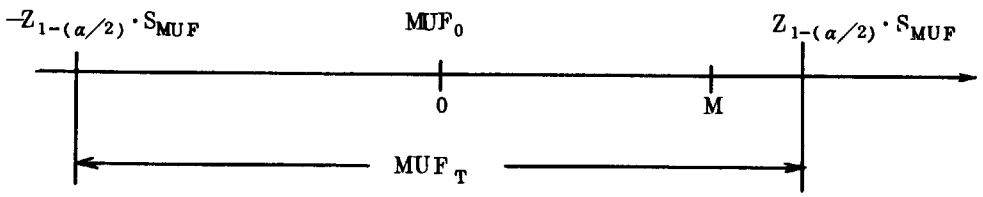
である場合には，



$$Z_{1-(\alpha/2)} \cdot \sigma_{MUF} < M < Z_{1-(\alpha/2)} \cdot S_{MUF}$$

という場合が出現し得る。この場合，仮にMUFの観測値MUF_0が0であっても

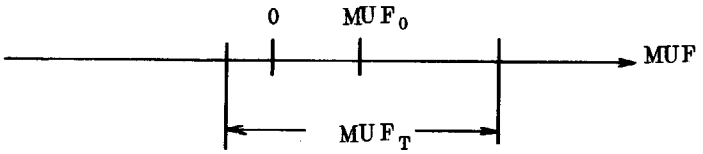
$$MUF_{Tmax} = Z_{1-(\alpha/2)} S_{MUF} > M$$



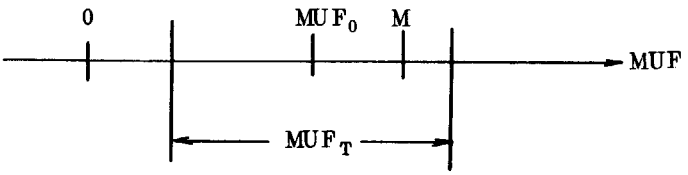
という状態が出現することになり，これでは真の不明損失量が0であるのか，Mであるのか，全く判定出来ないことになって仕舞う。この観点から，(2)の要請は重要なのである。これについては，もうひとつの見方が存在する。即ち，計量管理に関する世界水準が低ければ低い程，有意量Mは大きく採らざるを得なくなるという事である。しかしながら，Mが大きくなれば保障措置の目的の充足度は低いものになってしまう。この意味で，計量管理技術の開発は，保障措置上，極めて重要なこととなるのである。

さて，戦略量との比較と，それから導かれる結論は次のようになる。

(i) MUF_Tの信頼巾の中に0が含まれるとき，真の不明損失量は0と比べて有意差はないと判断される。



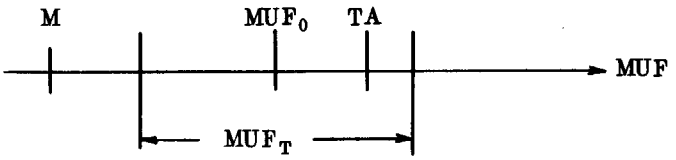
(ii) MUF_Tの信頼巾の中にMが含まれるとき，Mの量の核物質が行方不明になったことは明白であると判断される。



この場合，直ちに警報が発せられ，査察者は，施設者との協力の下に測定バイアスの見直し，未測定在庫，隠れた在庫，未測定ロスの再評価などの詳細な調査を実施する。この結果，修正ないし調整された量として，新しくMUF_a，S^2_{MUFa}が作られ，MUF_Tの信頼巾が再計算される。これに基づいて再び(i)からの検定をやり直す。

(iii) MUF_Tの信頼巾の中にTAが含まれるとき原爆1個分に相当する核物質が行方不明に

なったことは明白であると判断され，保障措置上重大な極面を迎えたことになる。この場合，直ちに特別査察が実施され，行方不明核物質の追跡調査など，しかるべき処置がとられることになる。



2.3.3 （$\hat{D}$+MUF）検証法

この検証法の特徴を明らかにするため，単純なモデルによる$\hat{D}$+MUFおよび$\sigma^2_{(\hat{D}+MUF)}$を導いておく。記号を次のように定義する。

z_i アイテムiに対する施設者の記録データ　　$z_i=\mu_i+b+\varepsilon_i$

z'_i アイテムiに対する査察者の独立測定データ　　$z'_i=\mu_i+b'+\varepsilon'_i$

n 査察者のランダム・サンプル・サイズに含まれるアイテムの個数

N MUFの中のアイテムの全個数

尚，便宜上，N個のアイテムの内，初めのn個が査察者によるサンプルであるとする。又，b，b′はシステマティック・エラー，ε_i，ε'_iはランダム・エラーである。このとき施設者のMUFの値は，z_iに入出力の符号が含まれているものとして，

$$MUF=\sum^{N} z_i=\sum^{N}\mu_i+Nb+\sum^{N}\varepsilon_i \qquad (2.3-16)$$

により表わされる。このときMUFの分散は次のように与えられる。

$$\sigma^2_{MUF}=N^2\sigma^2_{os}+N\sigma^2_{or} \qquad (2.3-17)$$

上式のσ^2_{os}，σ^2_{or}は施設者のシステマティック誤差分散およびランダム誤差分散である。

アイテムiに対する査察者の測定値と施設者の記録データの差をd_iとすると，これは，

$$d_i=z'_i-z_i=b'-b+\varepsilon'_i-\varepsilon_i \qquad (2.3-18)$$

で与えられ，平均差としては

$$\bar{d}=\sum^{n} d_i/n=b'-b+\sum^{n}(\varepsilon'_i-\varepsilon_i)/n \qquad (2.3-19)$$

によって与えられる。したがって$\bar{d}$の分散$\sigma^2_{\bar{d}}$は次式により求められる。

$$\sigma^2_{\bar{d}}=(\sigma^2_{Is}+\sigma^2_{os})+(\sigma^2_{Ir}+\sigma^2_{or})/n \qquad (2.3-20)$$

σ^2_{Is}，σ^2_{Ir}は査察者の測定誤差分散である。こゝで，モデルを簡単化する目的で

$$\hat{D}=N\bar{d} \qquad (2.3-21)$$

で与えられる累積差を考えることにする。このとき

$$\sigma^2_{\hat{D}}=\sigma^2_{N\hat{d}}=N^2\sigma^2_{\bar{d}}=N^2(\sigma^2_{Is}+\sigma^2_{os})+N^2(\sigma^2_{Ir}+\sigma^2_{or})/n \qquad (2.3-22)$$

仮に，施設者と査察者の誤差分散が等しいときには，

$$\sigma^2_{\hat{D}} = 2N^2(\sigma_s^2 + \sigma_r^2/n) \qquad (2.3-23)$$

と表わすことが出来るが，このような設定はサンプルサイズ設計で用いることが出来る。

次に（$\hat{D}$+MUF）を求める。（2.3−19），（2.3−21）および（2.3−16）式より

$$\hat{D}+MUF = \sum^N \mu_i + Nb' + N\sum^n(\varepsilon'_i - \varepsilon_i)/n + \sum^N \varepsilon_i$$

$$= \sum^N \mu_i + Nb' + \frac{N}{n}\sum^n \varepsilon'_i + \sum^n \varepsilon_i\left(1-\frac{N}{n}\right) + \sum_{n+1}^N \varepsilon_i \qquad (2.3-24)$$

上式にみられるように，$\hat{D}$+MUFの中には施設者のバイアスbが含まれていないことが特徴である。上式から $\sigma^2_{(\hat{D}+MUF)}$は次のように求められる。

$$\sigma^2_{(\hat{D}+MUF)} = N^2\sigma^2_{Is} + \frac{N}{n}\sigma^2_{Ir} + N\left(\frac{N}{n}-1\right)\sigma^2_{Or} \qquad (2.3-25)$$

$$= \sigma^2_{\hat{D}} - \sigma^2_{MUF} \qquad (2.3-26)$$

（2.3−26）式は（2.3−17）と（2.3−23）より直ちに導かれるものであるが，これは$\hat{D}$とMUFの共分散を求めることからも導かれる。これは直接MUF_T の検証には必要ないが，$\hat{D}$+MUF 統計に関する知識を深める意味で，こゝで導いておくことにする。

$\hat{D}$とMUFのランダム成分の共分散と，システマティック成分の共分散は，それぞれ，

$$\sigma_{(\hat{D},MUF)_r} = E\left[\left\{\sum^N \varepsilon_i - E\left(\sum^N \varepsilon_i\right)\right\}\left\{\frac{N}{n}\sum^n(\varepsilon'_i - \varepsilon_i) - E\left(\frac{N}{n}\sum^n(\varepsilon'_i - \varepsilon_i)\right)\right\}\right]$$

$$= N\cdot E\left\{\frac{-\left(\sum^n \varepsilon_i\right)^2}{n}\right\} = -N\left(\frac{n\sigma^2_{or}}{n}\right) = -N\sigma^2_{or} \qquad (2.3-27)$$

$$\sigma_{(\hat{D},MUF)_s} = E[\{Nb - E(Nb)\}\{N(b'-b) - E(N(b'-b))\}]$$

$$= -E(N^2b^2) = -N^2\sigma^2_{os} \qquad (2.3-28)$$

故に

$$\sigma_{\hat{D},MUF} = -(N\sigma^2_{or} + N^2\sigma^2_{os}) = -\sigma^2_{MUF} \qquad (2.3-29)$$

従って，$\hat{D}$+MUFの分散は

$$\sigma^2_{(\hat{D}+MUF)} = \sigma^2_{MUF} + 2\sigma_{\hat{D},MUF} + \sigma^2_{\hat{D}} = \sigma^2_{MUF} - 2\sigma^2_{MUF} + \sigma^2_{\hat{D}}$$

$$= \sigma^2_{\hat{D}} - \sigma^2_{MUF} \qquad (2.3-26')$$

上記で導いた$\hat{D}$+MUFの分散の式は，簡単なモデルに従って導いたものであるが，本質的には常に成立するものと考えてよい。従って，$\sigma^2_{(\hat{D}+MUF)}$ の算出には，既に導いた$\sigma^2_{\hat{D}}$及びσ^2_{MUF}の算出方法に従ってこれらを求め，前者から後者を引けばよいということになる。ついでに，（$\hat{D}$+MUF）とMUFの共分散を求めてみると，

$$\sigma_{(\hat{D}+MUF),MUF} = \sigma^2_{MUF} + \sigma_{MUF,\hat{D}} = \sigma^2_{MUF} - \sigma^2_{MUF} = 0 \qquad (2.3-30)$$

となり，統計量（$\hat{D}$+MUF）とMUFは統計的に独立であるといえる。又，

$$\sigma_{\hat{D},(\hat{D}+MUF)} = \sigma_{\hat{D},MUF} + \sigma^2_{\hat{D}} = -\sigma^2_{MUF} + \sigma^2_{\hat{D}} = \sigma^2_{(\hat{D}+MUF)} \qquad (2.3-31)$$

の関係も成立する。

さて，話を元に戻して（$\hat{D}$+MUF）の検証法であるが，これは，（2.3－11）式の替りに，

$$(\hat{D}+MUF)_T=(\hat{D}+MUF)_o \pm Z_{1-(\alpha/2)}\,\sigma_{(\hat{D}+MUF)} \qquad (2.3-32)$$

を用いて（$\hat{D}$+MUF）の信頼巾を求め，施設者MUF検証に於て述べた手順に従って進めればよい。当然の事乍ら，その際，MUFの替りに（$\hat{D}$+MUF），S^2_{MUF} の替りに $\sigma^2_{(\hat{D}+MUF)}$ を用いることになる。

以上の2つの検証法について，その長所と短所を明らかにしておこう。まず，施設者MUF検証法は，真のMUFの検出力という点では（$\hat{D}$+MUF）検証法よりも感度が良く，優れていると考えられる。その理由は，査察者は一般にはサンプリング測定だけを実施するためにそのランダム誤差分散は必然的に大きくなり，従ってこれを含む $\sigma^2_{(\hat{D}+MUF)}$ は σ^2_{MUF} よりも大きくなってしまうからである。しかしながら，この施設者MUF検証法にとっての利点は見かけ程は大きくない。何故なら，MUFの不確さは，一般にランダム・エラーに依るものよりもシステマティック・エラーの分散に依ることの方が多いからである。

一方，（$\hat{D}$+MUF）検証法の利点としては次の2つが挙げられる。ひとつは，施設者が転用を隠蔽する目的で誘導したバイアスの効果を消し去ってしまうことである。数学的には（$\hat{D}$+MUF）の期待値が真のMUFであるということを意味する。これに対して，施設者MUFの期待値は真のMUFと上記のバイアスを加えたものになっている。

もうひとつの利点は，（$\hat{D}$+MUF）の分散が施設者のシステマティック・エラー分散に影響されないという点である。（$\hat{D}$+MUF）検証法が施設者MUF検証法よりも遙かに優れていると考えられるのはこの点に依る。実際問題として，設計情報に記載されているシステマティック・エラーの分散が，施設者による正当な評価の下に導出されていると考えるのは難しいという事情があり，特に施設者が潜在的転用意図者である場合には，逆に転用の検出される確率を低く抑えることを目指して，このシステマティック・エラー分散の値を大きくしようとするに違いないのである。したがって査察者としては，このような性向のある施設者データへの依存度を出来るだけ減らすことが大切なのであり，この故に，（$\hat{D}$+MUF）検証法は査察者にとって望ましい検証法と考えられるのである。

結局のところ，施設者MUF検証法は，転用を考慮しなくてもよい環境では優れた検証法であると云えるが，保障措置の目的からはこのような環境を前提にするわけには行かないのである。

2.4 棚卸し(註)頻度の決定に関する理論

2.4.1 MUFの検出力から棚卸し頻度を決定する方法[1]

ひとつのMBAで1年間にn回の棚卸しをする場合を想定する。n回の棚卸しによる物質収

(註) 「棚卸し」とは通常，クリーン・アウト実在庫測定（PIT）をいう。

支からn個のMUFの値が得られる。これが次式で与えられるものとしよう。

$$MUF_i = I_{i-1} + T_i - I_i \qquad (2.4-1)$$

たゞしI_{i-1}はi番目の初期在庫，T_iはi番目の期間のスループット測定値の代数和（受入－払出），I_iはi番目の期間の末期在庫である。MBAが平衡運転状態にあるとして，年間の受入量Fが

$$F = n \cdot F_n \qquad (2.4-2)$$

で表わされたとする。このとき，期間毎の相対MUFの分散は

$$\sigma^2_{MUF_i/F_n} = 2\frac{\sigma_I^2}{F_n^2} + 2\sigma_T^2 \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2.4-3)$$

で表わされる。たゞし，

σ_I：在庫測定の誤差の標準偏差

σ_T：スループット測定値の代数和の誤差の変動係数（誤差の標準偏差をスループット量で割ったもの）で，棚卸し期間には無関係な量と仮定する。

施設者が，n回の期間中，毎期M／nの量の転用をして，年間で合計Mの量を転用していると仮定すると，これを検出する確率P（M）は，途中の過程を省略すると，結局

$$P(M) = 1 - \left[\Phi\left(Z_{1-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{n\sigma_I}{F}\right)^2 + 2\sigma_T^2}} \cdot \frac{M}{F}\right)\right]^n \qquad (2.4-4)$$

で表わすことが出来る（Φ，$Z_{1-\alpha}$，αの定義は2.3.1を参照のこと）。

仮に在庫測定の精度がスループット測定の精度よりも充分高いとすると，上式は

$$P(M) = 1 - \left[\Phi\left(Z_{1-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2\sigma_T^2}} \cdot \frac{M}{F}\right)\right]^n \qquad (2.4-5)$$

のように単純化出来る。

n個の棚卸し期間の連続に対する第一種過誤をα'とすると，これはひとつの期間のαとの間に

$$1 - \alpha' = (1-\alpha)^n \qquad (2.4-6)$$

の関係が成立する。この関係を図示したのがFig. 2.4.1である。

転用が無かったのに，あったというアラームを出してから，次に再び誤ったアラームを出すまでの平均棚卸し回数をNとすると，これは次式で与えられる[2]。

$$N = \frac{1}{\alpha} \qquad (2.4-7)$$

同様にして，2つの誤ったアラームの間の平均年数をN′とすると，これは

$$N' = \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n} \qquad (2.4-8)$$

で与えられ，$N \gg 1$であれば

$$N' \approx \frac{N}{n} = \frac{1}{\alpha \cdot n} \qquad (2.4-9)$$

で近似できる。

さて，棚卸し頻度をどの様な値に採るかは，（2.4－4）式をnについて解けばよい。しかし，理解をよくするためにはこの式をグラフに示し，nを決定する為の因子をパラメータとして動かしてみるのがよい。Fig.2.4.2は，簡単のために（2.4－5）式をグラフに表わしたものである。

この図で判ることは，検出力P＝95％，n＝1，α＝1％（＝α'），σ_T＝0.5％のとき，M／F＝2.8％が得られる。一方，同じ条件でn＝12のときM／Fはいくらになるかを求めてみる。各棚卸し期間に於ける第一種過誤αを1％に保つということは，12個の期間の連続に対するα'は，（2.4－6）式より，

$$1-\alpha' = (1-\alpha)^{12} = (1-0.01)^{12} = 0.98$$

$$\therefore \quad \alpha' = 0.12 = 12\%$$

に保つことに相当する。図より，p＝95％，n＝12，α'＝12％，σ_T＝0.5％のときM／F＝0.3％となる。n＝1とn＝12の場合を比較してみると，検出可能な転用率M／Fが約1／9になっていることが判る。

上記と類似の解析により，他のパラメータとnとの関係を知ることが可能であり，これらの解析からnの値，即ち，棚卸しの頻度を決めることが出来る。

2.4.2 臨界時間から棚卸し頻度を決定する方法[3]

概要で触れたように，転用が発見されても，そのとき既にそれが核兵器になっていたのでは手遅れである――という考えから，臨界時間の概念を導入し，これにより棚卸し頻度を決定しようという理論である。この理論によると，棚卸し頻度nは次式で与えられる。

$$n = \frac{1}{1/a_0 + t_0} \qquad (2.4-10)$$

たゞし

n ＝ 最大棚卸し頻度

t_0 ＝ 核物質を核兵器用に変換するのに必要な臨界時間（年）

a_0 ＝ A/A_0 でMUF／A_0 によって推定される。

A ＝ 年間スループットあるいは在庫量

A_0 ＝ 核兵器を作るのに充分なウランあるいはプルトニウムの臨界量

しかしながらこの理論に依ると，（$1/a_0+t_0$）という時間は非常に短かく，したがって棚卸し頻度nは大きな値となってしまう。一例を挙げれば，高濃縮ウランないしプルトニウムを用いるプラントで10日毎，低濃縮ウランを用いるプラントでも1ケ月毎の棚卸し頻度となる。このような頻度の棚卸し（査察を伴なう）は，施設者にも査察者にも受け入れ難いとして，IAEAは此の理論の直接の採用をしていない。

2.4.3 部分棚卸し方法[4]

これは遠心分離濃縮プラントに対して考えられた方法である。このプラントの特徴は，スループット量に比べて在庫量が小さいことである。この型のプラントに対しては棚卸し方法に2つのタイプを想定している。

i）第1のタイプは工程在庫の精度の高い測定をするものであって，年に1回の実施を考えている。この場合，Desublimatorは空にし，プロセスMBAの中に残っている在庫は，それぞれの場所で封印された供給シリンダー，製品シリンダーおよびティルシリンダー，およびカスケード内のガス状在庫，真空トランプ内のウラン在庫，それにプロセス領域のいろいろな部品上に付着した固体ウラン付着物の形の隠れた在庫である。この最後の隠れた在庫以外のものについては高い精度ですべて測定可能である。

ii）第2のタイプの棚卸しは，Desublimator内の在庫を年に1～7回位推定するというものである。この棚卸しの時期としては，入出力ステーションの封印されたシリンダーの内容量がスループット測定に加えられる事が出来る場合に行なわれる（第1のタイプの場合にはスループットの方ではなく，在庫の方に加えられる）。この様な条件の下では，プロセス在庫としてあるのは，Desublimators，カスケード内のガス状在庫，真空トラップ内のウラン在庫，および固体状の隠れた在庫である。

これらの棚卸しは，いずれもプラントの運転を停止することなく実行出来るものと考えられている。このように2つのタイプの棚卸しをする利点は，第1のタイプの棚卸しを年1回だけ実施する場合に比べ，推定値を用いる――従って比較的容易に棚卸しが可能な第2の棚卸しを年数回行なうことによって，転用の検出率が格段と良くなることにある。Fig.2.4.3および2.4.4はこの事情を示すために行なわれた例題計算の結果である。

図において，n＝1とあるのは第1のタイプのみを実施した場合を示す。一方，n＝8とあるのは，年に1回第1のタイプを実施し，途中に7回だけ第2のタイプの棚卸しを実施した場合を示す。Fig.2.4.3に依れば，例えば転用量として800kgUF$_6$をとるとき，通常の棚卸しを年1回で行う場合，転用の検出力は約63％であるのに対し，その年に1回だけ第2のタイプの簡単な棚卸しを追加するだけで検出力はほゞ10％増加し，途中に7回（平均約45日毎）第2のタイプを追加すると検出力は約98％に達することが判る。同様にFig.2.4－4に依れば，第1種過誤α，第2種過誤βをそれぞれ0.05と固定したとき，第1のタイプのみのとき転用可能な量が1380kgUF$_6$であるのに対し，第2のタイプの棚卸しを7回追加すると，これが750kgUF$_6$と半分近く迄下げられることが判る。

第1のタイプの棚卸しに比べ，第2のタイプのそれは容易に実行できる点を考えると，これは有効な棚卸し方法と云えよう。

2.4.4 実用主義的な棚卸し頻度の決定法[5]

少くとも年に1回ないし2回は最低頻度として棚卸しをするという条件で，あとは施設者の自由裁量の何時でも好きなときに棚卸しをしてよろしいというのがこの実用主義的な棚卸し方法である。再処理プラントに於ては，アイソトープ・ステップ・ファンクション・テクニックを用いる事が出来るが，この方法は，統計的意味では相当に違った同位体組成をもつ，いわゆ

る「スーパー・バッチ」を形成させることによって在庫量の決定をすることを認めるものである。この技術を用いると，通常の在庫量測定を実施するのに比べて施設者にかゝる迷惑度を減らすことが出来るが，査察者のサンプル数は若干増加する。この方法を用いる棚卸しの場合，その現実的頻度は年約6回となるといわれている。

最近では，核物質がウランであるかプルトニウムであるか，あるいはウランの濃縮度はいくらかというような核物質の性質により，核物質をいくつかのカテゴリィに分割し，それを取扱う施設者の計量誤差の上限を国際水準から定めることにより，施設のタイプ毎に査察者の検出目標値，即ち，有意量Mをそれらの条件から設定するという考え方がある。この場合，棚卸頻度は，この有意量Mの検出を可能にするように選ばなければならない。このような考え方から，例えば保障措置上最も重要な核物質と定義されるカテゴリィ1を大量に取扱う施設に対しては，リアル・タイム計量管理を実施すべきであるという考え方が出て来る。

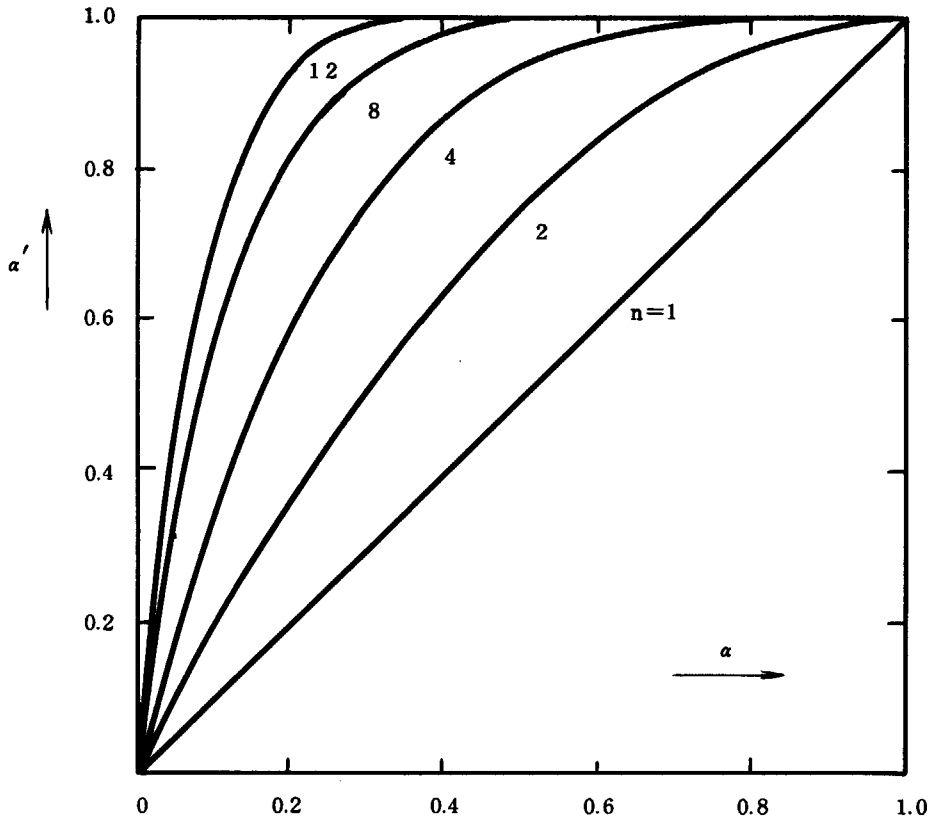


Fig. 2.4 1 Relation between error first kind probability α for one inventory period, error first kind probability α' for one year and number n of inventory periods per year.

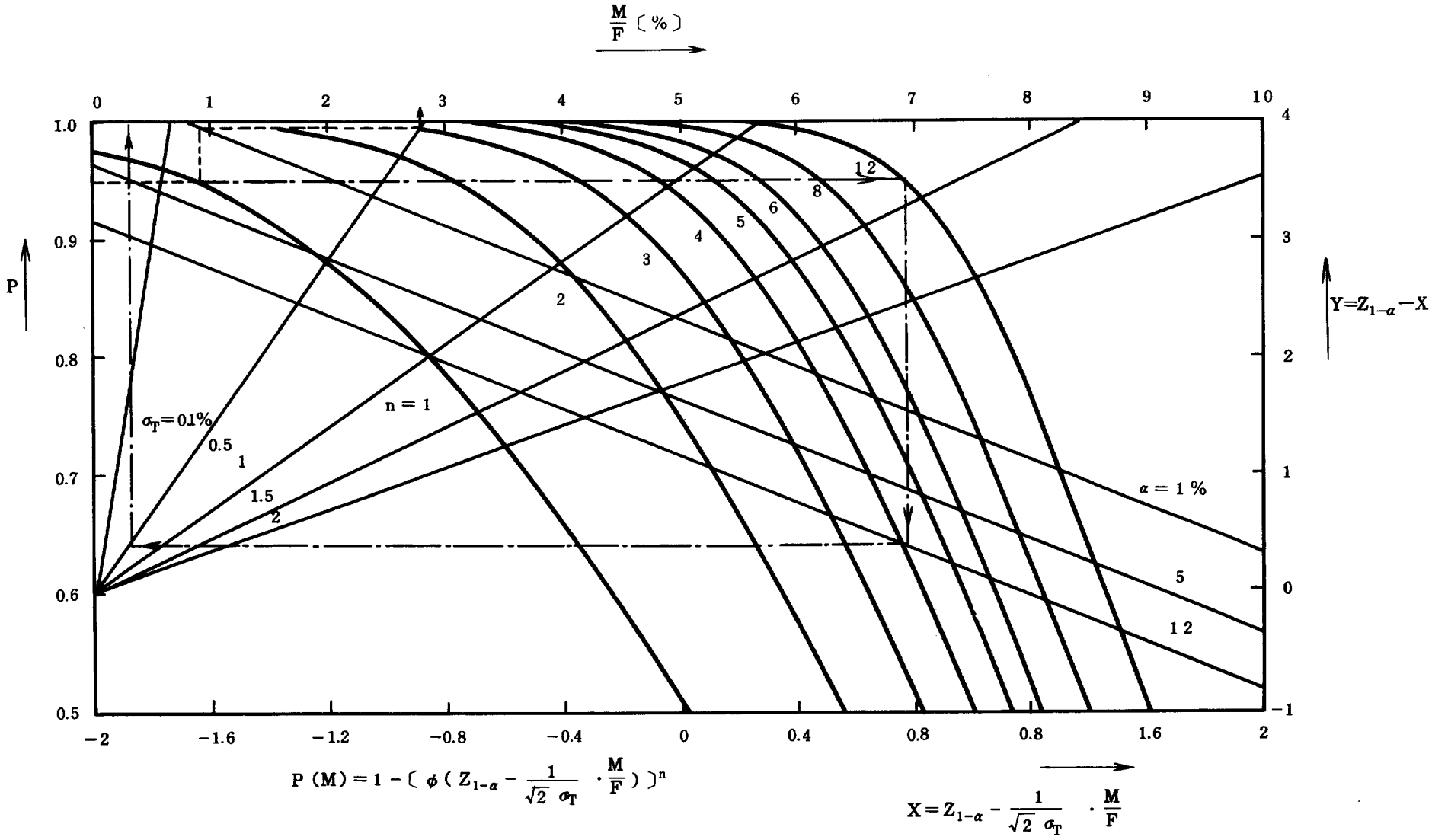


Fig. 2.4.2 Nomograph for the equation (exact inventory) $P=1-[\phi(Z_{1-\alpha}-\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_T}\cdot\frac{M}{F})]^n$

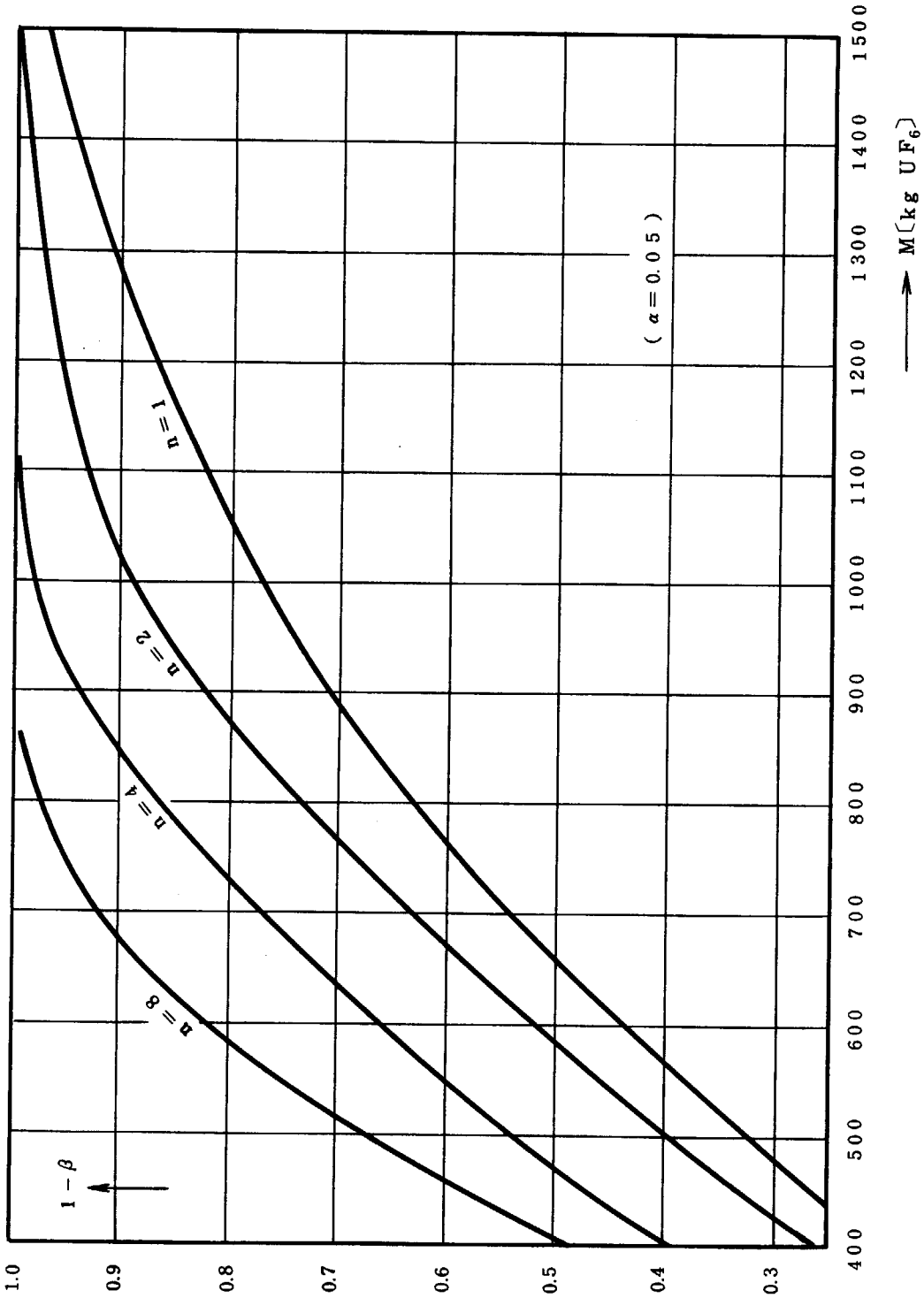


Fig. 2.4.3 Probability of detection 1−β as a function of potential diversion M with number n of inventories per year as parameter

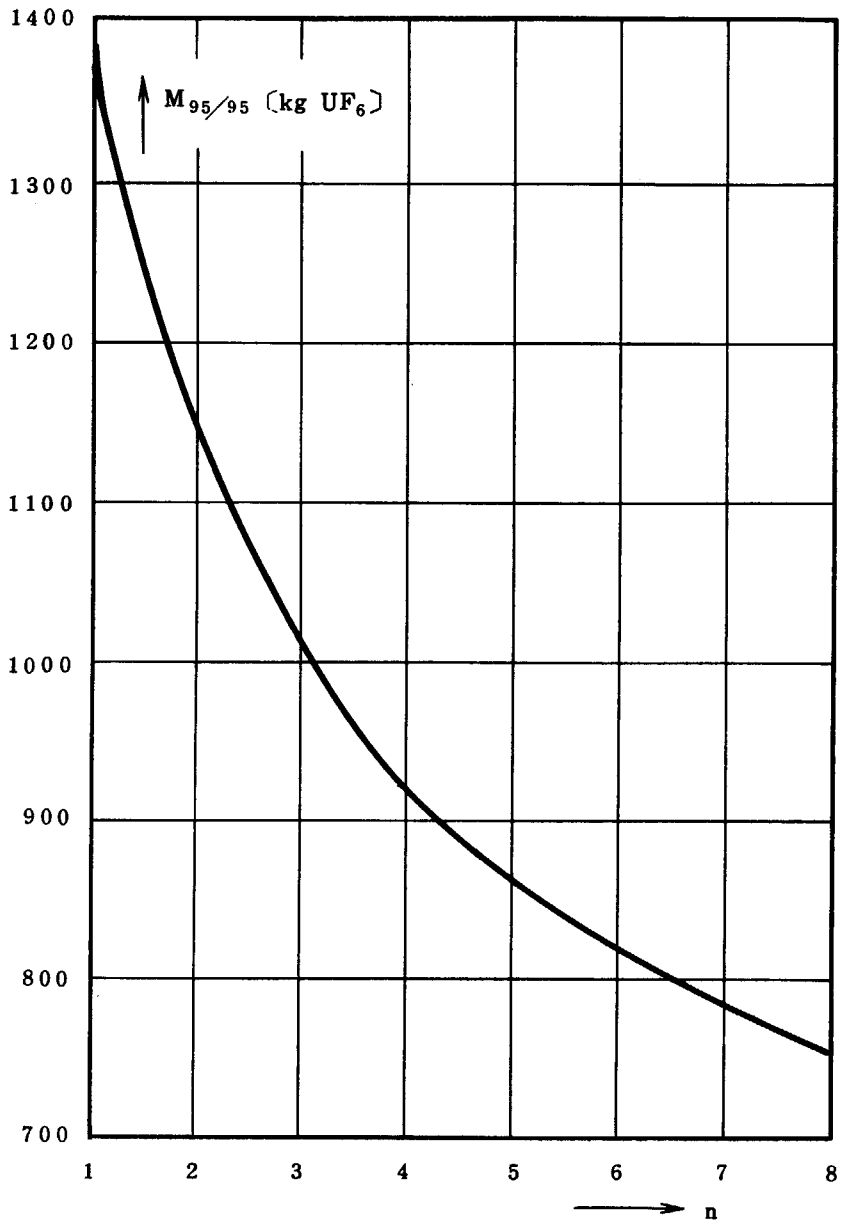


Fig. 2.4.4 Potential diversion M for $\alpha=\beta=0.05$ as a function of the number n of inventories per year

2.5 サンプリング・計画の決定に関する基礎理論

MUFの解析から棚下し頻度が決定されたように，査察者の査察時（Flow KMP，Inventory KMPに対して）に於けるサンプル・サイズは施設者と査察者の測定値の差$\hat{D}$から決定される。

保障措置の適用を受ける施設は，まず最初に設計情報を機関に対して提出し，その承認を受けてから初めてその施設の運転が可能になるが，この設計情報には，そのMBA内の各KMPにおける測定，分析，サンプリング等による計量誤差と，物質流れに対応する誤差伝播モデル，平均，及び最大核物質処理量，在庫量などの，その施設を特徴付ける情報が記述されている。これらの量から，そのMBAで物質収支をとったときに発生する物質不明損失量MUFのもつ誤差の標準偏差σ_{MUF}に関する情報が得られるが，同時に，査察者のそれぞれのKMPにおける測定誤差が判っているときには，それらから施設者，査察者の独立測定における測定値の差の標準偏差$\sigma_{\hat{D}}$を推定することも出来る。通常，この設計情報の段階では，査察者の測定誤差として，施設者のそれを代用している。この$\sigma_{\hat{D}}$を用いて，これから述べるような手法により，各KMPにおける査察者のとるべきサンプリング・サイズが決定出来る。

サンプリング・サイズの決定理論は，UKとIAEAの協同研究[18]としてアトリビュート・サンプリング・プランが開発されたのが最初である。その後，ヴァリアブル・サンプリング・プランがStewart[6]，Jaech[9][10]により開発された。Avenhaus[7][8]はStewartのモデルを一部改良すると共に，ゲーム理論の適用により理想的な最適化モデルを探求したが，その一般解の導出にあたってはかなり大きな近似を導入した。その後，1974年に至って，Hough，Schneider，Stewart，Jaech，BennettのBATTELグループは，上記の手法を結合して，ひとつの決定理論を作り上げた。これがBNWL－1852[11]である。

この節では，BNWL－1852を導くに至ったStewartモデルと，Avenhausのゲーム理論の概略を紹介し，第3節の決定理論への基礎固めをしておくことにする。

2.5.1 Stewart改良モデルによるサンプル・サイズの決定法[7],[6]

此のモデルでは，在庫量は在庫報告書（MBR）におけるストラータの異なるアイテム(註)の形で与えられているものとする。ここでストラータとは，同じ濃縮度をもつものを意味する。

今，R個のストラータがあり，各々はN_i個のアイテムから構成されているものとする。従って在庫を構成する全アイテム数Nは

$$N = \sum_{i=1}^{R} N_i \qquad (2.5-1)$$

で表わされる。

ここで次の定義を置く。

x_{ij}：i番目のストラータのj番目のアイテムに対する施設者の測定結果で，転用以前に施設者が得たもの。

T_{ij}：上記x_{ij}の真値。

（註）在庫報告書の1行に記載されているアイテム。

σ^2_{ori}：i番目のストラータのアイテムの施設者の単一測定に対するランダム・エラー分散。

σ^2_{osi}：i番目のストラータのアイテムの施設者の単一測定に対するシステマティック・エラーの分散（但し，i番目のストラータのアイテムのすべての測定に関して同じであると仮定する）。

y_{ij}：x_{ij}に対する査察者の測定結果。

σ^2_{Iri}：σ^2_{ori}に対する査察者の誤差分散。

σ^2_{Isi}：σ^2_{osi}に対する査察者の誤差分散。

（$x_{ij}-T_{ij}$）は，期待値ゼロ，分散（$\sigma^2_{ori}+\sigma^2_{osi}$）をもつ正規分布をするものと仮定する。即ち，

$$x_{ij}-T_{ij} \in N(0,\ \sigma^2_{ori}+\sigma^2_{osi}) \qquad (2.5-2)$$

一方，査察者はサンプリング計画に基ずいてi番目のストラータのアイテムから任意抽出法に従ってn_i個のアイテムの中の物質の量を推定する。したがって，査察者によって推定される全アイテムnは

$$n=\sum_{i=1}^{R} n_i \qquad (2.5-3)$$

査察の測定データに対しても真値との差は正規分布をすると仮定する。即ち

$$y_{ij}-T_{ij} \in N(0,\ \sigma^2_{Iri}+\sigma^2_{Isi}) \qquad (2.5-4)$$

査察者が外挿によって得る全在庫量の推定値をIとすると，これは

$$I=\sum_{i=1}^{R}\frac{N_i}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \qquad (2.5-5)$$

同様にして，施設者の報告データから作られるIに対応する量は，

$$B=\sum_{i=1}^{R_i}\frac{N_i}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \qquad (2.5-6)$$

で表わされる。

施設者は転用をしていないという帰無仮設H_0の下では，両者の差$\hat{D}$とその期待値は

$$\hat{D}=B-I \qquad (2.5-7)$$

$$E(\hat{D}\mid H_0)=0 \qquad (2.5-8)$$

となる。

一方，実は施設者がi番目のストラータのr_i個のアイテムからμ_iという量の物質を転用していたという対立仮設H_1の下では，両者の差は（2.5－7）で表わされずに，

$$\hat{D}=\sum_{i=1}^{R}\frac{N_i}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}+\mu_i\cdot a_i\right) \qquad (2.5-9)$$

で表わされ，その期待値は

$$E(\hat{D}\mid H_1)=\sum_{i=1}^{R}\mu_i\ r_i=M \qquad (2.5-10)$$

で表わされる。ただし

d_{ij}：i番目のストラータのj番目のアイテムに対する施設者と査察者の測定誤差

の差

a_i ：i番目のストラータに対して n_i 個のアイテムの抜取検査をした査察者が，その n_i 個の内の a_i 個に転用があり，各 a_i 個の中の転用量は μ_i であったと判断した。従って，i番目のストラータ全体（N_i 個）の中での転用アイテム数 r_i は

$$\frac{N_i}{n_i} \cdot a_i = r_i \qquad (2.5-11)$$

ここで

$$\sigma_{dri}^2 = \sigma_{ori}^2 + \sigma_{Iri}^2 \qquad (2.5-12)$$

$$\sigma_{dsi}^2 = \sigma_{ori}^2 + \sigma_{Iri}^2 \qquad (2.5-13)$$

とすると，帰無仮設 H_o の下でのDの分散は，（2.5－6），（2.5－7）式から

$$\sigma_{\hat{D}|H_o}^2 = \sum_{i=1}^{R} N_i^2 \left(\frac{\sigma_{dri}^2}{n_i} + \sigma_{dsi}^2 \right) \qquad (2.5-14)$$

となる。一方，対立仮設 H_1 の下での $\hat{D}$ の分散は，まず（2.5－9）式の形からして a_i の分散を求める必要がある。a_i は超幾何分布をすると考えられるから，その密度函数を $f(x)$ で表わすと，

$$f(x) = \frac{\binom{r_i}{x}\binom{N_i - r_i}{n_i - x}}{\binom{N_i}{n_i}} \qquad (2.5-15)$$

このとき平均値 μ は

$$\mu = E(x) = \frac{n_i r_i}{N_i} = a_i \qquad (2.5-16)$$

分散 σ_x^2 は

$$\sigma_x^2 = \frac{(N_i - n_i)\, n_i \cdot r_i (N_i - r_i)}{N_i^2 (N_i - 1)} \qquad (2.5-17)$$

で与えられる。ここで

$$p_i = \frac{r_i}{N_i} \text{（i番目のストラータに於ける転用の相対頻度）} \qquad (2.5-18)$$

とすると，結局 a_i の分散として次式が得られる。

$$\sigma_{a_i}^2 = \sigma_x^2 = \frac{(N_i - n_i)\, n_i \cdot p_i \cdot (1 - p_i)}{(N_i - 1)}$$

$$= p_i (1 - p_i)\, n_i \left(1 - \frac{n_i - 1}{N_i - 1} \right) \qquad (2.5-19)$$

（2.5－19）式を用いて（2.5－9）の分散を求めると

$$\sigma_{\hat{D}|H_1}^2 = \sum_{i=1}^{R} N_i^2 \left[\frac{\sigma_{dri}^2}{n_i} + \sigma_{dsi}^2 + \mu_i^2\, p_i (1 - p_i) \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_i} \frac{n_i - 1}{N_i - 1} \right) \right] \qquad (2.5-20)$$

$N_i \gg 1$，$n_i \gg 1$ のとき

$$\sigma^2_{\hat{D}|H_1} = \sum_{i=1}^{R} N_i^2 \left[\frac{\sigma^2_{dri}}{n_i} + \sigma^2_{dsi} + \mu_i^2 p_i (1-p_i) \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{N_i} \right) \right] \qquad (2.5-20')$$

Stewartは（p_1, p_2, …, p_R）という転用戦略を仮定して

$$\sum_{i=1}^{R} \varepsilon_i n_i \leqq C \qquad (2.5-21)$$

という査察業務量の境界条件の下に，$\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ を最小にするような n_i をラグランジュ未定乗数法を用いて解いている。上記の ε_i は i 番目のストラータにおけるひとつの量を得るのに必要な査察業務量であり，Cは $\sum_{i=1}^{R} n_i$ に対する全査察業務量である。

未定乗数を λ とすると，

$$\sigma^2_{\hat{D}|H_1} = \sum_{i=1}^{R} N_i^2 \left[\frac{\sigma^2_{dri}}{n_i} + \sigma^2_{dsi} + \mu_i^2 p_i (1-p_i) \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{N_i} \right) \right] - \lambda \left[C - \sum_{i=1}^{R} \varepsilon_i n_i \right] \qquad (2.5-22)$$

において，

$$\frac{\partial \sigma^2_{\hat{D}|H_1}}{\partial n_j} = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial \sigma^2_{\hat{D}|H_1}}{\partial \lambda} = 0 \qquad (2.5-23)$$

とおくことによって

$$n_j = \frac{C N_j \sqrt{\varepsilon_j}\, S_j}{\varepsilon_j \sum_{i=1}^{R} N_i \sqrt{\varepsilon_i}\, S_i} \qquad (2.5-24)$$

ただし

$$s_j = \sqrt{\sigma^2_{dri} + \left(\frac{\mu_i}{N_i}\right)^2 p_i (1-p_i)} \qquad (2.5-25)$$

と求まる。n_j が求める最適サンプリングであり，このとき最小値をもつ $\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ は，

$$\sigma^2_{\hat{D}|H_1} = \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^{R} N_i \sqrt{\varepsilon_i}\, S_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{R} N_i p_i (1-p_i) \mu_i^2 \qquad (2.5-26)$$

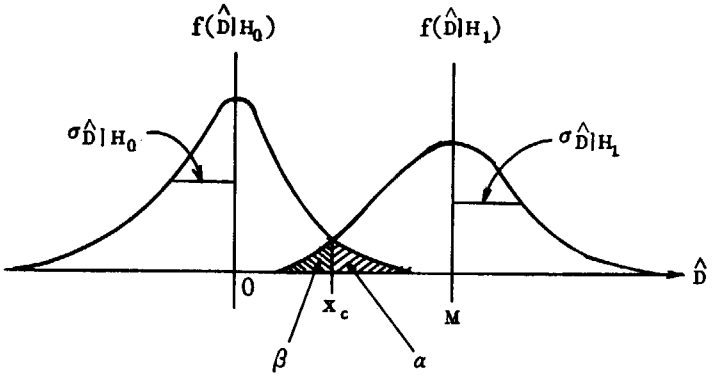
で与えられる。この n_j の合計が全サンプル数 n であり，その時の全査察業務量が（2.5－21）式のCとして求められる。

上記の段階迄に得られた結論の意味は，全査察業務量に対して（2.5－21）式の要請の下に対立仮設，即ち，実は転用があった，という仮設の下における施設者と査察者の測定値の差の分散 $\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ を最小にするという条件の下でのサンプル・サイズの配分と，そのときの全サンプル数を求めたということである。しかしながら，保障措置の目的からすると，これでは充分とは云えない。保障措置の目的のためには，帰無仮設 H_0（転用はなかった）が真のときにそれを棄却するという誤りを犯す確率（第1種過誤 α）を低く保つことを要請するばかりではなく，対立仮設 H_1（実はMの転用があった）が真のときに，帰無仮設を採択してしまう誤りを犯す確率（第2種過誤 β）も，同時に低く保つことが要請される。これは以下のように全サンプル・サイズに対する新しい要請となる。

H_1 の下に於ける $\hat{D}_{|H_1}$ に対しても $\hat{D}_{|H_0}$ と同様，正規分布を仮定する（下図参照）。

$$D_{|H_0} \in N(0, \sigma^2_{\hat{D}|H_0})$$

$$D_{|H_1} \in N(M, \sigma^2_{\hat{D}|H_1})$$



施設者測定と査察者測定の差$\hat{D}$が求められたとする。

この値が統計的に期待値0の分布に属するのか，それとも，期待値Mの分布に属するのかを検定する。もし真実は，期待値0の分布に属していた場合(H_0)，$\hat{D}$が或る臨界値x_cを超える確率はαしかないと判定する。一方，真実は期待値Mの分布に属していた(H_1)とすると，上と同じ臨界値x_cより$\hat{D}$が小さい確率はβしかないように要請する。これはα，βに対して次の2つの式が同時に成立することを要請することと同じである。

$$\alpha = P_r\ (\hat{D} > x_c \mid H_0) \qquad \beta = P_r(\hat{D} \leq x_c \mid H_1) \tag{2.5-27}$$

$\hat{D}$に対して正規分布を仮定しているから，

$$\alpha = P_r\left(\frac{\hat{D}}{\sigma_{\hat{D}|H_0}} > \frac{x_c}{\sigma_{\hat{D}|H_0}}\right) \qquad \beta = P_r\left(\frac{\hat{D}-M}{\sigma_{\hat{D}|H_1}} \leq \frac{x_c - M}{\sigma_{\hat{D}|H_1}}\right) \tag{2.5-28}$$

従って，

$$\frac{x_c}{\sigma_{\hat{D}|H_0}} = Z_{1-\alpha} \qquad \frac{x_c - M}{\sigma_{\hat{D}|H_1}} = Z_\beta = -Z_{1-\beta} \tag{2.5-29}$$

両式からx_cを消去すると，上述の要請は

$$Z_{1-\beta}\ \sigma_{\hat{D}|H_1} = M - Z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\hat{D}|H_0} \tag{2.5-30}$$

によって表わされる。

全サンプル・サイズは上式を満足するように求められなければならない。但し，各ストラータのサンプル・サイズは，既に求めた(2.5−24)式で表わされる配分になっていなくてはならない。このためには，

$$n_i = n\phi_i \tag{2.5-31}$$

であるとして，配分ϕ_iは(2.5−24)式要請により定め，nは(2.5−30)式の要請により決定すればよい。n_iに対して上記の式の成り立つとき最大査察業務量Cは(2.5−21)式により

$$C = n \sum_{i=1}^{R} \varepsilon_i\ \phi_i \tag{2.5-32}$$

で表わされるから，これらを(2.5−14)式，(2.5−26)式に用いることにより，

$$\sigma^2_{\hat{D}|H_0} = \sum_{i=1}^{R} N_i^2\left(\frac{\sigma^2_{dri}}{n\phi_i} + \sigma^2_{dsi}\right) \tag{2.5-33}$$

$$\sigma^2_{\hat{D}|H_1} \cong \frac{1}{n\sum_{i=1}^{R}\varepsilon_i\phi_i}\left(\sum_{i=1}^{R}N_i\sqrt{\varepsilon_i}\cdot S_i\right)^2 \qquad (2.5-34)$$

が得られる。ただし，$\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ に対しては（2.5－26）式の右辺第2項を無視して導いている。これはストラータのサイズが大きいときは充分成立する。上記2式を（2.5－30）式に代入すると，最終的に全サンプル・サイズnを決定する式が下のように導かれる。

$$Z_{1-\beta}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{R}N_i\sqrt{\varepsilon_i}S_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{R}\varepsilon_i\phi_i}} = M - Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{R}\frac{N_i^2\sigma^2_{dri}}{\phi_i}+\sum_{i=1}^{R}N_i^2\sigma^2_{dsi}} \qquad (2.5-35)$$

ただし

$$\phi_i = \frac{G_i}{\sum_{i=1}^{R}G_i} \qquad G_i = \frac{N_iS_i}{\sqrt{\varepsilon_i}} \qquad (2.5-36)$$

（2.5－35）式は電算機を用いる場合，試行錯誤により簡単に解けるが，Stewart がやっているように，システマティック・エラーを無視すればnに対してきれいに解くことが出来る。即ち，このとき，（2.5－35）式より

$$n = \left[\frac{1}{M}\left(Z_{1-\beta}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{R}N_i\sqrt{\varepsilon_i}S_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{R}\varepsilon_i\phi_i}} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\sum_{i=1}^{R}\frac{N_i^2\sigma^2_{dri}}{\phi_i}}\right)\right]^2 \qquad (2.5-37)$$

と求められる。但し，この方式で求めたnは精度が悪い。これについては，Bouchey[12]の論文がある。彼は（2.5－20）式に基ずいて解くべきであるとし，電算機によるダイナミック・プログラミングを実行している。

Stewartの理論はAvenhausにより上述の如くシステマティック・エラーを考慮した形に改良されてはいるが，次のゲーム理論的取扱いのところで指摘されるような問題点を含んでいる。その後Stewart モデルは，このAvenhausの指摘を考慮した形で，BATTELLEグループの理論（BNWL－1852）に採り入れられている。

2.5.2 ゲーム理論によるサンプル・サイズの決定法[7][8]

Stewart モデルでは $\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ を最小にするという査察の戦略だけが考えられているので楽観的過ぎる嫌いがある。Mを転用しようとする施設者は，当然 $\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ を最大にする戦略をとる筈である。又，Stewart は対立仮設H_1の下での差の分散 $\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ のみを最適化のパラメータに選んでいるが，これが最良の策とは考えられない。仮に，転用量Mを検出する確率を最適化のパラメータとして選ぶとすると，これは（2.5－30）式から次のように表わされる量であるが，

$$P(M) = 1-\beta = \Phi\left[\frac{M - Z_{1-\alpha}\cdot\sigma_{\hat{D}|H_0}}{\sigma_{\hat{D}|H_1}}\right] \qquad (2.5-38)$$

これから考えられるように，最適化のパラメータは上式の〔　〕の形で与えられるものとなろう。この場合，$\sigma_{\hat{D}|H_0}$ にも n_i を含むので，Stewartのやったような最適化とは趣の異なったものになるであろう。

これらの点を考慮するとき，検証モデルを考えるには，施設者と査察者の戦略を同等の資格を与えて考慮する必要があることが判る。つまり，両者の戦略に対し，2人零和ゲームを適用することによって，初めて最適サンプリング計画が可能であろうと考えられるわけである。この場合，査察者の純粋戦略は

$$Y = \{(n_1, n_2, \cdots, n_R)\ ;\ 0 \leqq n_i \leqq N_i\ ;\ n_i\ (i=1, \cdots, R)\ は整数\ ;\ \sum_{i=1}^{R} \varepsilon_i n_i \leqq C\} \qquad (2.5-39)$$

転用者の純粋戦略は

$$X = \{(r_1, r_2, \cdots, r_R)\ ;\ 0 \leqq r_i \leqq N_i\ ;\ r_i\ (i=1, \cdots, R)\ は整数\ ;\ \sum_{i=1}^{R} \mu_i r_i \geqq M\} \qquad (2.5-40)$$

というセットで表現されよう。

上記戦略の取扱いを進める前に，次の2点に対する注意を換起しておく必要がある。

(i)　i番目のストラータから転用されるものとした μ_i なる量は，ここでは既知量として取扱っているが，転用を企てる施設者は，総量に於てMを転用すればよいのであって，これは $M = \Sigma M_i$，$M_i = \mu_i r_i$ であるから，μ_i を大きくして r_i を小さくするか，その逆か，あるいはそれらを適当に調整して，検出されない確率を最大にするように最適化しようとするに違いない。従って，この値も本来は最適化のためのパラメータとして選ばれるべきものであるが，簡単の為に既知量としている。

(ii)　全査察業務量Cが固定されている場合，誤ったアラームを出したときに，これを決済するために新たな査察業務量を必要とする筈である。これを C_2 とすると，誤ったアラームを出す確率が α であるから，これを決済するに要する査察業務量は $C_2 \cdot \alpha$ で表わされ，従って全査察業務量に対する制限条件は（2.5－21）式の代りに

$$\sum_{i=1}^{R} \varepsilon_i n_i + C_2 \cdot \alpha \leqq EC \qquad (2.5-41)$$

となるべきである。但しECは全査察業務量の期待値である。

しかしながら，上記2点を考慮するには数学的に難し過ぎる面があるので，ここでは取上げないが，Avenhausはその論文のAnnexの中で，単純に取扱える特殊な場合についての考察を進めている。

さて，ゲーム理論的取扱いによる検証方法について，次の順序で説明をすることにする。まず，ひとつのストラータに対する転用を検出する確率を厳密に求める。これは，査察者と施設者の測定差 D_i が対立仮設 H_1（転用があった）の下で如何なる累積分布函数で表現されるかを厳密に求め，これによって転用の厳密な検出確率を求めるものである。次のステップでは，得られた検出確率を基礎にして，査察者と潜在転用意図者としての施設者の戦略（Y，X）を想定して両者による利得行列を作り，これを解くことを試みる。

A) 1ストラータに対する厳密な検出確率

当面の問題に入る前に，以下の取扱いで使用する統計量の定義に関する簡単な説明をしておくことにする。

確率変数 x が x_i の値をとる確率 $P_r(x = x_i)$ が $f(x_i)$ で表わされるとき，$f(x_i)$ を確率密度函数と呼び，

$$f(x_i) = P_r(x = x_i) \tag{2.5-42}$$

で表わす。一方，確率変数 x が，x_i 以下の値をとる確率 $P_r(x \leqq x_i)$ は，

$$P_r(x \leqq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)\,dx \equiv F(x_i) \tag{2.5-43}$$

で表わされ，このときの $F(x_i)$ を累積分布函数と呼ぶ。全確率は1に規格するから，x が x_i よりも大きい確率は

$$P_r(x > x_i) = 1 - F(x_i) \tag{2.5-44}$$

となる。

当面する問題で確率変数 x に対応するものは施設者と査察者の測定値の差Dである。帰無仮設 H_0（転用はなかった）の下では，Dは単なる測定誤差の差であるから，これは期待値0で分散 $\sigma^2_{D|H_0}$ をもつ正規分布をすると考えて差しつかえはない。一方，対立仮設 H_1 の下では，Dは単なる測定誤差の差ではない。それは（2.5－9）式で表現されるように転用量 μ_i とその配分 a_i を含んでおり，μ_i については前に述べたように既知量の定数として取扱ってしまうにしても，a_i は正規分布をしない確率変数であるから，この場合のDはStewartが仮定したように正規分布をすると考えるのは厳密性に欠ける。したがって，対立仮設 H_1 の下でのDの確率密度函数あるいは累積分布函数を，a_i の分布を考慮した厳密な形で求めなければ，Dの有意テストー即ち，Dが統計的に零であるのか，それとも転用量M以上であるかの判定テストーを正しく実施することは出来ないということになる。したがって，まずDの累積分布函数を求めることから始める。

ひとつのストラータに対する差Dは（2.5－9）式より下のように与えられる。

$$\hat{D}_i = N_i \bar{d}_i = \frac{N_i}{n_i} \cdot \sum_{i=1}^{n_i} d_{ij} + \frac{N_i}{n_i} \cdot \mu_i \cdot a_i \tag{2.5-45}$$

この $\hat{D}_i$ がある有意判定規準 x 以下である確率 $P_r(\hat{D}_i \leq x)$，即ち，Dの累積分布函数を $F_D(x)$ で表わす。（今後当分の間添字 i を省略する）

$$F_D(x) = P_r(D \leq x) \tag{2.5-46}$$

これは（2.5－45）式の形から次のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_D(x) &= P_r\left[\left(\frac{N}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j + \frac{N}{n}\mu a\right) \leqq x\right] \\ &= P_r\left[\left(\frac{N}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j \leqq x_1\right) \wedge \left(\frac{N}{n}\mu a = x_2\right) \middle| x_1 + x_2 = x\right] \end{aligned} \tag{2.5-47}$$

ここで a は当初の定義からして，max(0, n+r−N)と min(n, r)の間のいかなる整数値をもとりうる値である。N個の全アイテム数の中から査察者が n 個の抜取りをしたとき，その中

のℓ個には転用が発見されたとする。ひとつのアイテムからの転用量はμ，Nの全アイテムでの転用量はx_2であるとしているから，

$$\frac{N}{n}\cdot\ell\cdot\mu = x_2 \qquad 故に \quad \ell = \frac{n}{N\mu}x_2 \tag{2.5-48}$$

で表わされる。これを用いると，

$$x_1 = x - \frac{N\cdot\mu\cdot\ell}{n} \tag{2.5-49}$$

となるから，（2.5－47）式は次のように与えることが出来る。

$$F_D(x) = \sum_{\ell=\max(0,\ n+r-N)}^{\min(n,\ r)} P_r\left(\frac{N}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j \leqq x - \frac{N\mu\ell}{n}\right)\cdot P_r(a=\ell) \tag{2.5-50}$$

上式に含まれるd_jは純粋に測定誤差であり，これは期待値零，分散（$\sigma_{dr}^2+\sigma_{ds}^2$）の正規分布をするものと仮定出来る。従って（N／n）$\sum_{j=1}^{n} d_j$ も正規分布をすると仮定出来る。その分散は，

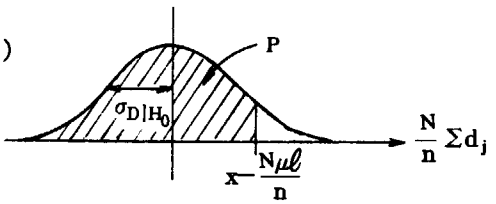
$$V\left(\frac{N}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j\right) = N^2\left(\frac{\sigma_{dr}^2}{n}+\sigma_{ds}^2\right) \equiv \sigma_{\hat{D}|H_0}^2 \tag{2.5-51}$$

であり，期待値は零である。故に

$$P_r\left(\frac{N}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j \leqq x - \frac{N\mu\ell}{n}\right) = P_r\left(\frac{\frac{N}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j}{\sigma_{\hat{D}|H_0}} \leqq \frac{x-\frac{N\mu\ell}{n}}{\sigma_{\hat{D}|H_0}}\right) \tag{2.5-52}$$

この確率をξで表わすと

$$\left(x - \frac{N\mu\ell}{n}\right)\Big/\sigma_{\hat{D}|H_0} = Z_p \tag{2.5-53}$$



あるいは

$$p = \Phi\left(\frac{x-\frac{N\mu\ell}{n}}{\sigma_{\hat{D}|H_0}}\right) \tag{2.5-54}$$

一方，aは前に触れたように超幾何分布に従うと考えられる。$P_r(a=\ell)$の意味するところは，N個の全アイテムの内，r個が転用され，残りの（N－r）個は転用されていないものとすると，いま一度にn個をとり出したとき，この中にℓ個の転用されたアイテムが含まれる確率ということである。これは（2.5－15）式を用いて次のように与えられる。

$$P_r(a=\ell) = f(\ell) = \frac{\binom{r}{\ell}\binom{N-r}{n-\ell}}{\binom{N}{n}} \tag{2.5-55}$$

ただし

$$\sum_{\ell=\max(0,\ n+r-N)}^{\min(n,\ r)} P_r(a=\ell) = \sum_{\ell=\max(0,\ n+r-N)}^{\min(n,\ r)} \frac{\binom{r}{\ell}\binom{N-r}{n-\ell}}{\binom{N}{n}} = 1 \tag{2.5-56}$$

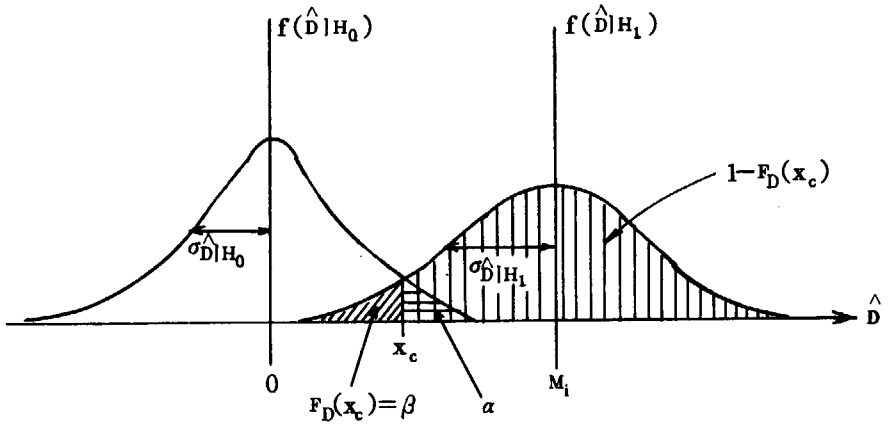
の関係が成立する。

結局，（2.5－54）式および（2.5－55）式を用いて（2.5－50）式を書き表わすと，

$$F_D(x) = \sum_{\ell=\max(0,n+r-N)}^{\min(n,r)} \Phi\left[\left(x-\frac{N\mu\ell}{n}\right)\Big/\sigma_{\hat{D}|H_0}\right]\cdot\frac{\binom{r}{\ell}\binom{N-r}{n-\ell}}{\binom{N}{n}} \qquad (2.5-57)$$

となる。

ここで第1種過誤 α，第2種過誤 β に対して（2.5－27）式が同時に満足されるよう要請する（下図参照）。$F_D(x)$ は，（2.5－46）式の定義と，（2.5－27）式の β に対する定義から明らかなように，x が $\hat{D}$ の有意判定に於ける臨界値 x_c に等しいとき，β に等しくなる。従って，α，β に対する要請を再び書くと以下のようになる。



$$\left.\begin{aligned}\alpha &= P_r(\hat{D} > x_c \mid H_0)\\ \beta &= P_r(\hat{D} \leqq x_c \mid H_1) = F_D(x_c)\end{aligned}\right\} \qquad (2.5-58)$$

従って検出力は

$$1-\beta = P_r(\hat{D} > x_c \mid H_1) = 1 - F_D(x_c) \qquad (2.5-59)$$

帰無仮設 H_0 の下では $\hat{D}$ は期待値0，分散 $\sigma^2_{\hat{D}|H_0}$ で正規分布するから，最初の式から x_c は次のように求められる。

$$\alpha = P_r\left(\frac{\hat{D}}{\sigma_{\hat{D}|H_0}} > \frac{x_c}{\sigma_{\hat{D}|H_0}}\right) \qquad \therefore \frac{x_c}{\sigma_{\hat{D}|H_0}} = Z_{1-\alpha}$$

故に　$x_c = Z_{1-\alpha}\cdot\sigma_{\hat{D}|H_0}$　（2.5－60）

一方，対立仮設 H_1 の下では，β は（2.5－57）式の x に上記の x_c を代入すれば求められるが，ここでは検出力 $1-\beta$ を求めておく。

$$1-\beta = 1-F_D(x_c) = 1-\sum_{\ell=\max(0,n+r-N)}^{\min(n,r)} \Phi\left[\left(x_c-\frac{N\mu\ell}{n}\right)\Big/\sigma_{\hat{D}|H_0}\right]\cdot\frac{\binom{r}{\ell}\binom{N-r}{n-\ell}}{\binom{N}{n}}$$

（2.5－56）式及び（2.5－60）式を用いると，

$$= \sum_{\ell=\max(0,n+r-N)}^{\min(n,r)} \left[1-\Phi\left(Z_{1-\alpha}-\frac{N\mu\ell}{n\sigma_{\hat{D}|H_0}}\right)\right]\cdot\frac{\binom{r}{\ell}\binom{N-r}{n-\ell}}{\binom{N}{n}}$$

(2.5−61)

上式の $\sigma_{\hat{D}|H_0}$ に（2.5−51）式を代入すると，最終的に検出力は次のように求められる。

$$1-\beta=\sum_{\ell=\max(0,\,n+r-N)}^{\min(n,\,r)}\Phi\left[\frac{\mu\cdot\ell}{n\sqrt{\frac{\sigma_{dr}^2}{n}+\sigma_{ds}^2}}-Z_{1-\alpha}\right]\frac{\binom{r}{\ell}\binom{N-r}{n-\ell}}{\binom{N}{n}} \qquad (2.5-62)$$

以上で，ひとつのストラータに対する厳密な検出力が求まったが，各ストラータ i に対しては

$$P_i=1-\beta_i \qquad (2.5-63)$$

の形で与えられることになる。

B）２人ゼロ和ゲームの適用による最適サンプル・サイズの決定

一方には転用を意図する施設者が在り，他方ではこれを阻止しようとする査察者が在るとき，両者の闘争の結果を正しく推測するためには，両者の保有する戦略を同格に扱い，両者とも自己の最適戦略を用いて自己の利益を最大にしようとすると考えるのが合理的であろう。

Stewart は $\sigma_{\hat{D}|H_1}^2$ を最小にするという査察者の戦略だけの最適化を行ったが，この扱いは，$\sigma_{\hat{D}|H_1}^2$ を最大にしようとする転用意図者の戦略が無視されている点で合理性に欠ける。Stewart モデルが査察者にとって楽観的過ぎるといわれるのはこの為である。Stewart は又，最適化パラメータとして $\sigma_{\hat{D}|H_1}^2$ のみを考慮したが，既述したようにこれだけで充分とは云えない。これらのStewart モデルの難点を解決するために，Avenhaus は施設者と査察者に対して理想化された利得を定義して両者の闘争を「２人ゼロ和ゲーム」として取扱うことを提案している。通常の室内ゲームの場合，プレイヤー１にとっての利得（例えば１０円の儲け）はプレイヤー２にとっては負の利得（１０円の損失）としてはっきり定義されるが，Avenhaus は施設者と査察者に対するこのような性質をもつ利得として次のようなものを定義している。尚，これに関する妥当性については参考文献１３に示されている。

0：転用は無く，かつ，転用ありとの誤ったアラームもなかった場合の利得

−e：転用は無かったのにも拘らず，転用ありとアラームを出した場合の利得

c：転用が検出された場合の利得

−d：転用が検出されなかった場合の利得

上記の利得は「効用単位（Utility Unit）」で表わされるものであり，符号は査察者側からみたときのものであって，e，c，dは正の定数である。

ここでP（x，y）を全てのクラスの全ての転用を検出する確率とし，α をこれらに対する第１種過誤とするとき，施設者の利得の期待値 a（x，y）は次のように与えられる。

$$a(x,y)=\begin{cases}-c\cdot P(x,y)+d(1-P(x,y)) & \cdots\cdots\text{転用が意図されたとき}\\ e\cdot\alpha & \cdots\cdots\text{転用が意図されなかったとき}\end{cases}$$

(2.5−64)

このときゲームは（X，Y，a）で表現される。ただし，X，Yは（2.5−39）及び（2.5−40）式で定義された純粋戦略である。即ち，査察者にとっての純粋戦略とは，コストの境界条件の下に於て，どのストラータでどれだけのサンプリングをするかということであり，転用

を意図する施設者にとっては，全転用量をM以上にするという境界条件の下に，どのストラータのどれだけのアイテムを転用するかということである。Xの中には当然のことながら施設者の正規戦略，つまり，転用を意図しないという戦略も含まれているが，理論の取扱上，この正規戦略を除外した戦略のセット，X′を考えた方が便利である。このとき，ゲームは（X′，Y，a）で表現され，施設者の利得の期待値は

$$a(x, y) = -c \cdot P(x, y) + d(1 - P(x, y))$$
$$= -c + (c + d)(1 - P(x, y)) \qquad (2.5-65)$$

で表わされる。この内，定数項は戦略の選択に影響されず，又，（c＋d）＞0であることを考えると，（X′，Y，a）というゲームは戦略的には（X′，Y，1−P（x，y））と等価であることが判る。戦略的に等価であるということは，2つのゲームに於ける最適戦略が全く等しいということを意味する。

さて，（X′，Y，1−P（x，y））で表現されるゲームの場合，利得パラメータのc，d，eを含んでいない。つまり，最適戦略（そしてその帰結としての最適検出確率）のみに関心がある場合にはc，d，eを考慮する必要はないということになる。このような場合とは，転用される総量Mと同様，全査察業務量Cが与えられた量である場合がそうである。施設者の純粋戦略Xの替りにX′を導入したのは以上の理由に依るものである。

B.1）　特殊条件下に於けるゲームの解

解かれるべきゲームは（X′，Y，1−P（x，y））と定まったが，これは一般には解けていない。しかしながら，次に述べる特別の条件の下では厳密に解くことが出来る。

条件：　施設者と査察者は，それぞれ独立に選んだ唯ひとつのストラータのアイテムに対して転用を意図し，チェックしようとする。しかしながら，両者の選ぶストラータは必ずしも同じストラータではない。

（施設者が同時に2つ以上のストラータに対して転用を意図することは充分にありうることであり，従って此の条件は可成り特殊な場合にのみ成立するものとなる。ゲーム理論の適用が未だ実用の域に達していないのは，このような特殊な場合にのみ厳密解が求められているという点にある。）

上記の条件が成立する場合，施設者と査察者が別々のクラスを選んだ場合には，転用の検出確率はαであり，偶然に同じストラータを選択したときの検出確率は，（2.3−63）及び（2.3−64)式で与えられるP_iになる。従って，ゲームは以下に示す行列ゲームとなる。

査察者の戦略（ストラータ i を考察，i＝1，2，…，R）

$$\begin{array}{c} \\ \text{施設者の戦略} \\ \left(\begin{array}{c}\text{ストラータ j の中で転用} \\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ R\end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & R \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1-P_1 & 1-\alpha & 1-\alpha & \cdots\cdots & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-P_2 & 1-\alpha & \cdots\cdots & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1-P_3 & \cdots\cdots & 1-\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha & \cdots\cdots & 1-P_R \end{array}\right) \end{array} \qquad (2.5-66)$$

このゲームで，仮に査察者が常に1の純粋戦略のみを用いるとすると，やがて施設者はそれを見破って施設者の保有する戦略の内の1以外の純粋戦略を用いるようになり，査察者の利得を最小に抑え込んで仕舞うだろう。つまり，施設者は（1－α）の確率で転用が可能となる。又，査察者が1，2，3，…，Rという具合に順々に純粋戦略を変更して行ったとしても，いずれ施設者はその規則性を見破って仕舞い，結局転用に成功することになる。このような事態を避ける唯一の方法は，査察者が純粋戦略の選択方法に規則性を全く持ち込まないことである。即ち偶然機構（Chance Device－サイコロ，ルーレット，乱数表等）を用いればよい。このような確率機構によって純粋戦略を選択するとき，この戦略を「混合戦略」と呼ぶ。全く同様のことが施設者の純粋戦略の選択に対しても云える。

そこで，査察者が純粋戦略iを選択する確率を$\hat{p}_i$，施設者のそれを$\hat{q}_i$で表わすと，査察者の最適混合戦略は（$\hat{p}_1$，$\hat{p}_2$，…，$\hat{p}_R$），施設者のそれは（$\hat{q}_1$，$\hat{q}_2$，…，$\hat{q}_R$）で表わされる。このとき，このゲームの値は施設者の利得の期待値，即ち，転用が検出されない確率（1－P）となる。従って，これらの値は次の式により決められる。

$$\left.\begin{aligned}&(1-\alpha)\sum_{i\neq i_0}\hat{q}_i+(1-P_{i_0})\hat{q}_{i_0}=1-P,\quad i_0=1,2,\cdots,R\\&(1-\alpha)\sum_{i\neq i_0}\hat{p}_i+(1-P_{i_0})\hat{p}_{i_0}=1-P,\quad i_0=1,2,\cdots,R\\&\sum_i\hat{q}_i=\sum_i\hat{p}_i=1\end{aligned}\right\}\qquad(2.5-67)$$

これは，（2R+1）個の未知数に対する（2R+1）個の方程式から成り立っているから解くことが出来る。その解は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\hat{q}_i}=\frac{1}{\hat{p}_i}=(P_i-\alpha)\sum_i\frac{1}{P_i-\alpha}\\&\frac{1}{P-\alpha}=\sum_i\frac{1}{P_i-\alpha}\end{aligned}\right\}\qquad(2.5-68)$$

によって与えられる。但し，P_iは（2.5－62）及び（2.5－63）式により与えられるものであり，（2.5－62）式の中のn_iとr_i（式の中ではiは省略してある）は

$$n_i=\left[\frac{C}{\varepsilon_i}\right]_{max},\qquad r_i=\left[\frac{M}{\mu_i}\right]_{min}\qquad(2.5-69)$$

で与えられるものである。但し，$[\ ]_{max}$は$[\ ]$内の値を越えない最大の整数を採ることを意味し，$[\ ]_{min}$は$[\ ]$内の値を越える最小の整数を採ることを意味する。

以上が特殊な条件下における厳密な解であって，査察者の最適サンプル・サイズは（2.5－69）式によって純粋戦略として求められることになる。しかしながら，解析解は得られていないので，実際の数値解をみつけるためにはダイナミック・プログラミング法などの助けを借りなければならないだろう。

B.2）　一般条件下におけるゲームの近似解

B.1）で述べたように，施設者と査察者は唯ひとつのストラータに対して転用しようとし，査察しようとするという特殊な場合以外，一般の条件の下では（X，Y，a）というゲームの

厳密な解は見つかっていないのが現状である。そこで，或る程度の仮定の導入を許して近似解を求めることをAvenhausは試みている。

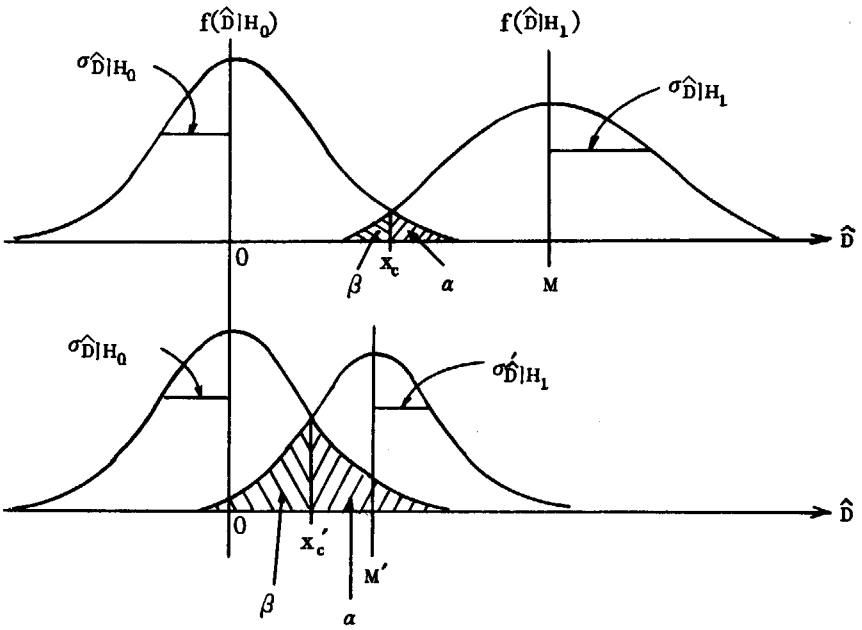
まず，転用されたアイテムの個数 r_i および査察者のサンプルの個数 n_i がストラータ全体のアイテム数 N_i に比べて小さくない場合を考えると，この場合，すべてのストラータに関する施設者と査察者の測定（推定）値の差 $\hat{D}$ は正規分布に従うと仮定しても良さそうにみえる。このとき $\hat{D}|H_1$ の確率密度函数 $f(\hat{D}|H_1)$ は

$$f(\hat{D}|H_1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_{\hat{D}|H_1}} \exp\left[-\frac{(\hat{D}-M)^2}{2\ \sigma^2_{\hat{D}|H_1}}\right] \qquad (2.5-70)$$

によって近似的に表わされることになる。又，このときの検出力 $1-\beta$ は有意判定の臨界値を x_c としたとき

$$1-\beta = P_r(\hat{D}>x_c|H_1) \approx \int_{x_c}^{\infty} f(\hat{D}|H_1)\, d\hat{D}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\hat{D}|H_1}} \int_{x_c}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\hat{D}-M)^2}{\sigma^2_{\hat{D}|H_1}}\right] d\hat{D} \qquad (2.5-71)$$

で近似される。この検出力は右図を見れば判るように，Mの大きさによって変化する。Mが零に比べてあまり大きくない場合には，有意判定の臨界値 x_c は小さくなり，第1種過誤 α，第2種過誤 β 共に大きくなって仕舞う。したがって此のような場合には，$\hat{D}$ の有意判定テストは困難になり，実行しても信頼性は低いものとなる。



一方，Mが零に比べて充分大きい値である場合には上記とは逆のことが云える。このような場合には，（2.5−71）式の形からして，ゲームの利得として検出力 $1-\beta$ を採らずに，代わりに $\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ を採用することが出来よう。即ち，（X，Y，a）のゲームの代わりに（X，Y，$\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$）というゲームを考えることが出来る。しかし，このように近似しても尚，最適な混合戦略を決定することは出来ていない。この場合にも，Avenhausは更に次のような特殊な場合を想定して近似解を導いている。

即ち，$r_i \ll N_i$，かつ $n_i \ll N_i$ という特別の状態を想定し(註)，（2.5－22）式で与えられる $\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$ を次のように近似出来るものと仮定している。

$$\sigma^2_{\hat{D}|H_1} \approx \sum_{i=1}^{R} \left[N_i^2 \sigma^2_{dai} + N_i^2 \mu_i^2 \cdot p_i \cdot \frac{1}{n_i} \right] \qquad (2.5-72)$$

上式ではランダム・エラー成分も（$\sigma^2_{dri} / n_i \ll \sigma^2_{dai}$）として無視している。上式の中の定数項は最適化には影響を与えないので，結局（X，Y，$\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$）というゲームの替わりに，（X，Y，$\tilde{\sigma}^2_{\hat{D}|H_1}$）というゲームを考えればよいことになる。但し，$\tilde{\sigma}^2_{\hat{D}|H_1}$ は

$$\tilde{\sigma}^2_{\hat{D}|H_1} = \sum_{i=1}^{R} N_i^2 \mu_i^2 p_i \frac{1}{n_i} = \sum_{i=1}^{R} N_i \mu_i^2 \frac{r_i}{n_i} \qquad (2.5-73)$$

で与えられるものである。

ここで，n_i，r_i が連続変数であると仮定して，ラグランジュの未定乗数法を適用することに依り，施設者および査察者のミニ・マックス戦略（r_1^0，r_2^0，……，r_R^0）および（n_1^0，n_2^0，……，n_R^0）を決定することが出来る。ミニ・マックス戦略とは

$$F(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_R ; r_1, r_2, \cdots\cdots, r_R) = \tilde{\sigma}^2_{\hat{D}|H_1} = \sum_{i=1}^{R} N_i \mu_i^2 \frac{r_i}{n_i} \qquad (2.5-74)$$

として函数Fを定義するとき，（2.3－39）式に示された

$$\sum_{i=1}^{R} \mu_i r_i \geqq M \qquad (2.5-75)$$

の境界条件の下に r_i に関して函数Fを最大にし，かつ，全査察業務量に関して

$$\sum_{i=1}^{R} \varepsilon_i n_i \leqq C \qquad (2.5-76)$$

の境界条件の下に n_i に関して函数Fを最小にするような戦略の組であり，これらを，（r_1^0，r_2^0，……，r_R^0）および（n_1^0，n_2^0，……，n_R^0）で表わす。このとき当然函数Fの値は

$$F(n_1^0, n_2^0, \cdots\cdots, n_R^0 ; r_1^0, r_2^0, \cdots\cdots, r_R^0)$$

で与えられる。

ラグランジュの未定乗数を λ_1 および λ_2 とするとき，

$$F = \sum_{i=1}^{R} N_i \mu_i \frac{r_i}{n_i} - \lambda_1 \left[C - \sum_{i=1}^{R} \varepsilon_i n_i \right] - \lambda_2 \left[M - \sum_{i=1}^{R} \mu_i r_i \right] \qquad (2.5-77)$$

の形でFを表わす。

$$\frac{\partial F}{\partial n_j} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial r_j} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 \qquad (2.5-78)$$

により，λ_1，λ_2 を消去すると，結局，ミニ・マックス戦略は次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} n_i^0 &= \frac{C}{N} \cdot N_i \mu_i \\ r_i^0 &= \frac{M}{N} \cdot N_i \cdot \varepsilon_i \end{aligned} \right\} \qquad (2.5-79)$$

(註) Avenhausは，n_i，r_i が N_i に比べて小さくないという仮定の下に（X，Y，a）を（X，Y，$\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$）に移したにも拘らず，ここで $r_i \ll N_i$，$n_i \ll N_i$ という条件を持ち込んで（X，Y，$\sigma^2_{\hat{D}|H_1}$）というゲームを（X，Y，$\tilde{\sigma}^2_{\hat{D}|H_1}$）に移行しているのは疑問である。

ただし

$$N = \sum_{i=1}^{R} N_i \ \varepsilon_i \ \mu_i$$

これが一般条件の下におけるゲーム（X，Y，a）を近似したゲーム（X，Y，$\tilde{\sigma}^2_{\hat{D}|H_1}$）の解である。査察者の最適サンプル・サイズは n_i^0 の戦略として与えられる。

この結果から，異なるストラータに於て査察されるべきアイテムの数の比は，

$$\frac{n_i^0}{n_j^0} = \frac{N_i \ \mu_i}{N_j \ \mu_j}$$

となり，これは，それぞれのストラータで転用しうる最大量の比となっていることが判る。

3. 査察計画作成のための実用的理論

3.1 概　要

核物質の有意量（M kg）が転用されたときに，それを高い信頼度でもって検出するための統計理論的方法論は，これまで，いろいろな角度から進められて来た。これは大別すると3つの流れがあったと考えられる。第1のものは，MUFの性質とその有意性の判定に関するものであり，第2のものは転用者と査察者の戦略を考慮した最適サンプル・サイズに関するものであり，第3のものは保障措置の技術的有効性に関するものであった。第1と第2の方面からの理論開発には多数の研究者が従事し，その成果には多大のものがあった。一方，第3の技術的有効性に関しては，これが保障措置上極めて重要であり，今後，より一層の努力が払われなくてはならぬとPL−488[15]に於て指摘されたにも拘らず，その後の進展ははかばかしくなく，最も遅れている分野である。このように遅れている理由は，有効性を定義するためのパラメータが多種・多様であることの他に，査察がIAEA査察と国内査察に別れるという非統計的条件が加わるために，有効性の定量化が難しいということによる。この技術的有効性は，簡単に云えば次のような性格をもつものとして定義されるべき量である。即ち，観測されたMUFの性質と有意性に関する判断と，同じ期間に検出された累積バイアス$\hat{D}$の性質と有意性に関する判断とを定量的に結合し，その期間に適用された査察計画，具体的にはサンプリング計画がどれ程有効であったかを示す尺度となるべき量として定義されるべき量である。この定量化が出来れば，その次の物質収支期間に対するサンプリング計画には，それを反映することが出来，施設者にとっても，査察者にとっても納得の行く保障措置の適用が可能となる筈である。

後述するように，転用者は，転用量MをMUFの中に紛れ込ませることも出来れば，累積バイアス$\hat{D}$の中に紛れ込ますことも出来る。したがって，MUF値が小さく，有意でないと判断されたとしても，$\hat{D}$が有意量であると判断されれば，最終的には転用があったと判断される。又，MUFの中にMが入っておらず，$\hat{D}$の中にもMが入っていなくとも，MUF＋$\hat{D}$の中にMが入っていれば，Mの転用があったことは明白となる。したがって，$\hat{D}$＋MUFの大きさによって査察のサンプリング計画を立てることが出来れば，その計画は少くとも上述の有効性の考え方を採り入れたものとなっていると云える。BATTELLEグループが，（$\hat{D}$＋MUF）検証法を導入したのはこの考え方からである。但し，保障措置の有効性というとき，そこには前述の非統計的条件が加わるものであるから，この点からすると（$\hat{D}$＋MUF）検証法も完全な答えにはなっていない。この問題については，Karlsruheグループがひとつの考え方を提案[19]しているが，あまり説得力をもつものとは云えないようであり，現在までのところ，IAEAの保障措置技術体系の中にも組み込まれていない。

保証措置のための査察計画は，上記の意味で技術的有効性に完全に裏付けられたものとなって，始めて理論的に完全なものとなりうるものである。ここで紹介するBATTELLEグループの開発した査察計画理論[11]も，この観点から見るとき，未だ完全なものとは云い難い。しかしな

から此の理論には，限定された意味ではあっても査察の有効性に対する考慮が為されており，さらに，1970年にIAEAの協力の下に英国で開発され，始めてZero-Energy Fast Reactorに適用されたアトリビュート・サンプリング計画，[18] 第2節で紹介したJaechによる詳細なMUF解析法と累積バイアス$\hat{D}$の検定理論，Stewartによるバリアブル・サンプリング計画，転用者と査察者の戦略をゲーム理論で取扱ったAvenhausの最適化理論という，これまでに開発された諸理論を消化し，統合し，そして，査察計画立案に対する総合的な方法論としてまとめられたものであって，他に類をみないものである。そして現在，ある施設に対して査察計画を立てようとするとき，この理論のもつ境界条件にさえ注意を払えば，この理論を手引として統計的査察計画を完全に作成することが出来る。この意味から，BATTELLEグループの理論を「実用的理論」と呼んだのである。

3.2以降では，査察計画の作成方法とその理論的基礎を説明する。尚，具体的なサンプル・サイズを決定するための手順は既に電算機用プログラムに作成されており，これは各種の施設に対する国内査察計画の立案に使用されている。

3.2 転用戦略と査察戦略

転用者の目標は，1年間の計量管理期間内にその施設に存在する核物質の中から，合計M kgの核物質を転用することである，と仮定する。一方，査察者の目標は，同じ期間内にその施設の核物質量から，M kgの核物質が損失したり転用されたりはしなかったと高い信頼度でもって言明出来ること，と設定する。この場合，想定される転用戦略に対して，対応策としての査察戦略が考えられなければならない。逆に又，査察戦略が転用者に判明してしまえば，転用者はそれらの査察戦略に対抗する転用戦略を考案するに違いない。これは正にゲーム理論の対象とするところである。この問題を解決するために，第2節で述べたようにAvenhausはゲーム理論的取扱いをしたのであったが，彼はその中で，転用者と査察者は，それぞれ最適戦略を採るものと仮定している。このために，取扱いは厳密であるが一般解を得るのは難しいということになってしまった。BATTELLEグループはこれに対して，転用者は，自己の目標（即ちM kgを転用すること）達成のために最良の戦略（Best Strategy）を採るものと仮定し，一方，査察者は，転用者が最良戦略を用いたときにも尚，転用を未然に防ぐことを可能にするような査察計画を立てるものとして，問題の解決を計っている。Avenhausが，査察者と転用者の戦略を同格に扱うことによって最適戦略を見つけようとしたのに対し，BATTELLEグループはまず転用者の最良戦略を求めて，それに対抗する査察者の対抗戦略を求めているために，そこで得られる戦略は，必ずしもAvenhausの云っているようなゲーム理論的取扱いによる最適戦略にはなっていないことを記憶しておく必要がある。しかしながら，一方，Avenhausが数学的取扱いの厳密さを求めるために，彼が想定した転用戦略が非常に単純化されていた（2.5.2を参照）のに対し，BATTELLEグループの想定した転用戦略は現実味のある多様な戦略となっており，したがって，これに対抗するように組み立てられる査察者の対抗戦略も具体性に富んだものとなっている。又，査察計画は，転用者の最良戦略に対抗して作られているために，そこで適用されるサンプリング・サイズは常に安全サイドになっていることを忘れて

はならない。このことは，査察者の最終的利得としての転用検出力に対する評価に於て，特に重要になってくるものである。

前に，BATTELLEグループの理論は直ぐに役立つという意味で実用的理論であると述べたが，上述のような観点からしても此の理論は「実用的理論」と呼ぶのにふさわしいと云える。このことを最も特徴ずけるものとして，彼等が考慮した転用の戦略と査察の戦略を以下に述べることにする。これらは，ゲーム理論的には純粋戦略と呼ばれるものであり，これらの組み合わせによって作られる戦略が混合戦略と呼ばれるものであって，転用を検出されない確率を最大にするように組み合わせられた混合戦略が転用者の最良戦略である。

3.2.1 転用戦略

転用戦略は，大別すると「データ偽造による転用」と「直接転用」に分けられる。データ偽造による転用とは，アイテムの中身を変えたり，記録データを改変したりすることによって転用するものであって，放設者MUFとしては現われて来ないものである。例えば，20%濃縮ウラン1 kgからなるアイテムを年間100個製造するプロセスがあったとしよう。このプロセスの年間処理量は20%濃縮ウラン100 kg となる。転用者は，製造過程のどこかで，この内の1 kgを天然ウランにすり替えて濃縮ウランを転用したとする。転用者は記録にも報告にも此の事実を残す筈はなく，したがって記録，報告上はあくまで20%濃縮ウラン1 kgからなるアイテムが100個製造されたことになっている。棚卸しによる実在庫調べに於ても，施設者はこれらのアイテム全てを公称値通りのものとして取扱う。したがって，帳簿在庫－実在庫の形で与えられるMUFの中には転用された1 kgの濃縮ウランは現われて来ず，他に理由がなければ此のMUFは測定精度の範囲内に納まってしまう。このような転用をデータ偽造による転用という。

一方，直接転用は，核物質の抜取りによる転用であって，MUFとして現われて来るものである。これは上記の例題プロセスに於て計量誤差を考えてみると判り易い。このプロセスの1回の計量（アイテム1個の計量）に係る相対標準偏差(δ)を0.5%と仮定しよう。アイテムの公称値(μ)は1 kgであるから，絶対標準偏差（$\sigma = \mu\delta$）は0.005 kgとなる。誤差限界は2σで表わされるとすると，これは0.01 kgとなる。従って，アイテムの真の値は$X = (1.00 \pm 0.01)$ kgとなり，$0.99\ \mathrm{kg} \leqq X \leqq 1.01\ \mathrm{kg}$の範囲内にあることになる。全アイテム(N)の計量を行なったとき，即ち，上記計量を100回繰り返してその合計を求めたとき，合計値の真の値は$W = (100 \pm 1)$ kgとなり，$99\ \mathrm{kg} \leqq W \leqq 101\ \mathrm{kg}$の範囲にあることになる。したがって，転用者が公称100 kgのウランを受け取ったとしても，その真の値が99 kgであったのか101 kgであったのか，その中間の値であったのかは判断出来ないことになる。このような事情の下に，転用者が，仮にその中から0.5 kgのウランを抜き取ったとしよう。これの誤差はないものとしても本質には影響しない。このとき，入力の真の値は$98.5\ \mathrm{kg} \leqq W \leqq 100.5\ \mathrm{kg}$の中にあり，これを用いて100個のアイテムを製作すると，各々は$0.98\ \mathrm{kg} \leqq X \leqq 1.005\ \mathrm{kg}$の間の値をとることになり，その公称値$\bar{X}$はすべて1 kgと判定されて，記録，報告にもそのように記載されることになる。したがって棚卸し時点での帳簿在庫は100 kgと計算される。一方，実在庫を測定すると，これは$98.5\ \mathrm{kg} \leqq W \leqq 100.5\ \mathrm{kg}$の間の値が観測される筈であり，例えば，99.0 kgと

観測されたとする。このときMUFは，定義により100－99.0＝1 kgと計算される。この内訳は，先の転用量0.5 kgと測定誤差0.5 kgの筈である。ところがこのMUF値，1 kgは，前述の合計値の真の値のもつ誤差限界である±1 kgの中に入るため，これは測定誤差に起因したものと判定されることになり，転用者は転用に成功することになる。このような転用が，直接転用と呼ばれるものである。

データ偽造と直接転用は更に次のように分類することが出来る。

(i) 全量欠陥（Gross Defect）

アイテムの中身を完全に抜取る（直接転用）か，アイテム重量を保存したままで中味の全部を低品位の別物とすり替え，記録，報告データには元のデータを記載する（偽造）という方法により転用された欠陥アイテムを意味する。

(ii) 中型欠陥（Medium-sized Defect）

アイテムの中身の一部を抜取るか，アイテム重量を保存したままで中味の一部を低品位の別の物とすり替え，記録，報告には元のデータを記載するという方法で転用された欠陥アイテムを意味する。但し，転用される量は，後述するアトリビュート測定（組成及び重量）の測定限界レベルより僅かに少ない程度の量であるものとする。BATTELLEグループは，アトリビュート測定に5％の相対標準偏差をもつ非破壊分析装置（NDA）を用いるものと仮定し，その測定限界レベルを標準偏差の6倍，即ち，アイテムの公称値の30％と採っており，これ以上の差は100％検出出来るものとしている。従って，この場合，中型欠陥とは，公称アイテム値の30％より僅かに少ない量の転用を含む欠陥アイテムということになる。尚，中型欠陥と全量欠陥の間の欠陥は「部分欠陥（Partial Defect）」と呼ばれるが，これは上記のアトリビュート測定で完全に検出されるために，全量欠陥と同じ取扱いになる。又，アトリビュート測定の感度は，実際には除々に変化するものであるが，サンプル・サイズの設計上，30％を超える欠陥に対しては100％であり，それ以下の欠陥に対しては突然0％に落ちるものと仮定している。したがって，中型欠陥に対してアトリビュート測定は何の役にも立たないものと考えて，これの検出には後述するバリアブル測定が使用される。但し，欠陥そのものの大きさは，バイアスと考えるにはあまりにも大きく，このためサンプル計画はアトリビュートモードで設計されることになる。

(iii) バイアス（小量欠陥）

多数のアイテムを対象に，それぞれから僅かずつの中身を抜取る（直接転用）か，中身の僅かな部分を等重量の別の低品位物質と置換し，記録，報告には置換前のデータを記載する（偽造）という方法により累積転用を目指した小量欠陥を意味する。

以上が転用者のいわゆる純粋戦略であるが，転用者はこれらの戦略を組み合わせた混合戦略も採ることが出来るものと仮定する。

3.2.2 査察戦略

上記のような転用者の戦略に対して，査察者は次に列挙するような方法を用いてこれに対抗する。

(i) 記録データと現物の照合検証－全数検査

(ii) アトリビュート測定法による査察

(iii) バリアブル測定法による査察

a) ランダム・エラー分散に対する統計的検証

b) 計量されなかったバイアス（Unacounted-for Bias）に対する統計的検証

(iv) 補助的な統計テスト

(v) MUF評価

a) 施設者MUF検証

b) （$\hat{D}$＋MUF）検証

この内，転用者の戦略と直接対抗する査察者の戦略は(ii)と(iii)であることを示す。(i)は，いわゆるアイテムの個数検査であって，施設への入出力点で査察者は常に全数検査を実施する。記録データには存在するが現物が無いというような事態が発生すれば保障措置上重大問題となるので，査察者は徹底的にこれを追求することになる。したがって，転用者が，このような方法による転用を考えることは少なく，それ故，これは転用戦略の中には含めていない。勿論，査察者が(i)の検証を受払い時点で怠るようなことがあれば，転用戦略としては最強のものになることは明白である。

(iv)の補助的な統計テストは，施設者の記録，報告データに検出された誤りが，転用の意図を隠すために故意に導入されたものか，それとも，純粋，単純な「過失」によるものかを見分けるためのテストであって，いわば施設者の正直さの度合をみるためのものである。この意味で，転用戦略とは直接には対抗しない類いのものである。

最後のMUF評価は，(ii)(iii)の査察戦略により，その物質収支期間中にM kgの転用もしくは損失が無かった事実を確認するためのものであって，転用者の戦略とは間接的には対抗するものの直接には対抗しないものである。この評価には2通りの意味がある。ひとつは，(ii)と(iii)の査察戦略の有効性を判定するという意味である。仮に，この評価の結果，「M kgの転用が無かったとは云えない」という判断を下さざるを得ないとしたら，その時は査察戦略(ii)と(iii)は転用戦略に破られたことになる。もうひとつの意味というのは，敵の戦略の評価である。即ち，MUFの評価，中でも（$\hat{D}$＋MUF）の評価によって，転用者がどの戦略を用いて，どの程度の利得を得た可能性があるのかが判定できる（2.3.3）。これによって査察者は，次期の物質収支期間の戦略を変更して転用戦略に対抗することが出来る。この意味で，(v)のMUF評価は転用戦略とは間接的に対抗するといったのである。

結局，査察者の戦略としては(ii)と(iii)ということになる。(ii)と(iii)に含まれる問題はサンプリング計画を如何に設計するかということであり，以下にこれを説明する。

3.3 サンプリング計画の設計

転用者が，個々のアイテムに対して採用する可能性のある種々の戦略に対抗するために，査察者は2種類の測定方法を採用する。ひとつはアトリビュート測定といわれるものであり，転用戦略(i)全量欠陥による転用に対抗するものである。この測定は，中型欠陥を超える部分欠陥から，全量欠陥に至るまでの間の，全ての欠陥アイテムを，高い信頼度でもって直ちに検出出

来るような計測装置を用いる測定である。もうひとつの測定方法は，バリアブル測定といわれるものであって，アトリビュート測定より精度の高い測定であり，対象としたアイテムの中味と記録データとの間の僅かな不一致も検出出来るような測定方法である。この測定方法は，転用戦略(ii)(iii)，即ち，中型欠陥とバイアスによる転用に対抗するためのものである。

これら2つの測定方法によって測定すべきサンプル・サイズは次のように設計される。

3.3.1 アトリビュート測定のためのサンプル・サイズ設計（n_a）

転用者は，それぞれのストラータに於て，多数のアイテムに関して全量偽造ないしは全量抜取りを行なうことにより，M kgの核物質を累積転用することが出来るものと仮定する。この戦略に対抗するためには，各ストラータの中には（M／$\bar{X}$）個の欠陥アイテムがあるものとしたときに，そのような欠陥が少くともひとつは高い確率で含まれているように，査察者のサンプリング計画は設計されることになる。上記の$\bar{X}$は，それぞれのストラータの中のひとつのアイテムの公称核物質重量であり，従って，（M／$\bar{X}$）は，転用者がM kgの転用を達成する為に必要な最少欠陥アイテム数である。

ところで，アトリビュート測定では，アイテムの公称値との差が「ある量」以上であれば，100%の確率でもってそれを検出出来るような測定法が採られる。例えば，公称値の5%の相対標準偏差をもつ非破壊分析装置（NDA）が使用されるものと仮定しよう。このとき，この装置の検出範囲の下限は，保守的な値として，標準偏差値の6倍，即ち30%であると採ることにする。したがって，この装置を用いれば，ひとつのアイテムの中から30%以上の抜取り，あるいは偽造のすべてを100%の確かさでもって検出できるものと仮定することが出来る。上述の「ある量」とは，此の場合アイテム公称値の30%を意味する。

転用者がこのような大規模な欠陥を通してMを入手しようとするとき，その最良戦略は，全量欠陥により転用アイテム数を最小にするか，あるいはアトリビュート測定の検出限界レベルを僅かに下回る中型欠陥に依るか，のどちらかである。何故ならば，そのときに転用を検出されない確率が最大になるからである。中型欠陥を超える部分欠陥に依る場合には同じM kg を入手するためには全量欠陥に依る場合よりも欠陥アイテム数を増やさなければならず，しかも此の量の欠陥に対するNDAの感度は100 %であるから結局検出される確率は高くなるため，このような部分欠陥による転用は自滅的なものになってしまう。

さて，ここで前述の仮定に基ずいてアトリビュート・サンプル・サイズを導いておくことにする。対象とするストラータに含まれる全アイテム数をN，その中に含まれる全量欠陥の個数をr_gとする。仮定により

$$r_g = \frac{M}{\bar{X}} \qquad (3.3-1)$$

であり，このようなストラータからランダムにn_aのアイテムを抽出したとき，その中に含まれる欠陥アイテムの数xは超幾何分布に従う。このことは，既に2.5.1の中で記述したところである。このときxの確率密度函数f(x)は，（2.5－15）式でn_iの代りにn_a，r_iの代りにr_gと置き，添字iを省略した形で与えられる。即ち，

$$f(x)=\frac{\binom{r_g}{x}\binom{N-r_g}{n_a-x}}{\binom{N}{n_a}} \qquad (3.3-2)$$

n_a に対して査察者が要請する条件は，この中に少くとも1個の欠陥アイテムが高い確率で含まれることである。これは逆に，n_a 個のサンプルの中に1個も欠陥アイテムが含まれなかった場合に，このストラータには欠陥アイテムは存在しなかったと誤った判定を下す過ちを犯す確率，即ち第2種過誤を出来るだけ小さな値 β に抑えることを要請することと等価である。n_a 個の中に1個も欠陥アイテムが含まれない確率は $f(o)$ で与えられる。故に，

$$\beta = f(o) = \frac{\binom{r_g}{o}\binom{N-r_g}{n_a}}{\binom{N}{n_a}} = \frac{\binom{N-r_g}{n_a}}{\binom{N}{n_a}} \qquad (3.3-3)$$

上式を n_a について解くことによりサンプル・サイズが求められる。Nは充分に大きく，$N \gg r_g$ であると仮定すると，上式は次のように近似出来る。

$$\beta = \left(1-\frac{n_a}{N}\right)^{r_g} \qquad (3.3-4)$$

これより直ちに，

$$n_a = N\left(1-\beta^{1/r_g}\right) \qquad (3.3-5)$$

と求められる。

3.3.2 バリアブル測定のためのサンプル・サイズ設計（n_{v1}, n_{v2}, n_{v3}）

バリアブル測定は，前に述べたように転用戦略(ii), (iii)，即ち中型欠陥とバイアスによる転用に対抗するためのものであり，それぞれに対して別々のサンプル・サイズが設計される。この2種類のサンプル・サイズの外に，変動バイアスに対抗するためのサンプルサイズも設計される。変動バイアスというのは，記録データと真値との間の僅かな不一致，即ち，バイアスを隠蔽するために，バイアスの分散を拡大させることを意図して転用者が故意に変動させたバイアスのことである。

変動バイアスを含めた3種の転用戦略のいずれにも対抗するためには，査察者としては上記3種のサンプル・サイズの内の最大値をもってバリアブル・サンプル・サイズとすればよい。以下に，これらのサンプル・サイズの設計方法を述べることにする。

(A) 中型欠陥に対するバリアブル・サンプル・サイズの設計（n_{v1}）

中型欠陥に対するサンプル・サイズは，前述のアトリビュート・サンプル・サイズの設計と同様の思想で設計される。即ち，ストラータの中の中型欠陥の総量が，丁度Mになるような個数の欠陥アイテムが含まれているとき，このストラータから抽出したサンプルの中に高い確率で，そのような欠陥アイテムが少くとも1個は含まれるように設計される。

ストラータの中の中型欠陥の個数は，既述したように，アトリビュート測定の検出限界レベルから決められるものである。此の検出限界レベルは，このレベル以上の欠陥に対しては100

%の感度をもち，それを下回わる欠陥に対しては突然感度が0に落ちてしまうような感度の限界値として定義される。現実の計測装置ではこのようなことはありえず，感度は漸減して遂には0になるものであるが，この定義は査察者が，この限界レベルの上下に対して充分なサンプル数をとるために設けた設計上の仮定である。既述したように，BATTELLEグループはこの値として非破壊分析装置の標準偏差の6倍を採用しているが，この値そのものには任意性がある。標準偏差として5%を仮定したとき，検出限界レベルは30%となる。このとき，ひとつのストラータからM kgを転用しようとすると，（$M/0.3\overline{X}$）個の中型欠陥が必要となる。

対象とするストラータの全アイテム数をN，中型欠陥の個数をr_mで表わすと，一般に

$$r_m = \frac{M}{\gamma \overline{X}} \qquad (3.3-6)$$

で表わされる。γはアトリビュート測定の検出限界レベルである。このようなストラータからn_{v1}個のサンプルを抽出したとき，その中に少くとも1個の中型欠陥が含まれるようにするとき，n_{v1}は（3.3−5）式と同様の形，即ち，

$$n_{v1} = N\left(1-\beta^{1/r_m}\right) \qquad (3.3-7)$$

で与えられる。

(B) バイアスに対するバリアブル・サンプル・サイズの設計（n_{v2}）

第2番目のバリアブル・サンプル・サイズは，中型欠陥よりも更に小さな欠陥により大多数のアイテムから微少量の核物質を抜取るか，ないしは微少量のデータ偽造を行った結果，記録データにバイアスが掛けられているような，そのような転用者の戦略に対抗するために計算されるサンプル・サイズである。この場合，転用者は，M kgの量を入手するために，単一の大ストラータを対象として転用するか，あるいは，数種類のストラータないしは全てのストラータからM kgの一部ずつを転用出来るものと仮定する。

此の様なバイアスに対するサンプル・サイズの決定方法は，2.5節に於て述べた方法と同様の方法が適用出来る。即ち，2.2.3節で定義した累積バイアス$\hat{D}$とその分散$\sigma_{\hat{D}}^2$を用いることにより計算することが出来る。ただし，ここで述べるBATTELLEグループの方法は，Avenhausが行なったような厳密なゲーム理論の適用を避けていることは既に概要で述べた通りである。手法としては，Stewartの方法が採用されているが，ただし，$\sigma_{\hat{D}}^2$に対する現実的な考察を実施することにより，単なるStewartの方法とは異なっている点で改良されたものとなっている。

サンプル・サイズは，全てのストラータに亘っているシステマティック・エラーの中に存在する説明不能なバイアスないしは"差"の累積量Mを検出するように設計される。この場合，それぞれのストラータの中の"差"の累積方向は，故意に導入されたバイアスがMUF値を減少させるような効果をもつような方向になっているものと仮定する。

さて，バイアスの検出力は，$\hat{D}$の中の測定の不確かさに直接関連するものである。この測定の不確かさは，ランダム・エラーとシステマティック・エラーの両方から構成されるものであり，両者とも検出力に影響を与えるものであるが，サンプル・サイズを増加することによって減らすことが出来るのはランダム・エラーだけである。このことは，2.3.3に於て求めた$\sigma_{\hat{D}}^2$

の式の形から直ぐに判ることである。ここで，$\sigma_{\hat{D}}^2$に関する考察を容易にするために，（2.3−23）式を定性的に以下のように表わすことにしよう。

$$\sigma_{\hat{D}}^2 = \sigma_{\hat{D}_s}^2 + \sigma_{\hat{D}_r}^2 = \mathrm{Const} \times [\sigma_{sys}^2 + \sigma_{ran}^2 / n] \qquad (3.3-8)$$

上式のnが査察者のサンプル・サイズであり，σ_{sys}^2，およびσ_{ran}^2は施設者と査察者のシステマティックおよびランダム誤差の合成誤差分散に対応するものと考えておけばよい。このとき，nの増加によって$\sigma_{\hat{D}}^2$がどのように減少して行くかを考えることが出来る。上式に於て$\sigma_{sys}^2 < \sigma_{ran}^2$のとき，nを増加して行くことにより，あるnの値$n_e$のところで

$$\sigma_{sys}^2 = \sigma_{ran}^2 / n_e \qquad (3.3-9)$$

となるだろう。このn_eよりも更にnを増加させれば$\sigma_{sys}^2 > \sigma_{ran}^2 / n$となるが，これによって合計量$\sigma_{\hat{D}}^2$はどれ位小さく出来るものであるかを考えておく必要がある。何となれば，サンプル・サイズnを増加する，即ち，査察者の査察業務量の増加によって，当面の問題である累積バイアスをどこまで正確に求め得るのかという事は重大な関心事であるからである。この変化の様子を示したのが下の表である。

サンプルサイズ	$\sigma_{\hat{D}_s}^2$ / Const	$\sigma_{\hat{D}_r}^2$ / Const	$\sigma_{\hat{D}}^2$ / Const	$\sigma_{\hat{D}}$ / Const′
n_e	σ_{sys}^2	σ_{sys}^2	$2.000\ \sigma_{sys}^2$	$1.41\ \sigma_{sys}$
$2\ n_e$	σ_{sys}^2	$\sigma_{sys}^2/2$	$1.500\ \sigma_{sys}^2$	$1.23\ \sigma_{sys}$
$4\ n_e$	σ_{sys}^2	$\sigma_{sys}^2/4$	$1.250\ \sigma_{sys}^2$	$1.12\ \sigma_{sys}$
$8\ n_e$	σ_{sys}^2	$\sigma_{sys}^2/8$	$1.125\ \sigma_{sys}^2$	$1.06\ \sigma_{sys}$
$16\ n_e$	σ_{sys}^2	$\sigma_{sys}^2/16$	$1.063\ \sigma_{sys}^2$	$1.03\ \sigma_{sys}$
∞	σ_{sys}^2	0	$1.000\ \sigma_{sys}^2$	$1.00\ \sigma_{sys}$

この表から判る通り，n_eから先これを無限大にしたところで$\sigma_{\hat{D}}$の減少は僅か40％程度である。一方，サンプル・サイズは当然無限大には出来ず，アイテムの全数以上にはとることは出来ないから，全数検査の場合と比べれば$\sigma_{\hat{D}}$の減少は40％以下と考えなければならないだろう。この事情は，バイアスのためのサンプル・サイズはn_eよりもあまり大きくとることはその効果から考えて得策ではないという事を示している。しかし，n_eの何倍を採ればよいかという事になると，これは査察者の考え方と，現実に行われる物理的測定技術の限界によって決められるべきものである。

BATTELLEグループは，此の点を考慮して，ランダム・エラー分散はシステマティックエラー分散の「4分の1」以下にはなり得ないと考え，その点をバイアス用サンプル・サイズの上限とすることにしている。即ち，バイアス用サンプル・サイズをn_{v_2}とすると，

$$\sigma_{\hat{D}_r}^2 \geqq \frac{1}{4} \sigma_{\hat{D}_s}^2 \qquad (3.3-10)$$

$$n_{v_2} \leqq 4\ n_e \qquad (3.3-11)$$

という制限条件を採用している。

（3.3−10）式で等号の成り立つ点は，それ以上サンプル・サイズを大きくしてもランダムエラーを減少させる効果は少ないという意味で「収益漸減点（The Point of Diminishing Return)」と呼んでいるが，この点の設定は，BATTELLE グループの理論に於ける重要な仮定となっているものである。

ところで，$\sigma_{\hat{D}}^2$ は，2.5 節で述べたように帰無仮設 H_0 と対立仮設 H_1 の下では異った値をとることに注意しなければならない。その違いは（2.5−14）式と（2.5−20）式から判るように $\sigma_{\hat{D}}^2$ のランダム成分によるものであり，システマティック成分は不変である。したがって，H_0 および H_1 の下における $\sigma_{\hat{D}}^2$ は次のように表わすことができる。

$$\sigma_{\hat{D}|H_0}^2 = \sigma_{\hat{D}_r|H_0}^2 + \sigma_{\hat{D}_s}^2 \qquad (3.3-12)$$

$$\sigma_{\hat{D}|H_1}^2 = \sigma_{\hat{D}_r|H_1}^2 + \sigma_{\hat{D}_s}^2 \qquad (3.3-13)$$

ここで帰無仮設 H_0 とは，「転用の事実はなかった，即ち $\hat{D}=0$」と仮設することであり，対立仮設 H_1 とは「M kg の転用があった，即ち $\hat{D}=M$」と仮設することである。ここで，サンプル・サイズを決定する査察者の要請をまとめてみよう。

(i) H_0 が真実のときにこれを棄却する誤りを犯す確率，即ち第 1 種過誤を α に抑え，かつ，H_1 が真実のときに H_0 を採択する誤りを犯す確率，即ち第 2 種過誤を β に抑える，換云すれば M を検出する確率が（1−β）になるように全サンプル・サイズ n_{v_2} を決定する。

(ii) 上記で求めた n_{v_2} が（3.3−11）式の制限条件を満足しない場合，即ち，H_1 の下における $\sigma_{\hat{D}_r}^2$ が（3.3−10）式を満足せず，$\sigma_{\hat{D}_r|H_1}^2 < \frac{1}{4}\sigma_{\hat{D}_s}^2$ になってしまう場合は，

$$\sigma_{\hat{D}_r|H_1}^2 = \frac{1}{4}\sigma_{\hat{D}_s}^2 \qquad (3.3-14)$$

と置いて全サンプル・サイズ n_{v_2} を求める。これは

$$n_{v_2} = 4\,n_e \qquad (3.3-15)$$

により与えられるが，この場合は当然，目標の 1−β の検出力は確保出来なくなる。

(iii) 全サンプル・サイズの各ストラータへの配分は，$\sigma_{\hat{D}_r|H_1}^2$ を最小にするように決める。

(iv) 全サンプル・サイズの設計において，

$$\sigma_{\hat{D}_r|H_1}^2 = C^2\,\sigma_{\hat{D}_r|H_0}^2 \qquad (3.3-16)$$

と置くことが出来るものと仮定する。この C^2 は H_1 に対するランダム誤差分散因子と呼んでいるものであって，施設者が故意にランダム誤差分散を拡大しうる上限値を与える因子である。BATTELLE グループは，

$$C^2 = 4 \qquad (3.3-17)$$

と仮定している。

(i)の要請は，α，β に対して（2.5−27）式の成立することを要請することであり，これは（2.5−30）式によって表わされる。これを（3.3−12，13，16）式を用いて書き直すと，

$$Z_{1-\beta}\sqrt{\sigma_{\hat{D}_s}^2 + \sigma_{\hat{D}_r|H_1}^2} = M - Z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma_{\hat{D}_s}^2 + (\sigma_{\hat{D}_r|H_1}^2 / C^2)} \qquad (3.3-18)$$

となり，これを満足するように n_{v_2} を決めればよい。

ところで，ここで得られた n_{v_2} が（3.3－11）式の条件を満たすかどうかは，（3.3－10）式と上式とを比べてみることにより，あらかじめ知ることが出来る。即ち「収益漸減点」がMの大きさと関連付けられることを利用するのである。「収益漸減点」の条件，即ち（3.3－14）式を（3.3－18）式に代入すると，

$$M = Z_{1-\beta}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)}\sigma_{\hat{D}_s} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4C^2}\right)}\sigma_{\hat{D}_s} \qquad (3.3-19)$$

C^2 に対して（3.3－17）式を適用すると，上式は

$$M = \left[Z_{1-\beta}\sqrt{\frac{5}{4}} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{17}{16}} \right]\sigma_{\hat{D}_s}$$

$\alpha = \beta = 0.05$ と採るとき，$Z_{1-\beta} = Z_{1-\alpha} = 1.645$ となるから，結局

$$M = 3.53\ \sigma_{\hat{D}_s} \quad 或は \quad \frac{M}{\sigma_{\hat{D}_s}} = 3.53 \qquad (3.3-20)$$

が収益漸減点とMとの関係を示す条件式として得られる。即ち，$M > 3.53\ \sigma_{\hat{D}_s}$ のときは，（3.3－18）式を解いて n_{v_2} を求めればよく，そのときは（3.3－10，11）式は自動的に満足される。一方，$M < 3.53\ \sigma_{\hat{D}_s}$ のときは（3.3－14）式を設定して（3.3－15）式により n_{v_2} を求めなければならない。このとき，$\alpha = 0.05$ に対して，$\beta = 0.05$ の値を達成することは出来ず，$\beta > 0.05$ となってしまう。このとき，あくまで $\beta = 0.05$ となるようにしたいと査察者が望む場合には，検出したいと考えるMの量を大きくとるか，さもなくば施設者および査察者両方のシステマティック・エラーを小さくするように努力するしか方法はない。しかしながら，此の時点でMの大小に関して考察するのは早過ぎる。より現実的な考察は，各種の転用戦略を組み合わせた混合戦略によって転用者が入手する総転用量Mに対する検出力に基ずいて為されるべきである。次に，収益漸減点の上下における全サンプル・サイズを求めておく。

いずれの場合に於ても，$\sigma^2_{\hat{D}_r|H_1}$ を最小にするようにサンプル・サイズは決められる。これは（2.5－14）式で定義される $\sigma^2_{\hat{D}_r|H_0}$ と（3.3－16）式とから

$$\sigma^2_{\hat{D}_r|H_1} = C^2\sigma^2_{\hat{D}_r|H_0} = C^2 \sum_i^R N_i^2\sigma^2_{dri} / n_i \qquad (3.3-21)$$

を，境界条件

$$n = \sum_{i=1}^R n_i \qquad (3.3-22)$$

の下に最小にすることにより求められる。上式のRはひとつの物質収支期間中に取扱われるストラータの全数である。

ラグランジュの未定乗数法を用いることにより，$\sigma^2_{\hat{D}_r|H_1}$ を最小にするためには，

$$n_i = n\left(\frac{N_i\ \sigma_{dri}}{\sum_j N_j\sigma_{drj}}\right) \qquad (3.3-23)$$

の関係が成立しなければならない。このとき，

$$n = \frac{(C\sum_i N_i\ \sigma_{dri})^2}{\sigma^2_{\hat{D}_r|H_1}} = \frac{4(\sum N_i\ \sigma_{dri})^2}{\sigma^2_{\hat{D}_r|H_1}} \qquad (3.3-24)$$

が得られる。

$M > 3.53\ \hat{\sigma}_{D_s}$ のとき，（3.3－18）式を解いて得られた $\sigma^2_{\hat{D}_r|H_1}$ を上式に代入することにより全サンプル・サイズは求められ，その各ストラータへの配分は（3.3－23）により与えられる。

$M < 3.53\ \sigma_{\hat{D}_s}$ のとき（3.3－14）式より

$$n = \frac{(C \sum_i N_i\ \sigma_{dri})^2}{\sigma^2_{\hat{D}_s}/4} \quad \frac{16\ (\Sigma N_i\ \sigma_{dri})^2}{\sigma^2_{\hat{D}_s}} \qquad (3.3-25)$$

と求められ，各ストラータへの配分は上と同じである。上記で得られた n が n_{v_2} である。

(C) 分散テストのためのバリアブル・サンプル・サイズの設計（n_{v_3}）

このサンプリング計画は，観測されたランダム・エラー分散と設計情報に基ずく値との対応をチェックするためのものである。即ち，（3.3－16）式の妥当性をチェックするためのものである。このためのバリアブル・サンプル・サイズは，観測されたランダム・エラー分散が，設計情報から期待される値に比べて C^2 倍の差があったとき，これを高い確率で検出できるように設計される。ランダム・エラー分散が故意に拡大されたかどうかをチェックするため，

$$\frac{(n_{v_3} - 1)\ \sigma^2_{\hat{D}_r}}{\sigma^2_{or} + \sigma^2_{I_r}} \qquad (\text{o} = \text{施設者},\ \text{I} = \text{査察者})$$

を用いて χ^2－テストが行われる。このテストは（3.3－17）式の仮定をした場合，

$$C^2 = \frac{\sigma^2_{\hat{D}_r,\ true}}{\sigma^2_{\hat{D}_r,\ design}} = 4.0 \qquad (3.3-26)$$

を95％の確率で検出するようにする。このためには，$\alpha = \beta = 0.05$ のとき，

$$n_{v_3} = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{Z_{1-\alpha} + C Z_{1-\beta}}{C - 1}\right]^2 = 13 \qquad (3.3-27)$$

したがって，C に対して別の値を採らぬ限りは，各ストラータに対して n_{v_3} は常に 13 である。

3.4 転用の検出確率

3.4.1 D と MUF を分離した検出確率（施設者MUF検証法に対応）

査察計画作成の最終段階は，3.2.2 で作成されたサンプリング計画と MUF の評価によって，各種転用戦略，およびその混合転用戦略に対する査察者の総合検出力を評価することである。この評価は，検出力の替りにむしろ「検出されない確率Q」によって考えた方が判りやすい。個々の転用戦略に対する検出されない確率は次のようである。

Q_1 ＝ ある転用量Gが，単一のストラータかあるいは全ストラータに互る全量欠陥ないしは中型欠陥によって累積されたとき，査察者のランダム・サンプルの中にそのような欠陥アイテムがひとつも含まれない確率

Q_2 ＝ ある転用量Dを隠蔽することの出来るような全MBAに互る小さなバイアスの累積を検出されない確率

Q_3 ＝ MUF の中に入っている MUF_T の量のロスないし直接転用を検出されない確率

ただし，$G+D+MUF_T=M$。

上記の検出されない確率は次のように求められる。

（3.3－4）式は，M kgの転用をするのに必要な r_g 個の全量欠陥が n_a 個のサンプル中に1つも検出されない確率が β であることを意味している。従って，r_g 個の内のどれか1つが検出されない確率は $\beta^{(1/r_g)}$ となる。同様の事が中型欠陥についても云える。転用者がM kgの目標値の内G kgを全量欠陥と中型欠陥により転用しようとしたとする。このとき，全量欠陥および中型欠陥の割合をkGおよび（1－k）Gとするとき，それぞれに必要とされるアイテム数は，

$$r_g' = \frac{kG}{\bar{X}} \qquad r_m' = \frac{(1-k)G}{\gamma\bar{X}}$$

であり，これらがいずれも検出されない確率 Q_1 は，r_g および r_m に対して（3.3－1，6）式を用いて

$$Q_1 = \left[\beta^{(1/r_g)}\right]^{r_g'} \cdot \left[\beta^{(1/r_m)}\right]^{r_m'} = \left[\beta^{(\bar{X}/M)}\right]^{(kG/\bar{X})} \cdot \left[\beta^{(\gamma\bar{X}/M)}\right]^{(1-k)G/\gamma\bar{X}}$$

$$= \beta^{(kG/M)} \cdot \beta^{(1-k)G/M}$$

$$= \beta^{G/M} \qquad (3.4-1)$$

によって与えられる。

Q_2 は（2.5－30）式でMの替りにDとおいたときの β によって与えられる。

$$Q_2 = \Phi\left[\frac{Z_{1-\alpha}\cdot\sigma_{\hat{D}|H_0} - D}{\sigma_{\hat{D}|H_1}}\right] \qquad (3.4-2)$$

同様にして，（3.3－18）式の表現を用いて Q_2 を表現することも出来るが，式の取扱上の便利さから，一般的な上式で表現しておく。

Q_3 は Q_2 を導いたプロセスと同様のプロセスによって次のように与えられる。

$$Q_3 = \Phi\left[\frac{Z_{1-\alpha}\,\sigma_{MUF} - MUF_T}{\sigma_{MUF}}\right] = \Phi\left[Z_{1-\alpha} - \frac{MUF_T}{\sigma_{MUF}}\right] \qquad (3.4-3)$$

転用者が目標値のM kgを上述のようにG，D，MUF_T の形に分散して転用する場合，これらがいずれも検出されない確率をQで表わすと，これは次のように与えられる。ただし，この場合，査察者は全量及び中型欠陥のサンプル・テストを実施し，バイアスのテストと MUF_T のテストは，それぞれD統計およびMUF統計を別々に適用するものと仮定する。これは既述の「施設者MUF検証」に対応するものである。このときQは，

$$Q = Q_1\cdot Q_2\cdot Q_3 = \beta^{G/M}\cdot\Phi\left[\frac{Z_{1-\alpha}\,\sigma_{\hat{D}|H_0} - D}{\sigma_{\hat{D}|H_1}}\right]\cdot\Phi\left[Z_{1-\alpha} - \frac{MUF_T}{\sigma_{MUF}}\right] \qquad (3.4-4)$$

$$\equiv \beta^{G/M}\cdot\Phi(\theta_D)\cdot\Phi(\theta_{MUF_T}) \qquad (3.4-5)$$

但し，　$M = G + D + MUF_T$　（3.4－6）

Q_{max} を求めるためには，ラグランジュの未定乗数法を用いればよい。Qの中に指数型が含まれている事を考慮して

$$H = \ell n\, Q + \lambda\,(M - G - D - MUF_T) \qquad (3.4-7)$$

とおく。

$$\frac{\partial H}{\partial G}=0 \quad より \quad \frac{\ell n \beta}{M}=\lambda \tag{3.4-8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial D}=0 \quad より \quad -\frac{1}{\sigma_{\hat{D}|H_1}} R(\theta_D)=\lambda \tag{3.4-9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial MUF_T}=0 \quad より \quad -\frac{1}{\sigma_{MUF}} R(\theta_{MUF_T})=\lambda \tag{3.4-10}$$

ただし　$R(X)=\Phi'(X)/\Phi(X)$　(3.4−11)

これより，

$$\theta_D=R^{-1}\left(\frac{-\ell n\ \beta}{M/\sigma_{\hat{D}|H_1}}\right) \tag{3.4-12}$$

$$\theta_{MUF_T}=R^{-1}\left(\frac{-\ell n\ \beta}{M/\sigma_{MUF}}\right) \tag{3.4-13}$$

を求めることが出来る。θ_D，θ_{MUF_T} が求められると，これらにより，Qを最大にする転用の最適配分（最良戦略）が以下のように求められる。

$$D=Z_{1-\alpha}\cdot\sigma_{\hat{D}|H_0}-\theta_D\cdot\sigma_{\hat{D}|H_1} \tag{3.4-14}$$

$$MUF_T=(Z_{1-\alpha}-\theta_{MUF_T})\cdot\sigma_{MUF} \tag{3.4-15}$$

$$G=M-D-MUF_T \tag{3.4-16}$$

このとき，これらの転用のすべてが査察に検出されない確率Q_{max}は（3.4−12，13）式により求めたθ_Dとθ_{MUF_T}および（3.4−16）式のGを（3.4−5）式に用いることによって求められる。

上記のQ_{max}のプロセスに於て，$G<0$になる場合がある。これは$G\geq 0$という境界条件を満たしていないために，Q_{max}を求めるプロセスはやり直しが必要である。即ちその場合には，$G=0$と設定する。このとき（3.4−9，10）式により次式が得られる。

$$\frac{1}{\sigma_{\hat{D}|H_1}} R(\theta_D)-\frac{1}{\sigma_{MUF}} R(\theta_{MUF_T})=0 \tag{3.4-17}$$

但し　$MUF_T=M-D$　(3.4−18)

上式は試行錯誤によって解くことが出来る。

3.4.2　（D＋MUF）による検出確率（D＋MUF検証法による対応）

既に2.3で述べたように，DとMUFは相関関係をもつために，DとMUFを分離して検出確率を論議するのはあまり良い方法ではない。2.3.3で述べた（D＋MUF）統計の性質を用いて，これらを分離しないで検出確率を求めるのが，より妥当な方法であると考えられる。この場合の検出されない確率Qは次式で与えられることになる。

$$Q=\beta^{G/M}\Phi\left[Z_{1-\alpha}-\frac{M-G}{\sigma_{\hat{D}+MUF}}\right]\equiv\beta^{G/M}\Phi(\theta_{\hat{D}+MUF}) \tag{3.4-19}$$

Q_{max} を求めるためには，

$$\ell n\ Q = \frac{G}{M}\ell n\ \beta + \ell n\ \Phi\ (\ \theta_{\hat{D}+MUF}\ ) \qquad (3.4-20)$$

と表わして

$$\frac{\partial\ \ell n Q}{\partial G} = 0 \quad より \quad R\ (\theta_{\hat{D}+MUF}\ ) = -\frac{\ell n\ \beta}{M/\sigma_{\hat{D}+MUF}}$$

これより

$$\theta_{\hat{D}+MUF} = R^{-1}\left(\frac{-\ell n\ \beta}{M/\sigma_{\hat{D}+MUF}}\right) \qquad (3.4-21)$$

が求められる。これを用いて，転用の検出されない確率を最大にするM－G（＝D+MUF）とGの最適転用配分（最良戦略）が次の様に求まる。

$$M - G = (\ Z_{1-\alpha} - \theta_{\hat{D}+MUF}\ )\ \sigma_{\hat{D}+MUF} \qquad (3.4-22)$$

$$G = M - (\ Z_{1-\alpha} - \theta_{\hat{D}+MUF}\ )\ \sigma_{\hat{D}+MUF} \qquad (3.4-23)$$

又，このときのQ_{max}は（3.4－21，23）を（3.4－19）式に用いることによって求められる。

3.5 査察計画の最終評価

査察計画の最終段階は，設計されたサンプリング計画を査察者の検出目標の立場から評価することである。転用者の種々の転用ルートによる転用戦略に対して，査察者のサンプリング計画による査察戦略がどれ程有効であるかは，最良転用戦略に於けるQ_{max}に対して査察者はどれだけの検出力を持つかによって表現されよう。これをPとすると，

$$P = 1 - Q_{max} \qquad (3.5-1)$$

で与えられる，

Pの値は，$\alpha = \beta = 0.05$としても必ずしも$P \leqq 0.05$とはならない。それよりもむしろ$P > 0.05$の方が普通であるかも知れない。しかし，だからといって，設計されたサンプリング計画が不適当であるとは断じられない。何となれば，Q_{max}は転用者が常に最良戦略を採用したときの値であり，現実の場合には，そのようなことは殆んど起り得ないと考えられるからである。しかも，サンプル・サイズは，それぞれの段階で転用戦略に充分対抗出来ることを念頭にして，充分な大きさに採って来ているのである。それ故，最終的な$P = 1 - Q_{max}$の値がβに対して要求したように$1 - \beta = 95\%$以下であっても，見方によっては充分満足出来るサンプリング計画であると考えることも出来る。

しかしながら，この点の判断は査察者の考え方に依存するものである。査察者がどう判断するかによって，場合に依ってはサンプリング計画の作成をやり直す必要も出て来る。

Pの値を更に高くしたい場合には，アトリビュート・サンプリング計画に於けるβの値をより低くし，バリアブル・サンプリング計画における$\sigma_{\hat{D}}$や$\sigma_{\hat{D}+MUF}$に対するランダムエラーの目標をより小さなものに設定し直して，再びサンプリング・サイズを計算すればよい。もっとも，この方法が有効なのは，測定の不確かさの限界からみて，転用量Mの検出を不可能にしない場合に限られる。この点については，MUFの評価に関する理論（2.3）のところで，測定精度とMの関係として既に記述したとおりである。

4. おわりに

この報告書の原稿は今から5年前に書かれたものである。当時のわが国は，核不拡散条約（NPT）の批准に向けて国内・国外において悪戦苦闘をしていたところであった。国際的には，批准が一日遅れるということは，それだけわが国の国際社会における立場を悪くすることを意味すると云われていた。しかし国内では，この条約は核保有国のみ優遇するものであって，不平等条約であるとの批判が強く，この説明に関係者は苦労の連続であった。とはいえ，批准は時間の問題であり，それを可能とするためにも国内の計量管理制度を完備して，NPT 批准と同時に受け入れることになる国際保障措置に対する国内準備を急がなくてはならない時期であった。著者達は，昭和46年に保障措置のための情報処理システムの開発に取り組んで以来，計量管理をベースとする保障措置で，何が云えるか，何処まで云えるか，……等々を考えて来た。本報告書は，NPT批准直前において，ここまで出来そうだという保障措置の概念を，主として統計的検証理論に重点を置きながら説明したものである。この内容は通商産業省資源エネルギー庁の委託を受けて核物質管理センターが昭和50年度に行った報告書「国内保障措置体制の調査（昭和51年2月）」に載せたものであるが，保障措置に関する知識が益々広く要請されるように時代が移行している経過をみて，ここにまとめて一冊の報告書とした次第である。

INFCE 以後，核不拡散のためには，保障措置システムの改良強化が最重要であると認識され，その具体的方策が検討されている。そのひとつは，Near-Real-Time 計量管理の採用であり，他のひとつは封じ込め／監視の拡大使用による強化である。これらは，現行保障措置システムとは異なる概念を含むものであり，いわば第2世代の保障措置である。これについては本報告書の第Ⅱ部で報告することにする。

謝　辞

本報告書は，その成立過程において当時の室長であり現企画室次長平田実穂氏との絶えざる議論があってはじめて完成したものであることを特記して，同氏に対し著者達は深く感謝するものである。又，本研究の遂行にあたり，暖かい支援を頂いた室長吉田弘幸氏に心からの謝意を表するものである。

参 考 文 献

1) R. Avenhaus, et. al., ; Safeguards Statements Based on Relevant Components of Material Unaccounted For (MUF), IAEA-Working Group Meeting

2) R. Avenhaus, et. al. ; Relations between Relevant Parameters for Inspection Procedure; KFK 908 (1970)

3) S. Tamiya, et. al. : A Review of National Safeguards System in Japan and its Systems Study, 4th Geneva Conference, A/CONF. 49/P/828 (1971)

4) R. Otto, et. al. ; Assessment of MUF and Inspection Efforts in a Centrifuge Plant, IAEA-Working Group Meeting

5) W. Gmelin, et. al. ; A Technical Basis For International Safeguards, A/CONF.49/P/773 (1971)

6) K.B. Stewart ; A Cost Effectiveness Approach To Inventory Verification, IAEA-SM-133/59

7) R. Avenhaus ; Game Theoretical Treatment of a Statistical Inventory Verification Model, IAEA-Working Group Meeting (1972)

8) R. Avenhaus, et. al. ; Optical Sampling for Safeguarding Nuclear Material, IAEA-Working Group Meeting

9) J.L. Jaech ; Inventory Verification based on Variables Data, IAEA-Working Group (1972)

10) J.L. Jaech ; Statistical Methods in Nuclear Material Control, TID-26298 (1973)

11) C.G. Hough, et. al. ; Example of Verification and Acceptance of Operator Data — Low-Enriched Uranium Fabrication, BNWL-1852 (1974)

12) G.D. Bouchey, et. al. ; Optimization of Nuclear Materials Safeguards Sampling Systems by Dynamic Programming, Nuclear Technology Vol. 12, Sept., 1971

13) R. Avenhaus ; Application of Theory of games to safeguards problems, Proceedings of the Symposium on Implementing Nuclear Safeguards, Oct. 25-27, 1971, Kansas State University, Manhattan, Kansas, USA.

14) 核物質不明量の統計分析による国内保障システムの設計研究——昭和４９年度試験研究実績報告書，核物質管理センター（昭和５０年３月）

15) Report of Working Group on Accuracy of Nuclear Material Accountancy and Technical Effectiveness of Safeguards, Vienna, 28 August — 1 September 1972, IAEA/PL-488

16) Report on the Panel on Systems of Accounting for and Control of Nuclear Material, Tokyo, 5-9 November 1973, PL-581

17) C.G. Hough, T.M. Beetle ; Statistical Method for Planning of Inspections, SM-201/99 (1975)

18) F. Brown, et. al., Progress in the Development of a System for the Safeguard Inspection of the Fuel Store of a Zero Energy Fast Reactor, CDS 20, October 1970

19) R. Avenhaus, D. Gupta, R. Kraemer ; Application of Criteria in a Safeguards System, IAEA-Working Group Meeting

20) 猪川浩次，遠心分離法による低濃縮施設に対するダイナミック計量管理の適用性の研究(I)，JAERI−M 9173，1980年10月

21) J.E. Lovett, M. Hirata, K. Ikawa, and R.H. Augustson, "Application of the Basic Concepts of Dynamic Materials Accountancy to the Tokai Spent Fuel Reprocessing Facility", JAERI-M 9186,

22) K. Ikawa, H. Ihara, H. Sakuragi, M. Iwanaga, N. Suyama and T. Sawahata ; "Study of the Application of Semi-Dynamic Material Control Concept to Safeguarding Spent Fuel Reprocessing Plants; p.730 ∿ p.739 , NBS SP-582, ANS Topical Conference, Nov. 1979.