

JAERI-M

9 2 5 1

FEMAXI-III - 軸対称有限要素法
による燃料ふるまいコード

1981年1月

中島 鉄雄・市川 達生・岩野 義彦^{*1}・伊東 賢一^{*1}
齊藤 裕明^{*2}・鹿島 光一^{*3}・木下 幹康^{*3}・大久保忠恒^{*4}

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

FEMAXI - III
軸対称有限要素法による燃料ふるまいコード

日本原子力研究所東海研究所安全工学部
中島鉄雄・市川達生・岩野義彦^{*1}・伊東賢一^{*1}
斎藤裕明^{*2}・鹿島光一^{*3}・木下幹康^{*3}・大久保忠恒^{*4}

(1980年12月3日受理)

軽水炉燃料の PCI 破損に密接に関連する局所的変形挙動を詳細に解析するため、有限要素法コード FEMAXI - III を開発した。

本コードの主な特徴は下記の通りである。

- 熱伝導、核分裂ガス放出、熱変形、弾塑性、クリープ、ペレットの割れ、リロケーション、スウェーリングなどの燃料棒の熱的／力学的プロセスおよびそれらの重量効果が考慮されている。
- ペレットと被覆管の間における摩擦や固着の条件に応じて繰り返し計算を行うことにより、力学的相互作用（接触問題）が精度良く取扱われる。
- クリープ計算には陰解法が導入され、高クリープ速度域の数値解の安定性を向上させた。また、四角形8節点アイソパラメトリック要素の採用により、有限要素解の近似性を高めた。
- ペレットは塑性材料と仮定した。また、圧縮応力場でのペレットの剛性はリロケーションに依存して変化すると考えた。

* 1 日本核燃料開発株式会社

* 2 センチュリリサーチセンタ株式会社

* 3 電力中央研究所

* 4 上智大学

FEMAXI-III - An Axisymmetric Finite Element Fuel Behaviour Code

Tetsuo NAKAJIMA, Michio ICHIKAWA, Yoshihiko IWANO^{*1},
Kenichi ITO^{*1}, Hiroaki SAITO^{*2}, Koichi KASHIMA^{*3},
Motoyasu KINOSHITA^{*3} and Tadatsune OKUBO^{*4}

Division of Reactor Safety, Tokai Research Establishment, JAERI

(Received December 3, 1980)

An axisymmetric finite element code, FEMAXI-III, has been developed for the detailed analysis of localized deformation of fuel rods, which is closely related to PCI failures in LWR.

The major feature of the code are as follows.

- Thermal/mechanical processes of fuel rod such as heat conduction, fission gas release, thermal expansion, elasto-plasticity, pellet cracking, densification, swelling and their interrelated effects are considered.
- Mechanical interaction (Contact problem) between pellet and cladding is more exactly treated, in which sliding or sticking is determined by iterative procedures.
- An implicit algorithm is applied to improve numerical stability at high creep rate range. Quadratic isoparametric elements are used to obtain a more accurate finite element solution.
- Pellet is assumed as a non-tension material. The change of pellet stiffness under compression is considered to be depending on its initial relocation.

Keywords : Deformation, PCI, LWR, FEMAXI, Code, Fuel Rods,
Finite Element Method

*1 Nippon Nuclear Fuel Development Co.,Ltd.,

*2 Century Research Center Co.,Ltd.,

*3 Central Research Institute of Electric Power Industries

*4 Sophia University

目 次

1. 緒 言	1
2. コード概要	2
2.1 構 成	2
2.2 主な特徴	3
3. 理論とモデル	6
3.1 熱的ふるまい	6
3.2 力学的ふるまい	15
3.3 物 性 値	50
4. 今後の課題	60
5. 結 言	61
謝 辞	61
参考文献	62

CONTENTS

1. Introduction	1
2. Description of the code	2
2.1 Outline	2
2.2 Main features	3
3. Theory and model	6
3.1 Thermal behavior	6
3.2 Mechanical behavior	15
3.3 Material properties	50
4. Future aspects	60
5. Conclusion	61
Acknowledgment	61
References	62

1. 緒 言

近来、軽水炉燃料の破損率は極めて低く全く問題となっていないが、ペレット・被覆管相互作用（PCI）による破損を避けるために炉の運転にはある制限が課せられている。この制限を緩和、さらには撤廃するため、また将来の負荷追従運転に対する燃料健全性を確認しておくために、PCI ふるまいの研究はさらにおすすめる必要があるといわれている。

出力急昇時の PCI 破損は、燃料設計・製造パラメータ、出力履歴や出力急昇条件などの主要パラメータによって経験的にある程度の予測がつくようになってきた。しかし将来のデータベースを越えた場合の予測を行うためには、基本的な PCI メカニズムに基づく計算コードを開発しなければならない。PCI 破損のメカニズムは応力腐食割れ（SCC）と考えられており、基本的なパラメータは被覆管の応力、ひずみおよび被覆管内面の腐食性 FP（主としてヨウ素）である。したがって出力急昇時や負荷追従運転時におけるこれらの量の適正な評価が破損クライテリアを設定するため必要となる。

経験によれば PCI 破損のクラックは被覆管のリッジ変形部に発生する例が多く、局所的な応力、ひずみの評価が重要であり、構造解析の手法としては有限要素法（FEM）がもっとも適している。

燃料問題への FEM の適用は 1970 年代初めより行なわれており、Visser⁽¹⁾ は 1970 年に軸対称モデルにより、ペレット・被覆管の接触問題を単純化して取扱う熱弾性クリープコードを開発した。Swanson ら⁽²⁾ は汎用の ANSYS コードを燃料変形解析に適用したがペレットのふるまいについて十分な考慮が払われなかった。Keegstra ら⁽³⁾ は塑性変形と摩擦による接触を考慮した計算コードを開発した。Levy ら⁽⁴⁾ はペレットクラックを考慮するため 3 次元の FEM モデルを用いたが、計算コードが大規模となるため塑性ふるまいや境界条件は単純化しなければならなかつた。

Racid ら^{(5), (6)} は、弾塑性、クリープ、ペレットクラック、ホットプレス、接触問題などを考慮した本格化な 2 次元 FEM 燃料ふるまいコードを開発した。しかしコードが大規模で計算時間が多大となる問題点を含んでいたようである。

三島ら⁽⁷⁾ はペレットのクラックパターンの解析に平面モデルを適用した。また、Vons⁽⁸⁾ らは MARC - CDC 汎用コード（軸対称モデル）をハルデンにおける炉内直徑測定データの解析に使用した。AECLにおいても^{(9), (10)} FEM による燃料ふるまいコードが開発された。

国内の研究機関においても FEM による燃料ふるまいコードの開発が進められてきた。筆者の 1 人、市川⁽¹¹⁾ はハルデンプロジェクトにおいて、山田⁽¹²⁾ の開発した増分理論に基づく弾塑性 FEM コードに接触モデルなどの燃料ふるまいモデルを付加し、ハルデン炉内直徑測定データの解析に適用した。このコード（FEMAXI）はその後、木下、市川⁽¹³⁾ によりクリープ計算モデルが改良された。ほぼ同時時期に日立、東芝においても、他の筆者ら伊東⁽¹⁴⁾ や岩野⁽¹⁵⁾ が FEM 燃料ふるまいコード FEAST, MIPAC をそれぞれ開発した。

1978 年 IAEA・IWGFR RT 主催燃料モデリング専門家会議（英國、Blackpool）や拡大ハ

ルデン計画会議シンポジウム（ノルウェー， Lillestrom）においてこれら日本で開発された3つのコード（FEMAXI, FEAST, MIPAC）やこれらの解析例が発表された。それを機会に、これら3つのコードの開発経験をもとに、それぞれの長所を生かしつつ新しいアイデアを盛り込んだコードを協力して開発しようとする気運が高まった。

ハルデン HB WR における炉内直徑測定リグの共同研究契約（原研-日立／東芝）を軸として、上智大の大久保と電中研の鹿島の参加により、1978年夏ごろから新コード FEMAXI-III の基本となる数学的モデルやふるまいモデルの選択に関する検討が始められた。その後約1年半の間に FEMAXI-III はほぼその形を整え、ハルデン計画やインターランプ計画などのデータにより検証を重ね、これらの成果を 1980 年 3 月、 IAEA・IWGFPPT 主催燃料モデリング専門家会議（英国、 Blackpool）^{[16][17]} や同年 6 月、拡大ハルデン計画会議シンポジウム（ノルウェー、 Lillehammer）^{[18][19]} で発表した。

本コード FEMAXI-III は上記ハルデン計画会議において NRC の FRAPCON-2 と共にプロジェクト実験結果解析コードとして採用されることが承認された。

本報告は FEMAXI-III コードの基本となる理論構造およびモデルを記述したものである。

2. コード概要

2.1 構成

本コードは通常時における水炉燃料棒のふるまいを決定論的（deterministic）に解析するコードであり、とくに出力上昇時の PCI ふるまいの評価を目的としている。

コードは、Fig. 2.1 にその構成の概略を示すように、温度分布や FP ガス放出などの熱的ふるまいを解析する部分と、リッジ変形に伴う局所応力、ひずみなど力学的ふるまいを解析する部分の 2 つから構成される。これらの概要は以下に示す通りである。

2.1.1 热的ふるまい部

ここでは径方向 1 次元軸対称問題としてペレット・被覆管間のギャップ幅変化、 FP ガス放出およびこれらのギャップ熱伝達へのフィードバックを考慮して、温度分布やガス圧力を解析する。このとき、軸方向出力分布（FP 生成および放出分布）を考慮するために燃料棒は軸方向に最大 10 領域に分割され、熱的フィードバックが燃料棒全長にわたって収束するまで繰返し計算が行われる。

2.1.2 力学的ふるまい部

ここでは軸対称 FEM (R-Z) を燃料棒の 1 部 (1/2 ペレット長相当部) に適用してペレットと被覆管の力学的相互作用を解析する。まず、熱膨張、やきしまりスウェーリングおよびリロケーションによる初期ひずみを計算し、ペレットの割れ、弾塑性およびクリープを考慮して剛性マトリクスを作成し、接触モードに対応する境界条件を仮定して剛性方程式を解き、応力やひずみ

ルデン計画会議シンポジウム（ノルウェー， Lillestrom）においてこれら日本で開発された3つのコード（FEMAXI, FEAST, MIPAC）やこれらの解析例が発表された。それを機会に、これら3つのコードの開発経験をもとに、それぞれの長所を生かしつつ新しいアイデアを取り込んだコードを協力して開発しようとする気運が高まった。

ハルデン HB WR における炉内直徑測定リグの共同研究契約（原研-日立／東芝）を軸として、上智大の大久保と電中研の鹿島の参加により、1978年夏ごろから新コード FEMAXI-III の基本となる数学的モデルやふるまいモデルの選択に関する検討が始められた。その後約1年半の間に FEMAXI-III はほぼその形を整え、ハルデン計画やインターランプ計画などのデータにより検証を重ね、これらの成果を 1980 年 3 月、 IAEA・IWGFPPT 主催燃料モデリング専門家会議（英国、 Blackpool）^{[16][17]} や同年 6 月、拡大ハルデン計画会議シンポジウム（ノルウェー、 Lillehammer）^{[18][19]} で発表した。

本コード FEMAXI-III は上記ハルデン計画会議において NRC の FRAPCON-2 と共にプロジェクト実験結果解析コードとして採用されることが承認された。

本報告は FEMAXI-III コードの基本となる理論構造およびモデルを記述したものである。

2. コード概要

2.1 構成

本コードは通常時における水炉燃料棒のふるまいを決定論的（deterministic）に解析するコードであり、とくに出力上昇時の PCI ふるまいの評価を目的としている。

コードは、Fig. 2.1 にその構成の概略を示すように、温度分布や FP ガス放出などの熱的ふるまいを解析する部分と、リッジ変形に伴う局所応力、ひずみなど力学的ふるまいを解析する部分の 2 つから構成される。これらの概要は以下に示す通りである。

2.1.1 热的ふるまい部

ここでは径方向 1 次元軸対称問題としてペレット・被覆管間のギャップ幅変化、 FP ガス放出およびこれらのギャップ熱伝達へのフィードバックを考慮して、温度分布やガス圧力を解析する。このとき、軸方向出力分布（FP 生成および放出分布）を考慮するために燃料棒は軸方向に最大 10 領域に分割され、熱的フィードバックが燃料棒全長にわたって収束するまで繰返し計算が行われる。

2.1.2 力学的ふるまい部

ここでは軸対称 FEM (R-Z) を燃料棒の 1 部 (1/2 ペレット長相当部) に適用してペレットと被覆管の力学的相互作用を解析する。まず、熱膨張、やきしまりスウェーリングおよびリロケーションによる初期ひずみを計算し、ペレットの割れ、弾塑性およびクリープを考慮して剛性マトリクスを作成し、接触モードに対応する境界条件を仮定して剛性方程式を解き、応力やひずみ

みを計算する。ここでは塑性、クリープおよび割れペレットの弾性が未知量である応力ひずみの関数であることを考慮して剛性マトリクスに関する繰返し計算が行われる。また接触モード（固着あるいはすべり）を決定するために、境界条件に関して仮定／判定の繰返し計算が行われる。非接触～接触あるいは弹性～塑性の状態変化のときには、計算変化状態変化時刻に内挿し、その時刻以後について状態を改ためて計算を行うようにしている。

2.2 主な特徴

本コードで考慮される現象を Table 2.1 に示す。物性値は公開されているできるだけ標準的なものを用いるようにした。

本コードの主な特徴（従来コードより進歩した主な点）は下記の通りである。

(1) 要素特性

FEM 解析に四角形 8 節点アイソパラメトリック要素を導入し、計算精度を改善した。

(2) クリープ解法

クリープ計算に陰解法（implicit method）を導入し、高クリープ速度時における数値解の安定性を向上させた。

(3) Skyline 法

連立方程式（剛性方程式）の解法として Skyline 法を採用し、マトリクス非零成分の記憶方式および処理手順を改良し、記憶容量のコンパクト化および計算時間の短縮を図った。

(4) 非平衡残差

非線形問題を解く場合タイムステップ毎に非平衡残差があるので、平衡条件式を増分形で表わさず、荷重と応力の全体の釣合が満足される定式化を行って非平衡残差の累積を避けた。

(5) 接触問題

接触し合う面上に節点の対を考え、接触モード（固着またはすべり）を対応する境界条件に関して仮定／判定の繰返し計算で決定するようにして、接触問題をより厳密に取扱うようにした。

(6) 割れペレットのふるまい

ペレットの割れは従来コードと同様に剛性低下の方法で近似的に取扱うが、割れてリロケーションしたペレットの PCI 下におけるふるまいをより良く記述するために、圧縮状態下における剛性の回復をリロケーション量の関数として表わすようにした。

以上の改良により、従来コードに比較して、計算のスピードアップと燃料ふるまい予測の精度の向上が達成された。特に、コードの高速化によって長期に亘る照射履歴の追跡が可能となったことは、従来の FEM コードが多大の計算時間を要したため照射履歴の 1 部（出力急昇時）に対してしか適用されなかつたことを考えると、格段の進歩である。

Table 2.1 Thermal and Mechanical Processes Considered in FEMAXI-III

	Thermal Process	Mechanical Process
Pellet	<ul style="list-style-type: none"> - Thermal Conduction (Radial Flux Depression) - Thermal Expansion - Initial Relocation - Densification - Swelling (Solid FP) - Fission Gas Release 	<ul style="list-style-type: none"> - Thermal Expansion - Elasticity - Plasticity - Creep - Cracking - Initial Relocation - Densification - Swelling (Solid FP, Gas Bubble) - Hot Pressing
Cladding	<ul style="list-style-type: none"> - Thermal Conduction - Thermal Expansion - Elasticity 	<ul style="list-style-type: none"> - Thermal Expansion - Elasticity - Plasticity - Creep
Fuel Rod	<ul style="list-style-type: none"> - Gap Heat Transfer (Mixed Gas, Contact, and Radiation) - Surface Heat Transfer - Rod Gas Pressure 	<ul style="list-style-type: none"> - Mechanical Interaction (Friction)

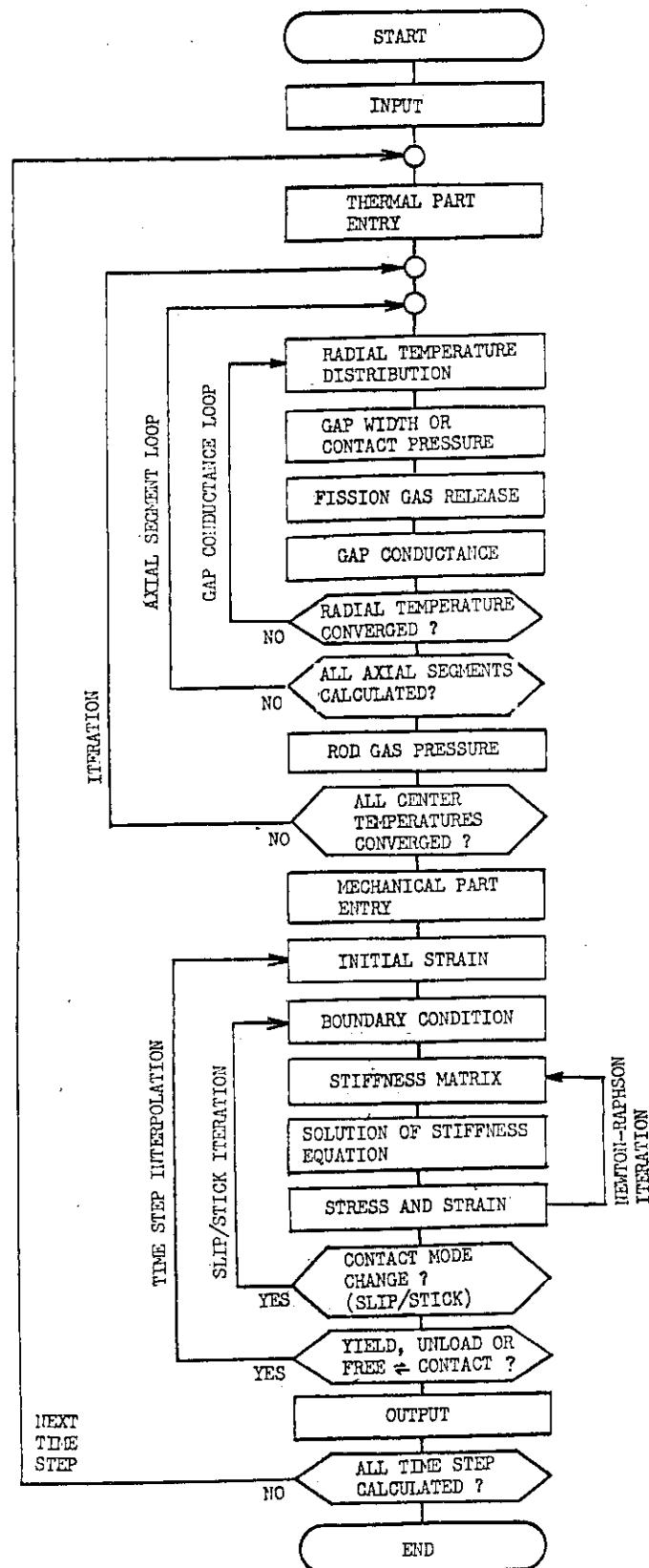


Fig. 2.1 FEMAXI-III Calculational Flowchart

3. 理論とモデル

ここでは、FEMAXI-IIIで使用した理論およびモデルにつき説明する。3.1節および3.2節にそれぞれ、熱的ふるまいおよび力学的ふるまい解析の理論とモデルを示す。また、3.3節には使用した物性値を示す。

3.1 热的ふるまい

3.1.1 温度分布

(1) 被覆管温度

被覆管外面温度は次式で計算される。

$$T_{co} = T_w + \frac{q_{co}}{h_f} \quad (3.1.1)$$

ここで、 T_{co} = 被覆管外面温度 (K)

T_w = 冷却水温度 (K)

q_{co} = 被覆管外面熱流束 (W/cm^2)

h_f = フィルム熱伝達率 ($\text{W}/\text{cm}^2 \cdot \text{K}$)

h_f は Jens - Lottes の式⁽¹⁸⁾で次のように表わされる。

$$h_f = 0.1263 \exp \left(\frac{P_w}{6.201 \times 10^6} \right) \cdot q_{co}^{0.75} \quad (3.1.2)$$

ここで、 P_w = 冷却水圧力 (Pa)

(3.1.1) および (3.1.2) 式における q_{co} は、

$$q_{co} = \frac{P_{LHR}}{2\pi r_{co}} \quad (3.1.3)$$

ここで、 P_{LHR} = 線出力 (W/cm)

π = 円周率

r_{co} = 被覆管外半径

被覆管内温度分布は、下記の積分方程式で表わされる。

$$\int_{T_{co}}^T \lambda_c dT = \frac{P_{LHR}}{2\pi} \ell_n \left(\frac{r_{co}}{r} \right) \quad (3.1.4)$$

ここで、
 λ_c = 被覆管熱伝導度 (W/cm・K)
 r = 被覆管径方向位置 (cm)
 T = 位置 r における温度 (K)

(2) ペレット温度

ペレット外面温度は次式で表わされる。

$$T_{po} = T_{ci} + \frac{q_{po}}{h_{gap}} \quad (3.1.5)$$

ここで、
 T_{po} = ペレット外面温度 (K)
 T_{ci} = (3.1.4) 式で求まる被覆管内面温度 (K)
 h_{gap} = ギャップ熱伝達率 (W/cm²・K)
 q_{po} = ペレット外面熱流束 (W/cm²)
 $= P_{LHR} / 2\pi r_{po}$
 r_{po} = ペレット外半径 (cm)

h_{gap} の表式については次節で述べる。

ペレット内温度分布は次式で表わされる。

$$\int_{T_{po}}^T \lambda_p dT = \int_r^{r_{po}} \frac{1}{r} \left[\int_{r_{pi}}^r r \cdot q \cdot dr \right] dr \quad (3.1.6)$$

ここで、
 λ_p = ペレット熱伝導度 (W/cm・K)
 r = ペレット内径方向位置 (cm)
 T = 位置 r における温度 (K)
 r_{pi} = ペレット中心孔半径 (cm)
 q = 位置 r における発熱密度 (W/cm³)

(3.1.6) 式を位置について規格化し、発熱密度 q が位置の関数であることを明記して $q(r)$ と書くと、

$$\int_{T_{po}}^T \lambda_p dT = \int_r^1 \frac{1}{r} \left[\int_h^r r \cdot q(r) \cdot dr \right] dr \quad (3.1.7)$$

ここで、
 r = ペレット規格化位置
 h = ペレット中心孔規格化半径

(3.1.7) 式における発熱密度分布 $q(r)$ は次式で表わされる。

$$q(r) = \frac{P_{LHR}}{\pi(1-h^2)} \cdot \varphi(r) \quad (3.1.8)$$

ここで、 $\varphi(r)$ は発熱密度分布関数で次式で表わす。

$$\varphi(r) = \frac{(b+2)(1-h^2)[(1-a)r^b + (a-h^b)]}{b(1-h^2)(a-h^b) + 2(1-h^b)(1-ah^2)} \quad (3.1.9)$$

(3.1.7) 式に (3.1.8) 式を代入し、(3.1.7) 式の右辺を積分すると次式が得られる。

$$\int_{T_{po}}^T \lambda_p dT = \frac{P_{LHR}}{4\pi} \cdot F(r) \quad (3.1.10)$$

ただし、

$$F(r) = \left\{ \frac{4(1-a)(1-r^{b+2})}{b+2} + (b+2)(a-h^b)(1-r^2) + \right. \\ \left. 2[2(1-a)h^{b+2} + (a-h^b)(b+2)h^2] \ln r \right\} \\ / [(b(1-h^2)(a-h^b) + 2(1-h^b)(1-ah^2)] \quad (3.1.11)$$

ここで、 a = ペレット内面对外発熱密度比

b = 発熱密度関数における形状指数

(3.1.9) 式の発熱密度分布を定める 2 つの形状パラメータ a および b は、ハルデン炉の場合、次のように求められる。

Robertson⁽¹⁹⁾ は発熱分布に関し次の表式を与えていた。

$$\varphi(R) = I_0(k \cdot R) + \frac{I_1(k \cdot R_I)}{K_1(k \cdot R_I)} \cdot K_0(k \cdot R) \quad (3.1.12)$$

ここで、 I = 第 1 種変形ベッセル関数

K = 第 2 種変形ベッセル関数

k = 中性子拡散距離の逆数 (cm^{-1})

R_I = ペレット中心孔半径 (cm)

R = ペレット半径方向位置 (cm)

k は次式で計算される。

$$k = 0.328(E \cdot D)^{0.8} + 0.54 \left(\frac{0.5}{R_p} \right)^{0.82} \cdot (E \cdot D)^{0.19} \quad (3.1.13)$$

ここで、 E = U^{235} 濃縮度 (%)

D = ペレット密度対理論密度比

R_p = ペレット半径

形状指数 b は、(3.1.12) 式が 2 次関数で良く近似できることから $b = 2$ とする。内面对外

面発熱密度比 a は (3.1.12) 式を用いて、次のように表わす。

$$a = \frac{\varphi(R_I)}{\varphi(R_p)} \quad (3.1.14)$$

3.1.2 ギャップ熱伝達

ギャップ熱伝達率は Ross and Stoute のモデル⁽²⁰⁾を修正した式により表わした。

$$h_g = \frac{\lambda_{gas}}{SMIS + (g_1 + g_2) + GAP} + \frac{\lambda_m \cdot P_c}{0.5 (R_1 + R_2)^{\frac{1}{4}} \cdot H} + h_r \quad (3.1.15)$$

右辺第1項はガスによる熱伝達成分、第2項は固体接触による成分、第3項は輻射による成分である。ここで、

λ_{gas} = 混合ガスの熱伝導度 (W/cm·K)

SMIS = 接触面ミスマッチ量 (cm)

$g_1 + g_2$ = 固気間温度ジャンプ距離 (cm)

GAP = 半径方向ギャップ (cm)

$$\lambda_m = \frac{2 \lambda_p(T_{po}) \cdot \lambda_c(T_{ci})}{\lambda_p(T_{po}) + \lambda_c(T_{ci})} \quad (W/cm·K)$$

R_1 = ペレット表面粗さ (cm)

R_2 = 被覆管表面粗さ (cm)

H = 被覆管メイヤー硬度 (N/m²)

= $3 \sigma_Y$

σ_Y = 降伏応力 (N/m²)

P_c = 接触圧力 (N/m²)

$$h_r = \left[\frac{1}{\varepsilon_p} + \frac{1}{\varepsilon_c} - 1 \right]^{-1} \cdot \sigma \cdot \frac{T_{po}^4 - T_{ci}^4}{T_{po} - T_{ci}}$$

σ = ステファン・ボルツマン定数 (W/cm·K⁴)

= 5.67×10^{-12}

ε_p = ペレット射出率

ε_c = 被覆管射出率 (黒色酸化被膜)

λ_{gas} , $g_1 + g_2$ および SMIS の表式を以下に示す。

(1) 混合ガス熱伝導度

MATPRO モデル⁽²¹⁾より次のように表わされる。

$$\lambda_{gas} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \varphi_{ij} \frac{x_j}{x_i}} \right) \quad (3.1.16)$$

ただし、

$$\varphi_{ij} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_i}{M_j} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2}{2^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{2.41 (M_i - M_j) (M_i - 0.142 M_j)}{(M_i + M_j)^2} \right]$$

x_i = ガス i のモル比

λ_i = ガス i の熱伝導度 (W/cm · K)

M_i = ガス i のモル重量

ガスの種類として、ヘリウム、クリプトンおよびゼノンを考える。ガス組成は、クリプトンおよびゼノンがFPガスであるため、ガス放出に依存する。これについては3.1.4項で述べる。

(2) 固気間温度ジャンプ距離

$$g_1 + g_2 = \sum_{i=1}^n (g_1 + g_2)_i \cdot \frac{10^5}{P_{gas}} \quad (3.1.17)$$

ここで、 $(g_1 + g_2)_i$ = ガス i の固気間温度ジャンプ距離 (cm)

P_{gas} = ガス圧力 (Pa)

$(g_1 + g_2)_i$ は、Ross and Stoute の結果から、ヘリウム、クリプトンおよびゼノンに対してそれぞれ 10×10^{-4} , 1×10^{-4} および 1×10^{-4} (cm) を用いる。

ガス圧力 P_{gas} の計算については3.1.5項で述べる。

(3) 接触面ミスマッチ

ペレットクラックおよびリロケーションの任意性あるいは被覆管オバリティに関連して、接触面にミスマッチが生じうる。これを考慮するために、Ross and Stoute のモデル（平滑な物体の接触熱伝達モデル）を修正した。

(3.1.15) 式に含まれる接触面ミスマッチ SMIS を次のように表わした。

$$SMIS = \text{Max} [c (R_1 + R_2), \beta G_0] + r \quad (3.1.18)$$

ここで、 β , r = 経験的パラメータ

$c = 2.77 - 2.55 \times 10^{-8} P_c$

G_0 = 初期ギャップ (cm)

$\beta = r = 0$ とすると、 $SMIS = C (R_1 + R_2)$ となり、オリジナルの Ross and Stoute モデルに一致する。

SMIS および $(g_1 + g_2)$ の表式は、とくに接触時 ($GAP = 0$, $P_c > 0$)において、FPガス放出によるフィードバック (λ_{gas} の低下によるガスによる熱伝達成分の変化) の大きさを支配するので、重要である。SMIS に含まれる経験的パラメータ β , r は、ハルデン中心温度測定データ、PIEガス放出データとの比較に基づいて決定される。

(3.1.15) 式におけるギャップ幅 GAP あるいは接触圧 P_c の計算については次節で述べる。

3.1.3 ギャップ幅

ペレットの熱変形、リロケーション、やきしまり、固体FPスウェーリング、被覆管の熱変形を考慮して、次式により、ギャップ幅を計算する。

$$GAP = (r_{ci}^0 - r_{po}^0) - REL + (u_c - u_p) \quad (3.1.19)$$

ここで、 r_{ci}^0 = 製造時被覆管内半径 (cm)

r_{po}^0 = 製造時ペレット半径 (cm)

REL = 初期リロケーション量 (cm)

u_c = 被覆管径方向変位 (cm)

u_p = ペレット径方向変位 (cm)

REL, u_c および u_p の表式を以下に示す。

(1) 初期リロケーション

ペレットは、スタートアップ時に熱応力によって割れ、その時、ペレット片が径方向に飛散してギャップを狭めることが考えられる。この効果を初期リロケーションと呼ぶ。本コードでは、初期リロケーションは、燃焼度0、線出力0の冷却水条件下 (hot stand-by) におけるギャップに比例すると仮定している。すなわち、

$$REL = \alpha \cdot (r_{ci}^c - r_{pi}^c) \quad (3.1.20)$$

ここで、 r_{ci}^c および r_{pi}^c はそれぞれ hot stand-by における被覆管内半径およびペレット半径 (cm) である。 α は、実験データとの照合を介して定められる経験的パラメータで、リロケーションパラメータと呼ばれるものである。

(2) 被覆管変形

$$u_c = \frac{r_{ci}}{E} \left[\frac{P_i(r_{ci}^2 + r_{co}^2) - 2P_o r_{co}^2}{r_{co}^2 - r_{ci}^2} + \nu P_i \right] + \epsilon_c^{th} \cdot \frac{(r_{ci} + r_{co})}{2} \quad (3.1.21)$$

右辺第1項は内圧および外圧を受ける厚肉円筒内面の弾性変形量（理論解）、第2項は熱膨張量を表わす。上式において、

E = 被覆管ヤング率 (N/m²)

ν = 被覆管ボアソン比

P_i = ガス内圧 (Pa)

P_o = 冷却水外圧 (Pa)

ϵ_c^{th} = 被覆管熱ひずみ

(3) ペレット変形

ペレットの径方向変位は、自由膨張モデルを用いて、次式で計算する。

$$u_p = \frac{r_{po} - r_{pi}}{N} \sum_{i=1}^L (\epsilon_i^{th} + \epsilon_i^d + \epsilon_i^s) \quad (3.1.22)$$

ここで、
 r_{po} = ペレット半径 (cm)
 r_{pi} = ペレット中心孔半径 (cm)
 N = ペレット径方向分割数 (等分割, $N = 10$)
 ϵ_i^{th} = 領域 i における熱ひずみ
 ϵ_i^d = 領域 i におけるやきしまりひずみ
 ϵ_i^s = 領域 i における固体 FP スウェーリングひずみ

(4) 接触圧力

(3.1.19) 式で計算された GAP が負になった場合、ペレットは剛体であると仮定して、次式で接触圧を計算する。

$$P_c = - \frac{GAP \cdot E (r_{co} - r_{ci})}{r_{ci}^2} \quad (3.1.23)$$

3.1.4 FP ガス生成、放出

本コードでは、ペレットスタックを軸方向に最大 10 セグメントに分割し、各セグメントについて、径方向を 10 領域に分割して、FP ガスの生成・放出を計算する。

(1) 生成速度

軸方向セグメント j 、径方向領域 i における FP ガス生成速度は、次式で表わされる。

$$P^{ij} = \frac{Y \cdot f^{ij} \cdot q^j}{E_f \cdot N_A} \quad (3.1.24)$$

ここで、 P^{ij} = 領域 ij の単位長当たりの FP ガス生成速度 (モル/cm · sec)

$$f^{ij} = 2\pi \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \varphi(r) r dr$$

$\varphi(r)$ = 径方向発熱密度分布関数、(3.1.9) 式

q^j = 軸方向セグメント j の平均発熱密度 (W/cm)

$$= \frac{P_{LHR}^j}{\pi (1 - h^2)}$$

P_{LHR}^j = 軸方向セグメント j の線出力 (W/cm)

h = 中心孔規格化半径 (cm)

E_f = 1 fission 当たりに発生するエネルギー、 2.884×10^{-11} ジュール (180 MeV)

Y = FPガス ($Kr + Xe$) の核分裂収率, 0.3

N_A = アボガドロ数, 6.02×10^{23}

(2) 放出モデル

Vitanza⁽²²⁾のモデルを用いる。これは、ハルデンにおける炉内燃料棒圧力測定データ、中心温度測定データ、PIEガス分析データに基づく経験的なモデルであり、ガス放出が開始するまでの潜伏期間（潜伏燃焼度）が考慮されている点に特徴がある。すなわち、

$$\bar{B} = 0.005 \exp \left(\frac{9800}{T_{pi} - 273} \right) \quad (3.1.25)$$

ここで、 \bar{B} = 潜伏燃焼度 ($GWD/t UO_2$)

T_{pi} = ペレット中心温度 (K)

軸方向セグメント j の燃焼度 B^j が \bar{B} を越えた時点以後のFPガス放出率は下式で計算する。

$$F^{ij} = \left(\frac{T^{ij} - 273}{1800} \right)^5 \left(1 - \frac{\bar{B}^j}{B^j} \right) \quad (3.1.26)$$

ここで、 F^{ij} = 領域 ij におけるFPガス放出率

T^{ij} = 領域 ij の温度 (K)

B^j = 軸方向セグメント j の平均燃焼度 ($GWD/t UO_2$)

\bar{B}^j = 軸方向セグメント j の潜伏燃焼度 ($GWD/t UO_2$)

ただし、本コードでは、 F^{ij} の下限値として 0.005 がセットされている。これは、knock-out 機構による放出を考慮するためである。

(3) ガス組成

ペレットスタック全体から放出されるガスは次式で計算される。

$$n_R = \sum_{j=1}^M \left[Z^j \sum_{i=1}^{10} \left(\int_0^t F^{ij} \cdot P^{ij} dt \right) \right] \quad (3.1.25)$$

ここで、 t = 時刻

n_R = 時刻 t までのペレットスタック全体からのガス放出量 (モル)

M = 軸方向セグメント数

Z^j = 軸方向セグメント j の長さ (cm)

本コードでは、FPガスのうち、87%がゼノン、残り13%がクリプトンとし、FPガスは初期封入ガスと完全に混合し、ガス組成は燃料棒内で一様と仮定される。ガス組成は次式で計算される。

$$x_{He} = n_I \cdot x_{He}^0 / n_T$$

$$x_{Kr} = (n_I x_{Kr}^0 + 0.13 n_R) / n_T \quad (3.1.26)$$

$$x_{Xe} = (n_I x_{Xe}^0 + 0.87 n_R) / n_T$$

x_{He}	=	ヘリウムモル比
x_{Kr}	=	クリプトンモル比
x_{Xe}	=	ゼノンモル比
n_I	=	初期封入ガスモル数(モル)
n_R	=	放出ガスモル数(モル)
n_T	=	$n_I + n_R$
x_{He}^0	=	初期封入ガスヘリウムモル比
x_{Kr}^0	=	初期封入ガスクリプトンモル比
x_{Xe}^0	=	初期封入ガスゼノンモル比

3.1.5 ガス圧

燃料棒内ガスは理想気体としてふるまい、圧力は燃料棒内で一様であると仮定される。ガス圧力は次式で計算される。

$$P_{\text{gas}} = \frac{n_T \cdot R}{\frac{V_{pl}}{T_{pl}} + \sum_{j=1}^M \left(\frac{V_{gap}^j}{T_{gap}^j} + \frac{V_h^j}{T_{pi}^j} + \frac{V_{int}^j}{T_{av}^j} \right)} \quad (3.1.27)$$

P_{gas}	=	燃料棒内ガス圧(Pa)
n_T	=	全ガスモル数(モル)
R	=	ガス定数、8.314 Joule/K・mole
V_{pl}	=	プレナム容積(m^3)
T_{pl}	=	プレナムガス温度(K)
	=	$T_w + 25$
T_w	=	冷却水温度(K)
V_{gap}^j	=	軸方向セグメントjのギャップ容積(m^3)
V_h^j	=	軸方向セグメントjの中心孔容積(m^3)
V_{int}^j	=	スタック内部の開気ガス容積(m^3)
T_{gap}^j	=	軸方向セグメントjのギャップ温度(K)
	=	$0.5 (T_{ps}^j + T_{ci}^j)$
T_{pi}^j	=	軸方向セグメントjの中心温度(K)
T_{av}^j	=	軸方向セグメントjのペレット体積平均温度(K)

V_{int}^j は、デッシュ部容積、チャンファ部容積、ペレット端面間ギャップ容積およびクラック面間容積などを含む。

上記の各々のガス容積は、燃焼度0、線出力0の冷却水条件下(hot stand-by)で計算され、燃焼の進行に伴うガス容積の変化は考慮されない。

3.2 力学的ふるまい

軸対称 FEM を燃料棒の半ペレット長相当部に適用して解析する。FEM モデルの 1 例を Fig. 3.1 に示す。

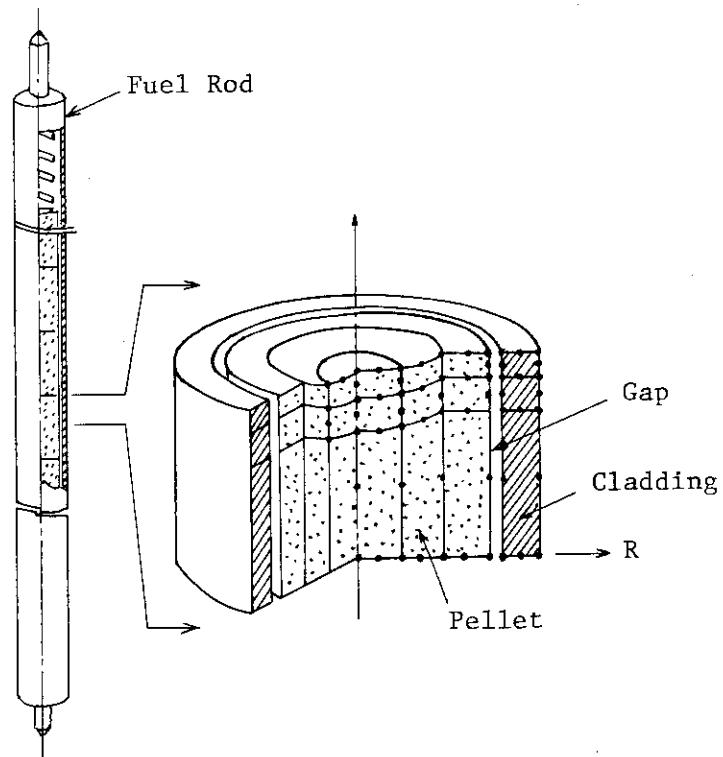


Fig. 3.1 An Axisymmetric Finite Element Model
with 12 Parabolic Isoparametric
Elements (9 for Pellet, 3 for Cladding)

3.2.1 基本式

時刻 t_{n+1} における平衡条件は、仮想仕事の原理から⁽²³⁾次のようになる。

$$\int [B]^T \{ \sigma_{n+1} \} dV - \{ F_{n+1} \} = 0 \quad (3.2.1)$$

ここで, $[B]^T$ = ひずみ-変位マトリクス $[B]$ の転置マトリクス

$\{ \sigma_{n+1} \}$ = 時刻 t_{n+1} における応力ベクトル

$\{ F_{n+1} \}$ = 時刻 t_{n+1} における節点荷重ベクトル

$[B]$ は変形前の寸法で定められると仮定する。

構成方程式（応力－ひずみ関係式）は次式で表わされる。

$$\{\Delta \sigma_{n+1}\} = [\bar{D}] \{\Delta \varepsilon_{n+1}^e\} \quad (3.2.2)$$

ここで、 $\{\Delta \sigma_{n+1}\}$ = 時刻 t_n から t_{n+1} までの応力増分ベクトル

$$[\bar{D}] = ([D_n] + [D_{n+1}]) / 2$$

$$[D_n] = \text{時刻 } t_n \text{ における弾性マトリクス}$$

$$[D_{n+1}] = \text{時刻 } t_{n+1} \text{ における弾性マトリクス}$$

$$\{\Delta \varepsilon_{n+1}^e\} = \text{時刻 } t_n \text{ から } t_{n+1} \text{ までの弾性ひずみ増分ベクトル}$$

$\{\Delta \varepsilon_{n+1}^e\}$ は次のように表わす。

$$\{\Delta \varepsilon_{n+1}^e\} = \{\Delta \varepsilon_{n+1}\} - \{\Delta \varepsilon_{n+1}^0\} - \{\Delta \varepsilon_{n+1}^p\} - \{\Delta \varepsilon_{n+1}^c\} \quad (3.2.3)$$

ここで、 $\{\Delta \varepsilon_{n+1}\}$ = 全ひずみ増分ベクトル

$$\{\Delta \varepsilon_{n+1}^0\} = \text{初期ひずみ増分ベクトル}$$

$$\{\Delta \varepsilon_{n+1}^p\} = \text{塑性ひずみ増分ベクトル}$$

$$\{\Delta \varepsilon_{n+1}^c\} = \text{クリープひずみ増分ベクトル}$$

熱膨張、やきしまり、スウェーリングおよびリロケーションによるひずみは初期ひずみとして取扱われる。

ひずみ－変位関係式は次のようになる。

$$\{\Delta \varepsilon_{n+1}\} = [B] (\{u_{n+1}\} - \{u_n\}) \quad (3.2.4)$$

ここで、 $\{u_{n+1}\}$ = 時刻 t_{n+1} における節点変位ベクトル

$$\{u_n\} = \text{時刻 } t_n \text{ における節点変位ベクトル}$$

(3.2.2), (3.2.3) および (3.2.4) 式から次式が得られる。

$$[\bar{C}_{n+\theta}] (\{\sigma_{n+1}\} - \{\sigma_n\}) - [B] (\{u_{n+1}\} - \{u_n\}) + \{\Delta \varepsilon_{n+1}^0\}$$

$$+ \{\Delta \varepsilon_{n+1}^p\} + \{\Delta \varepsilon_{n+1}^c\} = 0 \quad (3.2.5)$$

ここで、 $[\bar{C}_{n+\theta}] = ([C_n] + [C_{n+1}]) / 2$

$$[C_n] = [D_n]^{-1}$$

$$[C_{n+1}] = [D_{n+1}]^{-1}$$

(3.2.1) および (3.2.5) 式が未知量 $\{\sigma_{n+1}\}$ および $\{u_{n+1}\}$ を求めるための基本式である。

(3.2.5) 式は、 $\{\Delta \varepsilon_{n+1}^p\}$ および $\{\Delta \varepsilon_{n+1}^c\}$ が未知量 $\{\sigma_{n+1}\}$ などの関数であるため、

Newton-Raphson 法による反復手順を用いて解く（3.2.3 項、3.2.4 項に詳述）。ペレットの場合にはクラックを考慮するため、 \bar{C} をひずみの関数として扱っており、この反復手順の中で同時に \bar{C} の更新が図られる。

第 $n+1$ ステージ（時刻 t_{n+1} ）の計算において、第 i 回目の反復を終了し、第 $i+1$ 回目の反復を行っているとき、（3.2.5）式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & [\bar{C}_{n+\theta}] (\{\sigma_{n+1}^i\} + \{d\sigma_{n+1}^{i+1}\} - \{\sigma_n\}) - [B] (\{u_{n+1}^i\} + \{du_{n+1}^{i+1}\} - \{u_n\}) \\ & + \{d\varepsilon_{n+1}^0\} + \{d\varepsilon_{n+1}^{p,i+1}\} + \{d\varepsilon_{n+1}^{c,i+1}\} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \{d\sigma_{n+1}^{i+1}\} &= \{\sigma_{n+1}^{i+1}\} - \{\sigma_{n+1}^i\} \\ \{du_{n+1}^{i+1}\} &= \{u_{n+1}^{i+1}\} - \{u_{n+1}^i\} \end{aligned}$$

また、このとき（3.2.1）式の平衡条件は次のようになる。

$$\int [B]^T \{\sigma_{n+1}^i\} dV + \int [B]^T \{d\sigma_{n+1}^{i+1}\} dV = \{F_{n+1}\} \quad (3.2.7)$$

3.2.2 ペレットクラック

クラックの効果は剛性低下の方法で近似的に取扱う。すなわち、方法 i （軸方向、周方向あるいは径方向）が引張状態のとき、その方向に垂直な面にクラックが生じ、 i 方向ヤング率は小さな値（物性値の約 $1/100$ ）になると仮定する。また、圧縮状態のときには、Fig. 3.2 に示すように、リロケーションによるひずみに依存して弾性が回復し、リロケーションを埋め尽くすまで圧縮されたとき完全な弾性を回復すると仮定した。

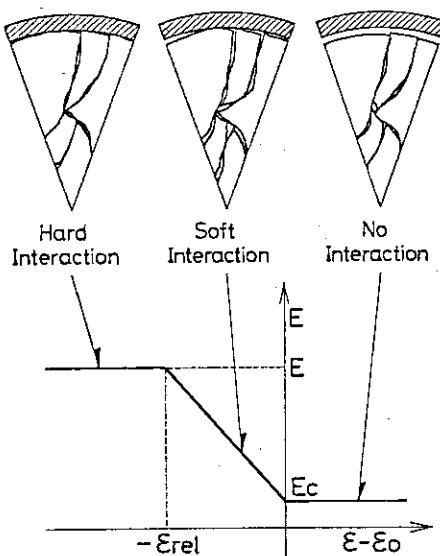


Fig. 3.2 Stiffness Model for Cracked Pellet

ペレットの [C] マトリクスは次のように表わした。

$$[C] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{E_r} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_z} & \frac{\nu}{E} & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E_\theta} & 0 & \\ \text{Sym.} & & & \frac{4(1+\nu)}{E_r+E_z} \end{pmatrix} \quad (3.2.8)$$

ここで, E_r = 径方向ヤング率

E_z = 軸方向ヤング率

E_θ = 周方向ヤング率

E = 完全なヤング率 (物性値)

ν = ポアソン比

各方向のヤング率 E_i は次のように表わした。

$$E_i = \begin{cases} E_c & , \epsilon_i - \epsilon_i^0 > 0 \text{ のとき} \\ \frac{\epsilon_i - \epsilon_i^0}{\epsilon_i^{rel}} (E - E_c) + E_c, & -\epsilon_i^{rel} \leq \epsilon_i - \epsilon_i^0 \leq 0 \text{ のとき} \\ E & , \epsilon_i - \epsilon_i^0 < -\epsilon_i^{rel} \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

ここで, ϵ_i = i 方向全ひずみ

ϵ_i^0 = i 方向初期ひずみ

ϵ_i^{rel} = i 方向リロケーションひずみ

E_c = クラックしたペレットの引張状態下実効ヤング率

初期状態 (燃焼度 = 0, 出力 = 0, このとき $\epsilon_i - \epsilon_i^0 = 0$) において, ペレットのヤング率 E_i は小さな値 E_c である。出力上昇に伴うペレットふるまいの変化は, Fig. 3.2 模式的に示すようにに, 次のように記述される。

(a) 非接触のとき, 小さなヤング率のためペレットの熱膨張に対する弾性的拘束が弱く, 線膨張に近い状態でペレットは熱変形し, ギャップを閉鎖する。

(b) 接触が生じると, ペレット内に被覆管の拘束力によって圧縮ひずみが増加していく。この

とき、リロケーションによってペレットクラック面に生じたすきまが圧縮されるにつれて剛性が大きくなる過程がヤング率を直線的に変化させることによって近似される。すなわちここでは、クラックし、リロケーションしたペレットと被覆管の緩慢な力学的相互作用が次第に強まっていくプロセスが記述される。

- (c) クラック面のすきまが十分に圧縮されると、ペレットの圧縮剛性は完全に回復すると考える。ここでは強い相互作用が記述される。

3.2.3 クリープ

クリープ式は一般的な形として次のように書ける。

$$\dot{\epsilon}^c = f(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^H, T, \phi, F) \quad (3.2.10)$$

ここで, $\dot{\epsilon}^c$ = 相当クリープ速度

$\bar{\sigma}$ = 相当応力

$\bar{\epsilon}^H$ = クリープ硬化パラメータ

T = 温度

ϕ = 高速中性子束

F = 核分裂速度

クリープ硬化パラメータが相当クリープひずみに等しいと仮定すると、硬化パラメータの変化率は,

$$\dot{\epsilon}^H = f \quad (3.2.10a)$$

(3.2.10) 式は単軸応力下におけるクリープ式であるが、これを流れ則 (flow rule) を用いて多軸応力状態に拡張すると、

$$\{\dot{\epsilon}^c\} = \frac{3}{2}\frac{f}{\bar{\sigma}} \{\sigma'\} \quad (3.2.11)$$

ここで, $\{\dot{\epsilon}^c\}$ = クリープ速度ベクトル

$\{\sigma'\}$ = 偏差応力ベクトル

上式を一般的に書くと、

$$\{\dot{\epsilon}^c\} = \{\beta(\{\sigma\}, \bar{\epsilon}^H)\} \quad (3.2.11a)$$

ただし、T, ϕ および F は既知パラメータとして扱われる所以省略されている。

いま、時刻 t_n の計算を終了し、次の時間増分幅を Δt_{n+1} として時刻 t_{n+1} の計算を行っているとき、クリープひずみ増分ベクトルは、台形則を用いて次のように書ける。

$$\{\Delta\dot{\epsilon}_{n+1}^c\} = \Delta t_{n+1} \{\dot{\epsilon}_{n+\theta}^c\} = \Delta t_{n+1} \{\beta(\{\sigma_{n+\theta}\}, \bar{\epsilon}_{n+\theta}^H)\} \quad (3.2.12)$$

$$\text{ここで, } \{\sigma_{n+\theta}\} = (1-\theta)\{\sigma_n\} + \theta\{\sigma_{n+1}\}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+\theta}^H = (1-\theta)\bar{\varepsilon}_n^H + \theta\bar{\varepsilon}_{n+1}^H$$

(ただし, $0 \leq \theta \leq 1$)

ここで例えば, $\theta = 0$ とすると上式は増分の始点の状態量(既知量)で定まるクリープ速度を用いる方法(初期ひずみ法)となる。この場合計算手順は単純となるが、数値的不安定になりやすく、高クリープ速度下において時間増分幅を極めて小さくとらねばならないことが知られている。⁽²⁴⁾一方、 $\theta \neq 0$ とすると、未知量を含む表式となり手順が複雑化するが、 θ が 1 に近づくにつれて数値解の安定性が向上する⁽²⁵⁾($\theta \neq 0$ とする方法は陰解法と呼ばれる)。

本コードでは θ を任意に指定できるよう一般性のある定式化を行っている。

いま、時刻 t_n から t_{n+1} の計算において、Newton-Raphson 法による反復の第 i 回目を終了し第 $i+1$ 回目の反復を行っているとき、クリープ速度ベクトルは次のように書ける。

$$\begin{aligned} \{\dot{\varepsilon}_{n+\theta}^{c,i+1}\} &= \{\beta(\{\sigma_{n+\theta}^i\} + \theta\{d\sigma_{n+1}^{i+1}\}, \bar{\varepsilon}_{n+\theta}^{H,i} + \theta d\bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1})\} \\ &= \frac{3f\left(\bar{\sigma}(\{\sigma_{n+\theta}^i\} + \theta\{d\sigma_{n+1}^{i+1}\}), \bar{\varepsilon}_{n+\theta}^{H,i} + \theta d\bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1}\right)}{2\bar{\sigma}(\{\sigma_{n+\theta}^i\} + \theta\{d\sigma_{n+1}^{i+1}\})} \\ &\quad \times \sigma'(\{\sigma_{n+\theta}^i\} + \theta\{d\sigma_{n+1}^{i+1}\}) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

ここで、 $\{d\sigma_{n+1}^{i+1}\}$ および $d\bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1}$ は反復による修正量である。

上式は、1次の泰ラー展開を取って次のように近似される。

$$\begin{aligned} \{\dot{\varepsilon}_{n+\theta}^{c,i+1}\} &= \frac{3}{2\bar{\sigma}_{n+\theta}^i} f_{n+\theta}^i \{\sigma'_{n+\theta}^i\} \\ &- \frac{3}{2(\bar{\sigma}_{n+\theta}^i)^2} f_{n+\theta}^i \{\sigma'_{n+\theta}^i\} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \theta \{d\sigma_{n+1}^{i+1}\} \\ &+ \frac{3}{2\bar{\sigma}_{n+\theta}^i} f_{n+\theta}^i \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \theta \{d\sigma_{n+1}^{i+1}\} \\ &+ \frac{3}{2\bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \{\sigma'_{n+\theta}^i\} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{n+\theta}^i \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \theta \{d\sigma_{n+1}^{i+1}\} \\ &+ \frac{3}{2\bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \{\sigma'_{n+\theta}^i\} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^H} \right)_{n+\theta}^i \theta d\bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\varepsilon}_{n+\theta}^{c,i} + \frac{3}{2 \bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}^i} \right)_{n+\theta}^i - \frac{f_{n+\theta}^i}{\bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \right) \left[\sigma' \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \theta \{ d \sigma_{n+\theta}^{i+1} \} \\
&+ \frac{3 f_{n+\theta}^i}{2 \bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \theta \{ d \sigma_{n+1}^{i+1} \} + \frac{3}{2 \bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \{ \sigma'_{n+1}^i \} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^H} \right)_{n+\theta}^i \theta d \bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1}
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

上式を, $\{ \sigma' \} = \frac{2 \bar{\sigma}}{3} \{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \}$ なる関係を用いて書き直すと,

$$\begin{aligned}
\{ \dot{\varepsilon}_{n+\theta}^{c,i+1} \} &= \{ \dot{\varepsilon}_{n+\theta}^{c,i} \} + \frac{9}{4 (\bar{\sigma}_{n+\theta}^i)^2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{n+\theta}^i - \frac{f_{n+\theta}^i}{\bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \right) \{ \sigma'_{n+1}^i \} \theta \{ d \sigma_{n+1}^{i+1} \} \\
&+ \frac{3 f_{n+\theta}^i}{2 \bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \theta \{ d \sigma_{n+1}^{i+1} \} + \frac{3}{2 \bar{\sigma}_{n+\theta}^i} \{ \sigma'_{n+1}^i \} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^H} \right)_{n+\theta}^i \theta d \bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1}
\end{aligned} \tag{3.2.14 a)$$

一方, クリープ硬化増分は (3.2.10 a) 式より, 次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_{n+\theta}^{H,i+1} &= \Delta t_{n+1} f (\bar{\sigma}_{n+\theta}^{i+1}, \bar{\varepsilon}_{n+\theta}^{H,i+1}) \\
&= \Delta t_{n+1} f \left(\bar{\sigma} (\{ \sigma_{n+\theta}^i \} + \theta \{ d \sigma_{n+1}^{i+1} \}), \bar{\varepsilon}_{n+\theta}^{H,i} + \theta d \varepsilon_{n+1}^{H,i} \right)
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

上式は, 1次のテイラー展開をとって, 次のように近似される。

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_{n+\theta}^{H,i+1} &= \Delta \bar{\varepsilon}_{n+\theta}^{H,i} + d \bar{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} \\
&= \Delta t_{n+1} \cdot f_{n+\theta}^i + \theta \Delta t_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right)_{n+\theta}^i \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \{ d \sigma_{n+1}^{i+1} \} \\
&+ \theta \Delta t_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^H} \right)_{n+\theta}^i d \bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1}
\end{aligned} \tag{3.2.16)$$

$\Delta \bar{\varepsilon}_{n+\theta}^{H,i} = \Delta t_{n+1} f_{n+\theta}^i$ であるから, $d \bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1}$ は次のように表わされる。

$$d\bar{\varepsilon}_{n+1}^{H,i+1} = \frac{\theta \Delta t_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{n+\theta}^i \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \{ d\sigma_{n+1}^{i+1} \}}{1 - \theta \Delta t_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^H} \right)_{n+\theta}^i} \quad (3.2.17)$$

これを (3.2.14 a) 式に代入し整理すると、

$$\{ \dot{\varepsilon}_{n+\theta}^{c,i+1} \} = \{ \dot{\varepsilon}_{n+\theta}^{c,i} \} + F_1 \theta \{ \sigma_i' \sigma_j' \}_{n+\theta}^i \{ d\sigma_{n+1}^{i+1} \} + F_2 \theta \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \{ d\sigma_{n+1}^{i+1} \}$$

$$(3.2.18)$$

ここで、

$$F_1 = \frac{9}{4 (\bar{\sigma}_{n+\theta}^i)^2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{n+\theta}^i - \frac{f_{n+\theta}^i}{\bar{\sigma}_{n+\theta}^i} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^H} \right)_{n+\theta}^i \theta \Delta t_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{n+\theta}^i}{1 - \theta \Delta t_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^H} \right)_{n+\theta}^i} \right)$$

$$F_2 = \frac{3 f_{n+\theta}^i}{2 \bar{\sigma}_{n+\theta}^i}$$

クリープひずみ増分は次のように与えられる。

$$\{ \Delta \varepsilon_{n+\theta}^{c,i+1} \} = \Delta t_{n+1} \{ \dot{\varepsilon}_{n+\theta}^{c,i+1} \}$$

$$= \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^{c,i} \} + [C_{n+\theta}^{c,i}] \{ d\sigma_{n+1}^{i+1} \}$$

$$(3.2.19)$$

ただし、

$$[C_{n+\theta}^{c,i}] = \theta \Delta t_{n+1} \left(F_1 \{ \sigma_i' \sigma_j' \}_{n+\theta}^i + F_2 \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \right)$$

(3.2.19) 式がクリープひずみ増分の陰な表式である。本式を (3.2.16) 式に代入し整理すると次式が得られる。

$$\{ d\sigma_{n+1}^{i+1} \} = [\hat{D}_{n+\theta}^i] \left([B] \{ \Delta u_{n+1}^{i+1} \} - [\bar{C}_{n+\theta}^i] (\{ \sigma_{n+1}^i \} - \{ \sigma_n \}) \right.$$

$$\left. - \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^0 \} - \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^{c,i} \} - \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^{p,i+1} \} \right)$$

$$(3.2.20)$$

ただし、 $[\hat{D}_{n+1}^i] = ([\bar{C}_{n+1}^i] + [C_{n+1}^{c,i}])^{-1}$

$$\{ \Delta u_{n+1}^{i+1} \} = \{ u_{n+1}^i \} + \{ d u_{n+1}^{i+1} \} - \{ u_n \}$$

3.2.4 塑性

降伏条件は次のように表わされる。

$$h(\{\sigma\}) = K(\bar{\epsilon}^p, T) \quad (3.2.21)$$

ここで, $\bar{\epsilon}^p$ = 相当塑性ひずみ(硬化パラメータ)

T = 温度

K = 降伏曲面の大きさ

h = 降伏関数

降伏関数 h は、被覆管の異方性とペレットの圧縮性⁽²⁵⁾ (ホットプレス) を考慮して次のように表わされる。

$$h = \left[\frac{3}{2(F+G+H)} \{ H(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + F(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 2N\tau_{rz}^2 \} + 3\alpha(\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \equiv \bar{\sigma} \quad (3.2.22)$$

ここで, F, G, H, N = 被覆管異方性係数

α = ペレットホットプレスパラメータ

時刻 t_n から t_{n+1} までの塑性ひずみ増分ベクトルは、流れ則を用いて次のように表わされる。

$$\{\Delta\epsilon_{n+1}^p\} = \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta} \quad (3.2.23)$$

いま、第 i 回目の反復を終了して第 $i+1$ 回目の反復のとき、降伏条件および流れ則は次のように書ける。

$$h(\{\sigma_n\} + \{\Delta\sigma_{n+1}^{i+1}\}) = K(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^{p,i+1}, T_n + \Delta T_{n+1}) \quad (3.2.24)$$

$$\{\Delta\epsilon_{n+1}^{p,i+1}\} = \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^{p,i+1} \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i \quad (3.2.25)$$

(3.2.24) 式を $\{\Delta\sigma_{n+1}^{i+1}\}$, $\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^{p,i+1}$ および ΔT_{n+1} について 1 次の泰ラー展開をとると次の近似式が得られる。

$$\begin{aligned} h(\{\sigma_n\}) + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \{\Delta\sigma_{n+1}^{i+1}\} &= K(\bar{\epsilon}_n^p, T_n) \\ + \left(\frac{\partial K}{\partial \bar{\epsilon}^p} \right)_{n+\theta}^i \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^{p,i+1} + \left(\frac{\partial K}{\partial T} \right)_{n+\theta} \Delta T_{n+1} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

次の関係、

$$\{ \Delta \sigma_{n+1}^{i+1} \} = \{ \sigma_{n+1}^i \} + \{ d \sigma_{n+1}^{i+1} \} - \{ \sigma_n \} \quad (3.2.27)$$

を (3.2.26) 式に代入し整理すると、

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p, i+1} &= \frac{1}{H'_{n+\theta}^i} \left(\left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i (\{ \sigma_{n+1}^i \} - \{ \sigma_n \}) + h(\{ \sigma_n \}) - K(\bar{\varepsilon}_n^p, T_n) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial K}{\partial T} \right)_{n+\theta} \Delta T_{n+1} + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \{ d \sigma_{n+1}^{i+1} \} \right) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

ここで、

$$H'_{n+\theta}^i = \left(\frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \right)_{n+\theta}^i \quad (3.2.29)$$

である。 (3.2.28) 式に (3.2.20) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} H'_{n+1}^i \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p, i+1} &+ \left(\frac{\partial K}{\partial T} \right)_{n+\theta} \Delta T_{n+1} - h(\{ \sigma_n \}) + K(\bar{\varepsilon}_n^p, T_n) \\ &= \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i (\{ \sigma_{n+1} \} - \{ \sigma_n \}) \\ &\quad + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+\theta}^i] \left([B] \{ \Delta u_{n+1}^{i+1} \} - [\bar{C}_{n+\theta}^i] (\{ \sigma_{n+1}^i \} - \{ \sigma_n \}) - \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^0 \} \right. \\ &\quad \left. - \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^{c, i} \} - \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p, i+1} \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i \right) \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

本式を $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p, i+1}$ についてまとめると、

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p, i+1} &= \frac{\left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+\theta}^i] \left([B] \{ \Delta u_{n+1}^{i+1} \} - [\bar{C}_{n+\theta}^i] (\{ \sigma_{n+1}^i \} - \{ \sigma_n \}) - \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^0 \} - \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^{c, i} \} \right)}{H'_{n+\theta}^i + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+\theta}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i} \\ &\quad + \frac{\left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i (\{ \sigma_{n+1}^i \} - \{ \sigma_n \}) - \left(\frac{\partial K}{\partial T} \right)_{n+\theta} \Delta T_{n+1} + h(\{ \sigma_n \}) - K(\bar{\varepsilon}_n^p, T_n)}{H'_{n+\theta}^i + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+\theta}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i} \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

上式を、(3.2.25)式の関係を用いて、(3.2.20)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \{d\sigma_{n+1}^{i+1}\} &= [\hat{D}_{n+\theta}^i] \left([B]\{du_{n+1}^{i+1}\} - [\bar{C}_{n+\theta}^i](\{\sigma_{n+1}^i\} - \{\sigma_n\}) - \{d\varepsilon_{n+1}^0\} - \{d\varepsilon_{n+1}^{c,i}\} \right) \\ &- \frac{[\hat{D}_{n+\theta}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+\theta}^i]}{H_{n+\theta}^{'i} + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+1}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i} \\ &\times \left([B]\{du_{n+1}^{i+1}\} - [\bar{C}_{n+\theta}^i](\{\sigma_{n+1}^i\} - \{\sigma_n\}) - \{d\varepsilon_{n+1}^0\} - \{d\varepsilon_{n+1}^{c,i}\} \right) \\ &- \frac{[\hat{D}_{n+\theta}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i \left(\left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i (\{\sigma_{n+1}^i\} - \{\sigma_n\}) - \left(\frac{\partial K}{\partial T} \right)_{n+\theta} dT_{n+1} + h(\{\sigma_n\}) - K(\vec{\varepsilon}_p^n, T_n) \right)}{H_{n+\theta}^{'i} + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+\theta}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

これを整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \{d\sigma_{n+1}^{i+1}\} &= [\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}] \left([B]\{du_{n+1}^{i+1}\} - [\bar{C}_{n+\theta}^i](\{\sigma_{n+1}^i\} - \{\sigma_n\}) - \{d\varepsilon_{n+1}^0\} - \{d\varepsilon_{n+1}^{c,i}\} \right) \\ &+ \{S_{n+\theta}^i\} dT_{n+1} - \{Z_1\} - \{Z_2\} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

ここで、

$$[\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}] = [\hat{D}_{n+\theta}^i] - \frac{[\hat{D}_{n+\theta}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+\theta}^i]}{H_{n+\theta}^{'i} + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+1}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i} \quad (3.2.34)$$

$$\{S_{n+\theta}^i\} = \frac{[\hat{D}_{n+\theta}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i \left(\frac{\partial K}{\partial T} \right)_{n+\theta}}{H_{n+\theta}^{'i} + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i [\hat{D}_{n+\theta}^i] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i} \quad (3.2.35)$$

$$\{Z_1\} = \frac{\left[\hat{D}_{n+\theta}^i \right] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i (\{\sigma_{n+1}^i\} - \{\sigma_n\})}{H_{n+\theta}^{i,i} + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \left[\hat{D}_{n+\theta}^i \right] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i} \quad (3.2.36)$$

$$\{Z_2\} = \frac{\left[\hat{D}_{n+\theta}^i \right] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i \left(h(\{\sigma_n\}) - K(\bar{\epsilon}_n^p, T_n) \right)}{H_{n+\theta}^{i,i} + \left[\frac{\partial h}{\partial \sigma} \right]_{n+\theta}^i \left[\hat{D}_{n+\theta}^i \right] \left\{ \frac{\partial h}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta}^i} \quad (3.2.37)$$

(3.2.33) 式がペレットクラック、クリープおよび塑性を考慮した構成方程式である。

3.2.5 剛性方程式

(3.2.33) 式を (3.2.7) 式に代入すると、第 $i+1$ 回目の反復時における平衡条件が得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} & \int [B]^T \{\sigma_{n+1}^i\} dV + \int [B]^T (\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}) [B] \{\Delta u_{n+1}^{i+1}\} dV \\ & - \int [B]^T (\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}) [\bar{C}_{n+\theta}^i] (\{\sigma_{n+1}^i\} - \{\sigma_n\}) dV \\ & - \int [B]^T (\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}) (\{\Delta \epsilon_{n+1}^0\} + \{\Delta \epsilon_{n+1}^{c,i}\}) dV \\ & + \int [B]^T (\{S_{n+\theta}^i\} \Delta T_{n+1} - \{Z_1\} - \{Z_2\}) dV \\ & = \{F_{n+1}\} \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

上式を整理して次のように書く。

$$\{K_{n+\theta}^i\} \{\Delta u_{n+1}^{i+1}\} = \{\Delta \hat{F}_{n+1}^i\} \quad (3.2.39)$$

ここで、

$$\{K_{n+\theta}^i\} = \int [B]^T (\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}) [B] dV \quad (3.2.40)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta \hat{F}_{n+1}^i\} &= \int [B]^T (\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}) \left\{ [\bar{C}_{n+\theta}^i] (\{\sigma_{n+1}^i\} - \{\sigma_n\}) \right. \\ &\quad \left. + \{\Delta \epsilon_{n+1}^0\} + \{\Delta \epsilon_{n+1}^{c,i}\} \right\} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int [B]^T (\{S_{n+\theta}^i\} \Delta T_{n+1} - \{Z_1\} - \{Z_2\}) dV \\
& + (\{F_{n+1}\} - \int [B]^T \{\sigma_{n+1}^i\} dV) \quad (3.2.41)
\end{aligned}$$

(3.2.39) 式が要素の剛性方程式である。変形の軸対称性を仮定する場合、(3.2.40) 式および(3.2.41) 式でそれぞれ表わされる剛性マトリクスおよび荷重項は次のように書ける。

$$[K_{n+\theta}^i] = 2\pi \iint [B]^T [\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}] [B] r dr dz \quad (3.2.42)$$

$$\begin{aligned}
\{\Delta F_{n+1}^i\} &= 2\pi \iint [B]^T [\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}] \left\{ (\bar{C}_{n+\theta}^i) (\{\sigma_{n+1}^i\} - \{\sigma_n\}) \right. \\
&\quad \left. + \{\Delta \varepsilon_{n+1}^0\} + \{\Delta \varepsilon_{n+1}^{c,i}\} \right\} r dr dz \\
&- 2\pi \iint [B]^T (\{S_{n+\theta}^i\} \Delta T_{n+1} - \{Z_1\} - \{Z_2\}) r dr dz \\
&+ (\{F_{n+1}\} - 2\pi \iint [B]^T \{\sigma_{n+1}^i\} r dr dz) \quad (3.2.43)
\end{aligned}$$

(3.2.43) 式において、第1項は応力および初期ひずみなどによるみかけの荷重項であり、第2項は降伏応力変化の補正項であり、第3項は非平衡残差である。

以下に1要素に対する剛性方程式を具体的に表示する。

本コードで使用しているFEMは要素内の変位分布を仮定する変位法である。四角形8節点アイソパラメトリック要素の場合、要素内の変位を節点変位の2次関数で近似する。

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{u\} = [N] \begin{Bmatrix} v^1 \\ w^1 \\ v^2 \\ w^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v^8 \\ w^8 \end{Bmatrix} \quad (3.2.44)$$

ここで、

$$[N] = [N_1 I, N_2 I, N_3 I, \dots, N_8 I] \quad (3.2.45)$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[N]$ は要素変位分布近似関数（形状関数）である。 N_1, N_2, \dots, N_8 は、Fig. 3.3 に示すような局所座標 (ξ, η) を用いて、次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)/4 \\ N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)/4 \\ N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)/4 \\ N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)/4 \\ N_5 = (1 + \xi)(1 - \xi)(1 - \eta)/2 \\ N_6 = (1 + \eta)(1 - \eta)(1 + \xi)/2 \\ N_7 = (1 + \xi)(1 - \xi)(1 + \eta)/2 \\ N_8 = (1 + \eta)(1 - \eta)(1 - \xi)/2 \end{array} \right\} \quad (3.2.46)$$

要素内のひずみは、軸対称問題の場合、次のようにになる。

$$\{ \varepsilon \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ r_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial v / \partial r \\ \partial w / \partial z \\ v/r \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial r \end{Bmatrix} = [B] \{ u \} \quad (3.2.47)$$

したがって、 $[B]$ マトリクスは次のような。

$$[B] = [B_1, B_2, B_3, \dots, B_8] \quad (3.2.48)$$

ここで B_i はサブマトリクスであり、

$$B_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (3.2.49)$$

上式において、 N_i は局所座標 (ξ, η) で定義されているので、以下のように座標変換を行う。
両座標には次の関係がある。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (3.2.50)$$

ここで, $[J]$ = ヤコビアンマトリクス

あるいは,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.2.51)$$

要素内の位置 (r, z) を節点座標 ($r_i, z_i, i = 1 \sim 8$) を用い表わすと,

$$\left. \begin{array}{l} r = \sum_{i=1}^8 N_i r_i \\ z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \end{array} \right\} \quad (3.2.52)$$

上式を用いると, $[J]$ は次のように書ける。

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix} \quad (3.2.53)$$

したがって, $[J]^{-1}$ は,

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det [J]} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i & -\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ -\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i \end{bmatrix} \quad (3.2.54)$$

ここで,

$$\det [J] = (\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i) (\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i) - (\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i) (\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i) \quad (3.2.55)$$

以上の関係を用いて、(3.2.49) 式に示した \mathbf{B}_i の成分を局所座標に変換すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial r} &= \frac{1}{\det[J]} \left\{ \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right\} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} &= \frac{1}{\det[J]} \left\{ \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - \left(\sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right\} \\ \frac{N_i}{r} &= \frac{N_i}{\sum_{i=1}^8 N_i r_i} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.56)$$

積分領域の変換は次式が用いられる。

$$dr dz = \det[J] d\xi d\eta \quad (3.2.57)$$

したがって、(3.2.42) 式および(3.2.43) 式は局所座標で次のように表わされる。

$$[K_{n+\theta}^i] = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}] [B] \left(\sum_{i=1}^8 N_i r_i \right) \det[J] d\xi d\eta \quad (3.2.58)$$

$$\begin{aligned} \{ A F_{n+1}^i \} &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [\hat{D}_{n+\theta}^{p,i}] \left\{ (\bar{C}_{n+\theta}^i) (\{ \sigma_{n+\theta}^i \} - \{ \sigma_n \}) \right. \\ &\quad \left. + \{ A \epsilon_{n+1}^0 \} + \{ A \epsilon_{n+1}^{c,i} \} \right\} \left(\sum_{i=1}^8 N_i r_i \right) \det[J] d\xi d\eta \\ &\quad - 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T (\{ S_{n+\theta}^i \} A T_{n+1} - \{ Z_1 \} - \{ Z_2 \}) \left(\sum_{i=1}^8 N_i r_i \right) \det[J] d\xi d\eta \\ &\quad + (\{ F_{n+1}^i \} - 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \{ \sigma_{n+1}^i \} \left(\sum_{i=1}^8 N_i r_i \right) \det[J] d\xi d\eta) \end{aligned} \quad (3.2.59)$$

上式の積分はガウスの求積法を用いて計算する。すなわち、次のような近似積分を行う。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m H_i H_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.2.60)$$

- ここで、
 $n = \xi$ 方向積分点数
 $m = \eta$ 方向積分点数
 $\xi_i = \xi$ 方向積分点座標
 $\eta_j = \eta$ 方向積分点座標
 $H_i, H_j =$ 重み係数

四角形 8 節点要素の場合、積分点数は $n = m = 2$ とすれば十分であることが知られており、このとき $H_i = H_j = 1$ であるので、本コードには次の公式が適用される。⁽²³⁾

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.2.61)$$

Fig. 3.3 に示すように、積分点 (ξ_i, η_j) は $(-a, -a)$, $(a, -a)$, $(-a, a)$, (a, a) の 4 点で、 $a = 0.5773502691$ である。

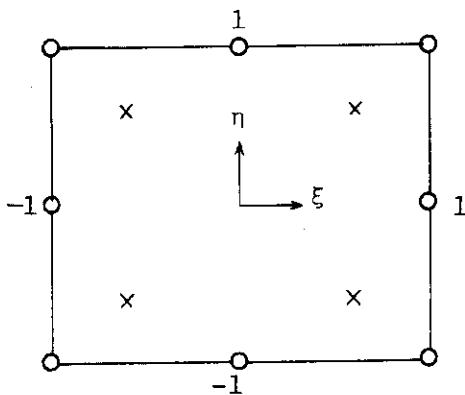


Fig. 3.3 Parabolic Isoparametric Element
with 2×2 Integration Points

(3.2.58) 式および (3.2.59) 式の右辺を求めるために、4 積分点について、 $\{\hat{D}_{n+\theta}^{p_i}\}$, $\{\bar{C}_{n+\theta}^{p_i}\}$, 応力ベクトル, ひずみベクトル, 補正項などを計算する。

3.2.6 境界条件

(1) 幾何学的モデル化と境界条件

力学的ふるまい解析で用いられる有限要素モデル（幾何学的モデル）は、Fig. 3.4 に例示するように、 $1/2$ ペレット長を対象としており、このモデルはペレット側に 4 つ（①～④），被覆管側に 4 つ（⑤～⑧）計 8 つの境界をもつ。これらの境界には、変形の対称性、冷却水圧力、ガス圧力や接触モードなどから定まる条件が与えられる。

(3.2.1) 式における荷重ベクトル $\{F_{n+1}\}$ はこれら 8 つの境界上にある節点に作用する荷重の総和として次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \{F_{n+1}\} &= \{F_{n+1}^{(1)}\} + \{F_{n+1}^{(2)}\} + \{F_{n+1}^{(3)}\} + \{F_{n+1}^{(4)}\} + \{F_{n+1}^{(5)}\} \\ &\quad + \{F_{n+1}^{(6)}\} + \{F_{n+1}^{(7)}\} + \{F_{n+1}^{(8)}\} \end{aligned} \quad (3.2.62)$$

ここで、 $\{F_{n+1}^{(i)}\}$ = 境界 ① の節点に作用する荷重ベクトル

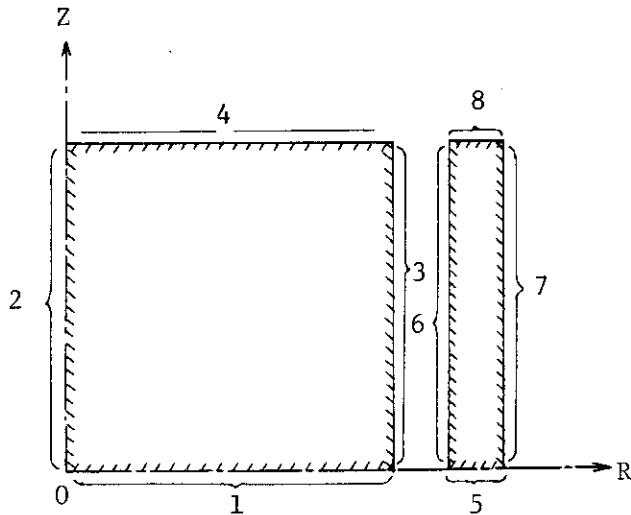


Fig. 3.4 Eight Boundaries of the Geometrical Model

境界①および⑤においては、変形の面対称性を仮定し、これら境界上の節点は軸方向に変位しないものとする。すなわち、

$$\{ \Delta v^{(1)} \} = 0 \quad (3.2.63)$$

$$\{ \Delta v^{(5)} \} = 0 \quad (3.2.64)$$

ここで、 $\{ \Delta v^{(1)} \}$ 、 $\{ \Delta v^{(5)} \}$ はそれぞれ境界①および⑤の節点の軸方向変位増分ベクトルである。

(3.2.63) 式の拘束条件により境界①に発生する拘束力が $\{ F_{n+1}^{(1)} \}$ であり、(3.2.64) 式の条件により境界⑤に生じる拘束力が $\{ F_{n+1}^{(5)} \}$ である。

境界②においては、変形の軸対称性が仮定されるので中実ペレットの場合は、境界上の節点は径方向に変位しないものとする。すなわち、

$$\{ \Delta u^{(2)} \} = 0 \quad (3.2.65)$$

ここで、 $\{ \Delta u^{(2)} \}$ は境界②上の節点の径方向変位増分ベクトルである。

(3.2.65) 式の条件により境界②(回転対称軸)に発生する拘束力が $\{ F_{n+1}^{(2)} \}$ である。ただし、中空ペレットの場合には径方向変位が拘束されないので、 $\{ F_{n+1}^{(2)} \} = 0$ である。

境界⑦には冷却水圧による表面力が作用する。 $\{ F_{n+1}^{(7)} \}$ は、この作用による等価節点荷重ベクトルである。

境界③には境界⑥との相互作用 (PCI) による接触力の作用がある。また境界③には燃料棒内ガス圧の作用もあるが、ペレット内部の割れのすきまに存在するガス圧と打ち消し合うので、

これは考えない。 $\{F_{n+1}^{(3)}\}$ は被覆管（境界⑥）との相互作用による接触力ベクトルである。

境界⑦には PCI による接触力とガス圧の作用を考える。 $\{F_{n+1}^{(6)}\}$ は接触力ベクトルとガス圧による等価節点荷重ベクトルの和として表わされる。

境界⑧では、変形の対称性を仮定して、境界上にある節点群の軸方向自由度を 1 として扱う。

$$\{\Delta v^{(8)}\} = \Delta \bar{v}^{(8)} \quad (3.2.66)$$

ここで、 $\Delta \bar{v}^{(8)}$ は境界⑧上の節点の軸方向変位増分である。境界⑧には上式の条件により発生する拘束力の他に、燃料棒上方の PCI 軸方向引張荷重、ガス圧や冷却水圧による軸方向荷重の作用が考慮される。

境界⑧に作用させる燃料棒上方の PCI による軸方向荷重は経験的に定められるものとする。これの取扱いについては後述する。

境界④ではこの経験的軸方向荷重を圧縮側に作用させる。この軸方向荷重下における面対称を仮定したペレット／ペレット接触問題を解くことにより求められる接触力分布が境界に作用する荷重 $\{F_{n+1}^{(8)}\}$ である。

以上に述べたように、8つの境界に作用する荷重の種類には、変位の拘束による反力、冷却水圧による等価節点力、ガス圧による等価節点力、ペレット／被覆管接触力、軸方向引張荷重、およびこれに釣合うペレット／ペレット接触力がある。荷重の種類を明らかにするために、それぞれ、R, W, G, PC, AX, および PP の添字を付すと、(3.2.62)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{F_{n+1}\} &= \{F_{n+1}^{(1)R}\} + \{F_{n+1}^{(2)R}\} + \{F_{n+1}^{(3)PC}\} + \{F_{n+1}^{(4)PP}\} \\ &+ \{F_{n+1}^{(5)R}\} + \{F_{n+1}^{(6)PC}\} + \{F_{n+1}^{(6)G}\} + \{F_{n+1}^{(7)W}\} \\ &+ \{F_{n+1}^{(8)R}\} + \{F_{n+1}^{(8)AX}\} + \{F_{n+1}^{(8)W}\} + \{F_{n+1}^{(8)G}\} \end{aligned} \quad (3.2.67)$$

これを書き換えて、

$$\{F_{n+1}\} = \{F'_{n+1}\} + \{F''_{n+1}\} + \{F'''_{n+1}\} \quad (3.2.68)$$

ここで、

$$\{F'_{n+1}\} = \{F_{n+1}^{(6)G}\} + \{F_{n+1}^{(7)W}\} + \{F_{n+1}^{(8)W}\} + \{F_{n+1}^{(8)G}\} \quad (3.2.69)$$

$$\{F''_{n+1}\} = \{F_{n+1}^{(1)R}\} + \{F_{n+1}^{(2)R}\} + \{F_{n+1}^{(5)R}\} + \{F_{n+1}^{(8)R}\} \quad (3.2.70)$$

$$\{F'''_{n+1}\} = \{F_{n+1}^{(3)PC}\} + \{F_{n+1}^{(4)PP}\} + \{F_{n+1}^{(6)PC}\} + \{F_{n+1}^{(8)AX}\} \quad (3.2.71)$$

$\{F'_{n+1}\}$ は時刻 t_{n+1} における値が既知として取扱われ、 $\{F''_{n+1}\}$ は既知の境界条件（指

定変位) による拘束力である。

{ F''_{n+1} } は未知量に依存する境界条件によって定まるものであり、これを求めるには、ペレット／被覆管およびペレット／ペレット間の相互作用を解く必要がある。

(2) ペレット／被覆管相互作用

(3.2.71) 式における { $F^{(3)PC}_{n+1}$ } , { $F^{(6)PC}_{n+1}$ } の求め方につき以下に示す。剛性方程式を、Newton-Raphson 法の繰り返しが終了した状態で、(3.2.39), (3.2.40) および (3.2.41) から繰返しの添字 i を省略して、次のように表わす。

$$[K_{n+\theta}] \{ \Delta u_{n+1} \} = \{ \Delta \hat{F}_{n+1} \} \quad (3.2.72)$$

$$[K_{n+\theta}] = \int [B]^T [\hat{D}_{n+\theta}^P] [B] dV \quad (3.2.73)$$

$$\begin{aligned} \{ \Delta \hat{F}_{n+1} \} &= \int [B]^T [\hat{D}_{n+\theta}^P] \left\{ [\bar{C}_{n+\theta}] (\{ \sigma_{n+1} \} - \{ \sigma_n \}) \right. \\ &\quad \left. + \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^0 \} + \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^c \} \right\} dV \\ &\quad + \int [B]^T \left\{ -\{ S_{n+\theta} \} \Delta T_{n+1} + \{ Z_1 \} + \{ Z_2 \} \right\} dV \\ &\quad + (\{ F_{n+1} \} - \int [B]^T \{ \sigma_{n+1} \} dV) \end{aligned} \quad (3.2.74)$$

ここで、(3.2.74) 式の右辺に (3.2.68) 式を代入すると荷重項は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \{ \Delta \hat{F}_{n+1} \} &= \int [B]^T [\hat{D}_{n+\theta}^P] \left\{ [\bar{C}_{n+\theta}] (\{ \sigma_{n+1} \} - \{ \sigma_n \}) \right. \\ &\quad \left. + \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^0 \} + \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^c \} \right\} dV \\ &\quad + \int [B]^T \left\{ -\{ S_{n+\theta} \} \Delta T_{n+1} + \{ Z_1 \} + \{ Z_2 \} \right\} dV \\ &\quad + (\{ F'_{n+1} \} + \{ F''_{n+1} \} + \{ F'''_{n+1} \} - \int [B]^T \{ \sigma_{n+1} \} dV) \\ &= \{ \Delta \hat{F}'_{n+1} \} + \{ F'''_{n+1} \} \end{aligned} \quad (3.2.75)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } \{ \Delta \hat{F}'_{n+1} \} &= \int [B]^T [\hat{D}_{n+\theta}^P] \left\{ [\bar{C}_{n+\theta}] (\{ \sigma_{n+1} \} - \{ \sigma_n \}) \right. \\ &\quad \left. + \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^0 \} + \{ \Delta \varepsilon_{n+1}^c \} \right\} dV \\ &\quad + \int [B]^T \left\{ -\{ S_{n+\theta} \} \Delta T_{n+1} + \{ Z_1 \} + \{ Z_2 \} \right\} dV \end{aligned}$$

$$+ (\{ F'_{n+1} \} + \{ F''_{n+1} \} - \int [B]^T \{ \sigma_{n+1} \} dV) \quad (3.2.76)$$

$\{ \Delta \hat{F}'_{n+1} \}$ は、 $\{ F'''_{n+1} \} = 0$ の状態（非接触状態）の節点節重増分ベクトルである。

(3.2.72) 式に (3.2.75) 式を代入して、

$$(K_{n+\theta}) \{ \Delta u_{n+1} \} = \{ \Delta \hat{F}'_{n+1} \} + \{ F'''_{n+1} \} \quad (3.2.77)$$

と書く。

Fig. 3.5 に示すように、接触し合う 2 つの面をいくつかの節点の対 (Contact node couple) で表現する。接触状態としては、非接触、固着およびすべりの 3 種を考える。

本コードではこのペレット／被覆管接触問題を以下に示す手順で取扱っている。

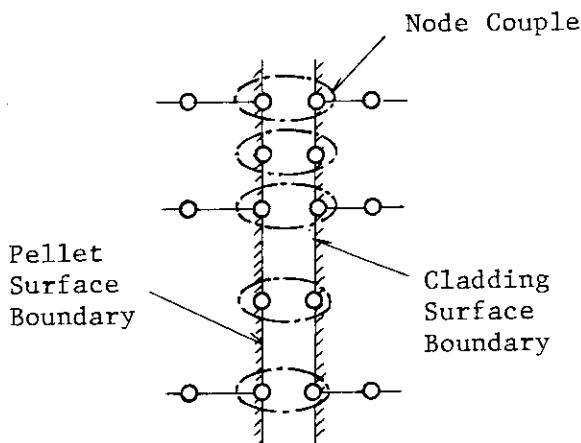


Fig. 3.5 Node Couples Simulating Pellet-Cladding Interaction

- (i) 接触し合う各々の節点対について接触状態を仮定する。
 - (ii) 仮定された状態に対応する境界条件を使って剛性方程式を解く。
 - (iii) 計算された節点変位、接触力から、(i)の仮定が正しいか否かを判定し、誤った仮定が 1 つでもあれば、仮定を修正して(i)に戻り、仮定と計算結果に矛盾がなくなるまで繰り返す。ここで、非接触→接触（固着またはすべり）の変化が生じた場合には、計算結果が状態変化時刻に内挿され、その時刻以後について仮定を修正して(i)に戻り、計算を継続する。
- ペレットと被覆管の間に接触を生じていない場合、(3.2.71) 式において、 $\{ F_{n+1}^{(3)PC} \}$ や $\{ F_{n+1}^{(6)PC} \}$ は零である。このとき後述するように $\{ F_{n+1}^{(4)PP} \}$ 、 $\{ F_{n+1}^{(8)AX} \}$ も零とするので、 $\{ F'''_{n+1} \} = 0$ である。従って、(3.2.77) 式より、

$$(K_{n+\theta}) \{ \Delta u_{n+1} \} = \{ \Delta F_{n+1}^{\wedge} \} \quad (3.2.78)$$

いま、1組の節点対がすべり状態にあり、他の組は全て非接触であるとするとき、 $\{ F_{n+1}^{(3)PC} \}$ および $\{ F_{n+1}^{(6)PC} \}$ は次のように書ける。

$$\{ F_{n+1}^{(3)PC} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.79)$$

$$\{ F_{n+1}^{(6)PC} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -U_{n+1} \\ -V_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.80)$$

ここで、

$$V_{n+1} = \pm \mu U_{n+1} \quad (3.2.81)$$

U_{n+1} = 時刻 t_{n+1} における半径方向接触力

V_{n+1} = 時刻 t_{n+1} における軸方向接触力

μ = ペレット／被覆管摩擦係数

従って (3.2.78) 式は次のような。

$$\begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ \ell \\ m \end{array} \left[\begin{array}{ccccccccc} & & & & & 0 & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ K_{n+\theta} & & & & & -1 & & & \\ & & & & & \mp \mu & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & \pm \mu & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \Delta u_{p,n+1} \\ \Delta v_{p,n+1} \\ \Delta u_{c,n+1} \\ \Delta v_{c,n+1} \\ U_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta F_{n+1}^{\wedge} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.82)$$

$\Delta u_{p,n+1}$ = 時刻 t_{n+1} におけるすべり状態節点対のペレット側節点半径方向変位増分

$\Delta v_{p,n+1}$ = 時刻 t_{n+1} におけるすべり状態節点対のペレット側節点軸方向変位増分

$\Delta u_{c,n+1}$ = 時刻 t_{n+1} におけるすべり状態節点対の被覆管側節点半径方向変位増分

$\Delta v_{c,n+1}$ = 時刻 t_{n+1} におけるすべり状態節点対の被覆管側節点軸方向変位増分

上式で接触節点自由度 i, j, k, l に関する方程式は、

$$K_{n+\theta}^{(i)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(i)} + U_{n+1} \quad (3.2.83)$$

$$K_{n+\theta}^{(j)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(j)} \pm \mu U_{n+1} \quad (3.2.84)$$

$$K_{n+\theta}^{(k)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(k)} - U_{n+1} \quad (3.2.85)$$

$$K_{n+\theta}^{(l)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(l)} \mp \mu U_{n+1} \quad (3.2.86)$$

$$\text{また, } -\Delta u_{p,n+1} + \Delta u_{c,n+1} = 0 \quad (3.2.87)$$

次に 1 組の節点対が固着状態にあり、他の組がすべて非接触であるときの剛性方程式を例示すると次のようになる。

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array} \right] \\
 i \\
 j \\
 k \\
 l \\
 \hline
 \left[\begin{array}{cccc}
 & 0 & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 K_{n+\theta} & -1 & 0 & 0 \\
 & 0 & -1 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{c}
 \Delta u_{p,n+1} \\
 \Delta v_{p,n+1} \\
 \Delta u_{c,n+1} \\
 \Delta v_{c,n+1} \\
 \hline
 U_{n+1} \\
 V_{n+1}
 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c}
 \Delta \hat{F}_{n+1}^{(i)} \\
 \vdots \\
 \Delta \hat{F}_{n+1}^{(l)} \\
 \hline
 0 \\
 0
 \end{array} \right\} \quad (3.2.88)$$

$\Delta u_{p,n+1}$ = 時刻 t_{n+1} における固着状態節点対のペレット側半径方向変位増分

$\Delta v_{p,n+1}$ = 時刻 t_{n+1} における固着状態節点対のペレット側軸方向変位増分

$\Delta u_{c,n+1}$ = 時刻 t_{n+1} における固着状態節点対の被覆管側半径方向変位増分

$\Delta v_{c,n+1}$ = 時刻 t_{n+1} における固着状態節点対の被覆管側軸方向変位増分

上式で接触節点自由度 i, j, k, l に関する剛性方程式は、

$$K_{n+\theta}^{(i)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(i)} + U_{n+1} \quad (3.2.89)$$

$$K_{n+\theta}^{(j)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(j)} + V_{n+1} \quad (3.2.90)$$

$$K_{n+\theta}^{(k)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(k)} - U_{n+1} \quad (3.2.91)$$

$$K_{n+\theta}^{(l)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(l)} - V_{n+1} \quad (3.2.92)$$

$$\text{また, } -\Delta u_{p,n+1} + \Delta u_{c,n+1} = 0 \quad (3.2.93)$$

$$-\Delta v_{p,n+1} + \Delta v_{c,n+1} = 0 \quad (3.2.94)$$

である。

接触状態判定およびその後の処理は以下のように行なう。

(i) 仮定が非接触の場合

変位の重なりがないかをチェックする。すなわち,

$$g_{n+1} = g_n - \Delta u_{p,n+1} + \Delta u_{c,n+1} \quad (3.2.95)$$

ここで, g_{n+1} = 時刻 t_{n+1} におけるギャップ幅

上式において, $g_{n+1} > 0$ のときは収束, $g_{n+1} \leq 0$ のときは次式により, 状態変化点まで時刻を内挿し,

$$t_{n+\alpha} = \frac{t_{n+1} - t_n}{g_n - g_{n+1}} \quad g_n + t_n \quad (3.2.96)$$

時刻 $t_{n+\alpha}$ から t_{n+1} までの計算は仮定を「固着」に改めて行なう。

(ii) 仮定が固着の場合

接触力ベクトルで判定する。すなわち,

$$U_{p,n+1} < 0 \quad \text{かつ} \quad |V_{p,n+1}| < \mu |U_{p,n+1}| \quad (3.2.97)$$

を満足するときは接触状態は収束,

$$U_{p,n+1} < 0 \quad \text{かつ} \quad |V_{p,n+1}| \geq \mu |U_{p,n+1}| \quad (3.2.98)$$

のときは, 仮定を「すべり」に改めて再計算する。また,

$$U_{p,n+1} \geq 0 \quad (3.2.99)$$

のときは、固着から非接触への変化であり、次式により状態変化点まで時刻を内挿し、

$$t_{n+\alpha} = \frac{t_{n+1} - t_n}{U_{p,n} - U_{p,n+1}} \cdot U_{p,n} + t_n \quad (3.2.100)$$

時刻 $t_{n+\alpha}$ から t_{n+1} までの計算は仮定を「非接触」に改めて行なう。

(iii) 仮定がすべりの場合

接触力ベクトルで判定する。すなわち、

$$U_{p,n+1} < 0 \quad \text{かつ} \quad |V_{p,n+1}| \geq \mu + U_{p,n+1} \quad (3.2.101)$$

を満足するときは接触状態は収束とする。ただし、

$$U_{p,n+1} < 0 \quad \text{かつ} \quad |V_{p,n+1}| < \mu + U_{p,n+1} \quad (3.2.102)$$

のときは仮定を「固着」に改める。

また、次の条件を満たすときも仮定を「すべり」から「固着」に改める。

$$U_{p,n+1} < 0 \quad \text{かつ} \quad |v_{p,n+1}^*| \leq |v_{c,n+1}^*| \quad (3.2.103)$$

ここで、
 $v_{p,n+1}^*$ = 接触開始以後のペレット側節点軸方向変位

$v_{c,n+1}^*$ = 接触開始以後の被覆管側節点軸方向変位

一方、次の条件を満たすときは、

$$U_{p,n+1} \geq 0 \quad (3.2.104)$$

「すべり」から「非接触」への変化であり、(3.2.100)式により状態変化点まで時刻を内挿し、時刻 $t_{n+\alpha}$ から t_{n+1} までの計算は仮定を「非接触」に改めて行なう。

Fig. 3.5 に示すような複数の接触節点対を持つ系を取扱う場合、各々の節点対に関して独立に接触状態の収束を図ろうとすると、全体の系に関して収束を得るまでに数多くの繰り返しが必要となることが経験された。そこで、次のような付加条件を与えて収束のための繰り返し数の削減を試みた。

- (i) 接触状態にある節点対については、まず全て「固着」と仮定して解いてみる。
 - (ii) この中で、 $|V_{p,n+1}| > \mu + U_{p,n+1}$ の条件を満足する節点対があった場合、この節点対およびこれより上位置にある節点対について、仮定を「すべり」と改める。
 - (iii) この時、すべりの向きを揃える。すなわち、摩擦力はペレット表面で全て下向き、被覆管内面で全て上向きとする。ただし、「すべり」と判断された節点対の「固着」仮定時の接触力接線成分が全て逆向きの場合はすべりの向きを逆転させる。
- 以上のように方法を用いると、通常の場合 3 回以内の反復で全体の系に関する収束が得られるようになった。

(3) 軸方向荷重

いま、ペレット／被覆管間で1組の節点対が「すべり」状態にあり、他の組は全て「非接触」である場合を考える。このときの境界⑧に作用する軸方向荷重を次式で近似的に表わす。

$$\{ F_{n+1}^{(8)AX} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mp \alpha \mu U_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.105)$$

ここで、 α は経験的パラメータであり、解析対象としている1/2ペレット長相当部において発生する軸方向接触力の α 倍の荷重を境界⑧に与えるものである。

境界④上の節点がこの軸方向荷重に釣合う荷重を支えるとすると、

$$\{ F_{n+1}^{(4)PP} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm \alpha \mu U_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.106)$$

以上において、境界⑧上の節点群の軸方向自由度は1であり、境界④上の軸方向荷重を支える節点群の軸方向自由度も1として扱われる。

これらの条件を加えると、(3.2.82)式は次のようになる。

$$\begin{array}{c}
 m \\
 | \\
 i \\
 j \\
 k \\
 l \\
 n \\
 | \\
 0 \cdots 0 \quad 0 \quad 0 \cdots 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \cdots 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \left[K_{n+8} \right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mp \alpha \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ \mp \mu \\ 1 \\ \pm \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm \alpha \mu \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Delta v}_{p,n+1} \\ \Delta u_{p,n+1} \\ \Delta v_{p,n+1} \\ \Delta u_{c,n+1} \\ \Delta v_{c,n+1} \\ \vdots \\ \bar{\Delta v}_{c,n+1} \\ U_{n+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta F'_{n+1} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.2.107)$$

ここで、 $\Delta \bar{v}_{p,n+1}$ = 境界④において軸方向荷重を支える節点群（軸方向 1 自由度）の軸方向変位増分

$\Delta \bar{v}_{c,n+1}$ = 境界⑧上節点群（軸方向 1 自由度）の軸方向変位増分

これらの境界の軸方向自由度 m および n に関する方程式は、

$$K_{n+\theta}^{(m)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(m)} \pm \alpha \mu U_{n+1} \quad (3.2.108)$$

$$K_{n+\theta}^{(n)} \{ \Delta u_{n+1} \} = \Delta \hat{F}_{n+1}^{(n)} \mp \alpha \mu U_{n+1} \quad (3.2.109)$$

と書ける。

次に 1 組の節点対が固着状態にあり、他の組がすべて非接触のときを例にとる。このとき、

$$\{ F_{n+1}^{(4)PP} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha V_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.110)$$

$$\{ F_{n+1}^{(8)AX} \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha V_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2.111)$$

とする。これらの条件を加えると、(3.2.88) 式は、

(3.2.112)

この場合の軸方向自由度 m および n に関する方程式は、

$$K_{n+\theta}^{(m)} \quad \{ A u_{n+1} \} = A \wedge F_{n+1}^{(m)} + \alpha V_{n+1} \quad (3.2.113)$$

$$K_{n+\theta}^{(n)} \{ A u_{n+1} \} = A \hat{F}_{n+1}^{(n)} - \alpha V_{n+1} \quad (3.2.114)$$

である。

境界④において軸方向荷重を支える領域の変化は、ペレット／ペレットの接触問題であり、本コードではペレットの変形が境界④に関して対称であると仮定してこれを解くようしている。ただしこの場合、境界④に関する変形の対称性の仮定から、「すべり」状態は存在しない。したがって接触モードは「非接触」と「接触（固着）」の2種のみである。

ペレット／ペレット接触状態の判定およびその後の処理手順は次の通りである。

ペレット／被覆管の節点対の 1 つでも接触するとき、すなわち、(3.2.106) あるいは(3.2.110) 式で表わされる軸方向荷重がペレット端面(境界④)に作用するとき、端面上で最大の軸方向座標を持つ節点 i について仮定を「固着」とし、この節点に軸方向荷重を作用させる。

ペレット端面上の他の非接触の節点 j の軸方向座標 Z_j が前段「固着」であった節点 i の軸方向座標 \bar{Z}_i を越えた場合、節点 j の接触状態が「非接触」から「固着」に変化したとして、次式により状態変化点まで時刻を内挿する。

$$t_{n+\alpha} = \frac{\bar{Z}_{i,n} - Z_{j,n}}{Z_{j,n+1} - Z_{j,n} - (\bar{Z}_{i,n+1} - \bar{Z}_{i,n})} (t_{n+1} - t_n) + t_n \quad (3.2.113)$$

時刻 $t_{n+\alpha}$ から t_{n+1} までは、節点 j の仮定を固着に改ためて計算する。このとき、節点 i と j の軸方向自由度は共通として扱う。すなわち、ペレット端面上で固着にある節点群の軸方向自由度は 1 とする。

接触状態にある節点の時刻 t_{n+1} における軸方向接触力は (3.2.1) 式より求められる。すなわち、

$$\{ F_{n+1} \} = \int [B]^T \{ \sigma_{n+1} \} dV \quad (3.2.1)$$

において、境界④に作用する荷重は軸方向接触力 $\{ F_{n+1}^{(4)PP} \}$ のみであるから、

$$\{ F_{n+1}^{(4)PP} \} = \{ F_{n+1} \} = \int [B]^T \{ \sigma_{n+1} \} dV \quad (3.2.129)$$

上式で求められるある節点の軸方向接触力を V_{n+1} と書く。 $V_{n+1} < 0$ であると、この節点は「固着」を持続するが、 $V_{n+1} \geq 0$ となると、「固着」から「非接触」への状態変化が生じたことになり、次式により時刻を内挿する。

$$t_{n+\alpha} = \frac{V_n}{V_n - V_{n+1}} (t_{n+1} - t_n) + t_n \quad (3.2.130)$$

この時刻以後については仮定を「非接触」に改ためて計算を行なう。

3.2.7 Skyline 法

FEMによる構造解析は、最終的に (3.2.107) あるいは (3.2.112) 式に示されるような連立 1 次方程式を解く問題に帰着する。接触力の釣合い条件式を除くと、その連立方程式の元数は節点自由度数であり、その部分のマトリクスは対称である。(3.2.107) や (3.2.112) 式に示すように、「接觸」の境界条件が付加された場合のみ、非対称成分が現われる。

本コードでは、連立方程式の解法に Skyline 法^[27] を採用している。この方法は、Gauss の消去法の演算手順を改良して、作業領域および演算回数の削減を図ったものである。

解くべき方程式は一般に次のように書ける。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \quad ① \\ a_{21}^{(0)} x_1 + a_{22}^{(0)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(0)} x_n = b_2^{(0)} \quad ② \\ a_{31}^{(0)} x_1 + a_{32}^{(0)} x_2 + \dots + a_{3n}^{(0)} x_n = b_3^{(0)} \quad ③ \\ \dots \\ a_{n1}^{(0)} x_1 + a_{n2}^{(0)} x_2 + \dots + a_{nn}^{(0)} x_n = b_n^{(0)} \quad ④ \end{array} \right. \quad (3.2.131)$$

各係数 a_{ij} および既知荷重増分ベクトル b_i の右上の添字は消去の過程を明確にするために付したものである。

消去の第1段は、方程式②, ③, ……⑩の x_1 を含む項、すなわち $a_{21}^{(0)}x_1, a_{31}^{(0)}x_1 \dots\dots a_{n1}^{(0)}x_1$ を0にすることである。まず、 $a_{21}^{(0)}x_1$ を消去するために①式に $a_{21}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$ を乗じて②からこれを引けば

$$\left(a_{22}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{12}^{(0)} \right) x_2 + \dots\dots + \left(a_{2n}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1n}^{(0)} \right) x_n = b_2^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} b_1^{(0)}$$

となる。つぎに $a_{31}^{(0)}x_1$ を消去するために①式に $a_{31}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$ を乗じて③から引く。これを繰り返し $a_{n1}^{(0)}x_1$ まですべてを消去すれば結局方程式は次の形になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \dots\dots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)} \quad ①' \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots\dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \quad ②' \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \dots\dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \quad ③' \\ \dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots\dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \quad ⑩' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - \frac{a_{31}^{(0)}a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \dots\dots \\ b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} b_1^{(0)}, \quad b_3^{(1)} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} b_1^{(0)}, \dots\dots \end{array} \right.$$

つぎに消去の第2段では③', ④', ……⑩' の x_2 を含む項 $a_{32}^{(1)}x_2, \dots\dots a_{n2}^{(1)}x_2$ を0にする。このための手順は第1行の①' を除いて②', ……, ⑩' を新たに与えられた方程式のように考えれば第1段の消去と全く同様である。

順次に消去を進めると、最終的には左辺が右上三角形をしたつぎの連立方程式に帰着される。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \dots\dots + a_{1,n-1}^{(0)}x_{n-1} + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots\dots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)} \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right. \quad (3.2.132)$$

ここで各係数は一般的に次のように書ける。

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \\ \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} i = k+1, \dots, N \\ j = k, \dots, N \end{array} \quad (3.2.133)$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)}, \quad i = k+1, \dots, N \quad (3.2.134)$$

(3.2.132) 式を解くことは容易である。すなわち最後の式からただちに

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad (3.2.135)$$

が求められる。これを最後から 2 番目の式に代入して x_{n-1} が求められる。一般に次式

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - a_{k,k+1}^{(k-1)} x_{k+1} - a_{k,k+2}^{(k-1)} x_{k+2} \dots}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (3.2.136)$$

によって順次それまでに得られた解を代入していくことにより x_1 までのすべての値が求められる。

以上をガウスの消去法という。この方法では消去のたびごとに係数の書きかえが必要であるが、以下の手順 (Crout reduction) を用いれば、(3.2.132) 式の $a_{ij}^{(k)}$ および $b_i^{(k)}$ をこれら初期値 $a_{ij}^{(0)}$ および $b_i^{(0)}$ から直接導くことができる。

いま (3.2.133) および (3.2.134) 式は、(3.2.132) 式から明らかな $k = i - 1$ の関係を用いて次のように表わされる。

$$a_{ij}^{(i-1)} = a_{ij}^{(i-2)} - \frac{a_{i,i-1}^{(i-2)} a_{i-1,j}^{(i-2)}}{a_{i-1,i-1}^{(i-2)}}$$

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(i-2)} - \frac{a_{i,i-1}^{(i-2)}}{a_{i-1,i-1}^{(i-2)}} b_{i-1}^{(i-2)}$$

例えば

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)} a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

$$\begin{aligned}
 a_{3j}^{(2)} &= a_{3j}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = a_{3j}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)} a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \\
 &= a_{3j}^{(0)} - \sum_{k=1}^2 \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}
 \end{aligned}$$

と書けるので一般的に、

$$a_{ij}^{(i-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad (3.2.137)$$

同様に、

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(0)} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ki}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)} \quad (3.2.138)$$

となる。これらに、 $i, j = 2, 3 \dots n$ を順次代入していくことにより $a_{nn}^{(n-1)}, b_n^{(n-1)}$ までの全ての値が求められる。

本コードで解くべき連立方程式の係数マトリクスは部分的に非対称の成分を含んでいる。対称マトリクス部については次式で $a_{ij}^{(i-1)}$ および $b_i^{(i-1)}$ を求める。

$$a_{ij}^{(i-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ki}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad \left. \begin{array}{l} j = 2, \dots, m \\ i = 2, \dots, j \end{array} \right\} \quad (3.2.139)$$

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(0)} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ki}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)} \quad \left. \begin{array}{l} i = 2, \dots, m \end{array} \right\} \quad (3.2.140)$$

ここで、 $m =$ 対称マトリクス部の自由度数

非対称部については次式を用いる。

$$a_{ij}^{(i-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad \left. \begin{array}{l} i > m \text{ で} \\ j = 2, \dots, n \\ j > m \text{ で} \\ i = 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (3.2.141)$$

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(0)} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = m, \dots, n \\ \end{array} \right. \quad (3.2.142)$$

ここで, $n = \text{マトリクス全自由度数}$

本手順においても (3.2.132) 式の処理には (3.2.135) および (3.2.136) 式と同様の後退代入が行われる。

いま係数マトリクスが模式的に Fig. 3.6 のようであるとする。図において実線で囲まれる領域の係数を 1 次元配列に記憶することを考える。

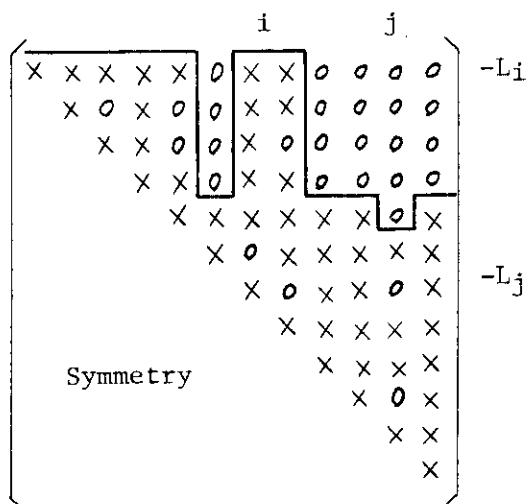


Fig. 3.6 Schematic Coefficient Matrix

第 j 列において始めて非零成分が現われる行番号を L_j とすると、 i 行 j 列の係数 a_{ij} は 1 次元配列の

$$i - j + \sum_{k=1}^j (k + L_k + 1) \quad (3.2.143)$$

番目の位置に記憶される。

なぜなら、 k 列において記憶されるべき係数の数は $k - L_k + 1$ であり、 a_{jj} の記憶先は $\sum_{k=1}^j (k - L_k + 1)$ と書けるからである。

このような記憶方式およびこれに伴う連立方程式解法は Skyline 法と呼ばれる。以下にこの記憶方式を用いたときの解法を示す。

いま (3.2.139) および (3.2.140) 式で表わされる手順 (Grout Reduction) を j 列に

適用することを考える。 L_j , L_i をそれぞれ i 列, j 列で始めて非零係数が現われる行番号と書くと、 a_{ij} は a_{ik} 又は a_{ki} が 0 ならば修正されないので、これらの式の総和 Σ は $k = 1$ から始める必要はない、 L_j と L_i の大きな方からとればよい。また、 $r < L_j$ のとき $a_{rj} = 0$ なので、 j 列の最初の非零係数は修正されないまま残っている。したがって $i = L_j + 1$ からの評価を行えばよい。この手順 (modified Crout reduction) は次のように表わされる。

$$a_{ij}^{(i-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=k_0}^{i-1} \hat{a}_{ki}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} \quad (3.2.144)$$

ここで、
 $\hat{a}_{ki}^{(k-1)} = a_{ki}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$

$$j = 2, \dots, m$$

$$i = L_j + 1, \dots, j - 1$$

$$k_0 = \max(L_i, L_j)$$

および

$$a_{jj}^{(j-1)} = a_{jj}^{(0)} - \sum_{k=L_j}^{j-1} \hat{a}_{kj}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} \quad \left. \right\} \quad j = 2, \dots, m \quad (3.2.144a)$$

また、

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(0)} - \sum_{k=k_0}^{i-1} \hat{a}_{ki}^{(k-1)} b_k^{(k-1)} \quad \left. \right\} \quad \begin{aligned} i &= L_b + 1, \dots, m \\ k_0 &= \max(L_i, L_b) \end{aligned} \quad (3.2.145)$$

L_b = ベクトル { b } の最初の非零成分行番号

ここで、

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(i-1)} / a_{ii}^{(i-1)} \quad \left. \right\} \quad i = L_b, \dots, m \quad (3.2.145a)$$

と置いて記憶する。

後退入の手順は次のようになる。

$$x_k = b_k^{(k-1)} \quad \left. \right\} \quad k = 1, \dots, m \quad (3.2.146)$$

$$x_k = x_k - \hat{a}_{ki}^{(k-1)} x_i \quad \left. \right\} \quad \begin{aligned} i &= m, m-1, \dots, 2 \\ k &= L_i, L_i+1, \dots, i-1 \end{aligned} \quad (3.2.147)$$

ここで、(3.2.144) 式が適用されるごとに、上式の $a_{kj}^{(k-1)}$ は $\hat{a}_{kj}^{(k-1)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$ に置換され記憶される。

次に上記の $a_{ij}^{(i-1)}$, $b_i^{(i-1)}$ の計算において手順繰返し回数の上限を消去される方程式の数にセットすることを考える。

この手順 (partial reduction) は次のように表わされる。

対称マトリクス部について係数マトリクスは,

$$a_{ij}^{(i-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=k_0}^{i-1} \hat{a}_{ki}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} \quad (3.2.148)$$

ここで,

$$\hat{a}_{ki}^{(k-1)} = a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \quad (3.2.148a)$$

$$j = 2, \dots, m$$

$$i = L_j + 1, \dots, \min(p, j)$$

$$k_0 = \max(L_i, L_j)$$

p = マトリクス対称部で消去される方程式の数

および,

$$a_{jj}^{(j-1)} = a_{jj}^{(0)} - \sum_{k=L_j}^{j-1} \hat{a}_{kj}^{(k-1)} a_{kj} \quad \left. \right\} j = 2, \dots, p \quad (3.2.149)$$

ここで,

$$\hat{a}_{kj}^{(k-1)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \quad \left. \right\} \begin{array}{l} j = 2, \dots, m \\ k = L_j, \dots, \min(p, j) \end{array} \quad (3.2.149a)$$

$j = 2$ から $j = p$ に対して, (3.2.149a) 式は (3.2.149) 式と同時に評価される。 $j = p + 1$ から $j = m$ までは (3.2.149a) 式の評価は (3.2.148) 式の処理の後に行う。

一方, 既知ベクトルは

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(0)} - \sum_{k=k_0}^{i-1} \hat{a}_{ki}^{(k-1)} b_k^{(k-1)} \quad (3.2.150)$$

$$\text{ここで, } i = L_b + 1, \dots, p$$

$$k_0 = \max(L_i, L_b)$$

ただし,

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(i-1)} / a_{ii}^{(i-1)} \quad \left. \right\} i = L_b, \dots, p \quad (3.2.150a)$$

と置いておく。

マトリクス非対称部については,

$$a_{ij}^{(i-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=k_0}^{i-1} \hat{a}_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)} \quad (3.2.151)$$

ここで,

$$\hat{a}_{ik}^{(k-1)} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \quad (3.2.151a)$$

$$\begin{aligned} j &= m+1, \dots, n \text{において} \\ i &= L_j + 1, \dots, \min(p_n, j) \\ i &= m+1, \dots, n \text{において} \\ j &= L_i + 1, \dots, \min(p_n, j) \end{aligned}$$

および,

$$a_{jj}^{(j-1)} = a_{jj}^{(0)} - \sum_{k=L_j}^{j-1} a_{jk}^{(k-1)} a_{kj} \quad \left\{ \begin{array}{l} j = p+1, \dots, p_n \\ \end{array} \right. \quad (3.2.152)$$

ここで,

$$a_{jk}^{(k-1)} = a_{jk}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} j = m+1, \dots, n \\ k = L_j, \dots, \min(p_n, j) \end{array} \right. \quad (3.2.152a)$$

p_n = 対称部および非対称部で消去される方程式の全数

また既知ベクトルは,

$$b_i^{(i-1)} = b_i^{(0)} - \sum_{k=k_0}^{i-1} a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k-1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = p+1, \dots, p_n \\ \end{array} \right. \quad (3.2.153)$$

$$\text{ただし, } b_i^{(i-1)} = b_i^{(i-1)} / a_{ii}^{(i-1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = p+1, \dots, p_n \\ \end{array} \right. \quad (3.2.153a)$$

と置いておく。

以上の手順における後退代入は次式で行われる。

$$x_k = b_k^{(k-1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} = 1, \dots, p_n \\ \end{array} \right. \quad (3.2.154)$$

$$x_k = x_k - \sum_{i=L_k}^{n-1} a_{ki}^{(k-1)} x_i \quad \left\{ \begin{array}{l} i = n, n-1, \dots, 2 \\ k = L_i, \dots, \min(p_n, i-1) \end{array} \right. \quad (3.2.154a)$$

(3.2.148) 式から (3.2.156) 式までに示される手順が本コードにおける連立方程式の解法である。

3.3 物性値

本コードで使用する物性値の一覧を Table 3.1 に示す。以下にいくつかの物性値、モデルについて説明を補足する。

(1) やきしまり

ペレットのやきしまりは次式で計算する。

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V^s}{V} (1 - e^{-C^s_{BU}}) + \frac{\Delta V^l}{V} (1 - e^{-C^l_{BU}}) \quad (3.3.1)$$

ここで, $\frac{\Delta V}{V}$ = やきしまりによる体積収縮 (%)

$$\frac{\Delta V^s}{V} = \text{不安定ポアの消滅による体積収縮 (\%)}$$

$$\frac{\Delta V^1}{V} = \text{準安定ポアの消滅による体積収縮 (\%)}$$

$$B.U. = \text{燃焼度 (GWD/t UO}_2\text{)}$$

$$C_s, C_1 = \text{やきしまりの燃焼度依存性を表わすパラメータ}$$

上式において、 $\Delta V/V$ および C^1 はそれぞれ 0.5 % および 0.4605 が内蔵されている。従って右辺第 2 項により、燃焼度 5 GWD/t UO₂ において 0.45 % の体積収縮が生じる。 $\Delta V/V$ および C^1 は再燃結データ等により求められる経験的パラメータである。

(2) ホットプレス

降伏関数および流れ則は (3.2.22) および (3.2.23) 式を再記して、

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{3}{2(F+G+H)} \{ H(\sigma_r - \sigma_z)^2 + F(\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + G(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 2N\tau_{rz}^2 \} + 3\alpha(\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.22)$$

$$\{ A \epsilon_{n+1}^p \} = A \bar{\epsilon}_{n+1}^p \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta} \quad (3.2.23)$$

等方性 ($H = F = G = 1$, $N = 3$) を仮定すると

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_r} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \left\{ \frac{2\sigma_r - \sigma_z - \sigma_\theta}{3} + 2\alpha(\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta) \right\}$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau_{rz}} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \tau_{rz}$$

となる。したがって、

$$\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}_{n+\theta} = \frac{1}{\bar{\sigma}_{n+\theta}} \begin{bmatrix} 1 + 3\alpha & -0.5 + 3\alpha & -0.5 + 3\alpha & 0 \\ & 1 + 3\alpha & -0.5 + 3\alpha & 0 \\ & & 1 + 3\alpha & 0 \\ & & & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \{ \sigma_{n+\theta} \} \quad \text{Symmetry} \quad (3.3.2)$$

である。これを (3.2.23) 式に代入し、整理すると、

$$\{ \Delta \varepsilon_{n+1}^p \} = \frac{(1+3\alpha) \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\bar{\sigma}_{n+\theta}} \begin{bmatrix} 1 & -\nu^p & -\nu^p & 0 \\ & 1 & -\nu^p & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{Symmetry} & & & \frac{2}{3(1+3\alpha)} \end{bmatrix} \{ \sigma_{n+\theta} \} \quad (3.3.3)$$

ここで, $\nu^p = \frac{0.5 - 3\alpha}{1 + 3\alpha}$ である。

塑性による体積ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{h,n+\theta}^p$ は,

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{h,n+1}^p &= \Delta \varepsilon_{n+1}^{p,r} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{p,z} + \Delta \varepsilon_{n+1}^{p,\theta} \\ &= \frac{(1+3\alpha) \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\bar{\sigma}} (1 - 2\nu^p) (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta) \\ &= \frac{9\alpha \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\bar{\sigma}} (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

である。

またクリープの場合も (3.3.2) が適用されるので、同様に、クリープによる体積ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{h,n+1}^c$ は,

$$\Delta \varepsilon_{h,n+1}^c = \frac{9\alpha \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^c}{\bar{\sigma}} (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta) \quad (3.3.4)$$

したがって、塑性およびクリープ流動に伴う体積ひずみ変化（ホットプレス） $\Delta \varepsilon_{h,n+1}$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{h,n+1} &= \Delta \varepsilon_{h,n+1}^p + \Delta \varepsilon_{h,n+1}^c \\ &= \frac{9\alpha}{\bar{\sigma}} (\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^c) (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\theta) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

(3) スウェーリング

ペレットのスウェーリングは、被覆管による拘束の有無に依存するとして扱われる。すなわち、ペレットと被覆管が非接触（節点対がすべて非接触）の場合には、非拘束スウェーリングの式が用いられ、一方、接触がある場合には、拘束スウェーリング式が用いられる。このとき、ペレット内にリロケーションによるひずみが残存していれば、リロケーションひずみが非拘束スウェーリング

によっても埋められ、(3.2.9)式に示す ϵ_i^{rel} の減少によりヤング率が大きくなる（剛性が増加する）として扱っている。

(4) ジルカロイのクリープ

Table 2.2 に示したジルカロイのクリープ式はひずみ硬化型の表示であるが、これはMATPRO-09における時間硬化型の表式を以下に示す手順でひずみ硬化型に変換したものである。

MATPRO-09では、クリープ式を次のように表わしている。

$$\dot{\epsilon}_c = K \phi (\sigma + Be^{C\sigma}) \exp(-10,000/RT) t^{-\frac{1}{2}} \quad (3.3.6)$$

ここで、 $K = 5.129 \times 10^{-29}$

$B = 7.252 \times 10^2$

$C = 4.976 \times 10^{-8}$

$\dot{\epsilon}_c$ = クリープ速度 (h^{-1})

$R = 1.987$ (cal/mole · K)

T = 温度 (K)

σ = 応力 (N/m²)

t = 時間 (h)

上式を時間について積分すると、

$$\epsilon_c = 2 K \phi (\sigma + Be^{C\sigma}) \exp(10,000/RT) t^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.7)$$

(3.3.7) および (3.3.7) 式から時間を消去すると、

$$\dot{\epsilon}_c = \frac{2}{\epsilon_c} \left[K \phi (\sigma + Be^{C\sigma}) \exp(10,000/RT) \right]^2 \quad (3.3.8)$$

が得られる。

Table 3.1 Material Properties

MATERIAL PROPERTY	EXPRESSION	REF.										
UO ₂ PELLET THERMAL CONDUCTIVITY	<p>For 0°C < T < 1,650°C:</p> $k = \frac{[1-\beta(1-D)]}{[1-\beta(1-0.95)]} \left[\frac{K_1}{K_2 + T} + K_3 \exp(K_4 T) \right]$ <p>For 1,650°C < T < 2,840°C:</p> $k = \frac{[1-\beta(1-D)]}{[1-\beta(1-0.95)]} \left[K_5 + K_3 \exp(K_4 T) \right]$ <p>where</p> <p>k = thermal conductivity in (W cm⁻¹ K⁻¹) D = fraction of theoretical density β = porosity coefficient = 2.58 - 0.58 × 10⁻³ T T = temperature (°C).</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>K₁</th><th>K₂</th><th>K₃</th><th>K₄</th><th>K₅</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>40.4</td><td>464</td><td>1.216 × 10⁻⁴</td><td>1.867 × 10⁻³</td><td>0.0191</td></tr> </tbody> </table>	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	40.4	464	1.216 × 10 ⁻⁴	1.867 × 10 ⁻³	0.0191	(a)
K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅								
40.4	464	1.216 × 10 ⁻⁴	1.867 × 10 ⁻³	0.0191								
UO ₂ PELLET THERMAL EXPANSION	$\frac{\Delta L}{L} = -4.972 \times 10^{-4} + 7.107 \times 10^{-6} T + 2.581 \times 10^{-9} T^2 + 1.140 \times 10^{-13} T^3$ <p>where</p> <p>$\frac{\Delta L}{L}$ = linear thermal expansion T = temperature (°C).</p>	(a)										
UO ₂ PELLET YOUNG'S MODULUS	$E = 2.26 \times 10^{11} (1 - 1.131 \times 10^{-4} T) [1 - 2.62 (1 - D)]$ <p>where</p> <p>E = Young's modulus (pascals) T = temperature (°C) (range 0 - 1,300°C) D = fraction of theoretical density.</p>	(a)										
UO ₂ PELLET POISSON'S RATIO	v = 0.316	(a)										

Table 3.1 Material Properties (contd. 2/5)

MATERIAL PROPERTY	EXPRESSION	REF.
	$\dot{\epsilon} = \frac{(A_1 + A_2 F) \sigma e^{-Q_1/RT}}{(A_3 + D) G^2} + \frac{A_4 \sigma^{4.5} e^{-Q_2/RT}}{(A_6 + D)} + A_7 \sigma F e^{-Q_3/RT}$ <p>where</p> $A_1 = 9.728 \times 10^6 \quad A_7 = 9.24 \times 10^{-28}$ $A_2 = 3.240 \times 10^{-12} \quad Q_1 = 90,000$ $A_3 = -87.7 \quad Q_2 = 132,000$ $A_4 = 1.376 \times 10^{-4} \quad Q_3 = 5,200 \quad (a)$ $A_6 = -90.5$ $F = \text{fission rate } (8.4 \times 10^{17} \text{ to } 1.18 \times 10^{20} \text{ fissions/m}^3\text{-sec})$ $\sigma = \text{stress } (1,000 \text{ to } 16,000 \text{ psi})$ $R = \text{gas constant } (\text{cal/mol-K})$ $T = \text{temperature } (713 \text{ to } 2,073 \text{ K})$ $D = \text{density } (0.92 \text{ to } 0.98 \text{ TD})$ $G = \text{grain size } (4 \text{ to } 35\mu), \text{ and stoichiometry } 2.00 \text{ to } 2.01.$	
UO ₂ PELLET CREEP RATE		
SWELLING	<p>For unrestrained condition</p> $\frac{\Delta V}{V} = 2.413 \times 10^{-5} T_1 + 1.0634 \times 10^{-7} T_1 + 0.11509 \text{ BU}$ $+ 2.86 \times 10^{-5} T_1 \ln \text{BU} - 2.0184 \times 10^{-5} T_1 \ln \text{GR}$ <p>where</p> $\frac{\Delta V}{V} = \text{volumetric swelling} \quad (c)$ $T_1 = T - 900$ $T = \text{temperature } (^{\circ}\text{C})$ $\text{BU} = \text{burnup } (\text{GWD/tUO}_2)$ $\text{GR} = \text{grain size } (\text{microns})$ <p>For restrained condition</p> $\frac{\Delta V}{V} = 0.0025 \text{ per } 10^{20} \text{ fissions}$	

Table 3.1 Material Properties (contd. 3/5)

MATERIAL PROPERTY	EXPRESSION	REF.
DENSIFICATION	$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V^S}{V} (1 - e^{-C^S BU}) + \frac{\Delta V^L}{V} (1 - e^{-C^L BU})$ <p>where</p> $\frac{\Delta V}{V} = \text{volumetric densification}$ $BU = \text{burnup (GWD/tUO}_2\text{)}$ $\Delta V^S, \Delta V^L, C^S \text{ and } C^L \text{ are input values.}$	(e)
UO ₂ PELLET PLASTICITY	$\sigma_Y = \begin{cases} 66.9 - 0.0397 (T - 273) & , \text{ for } T \leq 1473K \\ 36.6 - 0.0144 (T - 273) & , \text{ for } T > 1473K \end{cases}$ $H' = \begin{cases} 520.0 - 0.3860 (T - 273) & , \text{ for } T \leq 1473K \\ 139.5 - 0.06895 (T - 273) & , \text{ for } T > 1473K \end{cases}$ <p>where</p> $\sigma_Y = \text{yield stress (kg/mm}^2\text{)}$ $H' = \text{tangent modulus (kg/mm}^2\text{)}$ $T = \text{temperature (K)}$	(b)
ZIRCALOY THERMAL CONDUCTIVITY	$k = 7.51 + 2.09 \times 10^{-2} T - 1.45 \times 10^{-5} T^2 + 7.67 \times 10^{-9} T^3$ <p>where</p> $K = \text{thermal conductivity of zircaloy (W/m-K)}$ $T = \text{temperature (K)}$	(a)
ZIRCALOY THERMAL EXPANSION	<p>For axial expansion</p> $\frac{\Delta L}{L_0} = -2.506 \times 10^{-5} + 4.441 \times 10^{-6} T$ <p>For diametral expansion</p> $\frac{\Delta D}{D_0} = -2.373 \times 10^{-4} + 6.721 \times 10^{-6} T$	(a)

Table 3.1 Material Properties (contd. 4/5)

MATERIAL PROPERTY	EXPRESSION	REF.
	where T = temperature ($^{\circ}$ C)	
ZIRCALOY YOUNG'S MODULUS	$E = [9.900 \times 10^5 - 566.9 \times (T - 273.15)] \times 9.8067 \times 10^4$ where E = Young's modulus (N/m^2) T = temperature (K)	(d)
ZIRCALOY POISSON'S RATIO	$\nu = 0.3303 + 8.376 \times 10^{-5} (T - 273.15)$ where T = temperature (K)	(d)
ZIRCALOY CREEP RATE	$\dot{\epsilon}^c = 2 [5.129 \times 10^{-29} \phi e^{-\frac{10000}{RT}} \{ \sigma + 7.252 \times 10^2 e^{4.967 \times 10^{-8} \sigma} \}]^2$ $\times \left(\frac{3600}{\epsilon^c} \right)$ where $\dot{\epsilon}^c$ = creep strain rate (sec^{-1}) ϕ = fast neutron flux ($n/m^2 sec$) , $E \geq 1 MeV$ R = gas constant , 1.986 cal/mole K σ = stress (N/m^2) ϵ^c = creep strain (hardening parameter)	(a)
ZIRCALOY PLASTICITY	$\sigma_Y = \sigma_Y^t + \Delta \sigma_Y^{irr}$ where σ_Y = 0.2% proof stress (kg/mm^2)	(e)

Table 3.1 Material Properties (contd. 5/5)

MATERIAL PROPERTY	EXPRESSION	REF.
ZIRCALOY PLASTICITY	$\sigma_Y^t = \text{out-of-pile proof stress (kg/mm}^2)$ $= A - 0.0213 T$ $A = 21.60 \text{ for fully annealed Zr-2}$ $= 31.32 \text{ for stress relieved Zr-2}$ $T = \text{temperature } (^{\circ}\text{C}), 220 \leq T \leq 450 ^{\circ}\text{C}$ $\Delta\sigma_Y^{\text{irr}} = \text{hardening due to irradiation (kg/mm}^2)$ $= 33.44 [1 - \exp(-B\phi t)]^{1/2}$ $B = 2.92 \times 10^{-21} \exp(-1.6 \times 10^{-14}\phi)$ $\phi t = \text{fast neutron fluence (n/cm}^2), E \geq 1 \text{MeV}$ $\phi = \text{fast neutron flux (n/cm}^2 \text{sec}), E \geq 1 \text{MeV}$ $n = 0.0504 + 0.0001435 T$ <p>where</p> $n = \text{strain hardening exponent}$ $T = \text{temperature } (^{\circ}\text{C}), 220 \leq T \leq 450 ^{\circ}\text{C}$	(e)
GAS THERMAL CONDUCTIVITY	$k_{\text{helium}} = 3.366 \times 10^{-3} T^{0.668}$ $k_{\text{krypton}} = 4.726 \times 10^{-5} T^{0.923}$ $k_{\text{xenon}} = 4.0288 \times 10^{-5} T^{0.872}$ <p>where</p> $k = \text{thermal conductivity (W/m-K)}$ $T = \text{gas temperature (K).}$	(a)

REFERENCE

- (a) MATPRO-V09, A Handbook of Materials Properties for Use in the Analysis of Light Water Reactor Fuel Rod Behavior, USNRC TRE-NUREG-1005 (Dec. 1976).
- (b) T. Tachibana, H. Furuya, and M Koizumi, "Dependence on Strain Rate and Temperature Shown by Yield Stress of Uranium Dioxide", J. of Nuc. Sci. and Tech., 13[9], pp497-502 (1976).
- (c) T.E. Hollowell, "The development of an Improved UO₂ Fuel Swelling Model, and Comparison between Predicted Pellet Cladding Gaps and PIE Measured Gaps (Gap Meter Measurements). Presented at EHPG Meeting at Hankø, Norway, 1979.
- (d) Derived from single crystal data:
E.S. Fisher and C.J. Renken, "Single-Crystal Elastic Moduli and the hop-bcc Transformation in Ti, Zr, and Hf", PHYSICAL REVIEW (July 1954) PA482-A494.
- (e) Not Published.

4. 今後の課題

コード開発で重要なことは、個々のプロセスの適正なモデル化と良質な実験データによる徹底的な検証である。データベースについては、国際的にも定評のあるハルデン計画、インターランプ／オーバーランプ計画のデータがある。特にハルデンデータは、燃料温度、内圧、変形、ギャップ寸法など PCI ふるまいに関連する広範囲のもので測定精度も高く、コード検証用としてすぐれている。これらのデータによる FEMAXI - III の検証は現在進行中であるが、これまでに実証した照射初期データによる検証では実験と計算の間に良い一致が得られている。⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾

今後の研究の重点は、燃焼の中期から末期の PCI ふるまい予測の精度を確認することであり、その結果によってはいくつかのモデルの修正が必要になることが考えられる。

すでに現時点においても下記のモデルにつき改良の方向で検討を進めている。

(1) ジルカロイの塑性、クリープ理論

クリープと塑性は本来統一的に取扱われる現象と考えられるが、現状では互いに独立のプロセスと仮定されている。今後、クリープ理論を拡張し統一的取扱いへのアプローチが必要と考えられる。また応力反転時のクリープ硬化の取扱いについても検討すべきである。これらのモデル化のため広い意味でのクリープ特性データの補充が望まれる。

(2) ペレットやきしまり

ペレットのやきしまりは結晶粒径、ポア密度、ポアサイズ分布などの微視的構造や核分裂速度の関数と考えられているが、これまでに行った検証からやきしまりが照射温度にも強く依存することが指摘された。⁽¹⁸⁾ 照射の初期から中期のふるまい予測精度向上のため、このモデルの改良を検討する必要があると考えられる。

(3) ガスバブルふるまい

燃焼が進行するとペレット内でガスバブルが生成し成長することが知られている。ガスバブルのふるまいはペレットからのガス放出、ペレットのスウェーリング、強度や圧縮性および熱伝導度の変化に影響を及ぼす。この複雑な現象を一步一步解明しモデル化していくことが、高燃焼度燃料のふるまい予測に不可欠と考えられる。

(4) ガスの軸方向流れ

現在、ガスの組成および圧力は燃料棒内で瞬時に一様になると仮定しているが、最近のハルデンデータの中にこの仮定の反証となる例（ガス混合の時間遅れを物語るデータ）があり、ガスの濃度分布、圧力分布による軸方向流れ速度を考慮するモデルの検討が必要である。

(5) ギャップ熱伝達

熱的ふるまい解析におけるギャップ幅の計算は、力学的ふるまい部における FEM による詳細な評価とは対象的に、1 次元弾性計算を基本とする単純なモデルが用いられている。したがって、熱的ふるまい部におけるギャップあるいは接触圧の予測が、FEM による予測と一致せず、双方の差が大きく食い違い、PCI からの熱的ふるまいへのフィードバックの評価に不合理が生ずることが考えられる。この点を解決するために、熱的ふるまい部に 1 次元 FEM を導入して数学的モデルおよびふるまいモデルの不一致を解消する必要がある。

5. 結 言

軸対称有限要素法を用いた燃料ふるまい予測コード F E M A X I - III を開発した。コードの特徴は次のように要約される。

- (1) 本コードは熱的ふるまい解析部と力学的ふるまい解析部の 2 つから構成される。熱的ふるまい部ではギャップ幅変化、FP ガス放出およびこれらのギャップ熱伝達特性へのフィードバックを考慮して温度分布やガス圧力を解析する。力学的ふるまい部では軸対称 F E M を用いてリッジ変形に伴う局所応力、ひずみの分布を解析する。
- (2) F E M 解析において、四角形 8 節点要素の採用、クリープ陰解法の導入、接触問題解法の改良および連立方程式解法の改良などにより、計算の高速化を図った。また割れたペレットの剛性変化モデルの改良により PCI 予測精度を改良した。

今後は高燃焼度ふるまい予測の検証およびふるまい予測精度向上のための個々のモデルの改良を検討する予定である。

謝 辞

本コードの検証の過程で、日本核燃料開発株式会社の十亀求、小飼敏明の両氏ならびに C R C 株式会社の石橋明弘、大坪直昭の両氏から多大な助力をいただいた。また、J M T R (計画課) の安藤弘栄氏、安全工学部燃料安全第一研究室の原山泰雄、菊地章、泉文雄、藤田操および内田正明の各氏ならびに電力中央研究所の田中博氏にはコードの設計の際に討論に参加され、有益な助言をいただいた。ここに謹んで感謝の意を表わします。

5. 結 言

軸対称有限要素法を用いた燃料ふるまい予測コード F E M A X I - III を開発した。コードの特徴は次のように要約される。

- (1) 本コードは熱的ふるまい解析部と力学的ふるまい解析部の 2 つから構成される。熱的ふるまい部ではギャップ幅変化、F P ガス放出およびこれらのギャップ熱伝達特性へのフィードバックを考慮して温度分布やガス圧力を解析する。力学的ふるまい部では軸対称 F E M を用いてリッジ変形に伴う局所応力、ひずみの分布を解析する。
- (2) F E M 解析において、四角形 8 節点要素の採用、クリープ陰解法の導入、接触問題解法の改良および連立方程式解法の改良などにより、計算の高速化を図った。また割れたペレットの剛性変化モデルの改良により P C I 予測精度を改良した。

今後は高燃焼度ふるまい予測の検証およびふるまい予測精度向上のための個々のモデルの改良を検討する予定である。

謝 辞

本コードの検証の過程で、日本核燃料開発株式会社の十亀求、小飼敏明の両氏ならびに C R C 株式会社の石橋明弘、大坪直昭の両氏から多大な助力をいただいた。また、J M T R (計画課) の安藤弘栄氏、安全工学部燃料安全第一研究室の原山泰雄、菊地章、泉文雄、藤田操および内田正明の各氏ならびに電力中央研究所の田中博氏にはコードの設計の際に討論に参加され、有益な助言をいただいた。ここに謹んで感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) C. Visser, W. VanBuren, W.K. Wilson and S.W. Cabrielse : "Fuel Rod deformations, a time dependent finite element analysis of axisymmetric fuel rods, including pellet and effects", WERL-ELPLA-1 (1970).
- 2) J.A. Swanson et al.: "Application of finite element method for the thermal creep, irradiation induced creep and swelling for LMFBR design", 1st SMIRT, L4/3, Berlin, 1973.
- 3) P.N. Keegstra, J.L. Head, A. Alujevic : "Finite element stress analysis of interacting fuel pellet and canning under fast reactor condition", 1st SMIRT, C3/3, Berlin (1973).
- 4) S. Levy and J.P.D. Wilkinson : "A three-dimensional study of nuclear fuel rod behaviour during startup", 1st SMIRT, D1/5, Berlin (1973).
- 5) Y.R. Racid : "Mathematical modelling and analysis of fuel rods", ibid 29 (1974) 22-32.
- 6) Y.R. Racid, J.E. Wood, P.A. Proebstle : "Analysis of nuclear fuel rod localized stress", BNES Conf. Paper 69 (1973).
- 7) Y. Mishima, T. Okubo, T. Wada, and Y. Wakashima : "Thermal deformation of UO₂ pellets in thin walled small clearance fuel pin", Eur. Nucl. Conf. Paris (1975).
- 8) L.H. Vons and J. Pry, "Pellet-cladding interaction calculations with the "MARC" finite element computer system and a comparison with Halden results", Geilo meeting, paper 5/13, 1975.
- 9) T.R. Hsu, A.W.M. Bertels, B. Arya and S. Banerjee : "Application of the finite element method to the nonlinear analyses of nuclear reactor fuel behaviour", Int. Conf. Method in Non-linear Mechanics. Texas, Sept. 1974.
- 10) J.J.M. Too, T.R. Hsu and A.W.M. Bertels : "FULMOD - An inelastic analysis programme to predict the operating behaviour of CANDU fuel elements", 2nd Nat. Congr. on Pressure Vessels and Piping, June 1975.
- 11) M. Ichikawa : "Analysis of fuel rod deformation by an axisymmetric finite element method", Paper presented at Geilo meeting, 1975.
- 12) Y. Yamada, N. Yashimura, and T. Sakurai : "Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elasto-plastic problems by the finite element method", Int. J. Mech. Sci., 10, 343-54, 1968.

- 13) M. Kinoshita and M. Ichikawa, "Fuel Rod Deformation Code FEMAXI-II and Its Application", Nuc. Eng. and Design, 56[1], (Feb. 1980) pp49-56.
- 14) K. Ito, M. Ishida, and M. Oguma, "'Feast', A Finite Element Computer Code for Analysis of the Thermo-Mechanical Fuel Rod Behavior", Enlarged Halden Programme Group Meeting, Loen, Norway, (June 1978).
- 15) Y. Iwano, "MIPAC, A Computer code for Fuel Performance analysis by the Finite Element Method", Nuc. Eng. and Design, 56[1], (Feb. 1980) pp41-47.
- 16) M. Ichikawa, T. Okubo, Y. Iwano, K. Ito, K. Kashima, H. Saito and T. Nakajima : "FEMAXI-III : An Axisymmetric Finite Element Computer Code for the Analysis of Fuel Rod Performance", IAEA Specialists' Meeting, Blackpool, England, (Mar. 1980).
- 17) K. Ito, M. Ichikawa, T. Nakajima, M. Sogame, T. Okubo and H. Saito : "A Comparison of FEMAXI-III Code Calculations with Irradiation Experiments", IAEA Specialists' Meeting, Blackpool, England, (Mar. 1980).
- 18) T. Okubo, M. Ichikawa, T. Nakajima, K. Ito, Y. Iwano, K. Kashima and H. Saito : "FEMAXI-III, Theory and Model Assessment", Enlarged Halden Programme Group Meeting, Lillehammer, Norway, (June 1980).
- 19) M. Ichikawa, T. Nakajima, M. Kinoshita, K. Ito, T. Kogai and T. Okubo : "FEMAXI-III, Analysis of Some Power Ramping Experiments", Enlarged Halden Programme Group Meeting, Lillehammer, Norway, (June 1980).
- 20) A.M. Ross and R.L. Stoute : AECL-1552 (June 1962).
- 21) R.S. Brokaw : NASA-TR-R-81 (1960).
- 22) C. Vitanza et al.: Fission Gas Release from UO₂ Pellet Fuel at High Burnup, Presented at ANS Topical Meeting, Portland (USA), 1979.
- 23) B. Fraeijs de Veubeke : Displacement and equilibrium models in the finite element method, Chapter 9 of Stress Analysis, ed. O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister, Wiley, 1965.
- 24) T.Y. Chang and Y.R. Rashid : Nonlinear Creep Analysis at Elevated Temperature, Proc. of the 1st Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, L4/2. 1971.
- 25) T.J.R. Hughes and R.L. Taylor : Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto-visco-plastic finite element analysis, Comp. Struct., 8, 169-173, 1978.

- 26) Y.R. Rashid, H.T. Tang and E.B. Johansson : Mathematical treatment of hot pressing of reactor fuel, Nucl. Eng. Des. 29 (1974) 1-6.
- 27) C.A. Felippa : Solution of linear equations with skyline-stored symmetric matrix, Comp. Struct., 5, 13-29, 1975.