

JAERI-M
92-075

境界積分方程式の解法に基づく
トカマク・プラズマの位置形状同定法

1992年5月

栗原 研一・木村 豊秋

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1992

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 日立高速印刷株式会社

境界積分方程式の解法に基づく
トカマク・プラズマの位置形状同定法

日本原子力研究所那珂研究所核融合装置試験部
栗原 研一・木村 豊秋

(1992年4月24日受理)

トカマク・プラズマの最外殻磁気面形状が可同定となるための必要条件を提示すると共に、境界積分方程式の解法に基づく新たな位置形状同定法の提案が行なわれている。この同定法は、磁束計測値または磁束密度計測値が与えられた状況で、真空場の満たす積分方程式を境界上で数値的に解くことを中心課題とする方法であり、低非円形断面から高非円形断面プラズマに至るまで、計測器の設置数に対応した精度でトカマク・プラズマの最外殻磁気面形状を同定するものである。本方法は、計測値に無関係に計算出来る部分を予めテーブルの形式に展開しておくことにより、実時間制御や実時間可視化にも応用可能である。

Tokamak Plasma Shape Identification
Based on the Boundary Integral Equations

Kenichi KURIHARA and Toyoaki KIMURA

Department of Fusion Facility
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received April 24, 1992)

A necessary condition for tokamak plasma shape identification is discussed and a new identification method is proposed in this article. This method is based on the boundary integral equations governing a vacuum region around a plasma with only the measurement of either magnetic fluxes or magnetic flux intensities. It can identify various plasmas with low to high ellipticities with the precision determined by the number of the magnetic sensors. This method is applicable to real-time control and visualization using a "table-look-up" procedure.

Keywords : Tokamak Plasma, Boundary Integral Equations, Shape and Position Control, Feedback Control, Real-time Visualization

目 次

1. はじめに	1
2. トカマク・プラズマ位置形状同定問題の概念	1
2.1 トポロジ-的概念と解の形式	2
2.2 位置形状可同定のための必要条件	3
3. 計算方法	7
4. JT-60U, ITER への適用例と検討	9
5. 結 論	12
謝 辞	12
参考文献	13
付 録	14

Contents

1. Introduction	1
2. Tokamak Plasma Shape Identificaiton Concept	1
2.1 Topological Concept of the Problem and Introduction of the Equations	2
2.2 A Necessary Condition for the Shape Identification	3
3. Calculation Algorithm and Techniques	7
4. Applications to JT-60U and ITER and Discussions	9
5. Conclusions	12
Acknowledgments	12
References	13
Appendices	14

1. はじめに

トカマク型核融合実験装置に於て、発生したプラズマの位置形状を同定することは、プラズマを制御したり、また評価する上で必要不可欠である。そのため今までに様々な方法が検討され提案されている^{1,2)}。しかし、実システムへの応用実績を見ると、プラズマ電流を数本のfilament電流で置き換えるという荒い近似ながら小数の磁場センサでプラズマの形状を比較的精度良く同定するfilament電流近似法³⁾が最も広く用いられている。また、偏微分方程式の解法という観点で厳密な解析解である固有関数展開法(Legendre-Fourier展開法²⁾、多重極展開法⁴⁾は、数値計算上の困難等のために対象プラズマの形状や電流分布によっては寧ろ精度が落ちる場合がある。また、電流・圧力分布の関数形を規定して計測値からその関数を求める平衡計算方法⁵⁾では、まず何らかの方法で位置形状を同定しなければならない上、プラズマ内部の多様な分布を表わす関数形式が存在し得るかなど問題がある。さらに、ITER(国際熱核融合実験炉; International Thermonuclear Experimental Reactor)⁶⁾の高非円形プラズマの場合には既存の方法の単純な適用では精度良く同定出来ないという問題も発生した。これらの困難はトカマク・プラズマの位置形状同定問題の本質的理解が十分行なわれずに、各装置のプラズマを大きな誤差を含まないと思われる範囲でその都度適当な方法を採用してきたため、方法自体が装置の依存性を強く持つことが主な理由と考えられる。そこで、この位置形状同定問題を数理的な観点で再検討し、可同定の条件を明確にした後、その必要条件だけから具体的にプラズマの位置形状同定法を開発することを想起した。本論文はこの動機に基づく一連の検討結果の報告である。まず、2章でその概念的説明と式の導入、さらに位置形状決定の必要条件を示す。3章では、提案する同定法の数値計算の手順と技法上の注意点を述べ、4章でJT-60U及びITERに適用した例を示した後、幾つかの検討を加える。

2. トカマク・プラズマ位置形状同定問題の概念

トカマク・プラズマは、その質量密度が極めて小さいため、常に平衡状態(加速度項=0)であると見做すことが出来る。従って、次式が成立する。

$$\rho \, dv/dt = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \text{grad } p = 0 \quad (2.1)$$

ρ ; 質量密度、 dv/dt ; 加速度、 \mathbf{j} ; 電流密度、 \mathbf{B} ; 磁束密度、 p ; プラズマ圧力。プラズマ圧力は、プラズマ中の粒子や熱の輸送により決まる量であり、その挙動は今なお十分に理解されていない。さて、プラズマの内部の電流と圧力はこの釣り合いを維持しているが、プラズマ領域と真空領域とを分けている最外殻の面は、真空容器壁に接触する磁気面(リミタ放電時)またはポロイダル磁場が0の点(X点)を通る磁気面(ダイバータ放電時)によって規定されている。これは、プラズマを構成する荷電粒子が磁力線に近似的に巻きついて運動しているという描像が可能であるからである。その最外殻の面(最外殻磁気面)を構成する磁力線はポロイダル磁場とトロイダル磁場の合成であり、先の描像からポロイダル断面の位置形状同定を考える時、問題となるのはポロイダル磁場である。ポロイダル磁場は、プラズマ電流及びポロイダル磁場コイル電流による磁場から構成されていることから、位置形状問題はこれ

1. はじめに

トカマク型核融合実験装置に於て、発生したプラズマの位置形状を同定することは、プラズマを制御したり、また評価する上で必要不可欠である。そのため今までに様々な方法が検討され提案されている^{1,2)}。しかし、実システムへの応用実績を見ると、プラズマ電流を数本のfilament電流で置き換えるという荒い近似ながら小数の磁場センサでプラズマの形状を比較的精度良く同定するfilament電流近似法³⁾が最も広く用いられている。また、偏微分方程式の解法という観点で厳密な解析解である固有関数展開法(Legendre-Fourier展開法²⁾、多重極展開法⁴⁾は、数値計算上の困難等のために対象プラズマの形状や電流分布によっては寧ろ精度が落ちる場合がある。また、電流・圧力分布の関数形を規定して計測値からその関数を求める平衡計算方法⁵⁾では、まず何らかの方法で位置形状を同定しなければならない上、プラズマ内部の多様な分布を表わす関数形式が存在し得るかなど問題がある。さらに、ITER(国際熱核融合実験炉; International Thermonuclear Experimental Reactor)⁶⁾の高非円形プラズマの場合には既存の方法の単純な適用では精度良く同定出来ないという問題も発生した。これらの困難はトカマク・プラズマの位置形状同定問題の本質的理解が十分行なわれずに、各装置のプラズマを大きな誤差を含まないと思われる範囲でその都度適当な方法を採用してきたため、方法自体が装置の依存性を強く持つことが主な理由と考えられる。そこで、この位置形状同定問題を数理的な観点で再検討し、可同定の条件を明確にした後、その必要条件だけから具体的にプラズマの位置形状同定法を開発することを想起した。本論文はこの動機に基づく一連の検討結果の報告である。まず、2章でその概念的説明と式の導入、さらに位置形状決定の必要条件を示す。3章では、提案する同定法の数値計算の手順と技法上の注意点を述べ、4章でJT-60U及びITERに適用した例を示した後、幾つかの検討を加える。

2. トカマク・プラズマ位置形状同定問題の概念

トカマク・プラズマは、その質量密度が極めて小さいため、常に平衡状態(加速度項=0)であると見做すことが出来る。従って、次式が成立する。

$$\rho \, dv/dt = j \times B - \text{grad } p = 0 \quad (2.1)$$

ρ ; 質量密度、 dv/dt ; 加速度、 j ; 電流密度、 B ; 磁束密度、 p ; プラズマ圧力。プラズマ圧力は、プラズマ中の粒子や熱の輸送により決まる量であり、その挙動は今なお十分に理解されていない。さて、プラズマの内部の電流と圧力はこの釣り合いを維持しているが、プラズマ領域と真空領域とを分けている最外殻の面は、真空容器壁に接触する磁気面(リミタ放電時)またはポロイダル磁場が0の点(X点)を通る磁気面(ダイバータ放電時)によって規定されている。これは、プラズマを構成する荷電粒子が磁力線に近似的に巻きついて運動しているという描像が可能であるからである。その最外殻の面(最外殻磁気面)を構成する磁力線はポロイダル磁場とトロイダル磁場の合成であり、先の描像からポロイダル断面の位置形状同定を考える時、問題となるのはポロイダル磁場である。ポロイダル磁場は、プラズマ電流及びポロイダル磁場コイル電流による磁場から構成されていることから、位置形状問題はこれ

らの作る場の同定と見做すことが出来る。勿論、より積極的に電流分布自体を同定する問題として捉えることも出来る。

ところで、プラズマの位置形状は計測データを使用して同定される。計測器としては最も信頼性の高い電磁気計測器(プラズマ電流, 磁束, 磁束密度の各計測)を想定することとする。プラズマ中を直接計測することは出来ないので、プラズマを取り囲む真空容器壁での真空場の計測となる。位置形状同定問題はプラズマと真空との境界面の同定であることを考えると、プラズマを取り囲む真空場が十分な精度で同定出来れば、最外殻磁気面を描くことは可能になるが、原理的に真空場の電磁気計測だけでプラズマ表面までの真空場が同定可能であろうか。また可同定にするには、どのような計測器が必要となるのか。本章では、これらの問題に検討を加える。

2.1 トポロジー的概念と解の形式

トカマクを構成する電流(\mathbf{j})や磁束密度(\mathbf{B})の満すMaxwell方程式を出発点として、磁束関数の満す方程式を導く。 \mathbf{j} 、 \mathbf{B} に関する定常場のMaxwell方程式は次式である。

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{2.2}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \tag{2.3}$$

(2.3)からベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} ($\mathbf{B}=\text{rot } \mathbf{A}$)を導入し、(2.2)に代入する。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{2.4}$$

ここで、軸対称系であることを考慮し、磁束関数 ϕ ($\phi \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}\omega$, $\mathbf{A}\omega$: \mathbf{A} のトロイダル方向成分, \mathbf{r} : 円柱座標系の中心軸からの距離)を導入することにより、次式に示すスカラの方程式が得られる。

$$\text{div}[(\text{grad } \phi)/r^2] = -\mu_0 \mathbf{j}\omega r \tag{2.5}$$

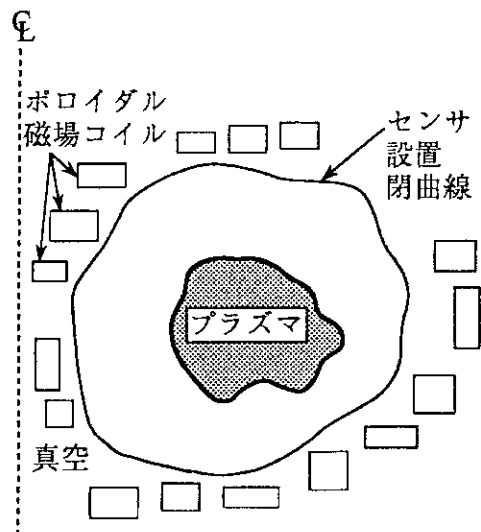
$\mathbf{j}\omega r$ は、 \mathbf{j} のトロイダル方向成分である。ここで、プラズマ中を考えれば、 $\mathbf{j}\omega r$ は磁気面関数 $p(\phi)$ と $I(\phi)$ を用いて、次のように表わすことが出来る。

$$\mathbf{j}\omega r = (\mu_0/r)/2 \cdot dI^2/d\phi + r \cdot dp/d\phi \tag{2.6}$$

(2.5)式の右辺に代入すれば、Grad-Shafranov方程式が得られる。一方、真空中を考える時、 $\mathbf{j}\omega r = 0$ を(2.5)式に代入することにより、次式が得られる⁷⁾。

$$\text{div}[(\text{grad } \phi)/r^2] = 0 \tag{2.7}$$

この式は、楕円型非線形斉次2階偏微分方程式に分類される。楕円型2階偏微分方程式の境界値問題の解は、閉曲面(曲線)境界上で与えられたDirichlet型またはNeumann型の境界条件で一意的に存在することが知られている⁸⁾。プラズマ電流分布は未知であるから、解析領域のトポロジー的概念は第2.1図に示すように、プラズマの部分を除いた領域である。(2.7)式の解の決定条件が、単連結領域だけでなく第2.1図のような多重



第2.1図 解析領域のトポロジー的概念図

連結領域での境界値問題でも成立しているのかどうかは明確な説明が無いようである。しかし、(2.7)式の変数分離解法²⁾では、非正則点を持つ解と正則解との2種類の固有関数が得られる。これは、内部に1つの非正則領域を持つようなドーナツ状の多重連結領域であれば、最外周上でのDirichlet型またはNeumann型の境界条件から解が決定される可能性を強く支持している。実際、この固有関数を用いたトカマク・プラズマの位置形状同定は、可同定形状に制約条件はあるものの良好な結果を得ている²⁾。

さて、このような見通しのもとで(2.7)式を解くことを考える。一般的に、偏微分方程式の解法は大きく3種に分類されるが付録1に示す理由によりGreen関数に基礎を置く境界積分解法が最も有望な方法と位置づけられることがわかる。そこで、(2.7)式から境界積分方程式を導くことにする。2つのスカラー関数 f, g に関する次の恒等式が知られている。

$$\text{div}[f \cdot (\text{grad } g)/r^2] - \text{div}[g \cdot (\text{grad } f)/r^2] = f \cdot \text{div}[(\text{grad } g)/r^2] - g \cdot \text{div}[(\text{grad } f)/r^2] \quad (2.8)$$

この式に $f=\phi(y)$, $g=G(x, y)$ を代入する。ここで、 G は円柱軸対称体系の2点 x, y 間のGreen関数であり、 $x=(r_x, z_x)$, $y=(r_y, z_y)$ とすると次式で表わされる。

$$G(x, y) = G(r_x, z_x, r_y, z_y) = \frac{4}{k} \sqrt{r_x \cdot r_y} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right\} \quad (2.9)$$

K, E ; 第1,2種完全楕円積分、 $k^2 \equiv 4 \cdot r_x \cdot r_y / \{(r_x + r_y)^2 + (z_x - z_y)^2\}$ 。

このGreen関数は、(2.7)式の変数分離解の0次の固有関数と同じであり、従って次式を満す。

$$\text{div}[\{\text{grad } G(x, y)\}/r_y^2] = \gamma \cdot \delta(x, y) \quad (2.10)$$

$$\gamma \equiv \lim_{\substack{\text{volume } \Omega \rightarrow 0 \\ x \in \Omega}} \int_{\Omega} \text{div} \left[\frac{\text{grad } G(x, y)}{r_y^2} \right] \cdot dV(y) = -8\pi^2$$

ここで、 $\delta(x, y)$ はデルタ関数であり、 $\delta(x, y) \equiv [0 (x \neq y), \infty (x = y)]$ 、及び、

$$\int_{\Omega} \phi(y) \cdot \delta(x, y) dy = \phi(x), \quad x \in \Omega \quad (2.11)$$

$dV(y)$ は y に於ける体積要素である。 $\phi(y)$, $G(x, y)$ を代入した(2.8)式に於て、 y についてある閉領域 Ω で体(面)積積分する。但し、 $x \in \Omega$ とする。Gaussの積分定理、(2.5), (2.10), (2.11)の各式を考慮することにより、次式に示す(2.5)式の積分形式の解が得られる。

$$\sigma \cdot \phi(x) = \int_{\partial \Omega} [G(x, y) \cdot \text{grad } \phi(y) - \phi(y) \cdot \text{grad } G(x, y)] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega} \mu_0 j(y) \cdot G(x, y) \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (2.12)$$

ここで、 $\partial \Omega$; 閉領域 Ω の境界面(線)、 $dS(y) \equiv n(y) \cdot dS(y)$; y に於ける面(線)要素ベクトル、 n ; Ω に対して外向きの $\partial \Omega$ の単位法線ベクトル、 $dV(y)$; y に於ける体(面)積要素、 $j(y)$; 閉領域 Ω に含まれる電流密度、 σ は次式で表わされる定数である。

$$\sigma = -\gamma \cdot \theta, \quad \theta = \{ 1(x \in \Omega), 1/2(x \in \partial \Omega), 0(x \in [(\Omega + \partial \Omega) \text{を除く領域}]) \}$$

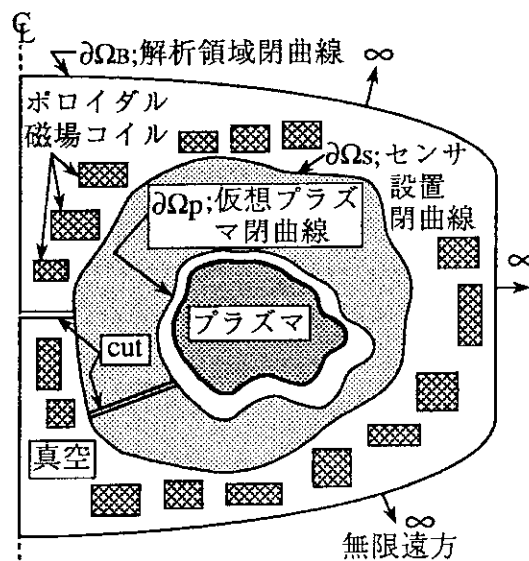
(2.12)式は、領域 Ω 内での電流分布 $j(y)$ が既知であれば、 $\partial \Omega$ 上で与えられたDirichlet型($\phi(y)$)及びNeumann型($\text{grad } \phi(y)$)境界条件により厳密に解が表現出来ることを意味している。次節に於てこの解の表現形式を用いて、トカマク・プラズマの位置形状可同定の条件を検討する。

2.2 位置形状可同定のための必要条件

(2.5)式の解の形式(2.12)式は、領域内の電流分布 $j(y)$ が既知であることを要求する。トカマク・プラズマの位置形状を求めようとする時点では、プラズマ電流分布は未知であるから、(2.12)式の右辺の $j(y)$ としてプラズマ電流分布を考えることは出来ない。プラズマを除く領域での電

流分布(または電流)については既知とする。勿論、渦電流のように分布が直接観測出来ない電流も存在するが、ディスラプション時やプラズマ電流立ち上げ時などの急激な変動時を除けば、渦電流はプラズマ電流に比べて非常に小さいので¹⁰⁾、位置形状同定(磁場分布同定)問題では無視することにする。

今この領域内で3閉曲面(曲線)を定義する。なお、実空間は3次元であるから境界は閉"曲面"であるが、軸対称系を考えているのでポロイダル断面内では閉"曲線"となる。全領域を囲む閉曲線($\partial\Omega_B$)、センサが設置された閉曲線($\partial\Omega_S$)、プラズマの外側にプラズマを囲む閉曲線(仮想プラズマ閉曲線)($\partial\Omega_P$)、の3閉曲線を第2.2図に示すような位置関係で配置する。また、 $\partial\Omega_1$ と $\partial\Omega_2$ で囲まれたドーナツ状閉領域を Ω_{1-2} で表現する。今、プラズマを含まない2領域 Ω_{B-S} と Ω_{S-P} に(2.12)式を適用する。その際、 $\partial\Omega_B$ を無限遠方に移動させることにより得られる次の極限を用いる。なお、中心軸上の線積分計算は $G=0, \text{grad}G=0$ から0である。



第2.2図 閉曲線のトポロジーと積分経路

$$\lim_{\partial\Omega_B \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_B} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} = 0 \quad (2.13)$$

2領域での(2.5)の解は次式で表わされる。

$x \subseteq \Omega_{B-S}$ に於て

$$\sigma \cdot \phi(x) = \int_{\partial\Omega_S} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{B-S}} \mu_0 j_c \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (2.14)$$

$x \subseteq \Omega_{S-P}$ に於て

$$\sigma \cdot \phi(x) = \int_{\partial\Omega_P} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} - \int_{\partial\Omega_S} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P-S}} \mu_0 j_v \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (2.15)$$

または、(2.14)式を用いて $x \subseteq \Omega_{B-P}$ まで拡張すると

$$\sigma \cdot \phi(x) = \int_{\partial\Omega_P} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P-B}} \mu_0 (j_c + j_v) \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (2.16)$$

ここで、面積分の際の法線ベクトルの向きはプラズマの方向に採った。また、 j_c, j_v はそれぞれ領域 $\Omega_{B-S}, \Omega_{S-P}$ 内の既知電流密度である。

次に、これらの式に現われた変数と $\partial\Omega_S$ 上に設置された電磁気計測器との対応を明らかにする。磁束関数 ϕ は磁束ループの電圧信号出力を積分することにより直接計測出来る。磁束密度ベクトルの曲線 $\partial\Omega_S$ の接線方向成分 B_t を ϕ を用いて表わすと $B_t = \text{grad}\phi \cdot n / r_y$ となることから、 ϕ の勾配 $\text{grad}\phi$ は $\partial\Omega_S$ に沿って設置した磁気プローブ信号から $\text{grad}\phi \cdot n / r_y$ が与えられる。以降、 ϕ と B_t ($\text{grad}\phi$ の接線成分)との関係を中心に議論する。

より具体的な解析をするために、積分を無限級数形式で表現する。 $K(\alpha, \beta)$ を $\alpha \neq \beta$ 以外で有界で滑らかな関数、 $q(\beta)$ を積分範囲で滑らかな関数とする。領域 $\Omega (\alpha \subset \Omega)$ での β に関する K の積分

値が有界、即ち $\int_a^b K(\alpha, \beta) \cdot q(\beta) d\beta < \infty$ 、であれば次式が成立する。(付録2 参照)

$$\int_a^b K(\alpha, \beta) \cdot q(\beta) d\beta = \sum_{i=1}^{\infty} w(h_i, \alpha, \beta_i) \cdot q(\beta_i) \quad (2.17)$$

ここで h_i は積分区間を分割した微小区間幅である。十分大きな N を用いて次式に書き換える。

$$\int_a^b K(\alpha, \beta) \cdot q(\beta) d\beta = \sum_{i=1}^N w(h_i, \alpha, \beta_i) \cdot q(\beta_i) + \delta(\alpha, N) \quad (2.18)$$

ここに、 $\delta(\alpha, N)$ は積分分割点数 N の増加に対して単調に減少する微小関数で、絶対値は(2.18)式の右辺第1項に比べ十分小さいものとする。当然、 $\delta(\alpha, N \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ である。

今、 $\partial\Omega_S$ 上及び $\partial\Omega_P$ 上での積分分割点数はそれぞれ N 及び M とする。 $N \geq M$ である。(2.18)式を用いて(2.14)と(2.16)式を級数で表現する。なお、関数 $\delta(\alpha, N)$ は各積分で発生したものの合計とする。まず、(2.14)式で領域内部から境界に近付けること ($x \rightarrow \partial\Omega_S$) により、

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^N W_1^1(x, y_i) \phi(y_i) + \sum_{i=1}^N W_2^1(x, y_i) Bt(y_i) + W_3^1(x) + \delta^1(x, N), \quad x \subseteq \partial\Omega_S, y_i \subseteq \partial\Omega_S \quad (2.19)$$

次に(2.16)式で領域内部から2境界に近付けること ($x \rightarrow \partial\Omega_S$ 及び $x \rightarrow \partial\Omega_P$) により、

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^M W_1^2(x, z_i) \phi(z_i) + \sum_{i=1}^M W_2^2(x, z_i) Bt(z_i) + W_3^2(x) + \delta^2(x, M), \quad x \subseteq \partial\Omega_S, z_i \subseteq \partial\Omega_P \quad (2.20)$$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^M W_1^3(x, z_i) \phi(z_i) + \sum_{i=1}^M W_2^3(x, z_i) Bt(z_i) + W_3^3(x) + \delta^3(x, M), \quad x \subseteq \partial\Omega_P, z_i \subseteq \partial\Omega_P \quad (2.21)$$

ここで、各式の意味を整理する。(2.19)または(2.14)式は、 $\partial\Omega_S$ 上での ϕ と Bt との対応関係を表現したものである。(2.20)式は $\partial\Omega_S$ 上での ϕ と $\partial\Omega_P$ 上での ϕ , Bt との関係、(2.21)式は $\partial\Omega_P$ 上での ϕ と Bt との関係である。どの関係も互いに線形関係にあるので行列係数のベクトル方程式に書き換えて以降の議論を進めていく。なお、積分方程式の型による解の存在定理が知られている[*]が、離散化した後の演算に於いては数値計算上の困難は無い。

(2.19),(2.20)式でそれぞれ $x=y_i$ ($i=1,2,\dots,N$) と置き N 個ずつ式を作り、(2.21)式で $x=z_i$ ($i=1,2,\dots,M$) と置いて式を M 個作る。ここで、次のベクトルを定義する。

$$\phi^S \equiv [\phi(y_1), \phi(y_2), \phi(y_3), \dots, \phi(y_N)] \in \mathbf{R}^{N \times 1}, \quad \phi^P \equiv [\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \dots, \phi(z_M)] \in \mathbf{R}^{M \times 1},$$

$$Bt^S \equiv [Bt(y_1), Bt(y_2), Bt(y_3), \dots, Bt(y_N)] \in \mathbf{R}^{N \times 1}, \quad Bt^P \equiv [Bt(z_1), Bt(z_2), Bt(z_3), \dots, Bt(z_M)] \in \mathbf{R}^{M \times 1}$$

これらを用いて、 $(2N+M)$ 個の式を次に示す行列方程式に書き換える。

$$\phi^S = A_1 \cdot \phi^S + B_1 \cdot Bt^S + c_1 + d_1 \quad (2.22)$$

$$\phi^S = A_2 \cdot \phi^P + B_2 \cdot Bt^P + c_2 + d_2 \quad (2.23)$$

$$\phi^P = A_3 \cdot \phi^P + B_3 \cdot Bt^P + c_3 + d_3 \quad (2.24)$$

$$A_1(i, j) \equiv [W_1^1(y_i, y_j)] \in \mathbf{R}^{N \times N}, \quad B_1(i, j) \equiv [W_2^1(y_i, y_j)] \in \mathbf{R}^{N \times N}, \quad c_1 \equiv [W_3^1(y_1), W_3^1(y_2), \dots, W_3^1(y_N)] \in \mathbf{R}^{N \times 1},$$

$$A_2(i, j) \equiv [W_1^2(y_i, z_j)] \in \mathbf{R}^{N \times M}, \quad B_2(i, j) \equiv [W_2^2(y_i, z_j)] \in \mathbf{R}^{N \times M}, \quad c_2 \equiv [W_3^2(y_1), W_3^2(y_2), \dots, W_3^2(y_N)] \in \mathbf{R}^{N \times 1},$$

$$A_3(i, j) \equiv [W_1^3(z_i, z_j)] \in \mathbf{R}^{M \times M}, \quad B_3(i, j) \equiv [W_2^3(z_i, z_j)] \in \mathbf{R}^{M \times M}, \quad c_3 \equiv [W_3^3(z_1), W_3^3(z_2), \dots, W_3^3(z_M)] \in \mathbf{R}^{M \times 1},$$

$$d_1 \equiv [\delta^1(y_1, N), \delta^1(y_2, N), \dots, \delta^1(y_N, N)] \in \mathbf{R}^{N \times 1}, \quad d_2 \equiv [\delta^2(y_1, M), \delta^2(y_2, M), \dots, \delta^2(y_N, M)] \in \mathbf{R}^{N \times 1},$$

$$d_3 \equiv [\delta^3(z_1, M), \delta^3(z_2, M), \dots, \delta^3(z_M, M)] \in \mathbf{R}^{M \times 1}.$$

[*]: 積分方程式の型による分類

(2.14)式で $x \rightarrow \partial\Omega_S$ とした式と(2.16)式で $x \rightarrow \partial\Omega_P$ とした式は境界積分方程式である。これらの式では、磁束関数値 ϕ にとっては第2種Fredholm型、磁束密度 Bt にとっては第1種Fredholm型の積分方程式になっている。また、(2.16)式で $x \rightarrow \partial\Omega_S$ とした式は磁束関数値 ϕ 及び磁束密度 Bt の両者にとって第1種Fredholm型になっている。第2種Fredholm型は解が一意に存在することが知られているが、第1種Fredholm型は特殊な場合を除いて解が存在しないとされている[1]。

(2.23)と(2.24)式を解くことにより、次式が得られる。

$$\phi^p = (F \cdot F)^{-1} \cdot F \cdot \{ \phi^s + (B_2 B_3^{-1} c_3 - c_2) + (B_2 B_3^{-1} d_3 - d_2) \} \quad (2.25)$$

$$F \equiv A_2 + B_2 B_3^{-1} (I_M - A_3), \quad I_M: \text{a unit matrix} \in \mathbf{R}^{M \times M}$$

$$B_1^p = B_3^{-1} (I_M - A_3) \cdot \phi^p - B_3^{-1} c_3 - B_3^{-1} d_3 \quad (2.26)$$

また、(2.22)式より次式が得られる。 I_N : a unit matrix $\in \mathbf{R}^{N \times N}$ である。

$$\phi^s = (I_N - A_1)^{-1} \cdot (B_1 \cdot B_1^s + c_1 + d_1) \quad (2.27)$$

これらの式の中の逆行列は $N \rightarrow \infty$ に於いても元の行列中の行間の独立性は保たれるので必ず存在する。一方、誤差ベクトル項 d_1, d_2, d_3 は単調に 0 に近づくことから、(2.25), (2.26) 式の ϕ^p 及び B_1^p は真値に収束する。 ϕ^p 及び B_1^p が求まれば(2.16)式により $\partial\Omega_p$ より外側の任意の点で磁束関数値が計算出来る。(2.25), (2.26) 式は $\partial\Omega_s$ 上での ϕ^s を用いて ϕ^p 及び B_1^p が計算出来ることを示し、また、(2.27) 式では $\partial\Omega_s$ 上での ϕ^s は $\partial\Omega_s$ 上での B_1^s から計算出来ることを示している。これから、次のことが結論出来る。即ち、第2.2図に示す体系に於いてプラズマより外側の真空領域中、任意の点の磁束関数値を計算可能にする条件は、プラズマを取り囲む閉曲線上で連続的に与えられた磁束関数値 ϕ^s またはプラズマを取り囲む閉曲線の接線方向の磁束密度値 B_1^p のどちらかが与えられることである。

この条件だけではプラズマ位置形状の可同定条件にはなっていないが、プラズマ表面までの磁束関数値が真空場の計測だけで原理的に同定出来ることを意味している。さらに議論を進めるためにプラズマの特徴に起因した最外殻磁気面の性質を明確にする。本章の始めに述べたように、プラズマ最外殻磁気面はリミタやダイバータコイル電流値によってある磁気面で規定されている。各磁気面に1つのスカラ値即ち磁束関数値が定まり、磁束関数値を高さとする"山"を考えた時、その等高線が磁気面を与える。ここで、プラズマに近づくに従って値が大きくなるように磁束関数の正の向きを採る。この時、リミタ放電ではリミタ点での磁束関数値の中で最も高い磁束関数値の等高線がプラズマの最外殻磁気面形状を表現している。ダイバータ放電では、ダイバータコイルとプラズマとの間に存在する鞍点(X点)の磁束関数値で等高線を描けばやはり最外殻磁気面形状となる。以上最外殻磁気面の性質は、最外殻磁気面は磁束関数値分布に於いてリミタ点及びX点の磁束関数値の中で最も高い磁束関数値を持つ等高線である。

さて、これまで仮想プラズマ閉曲線 $\partial\Omega_p$ はプラズマの外側としてきたが、ここでプラズマ表面より内側 ($\partial\Omega_p^*$) に置いて境界積分方程式を解いた場合を考えることにする。この解の意味は「 $\partial\Omega_p^*$ よりも内側にプラズマが存在するものとした場合の $\partial\Omega_p^*$ 上での ϕ^{p*} 及び B_1^{p*} である」となる。この時プラズマ表面から仮想プラズマ閉曲線 $\partial\Omega_p^*$ までの範囲で得られた磁束関数値分布はもはや現実ではないが、プラズマ表面までの真空領域の磁束関数値分布は現実と一致する(付録3参照)。従って、このようにして得られた $\partial\Omega_p^*$ より外側領域での磁束関数分布に於いて、前記最外殻磁気面であるための条件に適合する磁束関数の等高線は唯一[#]存在する。その等高線上での磁束関数値 ϕ^{p**} 及び磁束密度の接線成分 B_1^{p**} は、その等高線を新たな仮想プラズマ閉曲線 $\partial\Omega_p^{**}$ として境界積分方程式を解いた解になることは明らかである。従って、境界積分方程式の解で且つ最外殻磁気面の性質を備えたこの閉曲線 $\partial\Omega_p^{**}$ はプラズマ最外殻磁気面に他ならない。以上からプラズマ位置形状決定について、次のことが結論出来る。即ち、

[#]:もし2つ以上存在すると仮定すると1つは実際のプラズマ表面 $\partial\Omega_p$ であるから、残りはプラズマに含まれた部分に存在することになり、一方それらは $\partial\Omega_p$ に完全に含まれる。これは最外殻磁気面の性質に矛盾する。

仮想プラズマ閉曲線 $\partial\Omega_P$ をプラズマに含まれるように設定して境界積分方程式を解く。その結果得られた $\partial\Omega_P$ より外側領域での磁束関数値分布に於いて、プラズマ最外殻磁気面の性質を備えた閉曲線が唯一存在する。

以上の2つの結論から、最終的に「プラズマの最外殻磁気面形状を可同定にする条件は、プラズマを取り囲む閉曲線上の至る所で磁束関数値(ϕ^s)が与えられるか、またはプラズマを取り囲む閉曲線上の至る所で閉曲線の接線方向の磁束密度値(B_t^s)が与えられるかのどちらか一方である」ことが結論出来る。

3. 計算方法

前章ではプラズマ位置形状の可同定条件の原理的な議論であったので理想的な状況を設定して検討を行なった。しかし、現実には有限個の計測器が対称性のない真空容器壁に不等間隔に取り付いていることが多い。また前章では具体的計算内容に触れずに解の存在を議論してきたが応用に際してはこれらが明確にされなくてはならない。本章では、有限の個数の計測器から、真空領域での磁束関数を計算する方法を具体的に示す。なお、磁束関数の分布が分った後のプラズマ最外殻磁気面の探索法は前章で述べた最外殻磁気面の性質から明確であるので繰り返さない²⁾。最初に計算の流れを示し、次に特徴的な計算処理内容を述べる。

(1) 計算の流れ

センサ設置閉曲線($\partial\Omega_s$)上で磁束密度値が与えられた場合、以下のように計算処理は大きく3つのステップから成る。 $\partial\Omega_s$ 上で磁束関数値が与えられた場合には、第2ステップから処理が行なわれる。

第1ステップ： Ω_{B-s} に於ける積分方程式の $\partial\Omega_s$ 上での境界積分方程式を離散化した(2.27)式に於いて $d_1=0$ とした次式を用いて、 $\partial\Omega_s$ 上での接線方向磁束密度計測 B_t^s からその閉曲線上での磁束関数値 ϕ^s を計算する。即ち、 $B_t^s(\text{on } \partial\Omega_s) \Rightarrow \phi^s(\text{on } \partial\Omega_s)$

$$\phi^s = (I - A_1)^{-1} \cdot (B_1 \cdot B_t^s + c_1) \quad (3.1)$$

第2ステップ： Ω_{P-s} に於ける積分方程式の $\partial\Omega_s, \partial\Omega_P$ 上での境界積分方程式を離散化した(2.20)、(2.21)式に於いてそれぞれ $d_2=0, d_3=0$ とした次の式を用いて、センサ設置閉曲線上の ϕ^s から仮想プラズマ閉曲線($\partial\Omega_P$)上の B_t^P 及び ϕ^P を計算する。この際 $\partial\Omega_P$ はプラズマに十分含まれる様に配置する。即ち、 $\phi^s(\text{on } \partial\Omega_s) \Rightarrow B_t^P \& \phi^P(\text{on } \partial\Omega_P)$ 。なお、 ϕ^s の要素数が ϕ^P の要素数より大きい場合も想定し最小2乗法により計算する。

$$\phi^P = (F \cdot F)^{-1} \cdot F \cdot \phi^s + (F \cdot F)^{-1} \cdot F \cdot (B_2 B_3^{-1} c_3 - c_2) \quad (3.2)$$

$$F = A_2 + B_2 B_3^{-1} (I - A_3) \quad (3.3)$$

$$B_t^P = B_3^{-1} (I - A_3) \cdot \phi^P - B_3^{-1} c_3 \quad (3.4)$$

第3ステップ： $\partial\Omega_P$ 上での B_t^P 及び ϕ^P を用いて Ω_{P-B} 内の積分形式の解(2.16)式を離散化した次式から任意の点での ϕ が計算可能である。プラズマ最外殻磁気面上の磁束関数値で等高線を描くことにより形状が同定出来る。

$$\phi(x) = \zeta_1(x, \partial\Omega_P) \cdot \phi^P + \zeta_2(x, \partial\Omega_P) \cdot B_t^P + \zeta_3(x) \cdot I c \quad (3.5)$$

ここで、 $\zeta_1(x, \partial\Omega_P), \zeta_2(x, \partial\Omega_P)$ は(2.16)式第1項の離散化で生ずるベクトルで、計算点 x と $\partial\Omega_P$

仮想プラズマ閉曲線 $\partial\Omega_P$ をプラズマに含まれるように設定して境界積分方程式を解く。その結果得られた $\partial\Omega_P$ より外側領域での磁束関数値分布に於いて、プラズマ最外殻磁気面の性質を備えた閉曲線が唯一存在する。

以上の2つの結論から、最終的に「プラズマの最外殻磁気面形状を可同定にする条件は、プラズマを取り囲む閉曲線上の至る所で磁束関数値(ϕ^S)が与えられるか、またはプラズマを取り囲む閉曲線上の至る所で閉曲線の接線方向の磁束密度値(B_t^S)が与えられるかのどちらか一方である」ことが結論出来る。

3. 計算方法

前章ではプラズマ位置形状の可同定条件の原理的な議論であったので理想的な状況を設定して検討を行なった。しかし、現実には有限個の計測器が対称性のない真空容器壁に不等間隔に取り付いていることが多い。また前章では具体的計算内容に触れずに解の存在を議論してきたが応用に際してはこれらが明確にされなくてはならない。本章では、有限の個数の計測器から、真空領域での磁束関数を計算する方法を具体的に示す。なお、磁束関数の分布が分った後のプラズマ最外殻磁気面の探索法は前章で述べた最外殻磁気面の性質から明確であるので繰り返さない²⁾。最初に計算の流れを示し、次に特徴的な計算処理内容を述べる。

(1) 計算の流れ

センサ設置閉曲線($\partial\Omega_S$)上で磁束密度値が与えられた場合、以下のように計算処理は大きく3つのステップから成る。 $\partial\Omega_S$ 上で磁束関数値が与えられた場合には、第2ステップから処理が行なわれる。

第1ステップ： Ω_{B-S} に於ける積分方程式の $\partial\Omega_S$ 上での境界積分方程式を離散化した(2.27)式に於いて $d_1=0$ とした次式を用いて、 $\partial\Omega_S$ 上での接線方向磁束密度計測 B_t^S からその閉曲線上での磁束関数値 ϕ^S を計算する。即ち、 $B_t^S(\text{on } \partial\Omega_S) \implies \phi^S(\text{on } \partial\Omega_S)$

$$\phi^S = (I - A_1)^{-1} \cdot (B_1 \cdot B_t^S + c_1) \quad (3.1)$$

第2ステップ： Ω_{P-S} に於ける積分方程式の $\partial\Omega_S, \partial\Omega_P$ 上での境界積分方程式を離散化した(2.20), (2.21)式に於いてそれぞれ $d_2=0, d_3=0$ とした次の式を用いて、センサ設置閉曲線上の ϕ^S から仮想プラズマ閉曲線($\partial\Omega_P$)上の B_t^P 及び ϕ^P を計算する。この際 $\partial\Omega_P$ はプラズマに十分含まれる様に配置する。即ち、 $\phi^S(\text{on } \partial\Omega_S) \implies B_t^P \ \& \ \phi^P(\text{on } \partial\Omega_P)$ 。なお、 ϕ^S の要素数が ϕ^P の要素数より大きい場合も想定し最小2乗法により計算する。

$$\phi^P = (F \cdot F)^{-1} \cdot F \cdot \phi^S + (F \cdot F)^{-1} \cdot F \cdot (B_2 B_3^{-1} c_3 - c_2) \quad (3.2)$$

$$F \equiv A_2 + B_2 B_3^{-1} (I - A_3) \quad (3.3)$$

$$B_t^P = B_3^{-1} (I - A_3) \cdot \phi^P - B_3^{-1} c_3 \quad (3.4)$$

第3ステップ： $\partial\Omega_P$ 上での B_t^P 及び ϕ^P を用いて Ω_{P-B} 内の積分形式の解(2.16)式を離散化した次式から任意の点での ϕ が計算可能である。プラズマ最外殻磁気面上の磁束関数値で等高線を描くことにより形状が同定出来る。

$$\phi(x) = \zeta_1(x, \partial\Omega_P) \cdot \phi^P + \zeta_2(x, \partial\Omega_P) \cdot B_t^P + \zeta_3(x) \cdot I c \quad (3.5)$$

ここで、 $\zeta_1(x, \partial\Omega_P), \zeta_2(x, \partial\Omega_P)$ は(2.16)式第1項の離散化で生ずるベクトルで、計算点 x と $\partial\Omega_P$

に関する関数となる。 $\zeta_3(\mathbf{x})$ は $\Omega_P \cdot \mathbf{B}$ 内に置かれたボロイダル磁場コイルなどの電流と発生磁束とを関係付けるベクトル、 \mathbf{I}_c はボロイダル磁場コイルなどの電流からなるベクトル。(3.5)式から直ちに分かるように仮想プラズマ閉曲線が決まれば、磁束密度計測値または磁束関数値のどちらかと領域内の電流値の一次関数として任意の点での磁束関数値が計算出来ることを意味している。また、事前に必要な計算を実施しておけば、計測値とのベクトル内積計算だけで位置形状の同定が可能であり、実時間制御や実時間可視化に応用出来る。

以上の(3.1)式から(3.5)式までの具体的な計算では、境界積分方程式を用いた数値計算に特有の処理が幾つか存在する。以下に基本的な内容を記述する。

(2) 閉曲線の多角形近似、補間計算、線積分計算

積分形式を級数展開にするために線積分の離散化を行なうことが必要となる。さらにその積分路は2種類の閉曲線 $\partial\Omega_P$ 及び $\partial\Omega_S$ である。これら離散化と任意の閉曲線を積分することの2点に対応するために、それら曲線を十分細かい多角形で近似する。(例えば後で述べる適用例では、閉曲線全周を1000点の辺を持つ内接多角形で近似した。分割の仕方は例えば閉曲線を真空容器中心位置を中心とした極座標系の関数とし、1周360度を角度で1000分割することにより行なった。)

一方、センサはセンサ設置閉曲線上に置かれているので、それらセンサ位置を最も近い多角形の辺上の中点として近似する。また、センサは通常規則正しく置かれていないため、不等間隔数値線積分を行なうことが必要となる。ここでは、まず補間を行ない等間隔で数値を得た後、通常の等間隔積分を実施する方式とした。補間はB-spline補間近似式の周期関数タイプ¹²⁾を用いて行なった。補間及び積分の際の変数は先の極座標系の角度とした。

(3) 非正則点部分の積分計算

境界積分(線積分)の経路に非正則点が1点存在するが、その点を含む領域での線積分に対して値が有界である(付録2参照)。従って、Riemann積分の意味で可積分である。具体的計算方法としては、次の2種類が存在する。(a)特異性がそれほど大きくないのを利用して多角形の辺のうち非正則点を含む辺上の積分を直接数値積分法で行なう。この時、非正則点は辺の必ず中点であるから辺を奇数区間に分割すれば、非正則点が数値積分の離散点になることはないので数値的なオーバーフローは生じない。また、積分値も十分な精度が確保出来る。(b)解析的に積分を実施し、場所の関数と辺の角度の関数としておく。この方法は(a)に比べさらに精度が上がり計算時間短縮にもなる。

実際の計算では(a)の方法を採用し、多角形の1辺を19分割した台形積分を実施することで十分精度の良い積分値が得られている。(b)の方法に於ける、解析積分の結果は付録2に示す。

(4) 仮想プラズマ閉曲線上での計算点の数

仮想プラズマ閉曲線($\partial\Omega_P$)上での磁束関数値を(3.4)式で計算する際、左辺の磁束関数値ベクトルは、積分の級数化によって現われた $\partial\Omega_P$ の近似多角形の辺上の離散点位置での値である。この離散点の位置は任意に選択出来るという利点に着目して、計算する離散点の位置を少しずつ変えて複数回(3.4)式を計算することにより $\partial\Omega_P$ 上で多くの磁束関数値を計算することが可能となる。勿論、一回に計算出来る $\partial\Omega_P$ 上の離散点数は $\partial\Omega_S$ 上で最初に与えられたセンサ数以下である。

4. JT-60U, ITERへの適用例と検討

このようにして得られた境界積分方程式の解法に基づく方法をJT-60U, ITER体系へ適用し、応用時の各種検討を実施する。検討の仕方は次のとおり。(1) 平衡計算コードにより同定対象となるプラズマを作りその時のセンサ位置の磁束密度値を計算する。(2) 次にその磁束密度の値だけから境界積分方程式法によりプラズマの最外殻磁気面形状を同定し、平衡コードで作ったプラズマの磁気面形状と同定結果とを重ね書きして同定の良否を判断した。

まずJT-60Uに於いて、異なるプラズマ電流分布を持つ3つの高 β_p ダイバータ配位のプラズマの同定精度への影響を第4.1図に示す。センサ設置閉曲線上にBtセンサを50個等角度間隔で置いた。仮想プラズマ閉曲線($\partial\Omega_P$)はどの場合も同じ位置形状を用い、 $\partial\Omega_P$ 上で用いた離散点は等角度間隔で25点とした。これらの図からプラズマ電流分布の違いは同定精度に殆ど影響を与えないことが分かる。続いてITERのプラズマへの適用例を第4.2図に示す。(a)には標準的なダブルヌルダイバータ配位の高 β_p プラズマの同定結果を示す。(b)から(e)までは、それぞれ(a)に対する比較として、(b) β_p の違いによる影響、(c) $\partial\Omega_P$ の形の違いによる影響、(d)センサ設置位置の違いによる影響、(e)1%ノイズ印加(Bt信号及びポロイダル磁場コイル電流値の全てに標準偏差1%の正規乱数ノイズを印加)による影響を調べた。センサ設置閉曲線上にBtセンサを48個を次式に示す θ に関する曲線上で θ に対して等角度間隔上下対称で置いた。センサ設置位置を(R_s, Z_s)とすると、

$$R_s = 6.0 + a \cdot \cos[\theta + \{\sin^{-1}(0.4)\} \cdot \sin\theta] \quad (\text{m}), \quad Z_s = a \cdot \kappa \cdot \sin\theta \quad (\text{m}) \quad (4.1)$$

使用した値は、(a), (b), (c), (e); $a=2.3$ (m), $\kappa=2.2$, (d); $a=2.9$ (m), $\kappa=2.2$ である。 $\partial\Omega_P$ は(a), (b), (d), (e)は同じ位置形状であり、 $\partial\Omega_P$ 上で用いた離散点は、等角度間隔で20点である。これらから、 β_p の違いや仮想プラズマ閉曲線の影響は極めて小さい。また、センサ位置の影響が最も大きく、センサの設置密度が精度に関係することが分かる。さらに、1%という大きなノイズの印加でも十分ロバストであることが分かる。

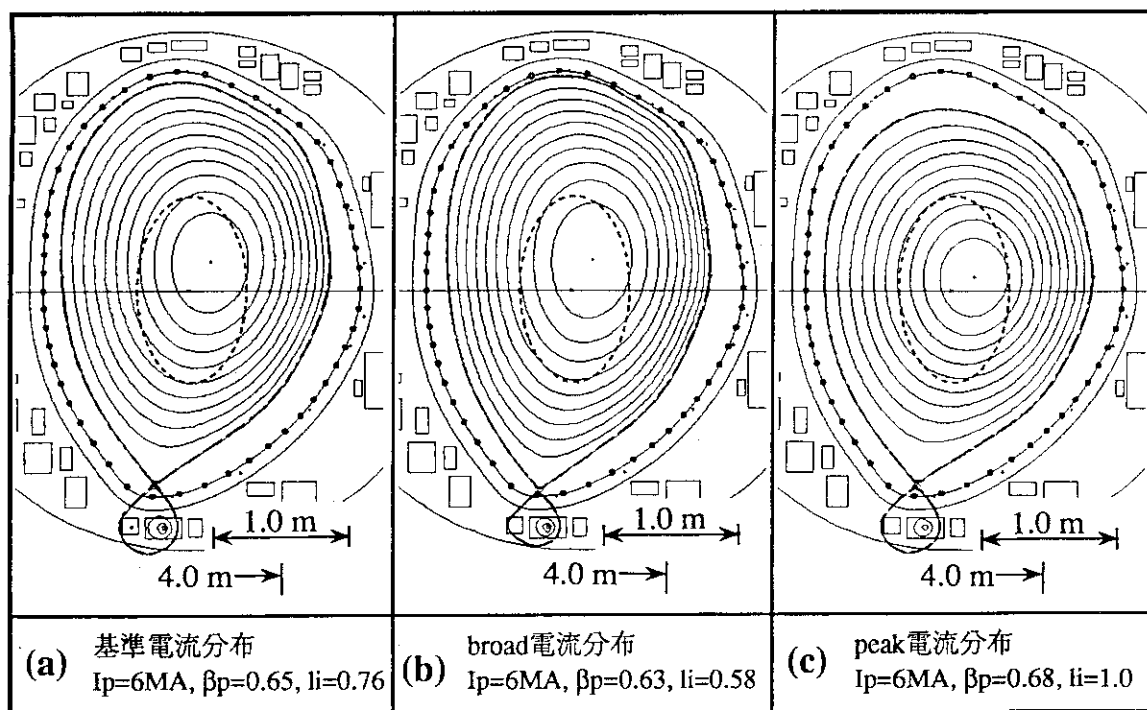
第4.2図(f)に円形リミタプラズマへの適用例を示す。Btセンサは24個を(4.1)式に示す θ に関する曲線上で θ に対して等角度間隔上下非対称で設置した。使用した値は、(f); $a=2.4$ (m), $\kappa=2.4$ である。 $\partial\Omega_P$ 上で用いた離散点は等角度間隔で8点である。この場合も良好な同定結果が得られている。

ここに示した以外にも検討を行なった結果、JT-60Uでは、最低で50個のBtセンサ凡そ全周に等角度間隔に取り付いていることが精度の良い形状同定には必要であることが分かった。また、ITERの場合には、48個のBtセンサを用いた場合で第4.2図(a)に示す精度であり、もし渦電流やノイズの存在する場でより一層の精度を要求するのであれば、それに応じた数のセンサが必要となる。勿論、適切な設置場所の検討を含めセンサの数を決定する必要があるが、本境界積分方程式に基づく方法はその点についても以下に述べる理由から論理的な決定を可能とする手段と成り得る。即ち、位置形状の同定誤差は積分を実行する前の補間計算の際に生ずることは3章の式からも明確である。従って、ある2つのセンサ間の磁束密度値が補間のパラメータである角度変化に対して、設定した補間関数を用いて十分表現出来るものであるかどうかを調べ、もし表現出来ないような場合にはその間にセンサを追加する必要があることを意味する。一般的に理解が十分でない物を計測する時、現象の非線形性が強く出る(単

純な内挿や外挿が効かないような場所には密に計測器を配置するという極めて自然な感覚と一致する要請となる。

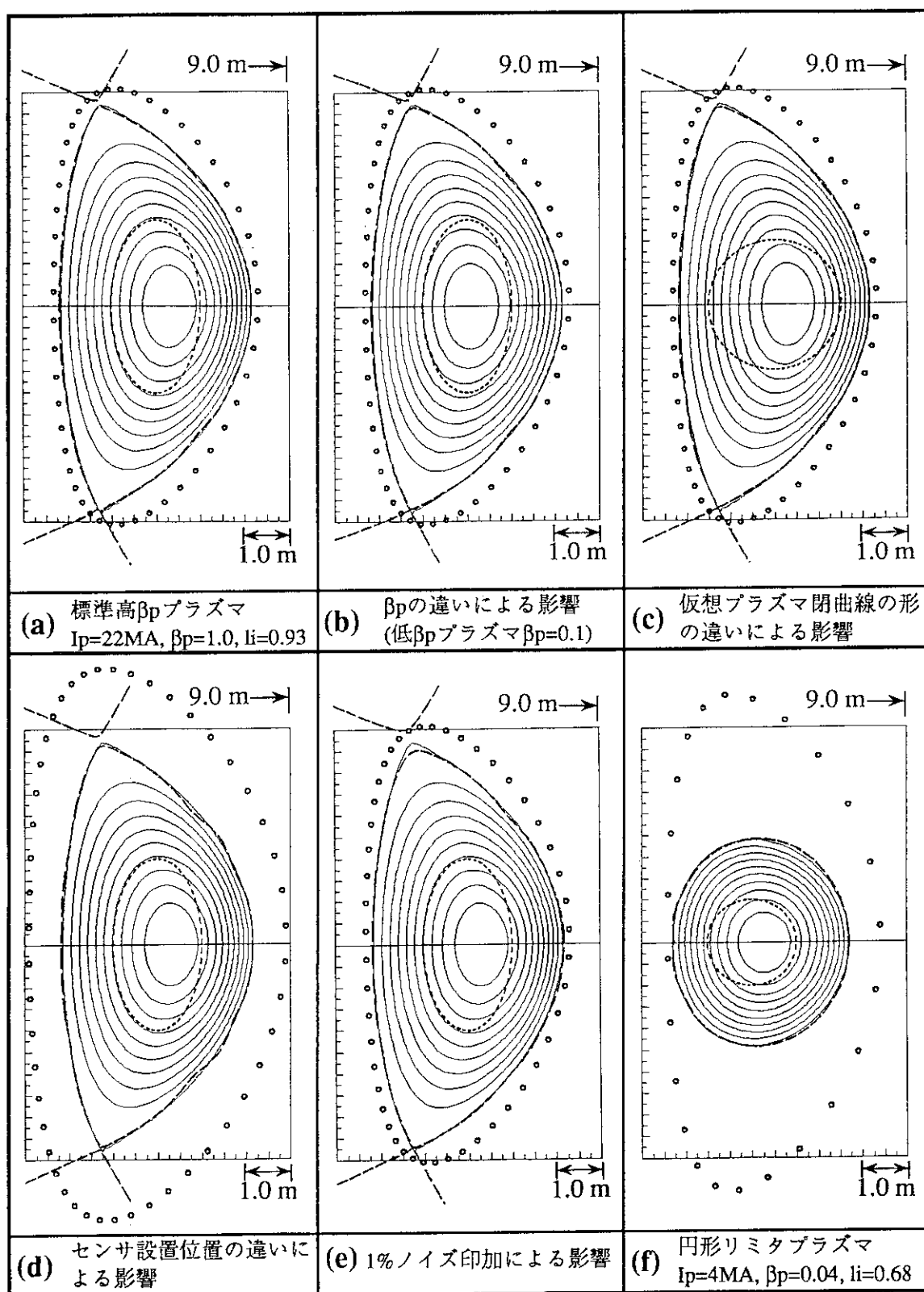
さて、この境界積分方程式に基づく方法によってITERのプラズマは第4.3図に示すように、精度良く同定出来たが、filament電流近似法やLegendre-Fourier級数展開法(これらはJT-60Uへの適用では良好な結果を示している)の単純な適用では精度の良い同定が出来なかったということの大きな理由は何であろうか? 根本的な違いは、filament電流近似法やLegendre-Fourier級数展開法の2方法はともにプラズマ電流に置き換わる電流源を与えて真空磁束を表現しようとする方法である。電流源は未定パラメータである電流値1個の決定に対して、磁束分布と磁束密度分布の両方を同時に規定してしまう。この自由度の減少は、電流源や固有関数の種類の増加により補われなければならないが、filament電流近似法では線電流の配置の仕方に困難があり、Legendre-Fourier級数展開法では、高次の固有関数形に数値計算上の困難があることから、ITERのような高非円形に於いては、両者とも自由度の減少を補いきれないと考えられる。JT-60Uのような楕円度1.5程度のプラズマの場合にはさほどの高次モードは存在しないため自由度の減少は問題にならないと解釈出来る。

一方、上記方法が電流源を与えて磁束を表現したのに対して、境界積分方程式を用いた方法は仮想プラズマ閉曲線上で磁束源、磁束密度源を別々に与えて磁束分布を同定することに対応しており、電流源を与える方法より自由度が小さく直接的である。このような理由から、有限個の電流源では表現しきれなかった磁束分布や磁束密度分布であっても同じセンサ数で実施した境界積分方程式解法に基づく方法はこれらの分布を精度良く表現すると解釈出来る。

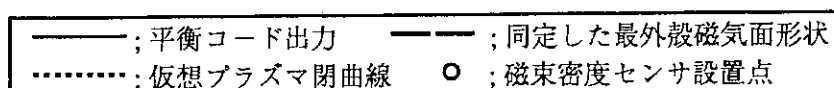


第4.1図 電流分布の異なるJT-60U高 β_p プラズマへの適用例





第4.2図 ITERプラズマへの適用例と各種検討



5. 結 論

以上の検討の結果以下が結論出来る。

プラズマの最外殻磁気面形状を可同定にする条件は、プラズマを取り囲む閉曲線上の至る所で磁束関数値(ϕ^s)が与えられるか、またはプラズマを取り囲む閉曲線上の至る所で閉曲線の接線方向の磁束密度値(B_t^s)が与えられるかであり、プラズマ内部についての情報を全く用いずに最外殻磁気面形状を同定することが可能であることが示された。

この可同定条件を導出する際に用いた境界積分方程式の解法に基づく方法を実際にJT-60UやITERに適用した結果、有限個の離散点磁束密度計測値だけから精度良く低非円形($\kappa=1.5$)から高非円形プラズマ($\kappa=2.2$)形状の同定が可能であることが明らかになった。また、本方法は偏微分方程式解法理論に基づく解析解を離散的に数値計算する方法であるため、適切な数のセンサさえ確保出来れば、装置の形などに依存しない精度の良い同定が実現出来ることが保証されている。さらに、JT-60Uで50個のBtセンサ、ITERで48個のBtセンサを設置した場合の検討の結果、境界積分方程式の解法に基づく方法に関して次の点が確認された。

- (a) プラズマ電流分布の違いによる影響は殆ど無い。
- (b) プラズマのポロイダルベータ値(β_p)の違いによる影響は殆ど無い。
- (c) 仮想プラズマ閉曲線の位置形状の違いは、プラズマの形状同定に殆ど影響を与えない。
- (d) センサとプラズマ表面間の距離が離れてセンサの設置密度が下がっても同定精度の劣化は小さい。
- (e) ノイズに対してもロバストである。
- (f) 円形小断面リミタプラズマも、プラズマに十分含まれる仮想プラズマ閉曲線を用いることにより精度良く同定出来る。

しかし、この方法はセンサの値から数値的に線積分を実行するために、前記のようにセンサの設置密度に対する感度は大きく、適切な数のセンサを必要とする。但し、磁束密度のセンサ設置閉曲線(例えば真空容器壁閉曲線)の接線方向成分のみで良く、その意味で必要設置センサ数が非現実的な数とはならない。

謝 辞

本研究の契機となったITERのポロイダル系設計検討への参加の機会を与えて下さった日本原子力研究所ITER開発室 下村安夫博士、ITERポロイダル系設計討論への参加の便宜を図って下さった同室 杉原正芳博士、日本原子力研究所出向中にITERの平衡データの作成に御協力頂いた株式会社東芝 新谷吉郎博士に感謝の意を表します。作業遂行に対し多大な支援を賜りました日本原子力研究所核融合装置試験部JT-60第1試験室長 近藤育朗博士、前JT-60第1試験室長で現JT-60第2試験室長 清水正亜博士に感謝します。

5. 結 論

以上の検討の結果以下が結論出来る。

プラズマの最外殻磁気面形状を可同定にする条件は、プラズマを取り囲む閉曲線上の至る所で磁束関数値(ϕ^s)が与えられるか、またはプラズマを取り囲む閉曲線上の至る所で閉曲線の接線方向の磁束密度値(B_t^s)が与えられるかであり、プラズマ内部についての情報を全く用いずに最外殻磁気面形状を同定することが可能であることが示された。

この可同定条件を導出する際に用いた境界積分方程式の解法に基づく方法を実際にJT-60UやITERに適用した結果、有限個の離散点磁束密度計測値だけから精度良く低非円形($\kappa=1.5$)から高非円形プラズマ($\kappa=2.2$)形状の同定が可能であることが明らかになった。また、本方法は偏微分方程式解法理論に基づく解析解を離散的に数値計算する方法であるため、適切な数のセンサさえ確保出来れば、装置の形などに依存しない精度の良い同定が実現出来ることが保証されている。さらに、JT-60Uで50個の B_t センサ、ITERで48個の B_t センサを設置した場合の検討の結果、境界積分方程式の解法に基づく方法に関して次の点が確認された。

- (a) プラズマ電流分布の違いによる影響は殆ど無い。
- (b) プラズマのポロイダルベータ値(β_p)の違いによる影響は殆ど無い。
- (c) 仮想プラズマ閉曲線の位置形状の違いは、プラズマの形状同定に殆ど影響を与えない。
- (d) センサとプラズマ表面間の距離が離れてセンサの設置密度が下がっても同定精度の劣化は小さい。
- (e) ノイズに対してもロバストである。
- (f) 円形小断面リミタプラズマも、プラズマに十分含まれる仮想プラズマ閉曲線を用いることにより精度良く同定出来る。

しかし、この方法はセンサの値から数値的に線積分を実行するために、前記のようにセンサの設置密度に対する感度は大きく、適切な数のセンサを必要とする。但し、磁束密度のセンサ設置閉曲線(例えば真空容器壁閉曲線)の接線方向成分のみで良く、その意味で必要設置センサ数が非現実的な数とはならない。

謝 辞

本研究の契機となったITERのポロイダル系設計検討への参加の機会を与えて下さった日本原子力研究所ITER開発室 下村安夫博士、ITERポロイダル系設計討論への参加の便宜を図って下さった同室 杉原正芳博士、日本原子力研究所出向中にITERの平衡データの作成に御協力頂いた株式会社東芝 新谷吉郎博士に感謝の意を表します。作業遂行に対し多大な支援を賜りました日本原子力研究所核融合装置試験部JT-60第1試験室長 近藤育朗博士、前JT-60第1試験室長で現JT-60第2試験室長 清水正亜博士に感謝します。

参 考 文 献

- (1) Braams, B. J., "The interpretation of tokamak magnetic diagnostics", *Plasma Physics and Controlled Fusion*, Vol.33, No.7
- (2) 栗原研一、他「真空ポロイダル磁束関数の円環座標系に於けるルジャンドル・フーリエ展開を用いたトカマク・プラズマの最外殻磁気面形状同定法」、JAERI-M 90-001 (1990)
- (3) Swain, D. W. and Neilson, G. H., "An efficient technique for magnetic analysis of non-circular, high-beta tokamak equilibria", *Nuclear Fusion*, Vol.22, No.8 (1982)
- (4) 相川裕史、他「磁気プローブによる位置・断面形状検出」、JAERI-M 6931 (1971)
- (5) 例えば、次の3論文。
辻俊二、他「磁場測定に基づくJT-60のMHD平衡解析法」、JAERI-M 86-006 (1986)
Kuznetsov, Y. K. et al., "Possibility of determining equilibrium plasma current and pressure profiles in a tokamak from magnetic measurements", *Soviet Journal of Plasma Physics*, Vol.13, No.2 (1987)
Lao, L. L. et al., "Equilibrium analysis of current profiles in tokamaks", GA-A19668(1989)
- (6) Wesley, J. et al., "The ITER poloidal field system", IAEA-CN-53/F-III-16, *Proceedings of the 13th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research Held by the International Atomic Energy Agency (Washington, D.C., Oct. 1990)*, Vol.3, pp.421-426 (1991)
- (7) Hakkarainen, S. P., Lecture on "MHD and Related Topics in Alcator C-mod" held at Japan Atomic Energy Research Institute (Dec. 1989)
- (8) Morse, P.M. and Feshbach, H., "Method of the theoretical physics: Part II", McGraw-Hill Book Company, Inc. (1953)
- (9) 境界要素研究会著「境界要素法の理論と応用」、コロナ社(1986)
- (10) Kurihara, K., "Eddy current effect study on JT-60 plasma equilibrium control", Submitted to *Fusion Engineering and Design*, (1991)
- (11) 吉田耕作著「積分方程式論」、岩波書店(1950)
- (12) 富士通(株)編著「科学用サブルーチンライブラリー(SSLII)使用手引書」(1980)
- (13) Azumi, M. et al. "Japanese contribution of ITER PF system design during CDA", JAERI-M 92-041 (1992)
- (14) 寺沢寛一著「数学概論」、岩波書店(1954)
- (15) Hart, J. F. et al., "Computer Approximations", pp.150-154, John Wiley & Sons, Inc.(1968)

付 録

付録1 境界積分方程式の偏微分方程式解法に於ける位置付け

最外殻磁気面形状同定問題は、数理的には楕円型2階偏微分方程式の境界値問題の解法という分野に属する。一般的に偏微分方程式の境界値問題の具体的な解法(解を数値で表現するという意味)としては、次の3種類が存在すると考える。

- (a) 変数分離解法
- (b) Green関数に基礎を置く境界積分解法 (要素分割すれば境界要素法)
- (c) 最小作用の法則(変分原理)に基礎を置く変分解法 (要素分割すれば有限要素法)

これらどの方法も起源としては解析的な解法であるが、元の偏微分方程式に適切な重み関数を乗じて体積積分した後有限要素分割上で数値解法する方法等も有限要素法と呼ぶことが普通であり、これらも(c)の1種と見做すことにする。勿論、解析解であっても最終的な数値計算の段階では有限の項数や計算点で計算することになる。

さて、それぞれの方法の特徴を述べていく。まず、(a)変数分離解法は、Laplacian(ラプラス演算子; Δ)がDescartes座標系で変数分離可能であることを利用してDescartes座標系と等角写像で関係付けられた座標系で変数分離を行ない複数の常微分方程式に分解し、それら常微分方程式の解(特殊関数)を導入して無限級数形式で解を表現する方法である。今扱っている(2.7)式はLaplacianと少し異なる ($\text{rot rot} = \text{grad}(\text{div}) - \Delta$) が、幸い変数分離出来て固有関数が得られる。一般的に変数分離解法によって得られた解は境界条件に適合させるために無限級数の線形結合係数を決定することが必要である。実際の計算では、無限に和をとることは不可能であるため、有限項数で計算を打ち切らざるを得ない。また、高次モードになるに従い固有関数の計算に誤差が生ずる²⁾。従って、最初の低次項で精度の良い近似解が表現出来なければ、計算結果は大きな誤差を含む。実際、Legendre-Fourier展開法では、円形断面に近い形状のプラズマは良く同定するが、高非円形断面を持つITER ($\kappa=2.2$)では同定精度が著しく悪くなる¹³⁾ことが筆者の検討で分かっている。

次に、(c)有限要素法を用いた形状同定ではプラズマの電流分布や圧力分布を表わす関数形を仮定してプラズマの平衡を含めて有限要素分割領域で解く方法があるが、関数形が必ずしも適切に与えられないという問題は本論文の冒頭で述べたとおりである。そこで、真空領域の式だけを扱う場合、例えば以下のような重み付き残差法による有限要素法への定式化を考える。(2.4)式の右辺の電流密度 $\mathbf{j}=0$ と置いた次式を用いる。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = 0 \quad (\text{A1.1})$$

この両辺に重み関数としてベクトルポテンシャル \mathbf{A} を乗じて解析領域であるプラズマを取り囲む真空領域全体 $\Omega_S - P$ で体積積分することにより次式が得られる。 $\partial\Omega_S$, $\partial\Omega_P$ はそれぞれ領域 $\Omega_S - P$ の外側(センサ設置閉曲線)、内側境界面(仮想プラズマ閉曲線)とする。

$$\int_{\Omega_S - P} \mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A} \, dV = \int_{\Omega_S - P} (\text{rot } \mathbf{A})^2 \, dV - \int_{\partial\Omega_S + \partial\Omega_P} \mathbf{A} \cdot (\text{rot } \mathbf{A} \times d\mathbf{S}) = 0 \quad (\text{A1.2})$$

この式を離散化して、全有限要素の節点でのベクトルポテンシャル間のベクトル式を構成した後、境界条件を取り込んで解くことになる。その際、(A1.2)式の面積分の項を確定するために、領域 $\Omega_S - P$ の面境界 $\partial\Omega_S + \partial\Omega_P$ でベクトルポテンシャルの値を与える必要がある。しかし、

第2.2図に見られるのドーナツ状の $\partial\Omega_s$ は形及び値は規定されているが、 $\partial\Omega_P$ は形も値も規定出来ないため $\partial\Omega_P$ での積分が実行出来ない。このような理由により、真空領域だけの有限要素解析を実行することは困難であると考えられる。偏微分方程式の型から $\partial\Omega_s$ 上の情報だけで真空領域の解が閉じて求められるので⁷⁾、 $\partial\Omega_P$ の値を規定せずに何らかの有限要素法で解が求まる可能性はあるように思えるが、詳細な検討はなされていない。

最後に本文で用いた(b)境界積分方程式法は、Green関数を用いることにより $\partial\Omega_s$ 上での境界条件 (Dirichlet型及びNeumann型) だけで解を構成出来るという性質を利用するものである。既に述べたように真空領域を考えた時、境界 $\partial\Omega_P$ 上では形や値が事前に規定出来ないことは同様である。しかし、本文で述べたように次の好ましい性質が存在する。(1)全体を取り囲む境界 $\partial\Omega_B$ を無限遠まで持って行くという思考上の操作により、 $\partial\Omega_s$ 上で与えられたDirichlet型またはNeumann型の条件からもう一方を計算出来る。(2) $\partial\Omega_s$ より内側に置かれた $\partial\Omega_P$ 上に於いて、Dirichlet型及びNeumann型の境界条件を $\partial\Omega_s$ 上のDirichlet型及びNeumann型の境界条件から計算することが出来る。このうち(1)は現状の有限要素法では難しいとされる「境界を無限遠に置くこと」に対応している。(2)は $\partial\Omega_s$ より内側に磁束関数値を外挿し得ることを意味している。さらに、この解法は解の形式が級数の場合と異なり完全な形で表現されている上、変数分離法の高次の固有関数に見られるような数値計算上の困難はなく、積分計算についても非正則点を含む積分を含めて数値的に安定である、などの特徴がある。なお、この方法ではプラズマ位置形状同定という観点では $\partial\Omega_P$ をプラズマに十分に含まれるように設定する必要から、プラズマの位置をある程度知っていなければならない。 ■

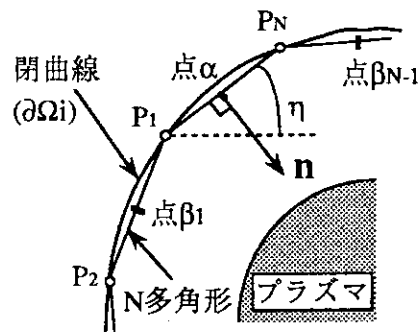
付録2 特異点を含む区間の積分の無限級数表現

有界な連続関数の定積分は無限級数で定義されていることは知られているが、ある点で発散する関数をその点を含む区間で積分する時、Riemann積分の意味で可積分(有界な積分値を持つ)であれば¹⁴⁾級数形式で表現出来ることを示す。本文で用いた境界積分方程式の特異な積分は次の2式である。

$$S_{GV\phi} \equiv \int_{\partial\Omega_i} G(x, y) \cdot \text{grad}\phi(y) \cdot \frac{dS(y)}{r_{ij}^2} \quad (A2.1)$$

$$S_{\phi VG} \equiv \int_{\partial\Omega_i} \phi(y) \cdot \text{grad}G(x, y) \cdot \frac{dS(y)}{r_{ij}^2} \quad (A2.2)$$

ここで、閉曲線 $\partial\Omega_i$ を特異点を含む領域($\partial\Omega_v$)と含まない領域($\partial\Omega_{\bar{v}}$)の2領域に分割する。即ち、 $\partial\Omega_i = \partial\Omega_v + \partial\Omega_{\bar{v}}$ 領域 $\partial\Omega_v$ の大きさの決め方は、その領域内の磁束関数 ϕ の変化が無視出来る程、小さく取るものとする。さて、領域 $\partial\Omega_{\bar{v}}$ 内の積分は通常の積分であり、無限級数展開形式で表わせることは明らかである。従って、まず領域 $\partial\Omega_v$ 内の積分について考えることにする。今、 $\partial\Omega_v$ として右図に示すような閉曲線の多角形(N多角形)近似の辺を考える。領域 $\partial\Omega_v$ の設定の仕方から $S_{GV\phi}$ 、 $S_{\phi VG}$ は次のとおり。



付録第2.1図 閉曲線の多角形近似と法線ベクトルの方向
[弧 $P_N \rightarrow P_1$]; $\partial\Omega_v$, [弧 $P_1 \rightarrow P_N$]; $\partial\Omega_{\bar{v}}$

$$\int_{\partial\Omega_v} G(x, y) \cdot \text{grad}\phi(y) \cdot \frac{dS(y)}{r_{ij}^2} = \text{grad}\phi(x) \cdot \int_{-h}^h G(x, y) \cdot n \cdot \frac{2\pi ds}{r_y} \quad (A2.3)$$

$$\int_{\partial\Omega_V} \phi(y) \cdot \text{grad}G(x, y) \frac{dS(y)}{r_y^2} = \phi(x) \int_{-h}^h \text{grad}G(x, y) \cdot \mathbf{n} \frac{2\pi ds}{r_y} \quad (\text{A2.4})$$

辺の中点を数値積分時の離散点(その辺の代表点)とする。上式の積分変数sは、辺の中点を原点とした辺上のスカラー線素である。x=(rx, zx), y=(ry, zy), ry=rx+s·cos η, zy=zx+s·sin η, nは付録第2.1図に示すように辺のプラズマ方向を向いた法線ベクトル、辺の長さ2h、辺の傾きをtan ηとする。以上から(A2.3),(A2.4)式右辺の積分は次式となる。

$$\int_{-h}^h G(x, y) \cdot \mathbf{n} \frac{2\pi ds}{r_y} = 8\pi \begin{pmatrix} \sin \eta \\ -\cos \eta \end{pmatrix} \int_0^h K(k) ds - 16\pi \begin{pmatrix} \sin \eta \\ -\cos \eta \end{pmatrix} \int_0^h E(k) ds \quad (\text{A2.5})$$

$$\int_{-h}^h \text{grad}G(x, y) \cdot \mathbf{n} \frac{2\pi ds}{r_y} = \frac{4\pi \sin \eta}{r_x} \int_0^h K(k) ds - \frac{8\pi \sin^3 \eta}{r_x} \int_0^h E(k) ds \quad (\text{A2.6})$$

ここで、 $k \approx 1 - s^2/(8r_x^2)$, $k^2 \approx 1 - s^2/(4r_x^2)$ として完全楕円積分の倍精度近似式を解析的に積分することにより、(A2.5),(A2.6)式の右辺の積分が実行出来て次式となる。

$$\int_0^h K(k) ds = \sum_{i=0}^{10} \left(\frac{1}{8r_x^2}\right)^i \left[p_{Ki} - q_{Ki} \left\{ \log\left(\frac{h^2}{8r_x^2}\right) - \frac{2}{2i+1} \right\} \right] \frac{h^{2i+1}}{2i+1} \quad (\text{A2.7})$$

$$\int_0^h E(k) ds = \sum_{i=0}^{10} \left(\frac{1}{8r_x^2}\right)^i \left[p_{Ei} - q_{Ei} \left\{ \log\left(\frac{h^2}{8r_x^2}\right) - \frac{2}{2i+1} \right\} \right] \frac{h^{2i+1}}{2i+1} \quad (\text{A2.8})$$

ここに現われる係数 p_{Ki} , q_{Ki} , p_{Ei} , q_{Ei} は文献(15)に示された定数係数である。

以上を用いて、もとの積分を検討する。(A2.1),(A2.2)式はどちらも形式的には同じであるので区別せず取り扱う。勿論、具体的な計算は区別される。結局、(A2.1),(A2.2)式の形式は次式となった。

$$\int_{\partial\Omega_i} H(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{q}(\beta) d\beta = \int_{\partial\Omega_V} H(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{q}(\beta) d\beta + \int_{\partial\Omega_V} H(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{q}(\beta) d\beta \quad (\text{A2.9})$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} w(h_i, \alpha, \beta_i) q(\beta_i) + Y(h, \alpha) \cdot \mathbf{q}(\alpha) \quad (\text{A2.10})$$

ここで、(A2.9)式の第1項、第2項は(A2.10)式の第1項、第2項と対応している。第2項が有界な関数 $Y(h, \alpha)$ を用いて表現出来ることは、(A2.5)式から(A2.8)式を用いることにより明らかである。(A2.10)式の第2項で $\beta_N \equiv \alpha$ 及び $w(h_N, \alpha, \alpha) \equiv Y(h, \alpha)$ と置けば、(A2.10)式の右辺は次式となる。

$$\sum_{i=1}^N w(h_i, \alpha, \beta_i) q(\beta_i)$$

$N \rightarrow \infty$ として ∞ 多角形を作れば、次に示すように(2.17)式が得られた。

$$\int_{\partial\Omega_i} H(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{q}(\beta) d\beta = \sum_{i=1}^{\infty} w(h_i, \alpha, \beta_i) q(\beta_i) \quad (\text{A2.11})$$

現実には、 ∞ 多角形は不可能であるので、(A2.10)式となる。従って、

$$\int_{\partial\Omega_i} H(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{q}(\beta) d\beta \approx \sum_{i=1}^{N-1} w(h_i, \alpha, \beta_i) q(\beta_i) + Y(h, \alpha) \cdot \mathbf{q}(\alpha) \quad (\text{A2.12})$$

また、現実的な領域 $\partial\Omega_V$ 内の決め方は、領域 $\partial\Omega_V$ 内の積分に於いて、被積分関数が数値積分の際オーバーフローしないようにしながら、一方領域 $\partial\Omega_V$ 内の磁束関数 ϕ の変化は無視出来るように $\partial\Omega_V$ の大きさを極力小さくするように決めることになる。

付録3 仮想プラズマ閉曲線をプラズマ中に配置して、真空領域で成立する境界積分方程式を解いた時、真空領域については正しい解となっているのであろうか？

題記の疑問は本文で提案している境界積分方程式法に於いて最も基本的な考え方に対するものである。今までと同様、 $\partial\Omega_{P^*}$ をプラズマ中に完全に含まれた仮想プラズマ閉曲線、 $\partial\Omega_P$ をプラズマ表面閉曲線、 $\partial\Omega_S$ をセンサ設置閉曲線、真空領域で成立する積分形式の解 $\xi(x)$ は次式である。

$$\sigma \cdot \xi(x) = \int_{\partial\Omega_{P^*}} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P^*-\infty}} \mu_0(j_c + j_v) \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (A3.1)$$

ここで、面積分(ポロイダル断面内での線積分)の際の法線ベクトルの向きはプラズマの方向、 j_c, j_v はそれぞれ領域 $\Omega_{S-\infty}, \Omega_{P^*-\infty}$ 内の既知電流密度である。これに対してプラズマの電流密度 j_p を既知として仮想曲面をプラズマ中に入れて解いた場合の解 $\phi(x)$ は次式である。

$$\sigma \cdot \phi(x) = \int_{\partial\Omega_{P^*}} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P^*-\infty}} \mu_0(j_c + j_v + j_p) \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (A3.2)$$

今、プラズマ表面閉曲線 $\partial\Omega_P$ を導入して式を変形する。

$$\sigma \cdot \phi(x) = \sigma \cdot \psi(x) + \int_{\partial\Omega_P} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P-\infty}} \mu_0(j_c + j_v) \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (A3.3)$$

右辺第1項 $\psi(x)$ の定義は次のとおりで、 $x \in \Omega_{P^* \cdot P}$ でのみ値を持つ。

$$\sigma \cdot \psi(x) = \int_{\partial\Omega_{P^*}} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} - \int_{\partial\Omega_P} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P^* \cdot P}} \mu_0 j_p \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y}$$

これより(A3.3)式右辺の $\sigma \cdot \psi(x)$ の σ は真空領域($\partial\Omega_P$ の外側)では0となる。従って、プラズマ電流を考慮した解(A3.3)式の真空領域中での形式は、次式となる。

$$\sigma \cdot \phi(x) = \int_{\partial\Omega_P} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P-\infty}} \mu_0(j_c + j_v) \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (A3.4)$$

一方、やはりプラズマ表面閉曲線 $\partial\Omega_P$ を導入して(A3.1)式を変形する。

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \xi(x) &= \int_{\partial\Omega_{P^*}} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} - \int_{\partial\Omega_P} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} \\ &+ \int_{\partial\Omega_P} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P^*-\infty}} \mu_0(j_c + j_v) \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \end{aligned} \quad (A3.5)$$

右辺第1項と第2項との和は(A3.3)式の $\sigma \cdot \psi(x)$ と同様、 $x \in \Omega_{P^* \cdot P}$ でのみ値を持つ積分と見做せることから、結局

$$\sigma \cdot \xi(x) = \int_{\partial\Omega_P} [G \cdot \text{grad}\phi \cdot \phi \cdot \text{grad}G] \cdot \frac{dS(y)}{r_y^2} + \int_{\Omega_{P^*-\infty}} \mu_0(j_c + j_v) \cdot G \cdot \frac{dV(y)}{r_y} \quad (A3.6)$$

これは(A3.4)式と等しいことが分かる。従って、真空領域では、

$$\phi(x) = \xi(x) \quad (A3.7)$$

これより、仮想プラズマ閉曲線をプラズマ中に配置して、真空領域で成立する境界積分方程式を解いた場合でも、真空領域については正しい解となる。 ■