

JAERI- M

9 2 1 2

助走区間における 2次元入口流れの
線形安定性.

1980年11月

藤村 薫

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

助走区間における2次元入口流れの線形安定性

日本原子力研究所東海研究所高温工学部

藤村 薫

(1980年10月30日受理)

2次元 Poiseuille 流の助走区間での線形安定性を明らかにするため, Sparrow, Lin & Lundgrenによって求められた速度分布を用いて, Chen と Chen & Sparrow が行った研究を再検討してみた。すなわち, 検討の目的は2次元入口流れにおける中立安定攪乱の臨界位相速度に関して, 2次元せん断乱流や, 収束するタイプの Jeffery-Hamel 流にみられるような漸近値が存在するかどうかを確かめることであり, 検討計算には Orr-Sommerfeld 方程式の $\alpha R \gg 1$ における漸近解を用いた。

その結果, 臨界位相速度には漸近値は存在せず, 入口流れのパラメータ X^* が減少するに従って, その値は完全に発達した2次元 Poiseuille 流における $c_0 = 0.2668$ から単調に増加して行くことが明らかになった。

On the linear stability of two-dimensional developing inlet flow

Kaoru FUJIMURA

Division of High Temperature Engineering

Tokai Research Establishment, JAERI

(Received October 30, 1980)

In order to clarify the linear stability of two-dimensional inlet flow, we reexamined the Chen's and Chen & Sparrow's results, using the velocity profile obtained by Sparrow, Lin & Lundgren.

Namely the objective of this study referring to the critical phase velocity of two-dimensional inlet flow which includes neutral and stable disturbance is to ascertain the existence of asymptotic values which are usually found in two-dimensional shear turbulence and converging Jeffery-Hamel flow. The asymptotic solution of Orr-Sommerfeld equation in the case of $\alpha R \gg 1$ was used in calculation.

Conclusively it was found that there is no asymptotic value in the critical phase velocity c_c , and this value monotonously increases from 0.2668 of two-dimensional Poiseuille flow, as the inlet flow parameter X^* decreases to zero.

Keywords : Linear Stability, Local Turning Point Approximation, Asymptotic Solution, Critical Phase Velocity, Inlet Developing Flow.

目 次

1. はじめに	1
2. Orr-Sommerfeld方程式と固有値問題	3
3. 計算結果	4
参考文献	6
Fig.1 α -R曲線群	8
Fig.2 α -c曲線群	8
Table 1 中立曲線の漸近枝の係数	7
2	
) 中立曲線上の固有値	9
11	

Contents

1. Introduction	1
2. Orr-Sommerfeld equation and characteristic problems	3
3. Numerical results	4
References	6
Fig.1 Neutral stability curves of inlet flow (α -R curves) ...	8
Fig.2 Neutral stability curves of inlet flow (α -c curves) ...	8
Table 1 Asymptotic branches of neutral curves	7
Table 2-11 Stability of inlet flow	9

1. はじめに

流れの安定性の理論的研究は、線形理論に関してはC.C.Lin(1945)⁽⁸⁾の2次元流に対する研究、非線形理論に関してはStuart-Watson理論の確立以来飛躍的に発達した。とりわけ線形理論の研究は定常な準平行流に関する限り研究し尽されたといっても過言ではない。ここで取り扱おうとする2次元入口流れ(two-dimensional developing laminar inlet flow in a parallel-plate channelを以下このように呼ぶ。)についてもすでにChen(1966)⁽¹⁾とChen & Sparrow(1967)⁽²⁾により詳細に計算されている。

周知のように、2次元Poiseuille流は有限の臨界Reynolds数 $R_c=5772.2$ を有するが、円管内のHagen-Poiseuille流は軸対称、非軸対称攪乱に対して絶対安定である。さらに、Tatsumi(1952)⁽⁴⁾とHung & Chen(1974)⁽⁶⁾によれば、円管内助走区間における入口流れは有限な R_c を持ち、入口からある距離で R_c が最小になり、その後完全に発達したHagen-Poiseuille流に成長するまで急速に増加し続ける。円管内の乱流への遷移は、このような助走区間内で成長したTollmien-Schlichting型不安定の非線形増幅によるものと考えられる。(ただし、これは入口での初期攪乱の振幅がある程度以下の場合に限られる。)この円管内流とは異なって2次元流の場合は、例えば2次元せん断乱流(Reynolds & Tiederman(1967)⁽¹¹⁾, Potter(1971)⁽¹⁰⁾)や収束するタイプのJeffery-Hamel流(以下J-H III, と呼称する)(藤村(1980)⁽³⁾)のように、2次元Poiseuille流より壁面せん断応力が大きいと、 R_c は2次元Poiseuille流の $R_c=5772.2$ より常に大きくなる。従って、2次元入口流れは完全に発達した領域に至るまで、 R_c が単調に減少して5772.2に落ち着くと考えられる。そしてこの予想はChen⁽¹⁾やChen & Sparrow⁽²⁾の計算によっても正しいことが確認されている。

2次元入口流れに対する解析は、かなり古くから行われている。この流れは前縁(leading edge)では流路断面全域にわたって非粘性(Potential流)で、前縁から発達したBlasius型境界層にはさまれた部分の流れは非粘性(Potential core)である。下流に行くに従って境界層の厚さは増加し、やがて非粘性部分は消失して、全域が境界層に覆われる。このとき、流れの場は粘性が支配的となる。

Sparrow, Lin & Lundgren(1964)⁽¹³⁾は円管と2次元の入口流れを求めた。2次元入口流れについては、平均流速を \bar{U} 、2平板間隔の半値を h 、2平板の中心線から垂直方向に測った距離を y 、主流方向の引き延ばされた変数を x^* 、動粘性係数を ν とすれば、 $X^* = \frac{x^* \sqrt{h}}{\bar{U} h / \nu}$, $\eta = y/h$ を用いて、

$$\frac{u}{\bar{U}} = 1.5(1-\eta^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_i^2} \left\{ \frac{\cos \alpha_i \eta}{\cos \alpha_i} - 1 \right\} e^{-\alpha_i^2 x^*} \quad (1.1)$$

と表せる。

ここで固有値 α_i は $\tan \alpha_i = \alpha_i$ の根であり、Sparrow, Lin & Lundgren⁽¹³⁾の論文に

は25番目までの値が与えられている。Chen⁽¹⁾とChen & Spparow⁽²⁾はこの流れに対する線形安定性を調べた。彼らはこのプロファイルの外に単純な境界層での近似によるプロファイルに対する計算も行い、各々の中立曲線群を求めている。

彼らはOrr-Sommerfeld方程式の固有値問題を本研究と同種の漸近解法(具体的な名称は例えば“regular viscous solutionを用いた方法”—Chen & Spparow⁽²⁾—; “粘性解にlocal turning point approximationを用いた方法”—Lakin, Ng & Reid (1978)⁽⁷⁾—), 標準方程式(related or comparison equation)の解を用いた漸近解法(名称は“composite solutionを用いた方法”—Chen & Spparow⁽²⁾—; “Tollmien's improved viscous approximationを粘性解に用いた方法”—Lakin, Ng & Reid⁽⁷⁾—)(粘性扇状領域—viscous sector—を除いて一様に摂動展開可能—uniformly valid—な解を用いた方法であり、詳細はReid(1965)⁽¹²⁾; Lakin, Ng & Reid⁽⁷⁾の論文に述べられている。本研究での計算手順を多少変更するだけでこの方法を適用することもできるが割愛する。), さらに差分スキームと初期値解法(step by step integration scheme)により中立曲線群を求めている。2つのプロファイルの差ははっきりしているが、いずれも前述のように、完全に発達した領域($X^* = \infty$)まで R_c が単調に減少することがわかる。

ところで、Reynolds & Tiederman⁽¹¹⁾とPotter⁽¹⁰⁾によれば、2次元せん断乱流のvon Kármán定数をパラメーターにした主流プロファイル(平均速度分布)に対する線形安定性理論の結果から中立安定を与える攪乱の臨界位相速度 c_c に漸近値 $0.186 \sim 0.19$ が存在することがわかる。またJ-H III₁流れに対する線形理論の結果は、漸近値 $c_c \sim 0.185$ の存在を示している。(Fujimura⁽⁴⁾)これら2種の流れはいずれも上述のように、2次元Poiseuille流よりも壁面せん断応力が大という共通点があり、2次元入口流れの臨界位相速度にも同じような漸近値の存在することが予想された。Chen & Spparow⁽²⁾は α -R曲線群しか示していないため位相速度の情報は何も得られない。そこでこの臨界位相速度と X^* との関係を求めることを試みた。

Chen & Spparow⁽²⁾は速度分布として13個の X^* の値, 0.005, 0.006, 0.008, 0.01, 0.015, 0.02, 0.03, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.15, 0.2に対して線形理論を適用している。ここでは $X^* \rightarrow 0$ での c_c の性質を評価するという目的から10個の X^* の値0.002, 0.004, 0.006, 0.008, 0.01, 0.012, 0.014, 0.016, 0.018, 0.025について計算を行った。 $X^* \leq 0.01$ の場合, Spparow, Lin & Lundgren⁽¹³⁾の式によると流路中央($\eta = 0$)付近で速度分布にくぼみ($u' > 0$, $u'' > 0$)が現れる。これは上記の固有関数展開を25項で打ち切っているためである。従って、1位の転移点問題として取り扱うために、ここでは X^* の値を0.002で打ち切った。

2. Orr-Sommerfeld 方程式と固有値問題

以下、諸量を前節の h を代表長、 $u_{y=0}$ を代表速度として無次元化し、Reynolds 数を $R = u_{y=0} \cdot h / \nu$ で定義する。 $U = u / u_{y=0}$ と置き、 η を y と書き直すことにより、主流方向に周期的な攪乱を与えた場合の線形化された攪乱方程式は通常の Orr-Sommerfeld 方程式

$$(U - c) (\phi'' - \alpha^2 \phi) - U'' \phi = \frac{1}{i \alpha R} (\phi^{iv} - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi) \quad (21)$$

また、一般に奇関数攪乱よりも偶関数攪乱に対してより不安定となることから、境界条件は偶関数攪乱に対する

$$\phi(-1) = \phi'(-1) = 0, \quad \phi'(0) = \phi''(0) = 0 \quad (22)$$

で与えられる。

まず、Wasow (1948)⁽¹⁵⁾ の分類による 2 つの balanced 解は式 (21) に対する非粘性方程式

$$(U - c) (\phi'' - \alpha^2 \phi) - U'' \phi = 0 \quad (23)$$

から求められる。Chen & Sparrow⁽²⁾ は式 (23) を Heisenberg の方法 ($\alpha^2 \ll 1$ 展開) に基づいて解いているようであるが、ここでは Reid に従い Tollmien の解を用いて解く。すなわち、 $y = y_c$ 近傍で Frobenius の方法より

$$\left. \begin{aligned} \phi_A &= (y - y_c) P_A (y - y_c) \\ \phi_B &= P_B (y - y_c) + \frac{U_c''}{U_c'} (y - y_c) P_A (y - y_c) \log (y - y_c) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

他方、 $y \leq y_c - \Delta$, $y \geq y_c + \Delta$ ($\Delta > 0$, $\Delta \ll 1$) では初期条件として $y = y_c \mp \Delta$ での ϕ_A と ϕ_B を用いて RKG 法で直接積分する。こうして求められた ϕ_A, ϕ_B の一次結合が非粘性方程式 (23) の解である。式 (22) の後の 2 つの条件を満たす解は

$$\phi = \frac{\phi_A(y)}{\phi_A'(0)} - \frac{\phi_B(y)}{\phi_B'(0)} \quad (25)$$

と表せる。

次に粘性解については、転移点近傍の解は独立変数の変換 $\xi = (y - y_c) / \epsilon$, $\epsilon = (i \alpha R U_c')^{-1/3}$ による引き延ばしにより Airy 関数を用いて、

$$\phi^{iv} = i \alpha R U_c' (y - y_c) \phi'' \quad (26)$$

から求められる。(半径 $O(\alpha R)^{-1/3}$ 程度の近傍で)

内部摩擦層外部の漸近解は通常の WKB 解を用いて記述できる。WKB 解に対する anti-Stokes lines は、 $\text{re} \left[\int_{y_c}^y \left\{ i (U - c) \right\}^{1/2} dy \right] = 0$ で与えられ、 $y = y_c$ から $2\pi/3$ の等角

度間隔で放射状に延びている。WKB解はanti-Stokes linesにはさまれた扇状領域 (sector) 毎に性質を異にする。(dominant-recessive) [cf. Reid⁽¹²⁾, Wasow⁽¹⁵⁾, および藤村⁽³⁾]

固有値問題はこれらの非粘性解と Airy 関数解および, WKB 解から

$$\left. \begin{aligned} \frac{w-1}{(1+\lambda)w} = F(z), \quad w(\alpha, c) &= \left[1 + \frac{U'(-1)}{c} \frac{\Phi(-1)}{\Phi'(-1)} \right]^{-1}, \\ 1 + \lambda(c) &= \frac{U'(-1)}{c} y_c \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

に帰着される。ここに, $F(z)$ は Tietjens 関数であり, Miles (1960)⁽⁹⁾ の数表に基づいた。中立曲線は通常の図式解法によって求めた。(計算の具体的な手順については藤村⁽³⁾を参照。)

R → ∞ での中立曲線の漸近枝について

2次元入口流れの場合, 後に示すように R → ∞ で α → 0 でありこの場合, 上側漸近枝 (upper branch) :

$$\left\{ \begin{aligned} c &\sim \frac{\alpha^2}{U_1'} \int_{y_1}^{y_2} U^2 dy \\ R &\sim \frac{1}{2\pi^2} \frac{U_1'^{11}}{U_1'^{12}} \left(\int_{y_1}^{y_2} U^2 dy \right)^{-5} \alpha^{-11} \end{aligned} \right. \quad (28)$$

下側漸近枝 (lower branch) :

$$\left\{ \begin{aligned} c &\sim 2.296 \frac{\alpha^2}{U_1'} \int_{y_1}^{y_2} U^2 dy \\ R &\sim 1.002 U_1'^5 \left(\int_{y_1}^{y_2} U^2 dy \right)^{-3} \alpha^{-7} \end{aligned} \right. \quad (29)$$

で与えられる。(Lin, 1945⁽⁸⁾; Reid, 1965⁽¹²⁾)

今回計算の対象とした X* の値と対応する漸近枝の各係数を Table 1 に示す。

3. 計算結果

まず, 得られた中立曲線群の固有値を Table 2 ~ 11 に示す。中立曲線群のうち, α - R 曲線を, 2次元 Poiseuille 流に対する同解法による結果とともに Fig. 1 に示す。X* = 0.006, 0.008, 0.01 は Chen & Spparow⁽²⁾ と一致する。Chen & Spparow⁽²⁾ にみられたように X* → ∞ で 2次元 Poiseuille 流に漸近することがわかる。2次元 Poiseuille 流での Re の 5772.2 からのずれは漸近解法に起因するものである。これは, 他の全ての X* の値に対しても同様である。すなわち, Chen & Spparow⁽²⁾ は 4種の解法の差を比較しているが, 同じ漸近解法でも近似の程度により相当な差が生じる。(Lakin, Ng & Reid⁽⁷⁾) また J - H

Ⅲ₁ と比べて、 R_c が同一のものでは波数 α の値が今回はより高いことがわかる。

次に、 $\alpha-c$ 曲線を Fig. 2 に示す。この図から明らかなように $X^* \rightarrow 0$ で c_c に漸近値が存在しないことがわかった。しかし、2次元せん断乱流や J-H Ⅲ₁ では壁面せん断応力の増加につれて c_c は2次元 Poiseuille 流の値 $c_c=0.2668$ から漸近値 $0.186 \sim 0.19$ や 0.185 に向かって単調に減少しながら漸近したのに対し、2次元入口流れでは $c_c=0.2668$ から単調に増加している。

以上のことから、2次元入口流れは、一見2次元せん断乱流や J-H Ⅲ₁ と類似しているが、実は全く異なった性質の流れであることがわかる。J-H Ⅲ₁ や2次元せん断乱流は流れ場全域にわたって粘性が支配的であり見掛上、流路中央付近で非粘性のように振る舞うのに対して、入口流れは前述のように流路中央において本質的に非粘性であり、粘性の効果が固体壁面に局在していることが最大の相違点であると考えられる。言い換えれば、J-H Ⅲ₁ や2次元せん断乱流の速度分布の流路中央付近の平坦部は粘性効果からの結果であり、元来この平坦な部分は固体壁の存在を“知っている”のに対し、入口流れの非粘性部分 (Potential core) は固体壁の存在を“知らない”わけであり、その違いが上記のような大きな相違として現われたものと考えられる。

このように、安定性に対して速度分布の僅かな差異は大して影響がないように一見思われるが、実は非常に敏感であることがわかる。このことは Chen & Spparow⁽²⁾ の2種のプロファイルの比較からもうかがえることであり、Gotoh (1970) による Blasius 境界層に関する4種類のプロファイルの比較、Wazzan, Okamura & Smith (1967)⁽¹⁶⁾ の2種のはく離点における境界層流に関する速度分布の比較からも明らかである。

いずれにしても、Chen & Spparow⁽²⁾ や今回の結果によれば、2次元入口流れは2次元 Poiseuille 流よりも安定であることから、実験上観察される2次元せん断乱流は、完全に発達した2次元 Poiseuille 流が Tollmien-Schlichting 型不安定によって非線形的に増幅したものと考えられる。事実このような考えに基づいて、Tollmien-Schlichting 波の2次不安定に関する研究が現在活発に行われている。

おわりに本レポートの原稿に目を通して頂き、いろいろな御助言を頂いた佐野川好母室長に厚く御礼申し上げる次第である。

References

- (1) Chen, T.S. : Ph.D. Dissertation (1966) University of Minnesota
- (2) Chen, T.S. & Sparrow, E.M. : J. Fluid Mech. (1967) 30-2 209-224
- (3) 藤村 : JAERI M-9164 (1980)
- (4) Fujimura, K. : to appear
- (5) Gotoh, K. : J. Phys. Soc. Japan (1970) 28-3 780-783
- (6) Hung, L.M. & Chen, T.S. : Phys. Fluids (1974) 17-1 245-247
- (7) Lakin, W.D., Ng, B.S. & Reid, W.H. : Phil. Trans. Roy. Soc. A
(1978) 289 347-371
- (8) Lin, C.C. : Quart. Appl. Math. (1945) 3 117-142, 218-234, 277-301
- (9) Miles, J.W. : J. Fluid Mech. (1960) 8 593-610
- (10) Potter, M.C. : Phys. Fluids (1971) 14-7 1323-1325
- (11) Reynolds, W.C. & Tiederman, W.G. : J. Fluid Mech. (1967)
27-2 253-272
- (12) Reid, W.H. : in Basic Developments in Fluid Dynamics vol.1
(ed. M. Holt) (1965, Academic Press)
- (13) Sparrow, E.M., Lin, S.H. & Lundgren, T.S. : Phys. Fluids (1964)
7-3 338-347
- (14) Tatsumi, T. : J. Phys. Soc. Japan (1952) 7-5 489-495, 495-502
- (15) Wasow, W. : Ann. Math. (1948) 49-4 852-871
- (16) Wazzan, A.R., Okamura, T.T. & Smith, A.M.O. : Phys. Fluids
10-12 2540-2545

Table 1 Asymptotic behavior of neutral curves.

X*	upper branch		lower branch	
	$R \sim (\times \alpha^{-11})$	$c \sim (\times \alpha^{+2})$	$R \sim (\times \alpha^{-7})$	$c \sim (\times \alpha^{+2})$
0.002	0.7594+9	0.7163-1	0.4588+6	0.1645+0
0.004	0.4415+8	0.9690-1	0.9505+5	0.2225+0
0.006	0.8775+7	0.1147+0	0.3894+5	0.2633+0
0.008	0.2871+7	0.1286+0	0.2103+5	0.2954+0
0.01	0.1231+7	0.1401+0	0.1320+5	0.3218+0
0.012	0.6257+6	0.1499+0	0.9094+4	0.3442+0
0.014	0.3572+6	0.1584+0	0.6684+4	0.3637+0
0.016	0.2219+6	0.1659+0	0.5148+4	0.3809+0
0.018	0.1469+6	0.1726+0	0.4108+4	0.3962+0
0.025	0.4869+5	0.1911+0	0.2247+4	0.4388+0
∞ (Plane Poiseuille flow)	0.6011+3	0.2667+0	0.2114+3	0.6123+0

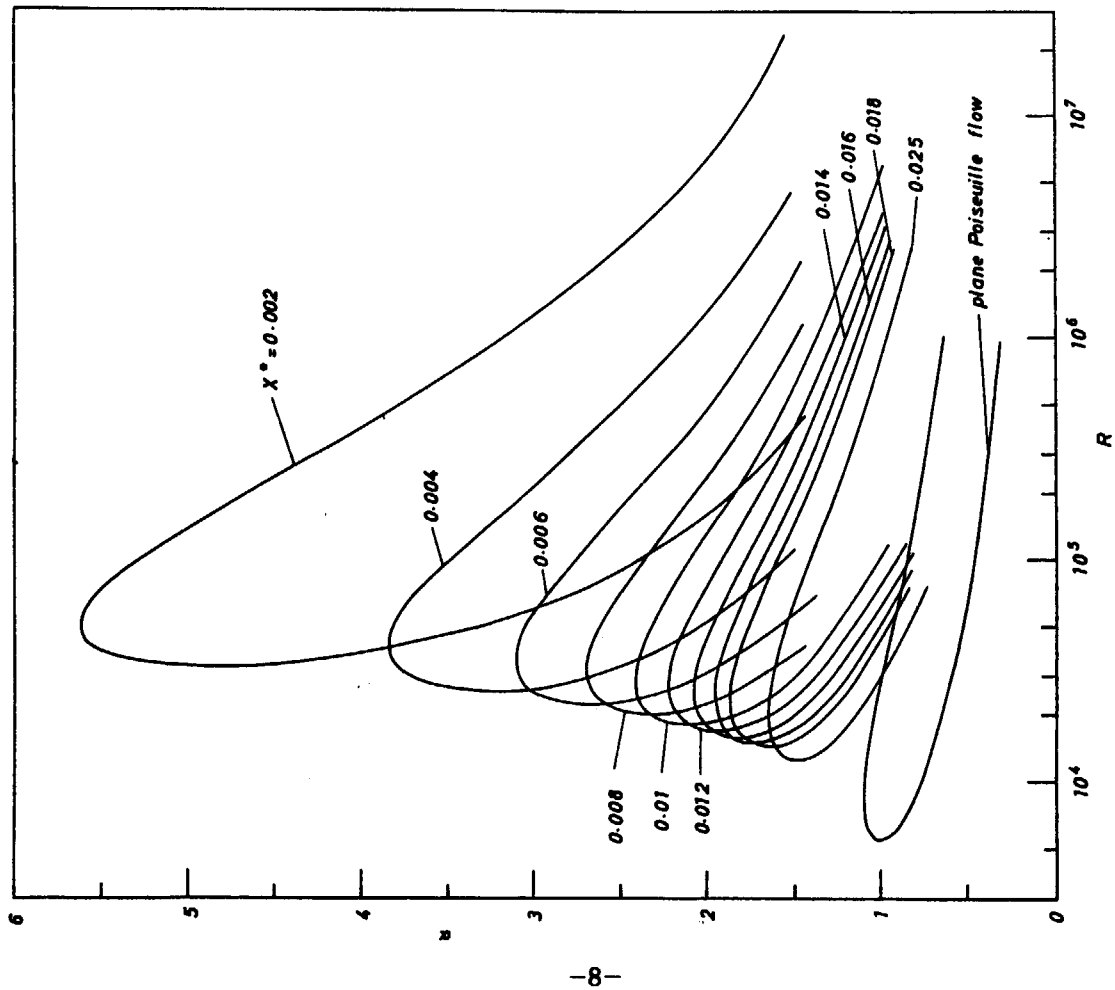


Fig. 1 Neutral stability curves of inlet flow (α -R curves)

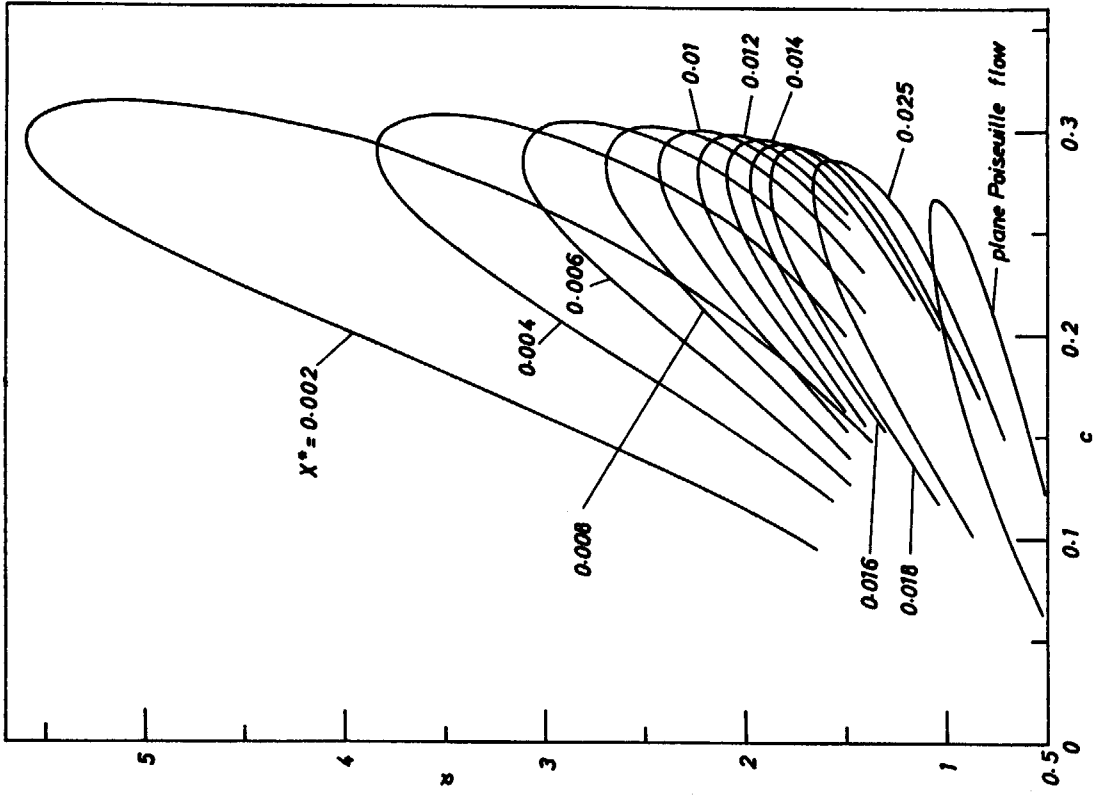


Fig. 2 Neutral stability curves of inlet flow (α -c curves)

Table 2 Stability of inlet flow
($X^*=0.002$)

c	α	z	R
0.1008	1.75	5.025	0.1187 + 8
0.1117	1.95	4.913	0.7322 + 7
0.1218	2.15	4.824	0.4841 + 7
0.1362	2.45	4.711	0.283 + 7
0.1514	2.8	4.598	0.1674 + 7
0.1664	3.15	4.498	0.1049 + 7
0.1806	3.5	4.403	0.6923 + 6
0.195	3.85	4.311	0.4688 + 6
0.2073	4.15	4.23	0.3419 + 6
0.2222	4.5	4.131	0.2383 + 6
0.2358	4.8	4.038	0.1745 + 6
0.2509	5.1	3.931	0.1257 + 6
0.269	5.4	3.792	0.8642 + 5
0.2732	5.45	3.755	0.7938 + 5
0.2773	5.5	3.72	0.7312 + 5
0.2827	5.55	3.671	0.6569 + 5
0.2898	5.6	3.603	0.5714 + 5
0.2989	5.6	3.498	0.4762 + 5
0.3037	5.55	3.428	0.4316 + 5
0.3068	5.5	3.379	0.4043 + 5
0.3085	5.45	3.344	0.3891 + 5
0.3101	5.4	3.310	0.3751 + 5
0.3126	5.1	3.177	0.3424 + 5
0.3111	4.8	3.079	0.3362 + 5
0.3071	4.5	2.997	0.3439 + 5
0.2999	4.15	2.915	0.3683 + 5
0.2908	3.85	2.852	0.4083 + 5
0.2805	3.5	2.781	0.4638 + 5
0.2673	3.15	2.715	0.5545 + 5
0.2514	2.8	2.652	0.6986 + 5
0.2321	2.45	2.592	0.9481 + 5
0.2135	2.15	2.54	0.1307 + 6
0.1989	1.95	2.506	0.1712 + 6
0.1827	1.75	2.472	0.2364 + 6
0.1642	1.55	2.439	0.3533 + 6

Table 3 Stability of inlet flow
($X^*=0.004$)

c	α	z	R
0.1152	1.55	4.825	0.4063 + 7
0.1374	1.85	4.656	0.1802 + 7
0.1575	2.15	4.516	0.9383 + 6
0.1797	2.5	4.371	0.4919 + 6
0.1984	2.8	4.251	0.2999 + 6
0.2205	3.15	4.106	0.1748 + 6
0.2417	3.45	3.96	0.1086 + 6
0.2491	3.55	3.908	0.9266 + 5
0.2583	3.65	3.836	0.7645 + 5
0.2627	3.7	3.804	0.6992 + 5
0.2692	3.75	3.748	0.6129 + 5
0.2756	3.8	3.693	0.539 + 5
0.2870	3.85	3.583	0.43 + 5
0.2922	3.85	3.523	0.3872 + 5
0.2986	3.8	3.428	0.3385 + 5
0.302	3.75	3.365	0.3136 + 5
0.3043	3.7	3.317	0.2974 + 5
0.3056	3.65	3.278	0.2873 + 5
0.3069	3.55	3.212	0.2747 + 5
0.3068	3.45	3.158	0.2689 + 5
0.3027	3.15	3.024	0.2691 + 5
0.2921	2.8	2.898	0.2966 + 5
0.2787	2.5	2.802	0.3461 + 5
0.2585	2.15	2.696	0.4496 + 5
0.2346	1.85	2.613	0.6371 + 5
0.2054	1.55	2.533	0.1032 + 6

Table 4 Stability of inlet flow
($X^*=0.006$)

c	α	z	R
0.1319	1.55	4.653	0.1646+7
0.1589	1.85	4.477	0.7026+6
0.1834	2.15	4.32	0.3522+6
0.2077	2.45	4.163	0.1903+6
0.2335	2.75	3.989	0.1047+6
0.2382	2.8	3.953	0.9431+5
0.2427	2.85	3.927	0.8588+5
0.2486	2.9	3.881	0.7571+5
0.2525	2.95	3.86	0.6985+5
0.2681	3.05	3.725	0.5070+5
0.2790	3.1	3.625	0.4074+5
0.2924	3.1	3.474	0.3116+5
0.2985	3.05	3.375	0.2727+5
0.3016	3.0	3.312	0.2541+5
0.3030	2.95	3.265	0.2442+5
0.3038	2.9	3.223	0.2370+5
0.3041	2.85	3.186	0.2320+5
0.3039	2.8	3.153	0.2295+5
0.3035	2.75	3.121	0.2276+5
0.2955	2.45	2.964	0.2371+5
0.2803	2.15	2.834	0.2771+5
0.2588	1.85	2.717	0.3607+5
0.2292	1.55	2.609	0.55 +5

Table 5 Stability of inlet flow
($X^* = 0.008$)

c	α	z	R
0.1468	1.55	4.532	0.8386 + 6
0.1716	1.8	4.371	0.4051 + 6
0.1958	2.05	4.217	0.2147 + 6
0.2159	2.25	4.088	0.1328 + 6
0.2377	2.45	3.937	0.8146 + 5
0.2436	2.5	3.896	0.7184 + 5
0.2504	2.55	3.842	0.6218 + 5
0.2577	2.6	3.788	0.5356 + 5
0.2667	2.65	3.713	0.4462 + 5
0.2868	2.7	3.515	0.2982 + 5
0.2957	2.65	3.38	0.2465 + 5
0.2995	2.6	3.303	0.2258 + 5
0.3007	2.55	3.251	0.2168 + 5
0.3017	2.5	3.201	0.2089 + 5
0.3014	2.45	3.161	0.2059 + 5
0.2971	2.25	3.023	0.2048 + 5
0.288	2.05	2.91	0.2201 + 5
0.27	1.8	2.787	0.2676 + 5
0.2458	1.55	2.675	0.3649 + 5

Table 6 Stability of inlet flow
($X^*=0.01$)

c	α	z	R
0.09393	1.	4.907	0.5130 + 7
0.1586	1.55	4.434	0.504 + 6
0.1809	1.75	4.292	0.2727 + 6
0.2036	1.95	4.149	0.1547 + 6
0.2274	2.15	3.99	0.8938 + 5
0.2334	2.2	3.941	0.7785 + 5
0.2406	2.25	3.895	0.6698 + 5
0.2488	2.3	3.835	0.566 + 5
0.2576	2.35	3.767	0.4722 + 5
0.2692	2.4	3.668	0.3740 + 5
0.2922	2.4	3.406	0.2336 + 5
0.2966	2.35	3.316	0.2105 + 5
0.2986	2.3	3.25	0.1986 + 5
0.2995	2.25	3.194	0.1907 + 5
0.2992	2.2	3.148	0.1873 + 5
0.2986	2.15	3.104	0.1849 + 5
0.2908	1.95	2.961	0.1917 + 5
0.277	1.75	2.842	0.2186 + 5
0.2577	1.55	2.735	0.2737 + 5
0.1743	1.	2.487	0.1039 + 6

Table 7 Stability of inlet flow
($X^*=0.012$)

c	α	z	R
0.0994	1.	4.835	0.3489 + 7
0.169	1.55	4.349	0.331 + 6
0.194	1.75	4.192	0.1734 + 6
0.2202	1.95	4.021	0.9359 + 5
0.2334	2.05	3.924	0.6946 + 5
0.2431	2.1	3.858	0.5695 + 5
0.2523	2.15	3.792	0.4724 + 5
0.2637	2.2	3.698	0.3746 + 5
0.2913	2.2	3.383	0.2123 + 5
0.2957	2.15	3.287	0.1905 + 5
0.2971	2.1	3.22	0.1806 + 5
0.2973	2.05	3.164	0.1751 + 5
0.2954	1.95	3.069	0.1714 + 5
0.2846	1.75	2.918	0.1837 + 5
0.2669	1.55	2.791	0.2204 + 5
0.1827	1.	2.511	0.7807 + 5

Table 8 Stability of inlet flow
($X^*=0.014$)

c	α	z	R
0.1042	1.	4.774	0.2526 + 7
0.1788	1.55	4.272	0.2295 + 6
0.1995	1.7	4.142	0.137 + 6
0.2212	1.85	3.999	0.8295 + 5
0.238	1.95	3.879	0.5755 + 5
0.2472	2.0	3.813	0.4753 + 5
0.2598	2.05	3.711	0.368 + 5
0.2904	2.05	3.362	0.1952 + 5
0.2943	2.0	3.265	0.1761 + 5
0.2956	1.95	3.194	0.1668 + 5
0.2942	1.85	3.084	0.1606 + 5
0.2865	1.7	2.955	0.166 + 5
0.2735	1.55	2.846	0.1879 + 5
0.1897	1.	2.532	0.6189 + 5

Table9 Stability of inlet flow
($X^*=0.016$)

c	α	z	R
0.1084	1.	4.723	0.1917+7
0.1873	1.55	4.202	0.1675+6
0.2028	1.65	4.106	0.1156+6
0.2188	1.75	4.001	0.8015+5
0.2371	1.85	3.872	0.5388+5
0.2476	1.9	3.794	0.4332+5
0.262	1.95	3.675	0.3234+5
0.2874	1.95	3.386	0.1912+5
0.2924	1.9	3.273	0.1682+5
0.294	1.85	3.194	0.1579+5
0.2922	1.75	3.077	0.1519+5
0.287	1.65	2.981	0.1548+5
0.279	1.55	2.899	0.165+5
0.1962	1.	2.552	0.5057+5

Table10 Stability of inlet flow
($X^*=0.018$)

c	α	z	R
0.1046	0.95	4.736	0.2032+7
0.1966	1.55	4.133	0.1236+6
0.2132	1.65	4.024	0.8389+5
0.2224	1.7	3.962	0.6843+5
0.2318	1.75	3.897	0.558+5
0.2429	1.8	3.815	0.4417+5
0.2565	1.85	3.707	0.3346+5
0.2869	1.85	3.356	0.1767+5
0.2910	1.8	3.247	0.1577+5
0.2914	1.75	3.170	0.1502+5
0.2915	1.7	3.104	0.145+5
0.2898	1.65	3.048	0.144+5
0.2839	1.55	2.951	0.1481+5
0.1908	0.95	2.544	0.5144+5

Table 11 Stability of inlet flow
 $(X^*=0.025)$

c	α	z	R
0.09785	0.85	4.74	0.2068+7
0.1213	1.	4.557	0.8172+6
0.1575	1.2	4.335	0.2669+6
0.1753	1.3	4.224	0.1649+6
0.194	1.4	4.106	0.1035+6
0.2147	1.5	3.971	0.643+5
0.239	1.6	3.798	0.3812+5
0.2579	1.65	3.64	0.2585+5
0.2801	1.65	3.39	0.1624+5
0.2861	1.6	3.246	0.1379+5
0.2856	1.5	3.079	0.1262+5
0.2774	1.4	2.961	0.1314+5
0.267	1.3	2.861	0.1433+5
0.2409	1.2	2.784	0.1954+5
0.2152	1.	2.627	0.2772+5
0.1808	0.85	2.534	0.4959+5