

JAERI-M

9 2 2 6

イオンビーム熱負荷計算コード

1980年12月

伊藤 孝雄・堀池 寛・松岡 守・松田慎三郎
小原 祥裕・田中 茂

この報告書は、日本原子力研究所が **JAERI-M** レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

イオンビーム熱負荷計算コード

日本原子力研究所東海研究所核融合研究部

伊藤孝雄・堀池 寛・松岡 守

松田慎三郎・小原祥裕・田中 茂

(1980年11月25日 受理)

中性粒子入射装置における、ビームリミターやビームダンプへのイオンビーム衝突による熱負荷を評価するための計算コードを開発した。このコードにおいて、イオン源から引き出された高速イオンは有限個の試験粒子で代表され、その試験粒子の軌道は磁場の存在のもとに計算される。試験粒子は偏向磁石の領域を通過する際曲げられ、反射されて、最終的にビームリミターとビームダンプの壁に衝突する。そして試験粒子の持つエネルギーはそれらの壁に伝えられる。この壁への熱流束は単位面積あたりの衝突試験粒子数から算出することができる。

このコードはJT-60用中性粒子入射装置のビームライン機器の設計に用いられている。

JAERI-M 9226

A Computer Simulation Code of Heat Input Due to
Incidence of Fast Ion Beam

Takao ITO, Hiroshi HORIIKE, Mamoru MATSUOKA, Shinzaburo MATSUDA
Yoshihiro OHARA and Shigeru TANAKA

Division of Thermonuclear Fusion Research,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received November 25, 1980)

A computer code has been developed to evaluate heat flux due to bombardment of ion beam to the beam limiters and beam dump of the neutral beam injector. In this code, energetic ions extracted from the ion source are represented by finite number of test particles, and their trajectories are calculated in the presense of magnetic field. They are bent and reflected as they pass through the bending magnet region. Finally they bombard the wall of the beam limiters and beam dump, where their energies are deposited. The heat flux can be derived from the number of bombarding test particles in a unit area.

The code has been applied to the design of beam line hardwares of the JT-60 neutral beam injectors.

Keywords ; Computer Code , Heat Flux , Test Particles , Bending Magnet,
Design , JT-60 Neutral Beam Injectors , Ion Beam Bombardment

目 次

1. はじめに.....	1
2. 計算方法.....	3
2.1 試験粒子の選択.....	3
2.2 偏向磁場.....	7
2.3 熱負荷計算法.....	9
2.4 軌道計算の座標系.....	10
3. プログラムの概要.....	16
4. 計算例.....	28
5. おわりに.....	38
謝 辞.....	38
参考文献.....	38
付録 I.....	39
付録 II.....	42
付録 III.....	45

Contents

1. Introduction	1
2. Method of Calculation	3
2.1 Choice of Test Particle	3
2.2 Bending Magnetic Field	7
2.3 Method of Calculation of Heat Input	9
2.4 Coordinates Used to Derive the Trajectories	10
3. Outline of Code	16
4. Example of Calculation	28
5. Conclusion	38
Acknowledgment	38
References	38
Appendix I	39
Appendix II	42
Appendix III	45

1. はじめに

JT-60 中性粒子入射加熱装置（以後 JT-60 NBI と書く）のビームラインの基本構成は 1.1 図に示すとおりである。JT-60 NBI において、イオン源から引き出されたイオンビームの一部はガスセル内で中性ビームに変換され、JT-60 プラズマ中に打込まれる。この時、イオンの中性化効率は約 30～50%¹⁾ であって、中性化されなかったイオンビームは偏向磁石で曲げられビームダンプ等に当てて処理される。ガスセルで中性化できなかったいわゆる残留イオンビームの全パワーは、イオン源の運転条件によってはイオン源 1 台あたり最大 2.8 MW にもなる。ビームダンプやイオンビームが当たるビームライン機器は水冷却されているが、これらの機器への除熱能力には限界がある。とくに長パルスビームを取り扱う NBI では熱流束は低く抑えなければならない。JT-60 NBI では、除熱能力と機械的強度条件からその上限を 500 W/cm^2 ²⁾ とし、この値を許容限界としてビームライン機器を設計することにした。

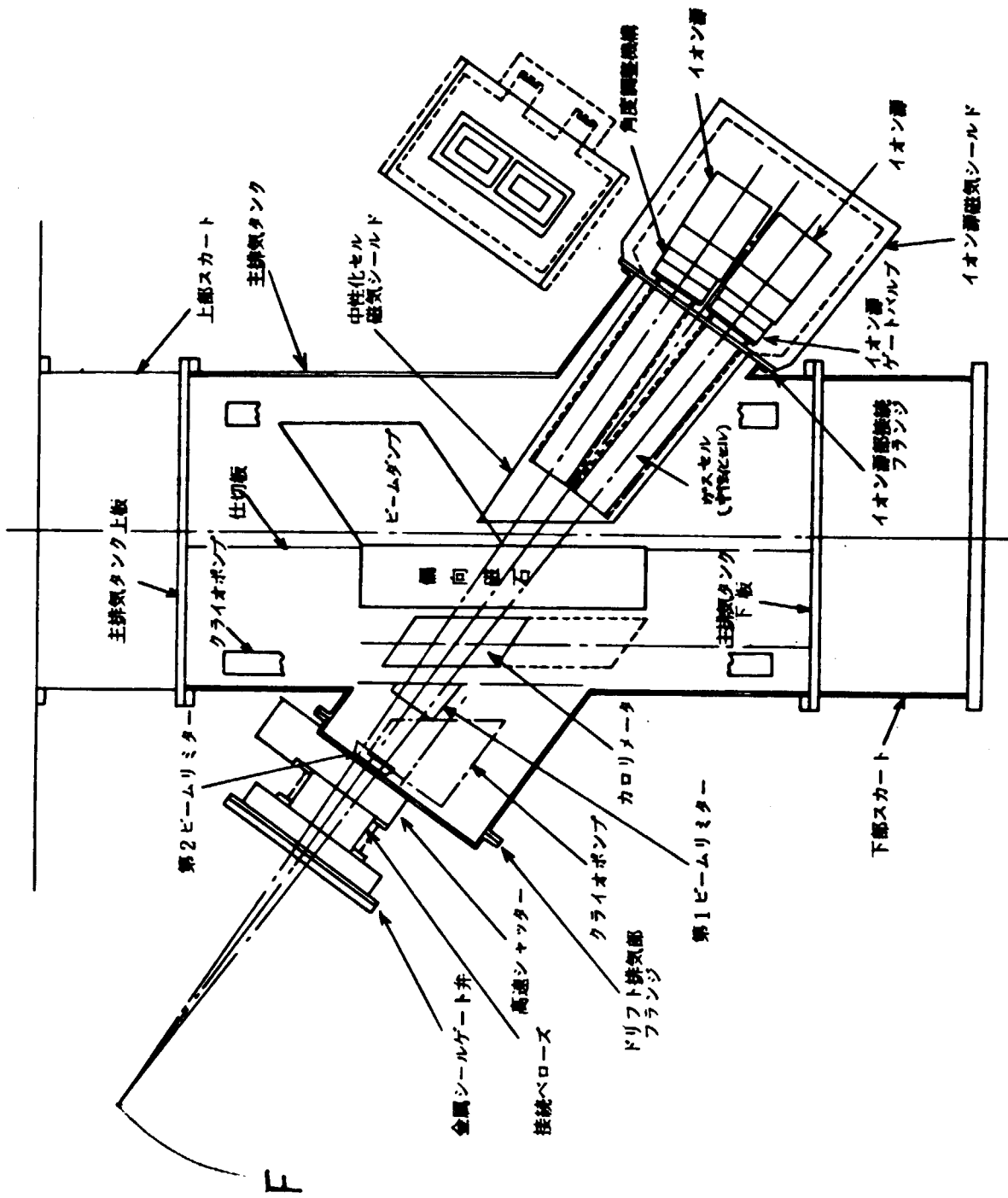
このためには垂直断面内で最大 10 kW/cm^2 ものエネルギー束となるイオンビームを空間的に広げるか、各部へのビーム入射角を大きくして入射面積を広げるかにより機器入射時のビームのエネルギー密度を下げる必要がある。このような設計においては、局部的に高熱流束にさらされる箇所がないか否かを捜すことが重要となる。

このために、イオンビームの軌道を計算し、その行先を追跡し、各部の熱負荷分布を求める計算コードを作成する必要が生じた。計算コードは主に次の 2 つのコードが必要と考えられる。

- ① 偏向磁石の磁極形状と励磁電流を与えて磁場を計算するコード
- ② ①で得られた磁場を入力として、イオンビームの軌道を計算、追跡し各部の熱負荷を計算するコード

①については、既存の 2 次元の電磁石計算コード TRIM³⁾ を使用することとし、今回は②を開発することとした。^{*} 本報告はこの荷電粒子熱負荷計算コードに関する計算法、プログラムの概要及びこのコードを用いた計算結果の一部について述べる。この荷電粒子熱負荷計算コードは、大別して 2 つのプログラムから成っており、1 つは TRIM で得られた磁場分布を読み込み、補間、編集するプログラムであり、もう一つは、補間編集された磁場データを使って三次元軌道計算を行い荷電粒子による熱負荷分布を計算するプログラムである。

*) 三次元の磁場分布を使用する荷電粒子熱負荷計算コードも同時に開発した。これについては別に報告する。



1.1 図 JT-60 用 NBI ビームラインユニット

2. 計 算 方 法

本計算コードは、JT-60 NBI のイオン源から引き出されたイオンビームを有限個の試験粒子で代表させて、その軌道を計算し行き先を追跡するコードが主要部を成している。試験粒子が衝突するのは 1.1 図に示す中性化セル（ガスセル）、偏向磁石、ビームダンプであり、少量ではあるが衝突する可能性のあるものは中性化セル磁気シールド、カロリメータ、ビームリミターである。なお偏向磁石のビームが衝突すると予想される所は水冷の銅板（ウォータージャケット、又は、単に W-J と書く）で保護されている。

2.1 節ではイオンビームの模擬方法について、2.2 節では偏向磁場について、2.3 節ではビームダンプ等の熱負荷とその計算精度について述べる。

各ビームライン機器はそれぞれに規定された設置精度以下のバラつきを持って並んでいる。これらの設置精度は実際にビームラインを製作する上で見込まなければならないものである（例えばフランジ等の加工精度の限界から生じる）。本計算コードでは機器別に設置精度を考慮できるようになっており、その方法については 2.4 節で述べる。

2.1 試験粒子の選択

計算の対象としているイオンビームは 1.1 図にある 2 台のイオン源のうち一方のイオン源から引き出されたもので、引出し電極面に並んだ孔からそれぞれ引き出されるビームレットの束である。ビームレットはある速度分布を持っており、ビームレットの広がり（発散）角はこの速度分布より決められる。^{4), 5)} 又、各々のビームレットは電極面から 8.3 m 先の焦点に向けて集束している。電極が理想的に設置された時この焦点は 1.1 図の 2 台のイオン源のイオン源中心軸の交わる点 F と一致している。

本計算コードでは、イオンビームを有限個の試験粒子群で模擬する。実際のイオンビームでは質量及び電荷の異なるものが混じっているが、一回の熱負荷計算においてこの試験粒子の質量及び電荷は一定として取り扱う。

試験粒子の出発位置は、計算の都合上電極面を柵目に切った時、それぞれの柵の中心点とし、かならずしも実際の電極面の孔の位置とは一致していない。ひとつのビームレットは同じ出発点を持つ試験粒子束で模擬する。各々のビームレットの速度分布は全て同じとしドリフトマクスウェル分布を仮定する。各ビームレットは軸対称な粒子束とし、その対称軸は出発位置と先に述べたビームレットの焦点とを結ぶ直線とする。このドリフトマクスウェル分布の具体的な分布関数はビームレットの発散角を決めることにより求まる（付録 I 参照）。分布関数が具体的に決まるとビームレットを模擬する試験粒子の出発角はこの分布関数から計算でき、その手順は次の通りである。ビームレットの持つ速度空間を 2.1.1 図の通り円錐に区切り、各円錐と円錐の間にある粒子群の粒子数を等しく分ける（付録 II 参照）。次に、それら粒子群の平均速度 $\langle v_{\perp} \rangle$ と $\langle v_{\parallel} \rangle$ を計算する。ここで v_{\parallel} は対称軸に平行な方向の速度で、 v_{\perp} はそれに垂直な方向の速度である。こ

れら平均速度 $\langle v_{\parallel} \rangle$ と $\langle v_{\perp} \rangle$ のなす角 ω を

$$\omega = \tan^{-1} \{ \langle v_{\perp} \rangle / \langle v_{\parallel} \rangle \}$$

から求め、 ω を注目している円錐と円錐との間にある全粒子を代表する試験粒子群の出発角とする(付録Ⅲ参照)。即ち、この出発角は対称軸と試験粒子の速度ベクトルとのなす角である。従って、同一出発点を同じ出発角で出た試験粒子群は単位時間後、2.1.1図の v に平行な矢印AAから見た2.1.2図の円 O_1, O_2, \dots の各周上に並ぶ。又ビームレットの軸対称性の仮定より、各試験粒子は円周上に等間隔にあるとして良い。よって各円周上、試験粒子の位置を決める円周方向(ϕ 方向)の角度の初期値 R_1, R_2, \dots は基準から与えることとし、試験粒子はそれぞれ点1, 2, \dots から等間隔に並ぶこととした。1個の試験粒子は円錐と円錐とで区切られ更に ϕ 方向に等分割された速度空間の1個の体積を代表することになる。

試験粒子群の出発点を与える柵目の粗さのため、その出発点の像が規則的な熱負荷分布の凹凸として生じる。さらに、この熱負荷分布の規則性は、上述の角度の初期値が出発角によらず $R_1 = R_2 = \dots$ となり且つこの角度が出発位置によらず同じ時、より強調される。ここではこれに注目し、この規則性を消すにあたって単純に出発点の面密度を増すことを避けた。即ち、出発位置が移る時は勿論、出発角の違う時も、それぞれの試験粒子群毎の角度 R_1, R_2, \dots を全て互に異なるように乱数で与え、できるだけ熱負荷分布の規則性を量しておき、残る規則性を出発点の面密度を増して消した。この手順により出発点の面密度の下限を 1 cm^{-1} と決めた。

計算する全試験粒子数をなるべく少くするため、各周上の速度ベクトルの数、即ち、試験粒子数を出発角が小さくなる順に従って少なくしていき、そのかわり試験粒子数に反比例する重みを試験粒子に持たせることとした。各周上の試験粒子の数は簡単のためにその密度がどの円周上でも同じになるように決めた。例えば n 番目の円周上の試験粒子の数 a_n は

$$a_n = a_{\max} \times \{ \tan \omega_n / \tan \omega \}^{**)}$$

から計算することとし、 a_n と重み W_n の関係は式

$$W_n = a_{\max} / a_n$$

で決めることとした。^{**)}ここで ω は重みを1とする試験粒子群の出発角で、 a_{\max} はその試験粒子数である。

以上をまとめると、この円周上において j 番目の試験粒子の位置を決める ϕ 方向の角度 ϕ_j は

$$\phi_j = \frac{2 \pi j}{a_n} + R_n$$

$$R_n = \text{RANDOM}(n, k)$$

$$j = 1, 2, \dots, a_n$$

$$n = 1, 2, \dots, n_{\max}$$

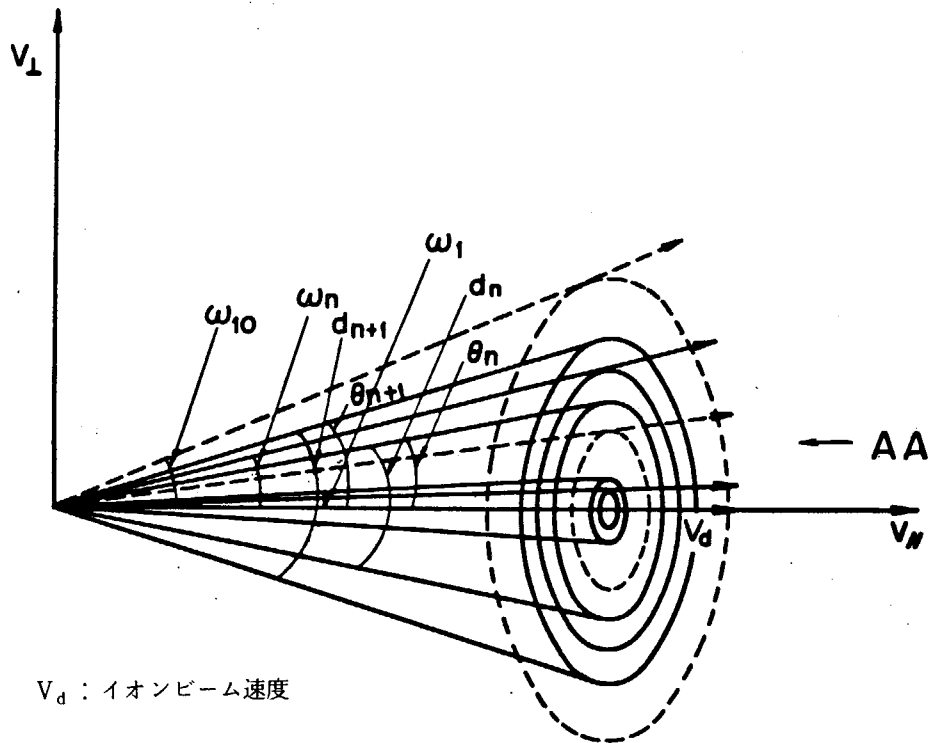
$$k = 1, 2, \dots, k_{\max}$$

*) a_n は整数でなければならないので右辺の小数点以下は切り捨てとする。

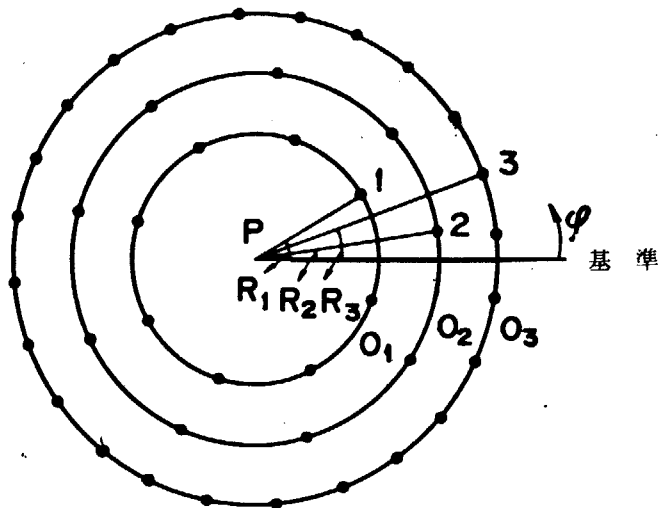
***) 本レポートで「試験粒子」は重みを持った粒子で単なる「粒子」とは区別している。

から計算する。RADOM (n, k) は n か k がいづれかが異なる毎に変化する乱数である。 n_{\max} は速度空間の分割数で、 k_{\max} は出発点の総数である。

例として、ビームレットのつくる速度空間を10分割した時の試験粒子の出発角と、その出発角における試験粒子数と、試験粒子のもつ重みとをビームレットの発散角が 0.9° 、 1.0° 、 1.1° 、 1.2° の場合について 2.1.1 表に示す。



2.1.1 図 速度空間の分割



2.1.2 図 単位時間後の試験粒子の並び

2.1.1表 発散角と粒子の出発角

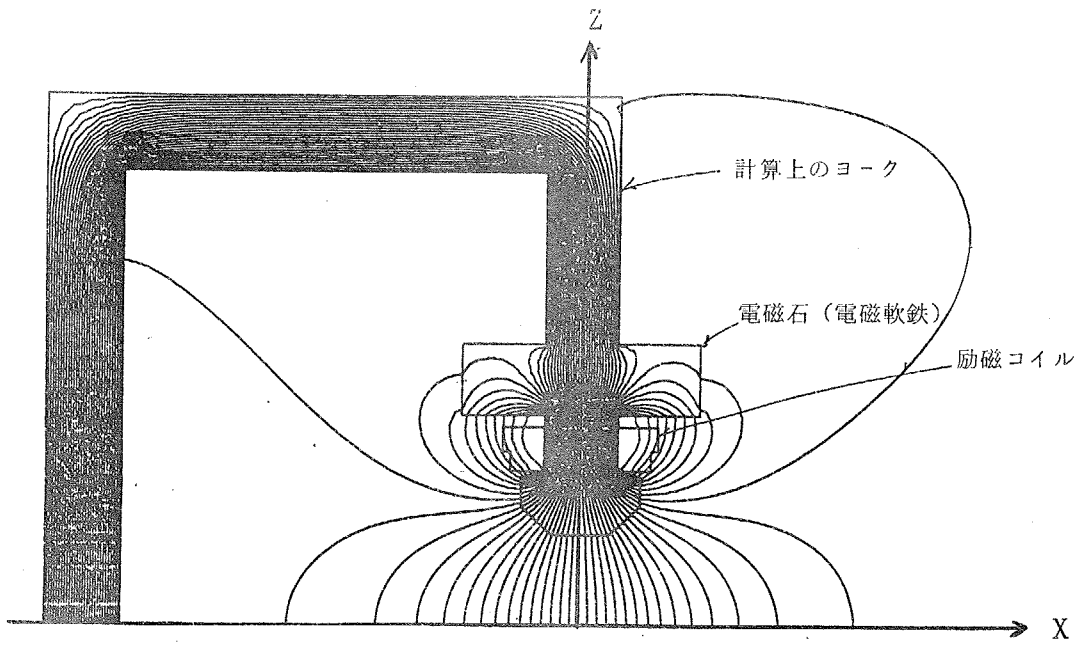
	(rad)	(deg)	円周上の数	重み	
発 散 0.9°					
1	0.3337×10^{-2}	0.19120°	7	9.1	63.7
2	0.6280×10^{-2}	0.35982°	14	4.5	63.
3	0.8376×10^{-2}	0.47991°	19	3.3	62.7
4	0.1025×10^{-1}	0.58728°	23	2.7	62.1
5	0.1211×10^{-1}	0.69385°	27	2.3	62.1
6	0.1402×10^{-1}	0.80329°	31	2.0	62.
7	0.1609×10^{-1}	0.92189°	36	1.7	61.2
8	0.1850×10^{-1}	1.05997°	42	1.5	61.5
9	0.2166×10^{-1}	1.24103°	49	1.3	63.7
10	0.2819×10^{-1}	1.61517°	64	1.0	64
					626
発 散 1.0°					
1	0.373989×10^{-2}	0.21428°	7	9.1	63.7
2	0.702737×10^{-2}	0.40264°	14	4.5	63.
3	0.935462×10^{-2}	0.53598°	19	3.3	62.7
4	0.114449×10^{-1}	0.65574°	23	2.7	62.1
5	0.135122×10^{-1}	0.77419°	27	2.3	62.1
6	0.15606×10^{-1}	0.89416°	31	2.0	62.
7	0.178929×10^{-1}	1.02519°	36	1.7	61.2
8	0.205994×10^{-1}	1.18026°	42	1.5	63.
9	0.24125×10^{-1}	1.38226°	49	1.3	63.7
10	0.31378×10^{-1}	1.79783°	64	1.0	64
					627.5
発 散 1.1°					
1	0.4102×10^{-2}	0.23503°	7	9.1	63.7
2	0.7697×10^{-2}	0.44101°	14	4.5	63
3	0.1026×10^{-1}	0.58785°	18	3.5	63
4	0.1257×10^{-1}	0.72021°	23	2.7	62.1
5	0.1482×10^{-1}	0.84912°	27	2.3	62.1
6	0.1714×10^{-1}	0.98205°	31	2.0	62
7	0.1967×10^{-1}	1.12701°	36	1.7	61.2
8	0.2262×10^{-1}	1.29603°	41	1.5	61.5
9	0.2655×10^{-1}	1.52120°	49	1.3	63.7
10	0.3457×10^{-1}	1.98072°	64	1.0	64
					626.3
発 散 1.2°					
1	0.4485×10^{-2}	0.257°	7	9.1	63.7
2	0.8412×10^{-2}	0.482°	14	4.5	63
3	0.1122×10^{-1}	0.643°	19	3.3	62.7
4	0.1374×10^{-1}	0.787°	23	2.7	62.1
5	0.1621×10^{-1}	0.929°	27	2.3	62.1
6	0.1874×10^{-1}	1.074°	31	2.0	62
7	0.2147×10^{-1}	1.230°	36	1.7	61.2
8	0.2468×10^{-1}	1.414°	41	1.5	61.5
9	0.2894×10^{-1}	1.658°	49	1.3	63.7
10	0.3768×10^{-1}	2.159°	64	1.0	64
			311		626

2.2 偏向磁場

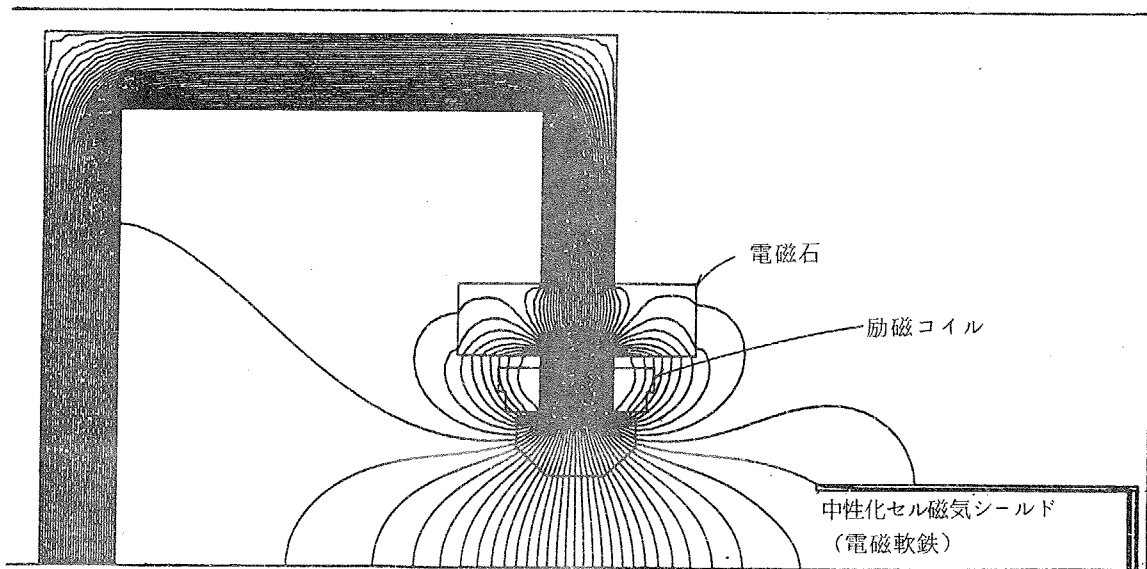
本計算コードで入力変数として使用する偏向磁場は電磁石用磁場計算コード TRIMで計算して得られた結果である。TRIMにより任意の磁極形状における磁場が計算可能なので、本熱負荷計算コードと併用することによってJT-60 NBI ビームラインに最も適当な熱負荷分布を与える偏向磁石が設計できる。ここでは本熱負荷計算コードで使用する偏向磁場の特徴について述べる。

TRIM は 2次元の磁場計算コードで、例えば、2.2.1 図に示すような断面の磁極形状で磁場を計算する時、この磁極が紙面に垂直な方向に無限に長く続いた電磁石として計算する。なお磁石形状はX軸に対称形であるので2.2.1 図は $Z \geq 0$ 側のみ示している。その結果、磁極断面(X-Z平面)における2成分の磁場分布を得ることができる。即ち、X軸に平行な成分 B_x とZ軸に平行な成分 B_z とである。今回、具体的に磁場を計算する格子点の間隔はX方向が2cm、Z方向が3cmで、これはTRIMに格子点の数に上限があること、計算に必要な空間の広さに下限があることのためである。このようにして得られた磁場分布はスプライン補間を行うことによりX、Z両方向とも1cm毎に細かく磁場を求め、軌道計算に必要最小限の精度を与えるよう作りかえられ入力される。

本計算コードでは2種類の磁場を使用する。これは粒子が通過する空間での磁場分布を、中性化セルを通過して偏向磁石に至る間と、偏向磁石からビームダンプに至る間とに分けなければ計算できないためである。前者は中性化セル磁気シールドによる偏向磁場の乱れの影響を入れるため、2.2.2 図に示すように中性化セル磁気シールドを2次元で模擬して計算した磁場を用い、後者は中性化セル磁気シールドのない場合(2.2.1 図)の磁場を用いる。この2つの磁場の境界を $Y=0$ の平面とし、 $Y>0$ 且 $X>0$ の領域で前者を、その他の領域で後者を使用する。2.2.1 図、2.2.2 図に示すような計算の都合上取り付けられているヨークの影響を考えると、TRIMによる計算結果は $X \geq 0$ のデータしか使用できない。又磁場はX軸に関して対称なので、磁場データを補間、編集するプログラム(コード名はFIELDである)ではその磁場データの内 $Z \geq 0$ のデータのみ入力する。入力した中性化セル磁気シールド有り及び無し2種類の磁場はそれぞれ最初X軸を対称にして折り返し、それでできた磁場をさらにZ軸を対称軸にして折り返して1組の偏向磁場とする。FIELDではこれらの偏向磁場を先に述べたようにそれぞれスプライン補間することによりデータ点の空間密度を上げ1つの偏向磁場として編集し出力する。なおこの偏向磁場の範囲は $|X| \leq 70$ cm、 $|Z| \leq 45$ cmであり、これだけの領域の磁場データを入力することでかなり精度の良い軌道計算結果を得ることが可能であるが、更に精度を上げるため、この領域外の磁場を、磁場データより外挿することによって与えている。



2.2.1 図 偏向磁石の座標



2.2.2 図 偏向磁石と中性化セル磁気シールド

2.3 熱負荷の計算法

各部の熱負荷分布は、ビームダンプ面及びウォータージャケット面等イオンビームの当ると予想できる部分を予め柵目に区切っておき、各柵毎に通過する粒子数を数えていく事で求められる。本計算コードでは各試験粒子は相異なる重みを持つため、ある柵を通る粒子数はその柵内を通過した試験粒子の持つ重みの総和である。粒子がそれら機器に当たった時、1粒子の持つ熱量は、中性化セルを出たイオンビームのパワー（これはガスセルでの中性化効率から求まる）を計算上の全粒子数で割った値である。

各部での熱負荷分布の精度は試験粒子の数と熱負荷を数える柵の面積との両方から決まる。即ち、柵の面積をいくら小さくして熱負荷分布の空間分解能を上げようとしても、試験粒子をそれと対応させて増やさないと熱負荷分布は凹凸がはげしくなるだけで、その精度は良くならない。柵の面積を小さくすると計算に使用する記憶容量が増し、試験粒子数を増すと計算時間が長くなる。

計算時間は一本の軌道計算におけるステップ数によっても大きく変化する。このステップ数は、行き先決定を行うために必要な軌道の全長（約3 m）と、試験粒子の1ステップで進む距離 Δl とから決められる。試験粒子の Δl によりその軌道の精度はかわる。即ち、 Δl が長くなればなるほど真の軌道との差は大きくなる。ここでは、 Δl を1 mmから30 mmの間で軌道計算を数例行い、 $\Delta l = 1$ mmの軌道を基準とし軌道の全長が3 mになった所でその基準の軌道からのずれが1 mm以内となる軌道の内 Δl が最長のもを本軌道計算コードの1ステップに進む距離とした。この時 $\Delta l = 15$ mmで、1本の軌道計算に必要なステップ数は200である。

次に、試験粒子数と柵の面積との組合せを数例選び、実際に熱負荷計算を行い、使用する記憶容量がほぼ256 kW^{*})で計算時間が約120分となるように柵の面積を4~6 cm²、軌道計算をする全試験粒子数を約 5×10^4 本とした。

*) FACOM 230-75で昼間オープンシステムでランできるジョブの最大コア容量である。ディバック、テストラン等のため昼間ジョブができることは必要である。

2.4 軌道計算の座標系

本計算コードでは2.4.1図に示すJT-60NBI ビームラインの寸法を想定し、1.1図の機器配置に従って軌道計算を行うので、それらの機器のイオンビームに対する阻止効果はイオンの飛行中出会う順に随時計算過程で取り入れていく必要がある。機器の形状及び設置位置には当然誤差が見込まれている。これらの誤差を与える時の基準座標は機器によりまちまちであるため、軌道計算を行う座標系はその過程で適当にかえた方が計算上便利である。

模擬しているイオンビームの初期条件はイオン源電極面で与えられると仮定する。2.1節で述べたように、ビームレットは電極孔から軸対称に発散してゆく粒子の束であり、この中心軸はビームレットの焦点でイオン源中心軸と交わると仮定している。このことを図示したのが2.4.2図で、ここで X_2 ・ Y_2 ・ Z_2 座標は焦点Fを原点としイオン源中心軸を X_2 軸とする直交座標である。各ビームレットの中心軸は全て焦点Fを通るため、各ビームレットの中心軸とイオン源中心軸とのなす角は電極面の出発位置により異っている。電極面の出発位置は座標系 Z_0 ・ Y_0 で表わす時、角 R_{P1} 、角 R_{P2} は式

$$R_{P1} = \tan^{-1} \frac{Z_0}{FQ}$$

$$R_{P2} = \tan^{-1} \frac{Y_0}{FQ}$$

から計算する。ここでFQは電極中心Qは焦点Fとの距離である。又 Y_0 と Y_2 、 Z_0 と Z_2 は各々平行である。

点Pを出発点とする試験粒子束において同じ出発角 ω_n を持つ試験粒子の速度ベクトルは出発点を頂点とし円Oを底面とする円錐の側面に並んでおり、試験粒子の初期条件は円筒座標系で記述したものとして与えられる。JT-60NBIではイオン源電極にある程度の設置誤差が見込まれており、実際のイオン源電極面は Y_0 軸の回りに回転して設置されることがありえる。これによりイオン源中心軸が理想的なそれに対して軸ずれを起すことになる。その時、軸ずれの角 $R_{x_{z_0}}$ は2.4.3図に示すように、軸ずれのない場合の理想的なイオン源中心軸を基準として与えられている。軌道計算は試験粒子の初期条件を2.4.2図のイオン源中心軸を X_2 軸とし電極面の中心Qを原点とする直交座標に変換してから開始する。

電極を出発した試験粒子はただちに中性化セルに入る。中性化セルは磁気シールドされているため、2.4.4図に示すよう試験粒子は最初磁場のない空間を通過し、次に磁場有りの領域に到る。中性化セル磁気シールド内の磁場有りの領域がその開口部からイオン源側へ入っているのは、開口部から漏れ磁場があるためである。この漏れ磁場の侵入する距離は中性化セル磁気シールドの出口部の短い方の辺の長さ程度であることがR & Dの実験から確認されている。我々の装置ではそれが約30 cm程度で、計算では2.4.4図の中性化セル内斜線部から左側を磁場有りとして取扱っている。

計算時間を節約するためこの磁場なしの空間ではルンゲクッタ法による軌道計算は行わず、試験粒子は各初期条件を元に直線的に進ませる。又、中性化セル内での試験粒子の一部はイオン源

中心軸と平行な中性化セルの壁に衝突しそこで計算を終わらなければならない。試験粒子の運動がイオン源中心軸を X_2 軸とし2.4.3図の点Qを原点とする座標系で表わしてあるので、このような試験粒子の選別は磁場なしの空間を出た所で試験粒子の位置が中性化セル内にあるか否かを座標変換なしに判断することによい。この選別により中性化セル内にある試験粒子だけの軌道情報が次の計算ステップへ送られる。

磁場なしの領域を通過した試験粒子は、偏向磁場の領域に入る。2.3節で述べたようにTRIMによる偏向磁場の計算値は2.4.1図の $X \cdot Y \cdot Z$ 座標で与えられる。実際の偏向磁石は理想的な $X \cdot Y \cdot Z$ 座標に対してずれており、本計算コードでそのずれは偏向磁石の設置精度からY軸回りの回転角とZ方向の平行移動の距離として考慮することにした。偏向磁場は2.4.3図の $X' \cdot Y' \cdot Z'$ 座標系で与えられる。このため、磁場中の軌道計算はこの $X' \cdot Y' \cdot Z'$ 座標系で行うと、基本式の形は

$$\frac{dv_{X'}}{dt} = \frac{e}{m} \{ v_{Y'} \cdot B_{Z'} - v_{Z'} \cdot B_{Y'} \}$$

$$\frac{dv_{Y'}}{dt} = \frac{e}{m} \{ v_{Z'} \cdot B_{X'} - v_{X'} \cdot B_{Z'} \}$$

$$\frac{dv_{Z'}}{dt} = \frac{e}{m} \{ v_{X'} \cdot B_{Y'} - v_{Y'} \cdot B_{X'} \}$$

(M.K, S 単位)

e ; イオンの電荷

m ; イオンの質量

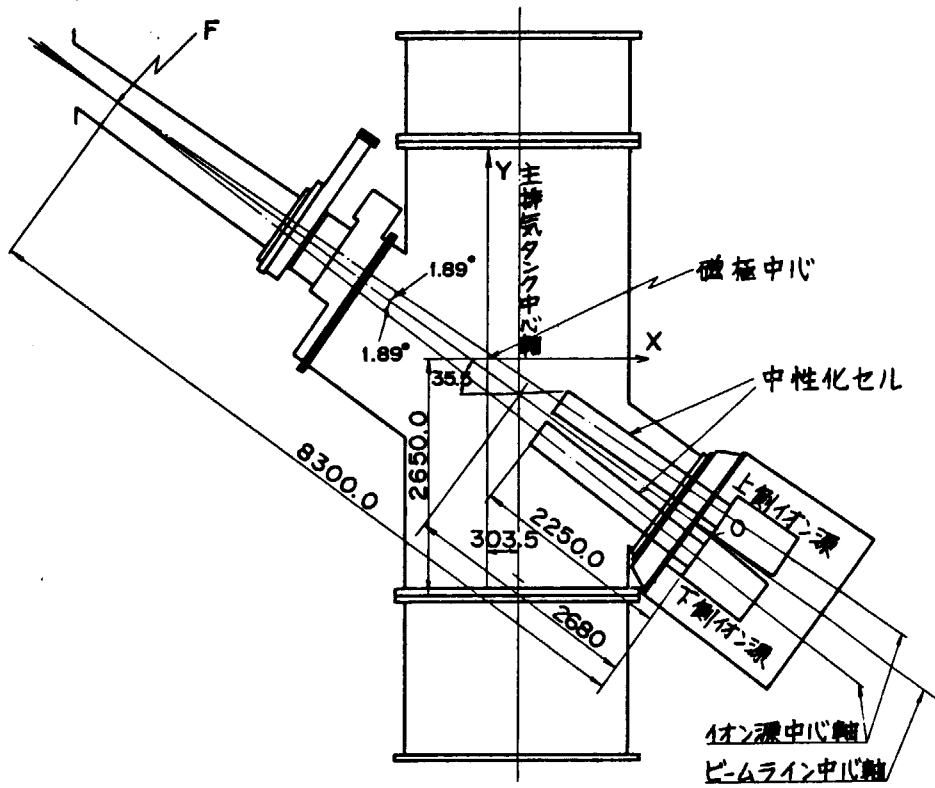
$v_{X'}$, $v_{Y'}$, $v_{Z'}$; それぞれの速度成分

$B_{X'}$, $B_{Y'}$, $B_{Z'}$; それぞれの磁場成分

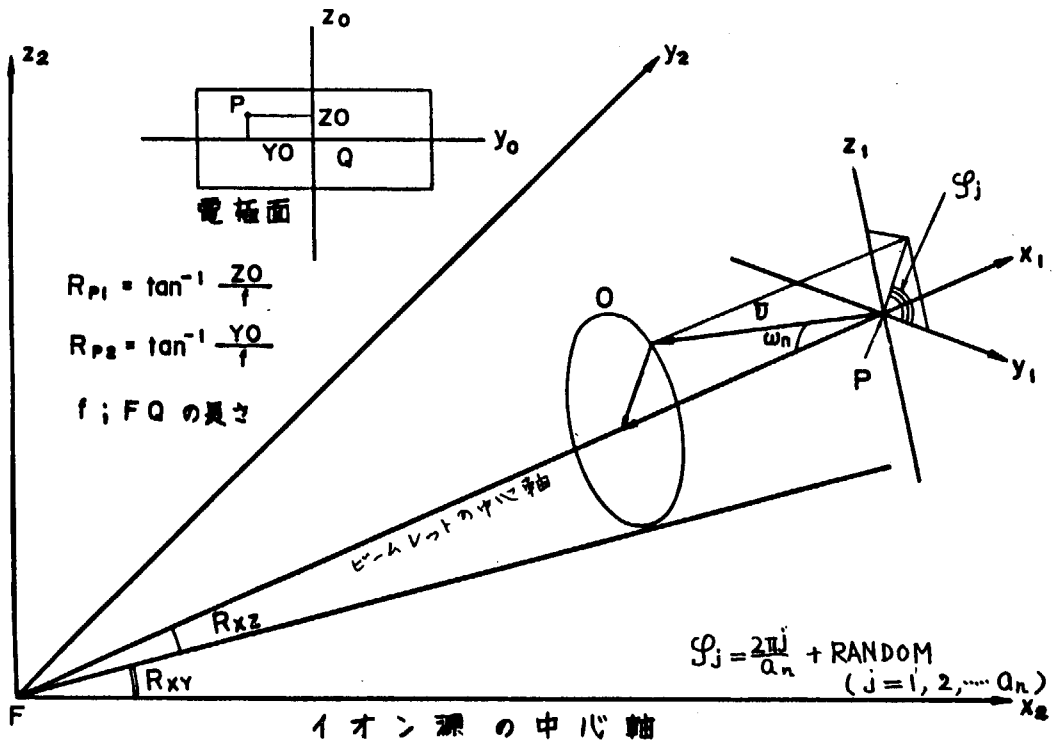
のようになる。この連立微分式はルンゲ・クッタ・ジルの方法で解を求め、一本の試験粒子の軌道を得る。これにより求められる一本の軌道毎に行き先の追跡を行いどこに衝突したかをさがす。

試験粒子の行き先としては最も熱負荷の大きいプロトンビームを考えた時、(1)偏向磁場の無視できない領域にある中性化セルの一部(2.4.4図中性化セル斜線部)、(2)偏向磁石の表面に設置されているウォータージャケット表面、(3)ビームダンプである。これらの位置と寸法は偏向磁場を定義する座標系で記述する。例えば、ビームダンプの形状はこの座標系の $X-Z$ 面で2.4.5図に示すような折線で近似している。ビームダンプは最大10枚の平面から構成することが可能であり、折線の全長は最大210 cmまで広げることができるよう考慮してある。この折線の全長はビームダンプを設置する空間において他の機器と干渉しないほぼ最大の円の半円周の長さである。ウォータージャケット及びビームダンプのY方向の長さは100 cmとし、試験粒子がこれらの面からはみ出ないように、2.4.5図の矢印BBからビームダンプを見た2.4.6図に示す如く、折目ごとにビームダンプ面をY方向に移動させた。このY方向の移動距離(2.4.6図中NIDO(I), $I = 1, 2 \dots 6$ で示している)は、熱負荷の計算を始める前に基準となる発散角がゼロの軌道を一本計算し、その軌道がビームダンプの折目においてはほぼY方向の中心を通るように決めている。このビームダンプ面のY方向の位置の決定は本計算コード中で自動的に行われている。

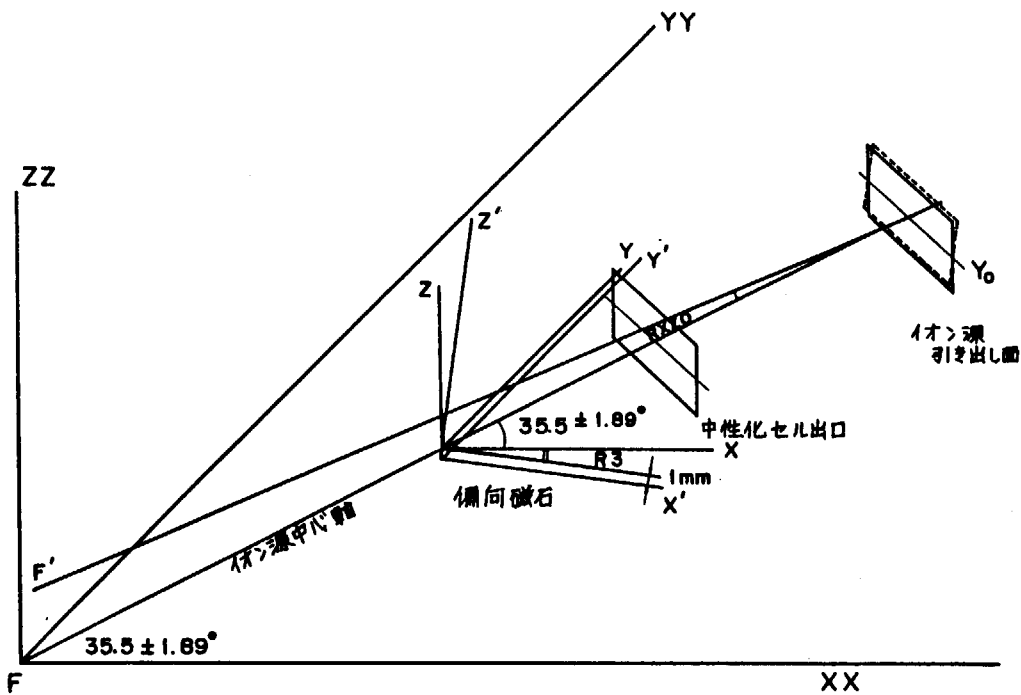
イオン源電極の回転、磁石の回転と平行移動、JT-60 からの漏洩磁場等がないとするとイオンビームによる熱負荷はX-Y平面に対称となるため、電極面において出発位置が $Z_0 \geq 0$ 側の試験粒子のみ軌道計算を行う。熱負荷を求める時、 $Z < 0$ 側のある柵を通る粒子数をx-y面に対称な位置にある $Z > 0$ 側の柵の粒子数に加えている。これらの作業は、設置誤差が全てゼロで漏洩磁場もゼロという入力データを与えた時、コード内で自動的に行われる。



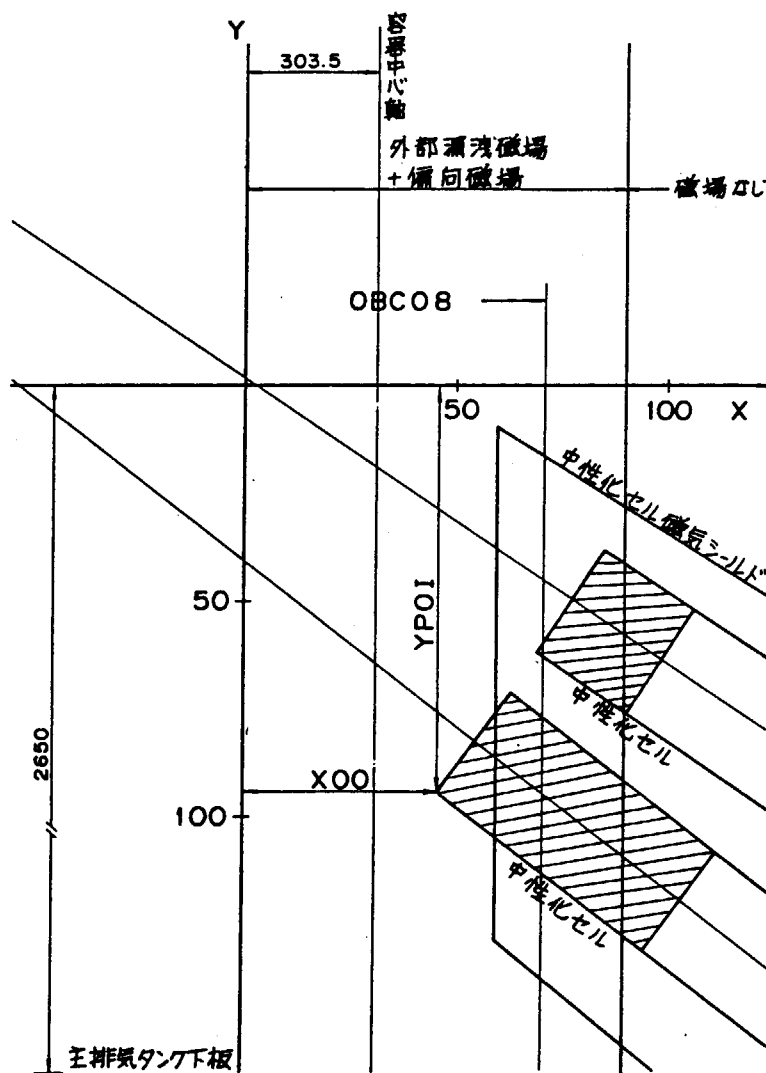
2.4.1 図 ビームラインの寸法



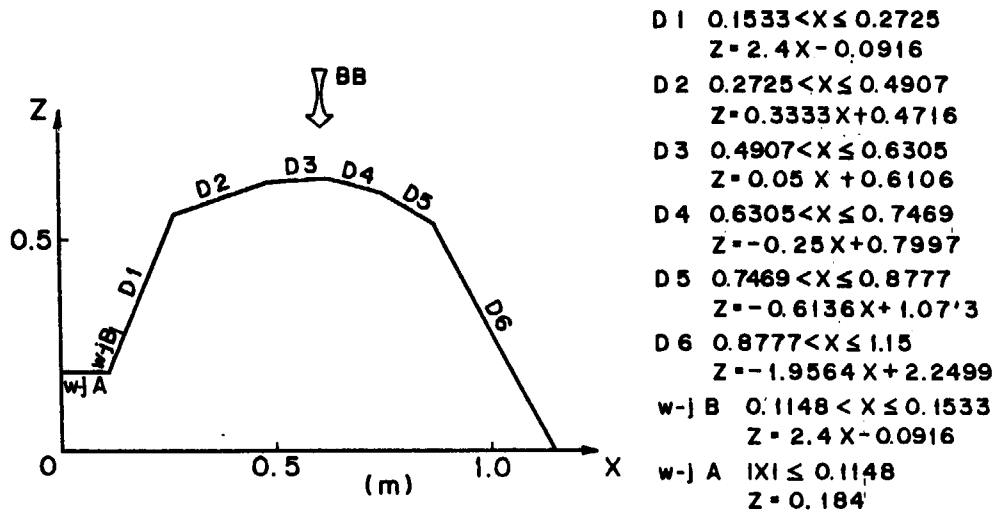
2.4.2 図 ビームレットの中心軸とイオン源中心軸



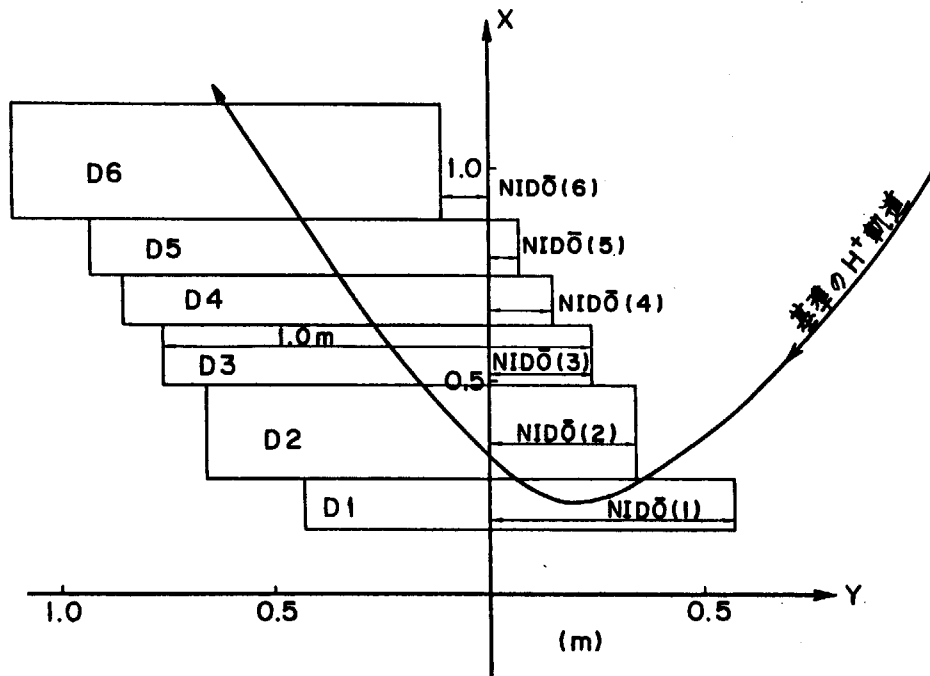
2.4.3 図 設置精度



2.4.4 図
偏尚磁場を定義する座標系



2.4.5 図 ビームダンプ形状

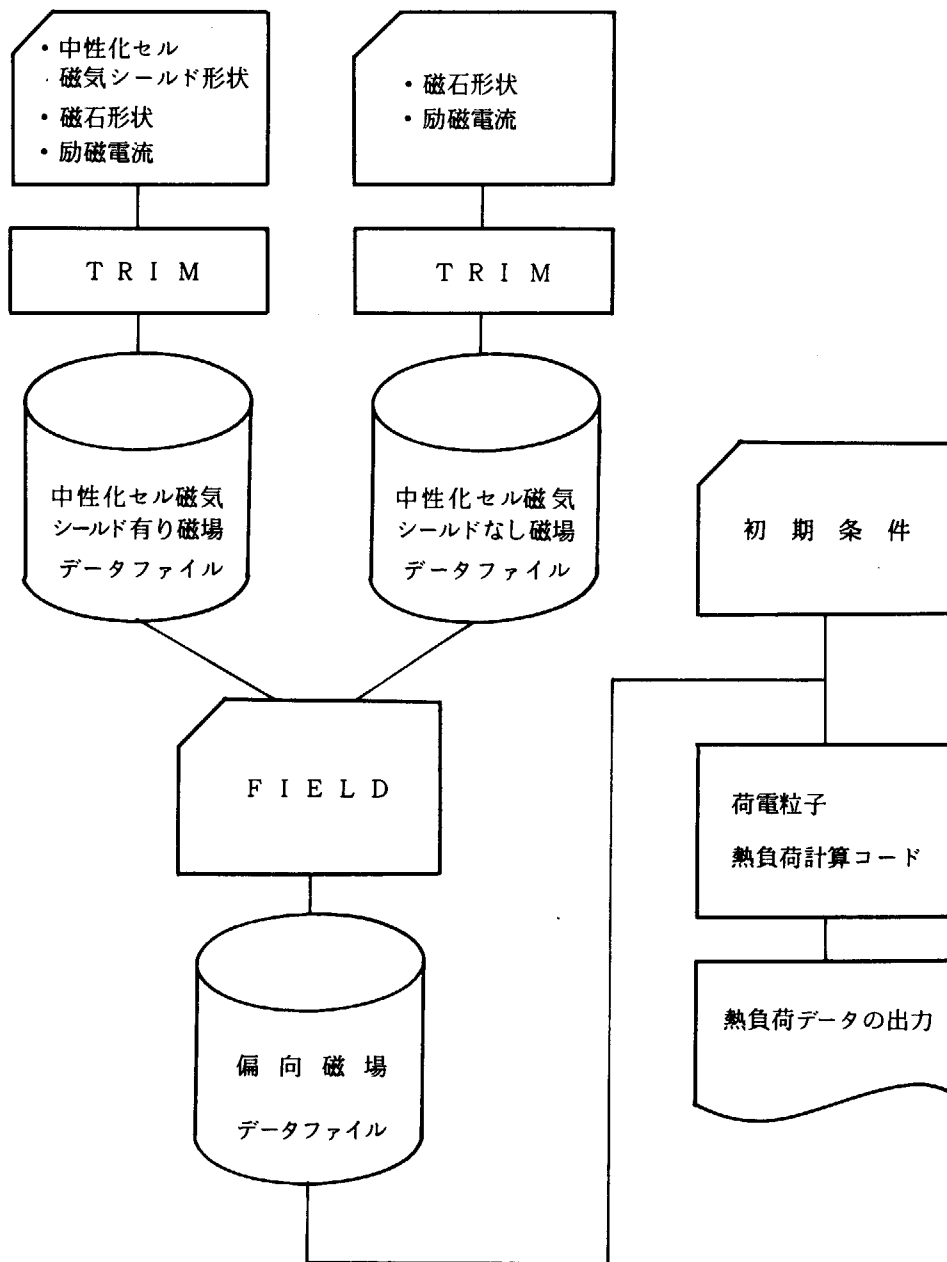


2.4.6 図 ビームダンプを構成する各面の移動

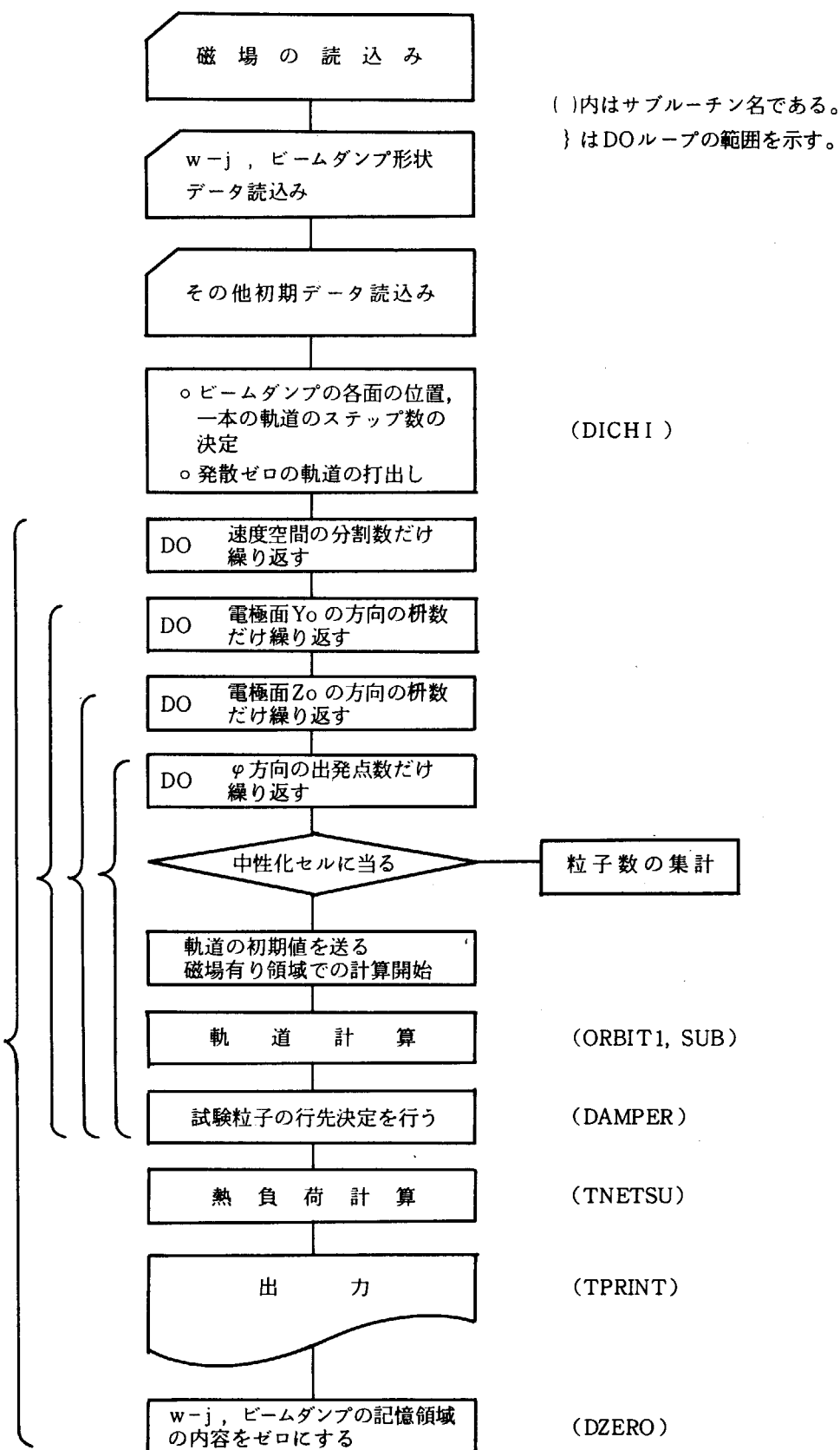
3. プログラムの概要

プログラムの概略として(1)システムフローチャート、(2)主プログラムのフローチャートと本計算コードで重要である一部サブルーチンのフローチャート、(3)サブルーチン関係表、(4)変数リスト、(5)インプット型式について以下に示す。

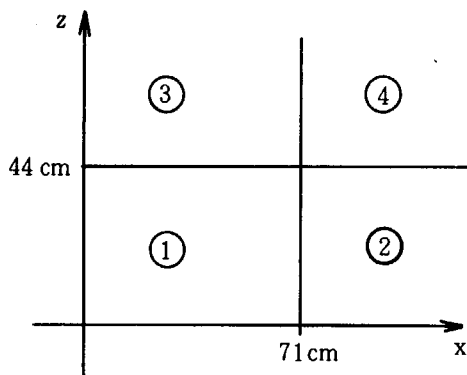
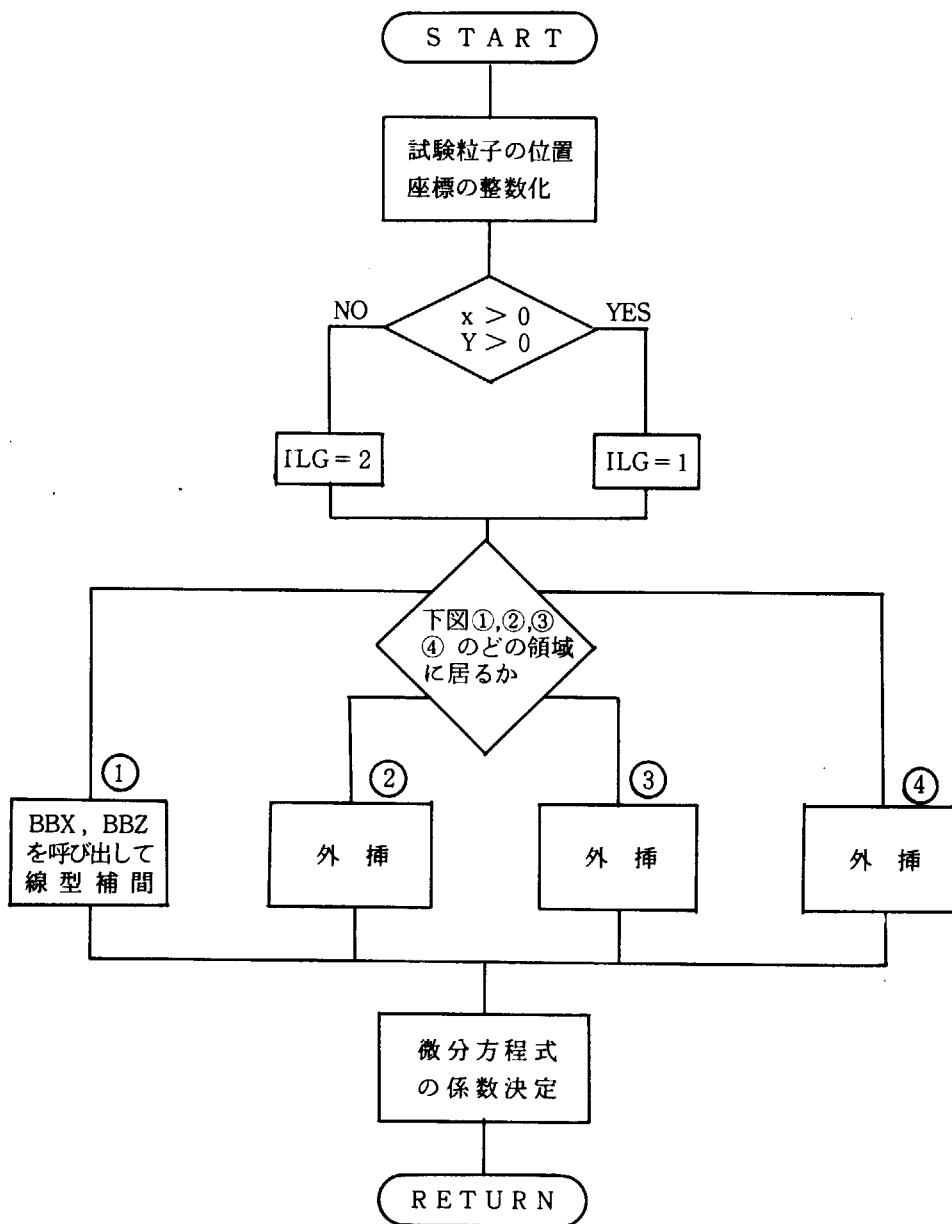
(1) システムフローチャート



(2)-1 主プログラム



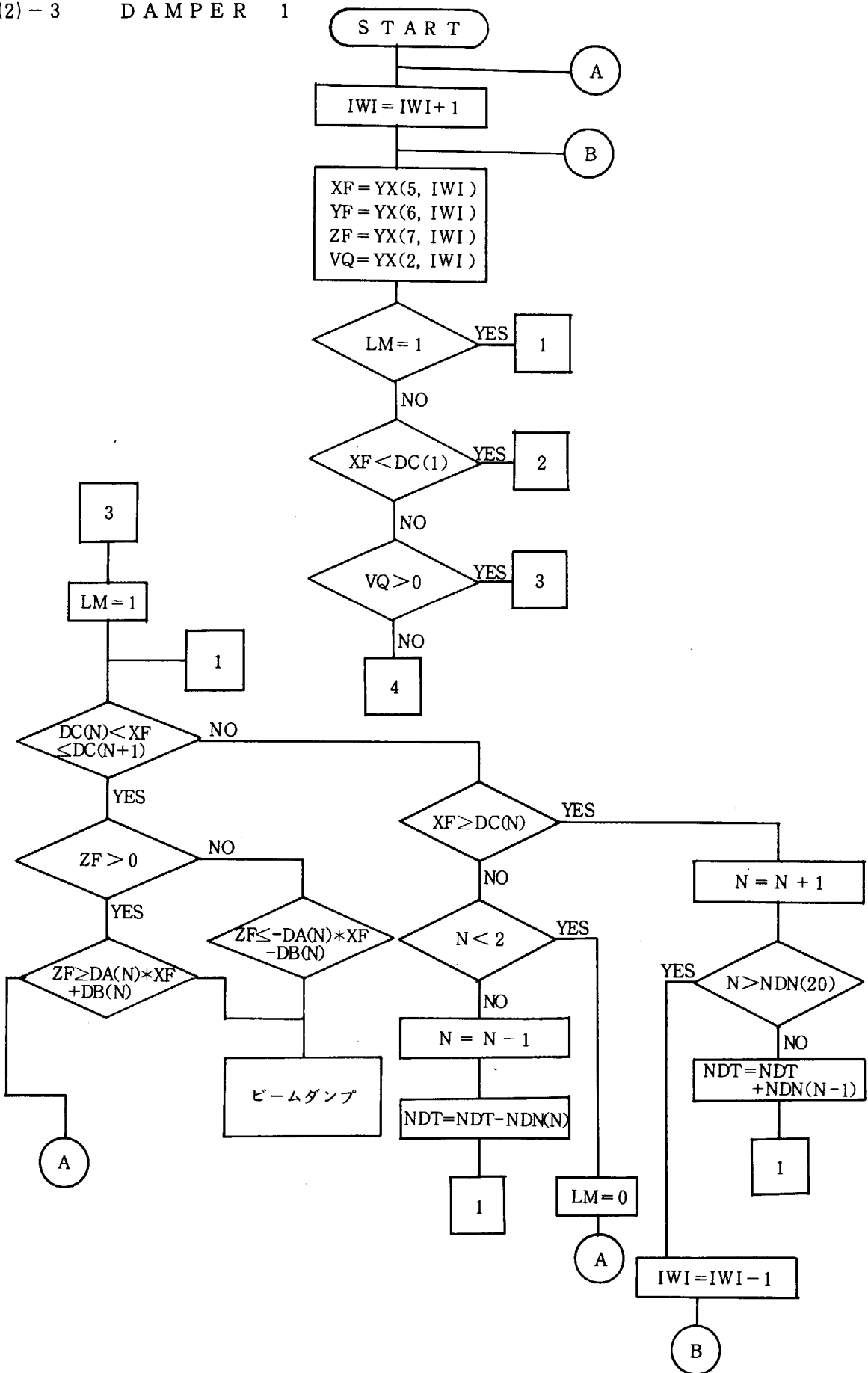
(2)-2 SUB サブルーチン



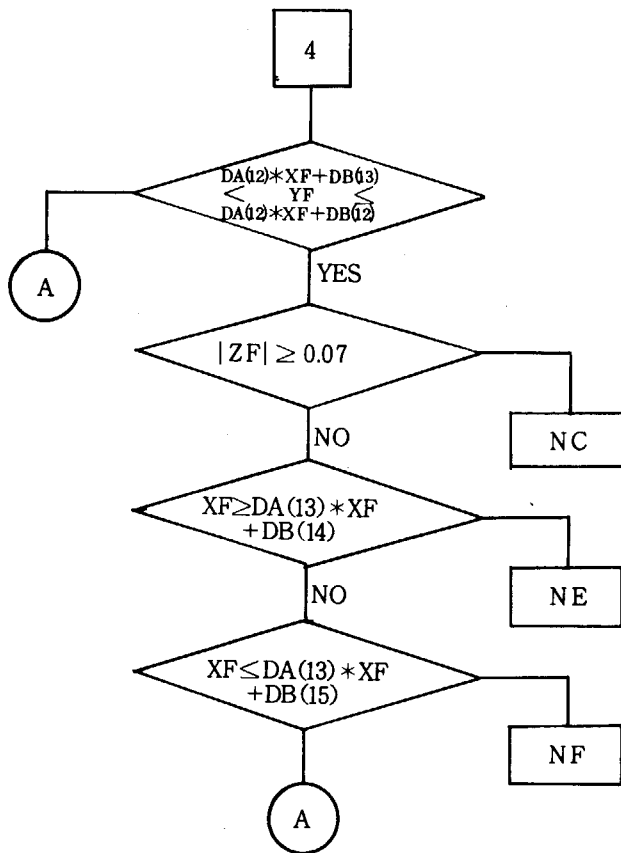
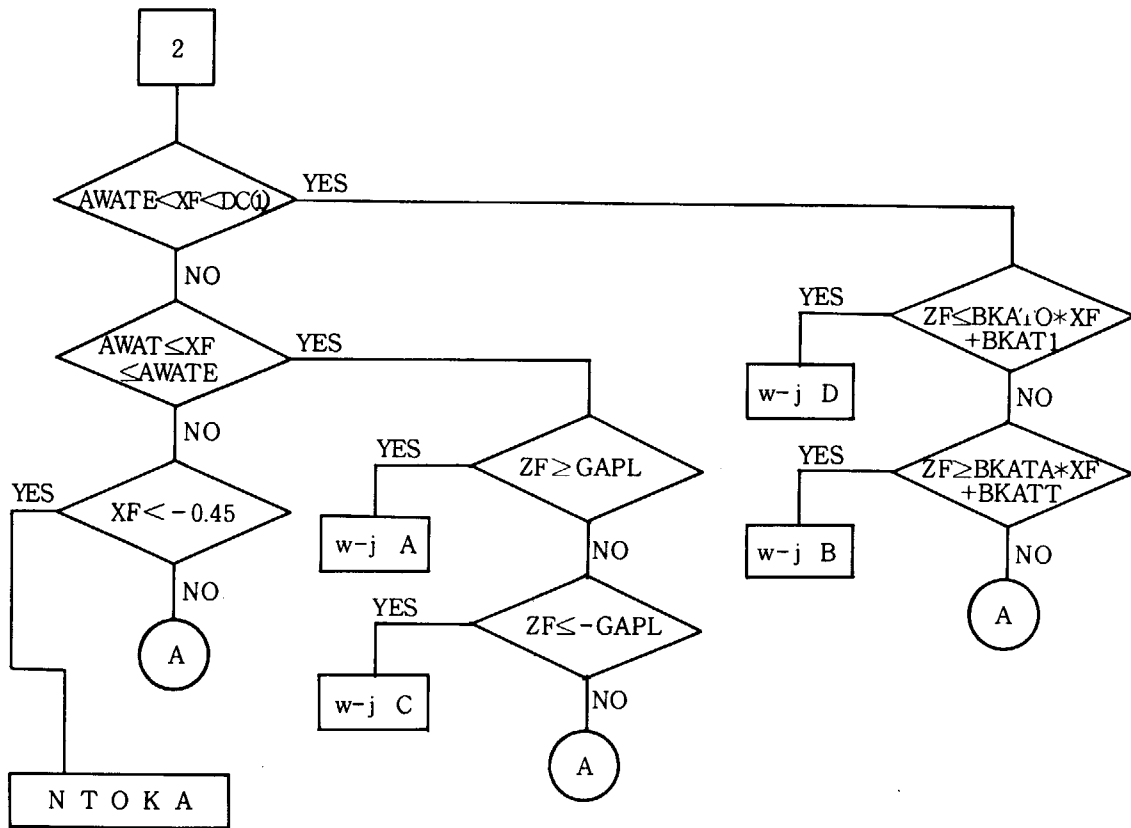
- ② x 方向に磁場が対数減衰する
- ③ z " "
- ④ x, z " "

注 $x > 0, z > 0$ 以外の空間の磁場も同じように選び出している。

(2) - 3 DAMPER 1

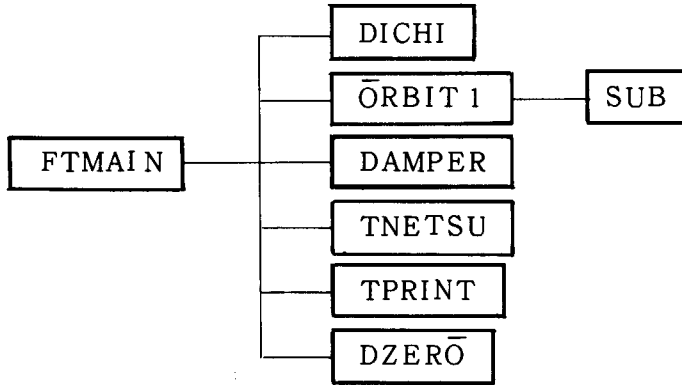


D A M P E R 2



(3) サブルーチン関係表

熱負荷計算コード



DICH1 ; ビームダンプを構成する面を粒子の行先へ移動させる。ビームダンプに到るまでの軌道計算に必要な最大ステップ数を決めるサブルーチンプログラム。

ORBIT 1 ; 軌道計算を行うサブルーチンプログラム。

SUB ; 軌道計算を行うにあたって試験粒子の各位置ごとに磁場の値を与えるサブルーチンプログラム。

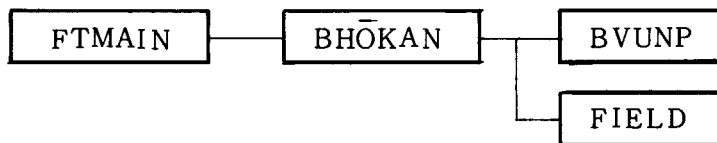
DAMPER ; $w-j$ やビームダンプ等と試験粒子軌道との交点を求め、各樹ごとに積算するサブルーチンプログラム。

TNETSU ; 各領域毎の出力の準備をするサブルーチンプログラム。

TPRINT ; 各領域毎の出力をするサブルーチンプログラム。

DZERŌ ; 領域毎に記憶内容を消却するサブルーチンプログラム。

偏向磁場作成コード



BVUNP ; 中性化セル磁気シールド有り及びなしのそれぞれの磁場を読み込み格納するサブルーチンプログラム。

FIELD ; スプライン補間を行うサブルーチンプログラム。

BHŌKAN ; 2種類の磁場を1つの偏向磁場にまとめるサブルーチンプログラム。

(4) 変数リスト

YX (I, J)	試験粒子の軌道情報の記憶領域
NOION	" の荷電数
NATOM	" の質量数
NYN	HEARIA, HEARIBの内容をディスクに書くか否かを指定する NYN = 1 で書く

KKK	試験粒子の電荷の正負 正の時 KKK=1, 負の時 KKK=-1
ZKI	Z 方向への偏向磁石の平行移動距離 (2.4.3 図参照)
BXX0	} 漏洩磁場を近似する関数の係数
BYY0	
BZZ0	
BXX1	
BYY1	
BZZ1	
HEARIA (I, J)	ビームダンプ(1)の記憶領域 (3.1 図参照)
HEARIB (I, J)	" (2) " (3.1 図参照)
HEARIC (I, J)	" (1)の副記憶領域
HEARID (I, J)	" (2) "
AEARIA (I, J)	ウォータージャケットAの記憶領域
CEARIA (I, J)	" C "
AEARIA2(I, J)	" Aの副記憶領域
CEARI2(I, J)	" C "
BEARIA (I, J)	" Bの記憶領域
DEARIA (I, J)	" D "
BEARI2(I, J)	" Bの副記憶領域
DEARI2(I, J)	" D "
BBX (I, J, K)	偏向磁場のx成分の分布を格納する。
BBZ (I, J, K)	" z "
VH (I, J, K)	ビームダンプに衝突した時の v_x, v_y, v_z
VF (I, J, K)	ウォータージャケットに衝突した時の v_x, v_y, v_z
BNN	読み込んだ磁場に掛ける係数
DA (I)	} ビームダンプの形状を与える式の係数
DB (I)	
DC (I)	ビームダンプを構成する平面の交点 (3.1 図参照)
NDN (I)	ビームダンプの平面の長さ (3.1 図参照)
NIDO (20)	ビームダンプのY方向の移動距離 (2.4.6 図参照)
L 1	} ビームダンプの格子の幅 1以上
L 2	
LA 2	} W-jA の格子の幅 1以上
LA 4	
LB 2	} W-jB の格子の幅 1以上
LB 4	
LN 1	} 磁場有り領域にある中性化セルの一部の格子の幅
LN 2	

MOMOMI	試験粒子の持つ重みを10倍した数を記憶
MMM	軌道計算のステップ数を記憶
NMEMO (I)	W-j, ビームダンプ等の各領域毎の全衝突粒子数を記憶する
MEMO (I)	NMEMO (I) の副記憶領域
NC (I, J, K)	磁場有り領域の中性化セル側面の記憶領域 (K = 1 で Z > 0 側の面 NC 1, K = 2 で Z < 0 側の面 NC 2) 3.2 図参照
NE (I, J, K)	磁場有り領域の中性化セル上部面の記憶領域
NF (I, J, K)	下部面
	3.2 図参照
VAN (I)	発散角
W	試験粒子の加速エネルギー (eV)
TIME	軌道計算の時間きざみ
AjACK (I, J)	W-j A に当たった試験粒子が出発した電極面上座標の記憶領域
BjACK (I, J)	" B "
CjACK (I, J)	" C "
DjACK (I, J)	" D "
VYAN 0	2.4.1 図においてビームライン中心軸の y 軸への入射角 (35.5°)
VYAN 1	2.4.1 図のビームライン中心軸とイオン源中心軸とのなす角 (上イオン源 - 1.89°, 下イオン源 + 1.89° である。)
VZANG	偏向磁石の Y 軸周りの回転角
RXZO	イオン源面極の Y ₂ 軸周りの回転角
XOO	} 2.4.4 図に示す寸法で、この値によって上、下イオン源を区別する。
YP \bar{O} I	
XO	中性化セルの全長
TNEU	磁場なし領域の中性化セルの長さで XO = AS + TNEU が成り立つ。
BEFC	ビームレットの焦点距離
MT \bar{O} BUN	最大の発散角を持つ試験粒子の数
NHYMAX	Y ₂ 方向の出発点の数 (電極面における) Z ₂ " "
KMIN	} 熱負荷計算結果を望みの範囲で得ることができ、その範囲は VAN (KMIN) から VAN (KMAX) までとなる。
KMAX	
NT \bar{O} KA	W-j A, C の作るギャップ間を通過して計算領域外に出てしまう粒子数
N \bar{O} VER 1	ビームダンプを y 方向正側に外れる粒子数
N \bar{O} VER 2	" 負側 "
XMINI	試験粒子群の最小 x 座標
NC \bar{O} LLI	磁場なし領域において中性化セルに当る粒子数。
NDN (20)	ビームダンプを構成する平面の数

BKATA	3.1 図参照
BKATT	”
GAPL	”
AWATE	”
ILG	ILG = 1 で中性化セル磁気シールド有り偏向磁場を使用, ILG = 2 で中性化セル磁気シールド無しの偏向磁場を使用する。



(6) インプット形式

INPUT DATA SHEET

PAGE OF

氏名	日付		プログラム名		JOB NO.		カード色指定		PUNCH					
	年	月	日	名	1	2	3	4	5	6	7	8		
所属	電話		研究テーマ番号		IBJOB DECKNAME		備考				73-80 YES <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/>			
1	0.7500E	05	0.4800E	-08	0.6196E	00	0.3312E	-01	0.0000E	-03	0.0000E	00	-5.2360E	-03
2	0.3143E	00	0.7976E	00	2.4208E	00	1.6407E	00	8.3000E	00				
3	0.0044350	0084120	0.112220	0.137350	0.162140	0.187440	0.214680	0.246790	0.289330	0.37682				
4	0.0000E	00	0.0000E	00	0.0000E	00	0.0000E	00	0.0000E	00				
5	6.0000E	00	0.0000E	00	0.0000E	02	0.0000E	02	0.0000E	02	0.0000E	02	0.0000E	00
6	1.97134	-0.05409	0.130	0.09338										

共通E173

* 73-75: DATAID / 76-80: SEQUENTIAL NUMBER

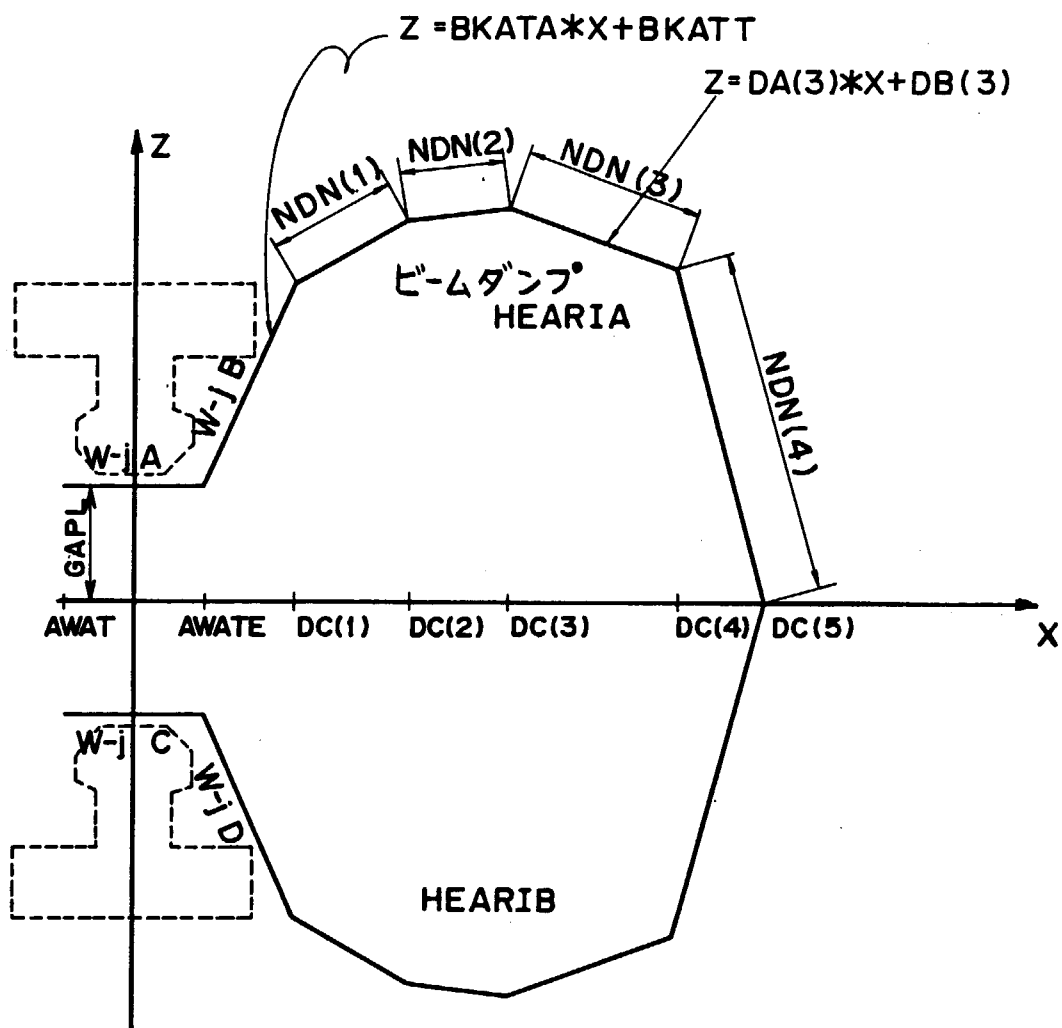


INPUT DATA SHEET

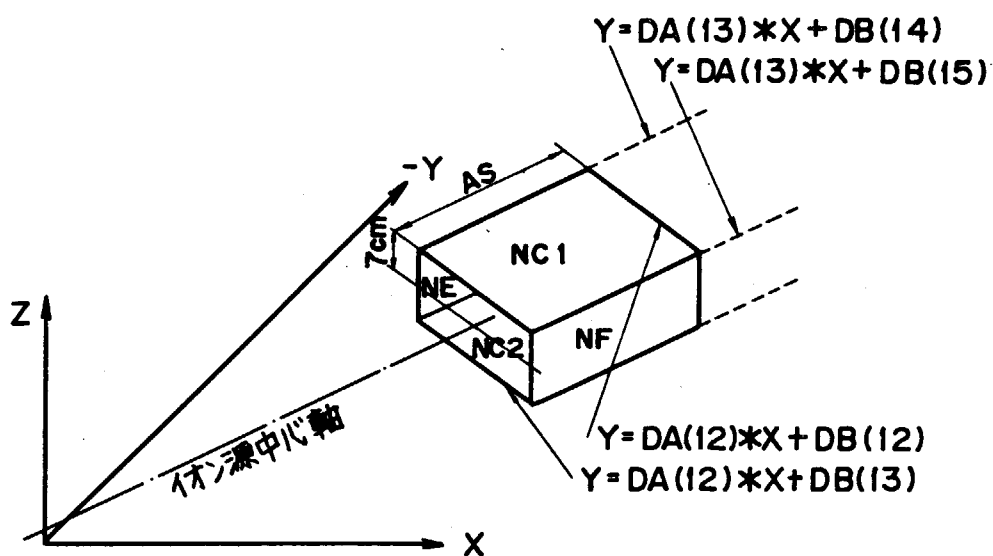
PAGE OF

氏名	所属	日付 / / 電話	プログラム名	JOB NO.				カード色指定				PUNCH YES <input type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/>							
				1	2	3	4	5	6	7	8								
		研究者マ番号		IBJOB DECKNAME				備考											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ヒューマンの型状を表すデータ																			
DA(I)		DB(I)				DC(I+1)													
0.240000E-01	0.916000E-01	0.2724925E	00			32													
0.333333E	0.4715512E	0.4906898E	00			24													
0.500000E-01	0.6105799E	0.6305150E	00			15													
0.250000E	0.7997343E	0.7469320E	00			13													
0.6136142E	0.1071329E	0.8776814E	01			16													
0.3443940E	0.355453E	0.1032380E	01			57													
I - 1, NDN (20)																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

* 73-75: DATAID / 76-80: SEQUENTIAL NUMBER



3.1 図 計算コードにおけるウォータージャケットとビームダンプの表現方法



3.2 図 磁場有り領域の中性化セル

4. 計 算 例

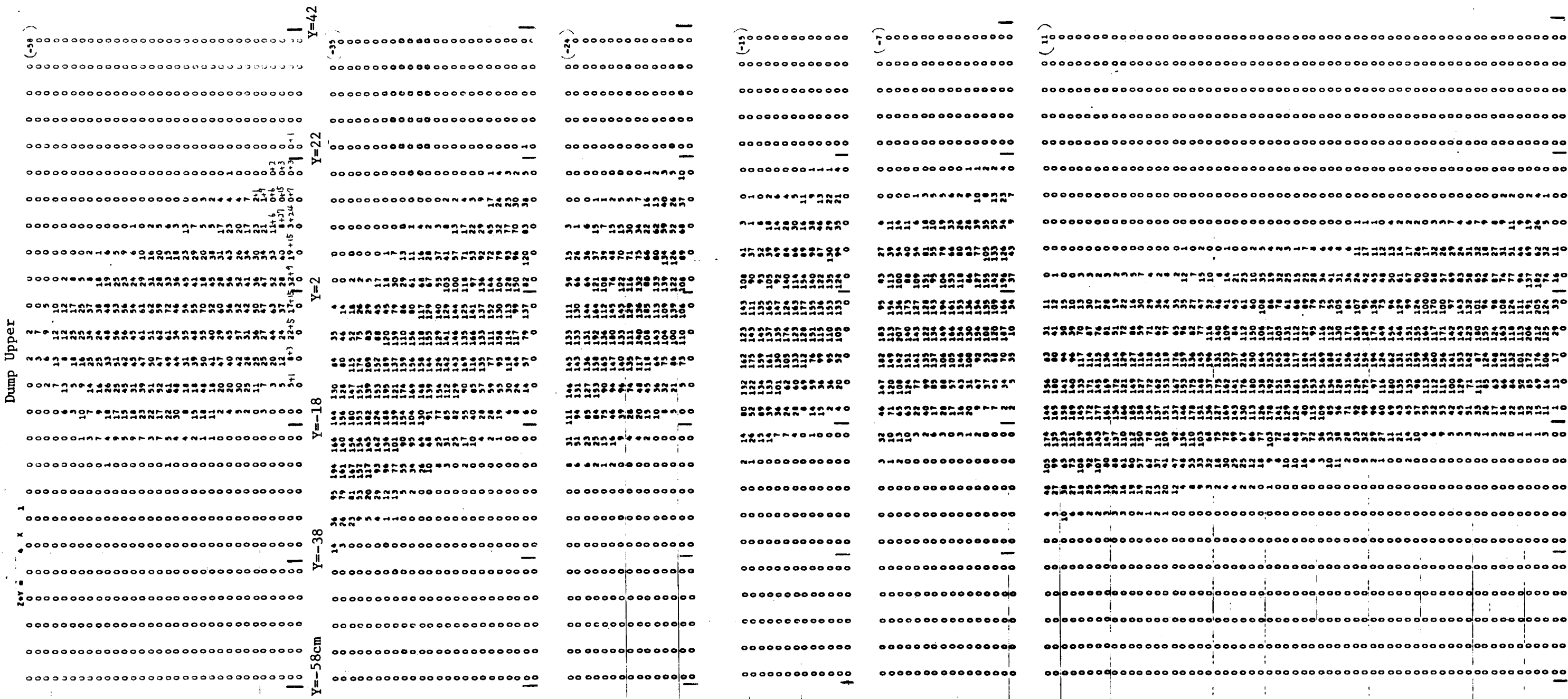
漏洩磁場，軸ずれの両方がゼロの時の計算例として，発散が 0.9° の下側イオン源から出たプロトンビームによる熱負荷分布を4.1図に示す。以後，熱負荷分布図中の熱負荷を表わす数字は 4 cm^2 の面積を持つその位置にある樹内に当たった1ヶあたり 12.1 W の熱量を持つ粒子の数である。4.1図の熱負荷分布ではほぼ 500 W/cm^2 以下となっている。なお図右上のカッコ内の値は2.4.6図の $\overline{\text{NID}\bar{O}}(I)$ ($I = 1, 2 \dots 6$)である。この計算では4.2図に示す偏向磁石形状において計算した磁場を使用している。この磁場計算において中性化セル磁気シールドは実際の場合と同じように電磁軟鉄製の外層と μ -メタル製の内層との2重構造となっている。又，中性化セル磁気シールドと偏向磁石の間に侵入して来るJT-60からの漏洩磁場をシールドするための漏洩磁場磁気シールドも図のような形で考慮している。この時の偏向磁石のみの磁場の強さは起磁力 $2.2500\text{ AT} \times 2$ の時4.2図の原点で 1320 ガウスとなっている。ビームダンプ形状は2.4.5図の通りである。

漏洩磁場，軸ずれの両方が有る時の計算例として，4.3，4.4図にビームダンプと $W-j$ のそれぞれの熱負荷分布を示す。これは3.(5)のインプット形式で示したデータを入力した時の計算結果である。この結果は上述の場合と同じように下側イオン源から出たプロトンビームによるものである。偏向磁場も同じものである。又ビームダンプ形状についてはD 6の傾きが異なる以外は2.4.5図と同じである。この計算例ではビームダンプ及びウォータージャケットにとって最も熱負荷が厳しくなる条件がそろえてある。即ち，ビームの発散が 1.2° で，イオン源電極の軸ずれ $R_{x_{20}}$ が 0.3° で，JT-60からの漏洩磁場がX成分のみで4.5図に示すような分布を仮定して計算した。

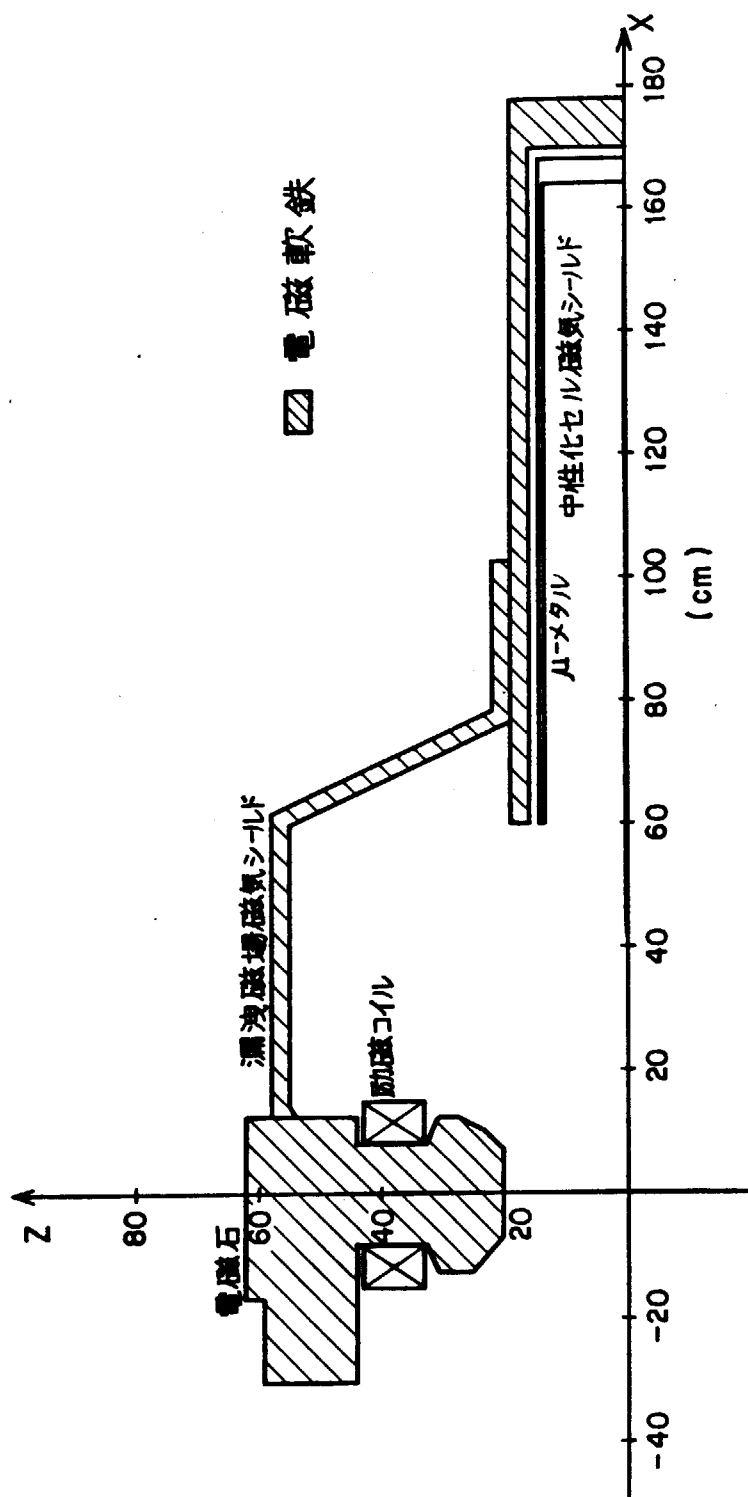
この内，JT-60からの漏洩磁場 B_x は漏洩磁場磁気シールドがあった場合のものであり，この分布はTRIMにより偏向磁場を求めた時とは別の手順で計算した結果から推定した。この漏洩磁場についての詳細は本レポートの範囲を越えるので省略する。

漏洩磁場と軸ずれのため，熱負荷分布の $X-Y$ 平面に対する対称性がなくなり，本計算コードは $Z > 0$ 側にあるDump Upper (4.3(I)図)と $Z < 0$ 側にあるDump Lower (4.3(II)図)との両熱負荷分布を出力している。各部へ衝突した時の1粒子の熱負荷は前例と同じである。ビームダンプの熱負荷分布はDump Lower (4.1(II))側に片寄っており，これは電極の軸ずれと漏洩磁場によるため，いずれも Z 方向の負側にビームを偏向させる効果があり，この場合はこの両者の相乗効果を示している。ビームダンプの熱負荷で印のついている数字は 600 W/cm^2 以上の熱負荷となっている所で，かなりDump LowerのD 2面に集中していることがわかる。今回の例ではウォータージャケットのA, B, Cへの熱負荷はゼロでDには4.4図に示すような熱負荷があった。

以上の計算例から，偏向磁石の形状，ビームダンプの形状等の変更が必要であることがわかり，現在，詳細に検討が行われている。



4.1 図
 発散 = 0.9°;
 漏洩磁場なし,
 軸ずれなし
 におけるビーム
 ダンプ面上の熱
 負荷分布



4.2 図 偏向磁石と漏洩磁場磁気シールド

Dump Upper

Y=-56cm

Y=-36

Y=-16

Y=4

Y=24

Y=44

D1

D2

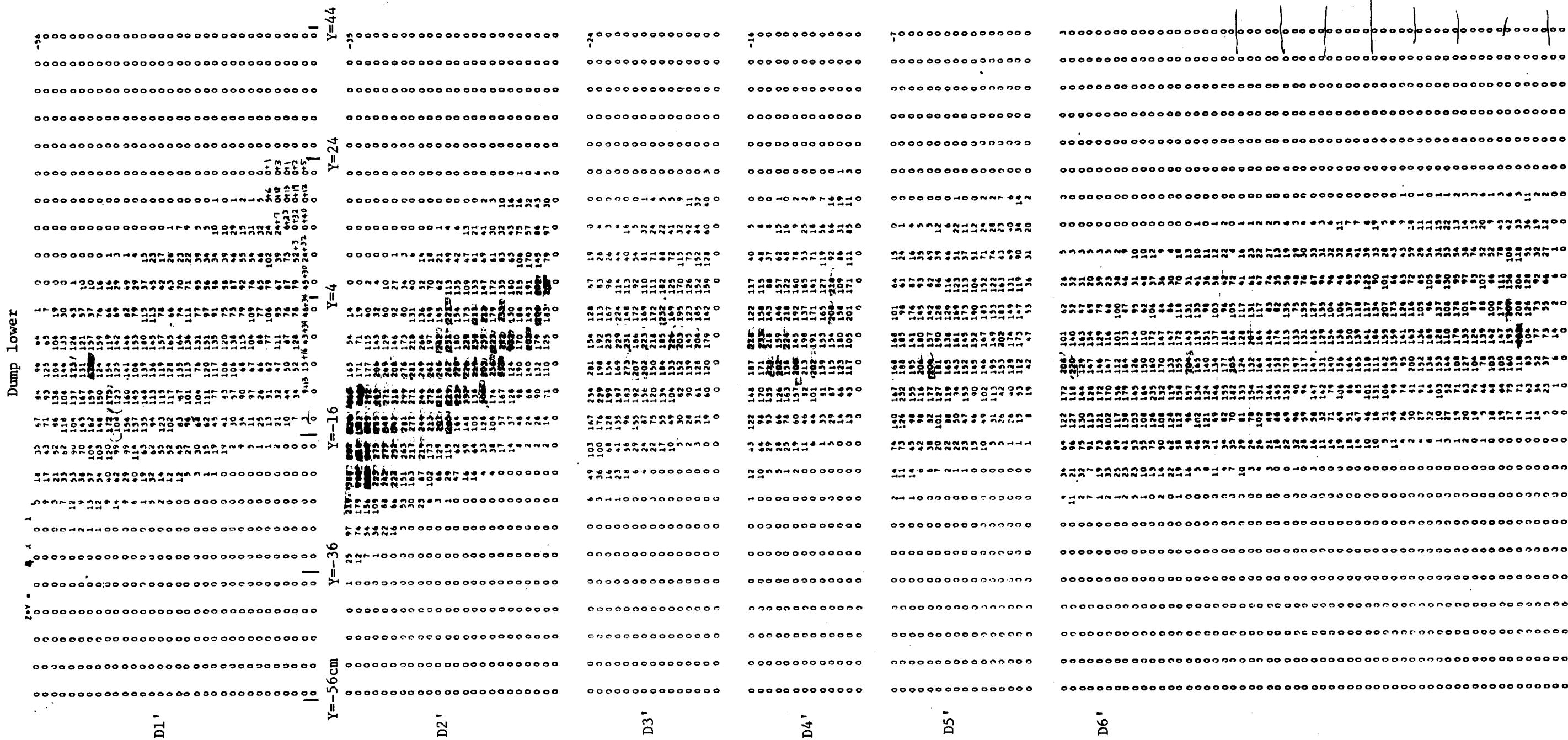
D3

D4

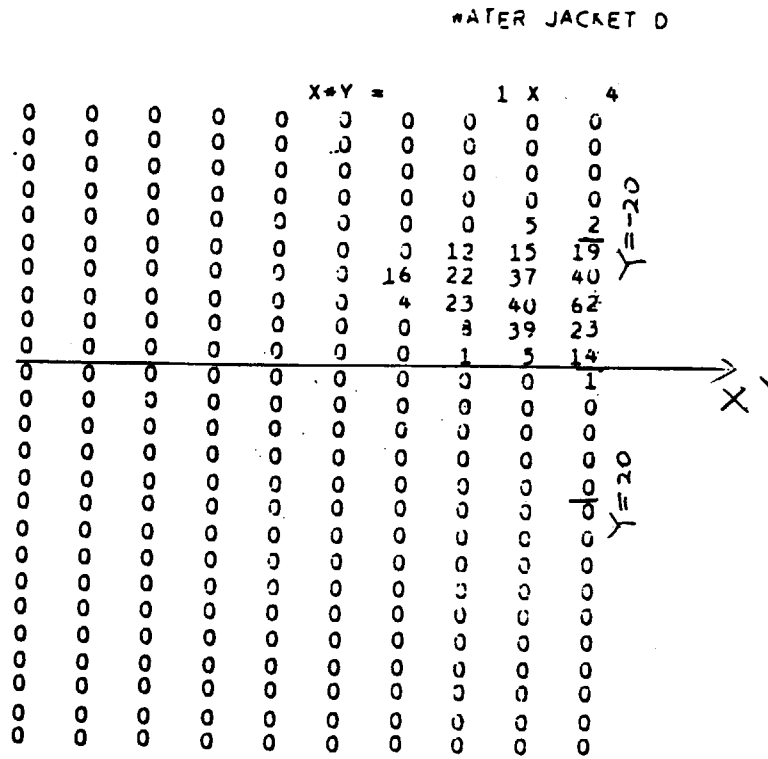
D5

D6

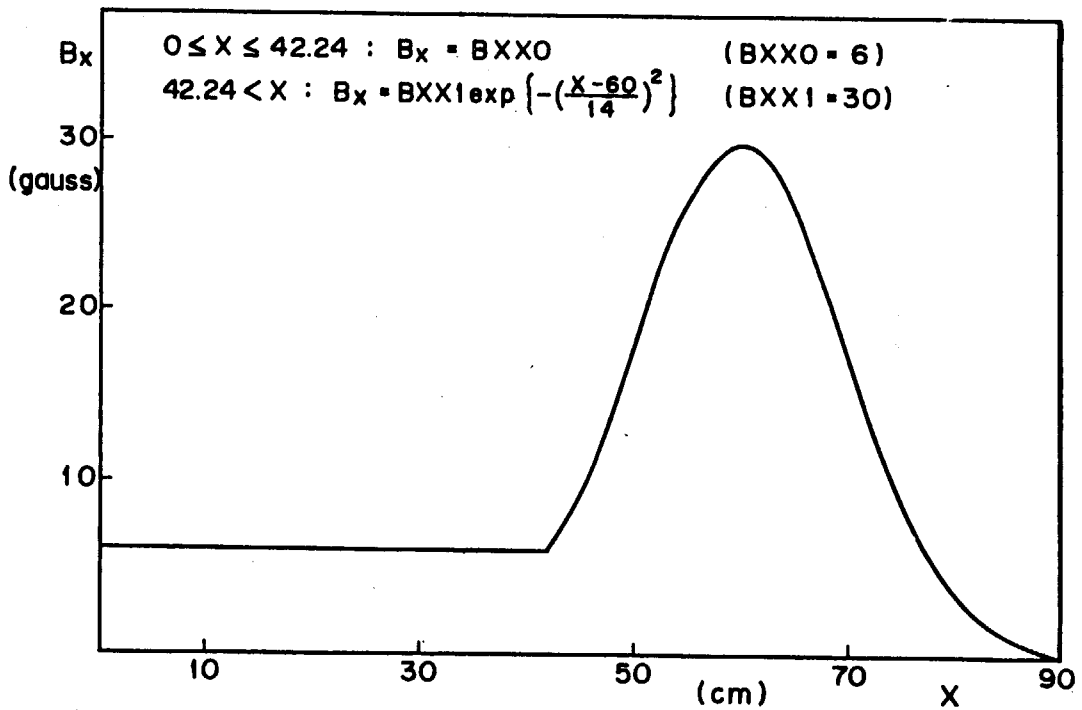
4.3 図(I)
 発散 = 1.2°
 漏洩磁場 : 4.5 図,
 軸ずれ = 0.3°
 Z > 0 側のビーム
 ダンプ熱負荷分布



4.3 図(II)
 発散 = 1.2°
 漏洩磁場 : 4.5 図
 軸ずれ = 0.3°
 Z < 0 側のビーム
 ダンプ熱負荷分布



4.4 図 ウォータージャケットの熱負荷分布



4.5 図 漏洩磁場 (漏洩磁場磁気シールドでJT-60からの漏洩磁場をシールドした時残った磁場)

5. お わ り に

JT-60用NBIのプロトタイプとして建設される原型ユニットの一部ビームライン機器は、本計算コードにより得られた結果を使用して設計する。しかし、この設計は、本文でも述べたように偏向磁場を2次元分布として計算しているため、中性化セル磁気シールド及び偏向磁石がy方向に有限長であるために表われる3次元の効果が考慮されていない。我々は、この計算コードを使用して行った設計を1次案とし、この設計により偏向磁石、中性化セル磁気シールド、イオン源磁気シールド等の1/4のモデルを製作する。次にそれらを組合わせて3次元の偏向磁場を測定し、その結果を用いてさらにイオンビーム熱負荷計算を行う。最後にその計算結果を反映させたビームライン機器の設計を行う予定である。

よって、本計算コードの有効性は、この一連の作業が終了し、原型ユニットの完成後行われる実験の結果を待たねば議論できない。ここはコードの計算方法やコードの概要を述べるにとどめる。

謝 辞

この計算コードの作成にあたって有益な議論をして頂いた加熱工学第1研究室の諸氏に対して感謝するとともに終始激励して頂いた白形弘文加熱工学第1研究室長、小播行雄核融合研究部部长及び磯康彦核融合研究開発推進センター長に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) S. Matsuda et al. : JAERI-M 7655 (1980).
- 2) H. Horiike et al. : to be published.
- 3) John S. Colonias : UCRL-18439 (1968).
- 4) S. Matsuda : Japan, J. Appl. Phys., 13, (1974) 1630.
- 5) Y. Ohara : JAERI-M 6438 (1976).

付録I ビームの発散

NBI用イオン源では、ビームオプティクスを論ずる時、ビーム発散を用いることが多い。ここではビームの速度分布関数とビームの空間分布関数(いわゆるビームの発散)との関係について述べる。ビームイオンの速度分布関数は、ドリフトマックスウェル分布になるとすると、球座標では、

$$f(v_{\perp}, v_{\parallel}) = n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_i}{2kT_i} \{ (v_{\parallel} - v_D)^2 + v_{\perp}^2 \} \right]$$

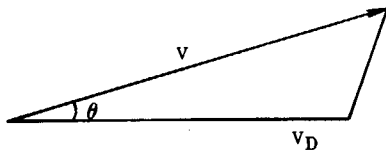
n_0 ; 全粒子数

m_i ; イオンの質量

k ; ボルツマン定数

T_i ; ソースプラズマのイオン温度、引き出し電極のレンズの収差、スペースチャージによる広がり等を含んだ等価的な温度

$v_{\parallel}, v_{\perp}, v_D$;



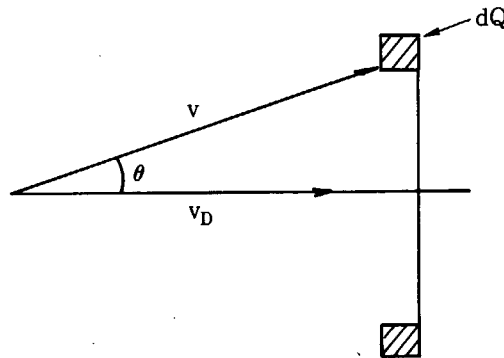
$$v_D = \sqrt{\frac{2E_d}{m_i}}$$

$$v_{\parallel} = v \cos \theta$$

$$v_{\perp} = v \sin \theta$$

E_d : 加速エネルギー

この分布関数から v の分布関数を求める。



$$dQ = 2\pi v \, dv \, dv_{\parallel}$$

$$n_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} 2\pi v_{\perp} \, dv_{\perp} \, dv_{\parallel} f(v_{\perp}, v_{\parallel})$$

$$= 2\pi n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \exp\left\{ -\frac{m_i}{2kT_i} (v_{\parallel} - v_D)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^\infty v_1 \exp\left(-\frac{m_i}{2kT_i} v^2\right) dv_1 \\ & = 2\pi n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i}\right)^{3/2} \left(\frac{2\pi kT_i}{m_i}\right)^{1/2} \int_0^\infty v_1 \exp\left(-\frac{m_i}{2kT_i} v_1^2\right) dv_1 \\ & = \int_0^\infty \frac{n_0 m_i}{2\pi kT_i} \exp\left(-\frac{m_i v_1^2}{2kT_i}\right) 2\pi v_1 dv_1 \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \frac{n_0 m_i}{2\pi kT_i} \exp\left(-\frac{m_i v_1^2}{2kT_i}\right) \\ v_1 &= v_{//} \cdot \tan \theta \quad \text{において } v_{//} \sim v_D, \quad \theta \ll 1 \text{ より} \\ v_1 &\simeq v_D \theta, \quad dv_1 = v_D d\theta \end{aligned}$$

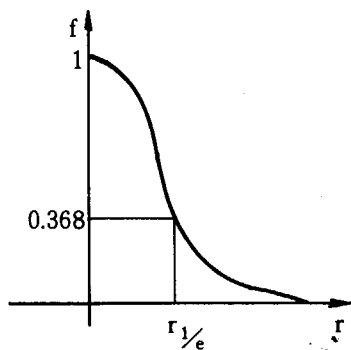
となり,

$$n_0 \simeq \int_0^\infty \frac{n_0 m_i v_D^2}{2\pi kT_i} \exp\left(-\frac{m_i v_D^2}{2kT_i} \theta^2\right) \cdot 2\pi \theta d\theta$$

と書ける。この式から空間分布を求める。

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{r}{Z} \text{ より } d\theta = \frac{dr}{Z} \\ n_0 &= \int_0^\infty \frac{n_0 m_i v_D^2}{2\pi kT_i} \exp\left(-\frac{m_i v_D^2}{2kT_i} \cdot \frac{r^2}{Z^2}\right) \cdot 2\pi \frac{r}{Z^2} dr \\ &= \int_0^\infty \frac{n_0 m_i v_D^2}{2\pi kT_i Z^2} \exp\left(-\frac{m_i v_D^2}{2kT_i Z^2} r^2\right) \cdot 2\pi dr \\ f(r) &= \frac{n_0 m_i v_D^2}{2\pi kT_i Z^2} \exp\left(-\frac{m_i v_D^2}{2kT_i Z^2} r^2\right) \end{aligned}$$

これは引き出し電極面から距離Zの位置でのビームの空間的な広がりを示している。ここで



$$\begin{aligned} r_{1/e}^2 &= \frac{2kT_i Z^2}{m_i v_D^2} \text{ から} \\ \left(\frac{r_{1/e}}{Z}\right)^2 &= \frac{2kT_i}{m_i v_D^2} \\ \therefore \frac{kT_i}{E_d} &= \tan^2 \omega_{1/e} \end{aligned}$$

と定義し、 $\omega_{1/e} = \tan^{-1} \sqrt{kT_i / E_d}$ をビームの発散と呼んでいる。 $E_d = 75000 \text{ eV}$ とで

$\omega_{1/e} = 1^\circ$ とする時

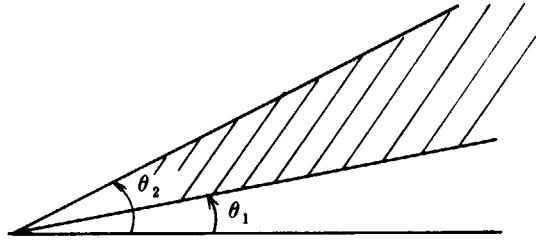
$$kT_i = 22.8 \text{ eV}$$

となり、 $\omega_{1/e} = 1^\circ$ の時の分布関数が決まる。

付録Ⅱ 速度空間の分割

速度空間において $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ の円錐状領域にある粒子の数 n_{12} は

$$n_{12} = N \cdot n_0$$



とかく。 n_0 は速度空間の全粒子数である。又

$$n_{12} = \int_0^\infty \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(v, \theta) 2\pi v^2 \sin \theta d\theta \cdot dv \quad \text{---①}$$

で、分布関数 $f(v, \theta)$ はドリフトマックスウェル分布から

$$f(v, \theta) = n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \times \exp \left[- \frac{m_i}{2kT_i} \{ (v \cos \theta - v_D)^2 + v^2 \sin^2 \theta \} \right]$$

と書くことができ、これを①式に代入すると、 n_{12} を求めることは N を求めることと同じで

$$N = \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \int_0^\infty \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \cdot dv \times v^2 \sin \theta \exp \left[- \frac{m_i}{2kT_i} \{ (v \cos \theta - v_D)^2 + v^2 \sin^2 \theta \} \right]$$

ここで、 $\frac{v}{\sqrt{\frac{2kT_i}{m_i}}} = V$ $\frac{v_D}{\sqrt{\frac{2kT_i}{m_i}}} = V_D$ とすると

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_0^\infty V^2 \exp \left[- \{ (V \cos \theta - V_D)^2 + V^2 \sin^2 \theta \} \right] dV$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \int_0^\infty V^2 \exp \left[- \{ (V - V_D \cos \theta)^2 + V_D^2 \sin^2 \theta \} \right] dV$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \exp \left[- V_D^2 \sin^2 \theta \right]$$

$$\times \int_0^\infty V^2 \exp \left[- (V - V_D \cos \theta)^2 \right] dV$$

ここで積分

$$\int_0^{\infty} V^2 \exp\{-(V - V_D \cos \theta)^2\} dV$$

は、 $V - V_D \cos \theta = t$ と置くと

と書け、これは

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} (t + V_D \cos \theta)^2 \exp(-t^2) dt + \int_0^{-V_D \cos \theta} (t + V_D \cos \theta)^2 \exp(-t^2) dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} + V_D \cos \theta + \frac{\sqrt{\pi}}{2} V^2 \cos^2 \theta \\ &\quad - \frac{V_D \cos \theta \exp(-V_D^2 \cos^2 \theta)}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Erf}(V_D \cos \theta) \\ &\quad - V_D \cos \theta \{1 - \exp(-V_D^2 \cos^2 \theta)\} \\ &\quad + V_D^2 \cos^2 \theta \cdot \operatorname{erf}(V_D \cos \theta) \end{aligned}$$

となり、元に戻すと、

$$\begin{aligned} N &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \cdot \sin \theta \cdot \exp(-V^2 \sin^2 \theta) \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} V^2 \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_D \cos \theta}{2} \exp(-V_D^2 \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{2} + V_D^2 \cos^2 \theta\right) \operatorname{erf}(V_D \cos \theta) \right\} \end{aligned}$$

となる。又、ここで

$$V_D \cos \theta = \alpha \text{ とおくと}$$

$$-V_D \sin \theta d\theta = d\alpha$$

$$\alpha_1 = V_D \cos \theta_1$$

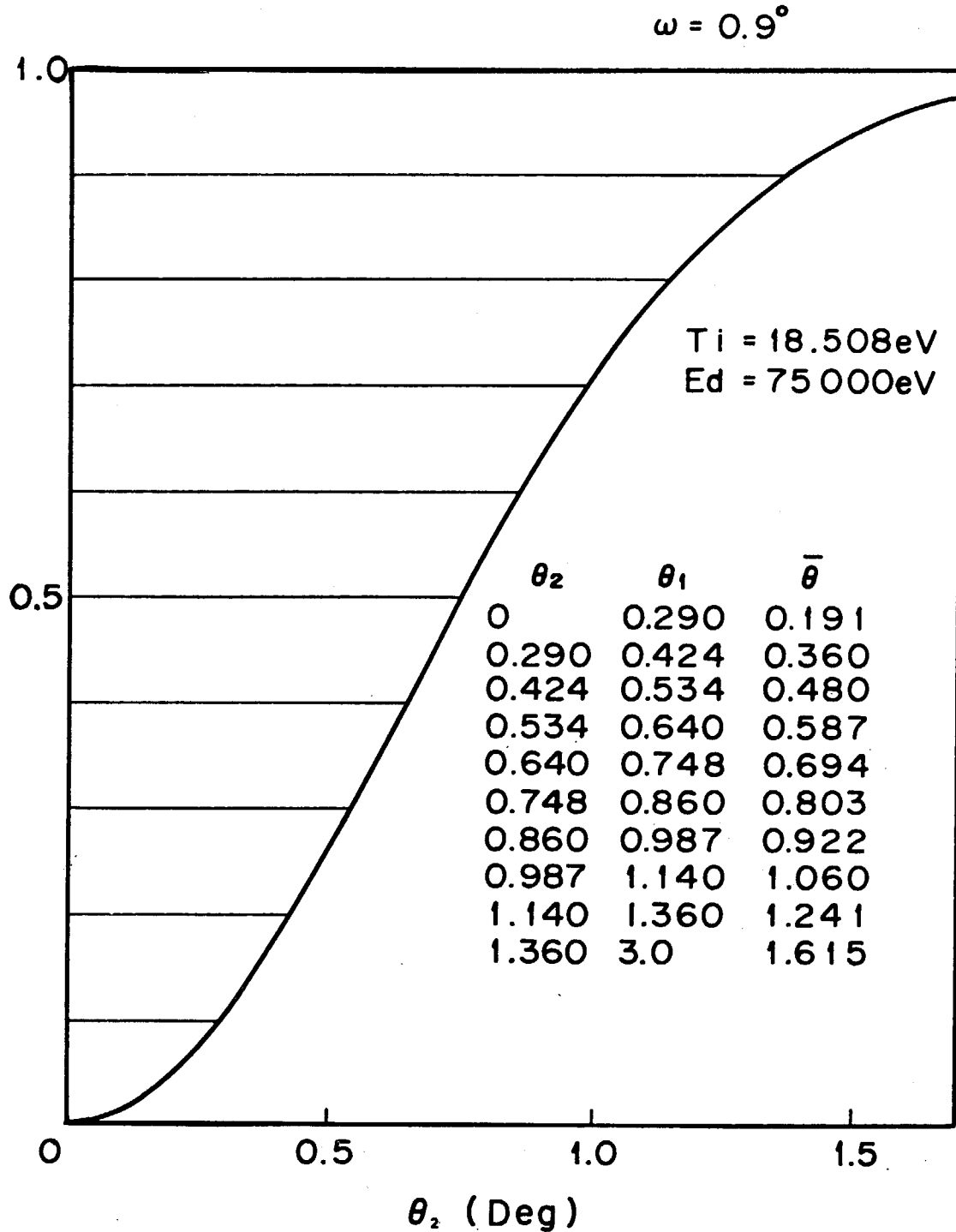
$$\alpha_2 = V_D \cos \theta_2$$

として、

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\frac{d\alpha}{V_D} \exp(-V_D^2 + \alpha^2) \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^2 + \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha^2) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{erf}(\alpha) \right\} \\ &= \frac{\exp(-V_D^2)}{2\sqrt{\pi} V_D} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha \{ \exp(\alpha^2) \cdot (1 + 2\alpha^2) (\sqrt{\pi} + 2 \operatorname{erf}(\alpha) + 2\alpha) \} \end{aligned}$$

付録Iで述べたように、ビームの発散から kT_i を求め、上式に代入してシンプソンの公式を適用して数値積分を行い、 N を求める。

その具体例として、 $\omega = 0.9^\circ$ の時の計算を述べる。 $\theta_1 = 0$ に固定し、 θ_2 を増していった時の N はII.1図の通りとなる。ここで全粒子を10等分する時、 θ_1 と θ_2 は表のようになる。



II.1 図 発散 = 0.9° における θ_2 と粒子数の関係

付録Ⅲ 平均速度 $\langle v_{\parallel} \rangle$, $\langle v_{\perp} \rangle$

速度空間において, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ の領域での $\langle v_{\parallel} \rangle$, $\langle v_{\perp} \rangle$ を求める。

$$\langle v_{\parallel} \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(v, \theta) 2\pi v^2 \sin \theta \cdot v \cos \theta d\theta \cdot dv}{\int_0^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(v, \theta) d\theta dv}$$

右辺の分母は Nn_0 である。したがって

$$\langle v_{\parallel} \rangle = \left(\frac{m_i}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \cdot 2\pi \int_0^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta dv v^3 \sin \theta \cos \theta \times \exp \left\{ -\frac{m_i}{2kT_i} (v \cos \theta - v_D)^2 + v^2 \sin^2 \theta \right\} / N$$

付録Ⅱと同じように

$$\begin{aligned} \frac{\langle v_{\parallel} \rangle}{\sqrt{\frac{2kT_i}{m_i}}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\infty} V^3 \exp \left\{ -\left((V \cos \theta - v_D)^2 + V^2 \sin^2 \theta \right) \right\} / N \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sin \theta \cos \theta \exp \left\{ -v_D^2 \sin^2 \theta \right\} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} V^3 \exp \left\{ -\left(V - v_D \cos \theta \right)^2 \right\} dV / N \end{aligned}$$

ここで, 積分

$$\int_0^{\infty} V^3 \exp \left\{ -\left(V - v_D \cos \theta \right)^2 \right\} dV$$

は $V - v_D \cos \theta = t$ とおき, また $v_D \cos \theta = \alpha$ とかくと

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \alpha^2 \exp(-\alpha^2) + \frac{1}{2} \exp(-\alpha^2) + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \alpha \\ &\quad + \frac{3}{2} \alpha \operatorname{erf}(\alpha) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^3 + \alpha^3 \operatorname{erf}(\alpha) \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\frac{\langle v_{\parallel} \rangle}{\sqrt{\frac{2kT_i}{m_i}}}$$

$$= \frac{\exp(-V_D^2)}{V_D^2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha \left\{ \left(\frac{3}{2} \alpha^2 + \alpha^4 \right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(\alpha) \right) \exp(\alpha^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\alpha + \alpha^3) \right\} / N$$

となる。

同様に

$$\langle v_{\perp} \rangle = \int_0^{\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(v, \theta) 2\pi v^2 \sin \theta \cdot v \sin \theta d\theta dv / N n_0$$

は

$$\frac{\langle v_{\perp} \rangle}{\sqrt{\frac{2kT_i}{m_i}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sin^2 \theta \exp\{-V_D^2 \sin^2 \theta\} \int_0^{\infty} V^3 \exp\{-(V - V_D \cos \theta)^2\} dV$$

となり

$$= \frac{\exp(-V_D^2)}{V_D} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha V_D \left(1 - \frac{\alpha^2}{V_D^2} \right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \alpha + \alpha^3 \right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(\alpha) \right) \exp(\alpha^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + \alpha^2) \right\} / N$$

となる。

以上の計算式にシンプソンの公式を適用して数値積分を行い、

$$\omega = \arctan \frac{\langle v_{\perp} \rangle}{\langle v_{\parallel} \rangle}$$

を求める。