

JAERI-M

9234

トロイダル・ドリフト波

1980年12月

津田 孝・伊藤 公孝・伊藤 早苗*

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

トロイダル・ドリフト波

日本原子力研究所東海研究所核融合研究部

津田 孝・伊藤 公孝・伊藤 早苗*

(1980年11月19日受理)

シェア磁場中の静電ドリフト波に対するトロイダル効果を、強結合近似によってだけではなく変分法をも用いて解析した。また、シェアによる安定化効果が消滅する条件を示した。通常のとカマク・プラズマでは、不安定となる揺動は、径方向とポロイダル方向に同程度の拡がりを持つ。

* 広島大学理論センター

Toroidal Drift Wave

Takashi TSUDA, Kimitaka ITO
and Sanae ITO*

Division of Thermonuclear Fusion Research,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received November 19, 1980)

Toroidal effects on the electrostatic drift wave in a sheared magnetic field are investigated by using not only a strong coupling method but also a variational method. The conditions of wave damping due to the magnetic shear are shown. It is found that, in usual tokamak plasmas, unstable fluctuation have same localization width both in radial and poloidal directions.

Keywords: Toroidal Effect, Drift Wave, Shear Stabilization, Variational Method, Tokamak

* Institute for Fusion Theory, Hiroshima University

目 次

1. 序 論	1
2. 強結合近似	1
3. 変 分 法	5
4. 議論と結論	7
謝 辞	7
参 考 文 献	7

Contents

1. Introduction	1
2. Strong Coupling Approximation	1
3. Variational Method	5
4. Discussion and Conclusion	7
Acknowledgment	7
References	7

1. 序 論

磁場のシェアによる静電的ドリフト波不安定性の安定化に関しては多くの研究がある。Pealstein と Berk¹⁾は有理面近傍から無限遠方に向かって波のエネルギーが伝播する解を見つけた。最近になって、この波の伝播による安定化効果を考慮したシェア磁場中のドリフト波不安定性の詳しい解析が多く行われている^{2)~7)}。

これらの結果から言えることは電流駆動型のドリフト波不安定性^{4), 7)}を除いた多くの無衝突ドリフト波不安定性 (Drift Universal Mode, Temperatur Gradient Mode 等) は、いくら小さな磁気シェアでも安定化されることが示されている。しかし、これらの解析は総て、スラブ模型による計算である。トカマク等の実際のプラズマではトロイダル効果を考慮する必要がある。

無衝突ドリフト波に対するトロイダル効果としては、次の2種の効果が考えられる。i) ポロイダル方向への波の局在化 (バルーニング・モード)、これによりドリフト波の周波数の実部はアスペクト比の逆数 ϵ 程度変化する。この効果は最初 Kadomtsev と Pogutse⁸⁾によって調べられた。ii) Taylor⁹⁾が指摘したように、トロイダル効果によるモード間結合によって波の伝播によるシェア磁場の安定化効果が減少したり消滅する可能性がある。伊藤、津田、井上による論文¹⁰⁾では、直交関数列に展開を用いて、波の伝播が有限に残っている場合の、トカマク配位におけるシェア磁場の安定化効果を調べた。波の伝播がトロイダル効果によって完全に消滅しない場合には、無衝突ドリフト波不安定性 (Drift Universal Mode) は、スラブ模型の場合と同様に、シェア磁場の効果で常に安定化されることが示された。又、電流駆動型不安定性については、トロイダル効果によって不安定となる電流の閾値は低くなる。

この論文では、トロイダル効果によってシェア磁場の静電ドリフト波に対する安定化効果がなくなる条件を調べ、トカマク配位における無衝突ドリフト波不安定性が発生する領域を明らかにする。§ 2では基礎式を導出し、強結合近似の仮定を用いて、トロイダル効果で波の伝播がなくなる条件を示す。変分法によるシェア磁場中のドリフト波の安定性の解析は、Ross と Mahajan²⁾によって行われている。§ 3では、この変分法をトロイダル効果がある場合に拡張し、強結合近似が成立しない場合の解析を行う。

2. 強 結 合 近 似

文献(10)の場合と同様に、低ベータ・高アスペクト比のトカマクを考える。座標系として (r, θ, φ) の擬トロイダル座標系 (図1) を用いる。簡単な為文献(10)得た基礎式で $T_i \rightarrow 0$ の極限をとると、得られる式は、揺動の静電ポテンシャル ϕ を

$$\phi(r, \theta, \varphi, t) = \sum_m \phi_m(r) \exp(-i\omega t + im\theta - in\varphi) \quad (1)$$

で表わすとすると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + \lambda + \sigma(\zeta) + \mu^2 \zeta^2 \right) \phi_m \\ &= \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \frac{d^2}{d\zeta^2} \right) \left(\phi_{m+1} + \phi_{m-1} \right) + \varepsilon_2 \frac{d}{d\zeta} \left(\phi_{m+1} - \phi_{m-1} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

但し

$$\zeta = \frac{r-r_s}{k_y \rho_s}, \quad k_y = \frac{m}{r}, \quad \rho_s^2 = \frac{m_i T_e}{e^2 B^2},$$

$$\lambda = \frac{\omega_*}{\omega} - 1 - k_y^2 \rho_s^2,$$

$$\mu^2 = \frac{\omega_s^2}{\omega^2}, \quad \omega_s = \frac{k_y \rho_s c_s}{L_s} = \frac{L_n}{L_s} \omega_*$$

$$\sigma(\zeta) = \frac{\omega_* - \omega}{\omega} \frac{a \omega}{\zeta} Z\left(\frac{a \omega}{\zeta}\right), \quad \omega_* = \frac{k_y T_e}{e B L_n}$$

$$a = \frac{L_s}{k_y \rho_s c_s} \sqrt{\frac{m_e}{2 m_i}} = \frac{1}{\omega_s} \sqrt{\frac{m_e}{2 m_i}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{L_n}{R} \frac{\omega_*}{\omega},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{k_y \rho_s},$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1$$

$$L_s = R q / s, \quad s = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr}$$

となる。ここで r_s は有理面の位置であり、安全係数が $q(r_s) = m/n$ となる場所である。 ρ_s は電子温度 T_e で測ったイオンのラーマー半径、 ω_* はドリフト周波数、 $k_y = m/r$ は磁場に垂直方向の波数で、 $Z(\xi)$ はプロズマ分散係数であり、 $\sigma(\zeta)$ は共鳴電子の効果を示す。 $L_n = n_e \cdot (dn_e/dr)^{-1}$ は密度変化の特徴的距離である。

$L_s = Rq^2/rq'$ はシェア長である。

(2)式の左辺はスラブ模型でのドリフト波の波動方程式であり²⁾、右辺はドロイダル効果によるモード間結合を示す。もし、モード数 m が充分に高く、モード m とモード $m \pm 1$ におけるドリフト周波数の差が無視できるならば、(2)式は、モード数 m を 1 だけ変えた時、径方向の座標を隣りの有理面までの距離 $l = (nq' \rho_s)^{-1}$ ずらすと同じ式になる。(高モード数近似) 従っ

て、(2)式の解は、

$$\phi_{m \pm 1}(\zeta) = e^{\pm i\beta} \phi_m(\zeta \pm \Delta) \quad (3)$$

の性質をもつ、ここで β は、あるフーリュ・モードと隣りのモードの間の位相のズレを示し、§3で示すように通常は0又は π の値をとる。 $\beta = 0$ は、揺動がトーラスの外側に局在化することを示し、 $\beta = \pi$ では、トーラスの内側に揺動が局在化する。

(2)式の解の性質を、強結合近似を用いて調べる。

議論を簡単にするため、共鳴電子の項 σ は無視する。

$\Delta^2 \partial^2 / \partial \zeta^2 \ll 1$ であれば、 $\phi_{m \pm 1}$ の項はテイラー展開によって

$$\begin{aligned} \phi_{m+1} + \phi_{m-1} &\simeq 2\phi_m + \Delta^2 \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial \zeta^2} \\ \phi_{m+1} - \phi_{m-1} &\simeq -2\Delta \frac{\partial \phi_m}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (4)$$

と表わせるから、(2)式は

$$\begin{aligned} (1 - \Delta^2 \varepsilon_1 + 2\Delta \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) \frac{d^2 \phi_m}{d\zeta^2} \\ + (\lambda - 2\varepsilon_1 + \mu^2 \zeta^2) \phi_m = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

と書ける、但し、(3)式の β の値が π をとる時は $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ の定義の符号をマイナスにする。

(5)式の解は2階微分の係数の符号によって性質が変わる。

$1 - \Delta^2 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \Delta - 2\varepsilon_3 > 0$ の時の解は境界条件として遠方へ波が伝播するという解をとると、最低次の固有関数は

$$\phi_m = \exp\left(-\frac{i\mu^* x^2}{2}\right) \quad (6)$$

但し

$$\mu^* = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \Delta^2 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \Delta - 2\varepsilon_3}}$$

となり、最低次の固有値は

$$\omega = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + k_y^2 \rho_s^2} \omega_* - i \sqrt{1 - \Delta^2 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \Delta - 2\varepsilon_3} \cdot \frac{\omega_s}{1 + k_y^2 \rho_s^2} \quad (7)$$

但し

$$\varepsilon = \frac{L_m}{R}$$

で与えられる。スラブ模型と同様に、ドリフト波はシェア磁場による減衰を受ける。周波数の実部は、トロイダル効果によって 2ε 変化し、減衰率は $(1 - \Delta^2 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \Delta - 2\varepsilon_3)^{1/2}$ の割合で増大あるいは減少する。 $1 - \Delta^2 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \Delta - 2\varepsilon_3 < 0$ の場合には、遠方で解が 0 になるという境界条件のもとに、最低次の固有関数は

$$\phi = \exp\left(\frac{i\mu^* x^2}{2}\right) \quad (8)$$

となり、最低次の固有値は

$$\omega = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + k_y^2 \rho_s^2} \omega_* + \sqrt{\Delta^2 \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 \Delta + 2\varepsilon_3 - 1} \cdot \frac{\omega_s}{1 + k_y^2 \rho_s^2} \quad (9)$$

で与えられ、ドリフト波はシェア磁場による減衰を受けなくなる。図 2 に強結合近似での固有値を示してある。通常のカマクのように $s > 0$ の場合にはトーラスの内側 ($\varepsilon < 0$) に局在化した波に対してシェア磁場による安定化効果が消滅する。しかし、この場合には、周波数の実部がドリフト周波数より高くなってしまふので、電子の共鳴の効果はドリフト波の減衰に寄与する。電流分布がスキン状になったカマクやステラレーターのよう $s < 0$ の場合には、トーラスの外側に局在化した波に対してシェア磁場による安定化効果が消滅し、電子の共鳴によりドリフト波は不安定となる。文献(10)に示した様に、シェア磁場による安定化効果が有限に残る場合には、電子の共鳴効果を考慮しても、ドリフト波は常に安定にとどまる。強結合近似での不安定領域を図 3 に示す。 $1 - \Delta^2 \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \Delta - 2\varepsilon_3 < 0$ という条件を書換えて、不安定性の条件として

$$\begin{aligned} \varepsilon \equiv \frac{L_n}{R} &> \frac{1}{\Delta^2 - 2\Delta/k_y \rho_s - 2} \\ &= \frac{s^2 k_y^2 \rho_s^2}{1 - 2s + 2s^2 k^2 \rho_s^2} > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。ここで $\varepsilon > 0$ はトーラスの外側に局在化した波を示す。これより、長波長の波の方が不安定となりやすいことが判かる。長波長 ($k_y^2 \rho_s^2 \ll 1$) の波に対しては上の条件は

$$s < \frac{1}{2} \quad (11)$$

と書ける。

3. 変分法

問題を変分法で解くために次の2次形式

$$\begin{aligned}
 L = & \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left\{ \frac{\omega_*}{\omega} - 1 - k_y^2 \rho_s^2 + \sigma(\zeta) + \mu^2 \zeta^2 \right\} \phi_m^2 \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \zeta} \right)^2 \\
 & - \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \phi_m \cdot (\phi_{m+1} + \phi_{m-1}) \\
 & + \varepsilon_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \phi_m \cdot \left(\frac{\partial \phi_{m+1}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \phi_{m-1}}{\partial \zeta} \right) \\
 & + \varepsilon_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{\partial \phi_m}{\partial \zeta} \cdot \left(\frac{\partial \phi_{m+1}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi_{m-1}}{\partial \zeta} \right)
 \end{aligned}$$

を考える。L = 0 の拘束条件のもとにLの変分がゼロ、

$$\delta L = 0$$

の ϕ_m を見つけるのと(2)式を解くのは同じことである。試行関数として、

$$\phi_m(\zeta) = e^{-\alpha \zeta^2 / 2} \quad (12)$$

を用いる。この時、境界条件を満たすためには、変分パラメータ α としては

$$\text{Re } \alpha > 0 \quad (13)$$

あるいは

$$\text{Im } \alpha > 0 \quad (14)$$

であることが必要である。(13)式の条件は、解が有理面近傍に局在化する場合を示し、(14)式の条件は、波が遠方へ伝播し、シェア磁場による安定化効果が残る場合を示す。(3)式の高モード数近似を用いるとL = 0は

$$\frac{\omega_*}{\omega} - 1 - k_y^2 \rho_s^2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \frac{1}{2\alpha} - (\omega - \omega_*) a I(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ 2 \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \alpha \left(1 - \frac{\alpha D^2}{2} \right) \right\} \cdot \cos \beta \cdot e^{-\frac{\alpha D^2}{4}} \\
 & + \varepsilon_2 \alpha D \cdot \cos \beta \cdot e^{-\frac{\alpha D^2}{4}}
 \end{aligned} \tag{15}$$

但し,

$$I(\alpha) = 2i(\alpha)^{1/2} \left(-\ell n(a\omega \sqrt{-i\alpha}) - C + \frac{i\pi}{4} - 4\sqrt{i\alpha\omega a} \right)$$

$$C = 0.5772\dots ; \text{オイラー一定数}$$

となる。ここで積分 $\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \sigma(\zeta) \phi_m^2(\zeta)$ より出てくる $I(\alpha)$ の項の計算は Ross と Mahajan の結果²⁾を用いた。(15)式より直ちに L を極値化する β の値は 0 又は π であることがわかる。前章と同様に $\beta = \pi$ の時は $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ の符号をマイナスとして定義することにする。簡単のために $\sigma(\zeta)$ の項を無視すると α による極値をとる条件 $\partial L / \partial \alpha = 0$ は

$$\begin{aligned}
 & \alpha^2 + \frac{\omega_s^2}{\omega^2} - 2\varepsilon \frac{\omega_*}{\omega} \alpha^2 \left\{ 1 - \frac{D}{k_y \rho_s} \left(1 - \frac{\alpha D^2}{4} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{5}{4} \alpha D^2 + \frac{D^2}{2} + \frac{\alpha^2 D^4}{8} \right\} e^{-\alpha D^2/4} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

となる。上の解のうち、我々に興味があるのは局在解 ($\text{Re } \alpha > 0$) である。局在解は次の2種に分けることができる。

- i) 強結合解 $\alpha D^2 \ll 1$
- ii) 高度局在解 $\alpha D^2 \sim 1$

i)の強結合解は前章で述べた強結合近似で得られた局在解と同じで

$$\alpha^2 \approx - \frac{\varepsilon^2 s^2}{1 - 2\varepsilon(1 - D/k_y \rho_s + D^2/2)} \tag{17}$$

で与えられる。ii)の高度局在解は、径方向に有理面間の距離程度、局在化したモードであり、 ε と s が大きい領域で存在する。数値的に $L = 0$ と $\delta L = 0$ を解いて求めた ε と固有値の関係を図4～図5に示す。図4は電子の応答をボルツマン ($\sigma = 0$) とした強結合解の例である。図5では同じ解に共鳴電子の項を入れた例である。シェア磁場による波の減衰が消えた領域で、共鳴電子の効果でドリフト波が不安定化されるのがわかる。図6に $\sigma = 0$ の場合の高度局在解の例を示す。この解は、波の伝播によるシェア磁場の安定化効果が消滅しているとともに、周波数の実部が低くなる為、共鳴電子の効果で強く不安定化される。

図6に $k_y \rho_s = 0.2$ のドリフト波に対してシェアの安定化効果が消滅する領域を示す。領域

I及びIIIは強結合近似が成立する領域で、領域IIIは高度局在解である。ドリフト波は領域I及びIIで不安定となる。他の領域では、波の伝播によるシェアの安定化効果は有限に残り、ドリフト波は安定化される¹⁰⁾。

4. 議論と結論

マイクロ波や炭酸ガス・レーザーによる散乱測定によって、トカマク・プラズマ中での密度の揺動が測定されている^{11), 12)}。これらの測定結果は従来のスラブ模型理論から予想されるのと大きく異なっている点がある。まず、理論では径方向とポロイダル方向の波数の比は

$$k_r / k_\theta \sim \left(\frac{L_n}{L_s} \right)^{1/2} \ll 1$$

でなければならないが、測定では $k_r / k_\theta \sim 1$ である。また、測定では揺動は、トーラスの外側で大きく（バルーニング）なっている。さらに、スラブ理論によれば、ドリフト波は、トカマクのシェア・パラメーターで十分に、安定化されてしまう。これらの、ドリフト波の線形理論と揺動測定との不一致は、トロイダル効果を考慮することによって一掃される。すなわち、通常のトカマク（ $rq'/q \sim 1$ ）では、径方向の特徴的局在距離と同程度の波が不安定となる。従って $k_r / k_\theta \sim 1$ となる。又、不安定性の固有関数は、トーラスの外側に局在化する。

強結合近似での局在解の存在はConnor, Hastie¹³⁾やTang¹⁴⁾, Horton等¹⁵⁾によって示されている。この場合には、不安定となる揺動の径方向への拡がりやポロイダル方向の波長に比べてずっと小さくなる。即ち、 $k_r / k_\theta \ll 1$ 。この様な解は、ステラレーターや電流分布が平坦あるいはスキン状になっているトカマク（ $rq'/q < 1/2$ ）で実現される。

今後の問題点としては、試行関数の基底の数を増やすことにより、固有関数の精度をあげるとともに、電子温度の勾配、捕捉粒子の効果等を考慮にいれ、不安定なパラメーター領域を確定する必要がある。

謝 辞

終始、有意義な議論をしていただいた、竹田辰興室長を始めとする理論解析研究室の皆様に感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) L.D.Pearlstein and H.L.Berk, Phys.Rev.Letters 23 (1969) 220.
- (2) D.W.Ross and S.M.Mahajan, Phys.Rev.Letters 40 (1978) 324.

- (3) K.T.Tsang, P.J.Catto, J.C. Whitson and J.Smith, Phys.Rev.Letters 40 (1978) 327.
- (4) S.Inoue, K.Itoh and S.Yoshikawa, Nuclear Fusion 18 (1978) 755.
- (5) T.M.Antonsen, Jr., Phys.Rev.Letters 41 (1978) 33.
- (6) L.Chen, P.N.Guzdar, R.B.White, P.K.Kaw and C.Oberman, Phys.Rev.Letters. 41 (1978) 649.
- (7) D.W.Ross and S.M.Mahajan, Phys.Fluids 22 (1979) 294.
- (8) B.B.Kadomtsev and O.P.Pogutse, Soviet Physics - JETP 31 (1970) 898.
- (9) J.B.Taylor, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1977), Vol. 2, P.323.
- (10) K.Itoh, T.Tuda and S.Inoue, J.Phys.Soc.Japan 48 (1980) 258.
- (11) E.Mazzucato, Phys.Rev.Letters 36 (1976) 792.
- (12) C.M.Surko and R.E.Slusher, Phys.Rev.Letters 37 (1976) 1747.
- (13) J.G.Cordey and R.J.Hastie, Nuclear Fusion 17 (1977) 523.
- (14) W.M.Tang, Nuclear Fusion 18 (1978) 1089.
- (15) W.Horton, Jr., R.Estes, H.Kwak, and Duk-In Choi, Phys.Fluid 21 (1978) 1366.

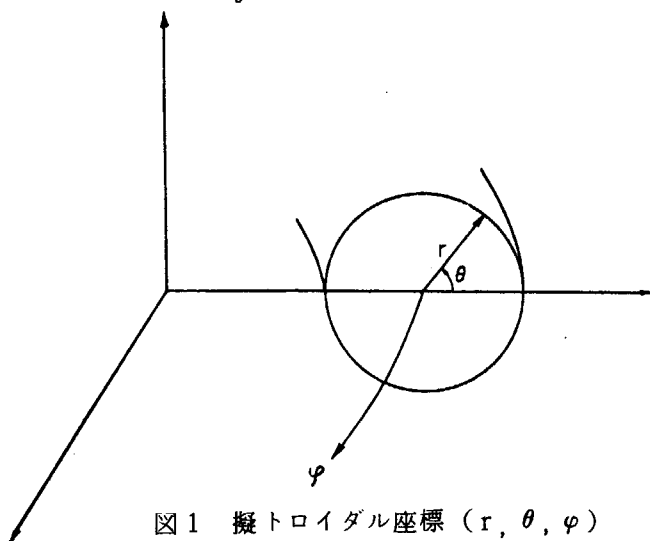


図1 擬トロイダル座標 (r, θ, φ)

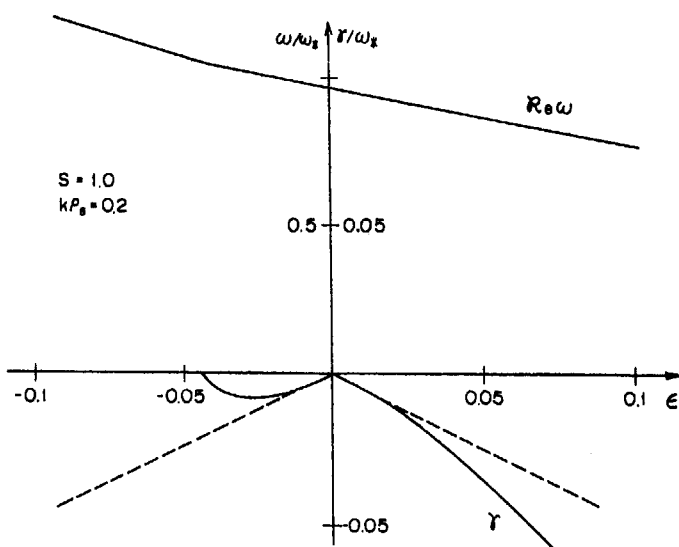


図2-a 強結合近似による固有値。電子はボルツマン応答。 $s = 1.0$, $q = 2.0$, $kp_s = 0.2$ 。
 $\epsilon > 0$ はトーラスの外側, $\epsilon < 0$ はトーラスの内側の局在化した波を示す。
 但し, $\epsilon \equiv L_r/R$, $s = rq'/q_0$ 。破線はスラブ模型による減衰率を示す。

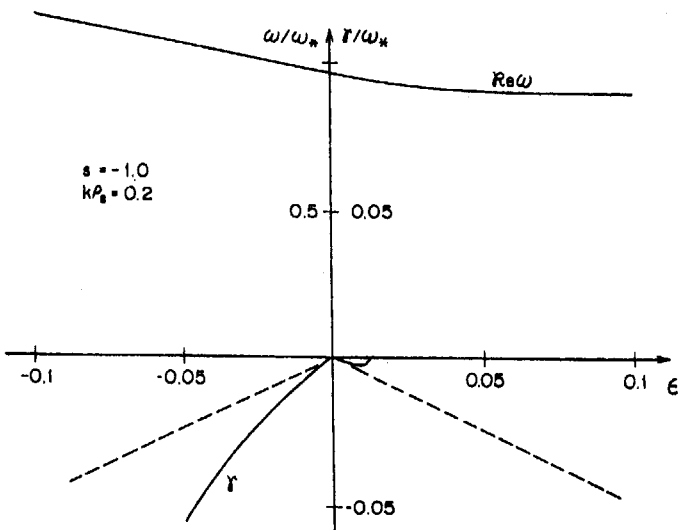


図2-b $s = -1.0$ 。他は2-aと同じ

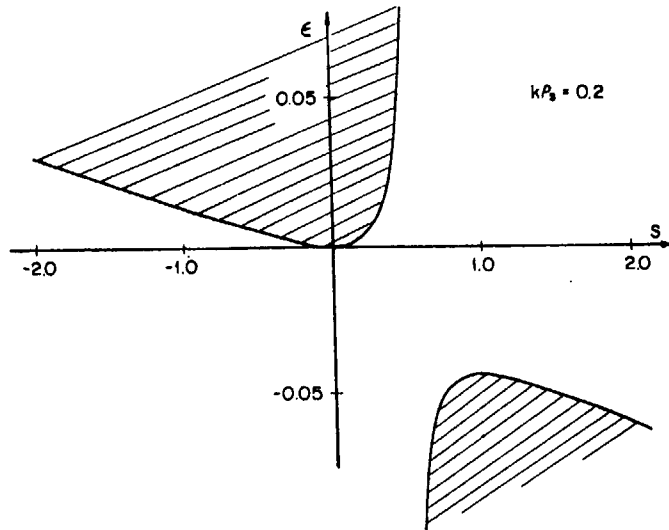


図3-a 強結合近似による，ドリフト波に対するシェア安定化効果が消滅する領域。 $k\rho_s = 0.2$, $q = 2.0$ 。

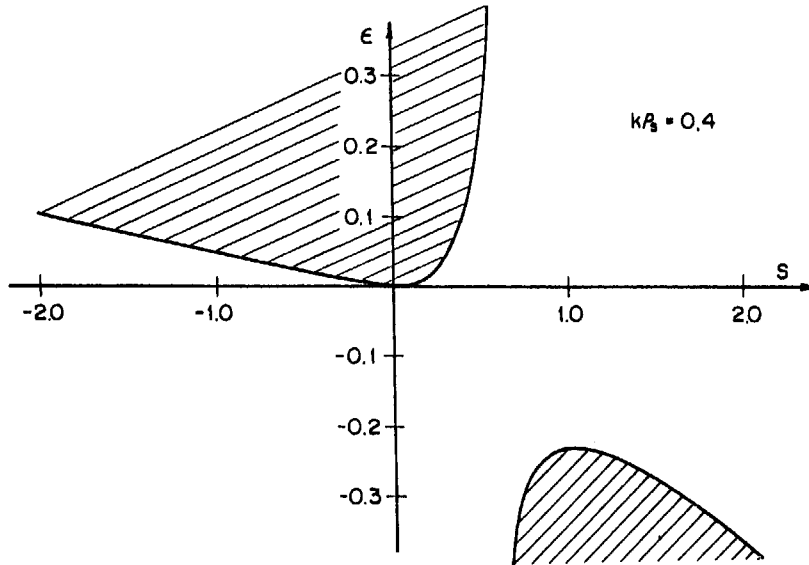


図3-b $k\rho_s = 0.4$ 。他は3-aと同じ。

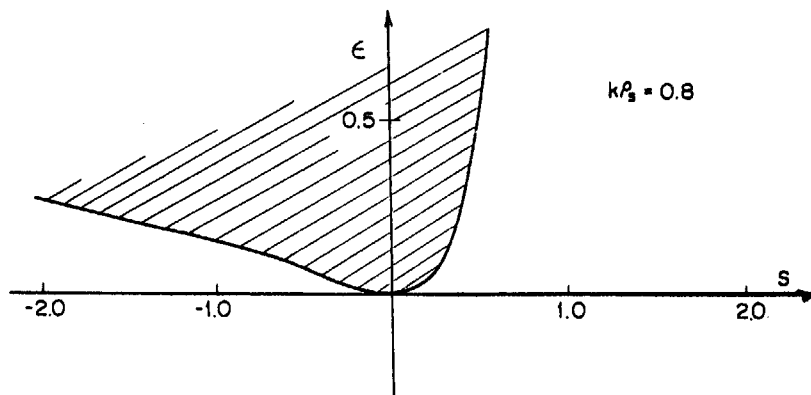


図3-c $k\rho_s = 0.8$ 。他は3-aと同じ。

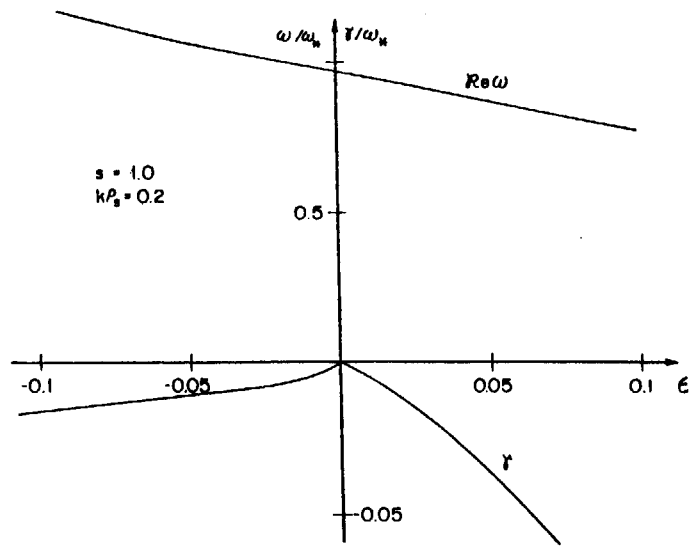


図 4 - a 変分法による強結合解の固有値。電子はボルツマン
 応答。 $s = 1.0$, $q = 2.0$, $k\rho_s = 0.2$ 。

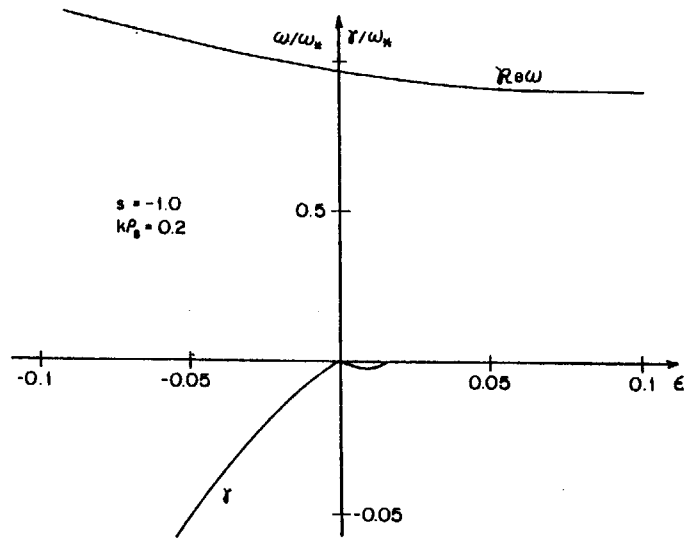


図 4 - b $s = -1.0$ 。他は 4 - a と同じ。

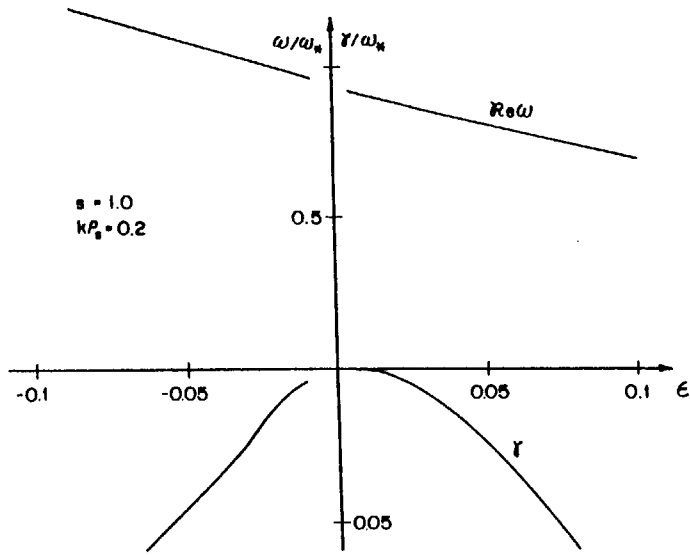


図5-a 変分法による強結合解 (Drift Universal Mode) の固有値。 $m_i/m_e = 3600.0$, $s = 1.0$, $q = 2.0$, $k\rho_s = 0.2$ 。

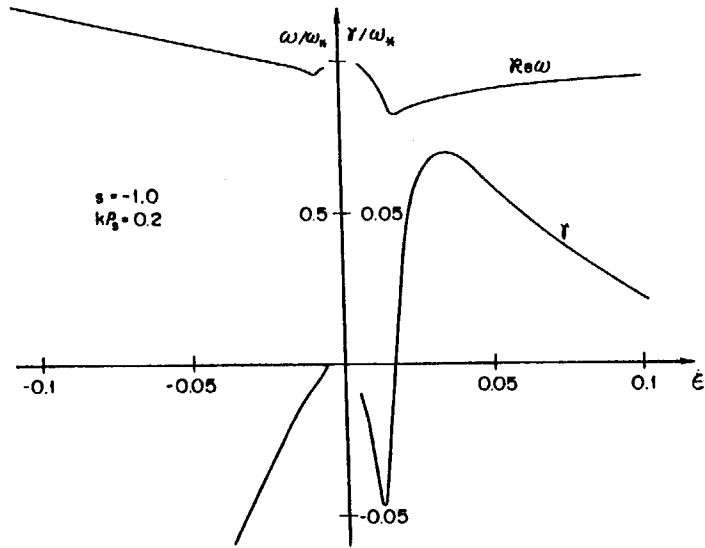


図5-b $s = -1.0$ 。他は5-aと同じ。

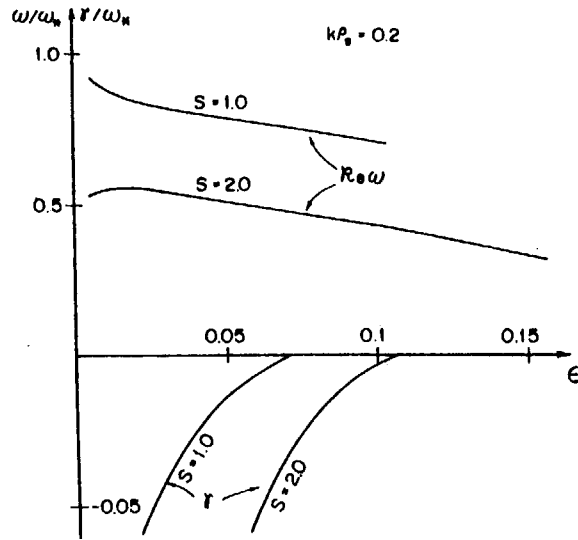


図6 変分法による高度局在解。電子はボルツマン応答。
 $k\rho_s = 0.2, q = 2.0$ 。

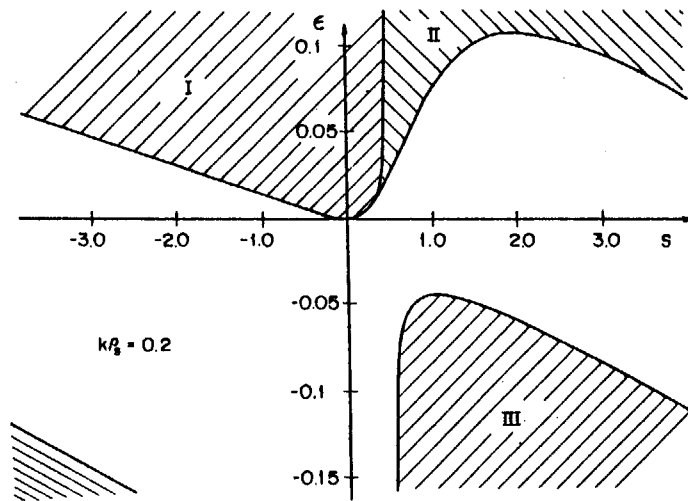


図7 ドリフト波に対するシェア磁場の安定化がトロイダル効果によって消滅する領域。
 $k\rho_s = 0.2, q = 2.0$ 。領域 I 及び II で無衝突ドリフト波 (Drift Universal Mode) が不安定。