

JAERI - M
93-040

線形時不変システムに対する H_{∞} 最適推定器の設計
— 状態空間設計法と反応度推定への応用 —

1993年3月

鈴木 勝男・島崎 潤也・篠原 慶邦

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1993

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 株式会社原子力資料サービス

線形時不変システムに対する H_{∞} 最適推定器の設計
—状態空間設計法と反応度推定への応用—

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部
鈴木 勝男・島崎 潤也・篠原 慶邦

(1993年1月29日受理)

H_{∞} 最適推定理論は L_2 関数空間に属する外乱全体に対して推定誤差の最大“エネルギー”を H_{∞} ノルムの意味で最小化するミニマックス問題として定式化されている。本報はこの定式化の特徴に注目して与えられた設計仕様を周波数重みとして最適化基準に反映して扱う設計法を示す。次に、通常核的一点動特性方程式に仮想的な外乱で駆動される正味反応度の状態方程式を組合わせた設計モデルに本設計法を適用して高速炉の反応度推定器を設計する。最後に、計算機シミュレーションにより種々の外乱に対して H_{∞} 推定器が正味反応度変化の良い推定結果を与えることを示す。

Design of H_∞ Optimal Estimator for Linear Time-invariant System
- State Space Design Approach and Its Application
to Reactivity Estimation -

Katsuo SUZUKI, Junya SHIMAZAKI and Yoshikuni SHINOHARA

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received January 29, 1993)

H_∞ optimal estimation theory is formulated as a minimax problem where the maximum "energy" of estimation error over all disturbance trajectories in L_2 functional space is minimized in the sense of H_∞ -norm. A design method based on the characteristics of the formulation is presented in which design specifications can be taken into account as frequency weights for the objective function. We applied this method to design a reactivity estimator for a fast breeder reactor. In the design was used a system model which consists of usual reactor point kinetics equations combined with a state equation of net reactivity driven by fictitious noise/disturbance. Finally, we show by computer simulation that H_∞ estimator gives good results in estimating net reactivity changes caused by various disturbances.

Keywords: Reactivity Estimation, H_∞ Control Theory, H_∞ Estimation Theory, Reactor Core Dynamics, Optimal Estimation Technique,

目 次

1. はじめに	1
2. H_{∞} 最適推定理論	2
2.1 問題の定式化	2
2.2 H_{∞} 最適推定器の解	4
3. H_{∞} 最適推定器の設計法	6
3.1 最適推定理論の仮定の検討	6
3.2 設計仕様の取扱い	11
3.3 一般化プラントの状態空間表現の導出	11
3.4 リカッチ方程式の解法	13
4. 高速炉の反応度推定器の設計例	16
4.1 H_{∞} 推定器の設計	16
4.2 反応度推定結果	18
5. おわりに	20
参考文献	21

Contents

1. Introduction	1
2. H_∞ Optimal Estimation Theory	2
2.1 Formulation of Estimation Problem	2
2.2 Solution of H_∞ Optimal Estimator	4
3. Method of H_∞ Optimal Estimator Design	6
3.1 Discussions on the Assumptions in Optimal Estimation Theory	6
3.2 Treatment of Design Specifications	11
3.3 State Space Representation of Generalized Plant	11
3.4 Solving Method of Riccati Equation	13
4. Design Example of Reactivity Estimator for FBR	16
4.1 Design of H_∞ Estimator	16
4.2 Results of Reactivity Estimation	18
5. Conclusions	20
References	21

1. はじめに

H^∞ -最適制御問題[1]の最適解はある特殊な形のリカッチ方程式の解を定数ゲイン行列として得られることが DGKF 論文[2]によって知られ、その後 H^∞ 最適制御理論に基づく制御系設計が次第に試みられるようになった[3, 4]。一方、 H^∞ 制御理論の推定問題への応用例は最小分散等価フィルタとなる適当な重み行列を見出す問題として定式化されたものが最初である[5, 6]。Shaked[7]は周波数領域と状態空間での H^∞ フィルタリングの問題を DGKF 論文の結果に基づいて検討した。また、Nagpalら[8]は H^∞ ノルム評価関数を用いてフィルタリングとスムージングの問題を包括的に検討した。すなわち、定常及び非定常の推定問題を扱い、かつそれぞれにたいして初期状態が既知である場合と未知である場合について検討している。Shaked と Nagpalらの線形時不変システムに対する H^∞ 最適推定理論は殆ど同じ結果となっている。

本報告書はこの H^∞ 最適推定理論の定式化の特徴に注目し、推定誤差の分散最小化基準で定式化されたカルマンフィルタ理論では直接的に扱うことの困難な設計仕様（速応性、雑音フィルタ特性）が容易に扱える設計法を構成したものである。第2章では時不変システムに対して文献[7, 8]に基づいて H^∞ 最適推定理論を述べる。第3章では最適推定理論の展開上で採用された仮定を実際の推定器設計の観点から検討する。また、設計仕様を評価関数に取り入れて扱う方法及びリカッチ方程式の解法等について述べる。第4章では本設計法の適用例として高速炉の反応度推定器を設計し、ステップ状、ランプ状及び正弦波状の反応度外乱印加時の正味反応度の推定結果を示す。

以下では、 $(\cdot)^T$ は行列転置、 $\text{diag}(\cdot)$ は対角行列、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルム、 $\|\cdot\|_2$ は 2-ノルム、 $\|\cdot\|_\infty$ は ∞ -ノルムを表す。また、2-ノルム有界な信号の集合を L_2 、プロバかつ安定なすべての有理型伝達関数の集合を RH^∞ で表す。このとき、 $G(s) \in RH^\infty$ に対して、

$$\|G\|_\infty = \sup_{x \in L_2} \{\|Gx\|_2 / \|x\|_2\}$$

の関係が成立つ[1]。

2. H^∞ 最適推定理論

本章では、文献[7,8]に基づいて推定誤差の最大”エネルギー”を H^∞ ノルムの意味で最小化するという形で定式化される H^∞ 最適推定理論を線形時不変システムを対象として述べる。

2.1 問題の定式化

次の線形時不変システムを考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \tag{2.1a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t) \tag{2.1b}$$

ここで、 $x(t)$ はシステム状態を、 $y(t)$ は計測値を表す。 $w(t)$ はシステム外乱 ($W(t)$) 及び計測雑音 ($V(t)$) からなる列ベクトルである。また、 A 、 B 、 C 、 D は適当な次元の定係数行列である。

推定の対象となる量 $z(t)$ は状態変数 $x(t)$ の線形結合

$$z(t) = Lx(t) \tag{2.2}$$

で与えられるものとする。

最適推定問題は Fig. 2.1 のブロック線図で表せる。すなわち、計測値 y に作用して z との誤差 e をなんらかの意味で最小化するような推定器 E を設計して推定値 \hat{z} を求める問題である。

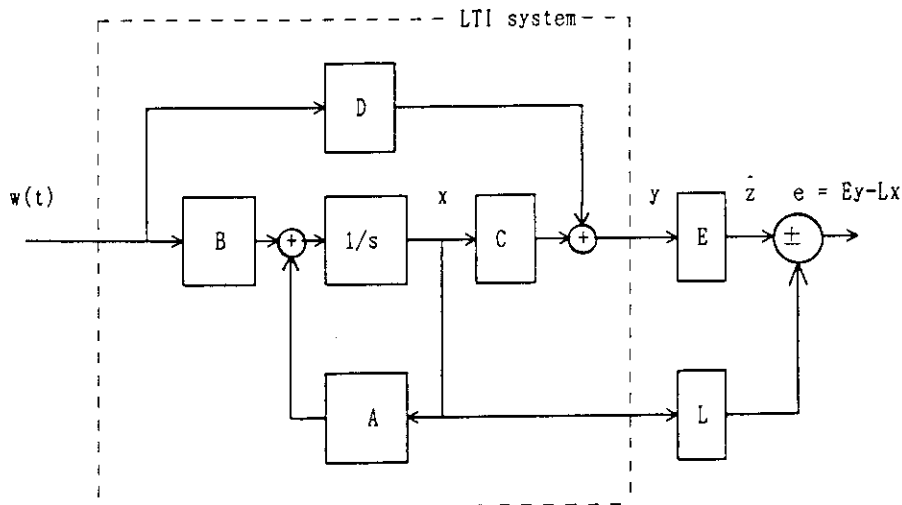


Fig. 2.1 Block diagram of estimation problem

そこで推定誤差の大きさをなんらかの意味で最小化する最適化基準 (J) として外乱 $w(t)$ から推定誤差 $e(t) := z(t) - \hat{z}(t)$ までの伝達関数 $T_{zw}(s)$ の $\|\cdot\|_\infty$ を採用する。すなわち、

$$\begin{aligned}
 J &:= \sup_{w(t) \in L_2} \{ \|z(t) - \hat{z}(t)\|_2^2 / \|w(t)\|_2^2 \} \\
 &= \|T_{zw}\|_\infty
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

よって、 H^∞ 最適推定問題は「計測値 $y(t)$ に作用し、与えられた $\gamma > 0$ に対して $J < \gamma^2$ となるような推定値 $\hat{z}(t)$ を発生する安定でかつ「不偏な」推定器 $E(s)$ が存在するか。もし存在すればそれを求めよ」という形で定式化される。ただし、不偏推定器とは $[0, T]$ の時間区間にわたる計測値が $y(t) = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) ならば、 $\hat{z}(t) = 0$ ($\forall t \in [0, T]$) となるような推定値を与える推定器のことである。なお、 $J < \infty$ となる線形推定器は不偏推定器になることが知られている[8]。

さて、Fig. 2.1 を時不変系に対して H^∞ 制御標準ブロック線図で表すと次のようになる。

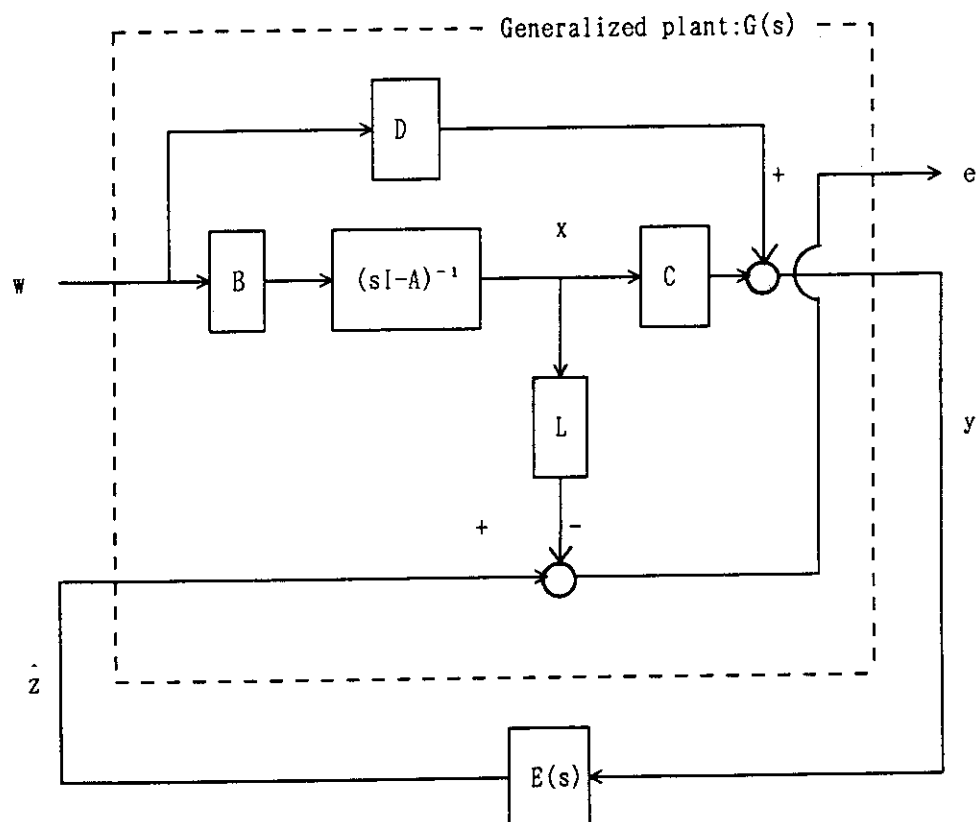


Fig. 2.2 Standard H^∞ -control block diagram for optimal estimation problem

従って、一般化プラントの伝達関数 $G(s)$ は外乱入力ベクトルを w 、制御入力を \hat{z} として、出力を y 、制御量を e とするとき次の様になる。

$$G(s) := \left[\begin{array}{cc|c} G_L(s) & 0 & -I \\ \hline & & \\ G_c(s) & I & 0 \end{array} \right] \quad (2.4)$$

ただし、

$$G_c(s) := C(sI-A)^{-1}B$$

$$G_L(s) := L(sI-A)^{-1}B$$

ここで、制御入力 $\hat{z}(s) := E(s)y(s)$ とすると最適推定問題は $E(s)$ が $G(s)$ を安定化するという条件の下で、外乱 w から制御量 (推定誤差) e までの閉ループ伝達関数行列 $T_{e,w}(s)$ の H^∞ ノルムを最小化する $E(s)$ を見出す問題となる。 $T_{e,w}(s)$ は $E(s)$ の1次分数変換として次のように表せる。

$$\begin{aligned} T_{e,w}(s) &:= [G_{11}(s) + G_{12}(s)E(s)(I - G_{22}(s)E(s))^{-1}G_{21}(s)] \\ &= [(G_L(s) - E(s)G_c(s)) \quad -E(s)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

筆者らは既に文献[9]で $T_{e,w}(s)$ の $\|\cdot\|_\infty$ を最小化する H^∞ 最適推定器 $E(s)$ に関する伝達関数法に基づく解法を報告した。しかし、伝達関数法による解法は計算機利用には不向きであった。

本報では推定器設計に際し計算機を利用するのに適した状態空間法に基づく解法を述べる。

2. 2 H^∞ 最適推定器の解

Figure 2.2 の一般化プラント $G(s)$ の状態空間表現は次のようになる。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (2.6a)$$

$$e(t) = Lx - \hat{z} \quad (2.6b)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t) \quad (2.6c)$$

以下では、(2.6) 式の (A, B) の可安定性及び (C, A) の可検出性を仮定する。 (A, B) が可安定であるとは $\text{Re} \lambda(A-BK) < 0$ となる定係数行列 K が存在することである[10]。 (C, A) の可検出も同様に定義される[10]。また、理論展開の簡単化のために、 $DB^T = 0$ (システム外乱 $w(t)$ と計測雑音 $v(t)$ とは無相関である)、かつ $DD^T = I$ (計測値は雑音 $v(t)$ を必ず含む) を仮定する。この仮定のもとで H^∞ 最適推定器は次のように求まる。

すなわち、リカッチ型行列方程式

$$AP + PA^T + P(L^T L / \gamma^2 - C^T C)P + BB^T = 0 \quad (2.7)$$

を満たす半正定解 $P (\geq 0)$ が

$$A_r := A + P(L^T L / \gamma^2 - C^T C) \quad (2.8)$$

を安定化すれば、 $J < \gamma^2$ を満たす H^∞ 推定器は

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - PC^T C)\hat{x}(t) + PC^T y(t), \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (2.9a)$$

$$\hat{z}(t) = L\hat{x}(t) \quad (2.9b)$$

で与えられる。

3. H^∞ 最適推定器の設計法

実際の推定器設計問題は計測雑音を含む計測値を用いてこの雑音の影響を受けず精度よく、速応性のよい推定値を与える推定器を設計することである。本章では、まず H^∞ 最適推定理論の展開上で採用された仮定を推定問題の実際面から検討する。次に、「推定対象量の変動に対する指定周波数帯域の成分への追従性と計測雑音に対する指定周波数帯域の成分のフィルタリング」に関する設計仕様が H^∞ 最適推定理論の適用によってどのように取扱うことができるかを線形時不変システムを対象として検討し設計法を構成する。最後に、 H^∞ 制御ブロック線図で表される一般化プラントの状態空間表現を導出する。また、設計計算の中心課題であるリカッチ方程式の解法の概略を示す。

3.1 最適推定理論の仮定の検討

① (A, B) - 可安定性および (C, A) - 可検出性について

最適化基準 $J < \gamma^2$ を満たす H^∞ 最適推定器が存在するためには2つの条件が必要である。第1の条件はリカッチ方程式(2.7)式が半正定解 P を持つことである。(A, B) の可安定性はこの必要条件として仮定されている。第2の条件は(2.8)式の A_p が漸近安定(すべての固有値が左半平面に存在する)となることである。(C, A) の可検出性はこの必要条件として仮定されている。従って、これらの仮定は H^∞ 最適推定器を設計するという立場からは自然な仮定である。また、各係数行列が確定した後の仮定の成立性に関して、(A, B) の可安定性は行列 A, B を可制御標準形に変換し不可制御部分の漸近安定性を調べることにより容易に確認出来る。また、(C, A) の可検出性についても同様の方法で確認できる。

② 簡単化の仮定 ($DB^T = 0$ かつ $DD^T = I$) について

実際の推定器設計問題において、プラントの状態空間表現(2.1)式が理論展開上の簡単化のために導入した仮定: $DB^T = 0$ かつ $DD^T = I$ を満たさない次の3つの場合について検討する。

(a) $DB^T = 0$ 、 $DD^T = V$ (正定行列) の場合

V^{-1} の平方根行列として次の正則行列 M をとる。すなわち、

$$V^{-1} = M^T M \quad (3.1)$$

この M を(2.6c)式の左から掛け、 $C_M := MC$ 、 $D_M := MD$ 、 $Y_M(t) := My(t)$ と置く。よって、

$$D_M B^T = M(DB^T) = M0 = 0 \quad (3.2a)$$

$$(D_M)(D_M)^T = MV^{-1}M = I \quad (3.2b)$$

となり簡単化の仮定を満たす。従って、2章の結果において、

$$C \leftarrow C_M := MC, D \leftarrow D_M := MD, y(t) \leftarrow Y_M(t) := My(t) \quad (3.3)$$

と置換えれば H^∞ 最適推定器の解が得られる。すなわち、リカッチ型行列方程式

$$AP + PA^T + P(L^T L / \gamma^2 - (MC)^T (MC))P + BB^T = 0 \quad (3.4)$$

を満たす半正定解 $P \geq 0$ が存在し、その P が

$$A_P := A + P(L^T L / \gamma^2 - (MC)^T (MC)) \quad (3.5)$$

を安定化すれば、 $J < \gamma^2$ を満たす H^∞ 推定器は

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - P(MC)^T (MC))\hat{x}(t) + P(MC)^T My(t), \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (3.6a)$$

$$\hat{z}(t) = L\hat{x}(t) \quad (3.6b)$$

となる。

(b) $DB^T \neq 0, DD^T = I$ の場合

(2.6c) を用いて (2.6a) 式は次のように書換えられる。

$$\dot{x}(t) = (A - BD^T C)x(t) + BD^T y(t) + B(I - D^T D)w(t) \quad (3.7)$$

線形微分方程式系の解 $x(t)$ は次のように合成 (分解) される。

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (3.8)$$

ここで、 $x_1(t)$ は初期値 $x_1(0) = x(0)$ と入力項 $B(I - D^T D)w(t)$ に依存する解であり、 $x_2(t)$ は初期値 $x_2(0) = 0$ として入力項 $BD^T y(t)$ によるものである。具体的な微分方程式を記述すれば、 x_1 は次の微分方程式の解である。

$$\dot{x}_1(t) = (A - BD^T C)x_1(t) + B(I - D^T D)w(t), \quad x_1(0) = x(0) \quad (3.9)$$

また、 $x_2(t)$ は次の方程式の解である。

$$\dot{x}_2(t) = (A - BD^T C)x_2(t) + BD^T y(t), \quad x_2(0) = 0 \quad (3.10)$$

いま、過去の測定値 $y(t)$ ($0 \leq \tau \leq t$) にフィルタリング及びスムージング等の操作を施してその正確な値が知り得るものと仮定れば、(3.10) 式の入力項が $y(t)$ のみであることから現時点 t における $x_2(t)$ の正確な値が得られると考えてよい。

従って、 $z(t) = Lx_1(t) + Lx_2(t)$ の推定問題は $\hat{z}_1(t) := L\hat{x}_1(t)$ を推定することに帰着する。(3.9) 式に対応する計測方程式を次式とする。

$$y_1(t) = Cx_1(t) + Dw(t) \quad (3.11)$$

仮定 $DD^T = I$ から

$$D[B(I-D^TD)]^T = D[(I-D^TD)B^T] = (D-DD^TD)B^T = (D-D)B^T = 0B = 0$$

となり直交条件が満たされる。従って、2章の結果において、

$$A \leftarrow A - BD^TC, B \leftarrow B[I - D^TD] \quad (3.12)$$

と置換えれば、 $z_1(t)$ の H^∞ 最適推定器が次のように得られる。リカッチ型行列方程式

$$(A - BD^TC)P + P(A - BD^TC)^T + P(L^TL/\gamma^2 - C^TC)P + B(I - D^TD)(I - D^TD)B^T = 0 \quad (3.13)$$

を満たす半正定解 $P \geq 0$ が存在し、その P が

$$A_P := (A - BD^TC) + P(L^TL/\gamma^2 - C^TC) \quad (3.14)$$

を安定化すれば、 $z_1 := Lx_1$ に対する $J < \gamma^2$ を満たす H^∞ 推定器は

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = [(A - BD^TC) - PC^TC]\hat{x}_1(t) + PC^Ty_1(t), \hat{x}_1(0) = 0 \quad (3.15a)$$

$$\hat{z}_1(t) = L\hat{x}_1(t) \quad (3.15b)$$

となる。よって、(3.10) 式の解 $x_2(t)$ とを組合わせて H^∞ 最適推定値 \hat{z} は次式で与えられる。

$$\hat{z}(t) = L\hat{x}_1(t) + Lx_2(t) \quad (3.16)$$

この H^∞ 推定器のブロック線図を Fig. 3.1 に示す。

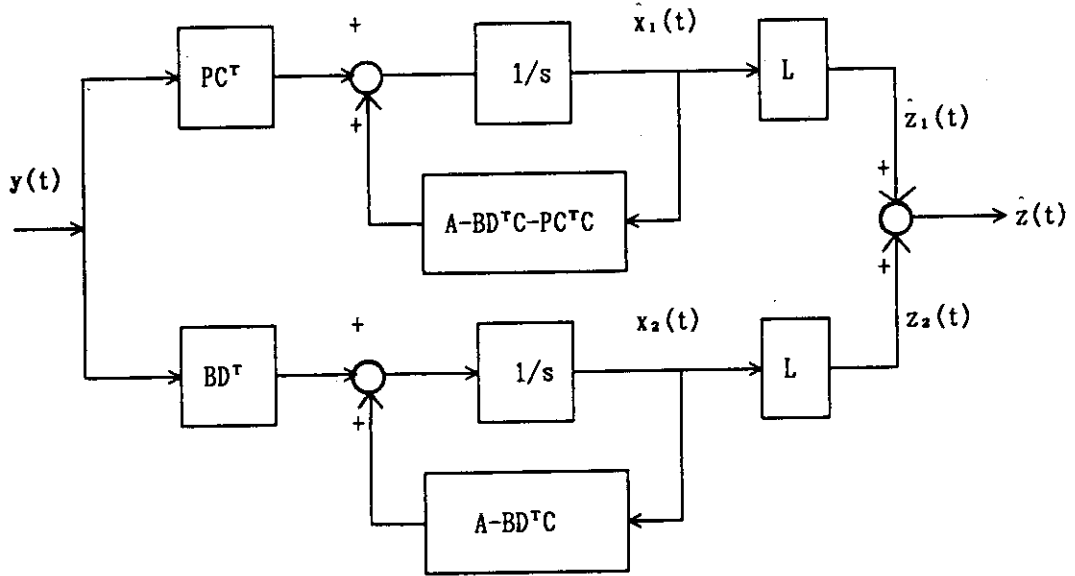


Fig. 3.1 Structure of H^∞ estimator for case (b)

(c) $DB^T \neq 0, DD^T = V$ の場合

この場合は (a) と (b) の結果を適用して以下のように求められる。(a) の結果から (3.9) と (3.10) 式の係数を次のように置換える。

$$C \leftarrow MC, D \leftarrow MD, y(t) \leftarrow My(t) \quad (3.17)$$

よって、(3.9) 式は次のようになる。

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = (A - B(MD)^T(MC))\hat{x}_1(t) + B(I - (MD)^T(MD))w(t), \quad \hat{x}_1(0) = x(0) \quad (3.18)$$

(3.10) 式は次のようになる。

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = (A - B(MD)^T(MC))\hat{x}_2(t) + B(MD)^T My(t), \quad \hat{x}_2(0) = 0 \quad (3.19)$$

従って、(b) から $z_1 := Lx_1$ に対する H^∞ 最適推定器の解は次のようになる。リカッチ方程式

$$(A - B(MD)^T(MC))P + P(A - B(MD)^T(MC))^T + P(L^T L / \gamma^2 - (MC)^T(MC))P + B(I - (MD)^T(MD))(I - (MD)^T(MD))B^T = 0 \quad (3.20)$$

を満たす半正定解 $P \geq 0$ が存在し、その P が

$$A_P := (A - B(MD)^T(MC)) + P(L^T L / \gamma^2 - (MC)^T(MC)) \quad (3.21)$$

を安定化すれば、 z_1 に対する最適推定器は次のようになる。

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = [(A-B(MD)^T(MC))-P(MC)^T(MC)]\hat{x}_1(t) + P(MC)^T M y_1(t), \quad \hat{x}_1(0)=0 \quad (3.22a)$$

$$\hat{z}_1(t) = L\hat{x}_1(t) \quad (3.22b)$$

よって、(3.19) 式の解 $x_2(t)$ とを組合わせて H^∞ 最適推定値 \hat{z} は次式で与えられる。

$$\hat{z}(t) = L\hat{x}_1(t) + Lx_2(t) \quad (3.23)$$

この H^∞ 推定器のブロック線図を Fig. 3.2 に示す。

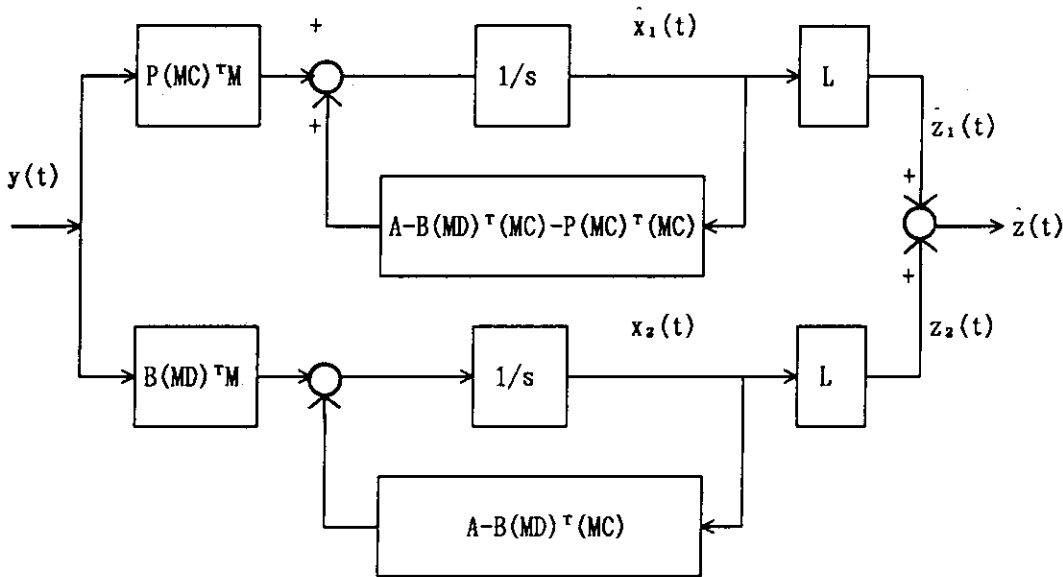


Fig. 3.2 Structure of H^∞ estimator for case (c)

③ $w(t) \in L_2$ の仮定について

この仮定は工学的には入力外乱 $w(t)$ のエネルギーが有界であると想定することに対応する。しかし、現実の外乱にはエネルギー有界性より有限パワーの仮定の方が適している。以下では $\|\cdot\|_2$ ノルムに基づく $\|\cdot\|_\infty$ ノルム最適化基準がパワー有限な外乱に対しても有効であることを示す。いま、 P を有限パワーをもつ信号の集合として、 $w(t) \in P$ のパワーを表す半ノルム $\|w\|_P$ を

$$\|w\|_P := \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} \quad (3.24)$$

で定義する。 $\|w\|_p=0$ を満たす $w(t)$ が一意には定まらないから、 $\|w\|_p$ は厳密なノルムではない(半ノルム)。しかし、 $\|\cdot\|_2$ と同様な次の性質を満たすことが示される[11]。

$$G(s) \in RH^\infty \Rightarrow \|Gw\|_p / \|w\|_p \leq \|G\|_\infty \quad (3.25)$$

従って、 $\|\cdot\|_\infty$ ノルム最小化基準は有限パワーの外乱の集合 P に対する”伝達関数ゲインの最小化”基準にもなっている。

3. 2 設計仕様の取扱い

ここでは「推定対象量の変動に対する指定周波数帯域の成分への追従性と計測雑音に対する指定周波数帯域の成分のフィルタリング」に関する設計仕様が H^∞ 最適推定理論の適用によってどのように取扱うことができるかを検討し設計法を構成する。この仕様は H^∞ ノルム最適化基準に以下のように組込むことが出来る。実システムの外乱 $w(t)$ は L_2 空間から次の機構によって生成されると考える。

$$w(s) := H(s)w'(s) = \text{diag}(H_w(s), H_v(s))w'(s) \quad (3.26)$$

ただし、 $w'(s) \in \{w'(s) \mid \|w'\|_2 \leq 1, w' \in L_2\}$ である。 $H(s) \in RH^\infty$ であれば $HL_2 \subset L_2$ であるから[1]、 $w'(s)$ を新たな外乱と看做すと Fig. 3.3 に示すように推定問題は標準的 H^∞ 制御ブロックで表せる。本図から w' から推定誤差までの伝達関数 $T_{e,w'}(s)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} T_{e,w'}(s) &:= T_{e,w}(s)H(s) \\ &= [T_{e,w}(s) \ T_{e,v}(s)] \text{diag}(H_w(s), H_v(s)) \\ &= [T_{e,w}(s)H_w(s) \ T_{e,v}(s)H_v(s)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで、 $T_{e,w}(s)$ と $T_{e,v}(s)$ はシステム外乱 $w(s)$ と計測雑音 $v(s)$ から推定誤差までのそれぞれの伝達関数である。(3.27)式から $H_w(s)$ と $H_v(s)$ がそれぞれの周波数重みとして作用していることがわかる。

従って、 H^∞ 最適推定器は $\|T_{e,w'}\|_\infty$ を最小化する意味の推定器であるから、設計者が設計仕様を反映するように周波数重み $H_w(s)$ と $H_v(s)$ を設定すれば最適推定器は自動的に設計仕様に適合する推定器となる。

3. 3 一般化プラントの状態空間表現の導出

2章の H^∞ 最適推定理論を適用するために Fig. 3.3 の一般化プラント $G(s)$ の状態空間表現を求めておく。実システムの状態変数を $x(t)$ 、周波数重み $H(s)$ の状態空間表現の状態変数を $x_H(t)$ として、 $G(s)$ の状態変数を $x_r := (x^T \ x_H^T)^T$ で定義する。外乱 w' 、入力 u 、制御量 e 、計測量 y として一般化プラント $G(s)$ の状態空間表現は次の通りである。

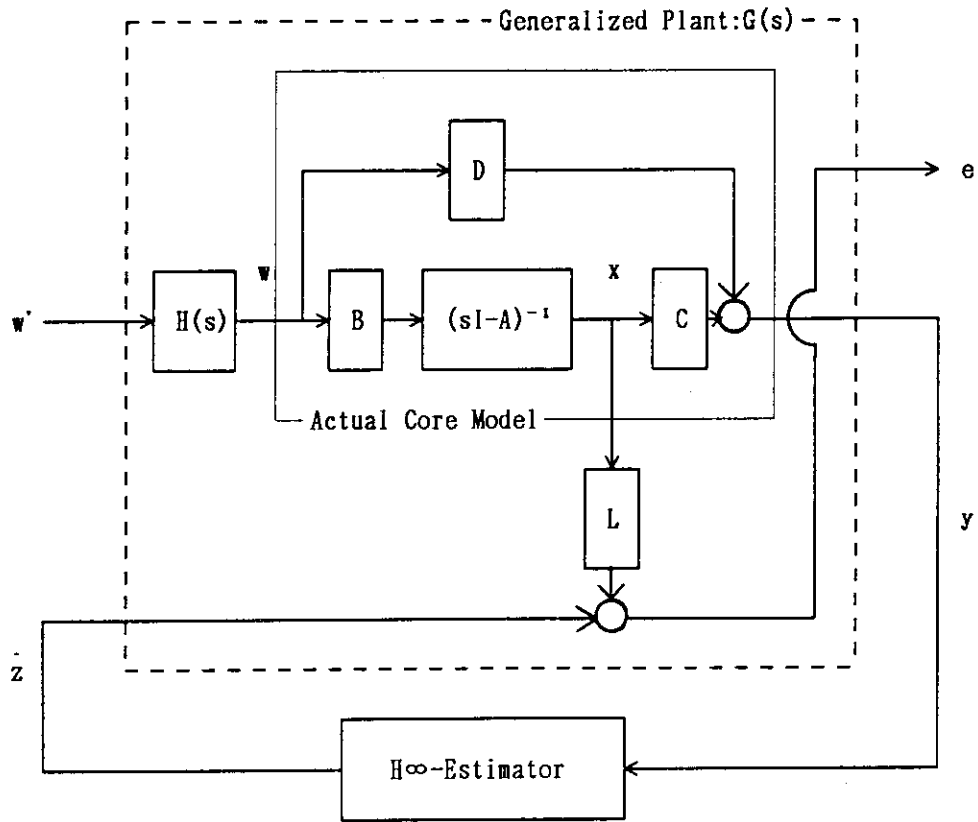


Fig. 3.3 Block diagram for H^∞ estimator design

$$\dot{x}_x = A_x x_x + B_x w' \tag{3.28a}$$

$$e = L_x x_x - u \tag{3.28b}$$

$$y = C_x x_x + D_x w' \tag{3.28c}$$

ここで、

$$A_x := \begin{bmatrix} A & BC_H \\ 0 & A_H \end{bmatrix} \quad B_x := \begin{bmatrix} BD_H \\ B_H \end{bmatrix}$$

$$C_x := [C \quad DC_H] \quad D_x := DD_H$$

ただし、 A_H 、 B_H 、 C_H 、 D_H は周波数重み $H(s)$ の状態空間実現の係数行列である。

また、 L_x は次のようである。

$$L_x := [L \quad 0] \tag{3.28d}$$

3.4 リカッチ方程式の解法[13]

最後に、 H^∞ 推定理論に現れる(2.7)式のリカッチ方程式の解法を示す。2次の項が γ に依存して不定であることがカルマンフィルタ理論に現れるものと異なる。連続型リカッチ方程式の数値解法にはいろいろある。(1)リカッチ微分方程式の定常解として求める方法、(2)Kleinmanによる逐次解法、(3)固有ベクトル法(有本-MacFarlane-Potter法)、(4)Schur解法等がその主なものである。Schur解法は数あるリカッチ方程式の解法の中でも演算効率、信頼性、精度等の点で最も優れた解法とされている。本質的には固有ベクトル法と同じであるが固有ベクトルの代わりに固有空間の基底ベクトルを利用する点に特徴がある。これは数値計算上その精度等の点でしばしば問題が生じる固有ベクトルを求めることなく固有空間の基底さえわかれば固有ベクトル法と同様の計算によって解が求まるという観点から考案された解法である。以下に本解法の原理とそこに現れる直交行列 U を求める Laub のアルゴリズムの概略を示す。

① Schur の解法の原理

一般に実正方行列は適当な直交行列 U によって実 Schur 行列に変換されることに注目して、リカッチ方程式に対応して定義されるハミルトン行列 H を実 Schur 形 S に写す直交行列 U を考える。すなわち、

$$U^T H U = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

ここで、 S_{11} と S_{22} は実 Schur 行列であり、 $\operatorname{Re} \lambda(S_{11}) < 0$ 、 $\operatorname{Re} \lambda(S_{22}) > 0$ である。
この直交行列 U を

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

と分割する。そうするとリカッチ方程式の実対称半正定一意解 X は

$$X U_{11} = U_{21} \quad (3.31)$$

を満足するというものである。

要約すればリカッチ方程式は直交行列 U を求めることと連立方程式(3.31)を解くことに帰着される。なお、行列 $[U_{11}^T \ U_{21}^T]^T$ の列は H の漸近安定な固有値に対応する固有ベクトルではないが対応する固有空間の基底ベクトルにはなっていることに注意する。

本解法の妥当性は (3.30) 式を (3.29) 式に代入し、 $U^T = U^{-1}$ に注意してこれを少し変形した

$$\begin{bmatrix} A & BB^T \\ L^T L / \gamma^2 - C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

なる関係を利用すれば簡単に確かめられる。また、 U_{11} の正則性の確認も容易である。

② 直交行列 U を求める Laub のアルゴリズム

①で見たようにリッカチ方程式の解の中心課題は直交行列 U を求めることである。これについて Laub は次の手順を提案している。

Step-1: ハミルトン行列 H に次の双線形変換を施す。

$$\hat{H} = (aI - H)(aI + H)^{-1}, \quad (a > 0) \tag{3.31}$$

この変換によって H の複素左半平面内の固有値は \hat{H} の単位円外の固有値に移ることになる。

Step-2: \hat{H} を上ヘッセンベルグ形 \hat{H}_1 ($i \geq j+2$ に対して $h_{ij} = 0$ となる行列) に変換する直交行列 \hat{U}_1 を求める (Householder 直交相似変換法)

Step-3: ヘッセンベルグ行列 \hat{H}_1 に Stewart のアルゴリズム^{x)}を適用して、 \hat{H}_1 を実 Schur 形

$$\hat{U}_2^T \hat{H}_1 \hat{U}_2 = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ 0 & \hat{S}_{22} \end{bmatrix}, \quad |\lambda(\hat{S}_{11})| > 1, \quad |\lambda(\hat{S}_{22})| < 1 \tag{3.32}$$

に変換する。ここで、 \hat{U}_2 は直交行列である。なお Stewart のアルゴリズムでは実 Schur 形の対角ブロック (つまり、 \hat{S}_{11} の対角ブロック及び \hat{S}_{22} の対角ブロック) の固有値は上から順にその絶対値が小さくなるように並んでいる。

Step-4: $U := \hat{U}_1 \hat{U}_2$ とおく。

以上の実 Schur 形に変換する手順は MATLAB-ROBUST-CONTROL-TOOLBOX の blkrsch.m ファイルを用いれば効率よく求めることが出来る。

最後に固有ベクトル法と比較して2つの特徴を述べる。まず、第一の特徴は本手法は QR

法という安定なアルゴリズムを使用しているためにハミルトン行列が重複（あるいは近接した）固有値をもつ場合でも、固有ベクトル法のような悪条件の問題は生じない点である。第2の特徴はこの解法では固有ベクトルそのものを求めるのではなくより制約のゆるい固有空間の一つの基底ベクトルを求めるだけであるから、演算量も少なく演算速度も速くなることが期待できることである。

4. 高速炉の反応度推定器の設計例

本章では本設計法の適用例として高速炉の反応度推定器を設計し、ステップ状反応度外乱印加時の正味反応度に対する推定結果を示す。

4.1 H^∞ 推定器の設計

①設計用システムモデル

正味反応度が推定出来るような炉心の核的動特性を表すシステムモデルを作成する。核的動特性として次のような遅発中性子6群、1点炉近似の動特性モデルを扱う。

$$\dot{n}(t) = \beta(\rho(t)-1)n(t)/\Lambda + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) + S \quad (4.1a)$$

$$\dot{c}_i(t) = \beta_i n(t)/\Lambda - \lambda_i c_i(t), \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (4.1b)$$

ここで、 $n(t)$: 中性子密度、 $c_i(t)$: i 番目の遅発中性子先行核密度、 $\rho(t)$: 反応度 ($\$$)、 S : 中性子源、 Λ : 即発中性子寿命 (s)、 β_i : i 番目の遅発中性子先行核割合、 β : $\sum \beta_i$ 、 λ_i : i 番目の遅発中性子先行核崩壊定数 (s^{-1})

(4.1) 式を定常運転状態の近傍で線形化して次の8個の微分方程式で記述される推定器設計用モデルを作成する。

$$\delta \dot{N} = (-\beta/\Lambda) \delta N + \sum_{i=1}^6 (\beta_i/\Lambda) \delta C_i + (\beta/\Lambda) \delta R + W_n \quad (4.2a)$$

$$\delta \dot{C}_i = \lambda_i \delta N - \lambda_i \delta C_i, \quad (i=1, 2, \dots, 6) \quad (4.2b)$$

$$\delta \dot{R} = W_R \quad (4.2c)$$

ただし、 δ は定常運転状態 (n_0, c_{i0}) からの変動を表し、 $\delta N := (n - n_0)/n_0$ 、 $\delta C_i := (\lambda_i \Lambda / \beta_i)(c_i - c_{i0})/n_0$ 、 $\delta R := \delta \rho$ である。高速炉の動特性パラメータを Table 4.1 に示す[16]。

(4.2c) 式は正味の反応度 δR を状態変数として直接推定するために人為的に導入した方程式である。また、(4.2a) 式の W_n は線形化モデルの近似誤差や反応度外乱/雑音を表す。

次に計測量に対するシステムモデルを作成する。上の動的システムにおいて直接的に計測できる状態量は中性子密度 δN のみである。実際の測定値には計測系等で発生する種々の雑音 $V(t)$ が加わる。これを δN に加法的に加わるものと仮定して、次のようにモデル化する。

$$\delta z = \delta N + V \quad (4.3)$$

(4.1) 式と (4.3) 式は状態変数 $x := (\delta N, \delta C_1, \delta C_2, \delta C_3, \delta C_4, \delta C_5, \delta C_6, \delta R)^T$ と雑音項 $w := (W_n, W_r, V)$ として行列表現すると次の様になる。

$$\dot{x} = Ax + Bw \tag{4.4a}$$

$$y = Cx + Dw \tag{4.4b}$$

ここで、

$$A := \begin{bmatrix} -\beta/\Lambda & \beta_1/\Lambda & \beta_2/\Lambda & \beta_3/\Lambda & \beta_4/\Lambda & \beta_5/\Lambda & \beta_6/\Lambda & \beta/\Lambda \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 & 0 \\ \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := [1 \ 0_{1 \times 7}], \quad D := [0 \ 0 \ 1]$$

②推定器の設計

本節では $L := [0_{1 \times 7} \ 1]$ として正味反応度 δR を推定する推定器を速応性と計測雑音フィルタ特性に関する仕様を与えて設計した例を示す。すなわち、外乱により駆動される正味反応度の変化の 0.15Hz 程度までの周波数帯域の成分に追従性し、計測雑音を全周波数域で一様にフィルタするという設計仕様のもとで設計する。この仕様を周波数重み $H_w(s) = (0.1s+10)/(s+1)$ 、 $H_v(s) = 10$ で近似的に表現した。設計手順は次の通りである。まず、重みを考慮した一般化プラント $G(s)$ の状態空間表現 (A_r, B_r, C_r, D_r) を求める。 (A_r, B_r) の可安定性を行列 A_r, B_r を可制御標準形に変換し不可制御部分の漸近安定性から確認する。 (C_r, A_r) - 可検出性についても同様である。また、 $D_r B_r^T$ の直交性は容易に確認できる。また、 $D_r D_r^T \neq 1$ であるから、3章の結果 (3.1節②(a)) を適用して推定器を設計する。 γ の最小値は 7.375 である。

4. 2 反応度推定結果

核的動特性と熱的動特性のモデルを熱出力と温度フィードバック反応度で結合した高速炉の核熱結合炉心動特性シミュレーションモデルによる正味反応度の推定結果を示す。

(1) 炉心動特性モデル

核的動特性モデルは(4.1)式を線形化した遅発中性子6群、1点炉近似の動特性方程式で記述する。熱的動特性モデルは多数の炉心燃料体の中から炉心動特性について平均的特性を示す1つの燃料チャンネルを代表チャンネル(1本の燃料棒)として選定し、そのチャンネルについて熱的動特性モデルを作成する。この代表チャンネルの燃料棒、被覆材および冷却材に注目して熱伝導・熱伝達・熱流動を表す動特性モデルを多点集中定数系方程式(ノード方程式)で表す。一般に、燃料棒内の温度分布および冷却材の流れ方向温度分布は適当に分割数を与えることによってこの多点集中定数系近似モデルによって計算が可能である。流れ方向にn分割し、半径方向に燃料、被覆材および冷却材に各1点を取り、合計3n個のノード方程式で記述する(実際のシミュレーションではn=3とした)。第i番目の分割要素における動特性方程式は次の様に与えられる。

$$(M_{r,i}C_{r,i})\dot{T}_{r,i}(t) = q_i - (U_{1,i}L_i)(T_{r,i}(t) - T_{m,i}(t)) \quad (4.5a)$$

$$(M_{m,i}C_{m,i})\dot{T}_{m,i}(t) = (U_{1,i}L_i)(T_{r,i}(t) - T_{m,i}(t)) - (U_{2,i}L_i)(T_{m,i}(t) - \bar{T}_{c,i}(t)) \quad (4.5b)$$

$$(M_{c,i}C_{c,i})\dot{T}_{c,i}(t) = (U_{2,i}L_i)(T_{m,i}(t) - \bar{T}_{c,i}(t)) - (W_iC_{c,i})(T_{c,i}(t) - T_{c,i-1}(t)) \quad (4.5c)$$

$$\bar{T}_{c,i} = (T_{c,i} + T_{c,i-1})/2 \quad (4.5d)$$

ここで、T : 温度(°C)、q : 燃料ピン一本あたりの発熱量(Kcal/s·pin)、M : 燃料ピン一本あたりの重量(Kg/pin)、C : 比熱(Kcal/Kg·°C)、U1 : 燃料から被覆材への熱コンダクタンス(Kcal/m·s·°C)、U2 : 被覆材から冷却材への熱コンダクタンス(Kcal/m·s·°C)、L : 炉心有効長(m)、W=γcV : 冷却材重量流量(Kg/s)である。添字はfは燃料を、mは被覆材を、cは冷却材を表す。

温度フィードバック反応度ΔR(\$単位)は熱的動特性モデルの代表チャンネルの各部の温度から次の関係式により算出する。Table 4.2に反応度温度係数の値を示す[16]。

$$\Delta R_{fb} = (1/n\beta) \sum_{i=1}^n (\alpha_r \Delta T_{r,i} + \alpha_m \Delta T_{m,i} + \alpha_c \Delta T_{c,i}) \quad (4.6)$$

核熱結合炉心動特性の数値シミュレーションブロック線図をFig. 4.1に示す。

(2) 正味反応度の推定結果

γの値の調整によって速応性とフィルタ特性のトレードオフを図ったH∞推定器が正味反応度を良好に推定している1例を示す。

Figure 4.2(a)は外乱反応度5¢がステップ状に印加した場合の中性子束の計測信号(計測雑音1%full-scale)である。同図(b)はこの中性子束信号を入力として最適推定器B

により正味反応度を推定した結果である。ステップ変化への立上がりは良好な特性を示すが、推定値は計測雑音に乱され推定精度は悪い結果になっている。同図(c)は速応性とフィルタ特性のトレードオフをはかるために $\gamma=8.0$ に増大させて設計した推定器による結果である。速応性とフィルタ特性間のトレードオフが図られ立上がり特性は若干劣化するが推定精度は改善されている。

Figure 4.3 にランプ状 ($1.0 \phi/\text{sec}$) の反応度外乱印加時の計測信号 (計測雑音 1% full-scale) と推定結果である。Fig. 4.4 は正弦波状 (振幅: 1ϕ 、周波数 $f=0.15\text{Hz}$) の反応度外乱印加時の計測信号 (計測雑音 1% full-scale) と推定結果である。計測雑音の影響を受けた推定値の揺らぎが見られるが速応性のよい結果となっている。

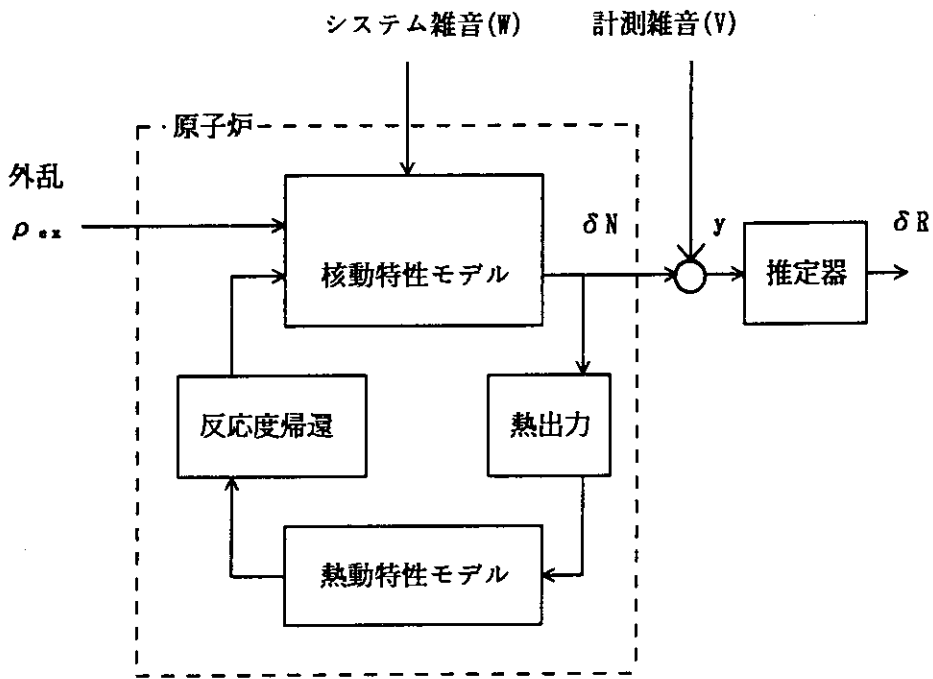


Fig. 4.1 Block diagram of numerical simulation

5. おわりに

線形時不変システムの推定器設計問題への H^∞ 最適推定理論の応用を検討した。まず、実際の推定器設計の観点から最適推定理論の仮定を検討し、その一般性を確認した。次に H^∞ 最適推定理論の定式化の特徴に注目し、速応性や雑音フィルタ特性に関する設計仕様を容易に推定誤差伝達関数の周波数重みとして最適化基準に取り入れて扱う設計法を示した。最後に、本設計法を適用して高速炉の反応度推定器を設計し、計算機シミュレーションによる反応度推定を行った。

本検討により得た結論は以下の通りである。

- ①本設計法では外乱の分散等の情報が不要となり設計が簡潔になる。また、設計仕様が見通しよく設計に反映できる手法となっている。これはカルマンフィルタ理論では設計仕様を設計過程に直接的に反映させることが困難であることを考慮すると大きな利点である。
- ② H^∞ 最適推定理論の単純化の仮定 ($DB^T=0, DD^T=1$) が成立しない個々のケース (3 ケース) について推定器設計の解法を具体的に示した。
- ③パラメータの値の調整により速応性とフィルタ特性のトレードオフを図った H^∞ 最適推定器は種々の反応度外乱印加時の正味反応度変化に対する良好な追従性特性を示している。

参考文献

- 1) B. A. Francis, "A Course in H^∞ Control Theory", Springer-Verlag (1987).
- 2) J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar and B. Francis, : State-space solution to standard H_2 and H^∞ control problem, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 34 (8), 1989.
- 3) 村松他 : H^∞ 制御理論を適用したロバストな磁気浮上系、電学論D-110巻10号(1990).
- 4) H. Kuraoka et al. : Application of H^∞ Optimal Design to Automotive Fuel Control, Proceedings of the 1989 American Control Conference, Pittsburgh, PA., 1989.
- 5) M. J. Grimble and A. Elsayed, : H^∞ design of digital linear filters, presented at the IEE Colloq. Digital Signal Processing, London, 1987.
- 6) A. Elsayed et al., : On H^∞ filtering in multivariable discrete-time systems, presented at the 1988 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, Finland, June 1988.
- 7) U. Shaked, : H^∞ -minimum error state estimation of linear stationary process, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 35(5), May 1990.
- 8) K. M. Nagpal and P. P. Khargonekar: IEEE Trans. Automatic Control, vol. 36(152) 1991.
- 9) 鈴木勝男、他 : 線形システムに対する H^∞ 状態推定器の設計、JAERI-M 91-105(1991).
- 10) 児玉、須田 : システム制御のためのマトリクス理論、計測自動制御学会、1978 .
- 11) Boyd, S. and Doyle, J., : Systems & Control Letters 9, 1(1987).
- 15) 安藤、他 : 数値解析手法による制御系設計、計測自動制御学会(1986).
- 16) 島崎潤也 : JAERI-memo 8454(1979).
- 17) 386-MATLAB User's Guide, 1990.
- 18) 鈴木勝男、他 : H^∞ 制御 (I) -数学的準備-, JAERI-memo 02-354(1990).
- 19) 鈴木勝男、他 : H^∞ 制御 (II) -標準問題とロバスト安定性-, JAERI-memo 02-394(1991).
- 20) 鈴木勝男、他 : H^∞ 制御 (III) -モデルマッチング問題と性能限界-, JAERI-memo 02-445 (1991).
- 21) 鈴木勝男、他 : H^∞ 最適化問題解法のための内関数行列の陽表現導出、JAERI-M 91-079 (1991)
- 22) 鈴木勝男、他 : MATLAB を利用した H^∞ 最適状態推定器の設計例、JAERI-memo 03-221 (1991)

Table 4.1 Kinetics Parameters of a FBR

Group No.	β_i	$\lambda_i (s^{-1})$
1	0.0001680	0.0128
2	0.0010276	0.0316
3	0.0009296	0.125
4	0.0019460	0.326
5	0.0007390	1.385
6	0.0001969	3.840
$\beta = \sum \beta_i = 0.00499$ $\Lambda = 0.2804E-6$		

Table 4.2 Reactivity Feedback Coefficients

Temperature Coefficient	Values ($\Delta k/k/^\circ C$)
Fuel + Doppler (α_f)	-6.30E-6
Clad (α_m)	-0.52E-6
Coolant (α_c)	-9.10E-6

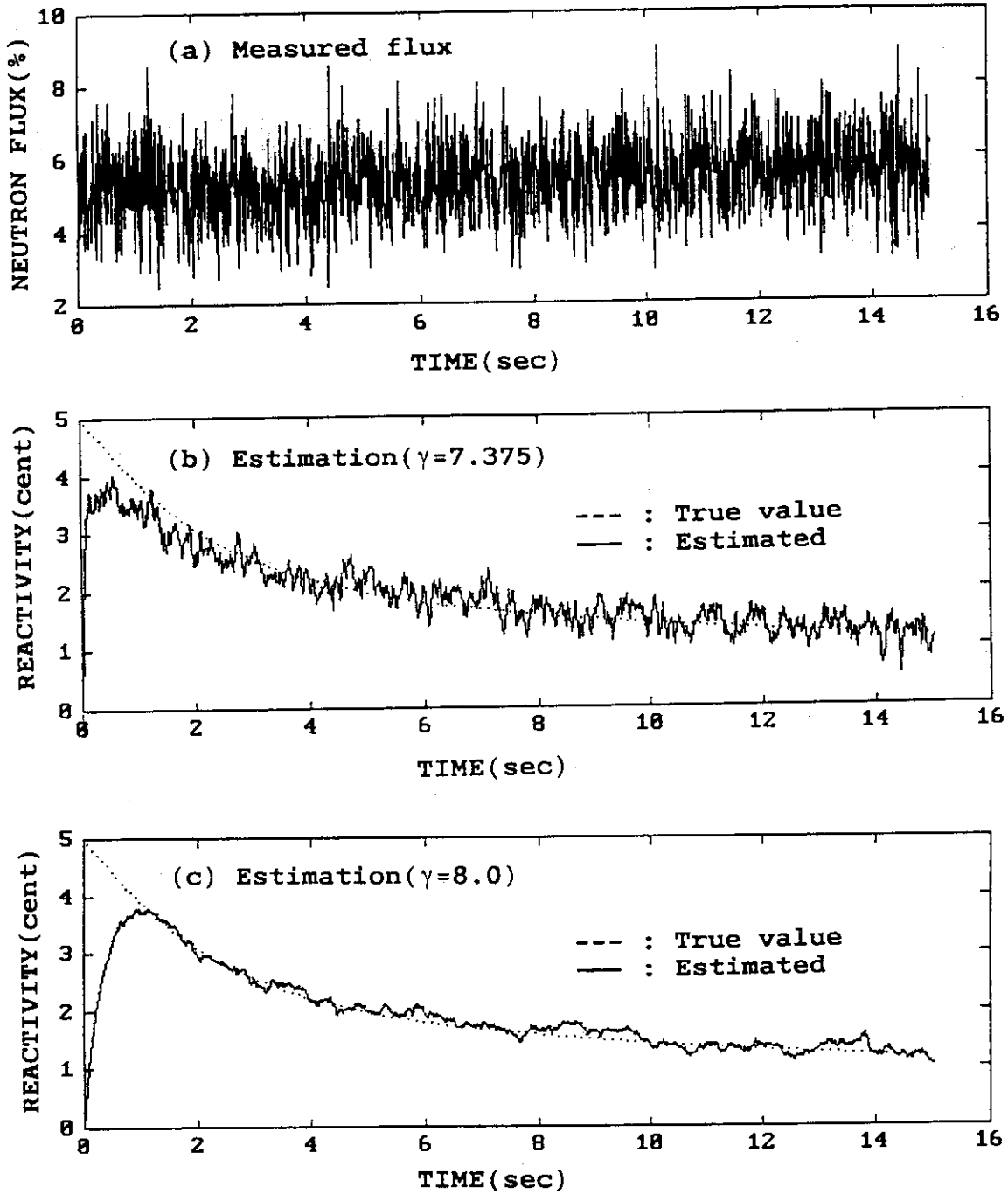


Fig. 4.2 Net reactivity estimated by H_{∞} estimator for step change of reactivity disturbance.

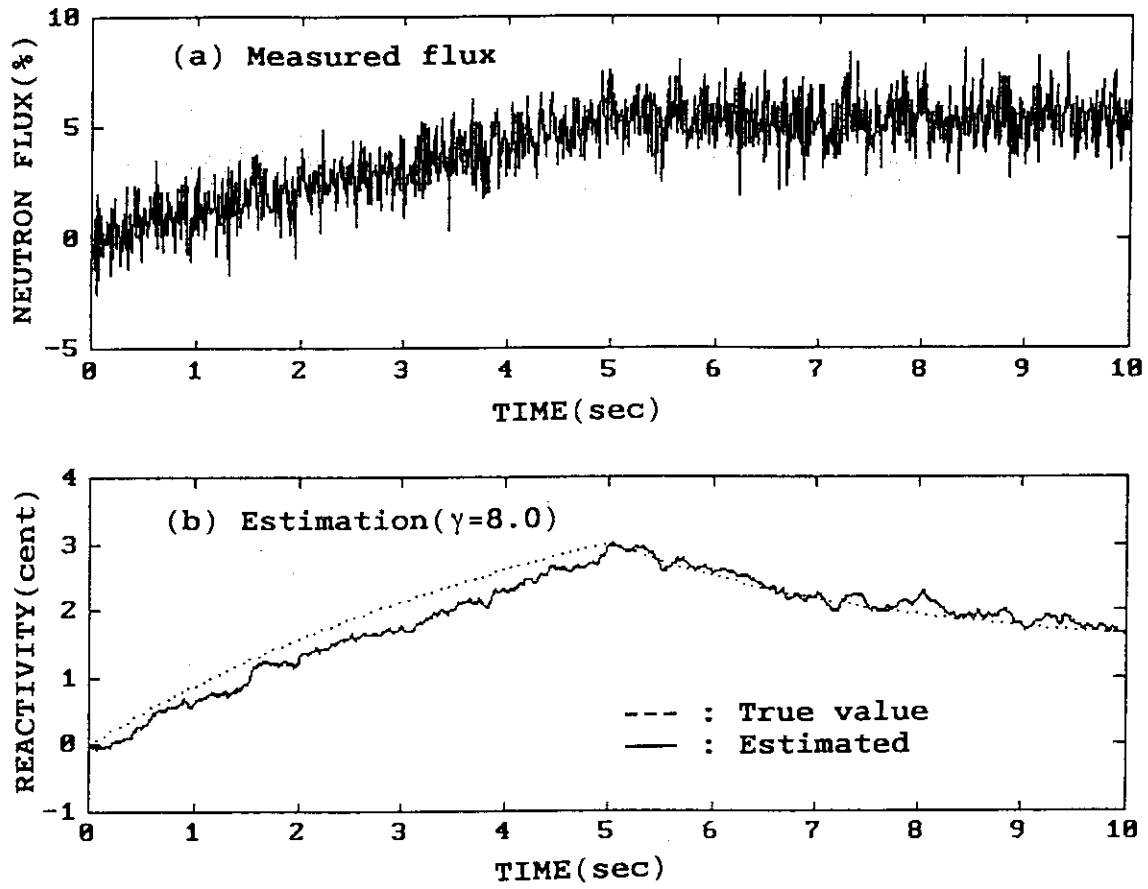


Fig. 4.3 Net reactivity estimated by H^∞ estimator for ramp change of reactivity disturbance.

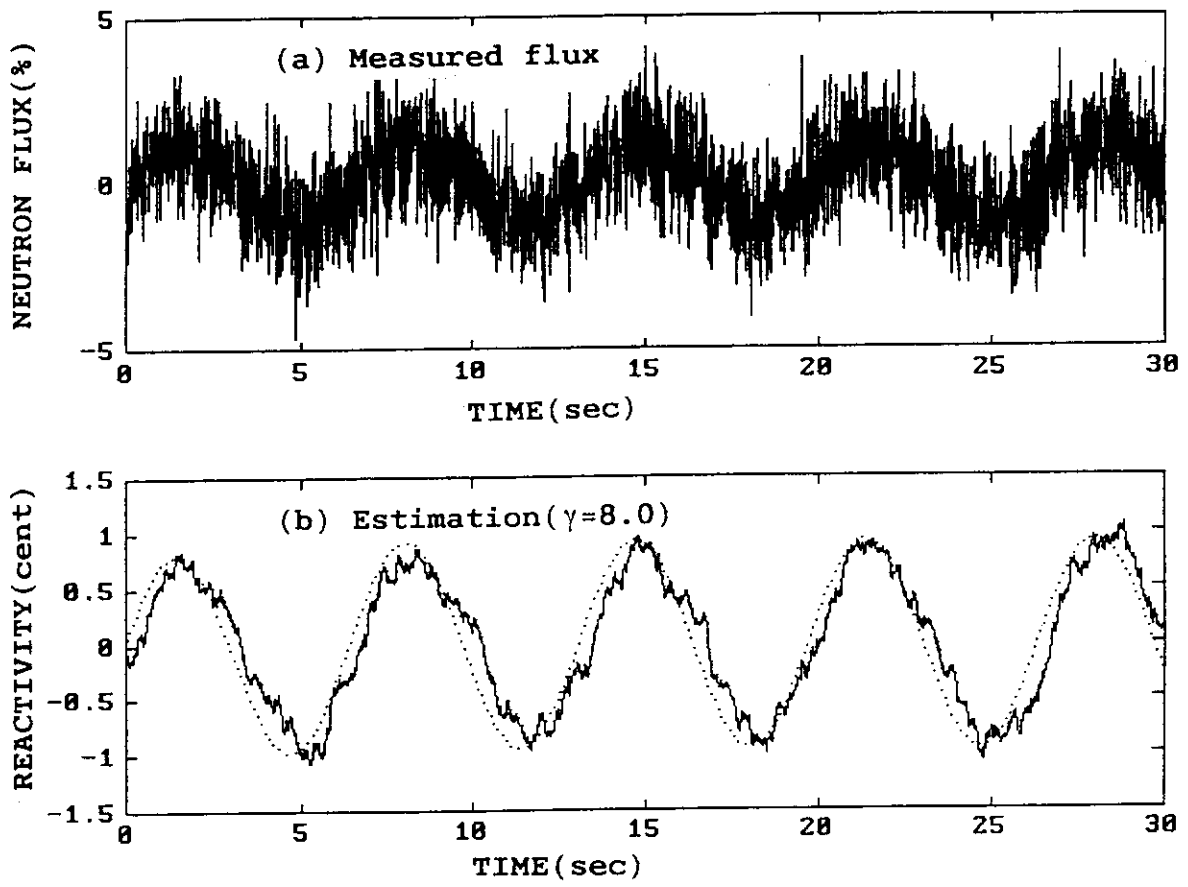


Fig. 4.4 Net reactivity estimated by H^∞ estimator
for sine-wave change of reactivity disturbance.