

JAERI - M  
93-004

トロイダル非圧縮性プラズマ・モデルに基づく  
MHD シミュレーション・コード  
「AEOLUS-IT」

1993年2月

栗田 源一・安積 正史・竹田 辰興

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1993

---

編集兼発行 日本原子力研究所  
印 副 株原子力資料サービス

トロイダル非圧縮性プラズマ・モデルに基づく  
MHD シミュレーション・コード「AEOLUS-IT」

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部  
栗田 源一・安積 正史・竹田 辰興

(1993年1月5日受理)

トロイダル非圧縮性摂動に対する新簡約抵抗性 MHD 方程式に基づいた 3 次元トロイダル MHD コード "AEOLUS-IT" の開発について報告する。

基礎方程式として用いた新簡約抵抗性 MHD 方程式はトカマク・オーダーリングによる展開を行わない為、本コードは理想的  $m = 1$  モードの効果を含めることが出来、低  $q$  の場合を含めて低アスペクト比トカマクにおける MHD 現象の解析をプラズマの有限抵抗の効果を含めて幅広く行うことが出来る。数値計算法としては、変数を平衡量と摂動量に分け、摂動量に線形な項を全て陰解法で解く方法を採用した。また、このために必要となる大規模マトリックスに対してはベクトル化率を高め計算時間の短縮を図った。本コードの解析例として、線形計算固有値問題による円筒配位での理想的  $m = 1$  モードの成長率の計算、および、 $m = 1$  モードの効果を含めた低  $q$  の場合の円筒配位とトーラス配位の間での成長率の比較を行った。また、抵抗性バルーニング・モードの線形および非線形計算を行い、それらの結果は、同じ条件での簡約 MHD 方程式を使った線形および非線形計算の結果と良い一致を示した。最後に、数値平衡に対するテアリング・モードの線形および非線形計算を行い、ほとんど同じパラメーターの解析的な平衡解に対して同じ条件で行われた線形および非線形計算の結果とほぼ同じ結果が得られることを確認した。

"AEOLUS-IT"

MHD Simulation Code

Based on a Toroidally Incompressible Plasma Model

Gen-ichi KURITA, Masafumi AZUMI and Tatsuoki TAKEDA

Department of Fusion Plasma Research  
Naka Fusion Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received January 5, 1993)

Three dimensional toroidal MHD code "AEOLUS-IT" has been developed, on a basis of the new reduced set of resistive MHD equations with the assumption of toroidal incompressibility instead of the tokamak ordering in the conventional reduced set of resistive MHD equations.

The code can carry out an overall MHD calculation with the effect of finite plasma resistivity, linear and non-linear, of low aspect ratio and low- $q$  tokamak because the basic equations include the ideal  $m=1$  mode. The implicit time integration scheme for the linear term of the perturbation is employed, dividing the variables into the equilibrium and perturbation parts. The huge CPU time due to solution of the large matrix can be reduced by high efficiency of vectorization.

The linear calculations, an eigenvalue problem, show the linear growth rates of ideal  $m=1$  mode and show the comparison of the growth rates between cylindrical and toroidal configurations of low- $q$  tokamak. The linear calculations and non linear simulations of resistive ballooning modes are carried out and the both results are in good agreement with those obtained by the toroidal MHD code "AEOLUS-RT" using the conventional reduced MHD equations. The linear and non linear calculations of tearing mode for the numerical equilibrium are also carried out and the almost the same results are obtained as the one obtained using the analytical equilibrium of almost the same parameters.

Keywords: Toroidal Incompressibility, MHD Simulation Code, Tokamak,  
Ballooning Mode, Tearing Mode, AEOLUS-IT

## 目 次

1. はじめに .....	1
2. MHD 平衡と磁力線座標系 .....	3
3. 基礎方程式 .....	6
4. 数値計算手法 .....	11
5. 計算例 .....	16
6. おわりに .....	22
謝 辞 .....	23
参考文献 .....	24
付録A トロイダル非圧縮性摂動に対する MHD 方程式の導出 .....	42
付録B 磁力線座標における MHD 平衡 .....	47

## Contents

1. Introduction .....	1
2. MHD Equilibrium and Field Line Coordinates .....	3
3. Basic Equation .....	6
4. Numerical Methods .....	11
5. Examples .....	16
6. Summary .....	22
Acknowledgements .....	23
References .....	24
Appendix A Derivation of MHD Equations for Toroidally Incompressible Perturbation .....	42
Appendix B Analytic MHD Equilibrium in the Field Line Coordinates .....	47

## 1. はじめに

近年、トカマク方式による大型プラズマ閉じ込め装置において臨界条件に近い実験データが得られ、自己点火条件実現に向けての研究に一層の拍車がかかってきている。また、各種電流駆動によりプラズマを定常かつ安定に持続させ、トカマク核融合炉の定常運転を目指す実験的・理論的研究も盛んになってきている。核融合炉心プラズマではプラズマ電流、内部エネルギー共に現在の実験装置よりはるかに大きくなり、これらが短時間で変化するような現象が起こると核融合炉の経済性を損ない、最悪の場合には核融合炉に致命的損傷を与えかねない。したがって、炉心プラズマを安定に持続させることが核融合炉実現のための必須の条件である。プラズマの急速な変化の代表的な例としては、電流破壊現象、内部破壊現象（鋸歯状振動等）、高ベータ崩壊現象等があり、トカマクの放電領域を、ひいては、トカマクの性能を制約している。特に、最近の大型トカマク実験では、プラズマ・パラメータ領域の拡大に伴って、その現象も複雑かつ多様になってきている。また、核融合炉心プラズマ中では、核反応生成粒子による新たな大域的な現象の可能性も理論・実験両面から指摘されている。これらの大域的現象はいずれもプラズマの磁気流体(MHD)的挙動によって生じる。炉心プラズマでは、荷電粒子の運動論的効果も重要な役割を果たすと考えられるが、最終的にプラズマ全体の大域的現象として現れる、プラズマのMHD的非線形挙動が最も重要となる。従って、このような現象を理解するためには、MHD方程式を基礎方程式とした解析が不可欠である。従来、このMHD不安定性の非線形現象の解析には、トカマク・オーダーリング、すなわち、プラズマの主半径および副半径をそれぞれ $R$ 、 $a$ とすれば、逆アスペクト比 $\epsilon=a/R \ll 1$ を仮定した簡約抵抗性MHD方程式が用いられてきた<sup>1~5)</sup>。このモデル方程式の利点は、解析対象とする現象の特徴的時間より、ずっと早い特性時間を持つ圧縮性の磁気音波が解析的に取り除かれ、かつ、解くべき変数の数が少ないことであり、このため、数値安定性に必要な時間ステップ巾が大きくとれ非線形シミュレーションに必要なCPU時間が大幅に少なくて済むことにある。しかしながら、この方程式系は、トカマク・オーダーリングを用いているためにアスペクト比の小さな平衡をもったプラズマを対象に出来ない。また、トカマク・オーダーリングでは $\epsilon$ の2次の寄与を正確に考慮していないため、その寄与が安定性に本質的な役割を果たしている理想的 $m=1$ モードを表現できないという欠点を内在している。特に、鋸歯状振動では、 $m=1$ モードが直接関与しているため、その解析には十分な注意が

必要である。こうした問題点を解決する為には、トカマク・オーダーリングを用いない方程式系に基づいたMHDコードの開発が必要となる。

非圧縮性プラズマ近似のもとでトカマク・オーダーリングを使わず導出した方程式を用いた線型安定性コードおよび非線型シミュレーション・コードは既に開発されているが<sup>6)</sup>、これらは円筒プラズマにおけるヘリカル対称性を持ったMHDモードの挙動のみを対象としており、トーラス配位での解析や異なったヘリシティをもったMHDモード間の相互作用の解析などを行うことが出来ない。本報告書では、トロイダル非圧縮性プラズマを仮定した新簡約抵抗性MHD方程式に基づいた3次元トロイダルMHDコード"AEOLUS-IT"の開発について述べる。この新簡約MHD方程式では、解くべき変数の数が従来の簡約MHD方程式での3変数に対して6変数に増えている。また、数値的安定性の確保も難しくなっている。このため、初期平衡量を考慮した線型項を全て陰解法によって解く方法を採用し、数値安定性に対する時間ステップを大きくとれるようにした。また、このためには、大規模なブロック三重対角行列を各時間ステップ毎に解く必要があり現象を解析するまでの計算時間が問題となるが、ベクトル計算機のベクトル化率を改善する手法を開発することによって大幅な計算時間の短縮を図ることを可能とした。

第2章では、線型計算および非線型シミュレーションの基礎となるプラズマのMHD平衡と磁力線座標系について述べる。第3章では、基礎方程式と境界条件を、また、第4章では、数値計算法について述べ、最後に"AEOLUS-IT"の計算速度および記憶容量を、簡約MHD方程式に基づいた3次元MHDコード"AEOLUS-RT"のそれらと比較する。第5章では、"AEOLUS-IT"の応用例として、理想的 $m=1$ モードの線型成長率の解析結果、および、円筒配位とトーラス配位での抵抗性 $m=1$ モード成長率の解析結果について述べる。また、抵抗性ハルニング・モードの線型安定性解析、および、非線型シミュレーションの結果を示し、"AEOLUS-RT"による線型安定性解析、および、非線型シミュレーションの結果との比較について述べる。最後に数値平衡解に対するテアリング・モードの線型、および、非線型計算を行いほとんど同じパラメータの解析的な平衡解に対する結果との比較を行う。第7章でまとめを行う。また、付録Aでトロイダル非圧縮性プラズマを仮定した新簡約MHD方程式の詳しい導出およびこの方程式系のエネルギー保存則を、付録Bで逆アスペクト比展開によるMHD平衡解の例を示す。



## 2. MHD平衡と磁力線座標系

この章では、線型MHD計算および非線型MHDシミュレーションの基礎となる軸対称MHD平衡とこれに基づいた磁力線座標系（磁力線が直線で表現できる非直交曲線座標系）について述べる。

まず、プラズマのMHD平衡は次式で与えられる：

$$\nabla P = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.1)$$

ここで、 $P$ はプラズマ圧力、 $\mathbf{J}$ および $\mathbf{B}$ はそれぞれプラズマ電流密度および磁場ベクトルを表す。次章に述べるMHD方程式の計算が簡単となるように、磁力線座標系、すなわち、(2.1)式で記述される平衡配位での磁力線が直線で表現できる非直交曲線座標系 $(r, \theta, \phi)$  ( $\theta$ 及び $\phi$ はそれぞれポロイダルおよびトロイダル方向の角座標であり、トカマクのような軸対称系では $\phi$ は円柱座標系の角座標に一致している)を採用する(図2.1)。まず、トロイダル角 $\phi$ に関する軸対称性を考慮して磁場ベクトルを次式で表す：

$$\mathbf{B} = \Lambda(r) \nabla \phi + \nabla \phi \times \nabla \Psi(r) \quad (2.2)$$

ここで右辺の第1項はトロイダル磁場、第2項はポロイダル磁場に対応している。この座標系で磁力線が直線となる条件は、

$$\mathbf{B} \cdot \nabla r = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{B^\phi}{B^\theta} = q(r) \quad (2.4)$$

となる。 $B^\phi$ 及び $B^\theta$ は各々 $\mathbf{B}$ の各方向への反変成分を、また、 $q$ は安全係数を表す。この関係から、軸対称性を考慮すると、ポロイダル座標 $\theta$ と径方向座標 $r$ は次式で定義される：

$$\theta = 2\pi \int_0^{l_p} dl_p / (R |\nabla \Psi|) / \oint dl_p / (R |\nabla \Psi|) \quad (2.5)$$

$$r = R_0 \sqrt{g} / R^2 \quad (2.6)$$

(2.5), (2.6) 式で  $R$  は主半径、 $\sqrt{g}$  は曲線座標系の体積要素を、また  $R_0$  は、磁気軸の主半径を表す。次に、円筒座標系  $(R, \varphi, Z)$  で  $R$  および  $Z$  を

$$R = R(r, \theta) \quad (2.7)$$

$$Z = Z(r, \theta) \quad (2.8)$$

と書くと、曲線座標  $(r, \theta, \varphi)$  の各種メトリック量は以下のように表される：

$$g_{rr} = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 \quad (2.9)$$

$$g_{r\theta} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \quad (2.10)$$

$$g_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (2.11)$$

$$J = \frac{\partial(R, Z)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \quad (2.12)$$

$$X = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \quad (2.13)$$

$$g^{rr} = \frac{1}{X} \frac{g_{\theta\theta}}{r^2} \quad (2.14)$$

$$g^{r\theta} = -\frac{1}{X} \frac{g_{r\theta}}{r^2} \quad (2.15)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{X} \frac{g_{rr}}{r^2} \quad (2.16)$$

$$h^{rr} = X g^{rr} = \frac{g_{\theta\theta}}{r^2} \quad (2.17)$$

$$h^{r\theta} = X g^{r\theta} = -\frac{g_{r\theta}}{r^2} \quad (2.18)$$

$$h^{\theta\theta} = X g^{\theta\theta} = \frac{g_{rr}}{r^2} \quad (2.19)$$

この曲線座標系におけるMHD平衡方程式は、平衡磁場(2.2)式を(2.1)式に代入することにより次式で与えられる：

$$X \frac{\partial p}{\partial r} + \Lambda \Lambda' + \frac{\Psi'}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (X g_{\theta\theta} \frac{\Psi'}{r}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (X g_{r\theta}) \frac{\Psi'}{r} \right\} = 0 \quad (2.20)$$

ここで ' は  $r$  による微分を表す。また、 $\sqrt{g} = R J$  である事に注意すれば (2. 6) 式で表される条件は

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) = \frac{R}{R_0} \quad (2.21)$$

となる。(2. 20)、(2. 21) 式を解けば平衡解が求まり、同時に、磁力線座標系  $(r, \theta, \varphi)$  が求まる。なお、逆アスペクト比展開による解析的な平衡解の例を付録Bに示す。

### 3. 基礎方程式

本コードでは、基礎方程式として、プラズマのトロイダル非圧縮摂動に対して録Aで導出される次の新簡約抵抗性MHD方程式を用いる。

$$\mathbf{B} = \nabla \theta \times \nabla \chi + \nabla \phi \times \nabla \psi \quad (3.1)$$

$$\mathbf{V} = R_0 \mathbf{X} [\nabla \theta \times \nabla \zeta + \nabla \phi \times \nabla \phi] \quad (3.2)$$

$$\mathbf{J} = \nabla B_r \times \nabla r + \nabla B_\theta \times \nabla \theta + \nabla B_\phi \times \nabla \phi \quad (3.3)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} [\nabla V_r \times \nabla r + \nabla V_\theta \times \nabla \theta + \nabla V_\phi \times \nabla \phi] \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial U^\phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla U^\phi - \mathbf{U} \cdot \nabla V^\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial (X, P)}{\partial (r, \theta)} + \mathbf{b} \cdot \nabla j^\phi - \mathbf{j} \cdot \nabla b^\phi \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial U^\theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla U^\theta - \mathbf{U} \cdot \nabla V^\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial (X, P)}{\partial (\phi, r)} + \mathbf{b} \cdot \nabla j^\theta - \mathbf{j} \cdot \nabla b^\theta \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi, \phi)}{\partial (r, \theta)} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} - \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + \eta J_\phi \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial (\chi, \zeta)}{\partial (\phi, r)} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \eta J_\theta \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \eta J_r = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (X^\Gamma P) + \mathbf{V} \cdot \nabla (X^\Gamma P) = 0 \quad (3.10)$$

$$\mathbf{b} \equiv R_0 \mathbf{X} \mathbf{B}, \quad \mathbf{j} \equiv R_0 \mathbf{X} \mathbf{J}, \quad \mathbf{X} \equiv \left( \frac{\mathbf{R}}{R_0} \right)^2 \quad (3.11)$$

ここで、 $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $P$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\phi$ ,  $\zeta$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\Gamma$ はそれぞれ、磁場ベクトル、速度ベクトル、電流ベクトル、渦度ベクトル、プラズマ圧力、ポロイダル磁束関数、トロイダル磁束関数、ポロイダル流れ関数、トロイダル流れ関数、静電ポテンシャル、プラズマ電気抵抗、比熱比であり、上付き添え字および下付き添え字はそれぞれベクトルの反変成分および共変成分であることを表している。また、真空透磁率を1としている。通常の簡約抵抗性MHD方程式と同様、この方程式の変数をポロ

イダル角 $\theta$  およびトロイダル角 $\phi$ に関してフーリエ展開すると、各フーリエ・モードに対して以下の連立偏微分方程式が得られる：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{m/n}^{\phi}}{\partial t} = & \sum_m \left( \frac{m''}{r} X_{m''} \frac{\partial P_{m'/n}}{\partial r} - \frac{m'}{r} \frac{\partial X_{m''}}{\partial r} P_{m'/n} \right) \\
 & + \sum_{m,n} \left[ b_{m'/n'}^r \frac{\partial j_{m'/n}^{\phi}}{\partial r} + (m'' b_{m'/n'}^{\theta} + n'' b_{m'/n'}^{\phi}) j_{m'/n}^{\phi} \right. \\
 & - j_{m'/n'}^r \frac{\partial b_{m'/n}^{\phi}}{\partial r} - (m'' j_{m'/n'}^{\theta} + n'' j_{m'/n'}^{\phi}) b_{m''/n''}^{\phi} \\
 & - V_{m'/n'}^r \frac{\partial U_{m'/n}^{\phi}}{\partial r} - (m'' V_{m'/n'}^{\theta} + n'' V_{m'/n'}^{\phi}) U_{m''/n''}^{\phi} \\
 & \left. + U_{m'/n'}^r \frac{\partial V_{m'/n}^{\phi}}{\partial r} + (m'' U_{m'/n'}^{\theta} + n'' U_{m'/n'}^{\phi}) V_{m''/n''}^{\phi} \right] \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{m/n}^{\theta}}{\partial t} = & \sum_m \frac{\partial X_{m''}}{\partial r} P_{m'/n} \\
 & + \sum_{m,n} \left[ b_{m'/n'}^r \frac{\partial j_{m'/n}^{\theta}}{\partial r} + (m'' b_{m'/n'}^{\theta} + n'' b_{m'/n'}^{\phi}) j_{m'/n}^{\theta} \right. \\
 & - j_{m'/n'}^r \frac{\partial b_{m'/n}^{\theta}}{\partial r} - (m'' j_{m'/n'}^{\theta} + n'' j_{m'/n'}^{\phi}) b_{m''/n''}^{\theta} \\
 & - V_{m'/n'}^r \frac{\partial U_{m'/n}^{\theta}}{\partial r} - (m'' V_{m'/n'}^{\theta} + n'' V_{m'/n'}^{\phi}) U_{m''/n''}^{\theta} \\
 & \left. + U_{m'/n'}^r \frac{\partial V_{m'/n}^{\theta}}{\partial r} + (m'' U_{m'/n'}^{\theta} + n'' U_{m'/n'}^{\phi}) V_{m''/n''}^{\theta} \right] \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Psi_{m/n}}{\partial t} = & -r \sum_{m,n} (b_{m'/n'}^r V_{m''/n''}^{\theta} + b_{m'/n'}^{\theta} V_{m''/n''}^r) \\
 & - n \alpha_{m/n} + \eta J_{\phi, m/n} - E_{m/n} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial t} = r \sum_{m,n} (b_{m'/n'}^r V_{m''/n''}^{\phi} + b_{m'/n'}^{\phi} V_{m''/n''}^r) - m \alpha_{m/n} + \eta J_{\theta, m/n} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \alpha_{m/n}}{\partial r} - r \sum_{m,n} (b_{m'/n'}^{\phi} V_{m''/n''}^{\theta} - b_{m'/n'}^{\theta} V_{m''/n''}^{\phi}) + \eta J_{r, m/n} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial P_{m/n}}{\partial t} = - \sum_{m,n} \left[ V_{m'/n'}^r \frac{\partial P_{m''/n''}}{\partial r} - (m'' V_{m'/n'}^{\theta} + n'' V_{m'/n'}^{\phi}) P_{m''/n''} \right]$$

$$-\Gamma \sum_{m,n} P_{m'/n'} \sum_{m''} [V_{m''/n'}^r \frac{\partial \ln X_{m''}}{\partial r} - m'' V_{m''/n'}^\theta \ln X_{m''}] \quad (3.17)$$

(3.12) ~ (3.17) 式において、 $\Sigma_m$  は摂動量と平衡量あるいは座標系の各種メトリック量との積和を表し、各トロイダル・モード数  $n$  について独立であるのに対して、 $\Sigma_{m,n}$  は変数同志の積和でプラズマ摂動のモード間結合を表す。ここで、積和は  $m = m' + m''$ 、 $n = n' + n''$  を満たす ( $m'$ 、 $m''$ ) および ( $n'$ 、 $n''$ ) に対してとる。 $V$ 、 $b$ 、 $U$ 、 $J$  の各反変成分及び  $J$  の共変成分と  $\Phi$ 、 $\zeta$ 、 $\psi$ 、 $\chi$  の関係を陽に表すと：

$$V_{m/n}^r = \frac{1}{r} (m \phi_{m/n} - n \zeta_{m/n}) \quad (3.18)$$

$$V_{m/n}^\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{m/n}}{\partial r} \quad (3.19)$$

$$V_{m/n}^\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_{m/n}}{\partial r} \quad (3.20)$$

$$b_{m/n}^r = -\frac{1}{r} (m \psi_{m/n} - n \chi_{m/n}) \quad (3.21)$$

$$b_{m/n}^\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial r} \quad (3.22)$$

$$b_{m/n}^\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r} \quad (3.23)$$

$$U_{m/n}^r = \sum_m [n h_m^{rr} \frac{\partial \phi_{m'/n}}{\partial r} - n m' h_m^{r\theta} \phi_{m'/n} + \frac{R_0^2}{r^2} m X_{m''} \frac{\partial \zeta_{m'/n}}{\partial r} + n^2 h_m^{r\theta} \zeta_{m'/n}] \quad (3.24)$$

$$U_{m/n}^\theta = \sum_m [n h_m^{r\theta} \frac{\partial \phi_{m'/n}}{\partial r} + n m' h_m^{\theta\theta} \phi_{m'/n} + \frac{R_0^2}{r^2} \{ X_{m''} \frac{\partial^2 \zeta_{m'/n}}{\partial r^2} + (\frac{\partial X_{m''}}{\partial r} - \frac{X_{m''}}{r}) \frac{\partial \zeta_{m'/n}}{\partial r} \} - n^2 h_m^{\theta\theta} \zeta_{m'/n}] \quad (3.25)$$

$$U_{m/n}^\phi = \sum_m [h_m^{rr} \frac{\partial^2 \phi_{m'/n}}{\partial r^2} + \{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_m^{rr}) - (m' + m) h_m^{r\theta} \} \frac{\partial \phi_{m'/n}}{\partial r} - m' \{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_m^{r\theta}) + m h_m^{\theta\theta} \} \phi_{m'/n} + n h_m^{r\theta} \frac{\partial \zeta_{m'/n}}{\partial r} + n \{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h_m^{r\theta}) + m h_m^{\theta\theta} \} \zeta_{m'/n}] \quad (3.26)$$

$$j_{m/n}^r = -n \sum_m [g_m^{rr} \frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial r} - m' g_m^{r\theta} \psi_{m/n} + n g_m^{r\theta} \chi_{m/n}] - \frac{R_0^2}{r^2} m \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r} \quad (3.27)$$

$$j_{m/n}^\theta = n \sum_m [g_m^{r\theta} \frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial r} + m' g_m^{\theta\theta} \psi_{m/n} - n g_m^{\theta\theta} \chi_{m/n}] + \frac{R_0^2}{r^2} (\frac{\partial^2 \chi_{m/n}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r}) \quad (3.28)$$

$$j_{m/n}^\phi = \sum_m [g_m^{rr} \frac{\partial^2 \psi_{m/n}}{\partial r^2} + \{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r g_m^{rr}) - (m' + m) g_m^{r\theta} \} \frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial r} - m' \{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r g_m^{r\theta}) + m g_m^{\theta\theta} \} \psi_{m/n} + n g_m^{r\theta} \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r} + n \{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r g_m^{r\theta}) + m g_m^{\theta\theta} \} \chi_{m/n}] \quad (3.29)$$

$$J_{r,m/n} = \sum_m [ -R_0^2 \{ g_m^{r\theta} \frac{\partial^2 \chi_{m/n}}{\partial r^2} - (\frac{g_m^{r\theta}}{r} - m' g_m^{\theta\theta}) \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r} \} - n \chi_{m/n}^{-1} \frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial r} ] \quad (3.30)$$

$$J_{\theta,m/n} = \sum_m [ R_0^2 \{ g_m^{rr} \frac{\partial^2 \chi_{m/n}}{\partial r^2} - (\frac{g_m^{rr}}{r} + m' g_m^{r\theta}) \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r} \} - n^2 \chi_{m/n}^{-1} \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r} + n m' \chi_{m/n}^{-1} \frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial r} ] \quad (3.31)$$

$$J_{\phi,m/n} = j_{m/n}^\phi \quad (3.32)$$

(3. 12)、(3. 13)、(3. 17) 式および (3. 24) ~ (3. 31) 式に現れる  $\chi, g^{rr}, g^{r\theta}, g^{\theta\theta}, h^{rr}, h^{r\theta}, h^{\theta\theta}$  は (2. 13) ~ (2. 19) 式で与えられている曲線座標系の各種メトリック量である。

(3. 12) ~ (3. 17) 式を解くときの境界条件は磁気軸  $r=0$  において、 $m \neq 0, n \neq 0$  のフーリエ・モードに対しては、

$$\begin{aligned} \phi_{m/n} &= 0, \quad \zeta_{m/n} = 0, \quad P_{m/n} = 0, \\ \psi_{m/n} &= 0, \quad \chi_{m/n} = 0, \quad \alpha_{m/n} = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$m=0, n=0$  のフーリエ・モードに対しては、

$$\frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_{m/n}}{\partial r} = 0. \quad (3.34)$$

また、プラズマ表面  $r=a$  において  $m/n$  のモードに対して  $B^r(a)=0$  より、

$$m \psi_{m/n} - n \chi_{m/n} = 0 \quad (3.35)$$

$J^r(a)=0$  より、

$$\frac{R_0^2}{a^2} m \frac{\partial \chi_{m/n}}{\partial r} + n \frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial r} = 0 \quad (3.36)$$

$V^r(a)=0$  より、

$$m \phi_{m/n} - n \zeta_{m/n} = 0 \quad (3.37)$$

$U^r(a)=0$  より、

$$\frac{R_0^2}{a^2} m \frac{\partial \zeta_{m/n}}{\partial r} + n \frac{\partial \phi_{m/n}}{\partial r} = 0 \quad (3.38)$$

となる。最後に、プラズマ表面  $r=a$  における静電ポテンシャル  $\alpha$  の値は、内部の値から線形外挿したものをを用いる。



## 4. 数値計算手法

この章では、前章で示した連立偏微分方程式を数値積分する為の数値解法について述べる。(3. 12) ~ (3. 17) 式を数値的に時間積分していく際、数値安定性を保証し、時間ステップを大きくとれるよう、各変数に対して線形な項は全て陰解法によって解く。このため、まず、各変数を平衡量と摂動量に分け、(3. 12) ~ (3. 17) 式の各項を摂動量に対してな線形項と非線形項に分離する。(3. 12) ~ (3. 17) 式を形式的に

$$\frac{\partial}{\partial t} L \mathbf{x} = M \mathbf{x} + N(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{x} = \{ \mathbf{x}_{m/n}; \mathbf{x}_{m/n} = (\phi_{m/n}, \zeta_{m/n}, \psi_{m/n}, \chi_{m/n}, \alpha_{m/n}, P_{m/n}) \}$$

と表す。ここで、 $L, M, N$  は微分作用素であり、 $L, M$  は変数  $\mathbf{x}$  に対しては線型、 $N$  は非線型のモード間結合を表す。(4. 1) 式では渦度ベクトル  $\mathbf{U}$  や電流ベクトル  $\mathbf{J}$  等は変数  $\mathbf{x}$  を用いて陽に表現しておく必要がある。変数  $\mathbf{x}$  を平衡量  $\mathbf{x}_{eq}$  と摂動量  $\xi$  に分離する。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{eq} + \xi \quad (4.2)$$

$$\mathbf{x}_{eq} = \{ \mathbf{x}_m^{eq}; \mathbf{x}_m^{eq} = (0, 0, \psi_{m/0}^{eq}, \chi_{m/0}^{eq}, 0, P_{m/0}^{eq}) \}$$

$$\xi = \{ \xi_{m/n}; \xi_{m/n} = (\tilde{\phi}_{m/n}, \tilde{\zeta}_{m/n}, \tilde{\psi}_{m/n}, \tilde{\chi}_{m/n}, \tilde{\alpha}_{m/n}, \tilde{P}_{m/n}) \}$$

(4. 1) 式を書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t} L \xi - M_c \xi = N(\xi, \xi) \quad (4.3)$$

$$M_c \xi = M \xi + N(\mathbf{x}_{eq}, \xi) + N(\xi, \mathbf{x}_{eq})$$

となる。左辺が摂動に対する線形項、右辺が非線形項となっている。 $L, M_c, N$  は  $r$

に対する2階微分とフーリエ・モード間のモード間結合を含んでいる。 $\xi$ を径方向および時間に対して離散化すると次のマトリックス式が得られる：

$$A \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} - B[\beta \xi^{n+1} + (1 - \beta)\xi^n] = \mathbf{g}^n \quad (4.4)$$

上添え字  $n$  は時間ステップを表している。 $\beta$  は陰解法パラメータであり、 $\beta = 1$  が完全陰解法、 $\beta = 0$  が完全陽解法に対応している。 $A$  および  $B$  は  $r$  方向差分及びモード間結合からなる係数行列であり、 $\mathbf{g}$  は非線形項を離散化したものである。(4.4) 式を  $\xi^{n+1}$  について解くと次式が得られる。

$$\xi^{n+1} = [A - \Delta t \beta B]^{-1} \{ [A + \Delta t (1 - \beta) B] \xi^n + \Delta t \mathbf{g}^n \} \quad (4.5)$$

この式の各係数行列およびその逆行列は現在のモデルでは時間的に変化しない。従って、計算の初期に1度求めておくだけでよい。また、行列  $A$ 、 $B$  はトロイダル・モード数  $n$  に対して独立であるから逆行列を含め各  $n$  毎に計算するだけでよい。径方向の微分を差分で置き換えると、各  $n$  毎のマトリックス  $A$  および  $B$  は、図4.1に示すように、基本的には  $(l_{mx} \times l_{mx})$  のブロック三重対角行列である。ここで  $l_{mx}$  は径方向のグリッド数(図の例では  $l_{mx} = 10$ )を表している。1番目と  $l_{mx}$  番目の行のブロック行列が三重対角からずれているのは、各々  $r=0$  と  $r=a$  での境界条件を含んでいるためである。実際のコードの中では、図4.2に示すように、値が恒等的0となる要素を除いてマトリックス・サイズの圧縮を図り、コード全体の記憶領域の低減を図っている。図4.2の各ブロック行列  $a_{ij}$  のサイズは

$$L_b = L_{mode}^n \times l_{value} \quad (4.6)$$

である。ここで、 $L_{mode}^n$  は各  $n$  に対応したトロイダル・モード数の数、 $l_{value}$  は解くべき変数の数である。新簡約MHD方程式全体を解く場合には  $l_{value} = 6$  である。従って、図4.2に示された、圧縮された行列のサイズは  $(3 \times L_n)$  となる。ここで、 $L_n$  は

$$L_n = L_b \times (l_{mx} - 2) \quad (4.7)$$

であり、各トロイダル・モード毎に異なった大きさとなる。 $L_n$ は、また、1つの  $n$  に対して解くべき未知数の数である。

ランダムな初期摂動を与えて非線型現象を追跡する場合、その値は十分小さくしなければならぬので、その中から最も不安定なモードが成長するまでにかかりの計算時間を必要とする。この問題は、不安定性の成長率が低くなってくると特に問題となる。このため、本コードでは、非線型シミュレーションに入る前に摂動に対する線型安定性を解析し、不安定性の固有モードを初期摂動として採用する。(4.3)式で非線型項  $N$  を無視し、時間微分を  $\lambda$  で置き換えると ( $\partial/\partial t = \lambda$ )、

$$\lambda L \xi = M_c \xi \quad (4.8)$$

となる。再び、径方向に差分をとりマトリックス形にすると、この式は、 $\lambda$  を固有値とする一般固有値問題となり、逆反復法の手法を用いて固有値  $\lambda$  及び固有関数  $\xi$  を求めることが出来る。 $\lambda$  は、物理的には、与えられたモードの線型成長率  $\gamma$  に対応している。基礎方程式として有限電気抵抗を取り入れているため、マトリックス  $L$ ,  $M_c$  にはエルミート性がなく固有値  $\lambda$  の実数性は保証されていないが、非圧縮性摂動では不安定モードは振動成長モードとならないことが理論的に示されており、本コードでも  $\lambda$  を実数として取り扱う。逆反復法では固有値  $\lambda$  の推測値を与える必要があるが、本コードでは、 $\lambda$  の値を大きな値から順に小さくしながらマトリックス、

$$\hat{L} = \lambda L - M_c \quad (4.9)$$

の値を求め、この値の符号が  $\lambda$  によって反転した時をもって  $\lambda$  の推測値として、逆反復法を用いて固有値および固有関数の収束計算を行う。この線形計算でも前項の非線型計算で述べたマトリックス・サイズの圧縮を行い、また、マトリックスの値およびマトリックス反転の計算にはクラウト法によるLU分解法を用いる。これらの方法の採用により線形安定性の計算を迅速に行うことが出来る。非線型計算は、このようにして得られた最も不安定な固有モード  $\xi$  を時間発展方程式、(4.5)式、の初期値として採用している。この手法により、シミュレーションの最初から不安定モードの選択的な成長を初期摂動の振幅を大きくとって追跡することが出来、

非線型現象を解析するために必要な計算時間の大幅な短縮を可能としている。

径方向のグリッド構成は、通常等間隔とするが、摂動電流や摂動渦度が1つあるいはそれ以上の共鳴面に局在化する現象に対しては、これらの面にグリッドの集積化を図った非等間隔グリッドを用いる。この場合グリッドを集積させる面の半径を各々 $r_k$ として、次式で定義される $x$ 座標上で等間隔のグリッドを構成し、これに対応する $r$ 座標を計算のグリッドにする：

$$\frac{dx}{dr} = C \left\{ 1 + \sum \alpha_k \exp[-(r-r_k)^2 / \delta_k^2] \right\} \quad (4.10)$$

ここで、 $\alpha_k$  および  $\delta_k$  はそれぞれ集積の度合および巾を決めるパラメータである。また、 $C$  は  $r=0$  で  $x=0$  とした時  $r=1$  で  $x=1$  とするための規格化定数である。この方法は、特に、成長率が小さい不安定モードの線型安定性解析を少ないグリッド数で効率的に行うときに威力を発揮する。しかし、非線型シミュレーションの場合は、計算の過程で時間発展と共にモードの局在化領域が変化したり、局在化しなくなったりする場合があるため注意して適用する必要がある。次に、トロイダルおよびポロイダル・モードの選択について述べる。逆アスペクト比 $\epsilon$ に対して、まず、線型的に最も不安定なモード（例えば、 $m/n=2/1$ ）のオーダーを $0$  ( $\epsilon^1$ ) とし、これにトロイダル・モード間結合で生じるモード ( $m/n=3/1$  および  $1/1$ ) を $0$  ( $\epsilon^2$ ) とし、以下、これらのモードの非線型モード間結合およびトロイダル・モード間結合で生じるモードを $\epsilon$ のオーダーで整理しながら、計算の最大モード数に達するまでフーリエ・モードの生成を行う。先の例では $0$  ( $\epsilon^6$ ) のオーダーまでとると32の異なったフーリエ・モードが選択できる。

最後に、全フーリエ・モード数32、径方向グリッド数201の場合のシミュレーションを例に、必要な計算機の記憶容量および計算時間について述べる。フーリエ・モードとして前節の例をとると、各トロイダル・モード数 $n$ に対するフーリエ・モードの数はそれぞれ、 $L_0=3, L_1=7, L_2=5, L_3=7, L_4=5, L_5=3, L_6=1$ となる。ブロック三重対角マトリックスの大きさは全体で

$$3 \times (l_{mx} - 2) \times R_{\text{value}} \times \left( \sum_n L_n^2 \right) \cong 3.7 \text{ M words} \quad (4.11)$$

となって約30Mバイトの記憶領域に相当する。実際にシミュレーションに要する記憶領域は38.5Mバイトであり、全記憶領域の約80%をこのマトリックスが占めている。比較のために、同様の計算パラメータのもとで、通常の簡約MHD方程式に基づいた“AEOLUS-RT”の場合は、マトリックスの占める割合は1

5%程度であるがシミュレーション全体に必要な記憶領域は12.2Mバイトである。このように、“AEOLUS-IT”によるシミュレーションに必要な記憶領域は、“AEOLUS-RT”のそれに対して高々3倍程度に収まっている。一方、シミュレーションに必要な1時間ステップ当りのCPU時間は、上記のパラメータのもとで、“AEOLUS-RT”の142m秒に対して“AEOLUS-IT”の場合は345m秒であり、これは約2.5倍にすぎず、基礎方程式の複雑さと大きな行列計算を必要としているにもにかかわらず、ベクトル化率の向上によって大幅なCPU時間の低減が図られている事が分る。

## 5. 計算例

この章では、“AEOLUS-IT”を用いて、マトリックス固有値解法による線形成長率の解析、および、非線形シミュレーション解析の例を示す。ここでの解析は、全てポロイダル・アルフヴェン速度で測った時間で規格化した時間を用いる。

### A. $m = 1$ 内部キンク・モードの線型安定性解析

まず、マトリックス固有値解法により、これまでの簡約MHD方程式では表現出来なかった理想的  $m = 1$  モードの線型安定性の解析を行う。最初に円筒配位 ( $\varepsilon = 0$ ) の場合を計算する。安全係数  $q(r)$  およびプラズマ圧力  $p(r)$  の分布としては次式を仮定する：

$$q(r) = 0.9 \left[ 1 + \left( \frac{r}{0.431} \right)^4 \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

$$p(r) = p_0 (1 - r^2) \quad (5.2)$$

ここで、磁気軸 ( $r = 0$ ) でのプラズマ圧力の値  $p_0$  は  $\beta_p = 1$  となるよう次式で定義されるポロイダル・ベータ値  $\beta_p$  から計算する：

$$\beta_p = 4 \int_0^a p(r) r dr / a^2 B_\theta^2(a) \quad (5.3)$$

( $B_\theta(a)$  は、ポロイダル磁場の  $r = a$  での物理成分である。) 径方向のグリッドとして非等間隔 201 グリッドを用いる。図 5. 1 に線形成長率  $\gamma$  の  $\phi$  方向の波数  $k_\phi$  ( $k_\phi = n/R_0$ ) に対する依存性を 3 種類のプラズマ電気抵抗値  $\eta = 0, 10^{-8}, 10^{-6}$  について示す。電気抵抗値が 0 の場合には成長率は波数  $k_\phi$  に比例して減少するのに対して、有限の電気抵抗の場合には長波長 ( $k_\phi \rightarrow 0$ 、即ち、 $R_0 \rightarrow \infty$ ) の極限で成長率は一定となり純粋に抵抗性の  $m = 1$  モードの成長率に落ち着く。一方、波数が大きな領域では線形成長率はプラズマの電気抵抗の値に依存しなくなり、 $k_\phi$  と共に大きくなる。これは、波数が大きな領域では、理想的内部モードによる共鳴面 ( $q = 1$  面) での摂動電流の局在化巾が抵抗性モードのそれより大きくなり、電気

抵抗の効果が相対的に小さくなるためである。有限電気伝導度の場合のこの成長率の変化は Coppi 達によって理論的に解析されており<sup>7)</sup>、抵抗性内部キンク・モードとして知られている。本コードでの数値解析結果は彼らの理論式と一致しており、線型固有値解析法の妥当性が確認された。なお、通常の簡約方程式に基づく解析は  $k\phi \rightarrow 0$  の極限に対応している。

次に、逆アスペクト比、 $\epsilon = 0.1$  のトーラス配位での計算結果を示す。計算例として、安全係数  $q(r)$  およびプラズマ圧力  $p(r)$  の分布として次の分布を仮定する：

$$q(r) = q_0 \left[ 1 + \left( \frac{r}{0.542} \right)^8 \right]^{1/4} \quad (5.4)$$

$$p(r) = p_0 (1 - r^2)^2 \quad (5.5)$$

プラズマは  $\beta_p = 1$ 、円形断面とし、MHD 平衡は付録 B に与えられている解析的な式によってもとめる。径方向グリッドは円筒配位、トーラス配位とも  $q = 1$  および  $q = 2$  の特異面で集積した 501 グリッドを用いて解析する。トロイダル・プラズマではトロイダル効果によるモード間結合によりポロイダル・モードの間に相互作用が生じる。このため、1つのトロイダル・モード数に対して複数のポロイダル・モード数を必要とする。一般的には、成長率のモード数依存性を調べて、必要なポロイダル・モード数を決める必要があるが、ここでは、比較的小さな逆アスペクト比を用いているため、トロイダルモード数、 $n = 1$  に対して、 $m = 0, 1, 2, 3$  の4つのポロイダル・モードを用いて解析する。図 5. 2 に、線形成長率  $\gamma$  の磁気軸での安全係数の値  $q_0$  に対する依存性を示す。図中の  $q_{sur} = 1$ 、および、 $q_{sur} = 2$  で示された矢印は、プラズマ表面での安全係数の値  $q_{sur}$  が各々 1 および 2 となる  $q_0$  の値に対応している。点線で示された円筒配位の成長率では、 $q = 1$  の面がプラズマ内部にあると常に不安定であり、また、固有関数が  $q = 1$  内部に限定されているため、 $q = 1$  面がプラズマ表面に接近している場合を除いて安定性がプラズマ表面の影響を受けないのに対して、トーラス配位（実線）では、特に、 $m = 2$  モードとのトロイダル結合により成長率は  $q_0$  の値に対して強い依存性を持つことになる。トロイダル効果による安定化の効果は、特に  $q = 2$  面が、プラズマ内部にあるときに顕著に現れることが分る。こうした傾向は内部キンク・モードに対する Bussac 達の理論的解析<sup>8)</sup> の傾向とも一致し、また、完全な MHD 方程式に基づいた E R A T O コードによる数値的解析ともその傾向は一致している。

## B. 抵抗性バルーニング・モード解析

次に、抵抗性バルーニング・モードの計算結果例について示す。ここでは、線型安定性解析と共に非線形のシミュレーションも行い、その結果を簡約MHD方程式によるシミュレーション結果と比較する。平衡電流分布として次の $q$ 分布を仮定する：

$$q(r) = 1.8 \left[ 1 + \left( \frac{r}{0.916} \right)^4 \right]^{1/2} \quad (5.6)$$

この場合、 $q = 2$ 面は $r = 0.638$ にあり、プラズマ表面での安全係数、 $q_a = 2.8$ である。(5.2)式と同じ圧力分布、逆アスペクト比 $\varepsilon = 0.1$ の円形断面プラズマを仮定して、付録Bに従って解析的なMHD平衡を用いて解析した。まず、線型安定性解析では、径方向に等間隔201グリッド、トロイダル・モード $n = 1$ 、ポロイダル・モードは $m = 1, 2, 3$ の3モードおよび $n = 2, m = 3, 4, 5$ の2つの計算条件で解析する。図5.3は $n = 1$ の場合の線形成長率 $\gamma$ のポロイダル・ベータ値 $\beta_p$ 依存性をプラズマ電気抵抗 $\eta$ の値を変えてプロットしたものである。 $\eta = 0$ が理想的 $n = 1$ バルーニング・モードに対応しており、この計算パラメータでは $\beta_p = 0.5$ が安定性の限界値となっている。これに対して、有限の電気抵抗を考慮するとバルーニング・モードはこの閾値以下でも不安定になり、 $\beta_p$ の上昇に伴って $\beta_p^{2/3}$ の依存性を持った成長率を与える。 $m = 1$ 内部キック・モードの場合と同様、 $\beta_p$ が理想的モードの安定限界値 $\beta_p = 0.5$ を越えると理想バルーニング・モードの成長率に接近し $\eta$ の値に依らなくなる。 $\beta_p$ を理想的モードの安定限界値以下に固定して成長率 $\gamma$ の $\eta$ 依存性を調べると、 $\gamma \propto \eta^{1/3}$ となり、 $n = 1$ バルーニング・モードも高 $n$ 抵抗性バルーニング・モードの成長率の $\eta$ 及び $\beta_p$ 依存性<sup>9)</sup>と同様の依存性を持つ事が示されている。 $n = 2$ の場合の計算結果を図5.4に示す。成長率は、 $\beta_p$ が理想的モードの安定限界値、この場合は、 $\beta_p = 0.8$ 、より小さい領域で、 $n = 1$ の場合と同じ $\beta_p$ および $\eta$ 依存性を示す。

次に、 $\eta(r_s) = 10^{-6}$ 、 $\beta_p = 1$ の場合について、非線形シミュレーションの結果を示す。トロイダルおよびポロイダル・モード数として $m/n = 0/0, 2/1, 1/1, 3/1, 4/2, 3/2, 1/0, 5/2, 6/3, 2/2, 6/2, 5/3, 2/0, 7/3, 8/4$ となる15モードを用いた。各モードの運動エネルギー



ギーおよび磁気エネルギーの時間変化を、図5.5と図5.6に示す。各モードの運動および磁気エネルギーは先の固有値解析で得られた線形成長率  $\gamma = 0.083$  で線形成長した後、 $m/n = 2/1$  の運動エネルギーが、 $t \approx 130$  で  $3 \times 10^{-5}$  の値で飽和し、続いて磁気エネルギーが、 $t \approx 140$  で  $3 \times 10^{-4}$  の値で飽和している。ここで、各エネルギーはポロイダル磁場エネルギー  $B_{\theta}^2(a)/2$  で規格化した値である。これと同じ平衡に対して簡約MHD方程式を使って計算して得られた各エネルギーの時間変化を、図5.7と図5.8に示す。同じく、線形成長率  $\gamma = 0.083$  で線形成長した後、 $m/n = 2/1$  の運動エネルギーが、 $t \approx 105$  で  $5 \times 10^{-5}$  の値で飽和し、続いて磁気エネルギーが  $4 \times 10^{-4}$  の値で飽和している。新簡約MHD方程式を使って固有値問題を解いて得られた各固有関数 ( $\phi, \zeta, \psi, \chi, \alpha, P$ ) を  $m/n = 2/1, 1/1, 3/1$  について図5.9に示す。簡約方程式を解いて得られたものは、( $\phi, \psi, P$ ) の3つの変数について同じ固有関数となる。図5.10に飽和前、 $t = 110$ 、と飽和後、 $t = 130$ 、の  $m/n = 0/0$  のプラズマ圧力の分布と  $m/n = 2/1$  のプラズマ電流の分布を示す。運動エネルギーの飽和前は、初期とほぼ同じにあった  $m/n = 2/1$  のプラズマ電流分布のピークの位置が、 $m/n = 2/1$  の特異面でのプラズマ圧力の分布の平坦化によって特異面から外側へ移動することによってバルーニング・モードが安定化されていることがわかる。この計算例ではプラズマ中に  $q = 1$  面はなく、理想的  $m = 1$  内部キンク・モードが本質的な役割を果さない。 $m \geq 2$  が主要なモードとなる計算では新簡約MHD方程式による解析は簡約MHD方程式による解析とほぼ同じ結果が得られる事が予想され、上記で得られた解析結果はこの予測を裏付けている。

### C. 数値平衡解に対するテアリング・モードの線形および非線形計算

最後に、数値平衡解に対するテアリング・モードの線形計算 および 非線形シミュレーションの例を示す。数値平衡解と線形 および 非線形MHDコードとの結合部分については、別の機会に詳細に述べる予定である。

まず、第一段階として、数値平衡解と線形 および 非線形MHDコードとの結合をチェックするため  $q$  分布として 次の表式で与えられるものと磁気軸とプラズマ表面での安全係数の値、および  $m/n = 2$  の特異面の位置がほぼ同じ分布を持つものを選ぶ。

$$q(r) = 1.38 \left[ 1 + \left( \frac{r}{0.6} \right)^8 \right]^{1/4} \quad (5.7)$$

比較のための、解析的な平衡解は、(5.7)式で与えられる $q$ 分布に対して付録Bで記述される平衡解を用いる。すなわちメトリック量のフーリエ・モード数は、 $m = 2$ までとり、逆アスペクト比  $\epsilon^2$  までの解を用いる。その他のパラメータとしては、逆アスペクト比  $\epsilon = 0.1$ 、ポロイダル・ベータ値  $\beta_p = 1$  とする。数値平衡は、主半径 $R$ 方向、257、 $Z$ 方向、129の正方グリッドを使って求め、内挿によって  $(r, \theta)$  グリッドへの変換を行う。メトリック量は、(2.9)–(2.19)の定義式により計算される。数値平衡解のメトリック量のフーリエ・モード数は、解析解と合わせるためにモード数  $m = 3$  以上のものは省略する。まず、2つの平衡解の比較を行う。小径方向グリッド数は、201で等間隔とする。従って後の線形および非線形計算は、解析解の場合を含めて等間隔201径方向グリッドで行う。図5.11にポロイダル磁束の等高線の(a)数値解と(b)解析解の比較を、また図5.12には、(1)安全係数(2)ポロイダル磁場(3)トロイダル電流(4)プラズマ圧力と(5)ポロイダル電流の各々の小半径方向の分布の(a)数値解と(b)解析解の比較を示す。これらは数値解が、ほぼこの解析解に一致していることを示している。次に線形固有値問題によって求めた固有関数の比較を行う。図5.13に(a)数値解と(b)解析解に対する各固有関数( $\phi, \zeta, \psi, \chi, \alpha, P$ )をポロイダル・モード数  $m = 0, 1, 2$  の3つのモードに対して示す。各々の固有関数は良い一致を示している。最後にこれらの固有関数を初期値とした非線形シミュレーションの結果について述べる。トロイダルおよびポロイダル・モード数として  $m/n = 0/0, 2/1, 1/1, 3/1, 4/2, 3/2, 1/0, 5/2, 6/3, 2/2, 6/2, 5/3, 2/0, 7/3, 8/4, 7/4, 4/1, 4/3, 0/1, 9/4, 8/3, 10/5$  の22モードを用いた。プラズマ電気抵抗度の  $m/n = 2$  の特異点での値は、 $\eta(r_s) = 10^{-5}$  とする。図5.14に(a)数値解および(b)解析解に対する各ヘリシティーの運動エネルギーの時間変化を、また、図5.15に(a)数値解および(b)解析解に対する各ヘリシティーの磁気エネルギーの時間変化を各々示す。高  $m/n$  モード数のエネルギーの変化に違いはみられるが、各ヘリシティーのエネルギーは、同じ線形成長率で成長した後、ほぼ同じエネルギー・レベルで飽和している。

両者の結果の僅かな違いは数値的に求めたための誤差のためではなくて、特に中心付近の  $q$  分布の違いによるものである。これらの結果は、"AEOLUS-IT" が解析的な平衡解と同様、数値平衡解に対しても抵抗性MHDのモードに対する線形安定性解析 および、非線形シミュレーションが行えることを示している。

## 6. おわりに

トロイダル非圧縮性摂動に対する新簡約抵抗性MHD方程式に基づいた3次元トロイダルMHDコード "AEOLUS-IT" が開発された。

基礎方程式として用いた新簡約抵抗性MHD方程式はトカマク・オーダーリングによる展開を行わないため、本コードは理想的  $m=1$  モードの効果を含めることが出来、低  $q$  の場合を含めて低アスペクト比トカマクにおけるMHD現象の解析をプラズマの有限抵抗の効果を含めて幅広く行うことが出来る。

数値計算法としては、変数を平衡量と摂動量に分け、摂動量に線形な項を全て陰解法で解く方法を採用した。全ての線形項に対して陰解法を用いるため 大きなマトリックスが必要となるが、ほとんどの0要素は省いてマトリックスを圧縮して計算機の記憶領域を節減し、更に、このために必要となる大規模マトリックス計算に対して必要な計算時間はベクトル化率を高めてその短縮を図った。通常の簡約MHD方程式を使った3次元MHDコード "AEOLUS-RT" と全モード数32、径方向グリッド数201に対して必要な記憶領域の大きさと単位時間ステップ当り必要な計算時間についての比較を行い、各々3倍、2.5倍程度という結果を得た。これらは、十分パラメーター・ランの行える消費量となっている。

本コードの解析例として、まず固有値問題による線形計算による、通常の簡約MHD方程式では表現出来ない、理想的  $m=1$  モードの成長率の計算を2つの  $q$  分布について行った。1つの  $q$  分布に対して線形成長率  $\gamma$  の  $\phi$  方向の波数  $k\phi$  ( $k\phi = n/R_0$ ) 依存性を3種類のプラズマ電気抵抗の値  $\eta = 0, 10^{-8}, 10^{-6}$  について調べ、電気抵抗値が0の場合に、また有限の電気抵抗値の場合にも  $k\phi$  の大きな値に対して、理想的  $m=1$  モードの成長率を持つことが示された。また別の  $q$  分布で円筒配位とトーラス配位での成長率の比較を行ない、円筒配位 ( $\epsilon = 0$ ) の理想的  $m=1$  モードはトーラス配位 ( $\epsilon = 0.1$ ) ではトーラス効果で、特に  $q=2$  の面がプラズマ内部にある場合はより、安定化される事が示された。

次に、抵抗性バルーニング・モードの計算が、 $q_0/q_a = 1.8/2.8$  の  $q$  分布、逆アスペクト比  $\epsilon = 0.1$  の円形断面プラズマに対して行われた。まず線形計算によって  $n=1$  および  $n=2$  の抵抗性バルーニング・モード線形成長率  $\gamma$  はポロイダル・ベータ値  $\beta_p$  またプラズマ電気抵抗  $\eta$  の値に対して  $\beta_p^{2/3} \eta^{1/3}$  に比例すること、また非線形シミュレーションによってプラズマ圧力分布の  $q=2$  の特異面付近での平坦化により、抵抗性バルーニング・モードの飽和がおこることが示された。なおこの場合の結果は理想的  $m=1$  モードが本質的な役割を果していないので 簡約MHD方程式を使ったコード "AEOLUS-RT" を使った解析結果と一致している。

最後に、数値平衡解に対してテアリング・モードの線形および非線形計算を行い、ほとんど同じパラメーターの解析的な平衡解に対して同じ条件で行われた線形および非線形計算の場合とほぼ同じ結果が得られることが確認された。

今後は、この新簡約抵抗性MHD方程式を使った3次元MHDコード "AEO LUS-I T" を用いて大型トカマクで観測されている鋸歯状振動、又高ベータ崩壊現象等の解析を行っていく予定である。

## 謝 辞

本コードを作成するにあたりまして、始終激励していただきました田中正俊客員研究員に深く感謝いたします。

最後に、数値平衡解に対してテアリング・モードの線形および非線形計算を行い、ほとんど同じパラメータの解析的な平衡解に対して同じ条件で行われた線形および非線形計算の場合とほぼ同じ結果が得られることが確認された。

今後は、この新簡約抵抗性MHD方程式を使った3次元MHDコード "AEOLUS-IT" を用いて大型トカマクで観測されている鋸歯状振動、又高ベータ崩壊現象等の解析を行っていく予定である。

## 謝 辞

本コードを作成するにあたりまして、始終激励していただきました田中正俊客員研究員に深く感謝いたします。

## 参考文献

- 1) H.R. Strauss, Phys. Fluids **19** (1976) 134.
- 2) M.N. Rosenbluth, D.A. Monticello, H.R. Strauss and R.B. White, Phys. Fluids **19** (1976) 1987.
- 3) B.V. Waddell, B. Carreras, H.R. Hicks and J.A. Holmes, Phys. Fluids **22** (1979) 896.
- 4) G. Kurita, T. Takizuka, M. Azumi and T. Takeda, Nucl. Fusion **27** (1987) 1030.
- 5) A. Bondeson, R.D. Parker, M. Hugon and P. Smeulders, Nucl. Fusion **31** (1991) 1695.
- 6) Y. Tanaka, M. Azumi, G. Kurita and T. Takeda, Plasma Phys. **27** (1985) 579.
- 7) B. Coppi, R. Galvão, R. Pellat, M.N. Rosenbluth and P.H. Rutherford, Fiz. Plasmy **2** (1976) 961 [Sov. J. Plasma Phys. **2** (1976) 533].
- 8) M.N. Bussac, R. Pellat, D. Edery and J.L. Soule, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1638.
- 9) T.C. Hender, B.A. Carreras, W.A. Cooper, J.A. Holmes, P.H. Diamond and P.L. Similon, Phys. Fluids **27** (1984) 1439.

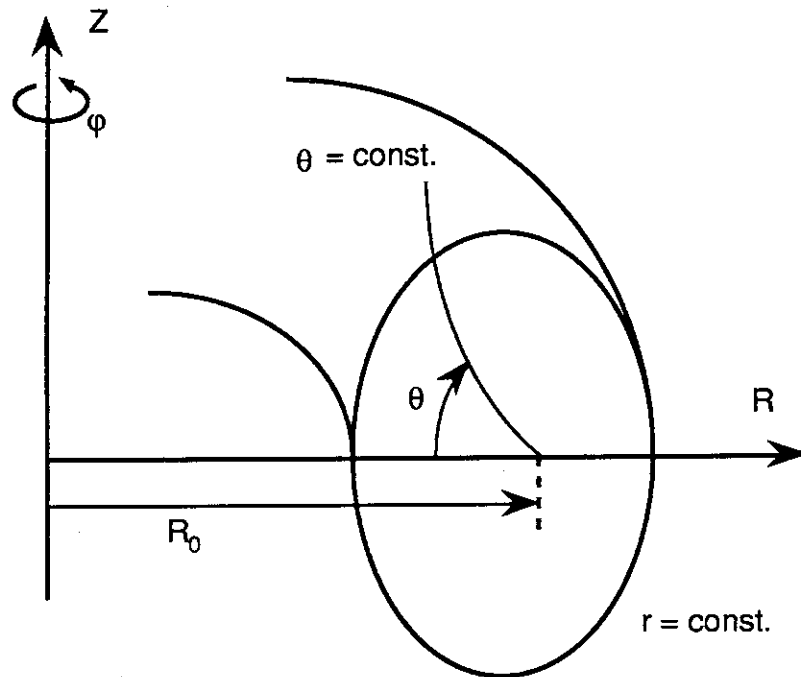


図2. 1 磁力線座標系  $(r, \theta, \phi)$  の模式図。この座標系上では平衡配位の磁力線が、 $r = \text{一定}$ 、 $\phi - q(r)\theta = \text{一定}$ 、の式で表される。 $R_0$ は磁気軸の主半径。 $q(r)$ は安全係数分布。



$$\begin{bmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & & & & & & & & \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & & & & & & & & \\
 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & & & & & & & \\
 & & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & & & & & & \\
 & & & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & & & & & \\
 & & & & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} & & & & \\
 & & & & & a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,8} & & & \\
 & & & & & & a_{8,7} & a_{8,8} & a_{8,9} & & \\
 & & & & & & & a_{9,8} & a_{9,9} & a_{9,10} & \\
 & & & & & & & & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9 \\
 x_{10}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 b_3 \\
 b_4 \\
 b_5 \\
 b_6 \\
 b_7 \\
 b_8 \\
 b_9 \\
 b_{10}
 \end{bmatrix}$$

図4. 1 MHD計算に用いられるマトリックス式  $Ax = b$  の形。径方向グリッド数  $l_{mx} = 10$  の例を示す。  $a_{i,j}$  はブロックマトリックスである。1番目と10番目の行のブロックマトリックスが三重対角からずれているのは  $r=0$  および  $r=a$  における境界条件による為である。破線で示された領域が実際に解くべき領域である。

$$\begin{bmatrix}
 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\
 a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\
 a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\
 a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\
 a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} \\
 a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,8} \\
 a_{8,7} & a_{8,8} & a_{8,9} \\
 a_{9,8} + c_8 & a_{9,9} + c_9 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_2 \\
 b_3 \\
 b_4 \\
 b_5 \\
 b_6 \\
 b_7 \\
 b_8 \\
 b_9
 \end{bmatrix}$$

図4. 2 圧縮されたマトリックス式  $Ax = b$  の形。  $c_8$  および  $c_9$  は境界条件により加わった係数。

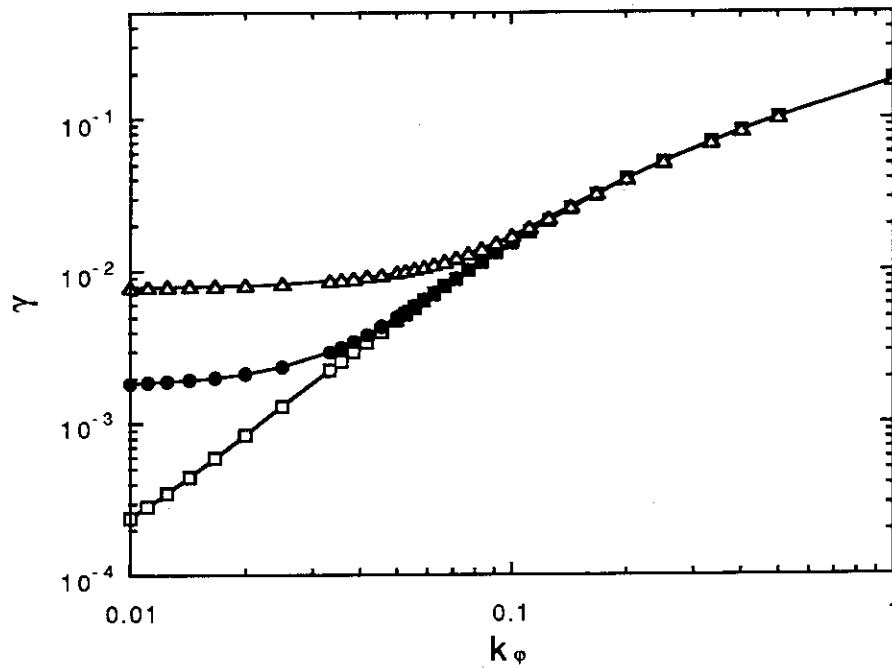


図5. 1 円筒プラズマ配位 ( $\varepsilon=0$ ) での  $m/n=1/1$  の理想的小よび抵抗性モードの線形成長率  $\gamma$  の  $\phi$  方向波数  $k_\phi$  の依存性。安全係数分布および圧力分布は、(5. 1) (5. 2) 式で与えられる。 $\eta=10^{-6}$  ( $\Delta$  印)、 $\eta=10^{-8}$  ( $\bullet$  印)、 $\eta=0$  ( $\square$  印) のプラズマ電気抵抗値に対する結果を図示してある。

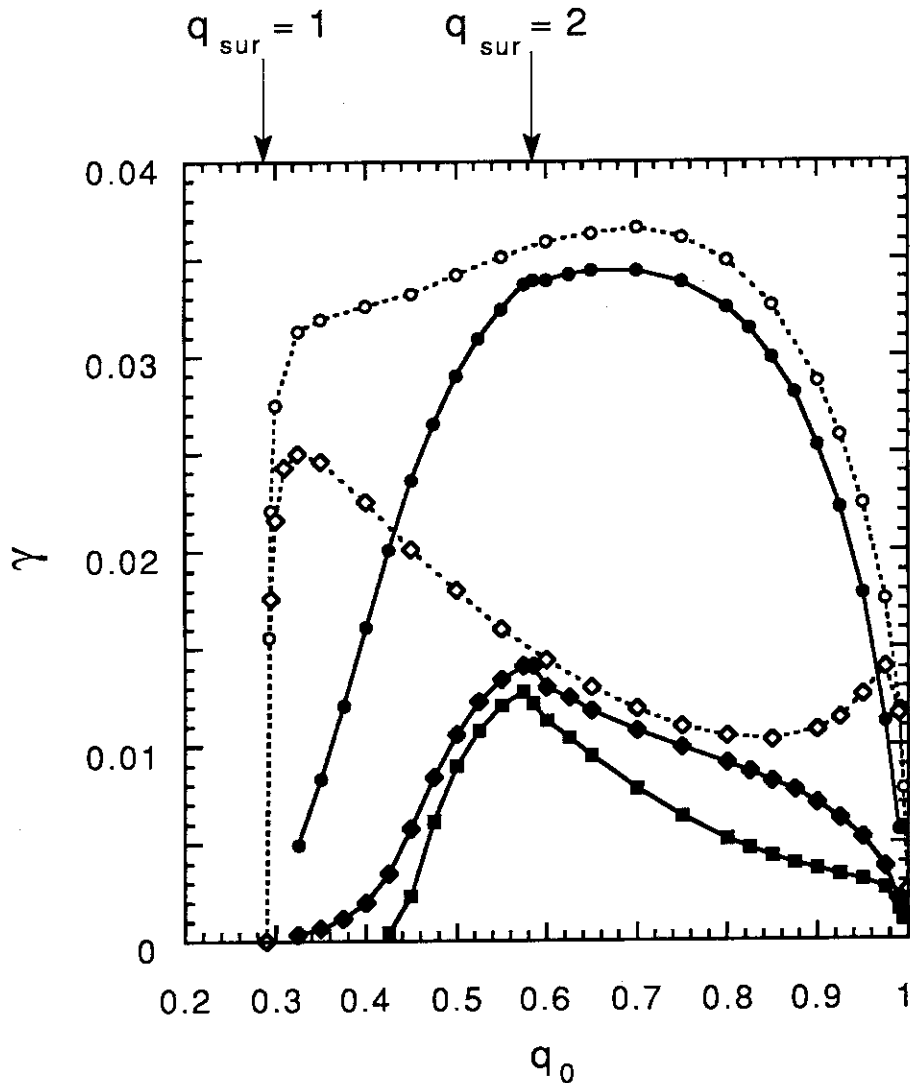


図5. 2  $m/n = 1/1$  の理想的モードの線形成長率  $\gamma$  の磁気軸での安全係数の値  $q_0$  に対する依存性。安全係数分布、および圧力分布は、(5.4) (5.5) 式で与えられる。点線は  $\epsilon = 0$  の円筒配位、実線は逆アスペクト比  $\epsilon = 0.1$  のトーラス配位における線形成長率を表す。プラズマ電気抵抗値として、各々  $\eta = 10^{-6}$  (○、●印)、 $\eta = 10^{-8}$  (◇、◆印)、および  $\eta = 10^{-10}$  (■印) の値を使った。 $q_{sur} = 1$  および  $q_{sur} = 2$  で示された矢印は、プラズマ表面での安全係数の値が、各々 1 または 2 となる  $q_0$  の位置を示す。

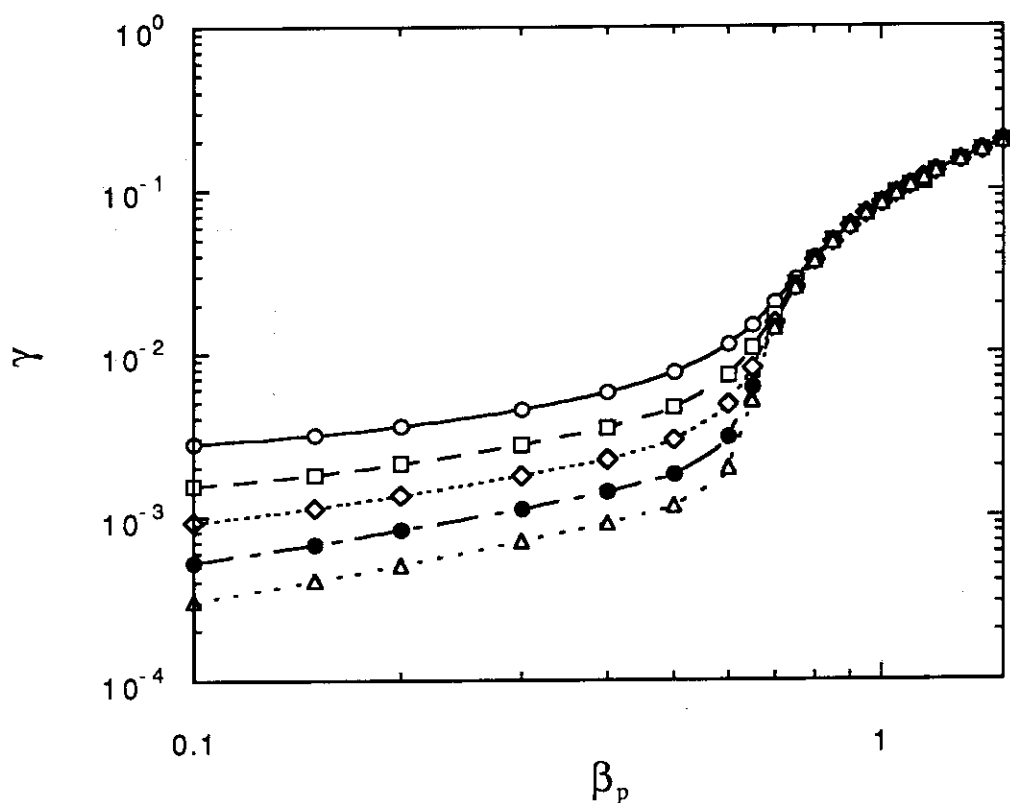


図5.3 抵抗性バルーニング・モードの線形成長率  $\gamma$  のポロイダル・ベータ値  $\beta_p$  依存性。トロイダルおよびポロイダル・モード数は、 $n=1, m=1, 2, 3$  で、逆アスペクト比  $\epsilon=0.1$  である。安全係数分布、および圧力分布は、各々 (5.6) (5.5) 式で与えられる。プラズマ電気抵抗値は、各々  $\eta=10^{-6}$  (○印)、 $\eta=3 \times 10^{-7}$  (□印)、 $\eta=10^{-7}$  (◇印)、 $\eta=3 \times 10^{-8}$  (●印)、 $\eta=10^{-8}$  (△印) である。各  $\eta$  の値に対して成長率は  $\beta_p$  の上昇に伴って  $\beta_p^{2/3}$  の依存性を示すが、ある  $\beta_p$  の値を越えると  $\eta$  の値に寄らない、理想的バルーニング・モードの成長率となる。

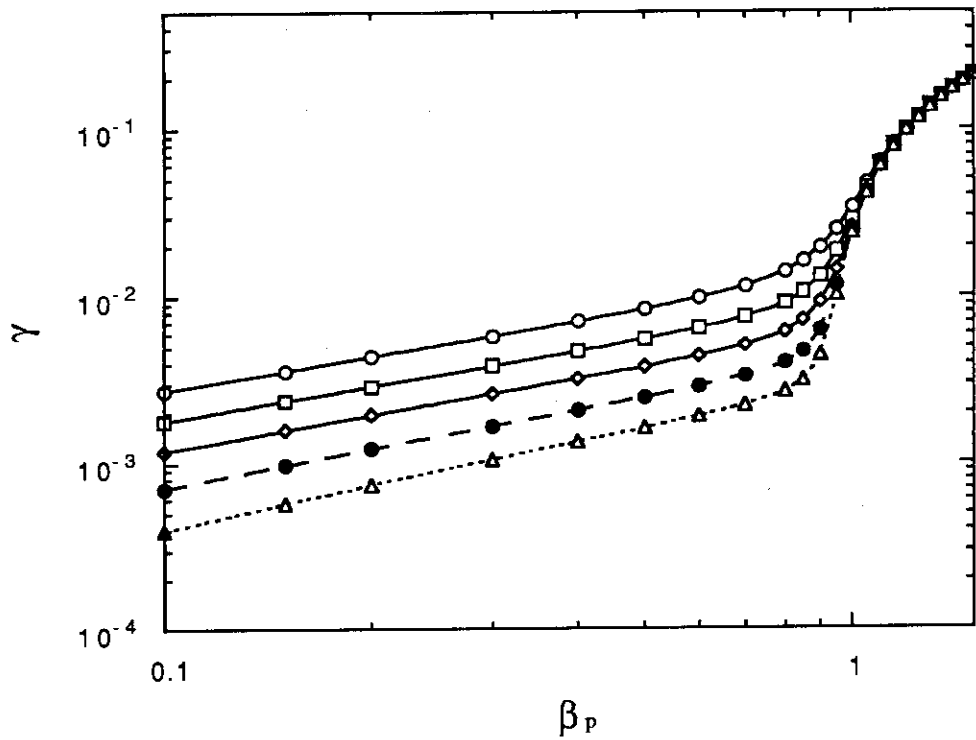


図5. 4 抵抗性バルーニング・モードの線形成長率  $\gamma$  のポロイダル・ベータ値  $\beta_p$  依存性。トロイダル および ポロイダル・モード数は、 $n=2$ 、 $m=3, 4, 5$  で、逆アスペクト比  $\varepsilon=0.1$  とする。安全係数分布および圧力分布は、各々 (5. 6) (5. 5) 式で与えられる。プラズマ電気抵抗値は、各々  $\eta=10^{-6}$  (○印)、 $\eta=3 \times 10^{-7}$  (□印)、 $\eta=10^{-7}$  (◇印)、 $\eta=3 \times 10^{-8}$  (●印)、 $\eta=10^{-8}$  (△印) である。

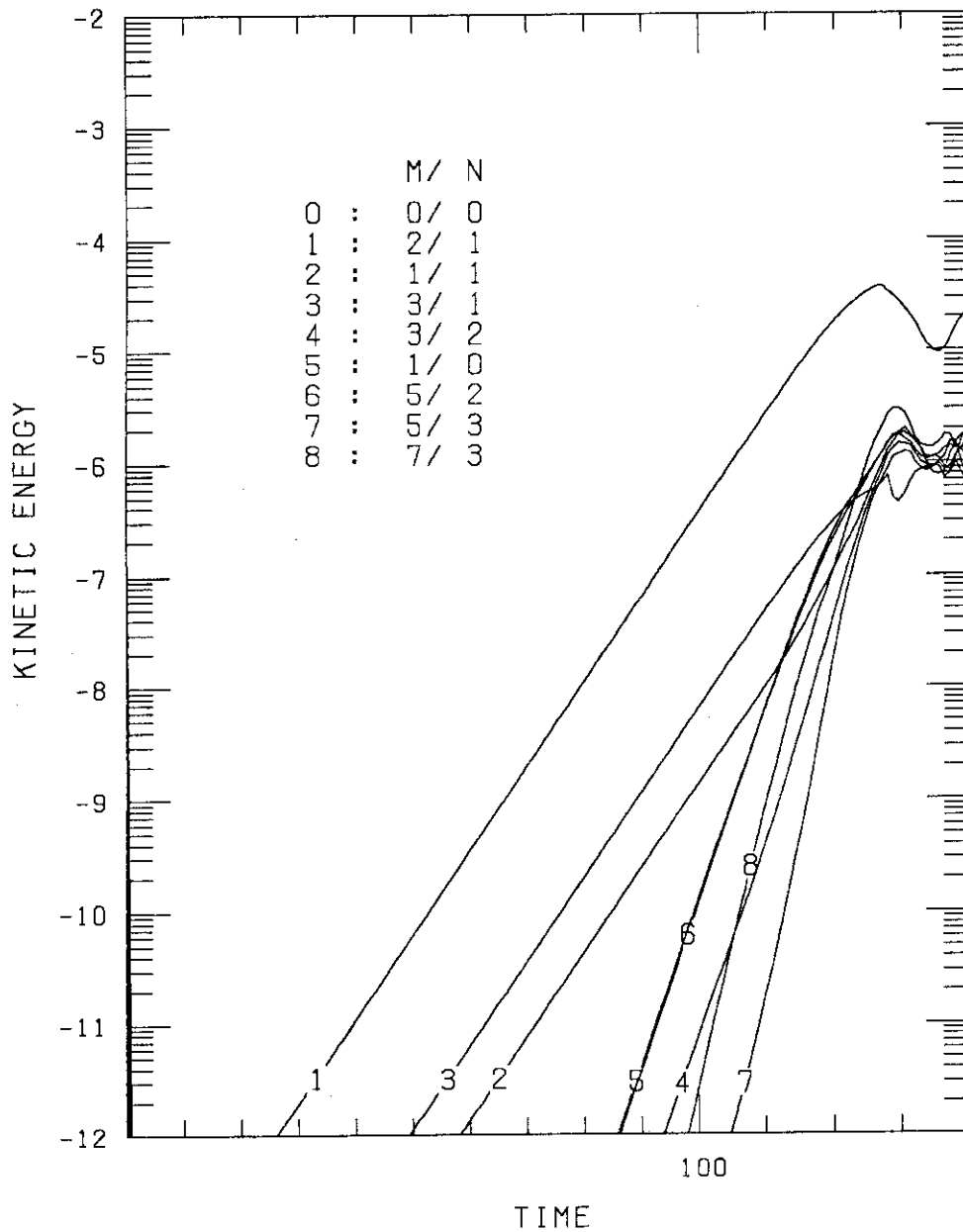


図5. 5 抵抗性バルーニング・モードの各ヘリシティの運動エネルギーの時間発展。各ヘリシティに対応するトロイダルおよびポロイダル・モード数の比は図中に示されている。安全係数分布および圧力分布は(5. 6) (5. 5)式で与えられる。プラズマ抵抗値は、 $q=2$ 面で $\eta=10^{-6}$ 、また逆アスペクト比 $\epsilon=0.1$ とする。 $n=1$ および $n=2$ のヘリシティのエネルギーは、各々図5. 3 図5. 4の $\eta=10^{-6}$ 、 $\beta_p=1$ で示された線形成長率で成長し $t \approx 125$ で飽和している。

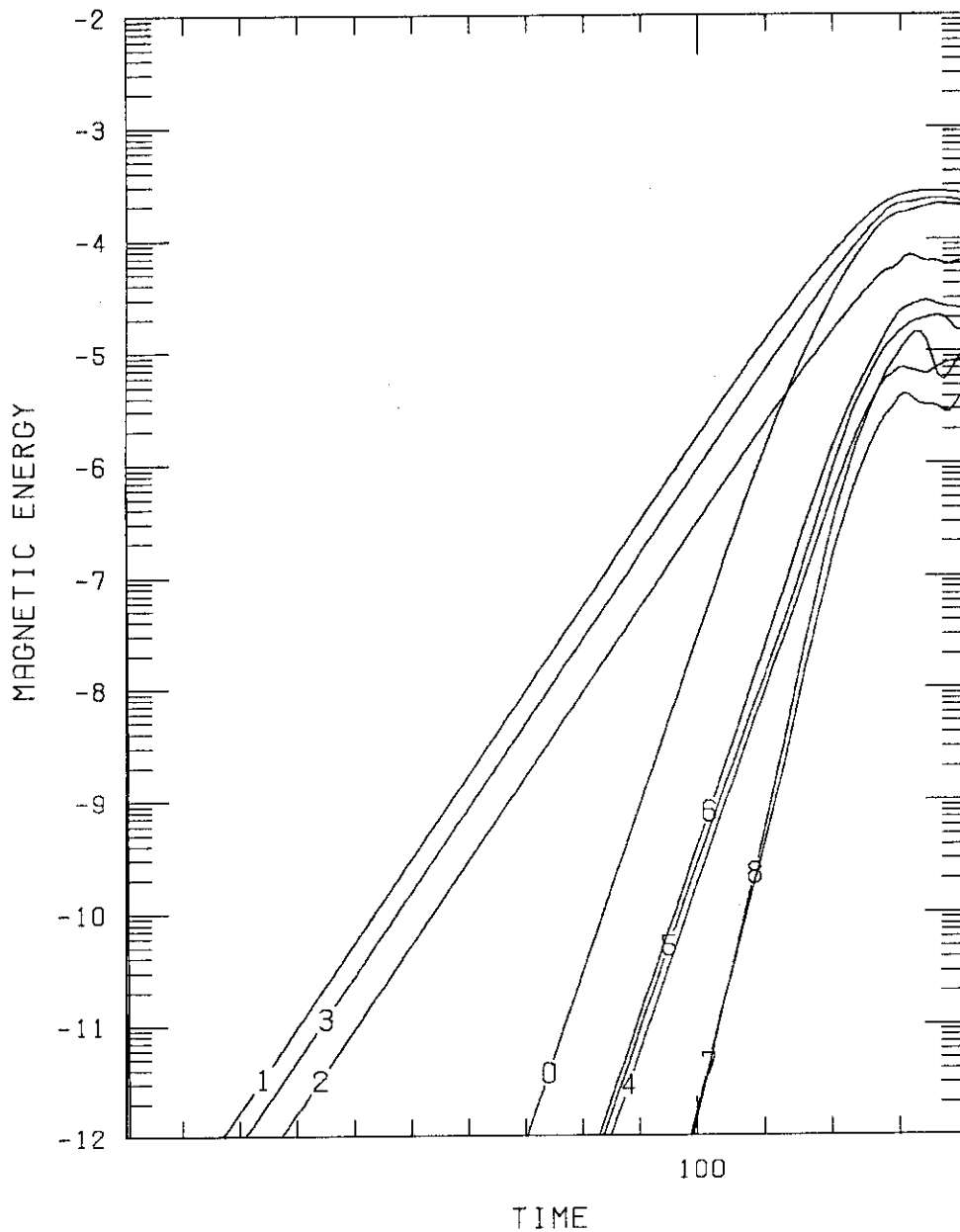


図5. 6 図5. 5 で示された抵抗性バルーニング・モードの各ヘリシティの磁気エネルギーの時間発展。各ヘリシティに対応するトロイダルおよびポロイダル・モード数の比は図5. 5に示されている。 $n=1$  及び  $n=2$  のヘリシティのエネルギーは、各モードの運動エネルギーのそれと同じ成長率で成長し  $t \approx 130$  で飽和している。

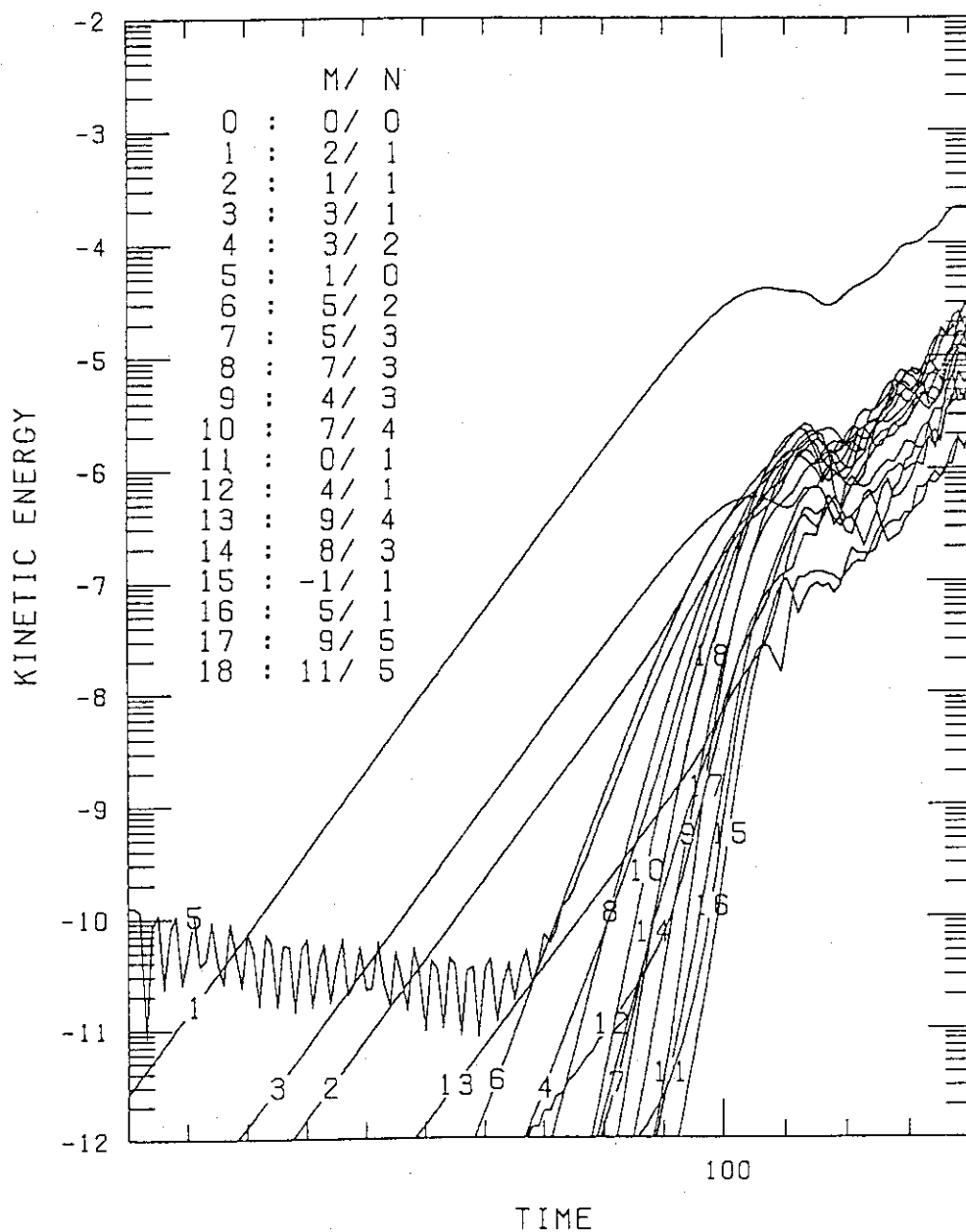


図5. 7 図5. 5と同じ平衡に対して、簡約MHD方程式を使った場合の抵抗性バルーニング・モードの各ヘリシティの運動エネルギーの時間発展。各ヘリシティに対応するトロイダルおよびポロイダル・モード数の比は図中に示されている。図5. 5に対応する各ヘリシティのエネルギーは図5. 5と同じ線形成長率で成長し  $t \approx 105$  で飽和している。この場合の全モード数は、32である。



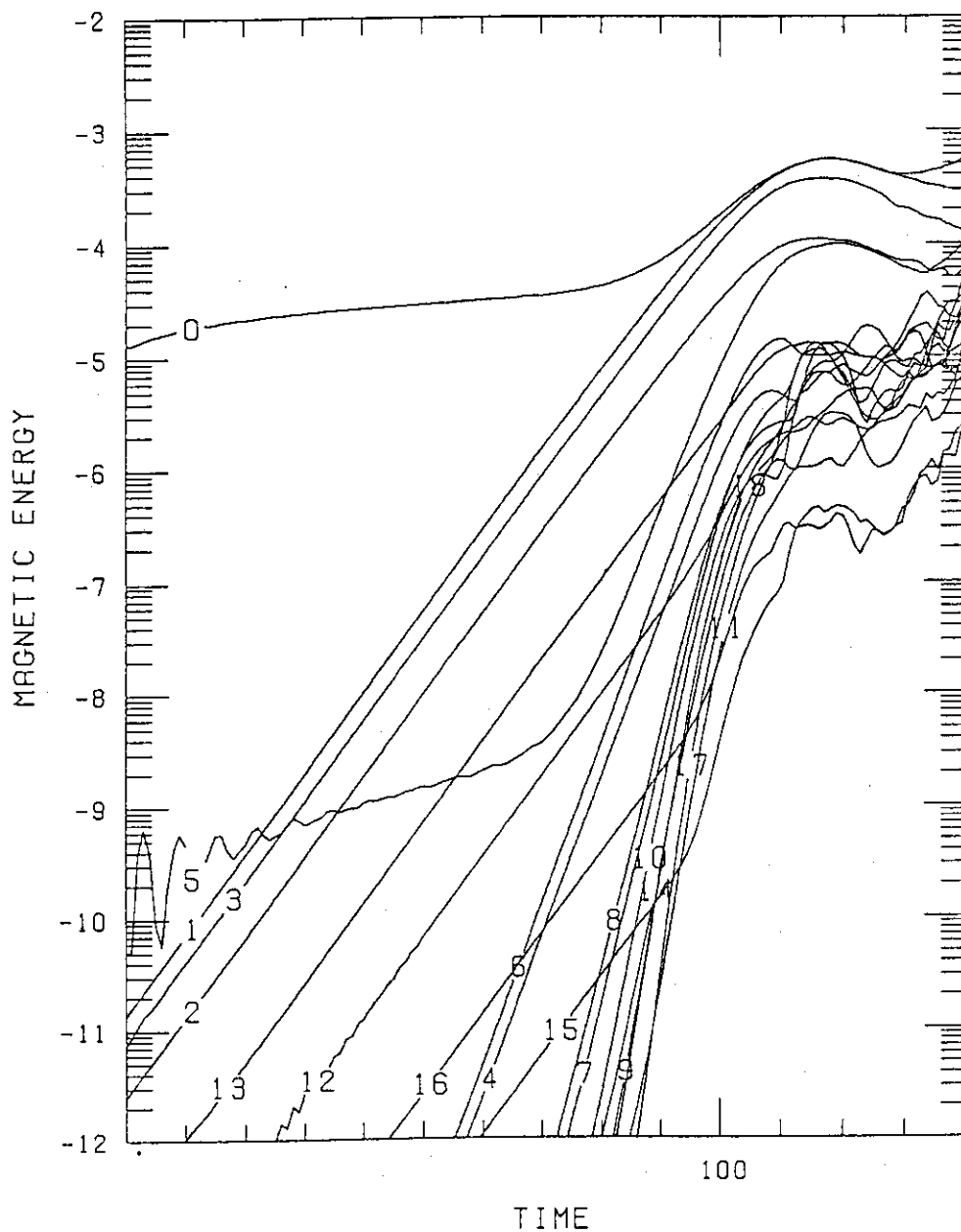


図5. 8 図5. 7 の場合の各ヘリシティの磁気エネルギーの時間発展。各ヘリシティに対応するトロイダルおよびポロイダル・モード数の比は図5. 7に示されている。

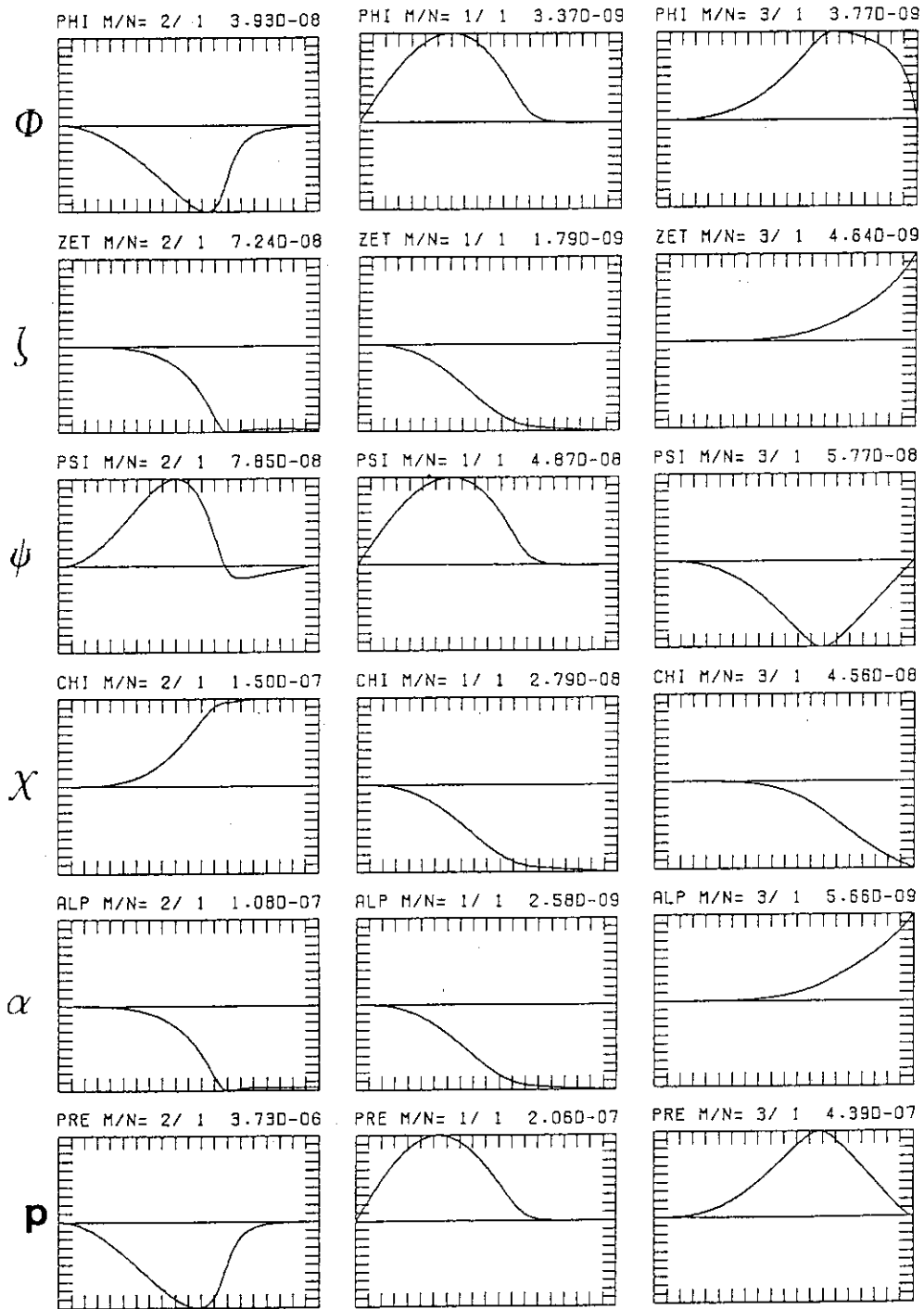


図5. 9 図5. 3で $\beta_p=1$ の場合の固有値問題を解いて得られた各モード ( $m/n=2/1, 1/1, 3/1$ ) の ( $\phi, \zeta, \psi, \chi, \alpha, p$ ) の各固有関数分布。簡約MHD方程式を使って得られた各モード ( $m/n=2/1, 1/1, 3/1$ ) の ( $\phi, \psi, p$ ) の各固有関数分布はこれらと一致する。これらの固有関数は非線形シミュレーションの初期値として用いられる。

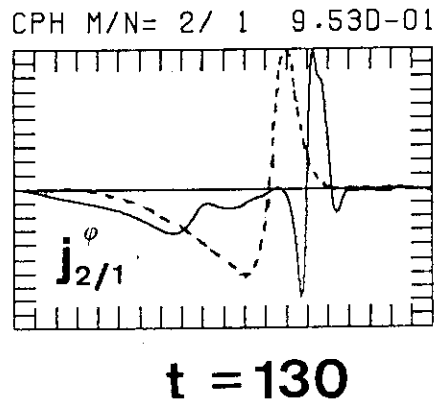
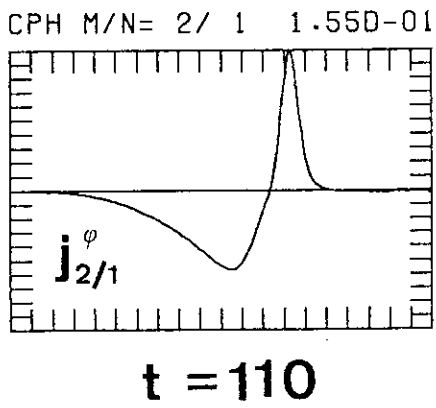
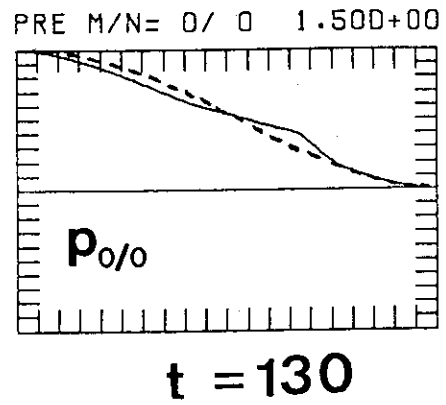
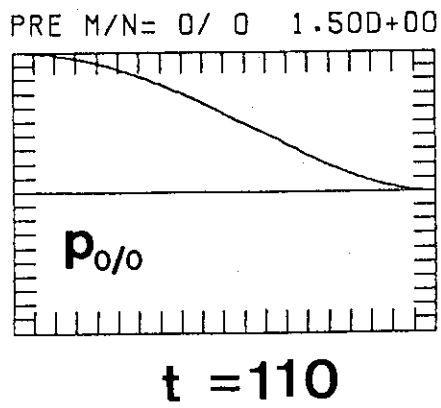


図5. 10  $m/n=0/0$  のプラズマ圧力および  $m/n=2/1$  のプラズマ電流の飽和前 ( $t=110$ ) と飽和後 ( $t=130$ ) の分布。  $t=130$  の両グラフに点線で書かれた分布は初期 ( $t=0$ ) の分布を示している。

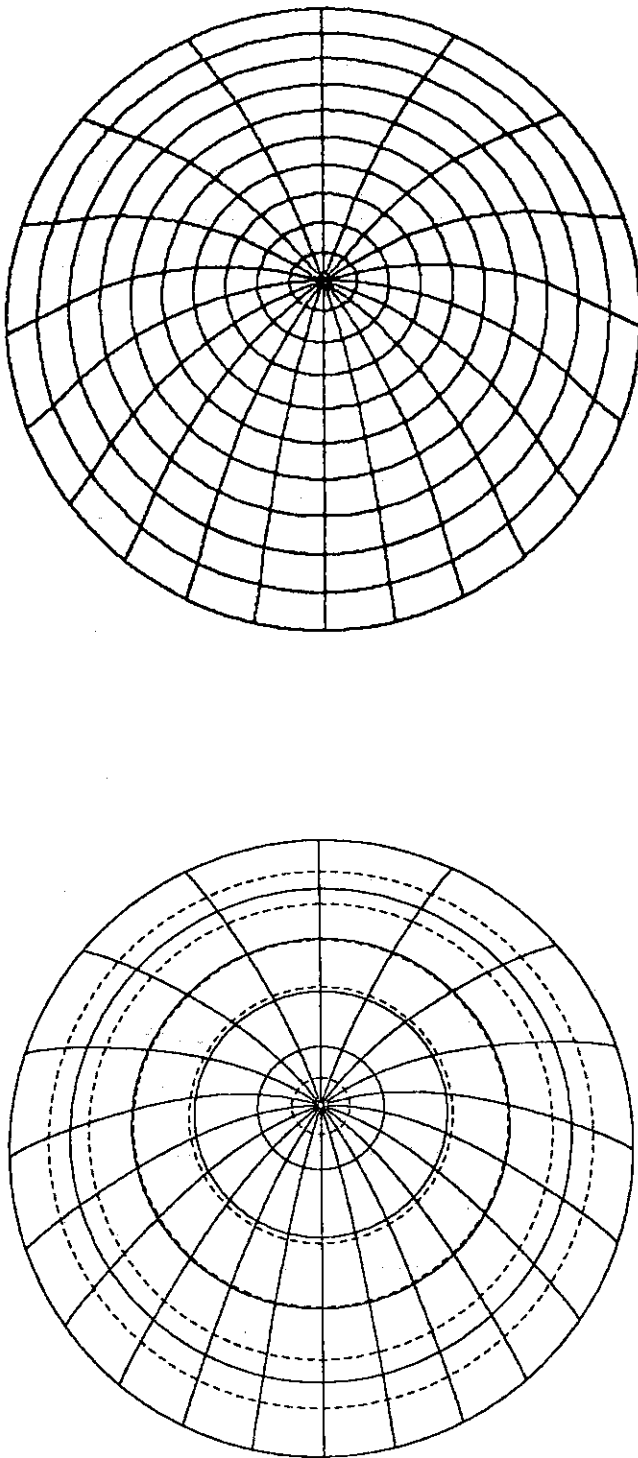


図5. 1.1 逆アスペクト比  $\epsilon = 0.1$ 、ポロイダル・ベータ値  $\beta_p = 1$  の円断面トカマク平衡のポロイダル磁束の等高線の比較。(a) が数値解、(b) が解析解を表す。解析解の  $q$  分布は (5.7) 式で表される。

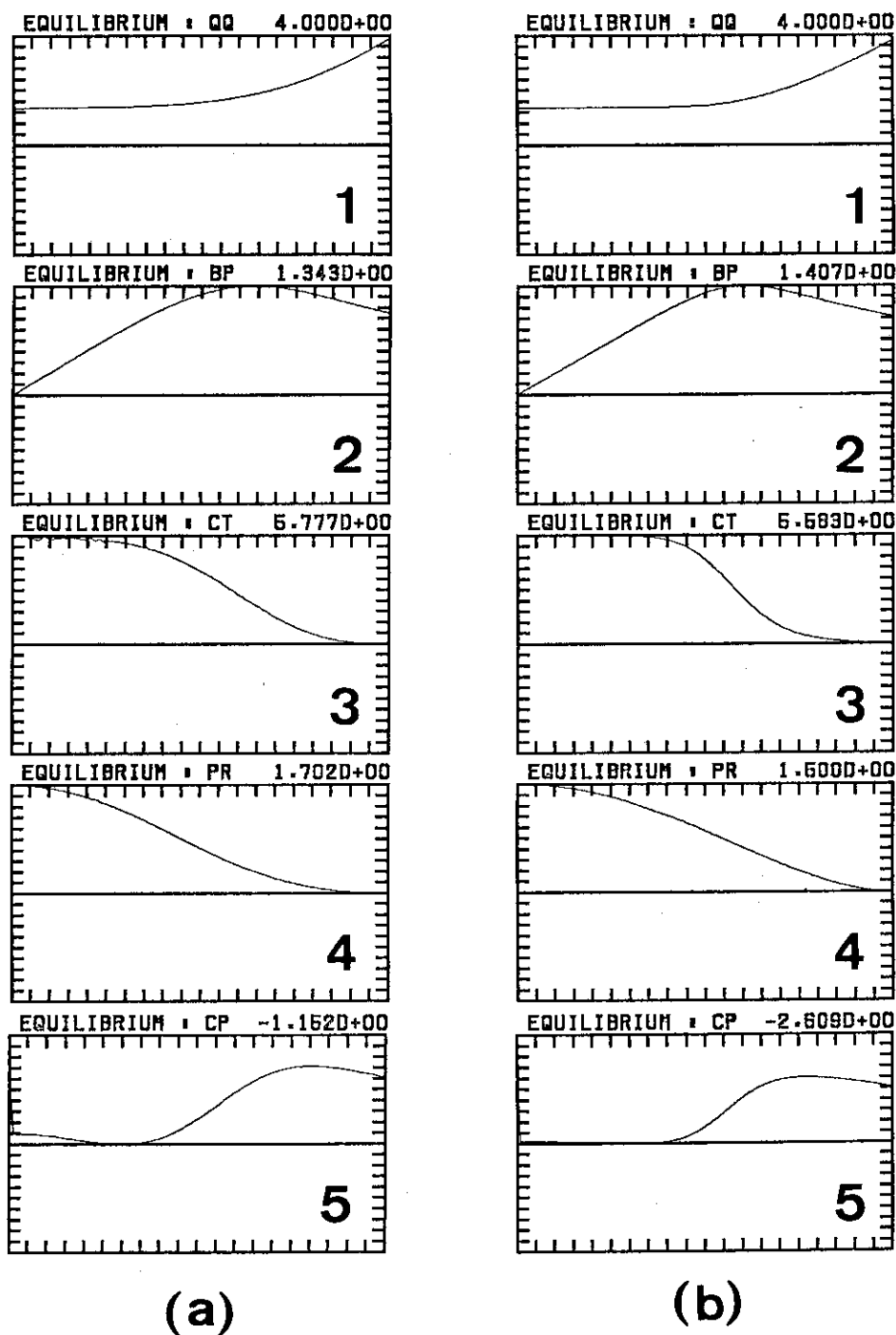
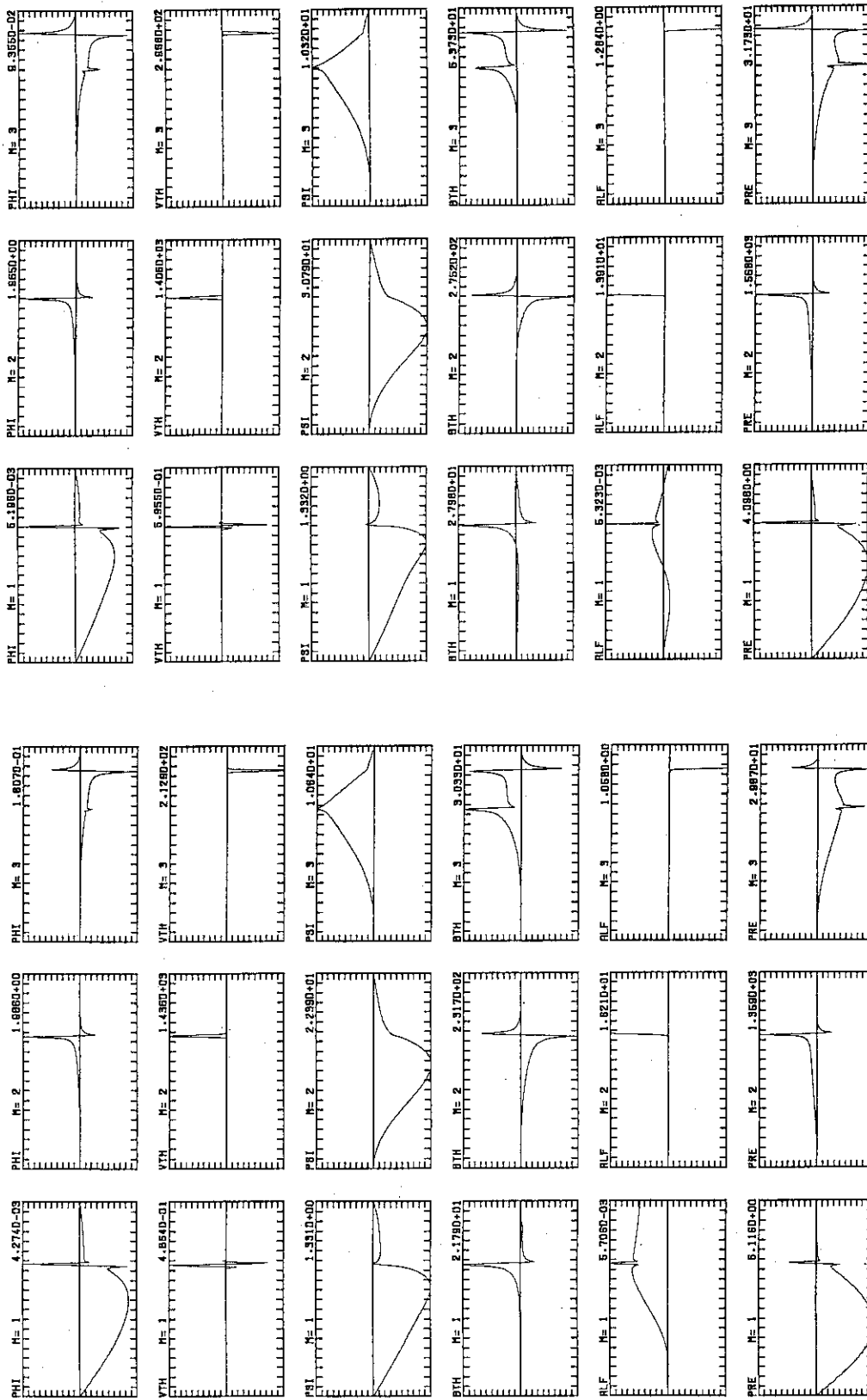


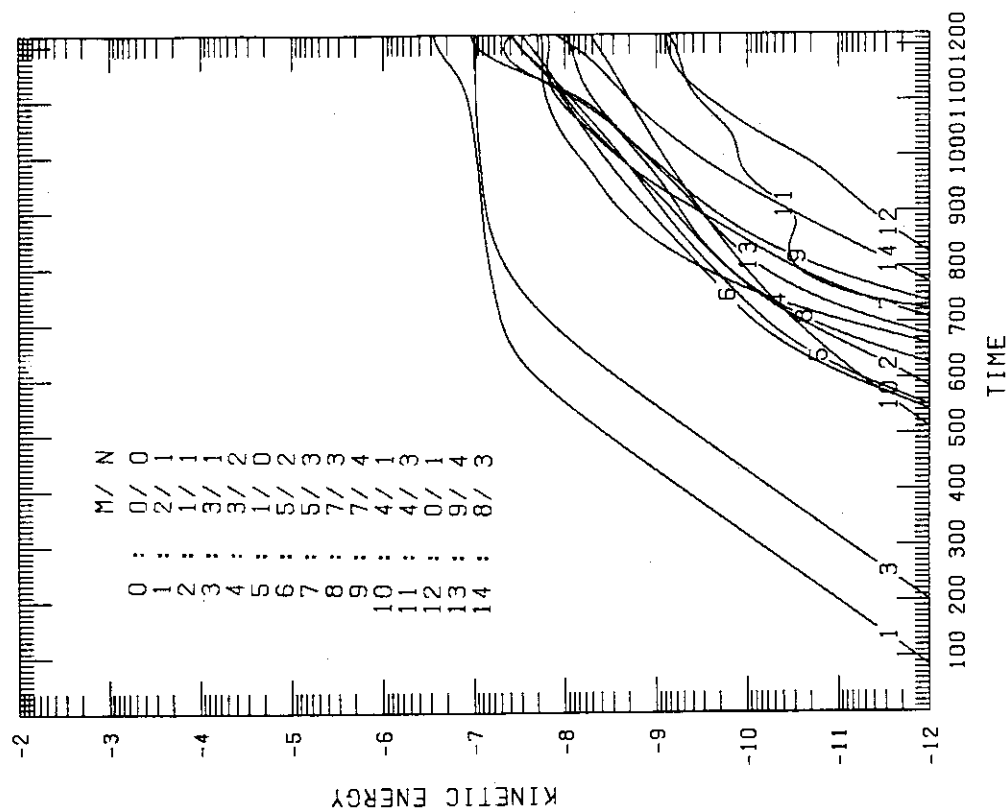
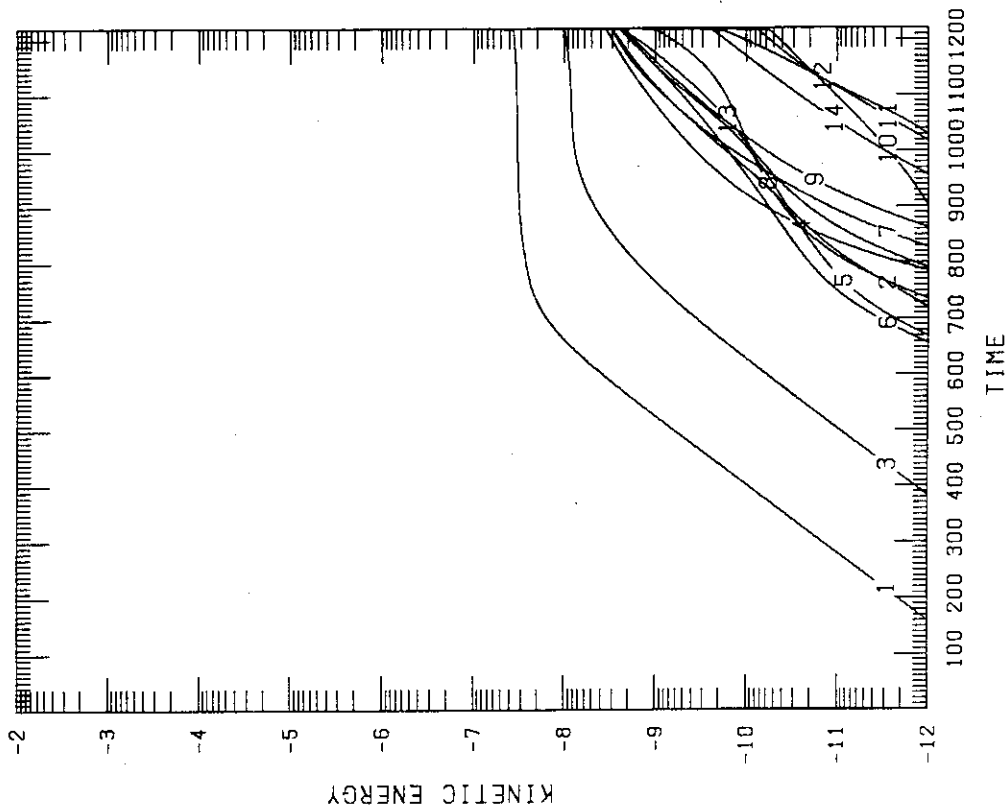
図5. 12 各平衡量、(1) 安全係数、(2) ポロイダル磁場、(3) トロイダル電流、(4) プラズマ圧力 および (5) ポロイダル電流、の小径方向の分布の (a) 数値解、と (b) 解析解 の間の比較。



(a)

(b)

図5. 1.3 図5. 1.2で表される平衡に対して固有値問題を解いて得られた各モード( $m/n=1/1, 2/1, 3/1$ )の( $\phi, \zeta, \psi, \chi, \alpha, \rho$ )の各固有関数分布。(a)が数値解、(b)が解析解に対する分布を表す。



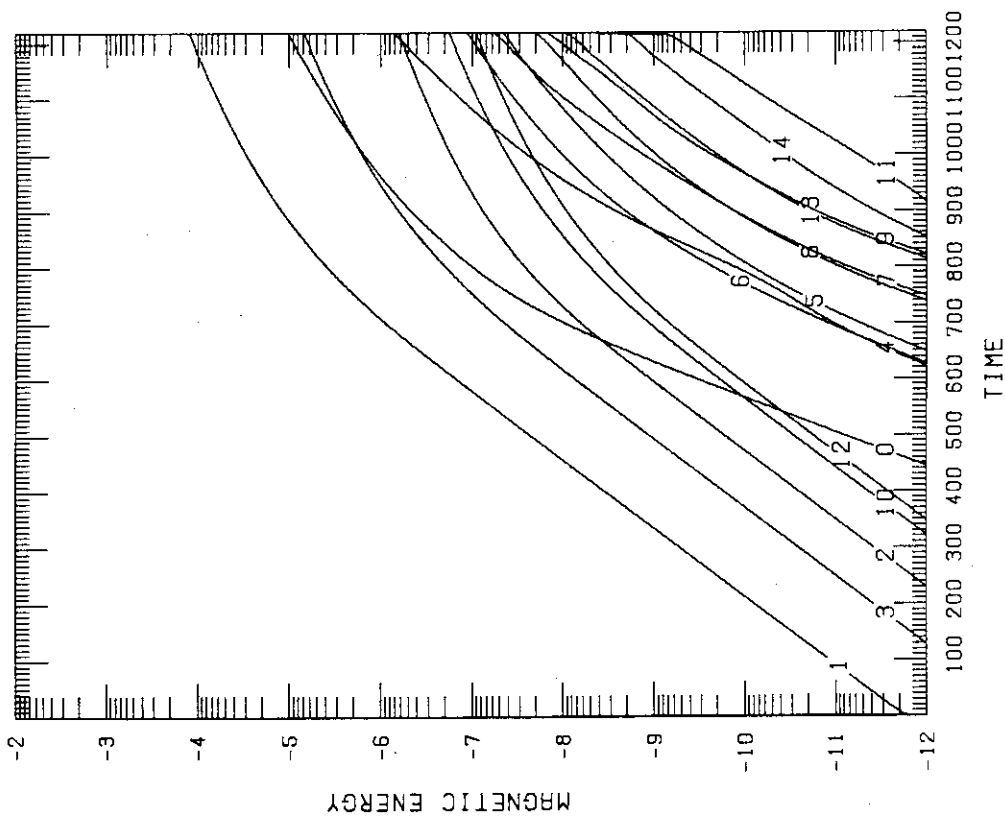
M	N
0	0/0
1	2/1
2	1/1
3	3/1
4	3/2
5	1/0
6	5/3
7	5/3
8	7/4
9	7/4
10	4/1
11	4/1
12	0/1
13	9/4
14	8/3

(a)

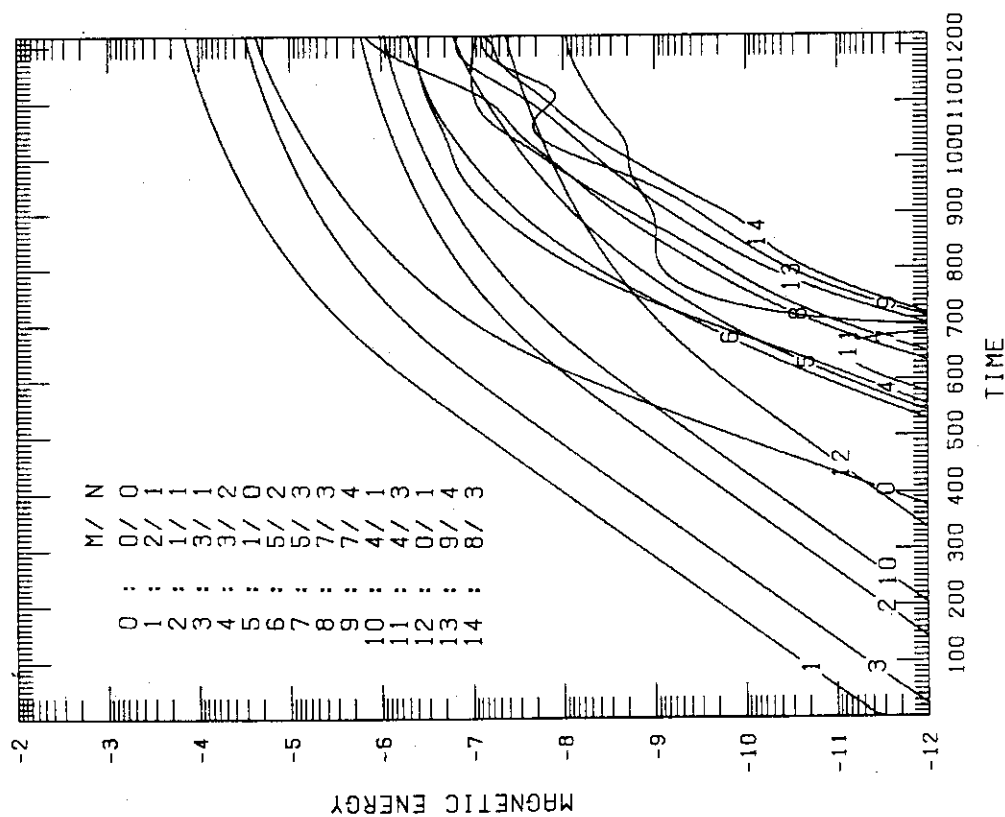
(b)

図5. 14 図5.1.1、1.2で示される平衡解に対するテアリング・モードの各ヘリシティーの運動エネルギーの時間発展。各ヘリシティーに対応するトロイダルおよびポロイダル・モード数の比は図中に示されている。

(a) が数値解 (b) が解析解に対する変化を表す。



(a)



(b)

図5.15 図5.11、12で示される平衡解に対するテアリング・モードの各ヘリシテイの磁気エネルギーの時間発展。各ヘリシテイに対応するトロイダルおよびポロイダル・モード数の比は図中に示されている。(a)が数値解 (b)が解析解に対する変化を表す。



## 付録A トロイダル非圧縮性摂動に対するMHD方程式の導出

ここでは、軸対称で低ベータのトカマク・プラズマ中における非圧縮性MHD摂動に対する方程式を導出する。まず、プラズマの磁気流体的挙動は次の一流体MHD方程式によって記述される：

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.1-1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.1-2})$$

$$\frac{dP}{dt} + \Gamma P \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{A.1-3})$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \quad (\text{A.1-4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (\text{A.1-5})$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.1-6})$$

ここで、 $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $\eta$ ,  $\Gamma$ は、それぞれプラズマ速度、磁場、電場、電流、プラズマ質量密度、プラズマ圧力、電気抵抗、比熱比を表す。また、単位系としては、真空透磁率を1とする規格化MKS単位系を用いている。MHD摂動を引き起こす自由エネルギーはプラズマ圧力とプラズマ電流のつくる磁場エネルギーであるが、トカマクのような低ベータ・プラズマでは、これらの自由エネルギーは外部から加えられたトロイダル磁場エネルギーに比べて十分に小さい。このことは、磁場エネルギーの変化を引き起こす摂動が励起されにくいことを意味しており、プラズマの不安定な運動には次式で表される制約が加わることになる：

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}^2 \mathbf{V}) = 0$$

磁場 $\mathbf{B}$ は良い近似で $\mathbf{B} \sim B_0 R_0 / R$ と表現されるから、この条件は

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} / R^2) = 0 \quad (\text{A.2})$$

と書き換えることが出来る。すなわち、プラズマの不安定な運動はトロイダル効果を受けた非圧縮性を持つことになる。以下では、この制約条件(A.2)式のもとでMHD方程式系(A.1)式を書き換える事にする。まず、(A.2)式から速度ベクトル $\mathbf{V}$ は任意のスカラー関数(流れ関数) $\phi$  および $\hat{\phi}$ を用いて

$$\mathbf{V} = R_0 \mathbf{X} [\nabla \theta \times \nabla \zeta + \nabla \varphi \times \nabla \phi], \quad \mathbf{X} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \quad (\text{A.3})$$

と表現する事が出来る。ここで、 $\theta$  および  $\varphi$  は第2章で定義した磁力線座標におけるポロイダルおよびトロイダル角座標である。次に、元の運動方程式 (A.1-1) は3成分を持っており、(A.2)式の制約は運動方程式に拘束条件を与えることになる。一般に、非圧縮性流体の運動は渦度  $\mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{V}$  によって記述される。同様に、今対象としている、トロイダル効果を受けた非圧縮性プラズマに対しては、渦度ベクトル  $\mathbf{U}$  を次のように定義する：

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} \nabla \times (\mathbf{X} \rho \mathbf{V}) \quad (\text{A.4})$$

この表式を用いて (A.1-1) を書き直すと、ベクトル計算の後、以下の式が得られる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} \\ + \mathbf{X} \nabla \times \{ [\mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{X} \rho)] \mathbf{V} \} + \mathbf{X} \nabla (\mathbf{X} \rho) \times \nabla \frac{V^2}{2} \\ = -\mathbf{X} \nabla \mathbf{X} \times \nabla P + \mathbf{X} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{X} \mathbf{J}) - \mathbf{X} \mathbf{J} \cdot \nabla (\mathbf{X} \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

同様に、制約条件 (A.2) 式を用いて (A.1-2, 3) 式を書き換えると、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{X} \rho) = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{X}^\Gamma P) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{X}^\Gamma P) = 0 \quad (\text{A.7})$$

(A.6) 式と (A.5) 式を比べると質量密度分布  $\rho$  として

$$\mathbf{X} \rho = \text{cnt.} \quad (\text{A.6}')$$

とおくと渦度ベクトルに対する方程式 (A.5) 式は次式のように簡単になる事が分る：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} \\ = -\mathbf{X} \nabla \mathbf{X} \times \nabla P + \mathbf{X} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{X} \mathbf{J}) - \mathbf{X} \mathbf{J} \cdot \nabla (\mathbf{X} \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{A.5}')$$

この方程式も3成分を持っているが、それらのうち独立なものは2成分だけであり、他の1つはこれら1次独立な2成分によって表現することが出来る。どの成分を解くかは任意であるが、方程式が簡単となるよう、本コードではトロイダルおよびポロイダル角方向の反変成分に対する式を解くことにする。(A. 6')式の仮定ではプラズマ密度はトーラスの主半径に比例する事になり、実際的ではないが、プラズマ内部で引き起こされる不安定なMHDモードの挙動に対してはプラズマ密度分布の影響は大きくない。従って、以下では簡単のため、この仮定のもとで定式化を進める。(外部キルク・モード、アルフヴェン固有モード等の解析では密度分布をが重要な役割を果たす場合があり、このような場合には(A. 6)式を直接用いて解析をする必要がある。)一方、磁場 $\mathbf{B}$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ からスカラー関数(磁束関数) $\psi$ 及び $\chi$ を用いて

$$\mathbf{B} = \nabla \theta \times \nabla \chi + \nabla \phi \times \nabla \psi \quad (\text{A.8})$$

と書ける。(A. 1-4, 1-5)、(A. 8)式から磁場の発展方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\chi \nabla \theta + \psi \nabla \phi) = \\ - (\mathbf{V} \cdot \nabla \chi) \nabla \theta - (\mathbf{V} \cdot \nabla \psi) \nabla \phi + (\mathbf{V} \cdot \nabla \theta) \nabla \chi + (\mathbf{V} \cdot \nabla \phi) \nabla \psi \\ + \nabla \alpha + \eta \mathbf{J} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

ここで、 $\alpha$ は静電ポテンシャルに対応している。

以上をまとめると、トロイダル非圧縮性に基づくMHD基礎方程式は

$$\mathbf{V} = R_0 \mathbf{X} [\nabla \theta \times \nabla \zeta + \nabla \phi \times \nabla \phi] \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{B} = \nabla \theta \times \nabla \chi + \nabla \phi \times \nabla \psi \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} \nabla \times \mathbf{V} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{A.1-6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{V} \\ = - \mathbf{X} \nabla \mathbf{X} \times \nabla P + \mathbf{X} \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{X} \mathbf{J}) - \mathbf{X} \mathbf{J} \cdot \nabla (\mathbf{X} \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{A.5'})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\chi \nabla \theta + \psi \nabla \phi) = \\ - (\mathbf{V} \cdot \nabla \chi) \nabla \theta - (\mathbf{V} \cdot \nabla \psi) \nabla \phi + (\mathbf{V} \cdot \nabla \theta) \nabla \chi + (\mathbf{V} \cdot \nabla \phi) \nabla \psi \\ + \nabla \alpha + \eta \mathbf{J} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (X^\Gamma P) + \mathbf{V} \cdot \nabla (X^\Gamma P) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$X \rho = \text{cnt.} \quad (\text{A.6'})$$

この方程式系で、ポロイダル方向の流れ関数  $\psi$  および磁束関数  $\chi$  はトロイダル方向の流れ関数  $\phi$  および磁束関数  $\psi$  に対して逆アスペクト比の2乗のオーダー  $O(\epsilon^2)$  である。従って、これらを0とおくと通常の簡約MHD方程式に帰着する。逆に言うと、通常の簡約MHD方程式では、形式的には  $\epsilon^2$  のオーダーまで考慮して計算しても、同オーダーであるポロイダル方向の成分の寄与を取り入れていない。このため、 $\epsilon^2$  のオーダーがプラズマの安定性および非線型挙動に重要な役割を果たす  $m=1$  内部キック・モード等の解析では誤った結果を与えることになる。

次に、以上で導出した方程式系のエネルギー保存について考える。まず、(A.5) に  $\mathbf{V}$  を掛けて空間積分すると複雑な計算の後次式が得られる

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d r^3 \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{V}|^2}{X} = \int d r^3 \mathbf{V} \cdot (-\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

ここで、(A.6') 式を考慮すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d r^3 \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2 = \int d r^3 \mathbf{V} \cdot (-\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.10})$$

磁場エネルギーおよび内部エネルギーの時間発展は、(A.9)、(A.7) 式および (A.6') 式から、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d r^3 \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 = - \int d r^3 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \eta |\mathbf{J}|^2) + \int d \mathbf{S} \cdot \nabla \alpha \times \mathbf{B} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d r^3 \frac{P}{\Gamma - 1} = \int d r^3 \mathbf{V} \cdot \nabla P \quad (\text{A.12})$$

以上をまとめると、トロイダル非圧縮性摂動に対して導出した方程式系のエネルギー保存は

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d r^3 \left( \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 + \frac{P}{\Gamma-1} \right) = - \int d r^3 \eta |\mathbf{J}|^2 + \int d \mathbf{S} \cdot \nabla \alpha \times \mathbf{B} \quad (\text{A.13})$$

となり、元のMHD方程式系に対するエネルギー保存と一致することが分かる。右辺第一項は有限電気伝導度によるエネルギー散逸、第2項は境界を通じたポインティング・エネルギー束の流入を表している。

最後に、上記の新簡約MHD方程式のもとで、電気伝導度を無視した場合の円筒プラズマでの理想モードに対する解析的な固有値方程式を導いておく。モードのトロイダルおよびポロイダル・モード数をそれぞれ  $n$  および  $m$  とし、時間微分を  $\lambda$  で置き換え、径方向およびモードのヘリックスに沿った方向の摂動  $\xi$  を

$$\xi = \frac{1}{r} (m\phi - n\zeta) \quad (\text{A.14})$$

で定義すると、複雑な計算の後、

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r^3 \hat{\lambda}^2}{\sigma} \frac{d\xi}{dr} \right] - \left\{ \hat{\lambda}^2 \left[ m^2 - \frac{1}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^2} \left( \frac{nr}{mR_0} \right)^2 \right] r + \frac{2}{\sigma} \left( \frac{nr}{R_0} \right)^2 \frac{dP_{eq}}{dr} - \frac{4}{m\sigma^2} \left( \frac{nr}{R_0} \right)^2 F \psi'_{eq} + \frac{\hat{\lambda}^2}{\sigma} \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{nr}{R_0} \right)^2 \frac{\psi'^2_{eq}}{r} \right\} \xi = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{\lambda}^2 = \lambda^2 + F^2, \quad F = \frac{1}{r} (m \Psi'_{eq} - n \chi'_{eq}) \quad (\text{A.16})$$

ここで、添え字 eq は平衡量をまた ' は  $r$  に関する微分を表している。この式は、理想的 MHD 方程式から非圧縮性の仮定のもとで導かれたものと当然のことながら一致している。

## 付録B 磁力線座標におけるMHD平衡

この付録では第2章で導入した磁力線座標のもとで平衡方程式および各種メトリック量の解析的な表現について述べる。アスペクト比の大きな円形断面プラズマを考え、逆アスペクト比 ( $\varepsilon = 1/R_0$ ) の2次迄で、円柱座標  $(R, Z)$  を  $(r, \theta)$  を用いて次のように展開する：

$$R = R_0 - S_0(r) - [r + S_1(r) + T_1(r)] \cos \theta - S_2(r) \cos 2\theta - S_3(r) \cos 3\theta \quad (\text{B.1-1})$$

$$Z = [r + S_1(r) - T_1(r)] \sin \theta + S_2(r) \sin 2\theta + S_3(r) \sin 3\theta \quad (\text{B.1-2})$$

以下、 $S_0, S_1, S_2, S_3$  および  $T_1$  に対する方程式をMHD平衡方程式および磁力線が直線になる条件から導出する。まず、各種メトリック量をこれらの関数を用いて表現すると、

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 r^2 - 2\varepsilon S_0 - 2\varepsilon r \cos \theta + \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 r^2 - 2\varepsilon S_2\right) \cos 2\theta \quad (\text{B.2-1})$$

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 r^2 + 2\varepsilon S_0 + 2\varepsilon r \cos \theta + \left(\frac{3}{2} \varepsilon^2 r^2 + 2\varepsilon S_2\right) \cos 2\theta \quad (\text{B.2-2})$$

$$g_{rr} = 1 + 2S'_1 + (S'_0)^2 + (S'_2)^2 + 2(S'_0 + S'_2) \cos \theta + 2(T_1 + S'_3 + S'_0 S'_2) \cos 2\theta \quad (\text{B.2-3})$$

$$\frac{g_{r\theta}}{r} = -(S'_0 - S'_2 + \frac{2S_2}{r}) \sin \theta - \left(\frac{2S_2}{r} S'_0 + T_1 + \frac{T_1}{r} + \frac{3S_3}{r} - S'_3\right) \sin 2\theta \quad (\text{B.2-4})$$

$$\frac{g_{\theta\theta}}{r^2} = 1 + \frac{2S_1}{r} + \left(\frac{2S_2}{r}\right)^2 + \frac{4S_2}{r} \cos \theta - 2\left(\frac{T_1}{r} - \frac{3S_3}{r}\right) \cos 2\theta \quad (\text{B.2-5})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(R, Z)}{\partial(\theta, r)} = 1 + S'_1 + \frac{S_1}{r} + \frac{2S_2 S'_2}{r} + (S'_0 + S'_2 + \frac{2S_2}{r}) \cos \theta + \left(T_1 - \frac{T_1}{r} + \frac{3S_3}{r} + \frac{2S_2 S'_0}{r} + S'_3\right) \cos 2\theta \quad (\text{B.2-6})$$

これらの表式を平衡方程式

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 P' + \Lambda \Lambda' + \frac{\Psi'}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 g_{\theta\theta} \frac{\Psi'}{r} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 g_{r\theta} \frac{\Psi'}{r} \right] \right\} = 0 \quad (\text{B.3})$$

および磁力線が直線となる条件

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (R, Z)}{\partial (\theta, r)} = \frac{R}{R_0} \quad (\text{B.4})$$

に代入して整理すると、以下の方程式が得られる：

$$\frac{d}{dr} \left[ \left( S_2 + \frac{\varepsilon r^2}{2} \right) \Psi'^2 \right] = \varepsilon r^2 P' - \frac{\varepsilon r}{2} \Psi'^2 \quad (\text{B.5-1})$$

$$\frac{d}{dr} [S_0 + S_2] = -\varepsilon r - \frac{2 S_2}{r} \quad (\text{B.5-2})$$

$$\frac{d}{dr} (r S_1) = -\varepsilon r S_0 - 2 S_2 S_2' \quad (\text{B.5-3})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[ r \Psi'^2 \frac{d}{dr} (S_3 + T_1) \right] - \frac{3}{r} \Psi'^2 (S_3 + T_1) \\ = \frac{d}{dr} \left\{ \Psi'^2 \left[ 2 S_2 (\varepsilon r - S_0') + \frac{3}{4} \varepsilon^2 r^3 \right] \right. \\ \left. + \Psi'^2 \left[ \frac{2 S_2}{r} (\varepsilon r + S_0') - \varepsilon r S_2' + \frac{1}{4} \varepsilon^2 r^2 \right] \right. \\ \left. + P' \left( \frac{1}{2} \varepsilon^2 r^3 - 2 \varepsilon r S_2 \right) \right\} \quad (\text{B.5-4}) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr} r (S_3 + T_1) + 2 (S_3 - T_1) = -\varepsilon r S_2 - 2 S_2 S_0' \quad (\text{B.5-5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\Psi'}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \Psi' \left[ 1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 r^2 + 2 \varepsilon S_0 + \frac{2 S_1}{r} + \left( \frac{2 S_2}{r} \right)^2 + 4 \varepsilon S_2 \right] \right. \\ \left. + \Lambda \Lambda' + P' \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 r^2 - 2 \varepsilon S_0 \right] \right\} = 0 \quad (\text{B.5-6}) \end{aligned}$$

$\Psi'$  および  $P'$  が与えられた場合には (B.5-1~5) から  $S_0, S_1, S_2, S_3$  および  $T_1$  が、(B.5-6) からポロイダル磁束関数の微分  $\Lambda$  が求まる。しかし、通常のM

HD計算では安全係数分布  $q$  を与えて安定性を議論することが多い。この場合には、まず、円筒プラズマ近似で (B.5-6) を  $\Psi'$  について解く。つまり、

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\Psi'}{r} \right)^2 + \left\{ \left( \frac{\Psi'}{r} \right)^2 \left[ \frac{d}{dr} (R_0^2 q^2) + 4r \right] + 2P' \right\} / [R_0^2 q^2 + r^2] = 0 \quad (\text{B.6-1})$$

$$\Lambda = R_0 q \Psi' / r \quad (\text{B.6-2})$$

シミュレーションに必要な残りのメトリック量の具体的な表式は以下の様になる：

$$g^{rr} = 1 + \frac{2S_1}{r} + \left( \frac{2S_2}{r} \right)^2 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 r^2 + 2\varepsilon S_0 + 4\varepsilon S_2 + \left( \frac{4S_2}{r} + 2\varepsilon r \right) \cos \theta \\ + \left( -\frac{2T_1}{r} + \frac{6S_3}{r} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 r^2 + 6\varepsilon S_2 \right) \cos 2\theta$$

(B.7-1)

$$r g^{r\theta} = \left( S'_0 - S'_2 + \frac{2S_2}{r} \right) \sin \theta \\ + \left[ \frac{2S_2 S'_0}{r} + T'_1 + \frac{2T_1}{r} + \frac{3S_3}{r} - S'_3 + \varepsilon \left( S'_0 - S'_2 \frac{2S_2}{r} \right) \right] \sin 2\theta$$

(B.7-2)

$$r^2 g^{\theta\theta} = 1 + 2S'_1 + S'^2_0 + S'^2_2 + 2\varepsilon r (S'_0 + S'_2) + \frac{3}{2} \varepsilon^2 r^2 + 2\varepsilon S_0 \\ + 2(S'_0 + S'_2 + \varepsilon r) \cos \theta + [2(T'_1 + S'_3 + S'_0 S'_2) \\ + \frac{3}{2} \varepsilon^2 r^2 + 2\varepsilon S_2 + 2\varepsilon r (S'_0 + S'_2)] \cos 2\theta \quad (\text{B.7-3})$$



$$h^{rr} = 1 + \frac{2 S_1}{r} + \left(\frac{2 S_2}{r}\right)^2 + \frac{4 S_2}{r} \cos \theta - 2 \left(\frac{T_1}{r} - \frac{3 S_3}{r}\right) \cos 2 \theta \quad (\text{B.7-4})$$

$$r h^{\theta\theta} = \left(S'_0 - S'_2 + \frac{2 S_2}{r}\right) \sin \theta + \left(\frac{2 S_2 S'_0}{r} + T'_1 + \frac{T_1}{r} + \frac{3 S_3}{r} - S'_3\right) \sin 2 \theta \quad (\text{B.7-5})$$

$$r^2 h^{\theta\theta} = 1 + 2 S'_1 + S'^2_0 + S'^2_2 + 2 (S'_0 + S'_2) \cos \theta + 2 (T'_1 + S'_3 + S'_0 S'_2) \cos 2 \theta \quad (\text{B.7-6})$$

第5章の抵抗性ハルーンング・モード および テアリング・モードの計算例に使用した解析的な平衡解は、これらの式を解いて求められている。