

JAERI - M
92-059

パラメトリック効果による
ポテンシャル障壁透過率の増大

1992年5月

田中 正俊*

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1992

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 いばらき印刷(株)

パラメトリック効果によるポテンシャル障壁透過率の増大

日本原子力研究所那珂研究所核融合工学部

田中 正俊*

(1992年4月1日受理)

ポテンシャル障壁 $V_0(x)$ に対する1次元、定常透過問題が解かれたとして、入射ビームとパラメトリック共鳴する有限な長さの周期的なポテンシャル $V_1(x)$ ($V_1(x+\lambda)=V_1(x)$, $\lambda=\pi\hbar/(2mE)^{1/2}$, ここで E は入射エネルギー) を入射側においたとき、ビームの透過率がどう変化するか検討した。 $V_1(x)$ として短形ポテンシャル列をとり、しかも非常に特別な場合に、 $V_1(x)$ による透過率の補正因子がほぼ $\kappa (\simeq (V_0/E)^{1/2} \gg 1)$ となる例を示す。また補正因子が α^{2L} となる例も示す。ここで L は $V_1(x)$ の周期数、 α は $V_0(x)$ によらない常数で、例えば $\alpha=3,5,7,\dots$ である。

Parametric Enhancement of the Transmission Coefficient
Across a Potential Barrier

Masatoshi TANAKA *

Department of Fusion Engineering Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received April 1, 1992)

Given the solution of one-dimensional, steady penetration problem of a potential barrier $V_0(x)$, effect of a finite-length, periodic potential $V_1(x)$ which is parametrically in resonance with an incident beam (i.e. $V_1(x+\lambda)=V_1(x)$, $\lambda=\pi\hbar/(2mE)^{1/2}$ where E is the incident energy) and placed on the incident side. When $V_1(x)$ is a train of square potentials, examples are given in which the correction factor to the transmission coefficient due to the presence of $V_1(x)$ is of the order of κ ($\kappa \cong (V_0/E) \gg 1$). Also presented a particular situation with the correction factor proportional to α^{2L} , where L is the number of periods of $V_1(x)$, and $\alpha=3,5,7,---$ is a constant independent of $V_0(x)$.

Keywords: Potential Barrier, Tunneling Effect, Parametric Enhancement, Parametric Resonance, Cold Fusion

* Science adviser

目 次

1. はじめに	1
2. 準備的考察 (1次摂動解)	2
3. 定式化	4
4. 矩形ポテンシャル列	8
5. p_1 が偶数のばあい	10
6. p_1 が奇数のばあい	11
7. おわりに	14
付録1 反射率 (摂動の第1近似)	16
付録2 $Q_2 \cdot Q_1$ の巾乗の計算	16

Contents

1. Introduction	1
2. Heuristic Solution (First Order Perturbation)	2
3. Formulation	4
4. Train of Square Potentials	8
5. Case of p_1 =even Integers	10
6. Case of p_1 =odd Integers	11
7. Discussions	14
Appendix 1 Reflection Coefficient (First Order Perturbation)	16
Appendix 2 Calculation of $(Q_2 \cdot Q_1)^n$	16

1. はじめに

ポテンシャル障壁の1次元・定常透過問題は量子力学初歩の演習問題であるが、ここでは更めて次のような問題を取り上げ、入射ビームのポテンシャル透過率を制御する可能性（トンネル効果を制御する可能性）を考える。

第1図に示すポテンシャル障壁 $V_0(x)$ による1次元・定常透過問題が解かれ、ビームの透過率が（したがって反射率も）求められたとする。入射ビームのエネルギーに比べてポテンシャル障壁は十分高いとき、周知のように透過率は指数関数的に小さい。

ここで第2図のように、第2のポテンシャル $V_1(x)$ を $V_0(x)$ の前におく。以下 $V_1(x)$ が周期的で、その波数が入射ビームの波数の2倍、すなわち入射ビームと第2のポテンシャルがパラメトリック共鳴の条件を充すばあい、ビームの透過率ばどのように変るか、これが、ここで考える問題である。

入射ビームの波数 $k_1 = (2mE)^{1/2}/\hbar$ で長さを規格化する。以下 $z = k_1 x$ を更めて x と書く。シュレディンガー方程式は

$$u'' + (k^2(x) - q(x))u = 0 \quad (1.1)$$

$$k^2(x) = 1 - \frac{V_0(x)}{E}$$

$$q(x) = \frac{V_1(x)}{E}$$

となる。なお第2図に示すように、 $V_0(x)$ 、 $V_1(x)$ はそれぞれ区間 $(0, d)$ 、 $(-a, -b)$ におかれており、ビームは $x = -\infty$ から入射される。

§2では $V_1(x)$ を摂動とみなした1次近似の解に基づいて、パラメトリック共鳴の条件が充されるばあいに、その効果が大きくなりうる可能性を示す。§3で問題を定式化し、§4で $V_1(x)$ が矩形ポテンシャル列であるばあいを扱う。ついで§5、§6で、その極めて特別なばあいを考える。

2. 準備的考察（1次摂動解）

$V_1(x)$ がどんな効果を及ぼすか、様子を見るためこれを摂動として扱うことから始める。

まず $V_1(x)=0$ とした 0 次の解。第 2 図の区間 1, 2, 3, 5 は自由空間 ($k^2(x)=1$) で、それぞれにおける波動関数は

$$u_i = A_i e^{ikx} + B_i e^{-ikx} \quad (i=1, 2, 3, 5) \quad (2.1)$$

と表わされる。ただし、 $B_5=0$ は自明、また入射波の振中 A_1 は、絶対値、位相を規格化して $A_1=1$ とすることにする。

(2.1) の波動関数を $x=-a, -b$ で u, u' が連続となるようにつなぐと、自明の結果

$$\begin{aligned} A_2 &= A_3 = 1 \\ B_2 &= B_3 = B_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

がえられる。次に $x=0, d$ でつなぐと、入射波、反射波、透過波の振中 $1, B_1, A_5$ の関係がえられる。これを

$$\begin{pmatrix} 1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} A_5 \quad (2.3)$$

とかく。これから透過率、反射率はそれぞれ

$$f_{t0} = |A_5|^2 = \left| \frac{1}{S_1} \right|^2 \quad (2.4a)$$

$$f_{r0} = |B_1|^2 = \left| \frac{S_2}{S_1} \right|^2 \quad (2.4b)$$

と表わされる。

とくに $V_0(x)=V_0$ の矩形ポテンシャルのばあい、周知のように

$$S_1 = \frac{1}{4k} \exp(-i(k-1)d) [(1+k)^2 - (1-k)^2 \exp(2ikd)] \quad (2.5a)$$

$$S_2 = \frac{1}{4k} \exp(-i(k-1)d) (1-k^2) (1 - \exp(2ikd)) \quad (2.5b)$$

である。

なお当然

$$f_{t0} + f_{r0} = 1 \quad (2.6)$$

であるが、これは確率の流れの保存

$$J = \frac{\hbar}{2im} \left(u^* \frac{du}{dx} - u \frac{du^*}{dx} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{m}(1 - |B_1|^2) = \frac{\hbar}{m} |A_5|^2$$

で保証されている。\$S_1, S_2\$ の関係としてかくと

$$|\frac{S_2}{S_1}|^2 = 1 - |\frac{1}{S_1}|^2 \quad (2.7)$$

次に \$V_1(x)\$ について1次の解を求める。まず区間1, 3, 5の1次の波動関数は波数1の平面波で、その振巾を \$\alpha_i, \beta_i\$ とすると

$$u_i^{(1)} = \alpha_i e^{ix} + \beta_i e^{-ix} \quad (i=1,3,5) \quad (2.8)$$

とかける。ただし \$\beta_5 = 0\$。また \$V_1(x)\$ によって入射波はつくり出されることがないので \$\alpha_1 = 0\$ とする。

区間2における1次の波動関数 \$u_2^{(1)}\$ に対するシュレディンガー方程式は (1.1) から

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} + u_2^{(0)} &= q(x)u_2^{(0)} \\ u_2^{(0)} &= e^{ix} + B_1 e^{-ix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。ここで、\$B_2 = B_1\$ ((2.2)) を用いた。(2.9) の解は

$$u_2^{(1)} = (\alpha_2 + \alpha(x))e^{ix} + (\beta_2 + \beta(x))e^{-ix} \quad (2.10)$$

と表わされる。ここで \$\alpha(x), \beta(x)\$ の項は (2.9) の特解で

$$\begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \int_{-a}^x dx^1 q(x^1) \begin{pmatrix} 1 & e^{-2ix} \\ -e^{2ix} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

である。\$\alpha(-a) = \beta(-a) = 0\$ ととった。

(2.8), (2.10) の解を \$x = -a, -b\$ でつなぐと

$$0 = \alpha_2, \quad \alpha(-b) = \alpha_3 \quad (2.12a)$$

$$\beta_1 = \beta_2, \quad \beta_2 + \beta(-b) = \beta_3 \quad (2.12b)$$

という振巾 \$\alpha_i, \beta_i\$ の間の関係がえられる。

最後に \$x = 0, d\$ でつなぐ。(2.3) で \$1 \to \alpha_3, A_5 \to \alpha_5, B_1 \to \beta_3\$ とすればよく

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(-b) \\ \beta_1 - \beta(-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \alpha_5 \quad (2.13)$$

となる。

透過率を求める。(2.3) から \$A_5 = 1/S_1\$ に注意して

$$u_5 = u_5^{(0)} + u_5^{(1)} = \left(A_5 + \frac{\alpha(-b)}{S_1} \right) e^{ix}$$

$$=A_5(1+\alpha(-b))e^{ix}$$

となり,

$$f_r = f_{r0} |1 + \alpha(-b)|^2 \quad (2.14)$$

となる。 f_{r0} にかかる補正因子を C とかいて $V_1(x)$ について1次の項までとると

$$C = |1 + \alpha(-b)|^2 \simeq (1 + 2\text{Re}\alpha(-b)) \quad (2.15)$$

である。

(2.11) を用いると

$$C = 1 + \int_{-a}^{-b} dx q(x) \text{Im}(B_1 e^{-2ix}) \quad (2.16)$$

となる。

$V_1(x)$ の効果が強調されるのは,

$$q(x) = \frac{V_1}{E} \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

というパラメトリック共鳴の条件が充されるときである。このとき $a = N\pi$, $b = M\pi$ (M, N は正の整数) とすると

$$C = 1 + \frac{(N-M)\pi}{2} \frac{V_1}{E} \begin{pmatrix} \text{Im} B_1 \\ -\text{Re} B_1 \end{pmatrix}$$

となる。第2項は第2のポテンシャル $V_1(x)$ の列の長さ $(N-M)\pi$ に比列している。これを大きくとることは摂動近似からいって許されないが、 $V_1(x)$ を入射波とパラメトリック共鳴するようにとったとき、透過率(したがって反射率)に対する影響が大きくなることが示唆されている。

なお当然のことであるが、 $V_1(x)$ に対する1次の項まで $f_r + f_i = 1$ が充されていることを付録1に示す。なお高次の摂動については別に報告する。

3. 定式化

第2図に示すポテンシャル透過問題を更めて考える。§2の結果を考慮して、ポテンシャル $V_1(x)$, すなわちシュレディンガー方程式(1.1)に表われる $q(x)$ は周期 π の周期関数とする。また初めから $a = N\pi$, $b = M\pi$ とおく。

自由空間1, 3, 5の波動関数は波数1の平面波で、その振巾を A_i, B_i とする。すなわち

$$u_i = A_i e^{ix} + B_i e^{-ix}, \quad (i=1, 3, 5) \quad (3.1)$$

$$=A_5(1+\alpha(-b))e^{ix}$$

となり,

$$f_r = f_{r0} |1 + \alpha(-b)|^2 \quad (2.14)$$

となる。 f_{r0} にかかる補正因子を C とかいて $V_1(x)$ について1次の項までとると

$$C = |1 + \alpha(-b)|^2 \simeq (1 + 2\text{Re}\alpha(-b)) \quad (2.15)$$

である。

(2.11) を用いると

$$C = 1 + \int_{-a}^{-b} dx q(x) \text{Im}(B_1 e^{-2ix}) \quad (2.16)$$

となる。

$V_1(x)$ の効果が強調されるのは,

$$q(x) = \frac{V_1}{E} \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

というパラメトリック共鳴の条件が充されるときである。このとき $a = N\pi$, $b = M\pi$ (M, N は正の整数) とすると

$$C = 1 + \frac{(N-M)\pi}{2} \frac{V_1}{E} \begin{pmatrix} \text{Im} B_1 \\ -\text{Re} B_1 \end{pmatrix}$$

となる。第2項は第2のポテンシャル $V_1(x)$ の列の長さ $(N-M)\pi$ に比列している。これを大きくとることは摂動近似からいって許されないが、 $V_1(x)$ を入射波とパラメトリック共鳴するようにとったとき、透過率(したがって反射率)に対する影響が大きくなることが示唆されている。

なお当然のことであるが、 $V_1(x)$ に対する1次の項まで $f_r + f_l = 1$ が充されていることを付録1に示す。なお高次の摂動については別に報告する。

3. 定式化

第2図に示すポテンシャル透過問題を更めて考える。§2の結果を考慮して、ポテンシャル $V_1(x)$, すなわちシュレディンガー方程式(1.1)に表われる $q(x)$ は周期 π の周期関数とする。また初めから $a = N\pi$, $b = M\pi$ とおく。

自由空間1, 3, 5の波動関数は波数1の平面波で、その振巾を A_i, B_i とする。すなわち

$$u_i = A_i e^{ix} + B_i e^{-ix}, \quad (i=1, 3, 5) \quad (3.1)$$

ただし § 2 と同様, $A_1 = 1$, $B_5 = 0$ である。

次に区間 2 を $L (= N - M)$ 等分し, 左から n 番目の区間 $(-N + (n - 1))\pi < x < (-N + n)\pi$ の区間を考える。 $z = x - (-N + (n - 1))\pi$ とおくと, シュレディンガー方程式 (1.1) は

$$\frac{d^2 u_n}{dz^2} + (1 - q(z))u_n = 0, \quad 0 \leq z < \pi \quad (3.2)$$

となる。この方程式の独立な解を $u_1(z)$, $u_2(z)$ とすると, (3.2) の解は,

$$u_n(z) = \alpha_n u_1(z) + \beta_n u_2(z), \quad 0 \leq z < \pi \quad (3.3)$$

の形に書ける。ここで α_n, β_n ($n = 1, 2, \dots, L$) は振巾を表わす常数。(§ 2 で a_i, β_i で攝動解の振巾を表わしたが, 混同のおそれはないので同じ記号を用いた)。

$x = (-N + (n - 1))\pi$ で解をつなぐ。このとき

$$u_{n-1}(\pi) = u_n(0) \quad (3.4)$$

$$u'_{n-1}(\pi) = u'_n(0)$$

がその条件である。これから

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$Q = \frac{1}{W(\pi)} \begin{pmatrix} u_1(0)u'_2(\pi) - u'_1(0)u_2(\pi), & u_2(0)u'_2(\pi) - u'_2(0)u_2(\pi) \\ -u_1(0)u'_1(\pi) + u'_1(0)u_1(\pi), & u_1(\pi)u'_2(0) - u'_1(\pi)u_2(0) \end{pmatrix}$$

となる。なお $W(\pi)$ は (3.2) のロンスキ-行列式の $z = \pi$ での値である。

$$W(\pi) = W(0) \exp\left(\int_0^\pi dz(1 - q(z))\right)$$

(3.5) から

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = Q^{L-1} \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \beta_L \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

がえられ, これで区間 2 の左端の区間の振巾 α_1, β_1 が, 右端の区間の振巾 α_L, β_L で表わされたことになる。

区間 2 の解と区間 1, 3 の解をつなぐ。まず $x = -N\pi$ 。(3.1) (3.3) から u, u' の連続条件は

$$e^{-iN\pi} + B_1 e^{iN\pi} = \alpha_1 u_1(0) + \beta_1 u_2(0)$$

$$e^{-iN\pi} - B_1 e^{iN\pi} = \frac{1}{i} (\alpha_1 u'_1(0) + \beta_1 u'_2(0))$$

これから

$$\begin{pmatrix} 1 \\ B_1 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (u_1(0) - iu_1'(0))e^{iN\pi}, (u_2(0) - iu_2'(0))e^{iN\pi} \\ (u_1(0) + iu_1'(0))e^{-iN\pi}, (u_2(0) + iu_2'(0))e^{-iN\pi} \end{pmatrix}$$

がえられる。

一方, $x = -M\pi$ での条件は,

$$\begin{aligned} \alpha_L u_1(\pi) + \beta_L u_2(\pi) &= A_3 e^{iM\pi} + B_3 e^{iM\pi} \\ \alpha_L u_1'(\pi) + \beta_L u_2'(\pi) &= i(A_3 e^{-iM\pi} - B_3 e^{iM\pi}) \end{aligned}$$

となって, これから

$$\begin{pmatrix} \alpha_L \\ \beta_L \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$P_2 = \frac{1}{W(\pi)} \begin{pmatrix} (u_2'(\pi) - iu_2(\pi))e^{-iM\pi}, (u_2'(\pi) + iu_2(\pi))e^{iM\pi} \\ (-u_1'(\pi) + iu_1(\pi))e^{-iM\pi}, (-iu_1(\pi) - u_1'(\pi))e^{iM\pi} \end{pmatrix}$$

がえられる。

最後に領域 3 と 5 をつなぐ。§ 2 のときと同様で

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} A_5 \tag{3.8}$$

以上 (3.5) - (3.8) をつなぐと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ B_1 \end{pmatrix} &= R \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} A_5 \\ R &= P_1 \cdot (Q)^{L-1} \cdot P_2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

となる。

R の行列要素を r_{ik} とかくと, 透過率は

$$f_r = |A_5|^2 = \frac{1}{|r_{11}S_1 + r_{12}S_2|^2} \tag{3.10}$$

となり, その補正因子 C は

$$C = \frac{1}{|r_{11} + r_{12} \frac{S_2}{S_1}|^2} \tag{3.11}$$

で与えられる。

(3.11) の構造をしらべる。 $V_1(x) = 0$ のばあい, 透過率は指数関数的に小さいとする。その因子を γ と書くと透過率 $|1/S_1|^2$ は, α を常数として

$$| \frac{1}{S_1} |^2 = 2\alpha\gamma \tag{3.12}$$

という形をしている。したがって透過率は

$$\left| \frac{S_2}{S_1} \right|^2 = 1 - 2\alpha\gamma$$

となり、 γ が指数関数的に小さいので

$$\frac{S_2}{S_1} = (1 - 2\alpha\gamma)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi} \simeq (1 - \alpha\gamma) e^{i\phi} \quad (3.13)$$

となる。ここで ϕ は実数。とくに $V_0(x)$ が矩形ポテンシャルで、 $k = i\kappa$ 、すなわち $V_0 > E$ のとき

$$\gamma = e^{-2\kappa d}, \quad (3.14)$$

$$\tan\phi = \frac{2\kappa(1+\gamma)}{(\kappa^2-1)(1-\gamma)} \simeq \frac{2\kappa}{\kappa^2-1} \quad (3.15a)$$

で、とくに $\kappa \gg 1$ 、すなわちポテンシャル障壁が入射エネルギーに比べて十分高いとき

$$\phi \simeq \frac{2}{\kappa} \quad (3.15b)$$

である。

また(3.9)の行列 R はエルミート積を保存する、すなわち

$$1 - |B_1|^2 = |A_3|^2 - |B_3|^2$$

であることから、行列要素 r_{ij} は

$$\begin{aligned} |r_{11}|^2 - |r_{21}|^2 &= |r_{12}|^2 - |r_{22}|^2 = 1, \\ r_{11}r_{12}^* - r_{21}r_{22}^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

を充さなければならない。

さらに計算を進めるためには、第2のポテンシャル $V_1(x)$ の形を具体的に与え、(3.5)の行列 Q 、ついでその巾乗 Q^{L-1} を求めなければならない。

$$q(x) = \frac{V_1}{E} \cos 2x = 2q_0 \cos 2x$$

のばあいには、独立な解 u_1, u_2 としてマシュー関数 $ce_1(x, q_0), se_1(x, q_0)$ をとればよい。また周期 π の sawtooth

$$q(z) = \frac{V_1}{\pi E} z, \quad 0 \leq z < \pi$$

のとき、独立な解はベッセル関数を用いて、 $\sqrt{\xi} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi E}{V_1}} \xi^{3/2}\right)$ と $\sqrt{\xi} N_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi E}{V_1}} \xi^{3/2}\right)$ となる。ここで $\xi = 1 - (V_1/\pi E) z$ 。

Q の巾乗 Q^{L-1} の計算は、

$$U = \begin{pmatrix} 1, & \alpha \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 1$$

の形の行列を用いて $U^{-1} \cdot Q \cdot U$ を三角行列にまず変換し、ついで再帰関係式を解いて進めることができる。しかし見通しがよくないので、付録2に要点を記すに止め、以下では周期 π の矩形ポテンシャル列、しかもその非常に特別なばあいについて考える。

なお、ポテンシャル列 $V_1(x)$ をずらし、 $a=N\pi-\theta$ 、 $b=M\pi-\theta$ とすると、 r_{11} は不変、 r_{12} は $r_{12}\exp(2i\theta)$ となる。 $\theta=-\phi$ ととると、指数関数的に小さい項を除いて、補正因子は $V_0(x)$ によらなくなる。

4. 矩形ポテンシャル列

区間2, $-N\pi < x < M\pi$ を $L (=N-M)$ 等分し、左から n 番目の区間 $(-N+(n-1))\pi < x < (-N+n)\pi$ を考え、ポテンシャル $V_2(x)$ を

$$V_2(z) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq z < \pi/2 \\ V_2 & \pi/2 \leq z < \pi \end{cases} \quad (4.1)$$

ととる。ここで $z=x - (-N+(n-1))\pi$ 。(3.2) のシュレディンガー方程式は、 $0 < z < \pi/2$ 、 $\pi/2 < z < \pi$ の波動関数をそれぞれ $u_{n,1}$ 、 $u_{n,2}$ と書くと

$$\frac{d^2 u_{n,1,2}}{dz^2} + p_{1,2}^2 u_{n,1,2} = 0 \quad (4.2)$$

$$p_1^2 = 1 - \frac{V_1}{E}, \quad p_2^2 = 1 - \frac{V_2}{E}$$

となる。 (n) 番目の区間をさらに2つに分けているので、§3の結果はそのままではつかえない。(独立な解の組を2つにすればよいが、(4.2)の解は平面波なので以下直接に計算する。)

(4.2)の解を次のように書く。

$$u_{n,1}(z) = \alpha_{n,1} e^{ip_1 z} + \beta_{n,1} e^{-ip_1 z} \quad (4.3a)$$

$$u_{n,2}(z) = \alpha_{n,2} e^{ip_2 z} + \beta_{n,2} e^{-ip_2 z} \quad (4.3b)$$

解をつなぐ。まず $z=\pi/2$ でつないで

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,1} \\ \beta_{n,1} \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} \alpha_{n,2} \\ \beta_{n,2} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{p_2}{p_1}) e^{i(p_1 - p_2)\frac{\pi}{2}}, & (1 - \frac{p_2}{p_1}) e^{-i(p_1 + p_2)\frac{\pi}{2}} \\ (1 - \frac{p_2}{p_1}) e^{i(p_1 + p_2)\frac{\pi}{2}}, & (1 + \frac{p_2}{p_1}) e^{i(p_1 - p_2)\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$$

をうる。

の形の行列を用いて $U^{-1} \cdot Q \cdot U$ を三角行列にまず変換し、ついで再帰関係式を解いて進めることができる。しかし見通しがよくないので、付録2に要点を記すに止め、以下では周期 π の矩形ポテンシャル列、しかもその非常に特別なばあいについて考える。

なお、ポテンシャル列 $V_1(x)$ をずらし、 $a=N\pi-\theta$, $b=M\pi-\theta$ とすると、 r_{11} は不変、 r_{12} は $r_{12}\exp(2i\theta)$ となる。 $\theta=-\phi$ ととると、指数関数的に小さい項を除いて、補正因子は $V_0(x)$ によらなくなる。

4. 矩形ポテンシャル列

区間2, $-N\pi < x < M\pi$ を $L (=N-M)$ 等分し、左から n 番目の区間 $(-N+(n-1))\pi < x < (-N+n)\pi$ を考え、ポテンシャル $V_2(x)$ を

$$V_2(z) = \begin{cases} V_1 & 0 \leq z < \pi/2 \\ V_2 & \pi/2 \leq z < \pi \end{cases} \quad (4.1)$$

ととる。ここで $z=x - (-N+(n-1))\pi$ 。(3.2) のシュレディンガー方程式は、 $0 < z < \pi/2$, $\pi/2 < z < \pi$ の波動関数をそれぞれ $u_{n,1}$, $u_{n,2}$ と書くと

$$\frac{d^2 u_{n,1,2}}{dz^2} + p_{1,2}^2 u_{n,1,2} = 0 \quad (4.2)$$

$$p_1^2 = 1 - \frac{V_1}{E}, \quad p_2^2 = 1 - \frac{V_2}{E}$$

となる。 $(n$ 番目の区間をさらに2つに分けているので、§3の結果はそのままではつかえない。独立な解の組を2つにすればよいが、(4.2)の解は平面波なので以下直接に計算する。)

(4.2)の解を次のように書く。

$$u_{n,1}(z) = \alpha_{n,1} e^{ip_1 z} + \beta_{n,1} e^{-ip_1 z} \quad (4.3a)$$

$$u_{n,2}(z) = \alpha_{n,2} e^{ip_2 z} + \beta_{n,2} e^{-ip_2 z} \quad (4.3b)$$

解をつなぐ。まず $z=\pi/2$ でつないで

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n,1} \\ \beta_{n,1} \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} \alpha_{n,2} \\ \beta_{n,2} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{p_2}{p_1}) e^{i(\phi_1 - \phi_2) \frac{\pi}{2}}, & (1 - \frac{p_2}{p_1}) e^{-i(\phi_1 + \phi_2) \frac{\pi}{2}} \\ (1 - \frac{p_2}{p_1}) e^{i(\phi_1 + \phi_2) \frac{\pi}{2}}, & (1 + \frac{p_2}{p_1}) e^{i(\phi_1 - \phi_2) \frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$$

をうる。

つぎに $x = (-N + (n-1)\pi)$ でつなぐ。このためには

$$\begin{aligned} u_{n-1,2}(\pi) &= u_{n,1}(0) \\ u'_{n-1,2}(\pi) &= u'_{n,1}(0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

とすればよい。これから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1,2} \\ \beta_{n-1,2} \end{pmatrix} &= Q_2 \begin{pmatrix} \alpha_{n,1} \\ \beta_{n,1} \end{pmatrix} \\ Q_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{p_1}{p_2})e^{-ip_2\pi}, (1 - \frac{p_1}{p_2})e^{-ip_2\pi} \\ (1 - \frac{p_1}{p_2})e^{ip_2\pi}, (1 + \frac{p_1}{p_2})e^{ip_2\pi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

がえられる。(4.4), (4.6) を合成して

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1,2} \\ \beta_{n-1,2} \end{pmatrix} &= Q_2 \cdot Q_1 \begin{pmatrix} \alpha_{n,2} \\ \beta_{n,2} \end{pmatrix} \\ Q_2 \cdot Q_1 &= \frac{e^{-i(p_1+p_2)\frac{\pi}{2}}}{4p_1p_2} \begin{pmatrix} (p_1+p_2)^2 - (p_1-p_2)^2 e^{ip_1\pi}, (p_1^2 - p_2^2)(1 - e^{ip_1\pi})e^{-ip_2\pi} \\ - (p_1^2 - p_2^2)(1 - e^{ip_1\pi})e^{2ip_2\pi}, ((p_1+p_2)^2 e^{ip_1\pi} - (p_1-p_2)^2)e^{ip_2\pi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。したがって

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix} = (Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} \begin{pmatrix} \alpha_{L,2} \\ \beta_{L,2} \end{pmatrix}$$

がえられる。さらに (4.4) を用いて

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \beta_{1,1} \end{pmatrix} = Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} \begin{pmatrix} \alpha_{L,2} \\ \beta_{L,2} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

と区間 2 の左端と右端の振巾の関係が求められた。

$z = -N\pi$ での条件

$$\begin{aligned} e^{-iN\pi} + B_1 e^{iN\pi} &= \alpha_{1,1} + \beta_{1,1} \\ e^{-iN\pi} - B_1 e^{iN\pi} &= p_1(\alpha_{1,1} - \beta_{1,1}) \end{aligned}$$

から

$$\begin{pmatrix} 1 \\ B_1 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \beta_{1,1} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+p_1)e^{iN\pi}, (1-p_1)e^{iN\pi} \\ (1-p_1)e^{-iN\pi}, (1+p_1)e^{-iN\pi} \end{pmatrix}$$

となる。

最後に $x = -M\pi$ でつなぐ。条件

$$\alpha_{L,2} e^{ip_2\pi} + \beta_{L,2} e^{-ip_2\pi} = A_3 e^{-iM\pi} + B_3 e^{iM\pi}$$

$$\alpha_{L,2} e^{ip_2\pi} - \beta_{L,2} e^{-ip_2\pi} = \frac{1}{p_2} (A_3 e^{-iM\pi} - B_3 e^{iM\pi})$$

から

$$\begin{pmatrix} \alpha_{L,2} \\ \beta_{L,2} \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$P_2 = \frac{1}{2p_2} \begin{pmatrix} (1+p_2)e^{-i(p_2+M)\pi}, -(1-p_2)e^{i(p_2-M)\pi} \\ -(1-p_2)e^{i(p_2-M)\pi}, (1+p_2)e^{i(p_2+M)\pi} \end{pmatrix}$$

となる。

A_3 , B_3 と A_5 の関係 (3.8) と合わせて (4.8) - (4.10) を合成して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ B_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} A_5 \quad (4.11)$$

$$R = P_1 \cdot Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} \cdot P_2$$

となる。

5. p_1 が偶数のばあい

§ 3 で述べたように (4.3) の $Q_2 \cdot Q_1$ は付録 2 のように三角行列に変換, そして $(Q_2 \cdot Q_1)^{L-1}$ を計算することができる。それを行う代りに, 以下では極めて特別なばあい, すなわち p_1 , p_2 が正の整数のばあいを考えることにする。まずこの § では p_1 を偶数とする。なおこれ以後 Q_1 , Q_2 , P_1 , P_2 等の行列で, 絶対値 1 の共通因子は無視して書くこととする。

p_1 が偶数のとき (4.7) から直ちにわかるように $Q_2 \cdot Q_1$ は対角行列で, 次のように p_1 にもよらず非常に簡単になる。

$$Q_2 \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, e^{ip_2\pi} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

これからただちに

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+p_1)e^{iN\pi}, (1-p_1)e^{iN\pi} \\ (1-p_1)e^{-iN\pi}, (1+p_1)e^{-iN\pi} \end{pmatrix}$$

となる。

最後に $x = -M\pi$ でつなぐ。条件

$$\alpha_{L,2} e^{ip_2\pi} + \beta_{L,2} e^{-ip_2\pi} = A_3 e^{-iM\pi} + B_3 e^{iM\pi}$$

$$\alpha_{L,2} e^{ip_2\pi} - \beta_{L,2} e^{-ip_2\pi} = \frac{1}{p_2} (A_3 e^{-iM\pi} - B_3 e^{iM\pi})$$

から

$$\begin{pmatrix} \alpha_{L,2} \\ \beta_{L,2} \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$P_2 = \frac{1}{2p_2} \begin{pmatrix} (1+p_2)e^{-i(p_2+M)\pi}, -(1-p_2)e^{i(p_2-M)\pi} \\ -(1-p_2)e^{i(p_2-M)\pi}, (1+p_2)e^{i(p_2+M)\pi} \end{pmatrix}$$

となる。

A_3 , B_3 と A_5 の関係 (3.8) と合わせて (4.8) - (4.10) を合成して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ B_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} A_5 \quad (4.11)$$

$$R = P_1 \cdot Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} \cdot P_2$$

となる。

5. p_1 が偶数のばあい

§ 3 で述べたように (4.3) の $Q_2 \cdot Q_1$ は付録 2 のように三角行列に変換, そして $(Q_2 \cdot Q_1)^{L-1}$ を計算することができる。それを行う代りに, 以下では極めて特別なばあい, すなわち p_1, p_2 が正の整数のばあいを考えることにする。まずこの § では p_1 を偶数とする。なおこれ以後 Q_1, Q_2, P_1, P_2 等の行列で, 絶対値 1 の共通因子は無視して書くこととする。

p_1 が偶数のとき (4.7) から直ちにわかるように $Q_2 \cdot Q_1$ は対角行列で, 次のように p_1 にもよらず非常に簡単になる。

$$Q_2 \cdot Q_1 = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, e^{ip_2\pi} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

これからただちに

$$(Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, e^{ip_2(L-1)\pi} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

したがって (4.11) の行列 R は

$$R = \frac{1}{4p_2} \begin{pmatrix} (1+p_2)^2 - (1-p_2)^2 e^{ip_2 L \pi}, & -(1-p_2^2)(1-e^{ip_2 L \pi}) \\ (1-p_2^2)(1-e^{ip_2 L \pi}), & -(1-p_2)^2 + (1+p_2)^2 e^{ip_2 L \pi} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

となる。

透過率に対する補正因子 (3.11) を計算する。指数関数的に小さい γ を含む項をおとすと、 $p_2 L \pi / 2 = \mu$ と書いて

$$r_{11} + \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2p_2} [2p_2 \cos \mu + (1-p_2^2) \sin \mu \sin \phi - i(1+p_2^2 + (1-p_2^2) \cos \phi) \sin \mu] \quad (5.4)$$

で与えられる。

$\sin \mu = 0$, すなわち $p_2 L$ が偶数のときは $C = 1$ で矩形ポテンシャル列の効果はない。つぎに $p_2 L$ を奇数ととると、

$$\frac{1}{C} = \frac{1+p_2^4 + (1-p_2^4) \cos \phi}{2p_2^2}, \quad p_2 L = \text{odd} \quad (5.5)$$

となる。 p_2 を連続変数のように扱って C の極大値を求めると、

$$C_{\max} = \frac{1}{\sin \phi} \quad (5.6)$$

$$p_{\max} = \left(\frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} \right)^{\frac{1}{4}}$$

である。 $V_0(x)$ が矩形ポテンシャル、 $\kappa \gg 1$ のとき

$$C_{\max} \simeq \frac{\kappa}{2} \quad (5.6')$$

$$p_{2, \max} \simeq \sqrt{\kappa}$$

となる。

p_2 を連続変数のように扱ったが、 L が十分大きければ $p_2 L = \text{odd}$ で $p_2 \simeq p_{2, \max}$ ととれるであろう。 $\kappa \ll 1$ とすれば $C_{\max} \gg 1$ となるが、このためには $p_{2, \max} \gg 1$, すなわちポテンシャルが十分深くなければならない。この点をさけるもう一つの例を次の § で示す。

6. p_1 が奇数のばあい

このとき (4.7) の $Q_2 \cdot Q_1$ は

$$Q_2 \cdot Q_1 = \frac{1}{2p_1 p_2} \begin{pmatrix} p_1^2 + p_2^2 & (p_1^2 - p_2^2) e^{-ip_2 \pi} \\ -(p_1^2 - p_2^2) e^{2ip_2 \pi} & -(p_1^2 + p_2^2) e^{ip_2 \pi} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$(Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, e^{ip_2(L-1)\pi} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

したがって (4.11) の行列 R は

$$R = \frac{1}{4p_2} \begin{pmatrix} (1+p_2)^2 - (1-p_2)^2 e^{ip_2 L \pi}, & -(1-p_2^2)(1-e^{ip_2 L \pi}) \\ (1-p_2^2)(1-e^{ip_2 L \pi}), & -(1-p_2)^2 + (1+p_2)^2 e^{ip_2 L \pi} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

となる。

透過率に対する補正因子 (3.11) を計算する。指数関数的に小さい γ を含む項をおとすと、 $p_2 L \pi / 2 = \mu$ と書いて

$$r_{11} + \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2p_2} [2p_2 \cos \mu + (1-p_2^2) \sin \mu \sin \phi - i(1+p_2^2 + (1-p_2^2) \cos \phi) \sin \mu] \quad (5.4)$$

で与えられる。

$\sin \mu = 0$, すなわち $p_2 L$ が偶数のときは $C = 1$ で矩形ポテンシャル列の効果はない。つぎに $p_2 L$ を奇数ととると、

$$\frac{1}{C} = \frac{1+p_2^4 + (1-p_2^4) \cos \phi}{2p_2^2}, \quad p_2 L = \text{odd} \quad (5.5)$$

となる。 p_2 を連続変数のように扱って C の極大値を求めると、

$$C_{\max} = \frac{1}{\sin \phi} \quad (5.6)$$

$$p_{\max} = \left(\frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} \right)^{\frac{1}{4}}$$

である。 $V_0(x)$ が矩形ポテンシャル、 $\kappa \gg 1$ のとき

$$C_{\max} \simeq \frac{\kappa}{2} \quad (5.6')$$

$$p_{2, \max} \simeq \sqrt{\kappa}$$

となる。

p_2 を連続変数のように扱ったが、 L が十分大きければ $p_2 L = \text{odd}$ で $p_2 \simeq p_{2, \max}$ ととれるであろう。 $\kappa \ll 1$ とすれば $C_{\max} \gg 1$ となるが、このためには $p_{2, \max} \gg 1$, すなわちポテンシャルが十分深くなければならない。この点をさけるもう一つの例を次の § で示す。

6. p_1 が奇数のばあい

このとき (4.7) の $Q_2 \cdot Q_1$ は

$$Q_2 \cdot Q_1 = \frac{1}{2p_1 p_2} \begin{pmatrix} p_1^2 + p_2^2 & (p_1^2 - p_2^2) e^{-ip_2 \pi} \\ -(p_1^2 - p_2^2) e^{2ip_2 \pi} & -(p_1^2 + p_2^2) e^{ip_2 \pi} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

である。§5と同様、絶対値1の共通因子は省略している。

さらに p_2 が偶数とすると

$$Q_2 \cdot Q_1 = \frac{1}{2p_1 p_2} \begin{pmatrix} p_1^2 + p_2^2 & (p_1^2 - p_2^2) \\ -(p_1^2 - p_2^2) & -(p_1^2 + p_2^2) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

となって、 $(Q_1 \cdot Q_2)^2$ は単位行列となる。したがって

$$(Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} = \begin{cases} E, & L: \text{od} \\ Q_2, & L: \text{even} \end{cases} \quad (6.3)$$

となる。ここでEは単位行列。何れにしてもポテンシャル列の長さの効果が入ってこないので省略する。

一方、 p_2 が奇数のばあいには、 $Q_2 \cdot Q_1$ は

$$Q_2 \cdot Q_1 = \frac{1}{2p_1 p_2} \begin{pmatrix} p_1^2 + p_2^2 & -(p_1^2 - p_2^2) \\ -(p_1^2 - p_2^2) & p_1^2 + p_2^2 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

と対称行列であってかつ対角要素が等しい。以下の便宜上(6.4)を

$$Q_2 \cdot Q_1 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1 p_2} Q_*, \quad (6.5)$$

$$Q_* = \begin{pmatrix} 1, & \alpha \\ \alpha, & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{-(p_1^2 - p_2^2)}{p_1^2 + p_2^2}$$

と書いて、 Q_* の巾乗を求める。

$$Q_*^n = \begin{pmatrix} r_n & t_n \\ t_n & r_n \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

とおくと、 r_n, t_n に対する再帰関係

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-1} + \alpha t_{n-1} \\ t_n &= \alpha r_{n-1} + t_{n-1} \end{aligned} \quad (6.7)$$

がえられる。これから σ を常数として

$$r_n + \sigma t_n = (1 + \sigma \alpha) r_{n-1} + (\sigma + \alpha) t_{n-1} \quad (6.8)$$

ここで右辺の r_{n-1}, t_{n-1} の係数を

$$1 + \sigma \alpha = \lambda$$

$$\sigma + \alpha = \alpha \lambda$$

のようにえらぶ。このような σ をとれるためには、 λ が

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, a \\ a, 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の根, すなわち

$$\lambda = \lambda_{1,2} = 1 \pm a \tag{6.9}$$

でなければならない。このような λ に対して

$$\sigma_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - 1}{a} = \pm 1 \tag{6.10}$$

となって, この値を用いると (6.8) から

$$r_n \pm t_n = \lambda_{1,2}(r_{n-1} \pm t_{n-1}) = (\lambda_{1,2})^{n-1}(1 \pm a)$$

となる。したがって Q_n^* の行列要素は

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{2} [\lambda_1^{n-1}(1+a) + \lambda_2^{n-1}(1-a)] = \frac{1}{2} ((1+a)^n + (1-a)^n) \\ t_n &= \frac{1}{2} ((1+a)^n - (1-a)^n) \end{aligned} \tag{6.11}$$

で与えられる。

$$(Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_1 p_2} \right)^{L-1} \begin{pmatrix} p_2^{2(L-1)} + p_1^{2(L-1)}, & p_2^{2(L-1)} - p_1^{2(L-1)} \\ p_2^{2(L-1)} - p_1^{2(L-1)}, & p_2^{2(L-1)} + p_1^{2(L-1)} \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

である。

これを用いると (4.11) の R は

$$\begin{aligned} R &= P_1 \cdot Q_1 \cdot (Q_2 \cdot Q_1)^{L-1} \cdot P_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_1 p_2} \right)^L \begin{pmatrix} p_1^{2L} + p_2^{2L}, & -p_1^{2L} + p_2^{2L} \\ -p_1^{2L} + p_2^{2L}, & p_1^{2L} + p_2^{2L} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.13}$$

となる。いま $p_2 = \mu p_1$ とおくと

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu^L + \mu^{-L}, & \mu^L - \mu^{-L} \\ \mu^L - \mu^{-L}, & \mu^L + \mu^{-L} \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

であって, 透過率に対する補正因子 (3.11 に現われる $r_{11} + r_{12} S_2 / S_1$ は

$$r_{11} + r_{12} \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2} [\mu^L (1 + e^{i\phi}) + \mu^{-L} (1 - e^{i\phi})]$$

となる。ここで指数関数的に小さい γ を含む項はおとした。したがって補正因子 C の逆数は

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} (\mu^{2L} (1 + \cos\phi) + \mu^{-2L} (1 - \cos\phi)) \tag{6.15}$$

となる。 μ を連続変数とみると, C の最大値は

$$C_{max} = \frac{1}{\sin\phi} \quad (6.16)$$

$$\mu_{max} = \left(\frac{1 - \cos\phi}{1 + \cos\phi} \right)^{y_{4L}}$$

となる。 $V_0(x)$ が矩形ポテンシャルで、 $\kappa \gg 1$ のとき

$$C_{max} \simeq \frac{\kappa}{2}, \quad \kappa \gg 1 \quad (6.16')$$

$$\mu_{max} \simeq \left(\frac{1}{\kappa} \right) \frac{1}{2L},$$

となる。 C_{max} の値は (5.6') と同じ。 p_1 を奇数にとったとき、 p_2 をあまり大きくない奇数をとっても、 $\mu^{2L} = (p_2/p_1)^{2L}$ を L を大きくとって $\mu \simeq \mu_{max}$ とできるであろう。すなわち § 5 と異なり、あまり深くないポテンシャル列によって補正因子を大きくすることができる。さらにポテンシャル列をずらして、例えば $\phi = 0$ ととれるようにすると、(6.15) から

$$C = 2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{2L} \quad (6.17)$$

となる。

7. おわりに

問題点を簡単にまとめる。

- (1) § 4, § 5 で扱った非常に特別なばあい、透過率に対する補正因子は $\kappa (\simeq (V_0/E)^{\frac{1}{2}})$ のオーダーである。またポテンシャル列の周期数を L としたとき、補正因子が α^{2L} , $\alpha = 3.5, 7, \dots$ と非常に大きくなりうる場合がある。
- (2) (3.11) の補正因子 C の表式で

$$r_{11} + r_{12}e^{i\phi} = 0$$

となるようにできれば、(もともと不可能かも知れないが) C は指数関数的に大きくなる。しかしこのとき透過率は、 γ を指数関数的に小さい量として

$$f_t = \frac{\alpha\gamma}{|r_{12}|^2(1 - \alpha\gamma - \sqrt{1 - 2\alpha\gamma})}$$

となり、分母の第 2 の因子は γ のオーダーであるので、例えば $|r_{12}|^2$ が $1/\gamma$ に比例するようになりうるのか否かが問題となる。

- (3) $V_0(x)$ としてクーロンポテンシャルのように裾の長いポテンシャルでは、ポテンシャルの高さにより、その厚さがきいている。実際クーロンポテンシャル

$$V_0(x) = \frac{e^2}{r} = \frac{k_1 e^2}{x}$$

$$C_{max} = \frac{1}{\sin\phi} \quad (6.16)$$

$$\mu_{max} = \left(\frac{1 - \cos\phi}{1 + \cos\phi} \right)^{y_{4L}}$$

となる。 $V_0(x)$ が矩形ポテンシャルで、 $\kappa \gg 1$ のとき

$$C_{max} \simeq \frac{\kappa}{2}, \quad \kappa \gg 1 \quad (6.16')$$

$$\mu_{max} \simeq \left(\frac{1}{\kappa} \right) \frac{1}{2L},$$

となる。 C_{max} の値は (5.6') と同じ。 p_1 を奇数にとったとき、 p_2 をあまり大きくない奇数をとっても、 $\mu^{2L} = (p_2/p_1)^{2L}$ を L を大きくとって $\mu \simeq \mu_{max}$ とできるであろう。すなわち § 5 と異なり、あまり深くないポテンシャル列によって補正因子を大きくすることができる。さらにポテンシャル列をずらして、例えば $\phi = 0$ ととれるようにすると、(6.15) から

$$C = 2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{2L} \quad (6.17)$$

となる。

7. おわりに

問題点を簡単にまとめる。

- (1) § 4, § 5 で扱った非常に特別なばあい、透過率に対する補正因子は $\kappa (\simeq (V_0/E)^{\frac{1}{2}})$ のオーダーである。またポテンシャル列の周期数を L としたとき、補正因子が α^{2L} , $\alpha = 3.5, 7, \dots$ と非常に大きくなりうる場合がある。
- (2) (3.11) の補正因子 C の表式で

$$r_{11} + r_{12}e^{i\phi} = 0$$

となるようにできれば、(もともと不可能かも知れないが) C は指数関数的に大きくなる。しかしこのとき透過率は、 γ を指数関数的に小さい量として

$$f_t = \frac{\alpha\gamma}{|r_{12}|^2(1 - \alpha\gamma - \sqrt{1 - 2\alpha\gamma})}$$

となり、分母の第 2 の因子は γ のオーダーであるので、例えば $|r_{12}|^2$ が $1/\gamma$ に比例するようなことがありうるのか否かが問題となる。

- (3) $V_0(x)$ としてクーロンポテンシャルのように裾の長いポテンシャルでは、ポテンシャルの高さにより、その厚さがきいている。実際クーロンポテンシャル

$$V_0(x) = \frac{e^2}{r} = \frac{k_1 e^2}{x}$$

に対して、指数関数的に小さな因子 γ は

$$\begin{aligned}\gamma &\simeq \exp\left(-\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{V_0(x)}{E}-1}\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{k_1 e^2}{Ex}-1}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで x_1 は $V(x_1) = E$ のようにとるのがもっともらしい。したがって

$$\gamma \simeq \exp\left(-\frac{\pi k_1 e^2}{4E}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{4} x_1\right)$$

である。一方矩形ポテンシャルのとき

$$\gamma = \exp(-2\kappa d)$$

$$\kappa^2 = \sqrt{\frac{V_0}{E}-1}$$

で、強いて x_1 と d を対応させると $\kappa = \pi/8$ となり、 κ は 1 のオーダーである。ただしこのばあいにも、例えば α を正の常数として

$$|r_{11} + r_{12} e^{i\phi}|^2 \propto \kappa^{\alpha L}$$

のように多項式に小さくできれば（換算質量を用いて $\pi/8 \rightarrow \pi/4$ としても）、補正因子は大きくなりうる。しかしこのようなことが可能か否か分からない。

- (4) 第 2 のポテンシャル $V_1(x)$ を用いたとき透過率が変わるのは、 $V_1(x)$ と $V_0(x)$ の間の自由空間の振巾が変わるためである。この振巾 A_3, B_3 は入射波、反射波の振巾、 B_1 と行列 R で結ばれている。行列 R が保存するのは、確率の流れ

$$1 - |B_1|^2 = |A_3|^2 - |B_3|^2$$

であって、それぞれは変化しうるであろう。 A_3, B_3 (また B_1) は、 R とともに $V_0(x)$ を考えてきまる。 $V_0(x)$ が大きく元の透過率が小さいほど、(キャビティの類推で) $|A_3|^2, |B_3|^2$ は差を保ったまま大きくできると思われる。

一方、第 2 のポテンシャル $V_1(x)$ として、入射波にパラメトリック共鳴するものをとるとは、効果を期待すれば自然な一つの実験であろう。

- (5) ポテンシャル障壁の透過の問題を考えたが、一般的に言えば、リアクティブな系において、入射波とパラメトリック共鳴するエレメントを用いて、反射率、透過率を制御する問題である。また波数に対するもの以外に、振動数に対するパラメトリック共鳴も考えられる。
- (6) 最後に数値的なことに一言われる。入射粒子を重水素原子核、エネルギー E を電子ボルト (eV) を単位とすると、入射波とパラメトリック共鳴する第 2 のポテンシャルの波長は $10^{-9} / \sqrt{E(\text{eV})}$ となる。常温、 $E = 0.025 \text{ eV}$ とすると $0.7 \times 10^{-8} \text{ cm}$ 。

機会を与えて下さった吉川理事、鹿園所長、田村部長に感謝致します。話を聞いて頂いた宮本先生、竹田辰興氏ほかの方々にお礼申し上げます。

付録1 反射率 (摂動の第1近似)

確率の流れの保存から反射率と透過率の和は1である。このことは摂動近似でもオーダー毎に成立つはずであるが、1次の項について直接示しておく。

(2.12), (2.13) から

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta_3 - \beta(-b) \\ &= B_1 \alpha_1 - \beta(-b) \\ &= B_1 \alpha(-b) - \beta(-b)\end{aligned}$$

したがって反射率は、 $V_1(x)$ の1次のオーダーで

$$\begin{aligned}f_r &= |B_1|^2 \left| 1 + \alpha(-b) - \frac{\beta(-b)}{B_1} \right|^2 \\ &\simeq |B_1|^2 \left[1 + 2\operatorname{Re}\alpha(-b) - \frac{2}{|B_1|^2} \operatorname{Re}(B_1^* \beta(-b)) \right]\end{aligned}$$

で与えられる。(2.15) を用いて

$$\begin{aligned}f_r + f_t &= (1 + 2\operatorname{Re}\alpha(-b)) (|A_5|^2 + |B_1|^2) - 2\operatorname{Re}(B_1^* \beta(-b)) \\ &= 1 + 2\operatorname{Re}(\alpha(-b) - B_1^* \beta(-b))\end{aligned}$$

となる。ここで $|A_5|^2 + |B_1|^2 = 1$ を用いた。一方本文 (2.11) から

$$\alpha(-b) - B_1^* \beta(-b) = \frac{1}{2i} \int_{-a}^{-b} dx q(x) (1 + |B_1|^2 + B_1 e^{-2ix} + B_1^* e^{2ix})$$

で、これは純虚数である。

付録2 $Q_2 \cdot Q_1$ の巾乗の計算

本文 (4.7) の $Q_2 \cdot Q_1$ を M と書いて

$$M = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \quad (A2.1)$$

とする。

$$U = \begin{pmatrix} 1, \alpha \\ 1, 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 1 \quad (A2.2)$$

を用いて

$$U^{-1} \cdot M \cdot U = M^1 = \begin{pmatrix} A', 0 \\ C', D' \end{pmatrix} \quad (A2.3)$$

とするためには α を

$$C\alpha^2 - (A-D)\alpha + B = 0 \quad (A2.4)$$

を充すようにとればよく、そのとき

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{\alpha-1}(-A-B+\alpha(C+D)) \\ C' &= \frac{1}{\alpha-1}(A+B-C-D) \end{aligned} \quad (A2.5)$$

$$D' = \alpha C + D$$

である。なお U の逆行列 U^{-1} は

$$U^{-1} = \frac{1}{1-\alpha} \begin{pmatrix} 1, -\alpha \\ -1, 1 \end{pmatrix} \quad (A2.6)$$

であり、本文 (4.11) の R は

$$R = P_1 U (U^{-1} Q_2 Q_1 U)^{L-1} U^{-1} P_2 \quad (A2.7)$$

となる。

3角行列の積は3角行列であるので、 $M^1 = U^{-1} Q_2 Q_1 U$ の巾乗は直ちに求められる。すなわち

$$M^n = \begin{pmatrix} r_n, 0 \\ t_n, s_n \end{pmatrix} \quad (A2.8)$$

とおくと

$$r_n = A' r_{n-1} \quad (A2.8a)$$

$$s_n = D' s_{n-1} \quad (A2.9b)$$

$$t_n = A' t_{n-1} + C' s_{n-1} \quad (A2.9c)$$

(A2.9 a, b) は直ちに解けて

$$r_n = A'^n, s_n = D'^n \quad (A2.10a, b)$$

となり、また (A2.9 b, c) から

$$t_n + \sigma s_n = A' t_{n-1} (C' + \sigma D') s_{n-1}$$

ここで、 $C' + \sigma D' = \sigma A'$ 、すなわち

$$\sigma = \frac{C'}{A' - D'} \quad (A2.11)$$

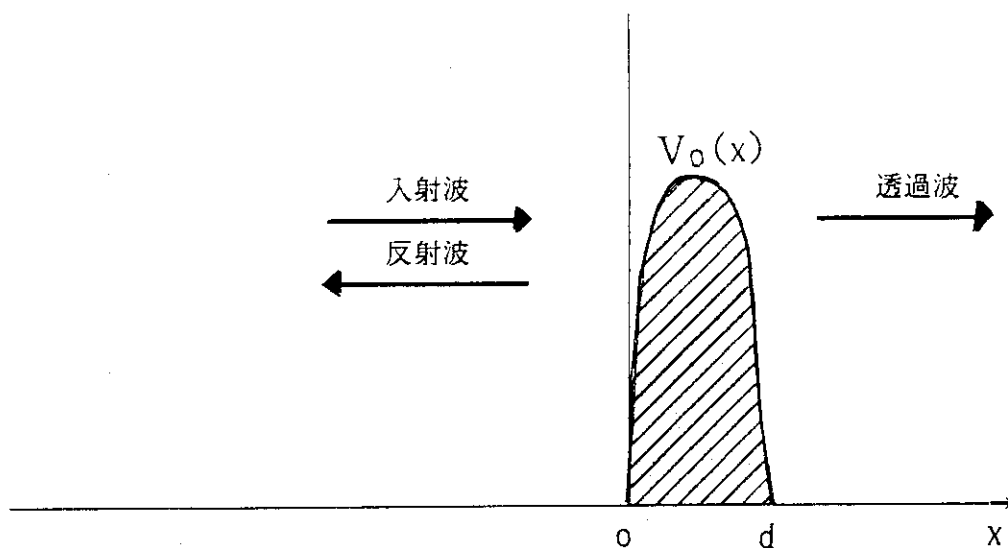
ととると,

$$\begin{aligned}t_n + \sigma s_n &= A' (t_{n-1} + \sigma s_{n-1}) \\ &= A'^{n-1} (C' + \sigma D')\end{aligned}$$

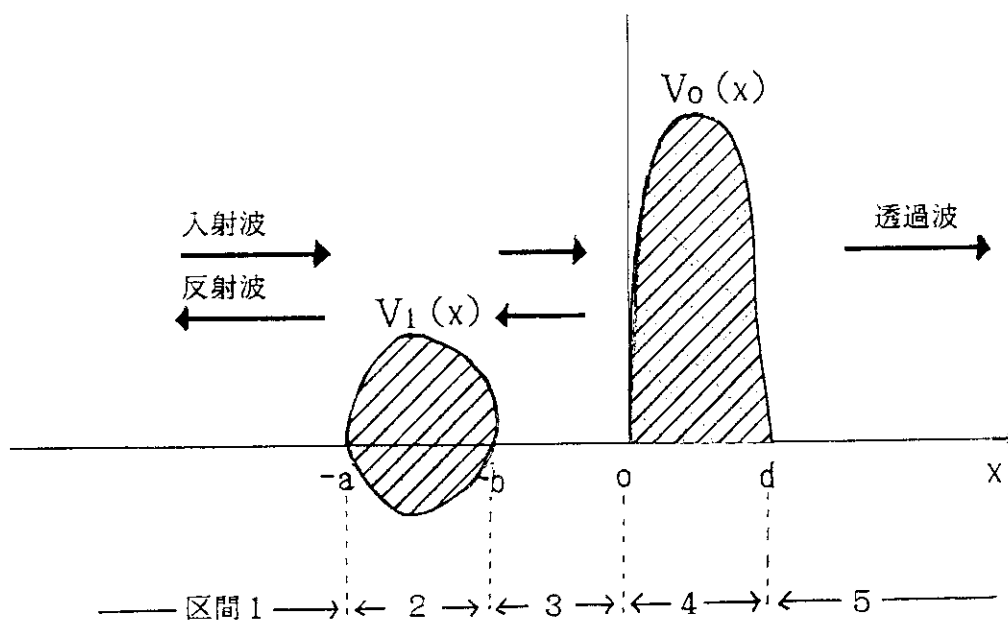
これから

$$t_n = -\sigma D'^n + A'^{n-1} (C' + \sigma D') \quad (A2.10c)$$

がえられ, (A 2.10 a, b) と合わせて M^n が求められた。



第1図 ポテンシャル障壁の透過 (トンネル効果)



第2図 ポテンシャルの配置

$V_0(x)$: ポテンシャル障壁, $V_1(x)$: 入射波とパラメトリック共鳴条件を充す周期的ポテンシャル列