

JAERI - M
93-075

接続データを求める有限要素法の数値実験

1993年3月

徳田 伸二・熊倉 利昌*・吉村 更一*

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute. 1993

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 ㈱原子力資料サービス

接続データを求める有限要素法の数値実験

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部

徳田 伸二・熊倉 利昌*・吉村 更一*

(1993年3月2日受理)

確定特異点を持つ常微分方程式の接続データを有限要素法で求める Pletzer-Dewar の方法 (J. Plasma Phys. Vol.45(1991), 427)の, モデル方程式を用いた数値実験を報告する。接続データは磁場閉じ込めプラズマの非理想MHD安定性解析で重要な役割を果たす。Pletzer-Dewarの方法では「大きい解」, すなわち確定特異点で二乗可積分でない基本解, のフロベニウス級数が使われる。この有限要素法で得られる接続データの収束率, および, フロベニウス級数を有限項で打ち切ることが計算結果に与える影響について調べる。研究の結果, この有限要素法は接続データを高精度で求める有効な方法であることが示された。

Numerical Experiment
on Finite Element Method for Matching Data

Shinji TOKUDA, Toshimasa KUMAKURA* and Koichi YOSHIMURA*

Department of Fusion Plasma Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received March 2, 1993)

Numerical experiments are presented on the finite element method by Pletzer-Dewar (J. Plasma Phys. Vol. 45 (1991), 427) for matching data of an ordinary differential equation with regular singular points by using model equations. Matching data play an important role in nonideal MHD stability analysis of a magnetically confined plasma. In the Pletzer-Dewar method, the Frobenius series for the 'big solution', the fundamental solution which is not square-integrable at the regular singular point, is prescribed. The experiments include studies of the convergence rate of the matching data obtained by the finite element method and of the effect on the results of computation by truncating the Frobenius series at finite terms. It is shown from the present study that the finite element method is an effective method for obtaining the matching data with high accuracy.

Keywords: Asymptotic Matching Method, Finite Element Method, Outer Region Solution, Regular Singular Point, Ordinary Differential Equation, Nonideal MHD Stability, Tearing Modes, Tokamak

*Nuclear Application and System Analysis Co.Ltd.

目 次

1. 序 論	1
2. 問題設定	2
3. 簡単な例題	4
4. ヒルベルト空間の設定	7
5. 確定特異点がある場合の合接の性質	9
6. 接続データに対する変分原理	10
7. 有限要素法	12
8. 数値実験	15
9. 結 論	16
謝 辞	17
参考文献	18

Contents

1. Introduction	1
2. Formulation of the Problem	2
3. Simple Examples	4
4. Hilbert Spaces for the Problem	7
5. Properties of Bilinear Concomitant at Regular Singular Point	9
6. Variational Principle for the Matching Data	10
7. Finite Element Method	12
8. Numerical Experiments	15
9. Conclusions	16
Acknowledgements	17
References	18

1. 序 論

トカマク・プラズマ中の抵抗性 MHD モード (抵抗性交換モードやティアリングモード) の線形安定性を解析する手法の一つとして漸近接続法 (asymptotic matching method) がある [18, 9, 23]。この方法では、プラズマを有理面近傍 (内部層) とその外側の領域 (外部領域) とに分ける。簡単のため、円柱プラズマ (半径 a 、長さ R) を考える。このプラズマの MHD 平衡磁場は

$$B(r) = B_p(r)i_\theta + B_z(r)i_z$$

と表される。ここで、 (r, θ, z) はプラズマ柱の中心軸を z 軸、それからの距離を r 、そのまわりの回転角を θ とする円柱座標系、 i_θ および i_z は、それぞれ、 θ 、 z -方向の単位ベクトルである。平衡配位の対称性より、線形摂動量は $\exp(im\theta - inz/R)$ に比例すると仮定できる。ここで、 (m, n) は考えているモードのポロイダルモード数、トロイダルモード数である。このとき、有理面は

$$m = nq(r_s), \quad q(r) = \frac{rB_z}{RB_p}$$

となる位置である ($q(r)$ は安全係数)。

通常、プラズマの電気抵抗などの非理想 MHD 効果 (散逸効果) は、プラズマが理想 MHD 的に安定な場合のみプラズマの MHD 安定性にたいして重要になる (ただし、以下、 $m > 1$ のモードに議論を限定する [1])。一方、核融合で対象となるような高温プラズマでは散逸効果は小さい。そのため、不安定な非理想 MHD モードの成長は「ゆっくり」している。このようなモードに対して、外部領域ではプラズマの慣性や散逸効果を見捨てる理想 MHD 近似が成立し、この領域のプラズマは、Newcomb 方程式 [38] とよばれる、径方向の変位を未知関数とする 2 階常微分方程式で記述される。この方程式に対して有理面は確定特異点になっている。確定特異点のまわりの二つの基本解のうち、一方は二乗可積分でなく (「大きい解」と呼ばれる)、他方は二乗可積分 (「小さい解」と呼ばれる) である。また、この方程式の解 (外部解) はプラズマ中心での正則条件と表面における境界条件を満足しなければならない。そして、外部解は大きい解と小さい解の線形結合で表され、その混合比は接続データとよばれる。接続データは漸近接続法において基本的に重要な役割をはたす。

有理面近傍の薄い層 (内部層) では理想 MHD 近似が破れ、プラズマの慣性 (成長率 γ が有限であること) と散逸効果とが無視できない。しかしながら、高温プラズマでは内部層はきわめて薄いので、独立変数の引き伸ばしの手法 [2, 23] によって、内部層のプラズマは比較的簡単な連立常微分方程式 (内部層方程式) で記述される。たとえば、プラズマが抵抗性 MHD 方程式に従う場合の内部層方程式は GGJ (Glasser-Greene-Johnson) 方程式になる [32, 20, 21]。その内部層方程式の解が無窮遠で外部解に漸近的につながる条件から成長率を固有値とする非線形な固有方程式 (分散関係式) が得られ、それを解くことによって成長率が求められる。

漸近接続法では、内部層における種々の物理的效果を取り入れた非理想 MHD 安定性の研究が可能である。実際、非理想 MHD モードの安定性は内部層で起こる、電気抵抗以外の物理効果に敏感であることが分かっている [33]。それらには、衝突周波数やイオンの有限ラーマー半径 [11, 19]、プラズマの圧縮性や電子の反磁性効果 [3, 14, 25, 26]、電子温度の輸送 [12, 44, 6]、トロイダル効果 [15, 16, 13] および新古典的粘性やブートストラップ電流 [42, 7, 27] があげられる。また、これらの効果を取り入れた内部層方程式の数値計算も行われている [22, 34, 35, 46]。

有限振幅のティアリングモード (磁気島) の非線形発展も、磁気島の幅が小さいという仮定のもとで、漸近接続法で解析することができる [40, 45, 41]。そして、この理論にもとづいた、トロイダル配位での磁気島の生成や抑制の研究が発展している [36, 5, 4, 28, 29, 43, 30, 47, 31]。

漸近接続法は、有力な手法であるにもかかわらず、トカマク・プラズマの MHD 平衡に対する非理想 MHD モードの実際的な安定性解析には成功していない (例えば、線形理想 MHD 安定性解析は、

実験解析や装置設計において不可欠なツールのひとつになっている)。その理由として、外部解を求める数値計算法で二次元トカマク配位へ適用可能な有力な方法がないためであったと考えられる。例えば、円柱プラズマでは Newcomb 方程式を初期値問題として解いて外部解を求めていた [23]。しかしながら、トカマク配位における Newcomb 方程式 (一般化 Newcomb 方程式 [10]) は半径 r とポロイダル角 θ を独立変数とする偏微分方程式である。これに加えて、この配位では有理面が一般に複数枚あるため接続条件が複雑になる [24]。このようなわけでトカマク配位では初期値問題を解く方法は実際的な方法とみなせない [8]。

最近、Pletzer と Dewar [39] は外部解に対する変分原理にもとづき有限要素法によってその数値解を求め、合接 (bilinear concomitant) [17, 37] を使って接続データを計算する数値計算法を提案した。彼らの方法は確定特異点のまわりの大きい解の Frobenius 展開を用いるのが特徴である。これは数値的に安定で、かつ、トカマク配位に対して適用可能性を持つ有力な方法と考えられる。

我々は、Pletzer-Dewar の方法を厳密解が前もって分かっているモデル方程式に適用し、この方法の有効性を調べた。とくに、メッシュ数に対する外部解の収束率および Frobenius 展開の打ちきりの解に与える影響に着目した。

第 2 章では、区間の内部に確定特異点を持つ 2 階線形常微分方程式の「境界値問題」を論じ、解くべき問題が接続データを求めることに帰着することを示す。第 3 章では基本解が閉じた形で与えられるモデル方程式に対して接続データを求める。これらは数値実験で使われる。第 4 章から第 7 章は Pletzer-Dewar の方法の解説にあてられる。第 8 章でモデル方程式を対象にした Pletzer-Dewar の方法の数値実験の結果を示し、結論を第 9 章で述べる。

2. 問題設定

次の微分方程式

$$\hat{L}\xi(x) \equiv \frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{d\xi}{dx} \right] - g(x)\xi(x) = 0 \quad (1)$$

の境界値問題

$$\xi(0) = 0, \xi(a) = 0 \quad (2)$$

を解くことを考える。ただし、方程式 (1) は「 $x = x_0$ で確定特異点」を持つ。他の点はすべて通常点である。そして、 $x = x_0$ のまわりで $f(x), g(x)$ は

$$f(x) = f_0(x - x_0)^2 + f_1(x - x_0)^3 + \dots \quad (3)$$

$$g(x) = g_0 + g_1(x - x_0) + \dots \quad (4)$$

のように展開でき、かつ、

$$f(x) \geq 0, f_0 > 0 \quad (5)$$

と仮定する。また、さしあたり

$$g_0 \neq 0 \quad (6)$$

とする。方程式 (1) の確定特異点 $x = x_0$ のまわりに一次独立な二つの Frobenius 解が存在するとし、それらを

$$\xi^b(x) = (x - x_0)^{\alpha(b)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^b (x - x_0)^k \quad (7)$$

$$\xi^s(x) = (x - x_0)^{\alpha(s)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^s (x - x_0)^k \quad (8)$$

実験解析や装置設計において不可欠なツールのひとつになっている)。その理由として、外部解を求める数値計算法で二次元トカマク配位へ適用可能な有力な方法がないためであったと考えられる。例えば、円柱プラズマでは Newcomb 方程式を初期値問題として解いて外部解を求めていた [23]。しかしながら、トカマク配位における Newcomb 方程式 (一般化 Newcomb 方程式 [10]) は半径 r とポロイダル角 θ を独立変数とする偏微分方程式である。これに加えて、この配位では有理面が一般に複数枚あるため接続条件が複雑になる [24]。このようなわけでトカマク配位では初期値問題を解く方法は実際的な方法とみなせない [8]。

最近、Pletzer と Dewar [39] は外部解に対する変分原理にもとづき有限要素法によってその数値解を求め、合接 (bilinear concomitant) [17, 37] を使って接続データを計算する数値計算法を提案した。彼らの方法は確定特異点のまわりの大きい解の Frobenius 展開を用いるのが特徴である。これは数値的に安定で、かつ、トカマク配位に対して適用可能性を持つ有力な方法と考えられる。

我々は、Pletzer-Dewar の方法を厳密解が前もって分かっているモデル方程式に適用し、この方法の有効性を調べた。とくに、メッシュ数に対する外部解の収束率および Frobenius 展開の打ちきりの解に与える影響に着目した。

第 2 章では、区間の内部に確定特異点を持つ 2 階線形常微分方程式の「境界値問題」を論じ、解くべき問題が接続データを求めることに帰着することを示す。第 3 章では基本解が閉じた形で与えられるモデル方程式に対して接続データを求める。これらは数値実験で使われる。第 4 章から第 7 章は Pletzer-Dewar の方法の解説にあてられる。第 8 章でモデル方程式を対象にした Pletzer-Dewar の方法の数値実験の結果を示し、結論を第 9 章で述べる。

2. 問題設定

次の微分方程式

$$\hat{L}\xi(x) \equiv \frac{d}{dx} \left[f(x) \frac{d\xi}{dx} \right] - g(x)\xi(x) = 0 \quad (1)$$

の境界値問題

$$\xi(0) = 0, \xi(a) = 0 \quad (2)$$

を解くことを考える。ただし、方程式 (1) は「 $x = x_0$ で確定特異点」を持つ。他の点はすべて通常点である。そして、 $x = x_0$ のまわりで $f(x), g(x)$ は

$$f(x) = f_0(x - x_0)^2 + f_1(x - x_0)^3 + \dots \quad (3)$$

$$g(x) = g_0 + g_1(x - x_0) + \dots \quad (4)$$

のように展開でき、かつ、

$$f(x) \geq 0, f_0 > 0 \quad (5)$$

と仮定する。また、さしあたり

$$g_0 \neq 0 \quad (6)$$

とする。方程式 (1) の確定特異点 $x = x_0$ のまわりに一次独立な二つの Frobenius 解が存在するとし、それらを

$$\xi^b(x) = (x - x_0)^{\alpha(b)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^b (x - x_0)^k \quad (7)$$

$$\xi^s(x) = (x - x_0)^{\alpha(s)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^s (x - x_0)^k \quad (8)$$

とする。上の方程式で指数 $\alpha(b), \alpha(s)$ は決定方程式

$$\alpha(\alpha + 1)f_0 = g_0 \quad (9)$$

の解であり、

$$\alpha(b) = -\frac{1}{2} - \mu \quad (10)$$

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2} + \mu \quad (11)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{g_0}{f_0}} \quad (12)$$

と表される。ここで、 μ は Suydam-Mercier index と呼ばれ、以下、重要な役割を果たす。また、次のことを仮定する。すなわち、

$$\frac{1}{4} + \frac{g_0}{f_0} > 0 \quad (13)$$

これは、プラズマの理想 MHD 安定性の必要条件になっている。方程式 (1) の Frobenius 解の持ついくつかの重要な性質を次にまとめておく。

1. $\alpha(b) + \alpha(s) = -1, \alpha(b) < -1/2 < \alpha(s)$
2. $\alpha(b), \alpha(s)$ は正の整数でないので、Frobenius 解 (7), (8) は全区間 $[0, a]$ にわたって定義されない。
3. ξ^s は二乗可積分であるが、 ξ^b は二乗可積分でない。
4. そのため、 ξ^b を「大きい解 (big solution)」、 ξ^s を「小さい解 (small solution)」と呼ぶ。

上の (2) に関連して次の様なべき型の超関数を定義しておく。

$$(x - x_0)_L^\alpha \equiv \begin{cases} |x - x_0|^\alpha, & x < x_0 \\ 0, & x > x_0 \end{cases}$$

$$(x - x_0)_R^\alpha \equiv \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ |x - x_0|^\alpha, & x > x_0 \end{cases}$$

および

$$(x - x_0)_+^\alpha \equiv (x - x_0)_R^\alpha + (x - x_0)_L^\alpha$$

$$(x - x_0)_-^\alpha \equiv (x - x_0)_R^\alpha - (x - x_0)_L^\alpha$$

そして、 $x = x_0$ の近傍で $(x - x_0)_p^\alpha$ ($p = L, R$ または $p = +, -, \alpha = b, s$) のふるまいをする一次独立な解を $\xi_p^\alpha(x)$ とすると、境界条件 (2) を満たす方程式 (1) の解 $\xi(x)$ は

$$\begin{aligned} \xi(x) &= c_L[\xi_L^b(x) + \Delta_L \xi_L^s(x)] + c_R[\xi_R^b(x) + \Delta_R \xi_R^s(x)] \\ &= c_L \xi_L(x) + c_R \xi_R(x) \end{aligned} \quad (14)$$

と表せる。したがって、問題は次の様に設定される。

- この時の Δ_L と Δ_R を求めよ。

また、(14)式は

$$\begin{aligned} \xi(x) &= c_+[\xi_+^b(x) + \frac{1}{2}(A'\xi_+^s(x) + B'\xi_-^s(x))] + c_-[\xi_-^b(x) + \frac{1}{2}(\Gamma'\xi_+^s(x) + \Delta'\xi_-^s(x))] \\ &= c_+\xi_+(x) + c_-\xi_-(x) \end{aligned} \quad (15)$$

と書き直せ、係数の間に次の関係が成り立つ。

$$A' = \Delta' = \Delta_R + \Delta_L \quad (16)$$

$$B' = \Gamma' = \Delta_R - \Delta_L \quad (17)$$

$$c_+ = \frac{1}{2}(c_R + c_L) \quad (18)$$

$$c_- = \frac{1}{2}(c_R - c_L) \quad (19)$$

それゆえ、問題は次の様にも言い直せる。

- Δ' および Γ' を求めよ。

ここで求めるべき量 Δ_L, Δ_R あるいは A', Δ', B', Γ' は「接続データ (matching data)」と呼ばれる。実際の応用 (例えば、抵抗性 MHD 安定性解析) では量 Δ' が重要であるので、この問題を解く数値計算コードは Δ' (デルタプライム) コードと呼ばれる。

なお、次のことに注意しよう。すなわち、

- (14)、(15)式における $\xi_p(x)$ は、各々、単独で齎次境界条件 (2) を満たす。

実際、 ξ_L, ξ_R についてはその作り方から明らかである。また、

$$\begin{aligned} \xi_+(0) &= \xi_+^b(0) + \frac{1}{2}(A'\xi_+^s(0) + B'\xi_-^s(0)) \\ &= \xi_L^b(0) + \frac{1}{2}(A' - B')\xi_L^s(0) \\ &= \xi_L^b(0) + \Delta_L\xi_L^s(0) = \xi_L(0) \end{aligned} \quad (20)$$

同様にして、

$$\xi_+(a) = \xi_R(a) \quad (21)$$

$$\xi_-(0) = -\xi_L(0) \quad (22)$$

$$\xi_-(a) = \xi_R(a) \quad (23)$$

を得る。

以下、簡単な例を掲げる。

3. 簡単な例題

まず、最も簡単な例として、方程式 (1) で

$$f(x) = (x - x_0)^2, \quad g(x) \equiv \text{const.} = g > 0 \quad (24)$$

の場合を考えよう。また、区間の終点を $a = 1$ とする。この時、初等関数 $(x - x_0)^\alpha$ が方程式 (1) の基本解になる ($\alpha(\alpha + 1) = g$)。従って、(14)式は

$$\xi(x) = c_L \left[(x - x_0)_L^{\alpha(b)} + \Delta_L (x - x_0)_L^{\alpha(s)} \right] + c_R \left[(x - x_0)_R^{\alpha(b)} + \Delta_R (x - x_0)_R^{\alpha(s)} \right] \quad (25)$$

また、(14)式は

$$\begin{aligned}\xi(x) &= c_+[\xi_+^b(x) + \frac{1}{2}(A'\xi_+^s(x) + B'\xi_-^s(x))] + c_-[\xi_-^b(x) + \frac{1}{2}(\Gamma'\xi_+^s(x) + \Delta'\xi_-^s(x))] \\ &= c_+\xi_+(x) + c_-\xi_-(x)\end{aligned}\quad (15)$$

と書き直せ、係数の間に次の関係が成り立つ。

$$A' = \Delta' = \Delta_R + \Delta_L \quad (16)$$

$$B' = \Gamma' = \Delta_R - \Delta_L \quad (17)$$

$$c_+ = \frac{1}{2}(c_R + c_L) \quad (18)$$

$$c_- = \frac{1}{2}(c_R - c_L) \quad (19)$$

それゆえ、問題は次の様にも言い直せる。

- Δ' および Γ' を求めよ。

ここで求めるべき量 Δ_L, Δ_R あるいは A', Δ', B', Γ' は「接続データ (matching data)」と呼ばれる。実際の応用 (例えば、抵抗性 MHD 安定性解析) では量 Δ' が重要であるので、この問題を解く数値計算コードは Δ' (デルタプライム) コードと呼ばれる。

なお、次のことに注意しよう。すなわち、

- (14)、(15)式における $\xi_p(x)$ は、各々、単独で齎次境界条件 (2) を満たす。

実際、 ξ_L, ξ_R についてはその作り方から明らかである。また、

$$\begin{aligned}\xi_+(0) &= \xi_+^b(0) + \frac{1}{2}(A'\xi_+^s(0) + B'\xi_-^s(0)) \\ &= \xi_L^b(0) + \frac{1}{2}(A' - B')\xi_L^s(0) \\ &= \xi_L^b(0) + \Delta_L\xi_L^s(0) = \xi_L(0)\end{aligned}\quad (20)$$

同様にして、

$$\xi_+(a) = \xi_R(a) \quad (21)$$

$$\xi_-(0) = -\xi_L(0) \quad (22)$$

$$\xi_-(a) = \xi_R(a) \quad (23)$$

を得る。

以下、簡単な例を掲げる。

3. 簡単な例題

まず、最も簡単な例として、方程式 (1) で

$$f(x) = (x - x_0)^2, \quad g(x) \equiv \text{const.} = g > 0 \quad (24)$$

の場合を考えよう。また、区間の終点を $a = 1$ とする。この時、初等関数 $(x - x_0)^\alpha$ が方程式 (1) の基本解になる ($\alpha(\alpha + 1) = g$)。従って、(14)式は

$$\xi(x) = c_L \left[(x - x_0)_L^{\alpha(b)} + \Delta_L (x - x_0)_L^{\alpha(s)} \right] + c_R \left[(x - x_0)_R^{\alpha(b)} + \Delta_R (x - x_0)_R^{\alpha(s)} \right] \quad (25)$$

となる。これが境界条件 (2) を満足しなければならないので

$$x_0^{\alpha(b)} + \Delta_L x_0^{\alpha(s)} = 0 \quad (26)$$

$$(1-x_0)^{\alpha(b)} + \Delta_R (1-x_0)^{\alpha(s)} = 0 \quad (27)$$

を得る。これを解いて、

$$\Delta_L = -\frac{1}{(x_0)^{2\mu}}, \quad \Delta_R = -\frac{1}{(1-x_0)^{2\mu}} \quad (28)$$

および、

$$A' = \Delta' = -\left[\frac{1}{(x_0)^{2\mu}} + \frac{1}{(1-x_0)^{2\mu}} \right] \quad (29)$$

$$B' = \Gamma' = \frac{1}{(x_0)^{2\mu}} - \frac{1}{(1-x_0)^{2\mu}} \quad (30)$$

この例では $\Delta_L, \Delta_R, \Delta'$ は負であるが、 Γ' は正負の値を取る。また、容易に分かることであるが、接続データを特異点の位置 x_0 の関数とみなした時

$$\Delta_L(x_0) = \Delta_R(1-x_0),$$

$$\Delta'(x_0) = \Delta'(1-x_0), \quad \Gamma'(x_0) = -\Gamma'(1-x_0)$$

が成り立つ。次に、もう少し自明でない、閉じた形式で解ける例は

$$f(x) = (x-x_0)^2, \quad g(x) = g_0 + g_2(x-x_0)^2 \quad (31)$$

の場合である。ただし、

$$g_0 > 0, g_2 > 0$$

とする。この時は、再び、 $\alpha(\alpha+1) = g_0$ として、微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\xi}{dx} \right) - (g_2 x^2 + \alpha(\alpha+1)) \xi = 0 \quad (32)$$

の解を求めればよい。

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} Z(t), \quad t = \sqrt{g_2} x$$

とおくと、 $Z(t)$ の満たすべき方程式として

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dZ}{dt} - \left[1 + \frac{(\alpha+1/2)^2}{t^2} \right] Z = 0$$

を得る。これは、変形 Bessel の微分方程式であるから、 $\alpha+1/2 = \pm\mu$ が整数でない時、変形 Bessel 関数 $I_\mu, I_{-\mu}$ が一次独立な解である。従って、方程式 (32) の解は

$$\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} I_{\pm\mu}(\sqrt{g_2} x) \quad (33)$$

と表せる。関数 $I_\nu(x)$ ($x \neq$ 負の実数) の級数展開は

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} \frac{1}{\Gamma(\nu+2)} \\ &+ \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} \frac{1}{2! \Gamma(\nu+3)} + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

である。以上より、 $f(x), g(x)$ が (31) 式で与えられる場合、 $x = x_0$ の近傍で $(x - x_0)_p^\alpha$ のふるまいを
 する $\xi_p^\alpha(x)$, ($p = L, R$) は次式で表せることが分かる。

$$\xi_{L,R}^b(x) = H_{L,R}(x - x_0) \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} \right)^\mu \Gamma(1 - \mu) \frac{1}{\sqrt{|x - x_0|}} I_{-\mu}(\sqrt{g_2}|x - x_0|) \quad (35)$$

$$\xi_{L,R}^s(x) = H_{L,R}(x - x_0) \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} \right)^{-\mu} \Gamma(1 + \mu) \frac{1}{\sqrt{|x - x_0|}} I_\mu(\sqrt{g_2}|x - x_0|) \quad (36)$$

ここで、 $H_L(x) = \Theta(-x)$, $H_R(x) = \Theta(x)$ で

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < 0 \\ 1, & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (37)$$

従って、 Δ_L, Δ_R は次の方程式より決められる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} \right)^\mu \Gamma(1 - \mu) I_{-\mu}(\sqrt{g_2}x_0) \\ & + \Delta_L \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} \right)^{-\mu} \Gamma(1 + \mu) I_\mu(\sqrt{g_2}x_0) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} \right)^\mu \Gamma(1 - \mu) I_{-\mu}(\sqrt{g_2}(1 - x_0)) \\ & + \Delta_L \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} \right)^{-\mu} \Gamma(1 + \mu) I_\mu(\sqrt{g_2}(1 - x_0)) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

これらを解いて接続データとして

$$\Delta_L = - \left(\frac{g_2}{4} \right)^\mu \frac{\Gamma(1 - \mu)}{\Gamma(1 + \mu)} \frac{I_{-\mu}(\sqrt{g_2}x_0)}{I_\mu(\sqrt{g_2}x_0)} \quad (40)$$

$$\Delta_R = - \left(\frac{g_2}{4} \right)^\mu \frac{\Gamma(1 - \mu)}{\Gamma(1 + \mu)} \frac{I_{-\mu}(\sqrt{g_2}(1 - x_0))}{I_\mu(\sqrt{g_2}(1 - x_0))} \quad (41)$$

および

$$A' = \Delta' = - \left(\frac{g_2}{4} \right)^\mu \frac{\Gamma(1 - \mu)}{\Gamma(1 + \mu)} \left\{ \frac{I_{-\mu}(\sqrt{g_2}x_0)}{I_\mu(\sqrt{g_2}x_0)} + \frac{I_{-\mu}(\sqrt{g_2}(1 - x_0))}{I_\mu(\sqrt{g_2}(1 - x_0))} \right\} \quad (42)$$

$$B' = \Gamma' = \left(\frac{g_2}{4} \right)^\mu \frac{\Gamma(1 - \mu)}{\Gamma(1 + \mu)} \left\{ \frac{I_{-\mu}(\sqrt{g_2}x_0)}{I_\mu(\sqrt{g_2}x_0)} - \frac{I_{-\mu}(\sqrt{g_2}(1 - x_0))}{I_\mu(\sqrt{g_2}(1 - x_0))} \right\} \quad (43)$$

を得る。この例は後で述べる「汚染 (pollution)」の数値実験に用いることが出来る。また、前の例と同じく、接続データを x_0 の関数とみた時

$$\Delta_L(x_0) = \Delta_R(1 - x_0)$$

$$\Delta'(x_0) = \Delta'(1 - x_0), \quad \Gamma'(x_0) = -\Gamma'(1 - x_0)$$

が成り立つことが分かる。ただし、接続データの符号については一般的なことは言えない様である。実際、 $\mu > 0$ のとき、変形 Bessel 関数 $I_\mu(x)$, ($x > 0$) は正の値を持つが $I_{-\mu}(x)$ についてはそれは言えない。たとえば、 μ が半整数であれば変形 Bessel 関数は初等関数で表せ

$$\begin{aligned} I_{1/2}(x) &= \sqrt{2/(\pi x)} \sinh x, \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cosh x \\ I_{3/2}(x) &= \sqrt{2/(\pi x)} (\cosh x - x^{-1} \sinh x) \\ I_{-3/2}(x) &= \sqrt{2/(\pi x)} (\sinh x - x^{-1} \cosh x) \end{aligned}$$

であり、 $I_{-3/2}(x)$ は $\tanh x = 1/x$ に零点を持つ。

4. ヒルベルト空間の設定

ここでは接続データに対する変分原理を導く上で適切なヒルベルト空間を設定する [39]。内積を

$$(u, v) \equiv \int_0^a u^* v dx$$

で表す。方程式 (1) における作用素 \hat{L} に関して

$$u^* \hat{L} v = \frac{d}{dx} \left(f u^* \frac{dv}{dx} \right) - \left[f \frac{du^*}{dx} \frac{dv}{dx} + g u^* v \right] \quad (44)$$

$$= \frac{d}{dx} \left[f(x) \left(u^* \frac{dv}{dx} - v \frac{du^*}{dx} \right) \right] + v (\hat{L} u)^* \quad (45)$$

が成立する。そこで汎関数 $W(u, v)$ と「合接 (bilinear concomitant)」 [17, 37] を

$$W(u, v) \equiv \int_0^a \left[f(x) \frac{du^*}{dx} \frac{dv}{dx} + g(x) u^* v \right] dx \quad (46)$$

$$P[u, v; x] \equiv f(x) \left(u^* \frac{dv}{dx} - v \frac{du^*}{dx} \right) \quad (47)$$

で定義する。したがって、(45) は

$$u^* \hat{L} v - v (\hat{L} u)^* = \frac{d}{dx} P[u, v; x] \quad (48)$$

と表せる。関数 u, v として境界条件 (2) を満足するものだけに限ると

$$P[u, v; 0] = P[u, v; a] = 0$$

である。また、 u, v が滑らかであれば (44) 式が積分できて

$$(u, \hat{L} v) = (v, \hat{L} u)^* = W(u, v) \quad (49)$$

すなわち、

$$W(u, v) = W^*(v, u) \quad (50)$$

を得る。これは、作用素 \hat{L} が自己共役であることを意味している。さらに次の条件が成り立つと仮定する。

- 境界条件をみたし、恒等的にゼロではない滑らかな関数 $u(x)$ に対して $W(u, u) > 0$ である。

これは、プラズマが理想 MHD 的に安定であることを意味している。したがって、

$$\|u\| \equiv W(u, u) \quad (51)$$

をノルム、 $W(u, v)$ を内積とするヒルベルト空間 \mathcal{H} を考えることが出来る。この時、次のことが重要である。すなわち、

- 我々が求めたい、境界条件を満たす $\hat{L}\xi = 0$ の解は \mathcal{H} に入っていない ($\xi \notin \mathcal{H}$)。
- つまり、大きい解 ξ^b に対しては $W(\xi^b, \xi^b)$ は存在せず ($+\infty$ である)、それは「無限大の」エネルギーノルムを持つ。

- また、小さい解 ξ^s はゼロのエネルギーノルムを持つ。 $W(\xi^s, \xi^s) = 0$ そこで求めたい解 ξ を (14) 式、あるいは (15) 式に合わせて

$$\xi = \sum_P c_P \xi_P \tag{52}$$

と表し ($p = +, -$ or L, R)、無限エネルギー部分 $\hat{\xi}_p$ と残りの部分

$$\zeta_{(p)} \equiv \xi_p - \hat{\xi}_p \tag{53}$$

とに分離する (p を () で囲んだのは $\zeta_{(p)}$ は必ずしも特異点近傍でよく定義されたパリティ p を持つとは限らないからである)。ここで、無限エネルギー部分 $\hat{\xi}_p$ は「前もって」わかっており、かつ、大きい解の挙動を十分に反映していて小さい解を「汚染」しないとする (この意味はのちほど明らかになる)。具体的には $\hat{\xi}_p$ を

$$\hat{\xi}_p(x) = H(x) \xi_p^b(x) \tag{54}$$

で導入する。ここで、 $H(x)$ は、 $\epsilon < \delta$ を与えられた定数として

$$H(x) = \begin{cases} 1, & |x - x_0| < \epsilon \text{ のとき} \\ 0, & |x - x_0| > \delta \text{ のとき} \end{cases} \tag{55}$$

なる滑らかな関数である。したがって、無限エネルギー部分について次のことが成立する。

$$\hat{L} \hat{\xi}_p \begin{cases} = 0, & |x - x_0| < \epsilon, |x - x_0| > \delta \text{ のとき} \\ \neq 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{56}$$

また、 $\hat{L} \hat{\xi}_p$ は漸次境界条件 (2) を満たす。従って、 $\hat{L} \hat{\xi}_p$ は \mathcal{H} に入っている。

$$\hat{L} \hat{\xi}_p \in \mathcal{H} \tag{57}$$

一方、 $\zeta_{(p)}$ はつぎの非漸次方程式

$$\hat{L} \zeta_{(p)} = -\hat{L} \hat{\xi}_p \tag{58}$$

を満足せねばならないが、 ξ_p も $\hat{\xi}_p$ も単独で境界条件 (2) を満たすので、 $\zeta_{(p)}$ も境界条件を満たす。従って、次の重要な命題が成立する。

- $\zeta_{(p)}$ も $\hat{L} \hat{\xi}_p$ も空間 \mathcal{H} に入っている。したがって、方程式 (58) で $-\hat{L}^{-1}(\hat{L} \hat{\xi}_p)$ が (例えば、有限要素法で) 求められる。
- $\zeta_{(p)}(x)$ は $x = x_0$ の近傍では小さい解の挙動を示す (大きい解の挙動をすれば \mathcal{H} に属することはできない)。すなわち、 $-\epsilon < \delta x < \epsilon$ として、

$$\zeta_{(+)}(x_0 + \delta x) \sim \frac{1}{2} (A' \xi_+^s + B' \xi_-^s) \tag{59}$$

$$\zeta_{(-)}(x_0 + \delta x) \sim \frac{1}{2} (\Gamma' \xi_+^s + \Delta' \xi_-^s) \tag{60}$$

- 従って、 $\zeta_{(p)}$ の関数値を数値的に求めることは必ずしも意味が有るとは言えないが、
- 合接 P を利用して $A' (= \Delta')$ 、 $B' (= \Gamma')$ を積分関係式を使って求めることが出来る。

最後の意味するところを次に議論する。

5. 確定特異点がある場合の合接の性質

前節で述べた様に、合接

$$P[u, v; x] \equiv f(x) \left(u^* \frac{dv}{dx} - v \frac{du^*}{dx} \right)$$

について

$$u^* \hat{L}v - v(\hat{L}u)^* = \frac{d}{dx} P[u, v; x] \quad (61)$$

が成立する。ここで、特に u, v が

$$\hat{L}u = 0, \quad \hat{L}v = 0 \quad (62)$$

を満たせば、(61)式で左辺はゼロであるので

$$P[u, v; x] = \text{const} = P[u, v; 0], \quad \text{for } x < x_0 \quad (63)$$

$$P[u, v; x] = \text{const} = P[u, v; a], \quad \text{for } x > x_0 \quad (64)$$

を得る。さらに、 u, v がともに同じ境界条件を満たすと

$$P[u, v; x] = 0, \quad x \neq x_0 \quad (65)$$

が成立する。さらに加えて、 u, v が $x = x_0$ をまたいで部分積分ができる性質を持てば

$$(u, \hat{L}v) = (v, \hat{L}u)^* \quad (66)$$

である。これは、このような u, v に対して \hat{L} は自己共役作用素であることを意味している。次に u, v が (62) 式を満たさない場合、 $t \equiv x - x_0$ の近傍での P の挙動を見る。

$$u = O(|t|^\alpha), \quad v = O(|t|^\beta)$$

であれば

$$f(x) \sim O(t^2)$$

より

$$P = O(|t|^{\alpha+\beta+1})$$

である。したがって、

- $\alpha + \beta > -1$ の時、 $x \rightarrow x_0 \pm 0$ で $P \rightarrow 0$ 、すなわち、 P は $x = x_0$ で連続。
- $\alpha + \beta = -1$ の時、 P は $x = x_0$ の両側で定数に近づく。しかし、各側での定数の値は異なっていてよい。
- $u, v \in \mathcal{H}$ ならば、ノルム $\|u\|, \|v\|$ が存在するので $\alpha > -1/2, \beta > -1/2$ である。したがって、 P は連続であり、また、部分積分が出来る。すなわち、
- $u, v \in \mathcal{H}$ に対して、 \hat{L} は自己共役である。

なお、 $\alpha + \beta < -1$ の場合は興味がない。

上で示された様に P には特異点 $x = x_0$ で飛びが存在し得、そのため、 dP/dx はそこで δ 関数的になる。一方、 u, v に特異性があっても方程式 (61) の左辺が区間 $[0, a]$ にわたって積分可能である場

合、左辺には特異性はない。そのため、このような場合を含むように拡張された等式 (61) は次の様になる。

$$u^* \hat{L}v - v(\hat{L}u)^* = \frac{d}{dx} P[u, v; x] - [[P(u, v)]](x_0) \delta(x - x_0) \quad (67)$$

$$[[P(u, v)]](x_0) \equiv P[u, v; x_0 + 0] - P[u, v; x_0 - 0] \quad (68)$$

すでに述べた様に $u, v \in \mathcal{H}$ ならば $[[P]](x_0)$ は消える。そのほかに

- $\alpha + \beta = -1$ で、 α が even(odd) number、 β が odd(even) number の時、 $[[P((x - x_0)_+^\alpha, (x - x_0)_-^\beta)]](x_0)$ は消える (たとえば、 $\alpha = -3, \beta = 2$ で確認してみよ)。
- また、 $u = O(\xi_p^b), v = o(\xi_p^a)$ の時、 $[[P(u, v)]](x_0)$ は消える。

6. 接続データに対する変分原理

議論をはっきりさせるために、以下、(52) 式で $p = +, -$ とする。 $\hat{L}\xi_p = 0$ より

$$(\xi_q, \hat{L}\xi_p) = 0 \quad (69)$$

である。これに対して (53) 式の分解を使うと

$$(\zeta_{(q)}, \hat{L}\zeta_{(p)}) + (\zeta_{(q)}, \hat{L}\hat{\xi}_p) + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\zeta_{(p)}) + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) = 0 \quad (70)$$

となる。上の積分で注意しなければならないのは左辺第3項である。(67) 式を適用すると

$$\hat{\xi}_q^* \hat{L}\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}(\hat{L}\hat{\xi}_q)^* = \frac{d}{dx} P[\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)}; x] - [[P(\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)})]](x_0) \delta(x - x_0) \quad (71)$$

を得るが、 $\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)}$ は境界条件を満たすので、積分して

$$(\hat{\xi}_q, \hat{L}\zeta_{(p)}) = (\zeta_{(p)}, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* - [[P(\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)})]](x_0) \quad (72)$$

を得る (左辺の積分は「不可能」であるが、右辺第一項の積分は可能である!)。これを (70) 式に代入すると、次の基本的な関係式が得られる。

$$[[P(\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)})]](x_0) = (\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} \quad (73)$$

ここで、「対称化行列要素」 $(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym}$ は

$$(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} \equiv (\zeta_{(q)}, \hat{L}\zeta_{(p)}) + (\zeta_{(q)}, \hat{L}\hat{\xi}_p) + (\zeta_{(p)}, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) \quad (74)$$

で定義される。この関係式が基本的であるのは、(59, 60) 式より

$$[[P(\hat{\xi}_+, \zeta_{(+)})]](x_0) = 2A' f_0 \mu, \quad [[P(\hat{\xi}_-, \zeta_{(+)})]](x_0) = 2B' f_0 \mu \quad (75)$$

$$[[P(\hat{\xi}_+, \zeta_{(-)})]](x_0) = 2\Gamma' f_0 \mu, \quad [[P(\hat{\xi}_-, \zeta_{(-)})]](x_0) = 2\Delta' f_0 \mu \quad (76)$$

であるので、接続データを積分操作で与える次の公式が得られるからである。

$$A' = \frac{(\xi_+, \hat{L}\xi_+)_{sym}}{2f_0 \mu}, \quad B' = \frac{(\xi_-, \hat{L}\xi_+)_{sym}}{2f_0 \mu} \quad (77)$$

$$\Gamma' = \frac{(\xi_+, \hat{L}\xi_-)_{sym}}{2f_0 \mu}, \quad \Delta' = \frac{(\xi_-, \hat{L}\xi_-)_{sym}}{2f_0 \mu} \quad (78)$$

さらに、(74) 式に対して、各 ζ 成分について変分をとると

$$\delta(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} = (\delta\zeta_{(q)}, \hat{L}(\zeta_{(q)} + \xi_p))_{sym} + (\delta\zeta_{(p)}, \hat{L}(\zeta_{(p)} + \xi_q))_{sym} \quad (79)$$

である。従って、次の変分原理を得る。

合、左辺には特異性はない。そのため、このような場合を含むように拡張された等式 (61) は次の様になる。

$$u^* \hat{L}v - v(\hat{L}u)^* = \frac{d}{dx} P[u, v; x] - [[P(u, v)]](x_0) \delta(x - x_0) \quad (67)$$

$$[[P(u, v)]](x_0) \equiv P[u, v; x_0 + 0] - P[u, v; x_0 - 0] \quad (68)$$

すでに述べた様に $u, v \in \mathcal{H}$ ならば $[[P]](x_0)$ は消える。そのほかに

- $\alpha + \beta = -1$ で、 α が even(odd) number、 β が odd(even) number の時、 $[[P((x - x_0)_+^\alpha, (x - x_0)_-^\beta)]](x_0)$ は消える (たとえば、 $\alpha = -3, \beta = 2$ で確認してみよ)。
- また、 $u = O(\xi_p^b), v = o(\xi_p^a)$ の時、 $[[P(u, v)]](x_0)$ は消える。

6. 接続データに対する変分原理

議論をはっきりさせるために、以下、(52) 式で $p = +, -$ とする。 $\hat{L}\xi_p = 0$ より

$$(\xi_q, \hat{L}\xi_p) = 0 \quad (69)$$

である。これに対して (53) 式の分解を使うと

$$(\zeta_{(q)}, \hat{L}\zeta_{(p)}) + (\zeta_{(q)}, \hat{L}\hat{\xi}_p) + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\zeta_{(p)}) + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) = 0 \quad (70)$$

となる。上の積分で注意しなければならないのは左辺第3項である。(67) 式を適用すると

$$\hat{\xi}_q^* \hat{L}\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}(\hat{L}\hat{\xi}_q)^* = \frac{d}{dx} P[\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)}; x] - [[P(\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)})]](x_0) \delta(x - x_0) \quad (71)$$

を得るが、 $\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)}$ は境界条件を満たすので、積分して

$$(\hat{\xi}_q, \hat{L}\zeta_{(p)}) = (\zeta_{(p)}, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* - [[P(\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)})]](x_0) \quad (72)$$

を得る (左辺の積分は「不可能」であるが、右辺第一項の積分は可能である!)。これを (70) 式に代入すると、次の基本的な関係式が得られる。

$$[[P(\hat{\xi}_q, \zeta_{(p)})]](x_0) = (\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} \quad (73)$$

ここで、「対称化行列要素」 $(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym}$ は

$$(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} \equiv (\zeta_{(q)}, \hat{L}\zeta_{(p)}) + (\zeta_{(q)}, \hat{L}\hat{\xi}_p) + (\zeta_{(p)}, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) \quad (74)$$

で定義される。この関係式が基本的であるのは、(59, 60) 式より

$$[[P(\hat{\xi}_+, \zeta_{(+)})]](x_0) = 2A' f_0 \mu, \quad [[P(\hat{\xi}_-, \zeta_{(+)})]](x_0) = 2B' f_0 \mu \quad (75)$$

$$[[P(\hat{\xi}_+, \zeta_{(-)})]](x_0) = 2\Gamma' f_0 \mu, \quad [[P(\hat{\xi}_-, \zeta_{(-)})]](x_0) = 2\Delta' f_0 \mu \quad (76)$$

であるので、接続データを積分操作で与える次の公式が得られるからである。

$$A' = \frac{(\xi_+, \hat{L}\xi_+)_{sym}}{2f_0 \mu}, \quad B' = \frac{(\xi_-, \hat{L}\xi_+)_{sym}}{2f_0 \mu} \quad (77)$$

$$\Gamma' = \frac{(\xi_+, \hat{L}\xi_-)_{sym}}{2f_0 \mu}, \quad \Delta' = \frac{(\xi_-, \hat{L}\xi_-)_{sym}}{2f_0 \mu} \quad (78)$$

さらに、(74) 式に対して、各 ζ 成分について変分をとると

$$\delta(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} = (\delta\zeta_{(q)}, \hat{L}(\zeta_{(q)} + \xi_p))_{sym} + (\delta\zeta_{(p)}, \hat{L}(\zeta_{(p)} + \xi_q))_{sym} \quad (79)$$

である。従って、次の変分原理を得る。

- $\zeta_{(p)}$ が方程式 (58) の解である時に接続データは ζ の変分に対して停留値になる。

次に、 $\zeta_{(q)}$ が方程式 (58) の解である時には、(74) 式右辺第 1 項と第 2 項が打ち消し合い

$$(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} = -(\zeta_{(p)}, \hat{L}\zeta_{(q)})^* + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) \quad (80)$$

$$= W(\zeta_{(q)}, \zeta_{(p)}) + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) \quad (81)$$

が成り立つ。(81) 式は実際に対称化行列要素を計算する公式を与える重要な関係式である。

次に η_p を \mathcal{H} の中の任意の関数として次の変換

$$\hat{\xi}_p \mapsto \hat{\xi}_p + \eta_p, \quad \zeta_{(p)} \mapsto \zeta_{(p)} - \eta_p \quad (82)$$

を行った時の、対称化行列要素 (74) によって与えられる接続データのふるまいを見る。この変換によって、基本解 ξ_p は不変である。(82) 式を (74) 式に代入すると

$$\begin{aligned} (\zeta_{(q)}, \hat{L}\zeta_{(p)}) &\mapsto (\zeta_{(q)}, \hat{L}\zeta_{(p)}) - \underbrace{(\eta_q, \hat{L}\zeta_{(p)})}_{(*1)} - \underbrace{(\zeta_{(q)}, \hat{L}\eta_p)}_{(*2)} + \underbrace{(\eta_q, \hat{L}\eta_p)}_{(*3)} \\ (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) &\mapsto (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) + \underbrace{(\eta_q, \hat{L}\hat{\xi}_p)}_{(*4)} + \underbrace{(\hat{\xi}_q, \hat{L}\eta_p)}_{(*5)} + \underbrace{(\eta_q, \hat{L}\eta_p)}_{(*6)} \\ (\zeta_{(q)}, \hat{L}\hat{\xi}_p) &\mapsto (\zeta_{(q)}, \hat{L}\hat{\xi}_p) - \underbrace{(\eta_q, \hat{L}\hat{\xi}_p)}_{(*a)} + \underbrace{(\zeta_{(q)}, \hat{L}\eta_p)}_{(*b)} - \underbrace{(\eta_q, \hat{L}\eta_p)}_{(*c)} \\ (\zeta_{(p)}, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* &\mapsto (\zeta_{(p)}, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* - \underbrace{(\eta_p, \hat{L}\hat{\xi}_q)^*}_{(*d)} + \underbrace{(\zeta_{(p)}, \hat{L}\eta_q)^*}_{(*e)} - \underbrace{(\eta_p, \hat{L}\eta_q)^*}_{(*f)} \end{aligned}$$

となる。(*1) と (*e)、(*2) と (*b)、(*3) と (*c)、(*4) と (*a)、(*6) と (*f) の項が、それぞれ、打ち消し合うので (*5)、(*d) のみが残る

$$(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} \mapsto (\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\eta_p) - (\eta_p, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* \quad (83)$$

$$= (\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} - \left[\left[P(\hat{\xi}_q, \eta_p) \right] \right] \quad (84)$$

を得る。第 4 節で述べた合接の性質を使うと $\eta_p = o(\zeta)$ ならば、 $\left[\left[P(\hat{\xi}_q, \eta_p) \right] \right] = 0$ である。これより、次の重要な定理が得られる。

定理 1 無限エネルギー部分の任意の再定義が、新旧の差が有理面の近傍で小さい解より早くゼロになる様に行われると、その再定義によって対称化行列要素は不変である。

次に、大きい解に対する Frobenius 展開を有限項で打ち切った関数 $\xi_p^{bt}(x)$ から作った無限エネルギー部分を $\hat{\xi}_p^{new}$ とする。したがって、

$$\hat{\xi}_p(x) = \hat{\xi}_p^{new}(x) + \eta_p(x) \quad (85)$$

$$\xi_p^{new}(x) = H(x)\xi_p^{bt}(x), \quad \eta_p(x) = H(x)(\xi_p^b(x) - \xi_p^{bt}(x))$$

である。このとき、方程式 (58) は

$$\hat{L}\zeta_{(p)} = -\hat{L}\hat{\xi}_p^{new} - \hat{L}\eta_p$$

となる。したがって、関数 $\zeta_{(p)}^{new}$ を方程式

$$\hat{L}\zeta_{(p)}^{new} = -\hat{L}\hat{\xi}_p^{new} \quad (86)$$

の解とする (実際上はこの方程式を解く) と、真の大きい解を用いたときの解 $\zeta_{(p)}$ との差は

$$\hat{L}(\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{\text{new}}) = -\hat{L}\eta_p$$

で与えられる。ゆえに、 $\eta_p \in \mathcal{H}$ ならば、上の方程式は解

$$\zeta_{(p)} = \zeta_{(p)}^{\text{new}} - \eta_p \tag{87}$$

を与える。式 (85,87) は $\hat{\xi}_p, \zeta_{(p)}$ に変換 (82) を施すことを意味している。これより、応用上有用な (しかし強い制限を与える) 次の系をうる。

定理 1-系 A 大きい解を定義する Frobenius 展開は、打ち切り誤差 δ が $\delta = o(\text{small solution})$ であれば、有限項で打ち切ることができる。

また、関数 $H(x)$ のクラスは次のように拡張される。

定理 1-系 B $H(x) = 1 + O((x - x_0)^k)$, $x \rightarrow x_0$ ただし、 $k > 2\mu$

7. 有限要素法

さて、ここで、境界値問題

$$\hat{L}\zeta_{(p)} = -\hat{L}\hat{\xi}_p \tag{88}$$

$$\zeta_{(p)}(0) = \zeta_{(p)}(a) = 0 \tag{89}$$

の数値計算法を考える。この方程式を弱形式 (weak form) で解く。両辺に $u \in \mathcal{H}$ をかけて区間 $[0, a]$ にわたって積分すると、 $u, \zeta_{(p)}$ とも \mathcal{H} に入っているので (44) 式が適用でき

$$W(u, \zeta_{(p)}) = (u, \hat{L}\hat{\xi}_p) \tag{90}$$

をうる。有限要素法の考え方にもとづき、基底関数 $e_m(x)$ ($m = 1, \dots, M$) で張られる \mathcal{H} の部分空間を \mathcal{H}_M とする。具体的には $e_m(x)$ としてテント関数を考える。 $\zeta_{(p)}$ の Ritz 近似

$$\zeta_{(p)}^{(M)}(x) = \sum_{m=1}^M \Xi_{(p)}^m e_m(x) \tag{91}$$

で解 $\zeta_{(p)}(x)$ を近似し係数 $\Xi_{(p)}^m$ を Galerkin 法で求める。すなわち、(91) 式を (90) 式に代入し u を各 e_l に置き換えれば、 $\Xi_{(p)}^m$ に対する一次方程式 (Galerkin 方程式)

$$\sum_{m=1}^M \Xi_{(p)}^m W(e_l, e_m) = (e_l, \hat{L}\hat{\xi}_p), \quad l = 1, \dots, M \tag{92}$$

を得る。各係数

$$W_{l,m} \equiv W(e_l, e_m), \quad b_l \equiv (e_l, \hat{L}\hat{\xi}_p) \tag{93}$$

は通常有限要素法の技法で求められる。行列 $W \equiv (W_{l,m})$ が特異でないことが方程式 (92) の「安定」に解けるための条件である。テント関数に対しては $W_{l,m}$ は有限であり、対角要素 $W_{l,l}$ は正値である (ゼロにはならない)。したがって、方程式 (92) は安定に解けるであろう。このことが満たされれば通常有限要素法の場合と同じようにして Ritz 近似の最良性が言える。まず、

$$W(u, \zeta_{(p)}^{(M)}) = (u, \hat{L}\hat{\xi}_p), \quad u \in \mathcal{H}_M$$

の解とする (実際上はこの方程式を解く) と、真の大きい解を用いたときの解 $\zeta_{(p)}$ との差は

$$\hat{L}(\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{\text{new}}) = -\hat{L}\eta_p$$

で与えられる。ゆえに、 $\eta_p \in \mathcal{H}$ ならば、上の方程式は解

$$\zeta_{(p)} = \zeta_{(p)}^{\text{new}} - \eta_p \tag{87}$$

を与える。式 (85,87) は $\hat{\xi}_p, \zeta_{(p)}$ に変換 (82) を施すことを意味している。これより、応用上有用な (しかし強い制限を与える) 次の系をうる。

定理 1-系 A 大きい解を定義する Frobenius 展開は、打ち切り誤差 δ が $\delta = o(\text{small solution})$ であれば、有限項で打ち切ることができる。

また、関数 $H(x)$ のクラスは次のように拡張される。

定理 1-系 B $H(x) = 1 + O((x - x_0)^k)$, $x \rightarrow x_0$ ただし、 $k > 2\mu$

7. 有限要素法

さて、ここで、境界値問題

$$\hat{L}\zeta_{(p)} = -\hat{L}\hat{\xi}_p \tag{88}$$

$$\zeta_{(p)}(0) = \zeta_{(p)}(a) = 0 \tag{89}$$

の数値計算法を考える。この方程式を弱形式 (weak form) で解く。両辺に $u \in \mathcal{H}$ をかけて区間 $[0, a]$ にわたって積分すると、 $u, \zeta_{(p)}$ とも \mathcal{H} に入っているので (44) 式が適用でき

$$W(u, \zeta_{(p)}) = (u, \hat{L}\hat{\xi}_p) \tag{90}$$

をうる。有限要素法の考え方にもとづき、基底関数 $e_m(x)$ ($m = 1, \dots, M$) で張られる \mathcal{H} の部分空間を \mathcal{H}_M とする。具体的には $e_m(x)$ としてテント関数を考える。 $\zeta_{(p)}$ の Ritz 近似

$$\zeta_{(p)}^{(M)}(x) = \sum_{m=1}^M \Xi_{(p)}^m e_m(x) \tag{91}$$

で解 $\zeta_{(p)}(x)$ を近似し係数 $\Xi_{(p)}^m$ を Galerkin 法で求める。すなわち、(91) 式を (90) 式に代入し u を各 e_l に置き換えれば、 $\Xi_{(p)}^m$ に対する一次方程式 (Galerkin 方程式)

$$\sum_{m=1}^M \Xi_{(p)}^m W(e_l, e_m) = (e_l, \hat{L}\hat{\xi}_p), \quad l = 1, \dots, M \tag{92}$$

を得る。各係数

$$W_{l,m} \equiv W(e_l, e_m), \quad b_l \equiv (e_l, \hat{L}\hat{\xi}_p) \tag{93}$$

は通常有限要素法の技法で求められる。行列 $W \equiv (W_{l,m})$ が特異でないことが方程式 (92) の「安定」に解けるための条件である。テント関数に対しては $W_{l,m}$ は有限であり、対角要素 $W_{l,l}$ は正値である (ゼロにはならない)。したがって、方程式 (92) は安定に解けるであろう。このことが満たされれば通常有限要素法の場合と同じようにして Ritz 近似の最良性が言える。まず、

$$W(u, \zeta_{(p)}^{(M)}) = (u, \hat{L}\hat{\xi}_p), \quad u \in \mathcal{H}_M$$

と(90)式とより

$$W(u, \zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}) = 0, \forall u \in \mathcal{H}_M \quad (94)$$

であること、すなわち、誤差 $\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}$ は $\forall u \in \mathcal{H}_M$ に垂直であることが得られる。また、これより、 $\forall u \in \mathcal{H}_M$ について

$$\begin{aligned} \|\zeta_{(p)} - u\| &= \|\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)} + \zeta_{(p)}^{(M)} - u\| \\ &= \left[\|\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}\|^2 + \|\zeta_{(p)}^{(M)} - u\|^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (95)$$

$$\geq \|\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}\| \quad (96)$$

が成り立つ。ここで、(95)式を得るのに(94)式から導かれる直交関係式

$$W(\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}, \zeta_{(p)}^{(M)} - u) = 0$$

を使った。従って、この有限要素法も通常の場合と同じく

$$\|\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}\| = \inf_{u \in \mathcal{H}_M} \|\zeta_{(p)} - u\| \quad (97)$$

により $\zeta_{(p)}$ の最良近似を与える。次に、接続データの誤差評価を行おう。(74)式で $\zeta_{(p)}$ の代わりに $\zeta_{(p)}^{(M)}$ を使うと

$$(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym}^{(M)} = (\zeta_{(q)}^{(M)}, \hat{L}\zeta_{(p)}^{(M)}) + (\zeta_{(q)}^{(M)}, \hat{L}\hat{\xi}_p) + (\zeta_{(p)}^{(M)}, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_q) \quad (98)$$

であるが、(80)式が成立するのと同じ理由で第1項と第2項とが打ち消し合い、また第3項については

$$(\zeta_{(p)}^{(M)}, \hat{L}\hat{\xi}_q)^* = -(\zeta_{(p)}^{(M)}, \hat{L}\zeta_{(q)})^* \quad (99)$$

$$= W(\zeta_{(q)}, \zeta_{(p)}^{(M)}) \quad (100)$$

$$= W(\zeta_{(q)}^{(M)}, \zeta_{(p)}^{(M)}) \quad (101)$$

が成立する。ここで、(100)式から(101)式を得るのには(94)式を用いた。従って、(81)に対応する公式として

$$(\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym}^{(M)} = W(\zeta_{(q)}^{(M)}, \zeta_{(p)}^{(M)}) + (\hat{\xi}_q, \hat{L}\hat{\xi}_p) \quad (102)$$

を得る。これが接続データの数値計算において実際に使われる。また、(81, 100)式より接続データの誤差の評価として

$$\begin{aligned} (\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym} - (\xi_q, \hat{L}\xi_p)_{sym}^{(M)} &= \frac{W(\zeta_{(q)}, \zeta_{(p)}) - W(\zeta_{(q)}, \zeta_{(p)}^{(M)})}{2\mu f_0} \\ &= \frac{W(\zeta_{(q)} - \zeta_{(q)}^{(M)}, \zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)})}{2\mu f_0} \end{aligned} \quad (103)$$

を得る。ここで再び(94)式を用いた。収束率 r を

$$\|\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}\| = O(M^r), \quad M \rightarrow \infty \quad (104)$$

で定義すると(103)式の分子は

$$W(\zeta_{(q)} - \zeta_{(q)}^{(M)}, \zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}) \leq \|\zeta_{(q)} - \zeta_{(q)}^{(M)}\| \cdot \|\zeta_{(p)} - \zeta_{(p)}^{(M)}\| = O(M^{2r}) \quad (105)$$

で抑えられる。これより、次の結論を得る。

- 接続データの収束率は解そのものの収束率の2倍である。

最後に収束率について結果を述べる(数学的に厳密かどうかは原論文[39]からでは判断できない)。テント関数を基底関数に用いた場合、有限要素法で期待される近似解に対して最大収束率 $r = -1$ をもたらすには特異点 x_0 の近傍でのノード点の密度を上げる必要がある。メッシュの生成関数 $F(t) : x = F(t)$ が x_0 近傍で

$$F(t_m) = \begin{cases} x_0 - c(t_0 - t_m)^\gamma & t_m < t_0 \text{ のとき} \\ x_0 + c(t_m - t_0)^\gamma & t_m > t_0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (106)$$

のように与えられるとする。ここで、定数 c , t_0 は

$$t_0 = \frac{1}{1 + (a/x_0 - 1)^{1/\gamma}},$$

$$c = \frac{x_0}{t_0^\gamma}$$

また、

$$t_m = \frac{m-1}{M-1}, \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (107)$$

$$\gamma > 1 \quad (108)$$

とする。この時、最大収束率を得るための条件は、 $\mu \neq 1/2$ の場合、

$$\gamma > \frac{1}{\mu} \quad (109)$$

で与えられる。なお、 $\mu = 1/2$ の場合は線形分布 ($\gamma = 1$) で十分である。

8. 数 値 実 験

方程式(1)の係数 $f(x)$ と $g(x)$ が式(24)(以下、Example-1とよぶ)および(31)(以下、Example-2とよぶ)で与えられる場合について数値実験を、特に接続データの収束に重点をおいて、行った。ここではその結果を述べる。

式(92)の右辺($e_1, \hat{L}\hat{\xi}_p$)の計算には、関数 $H(x)$ の2階微分まで必要である。それゆえ、 $H(x)$ として、無限回微分可能な関数

$$H(x) = h(x - x_0) \quad (110)$$

$$h(x) = \exp \left[-2k \frac{(x/\delta)^{2k}}{1 - (x/\delta)^{2k}} \right] \quad (111)$$

を選んだ。ここで、 $\delta = 0.2$ 、 $k = 2$ または4である。図1および図2に、それぞれ、 $k = 2$ および $k = 4$ のときの関数 $H(x)$ を示す。

区間 $[0, 1]$ で生成されるメッシュ点の点数 M は

$$401, 501, 601, 701, 801, 901, 1001, 2001, 3001 \text{ および } 4001$$

である。図3にメッシュの生成関数 $F(t)$ (式(106))を示す。ここで、 $x_0 = 0.5$ 、 $\gamma = 2$ である。

8.1 Example-1

この場合、無限エネルギー部分 $\hat{\xi}_p$ にたいして、厳密に与えられる大きい解を用いることができ、それゆえ、「汚染」は起こらないはずである。表1に、数値計算で得られた接続データ Δ' と Γ' 、および、誤差を示す(メッシュ点数 $M = 4001$)。また、表2はそのときのすべての接続データ A' 、 Δ' 、 B' および Γ' を示している。この例では、特異点は $x_0 = 0.25$ にあり、 $g = 0.1$ である。したがって、Suydam-Mercier index μ 、大きい解および小さい解に対する指数 $\alpha(b)$ 、 $\alpha(s)$ は、それぞれ

$$\mu = 0.591608, \quad \alpha(b) = -1.091608, \quad \alpha(s) = 0.091608$$

となる。表1、2は接続データが高精度で得られていること、また、相反関係式

$$A' = \Delta', \quad B' = \Gamma'$$

が数値的に成立していることを表している。なお、対称条件

$$\Delta'(x_0) = \Delta'(1 - x_0), \quad \Gamma'(x_0) = -\Gamma'(1 - x_0)$$

が成立することも確認した。

図4に Δ' 、 Γ' の収束曲線を示す。横軸は $1/(M-1)^2$ である。接続データは、メッシュの分布を集中させた場合($\gamma = 2$)のほうが一様分布($\gamma = 1$)の場合よりもより逆二乗収束性を示しており(Γ' の収束にこのことが強調されて現れている)、また、精度も高い(表1参照)。これは条件(109)に一致している。式(110)における k の値が $k = 4$ のとき、 $k = 2$ のときにくらべて接続データの精度が若干落ちていく。これは図1,2に見られるように、 $k = 4$ の場合では dH/dx 、 d^2H/dx^2 が短い区間で大きく変動しているためと考えられる。

8.2 Example-2a

Example-2 で $g_0 = 0.5$, $g_2 = 1.0$ のときの接続データ Δ' と Γ' の収束曲線を図 5 ($k = 2$) および図 6 ($k = 4$) に示す。厳密値は

$$\Delta' = -15.462192, \Gamma' = 8.9956641$$

である ($x_0 = 0.25, \gamma = 2$)。各図で $NFrob$ は Bessel 関数 $I_\nu(x)$ の級数展開式 (34) に現れる $(x/2)^{2n}$ のべきを表す (すなわち、 $NFrob = 2n$)。この場合

$$\mu = 0.866025, \alpha(b) = -1.366025, \alpha(s) = 0.366025$$

である。したがって、不等式 $\alpha(b) < \alpha(s) < \alpha(s) + 2$ が成立するので、大きい解に対する Frobenius 展開は第 1 項 ($NFrob = 0$) で打ち切れるはずである。しかるに $NFrob = 0$ のとき、 Δ' (図 5.a, 図 6.a) も Γ' (図 5.c, 図 6.c) も厳密値とは大きく異なる値に収束している。一方、図 5.b, d および図 6.b, d から分かるように、Frobenius 展開を第 2 項 ($NFrob = 2$) および第 3 項 ($NFrob = 4$) まで取ると、接続データの収束値の真の値からの誤差は大幅に改善される (特に Δ' に対して改善の度合いが著しい)。その場合でも、 $NFrob = 4$ の場合の方が $NFrob = 2$ の場合よりも厳密値により近い値に収束する。また、各 $NFrob$ の値に対して接続データは逆二乗収束性を示しており、さらに、 $NFrob = 2$ と $NFrob = 4$ のときの収束曲線はほぼ平行になっている。表 3 に大きい解の Frobenius 展開の項数に対する接続データの依存性をまとめる ($M = 4001$)。

8.3 Example-2b

図 7 は Example-2 で $g_0 = 1.0$, $g_2 = 1.0$ のときの Δ' と Γ' の収束曲線を示している ($x_0 = 0.25, k = 2$)。それらの厳密値は

$$\Delta' = -18.574752, \Gamma' = 19.603761$$

である。この場合

$$\mu = 1.118034, \alpha(b) = -1.618034, \alpha(s) = 0.618034 \quad (112)$$

であるので不等式 $\alpha(b) + 2 < \alpha(s) < \alpha(b) + 4$ が成立する。しかし、接続データの様子は Example-2a の場合と同様である。 $k = 4$ のときも特に変化はない。各 $NFrob$ の値に対して得られた接続データを表 4 に示す ($k = 4$ の場合も含む)。理論によれば大きい解に対して第 2 項までの Frobenius 展開で十分のはずであるが、前の例とおなじく接続データは展開の項数に強く依存する。ただ、前の例と比較して約 2 倍近く誤差が大きい。

9. 結 論

以上の数値実験から以下の結論を得る。

1. この報告書で述べた変分原理と合接にもとづく有限要素法は外部接続データを高精度に求める有力な数値計算法である。
2. メッシュの分布を条件 (109) に従って適切に集中することにより接続データはメッシュ数に対して逆二乗収束する。
3. 接続データは大きい解に対する Frobenius 展開の項数に強く依存することが示された。そして、項数を低次 (例えば第 1 項) で打ち切ると接続データは偽の値に収束する。しかし、十分な項数を取ると接続データは高い精度で真の値に収束する。

8.2 Example-2a

Example-2で $g_0 = 0.5$, $g_2 = 1.0$ のときの接続データ Δ' と Γ' の収束曲線を図 5 ($k = 2$) および図 6 ($k = 4$) に示す。厳密値は

$$\Delta' = -15.462192, \Gamma' = 8.9956641$$

である ($x_0 = 0.25, \gamma = 2$)。各図で $NFrob$ は Bessel 関数 $I_\nu(x)$ の級数展開式 (34) に現れる $(x/2)^{2n}$ のべきを表す (すなわち, $NFrob = 2n$)。この場合

$$\mu = 0.866025, \alpha(b) = -1.366025, \alpha(s) = 0.366025$$

である。したがって、不等式 $\alpha(b) < \alpha(s) < \alpha(s) + 2$ が成立するので、大きい解に対する Frobenius 展開は第 1 項 ($NFrob = 0$) で打ち切れるはずである。しかるに $NFrob = 0$ のとき、 Δ' (図 5.a, 図 6.a) も Γ' (図 5.c, 図 6.c) も厳密値とは大きく異なる値に収束している。一方、図 5.b, d および図 6.b, d から分かるように、Frobenius 展開を第 2 項 ($NFrob = 2$) および第 3 項 ($NFrob = 4$) まで取ると、接続データの収束値の真の値からの誤差は大幅に改善される (特に Δ' に対して改善の度合いが著しい)。その場合でも、 $NFrob = 4$ の場合の方が $NFrob = 2$ の場合よりも厳密値により近い値に収束する。また、各 $NFrob$ の値に対して接続データは逆二乗収束性を示しており、さらに、 $NFrob = 2$ と $NFrob = 4$ のときの収束曲線はほぼ平行になっている。表 3 に大きい解の Frobenius 展開の項数に対する接続データの依存性をまとめる ($M = 4001$)。

8.3 Example-2b

図 7 は Example-2 で $g_0 = 1.0$, $g_2 = 1.0$ のときの Δ' と Γ' の収束曲線を示している ($x_0 = 0.25, k = 2$)。それらの厳密値は

$$\Delta' = -18.574752, \Gamma' = 19.603761$$

である。この場合

$$\mu = 1.118034, \alpha(b) = -1.618034, \alpha(s) = 0.618034 \quad (112)$$

であるので不等式 $\alpha(b) + 2 < \alpha(s) < \alpha(b) + 4$ が成立する。しかし、接続データの様子は Example-2a の場合と同様である。 $k = 4$ のときも特に変化はない。各 $NFrob$ の値に対して得られた接続データを表 4 に示す ($k = 4$ の場合も含む)。理論によれば大きい解に対して第 2 項までの Frobenius 展開で十分のはずであるが、前の例とおなじく接続データは展開の項数に強く依存する。ただ、前の例と比較して約 2 倍近く誤差が大きい。

9. 結 論

以上の数値実験から以下の結論を得る。

1. この報告書で述べた変分原理と合接にもとづく有限要素法は外部接続データを高精度に求める有力な数値計算法である。
2. メッシュの分布を条件 (109) に従って適切に集中することにより接続データはメッシュ数に対して逆二乗収束する。
3. 接続データは大きい解に対する Frobenius 展開の項数に強く依存することが示された。そして、項数を低次 (例えば第 1 項) で打ち切ると接続データは偽の値に収束する。しかし、十分な項数を取ると接続データは高い精度で真の値に収束する。

接続データが Frobenius 展開の項数に依存する原因 (項数に対する接続データの収束率も含めて) についての検討、および、2次元トロイダル配位での有限要素法による接続データの数值計算法の定式化については、引き続き報告する予定である。また、現在、基本的な内部層方程式である GGJ 方程式の数值計算コードを開発中である。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、終始激励していただきました竹田辰興プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

接続データが Frobenius 展開の項数に依存する原因 (項数に対する接続データの収束率も含めて) についての検討、および、2次元トロイダル配位での有限要素法による接続データの数值計算法の定式化については、引き続き報告する予定である。また、現在、基本的な内部層方程式である GGJ 方程式の数值計算コードを開発中である。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、終始激励していただきました竹田辰興プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

参 考 文 献

- [1] Ara, G., Basu, B., Coppi, B., Laval G., Rosenbluth, M.N., and Waddell B.V., Magnetic Reconnection and $m = 1$ Oscillations in Current Carrying Plasmas, *Annals of Physics*, **112** (1978), 443-476.
- [2] Bender, C.M., and Orszag, S.A., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [3] Bussac, M.N., Edery, D., Pellat, R., and Soule, J.L., Stabilization of the Linear Drift Tearing Mode by Coupling with the Ion Sound Wave, *Phys. Rev. Lett.*, **40** (1978), 1500-1503.
- [4] Carrera, R., Hazeltine, R.D., and Kotschenreuther, M., Island Bootstrap Current Modification of the Nonlinear Dynamics of the Tearing Mode, *Phys. Fluids*, **29** (1986), 899-902.
- [5] Cary, J.R., and Kotschenreuther, M., Pressure Induced Islands in Three-dimensional Toroidal Plasma, *Phys. Fluids*, **28** (1985), 1392-1401.
- [6] Connor, J.W., Hastie, R.J., and Martin, T.J., The Stability of Resistive Ballooning Modes in a High Temperature Plasma, *Plasma Phys. and Controlled Fusion*, **27** (1985), 1509-1524.
- [7] Connor, J.W., and Chen, L., Resistive Ballooning Modes in Axisymmetric Toroidal Plasma with Long Mean Free Path, *Phys. Fluids*, **28** (1985), 2201-2208.
- [8] Connor, J.W., Cowley S.C., Hastie, R.J., Hender, T.C., Hood, A., and Martin, T.J., Tearing Modes in Toroidal Geometry, *Phys. Fluids*, **31** (1988), 577-590.
- [9] Coppi, B., Greene, J.M., and Jhonson J.L., Resistive Instabilities in a Diffuse Linear Pinch, *Nuclear Fusion*, **6** (1966), 101-117.
- [10] Dewar, R.L., and Pletzer, A., Two-dimensional Generalizations of the Newcomb Equation, *J. Plasma Phys.*, **43** (1990), 291-310.
- [11] Drake, J.F., and Lee, Y.C., Kinetic Theory of Tearing Instabilities, *Phys. Fluids*, **20** (1977), 1341-1353.
- [12] Drake, J.F., Antonsen, Jr., T.M., Hassam, A.B., and Gladd, N.T., Stabilization of the Tearing Mode in High-temperature Plasma, *Phys. Fluids*, **26** (1983), 2509-2528.
- [13] Drake, J.F., and Antonsen, Jr., T.M., Analytic Theory of Resistive Ballooning Modes, *Phys. Fluids*, **28** (1985), 544-553.
- [14] Finn, J.M., Manheimer, W. M., and Antonsen, Jr., T.M., Drift-resistive Interchange and Tearing Modes in Cylindrical Geometry, *Phys. Fluid*, **26** (1983), 962-973.
- [15] Finn, J.M., and Drake, J.F., Magnetic Curvature-drift Instability, *Phys. Rev. Lett.*, **53** (1984), 2308-2311.
- [16] Finn, J.M., and Drake, J.F., Magnetic Curvature Drift Instability, *Phys. Fluids*, **29** (1986), 3672-3683.

- [17] Friedman, B., Principles and Techniques of Applied Mathematics, John Wiley, 1956.
- [18] Furth, H.P., Killeen, J., and Rosenbluth, M.N., Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch, *Phys. Fluids*, **6** (1963), 459-484.
- [19] Galeev, A.A., Spontaneous Reconnection of Magnetic Field Lines in a Collisionless Plasma, in *Basic Plasma Physics II*, edited by Galeev, A.A., and Sudan, R.N., North-Holland Physics Publishing, Amsterdam, 1984, 305-335.
- [20] Glasser, A.H., Greene, J.M., and Jhonson, J.L., Resistive Instabilities in General Toroidal Configurations, *Phys. Fluids*, **18** (1975), 875-888.
- [21] Glasser, A.H., Greene, J.M., and Jhonson J.L., Resistive Instabilities in a Tokamak, *Phys. Fluids*, **19** (1976), 567-574.
- [22] Glasser, A.H., Jardin, S.C. and Tesauro G., Numerical Solution of the Resistive Magnetohydrodynamic Boundary Layer Equations, *Phys. Fluids*, **27** (1984), 1225-1242.
- [23] Greene, J.M., Introduction to Resistive Instabilities, Lausanne Report, LRP114/76, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne, 1976.
- [24] Grimm, R.C., Dewar, R.L., Manickam, J., Jardin, S.C., Glasser, A.H., and Chance, M.S., Resistive Instabilities in Tokamak Geometry, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1982*, Proceedings of the 9th International Conference, Baltimore (IAEA, Vienna, 1983), Vol.3, 35-47.
- [25] Hahm, T.S., and Chen, L., Theory of Semicollisional Drift-interchange Modes in Cylindrical Plasma, *Phys. Fluids*, **28** (1985), 2432-2438.
- [26] Hahm, T.S., and Chen, L., Semicollisional Drift-tearing Modes in Toroidal Plasmas, *Phys. Fluids*, **29** (1986), 1891-1899.
- [27] Hahm, T.S., Neoclassical Tearing Modes in a Tokamak, *Phys. Fluids*, **31** (1988), 3709-3712.
- [28] Hegna, C.C., and Bhattacharjee, A., Magnetic Island Formation in Three-dimensional Plasma Equilibria, *Phys. Fluids B*, **1** (1989), 392-397.
- [29] Hegna, C.C., and Bhattacharjee, A., Suppression of Magnetic Islands by Energetic Ions in Toroidal Plasmas, *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989), 2056-2059.
- [30] Hegna, C.C., and Bhattacharjee, A., Suppression of Magnetic Islands by Energetic Ions in Toroidal Plasmas, *Phys. Fluids B*, **2** (1990), 1804-1814.
- [31] Hegna, C.C., and Callen, J.D., Interaction of Bootstrap-Current Driven Magnetic Islands, *Phys. Fluids B*, **4** (1992), 1855-1866.
- [32] Jhonson J.L., and Greene, J.M., Resistive Interchanges and the Negative V² Criterion, *Plasma Phys.*, **9** (1967), 611-629.
- [33] Kadomtsev, B.B., and Pogutse, O.P., Turbulence in Toroidal Systems, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by Leontovich, M.A., Consultant Bureau, New York, 1970, Vol. 5, 249-400.
- [34] Kim, J. Y., Cho, G. S., and Choi, D. I., Numerical Study of Drift-resistive Modes in General Toroidal Geometry, *Phys. Fluids*, **31** (1988), 2659-2669.

- [35] Kim, J. Y., and Choi, D. I., Numerical Study of Resistive Magnetohydrodynamic Modes in High-temperature Plasma of General Toroidal Geometry, *Phys. Fluids B*, **1** (1989), 1026-1033.
- [36] Kotschenreuther, M., Hazeltine, R.D., and Morrison, P.J., Nonlinear Dynamics of Magnetic Islands with Curvature and Pressure, *Phys. Fluids*, **28** (1985), 294-302.
- [37] Morse, P.M., and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [38] Newcomb, W.A., Hydromagnetic Stability of a Diffuse Linear Pinch, *Annals of Phys.*, **10** (1960), 232-267.
- [39] Pletzer, A., and Dewar, R.L., Non-ideal Stability: Variational Method for the Determination of the Outer-region Matching Data, *J. Plasma Phys.*, **45** (1991), 427-451.
- [40] Rutherford, P.H., Nonlinear Growth of the Tearing Mode, *Phys. Fluids*, **16** (1973), 1903-1908.
- [41] Scott, B.D., and Hassam, A.B., Analytical Theory of Nonlinear Drift-tearing Mode Stability, *Phys. Fluids*, **30** (1987), 90-101.
- [42] Shaing, K.C., and Callen, J.D., Kinetic Approach to a Pressure-gradient-driven Tokamak Resistive Instability in the Banana Regime, *Phys. Fluids*, **28** (1985), 1859-1865.
- [43] Smolyakov, A.I., Drift Magnetic Islands in Tokamak, *Sov. J. Plasma Phys.*, **15** (1989), 667-670.
- [44] Sundaram, A.K., Sen, A, and Kaw, P.K., Stabilization of Resistive Ballooning Modes in High-temperature Plasmas, *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984), 1617-1620.
- [45] White, R.B., and Monticello, D.A., Saturation of the Tearing Mode, *Phys. Fluids*, **20** (1977), 800-805.
- [46] Yang, J.G., Oh, Y.H., Choi, D.I., Kim, J.Y., and Horton, W., Neoclassical Viscosity Effects on Resistive Magnetohydrodynamic Modes in Toroidal Geometry, *Phys. Fluids B*, **4** (1992), 659-671.
- [47] Zakharov, L.E., Smolyakov, A.I., and Subbotin, A.A., Quasilinear Saturation of Magnetic Islands and Bifurcations of Equilibria in a Finite- β plasma, *Sov. J. Plasma Phys.*, **16** (1990), 451-453.

表1 Example-1 ($g = 0.1$) について数値計算から得られた接続データ Δ' と Γ' および誤差 (メッシュ点数 $M = 4001$)

$$x_0 = 0.25, \mu = 0.591608, \alpha(b) = -1.091608, \alpha(s) = 0.091608$$

$$\Delta'(exact) = A'(exact) = -6.5621377$$

$$\Gamma'(exact) = B'(exact) = 3.7511464$$

(γ, k)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 4)	(2, 4)
Δ'	-6.5623946	-6.5622283	-6.5626356	-6.5625239
Error (%)	3.914e-3	1.380e-3	7.587e-3	5.884e-3
Γ'	3.7512555	3.7511448	3.7512555	3.7511448
Error (%)	2.907e-3	-4.425e-5	2.907e-3	-4.435e-5

表2 Example-1 ($g = 0.1$) について数値計算から得られた接続データ A' , B' , Δ' , および Γ'

(γ, k)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 4)	(2, 4)
A'	-6.5622840	-6.5622283	-6.5625250	-6.5625239
Δ'	-6.5623946	-6.5622283	-6.5626356	-6.5625239
B'	3.7512555	3.7511448	3.7512555	3.7511448
Γ'	3.7512555	3.7511448	3.7512555	3.7511448

表3 大きい解の Frobenius 展開の項数に対する接続データの依存性。

Example-2 ($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) $\mu = 0.866025, \alpha(b) = -1.366025, \alpha(s) = 0.366025$ $\Delta'(exact) = -15.462192, \Gamma'(exact) = 8.9956641$ $k = 2$

No. of terms	Δ' (numerical)	error (%)
1	-13.057946	-15.55
2	-15.453709	-5.487e-2
3	-15.462364	1.113e-3

 $k = 4$

No. of terms	Δ' (numerical)	error (%)
1	-13.014506	-15.83
2	-15.452720	- 6.126e-2
3	-15.462958	4.956e-3

 $k = 2$

No. of terms	Γ' (numerical)	error (%)
1	9.0756705	0.8894
2	8.9970160	1.503e-2
3	8.9956617	-2.664e-5

 $k = 4$

No. of terms	Γ' (numerical)	error (%)
1	9.1043392	1.208
2	8.9979060	2.492e-2
3	8.9956635	-6.884e-6

表4 大きい解の Frobenius 展開の項数に対する接続データの依存性。

Example-2 ($g_0 = 1.0, g_2 = 1.0$) $\mu = 1.118034, \alpha(b) = -1.618034, \alpha(s) = 0.618034$ $\Delta'(exact) = -18.574752, \Gamma'(exact) = 19.603761$ $k = 2$

No. of terms	Δ' (numerical)	error (%)
1	-24.834267	33.70
2	-18.604629	0.1608
3	-18.575155	2.169e-3

 $k = 4$

No. of terms	Δ' (numerical)	error (%)
1	-24.713890	33.05
2	-18.610731	0.1937
3	-18.576066	7.073e-3

 $k = 2$

No. of terms	Γ' (numerical)	error (%)
1	19.738726	0.6885
2	19.601154	-1.330e-2
3	19.603747	-7.415e-5

 $k = 4$

No. of terms	Γ' (numerical)	error (%)
1	19.787050	0.9350
2	19.599449	-2.200e-2
3	19.603742	-9.833e-5

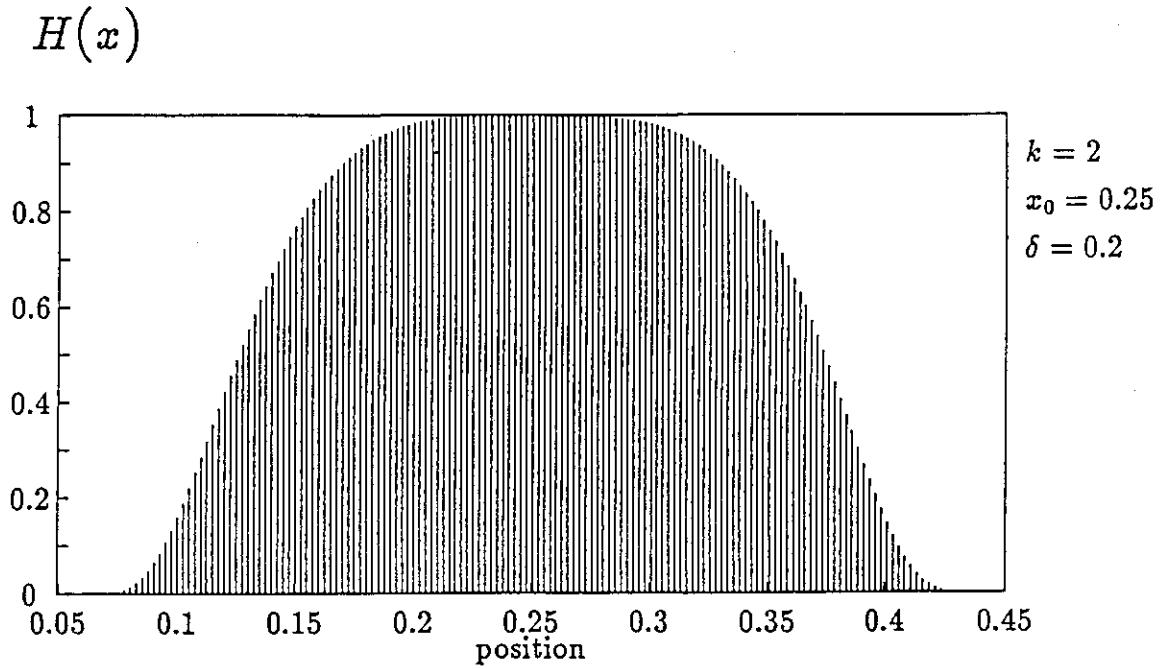


図1 $k = 2$ のときの関数 $H(x)$

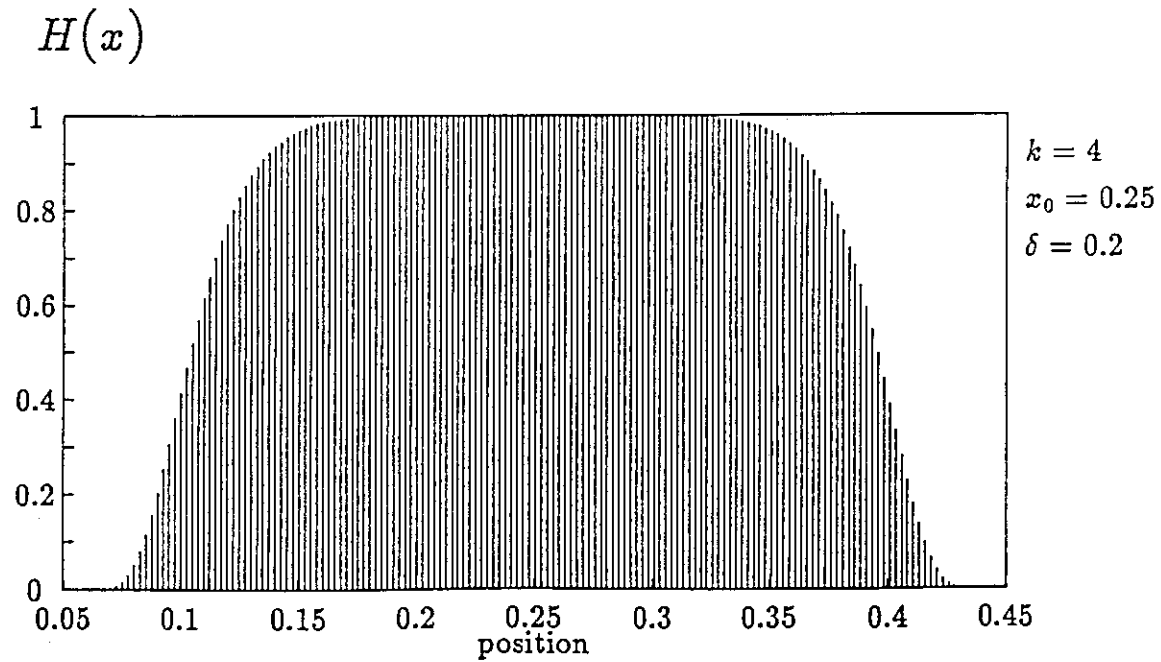


図2 $k = 4$ のときの関数 $H(x)$

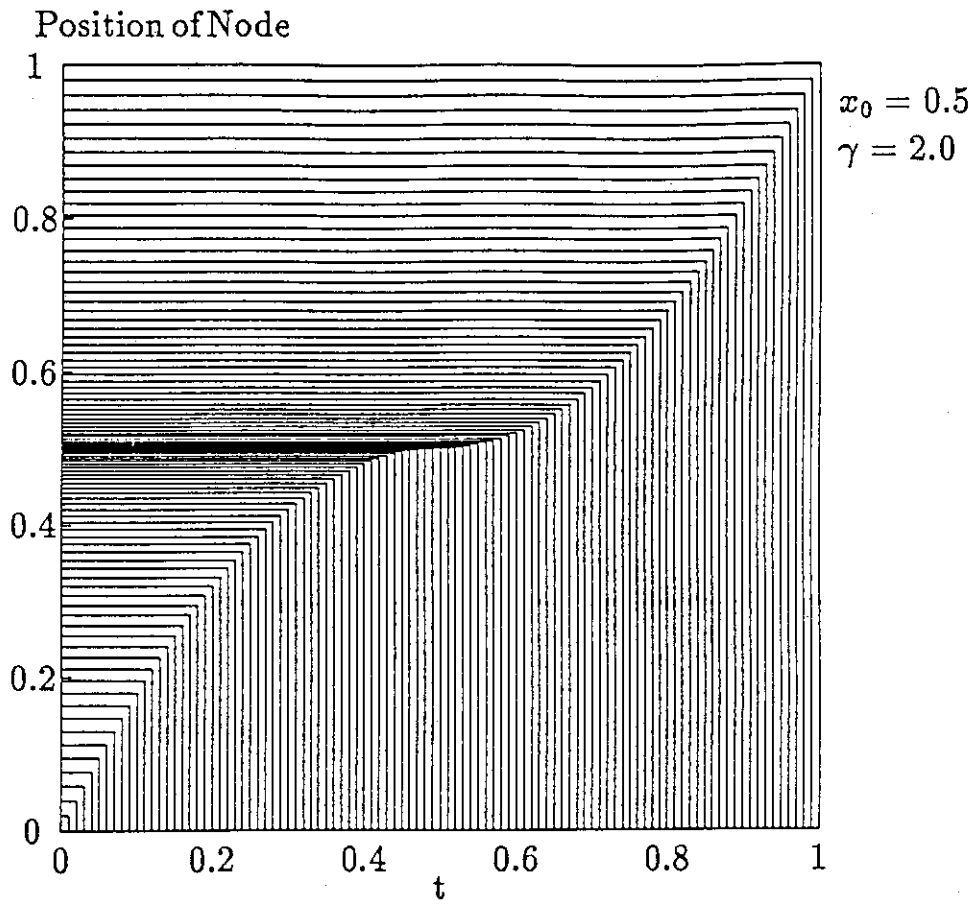


図3 メッシュ生成関数 $F(t)$

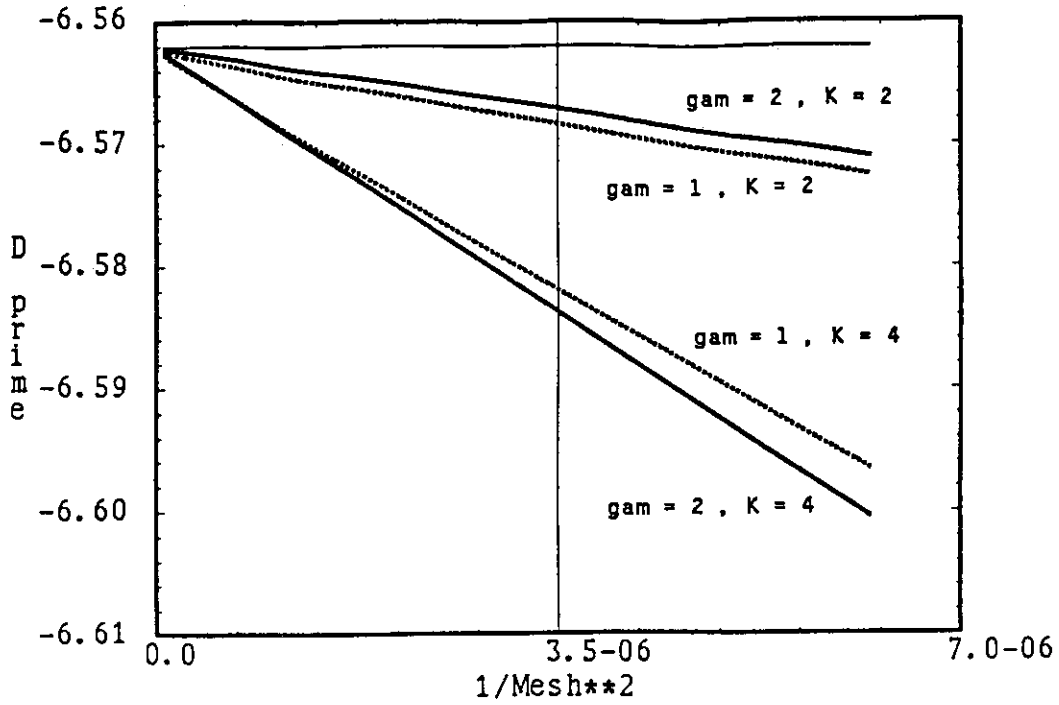


図4.a Example-1 のときの接続データ Δ' の収束曲線

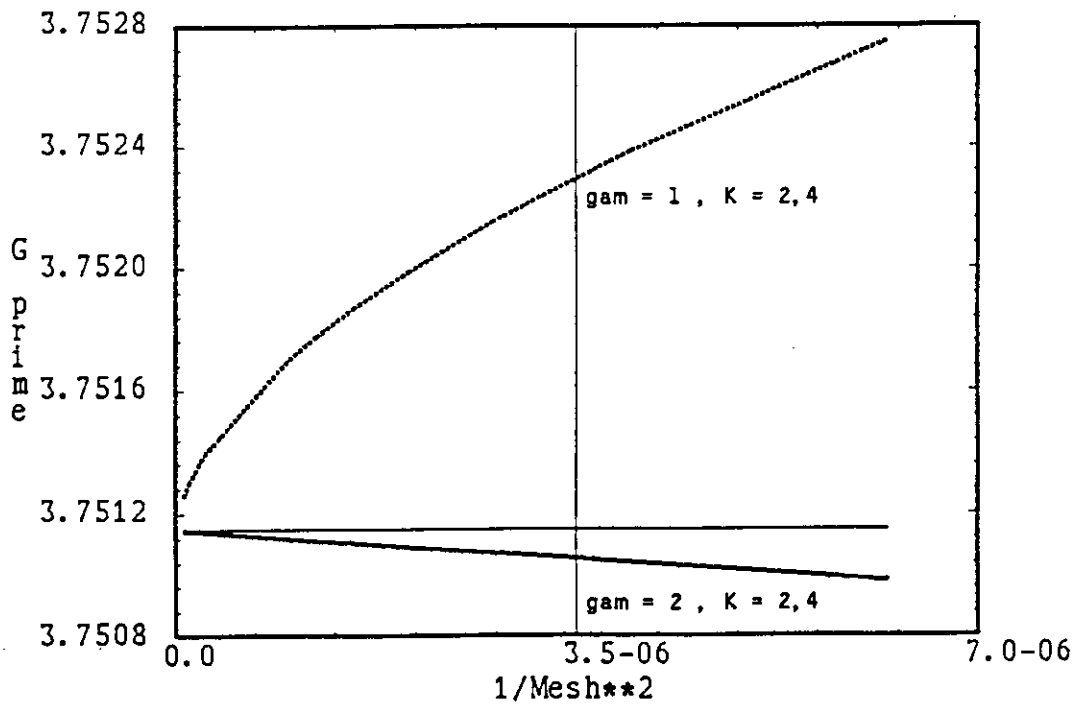


図4.b Example-1 のときの接続データ Γ' の収束曲線

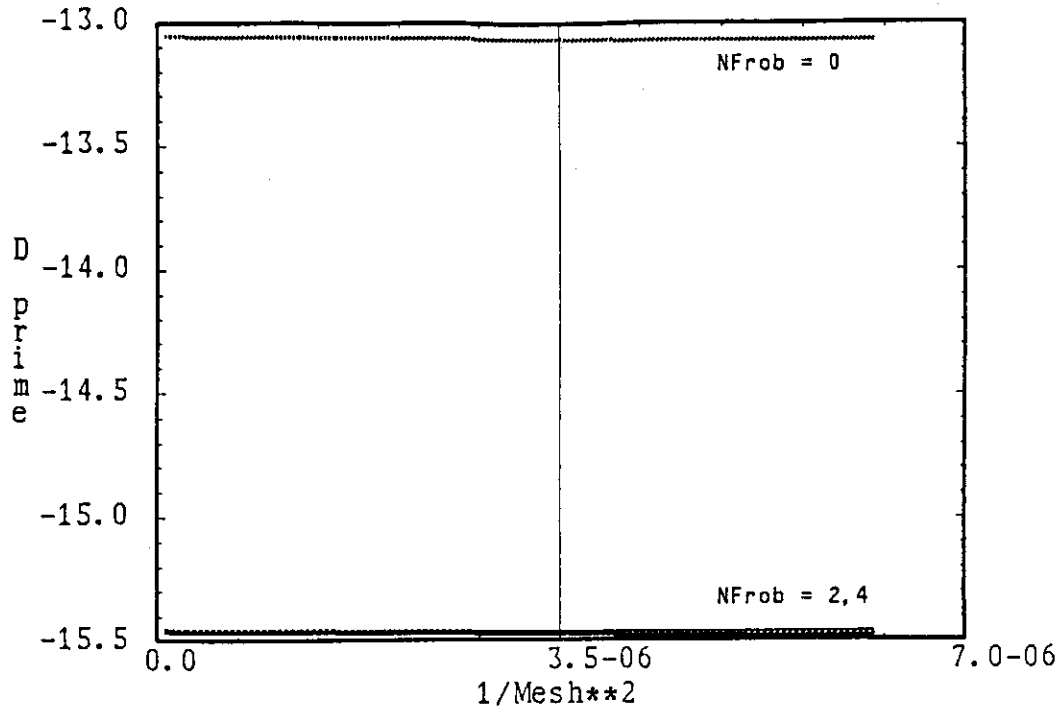


図5.a Example-2($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Δ' の収束曲線
 $k = 2, NFrob = 0, 2, 4$

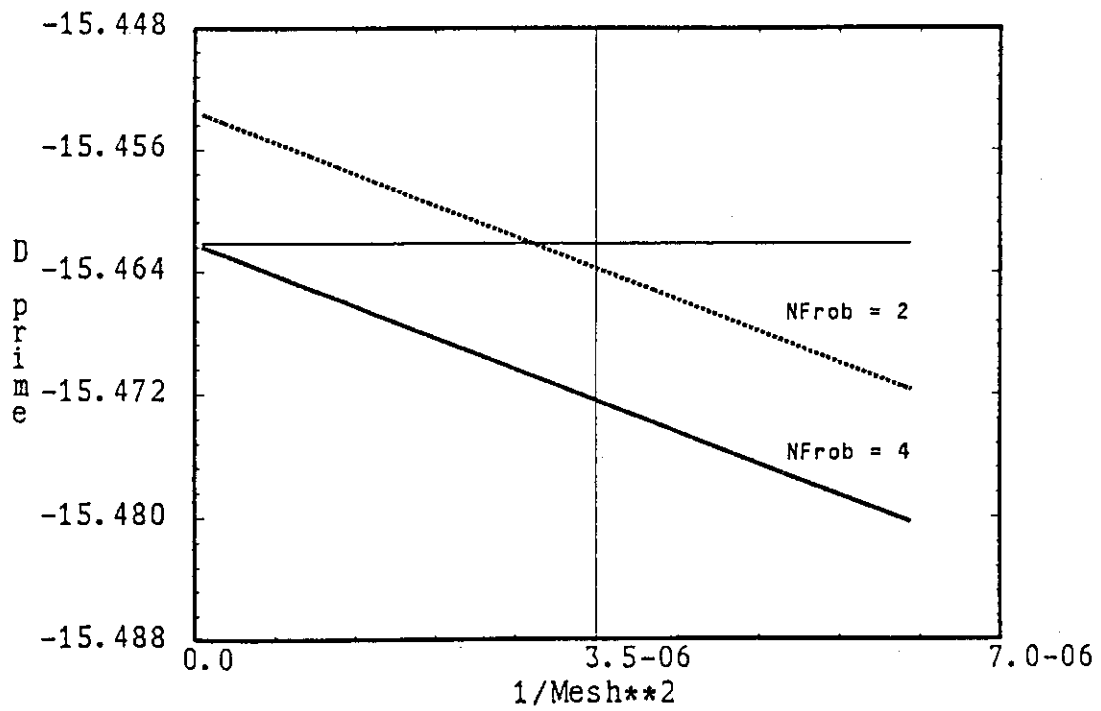


図5.b Example-2($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Δ' の収束曲線
 $k = 2, NFrob = 2, 4$

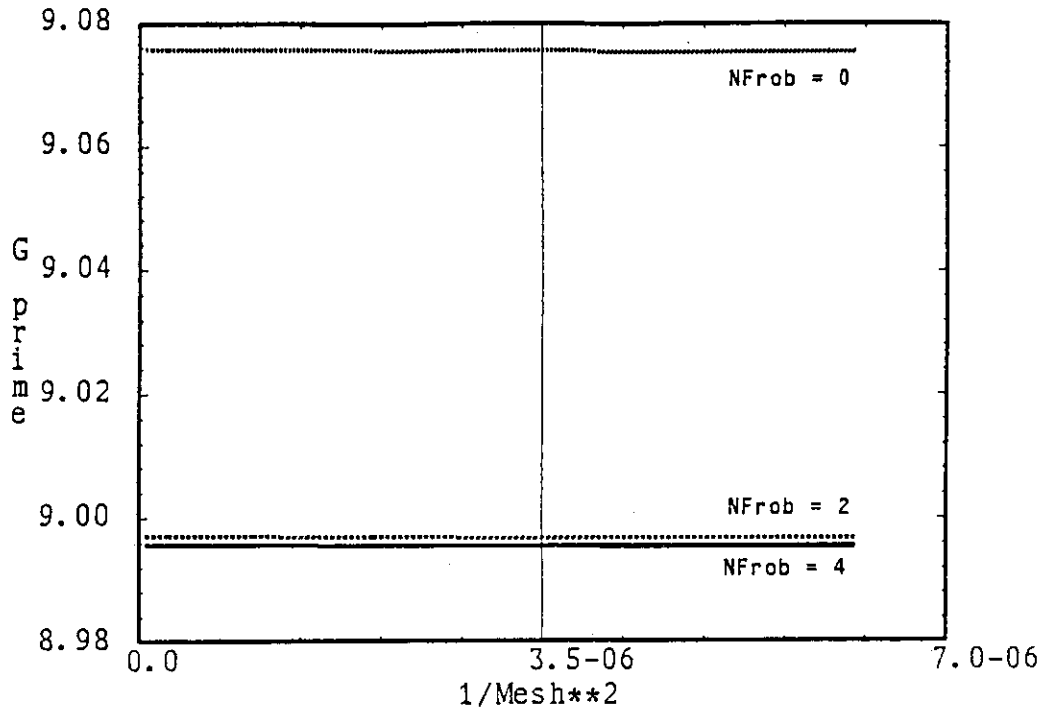


図5.c Example-2($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Γ' の収束曲線
 $k = 2, NFrob = 0, 2, 4$

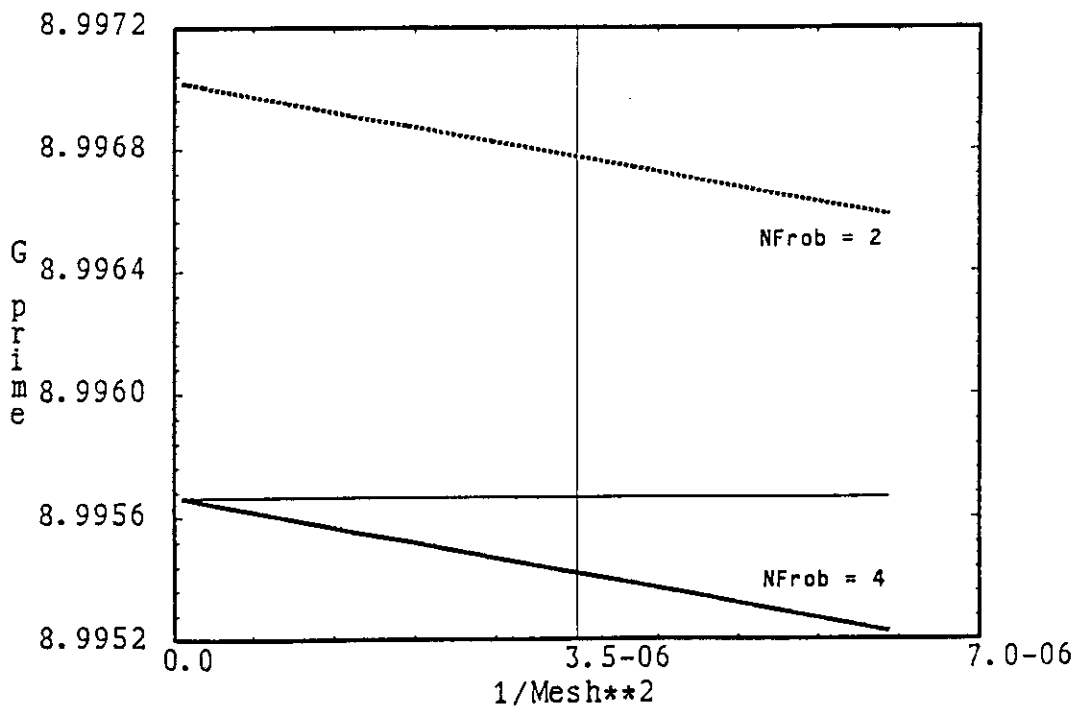


図5.d Example-2($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Γ' の収束曲線
 $k = 2, NFrob = 2, 4$

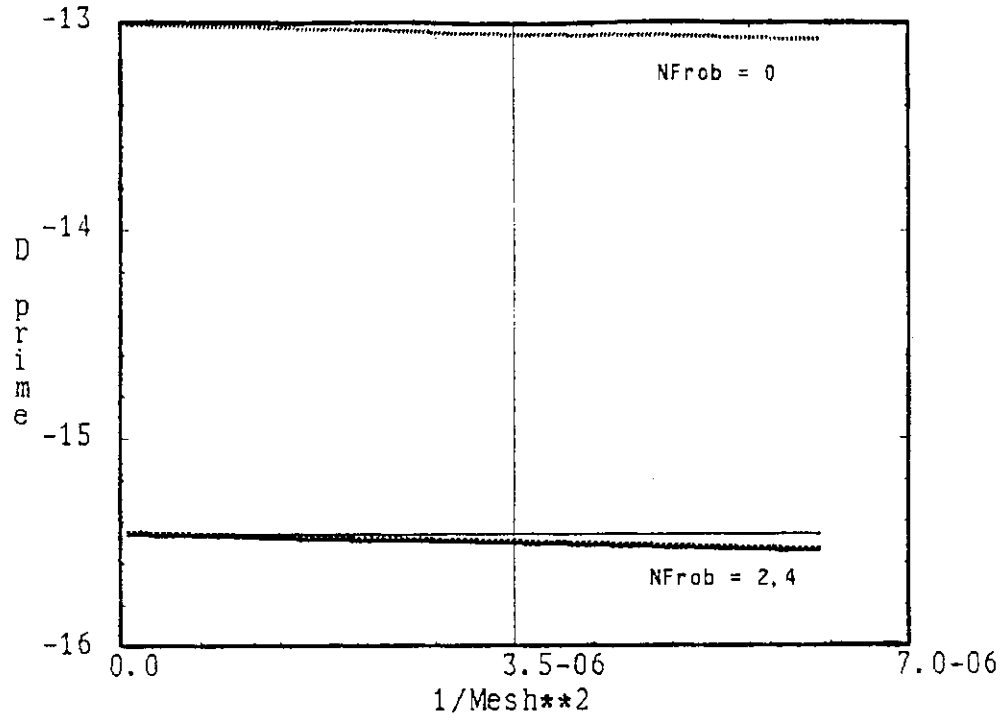


図6.a Example-2($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Δ' の収束曲線
 $k = 4, NFrob = 0, 2, 4$

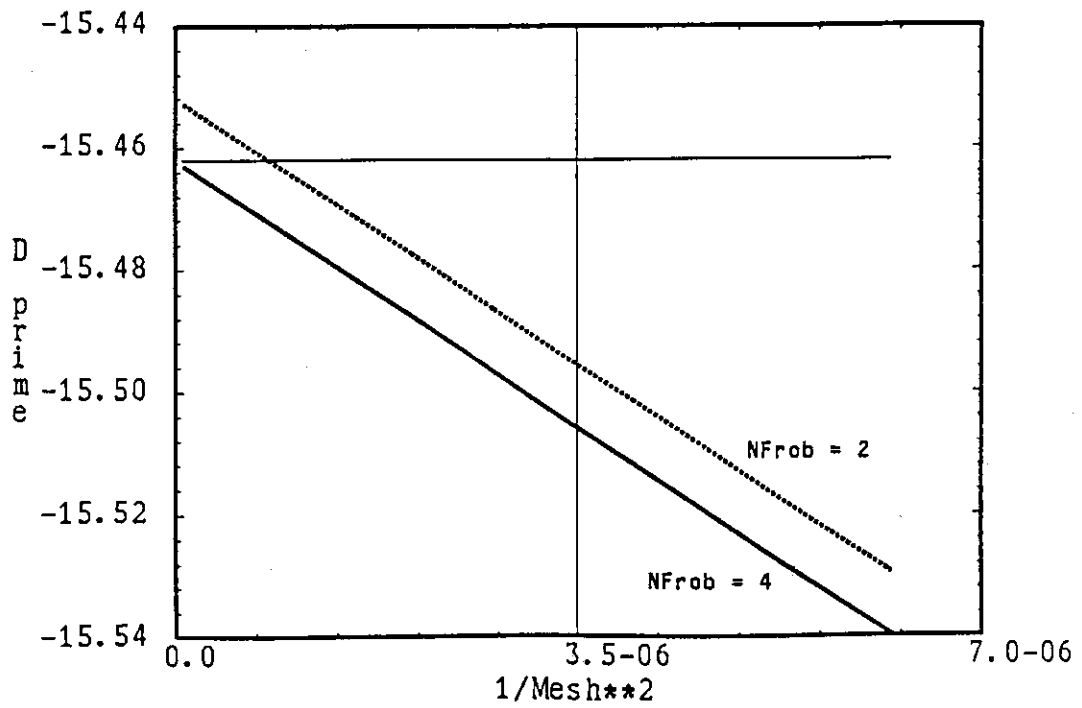


図6.b Example-2($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Δ' の収束曲線
 $k = 4, NFrob = 2, 4$

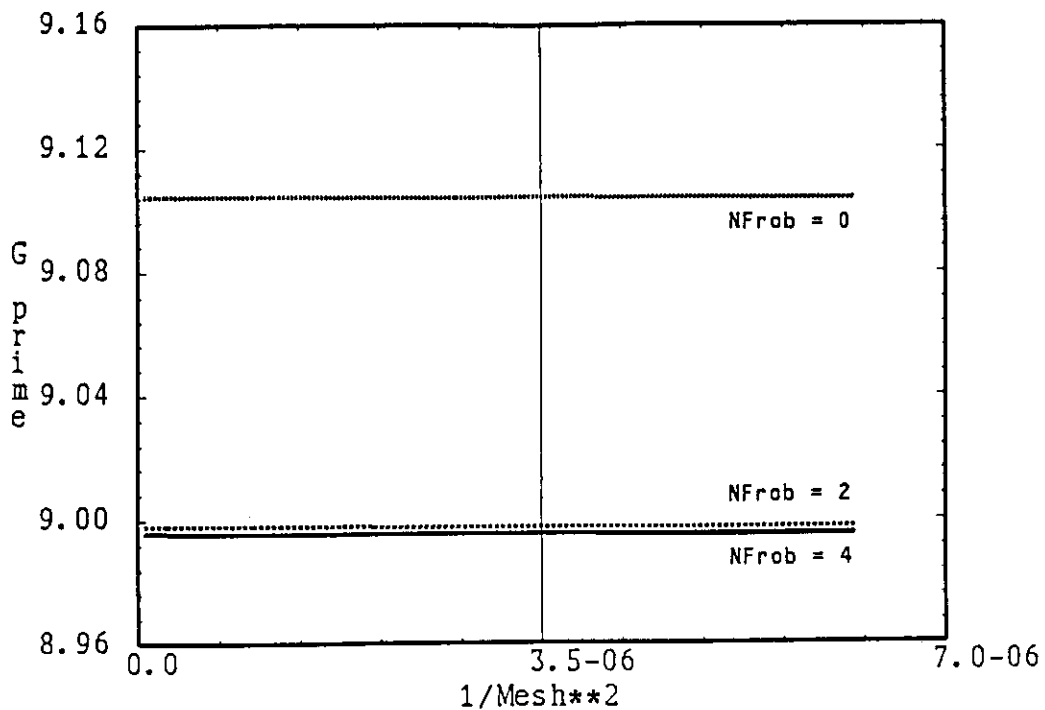


図6.c Example-2($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Γ' の収束曲線
 $k = 4, N_{\text{Frob}} = 0, 2, 4$

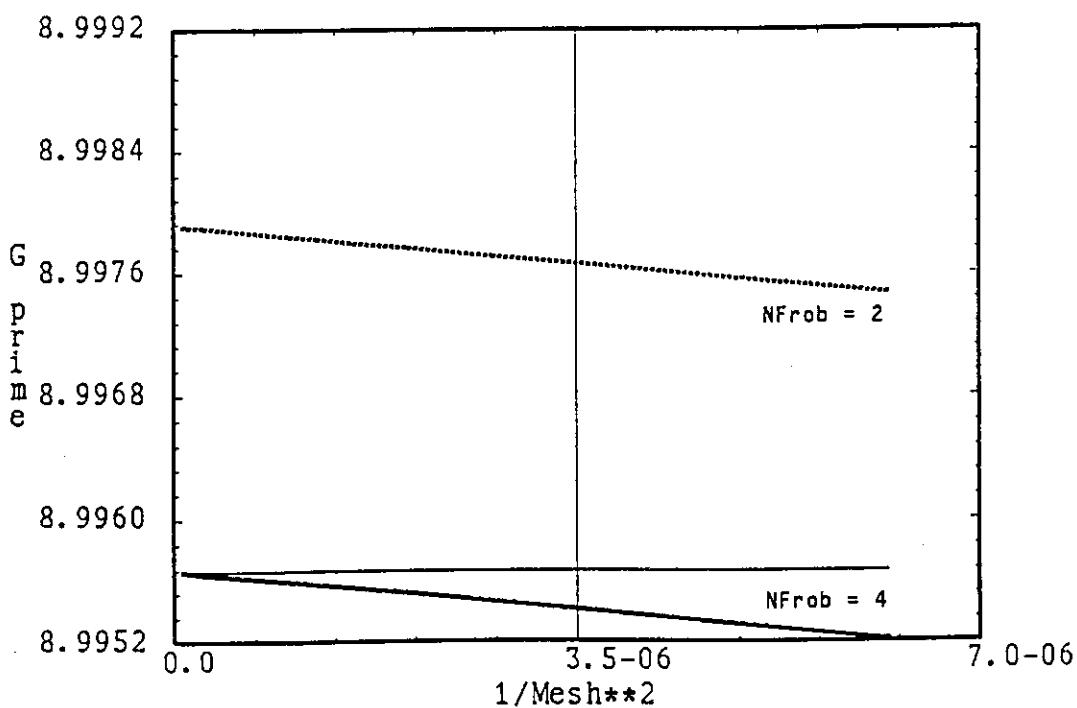


図6.d Example-2($g_0 = 0.5, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Γ' の収束曲線
 $k = 4, N_{\text{Frob}} = 2, 4$

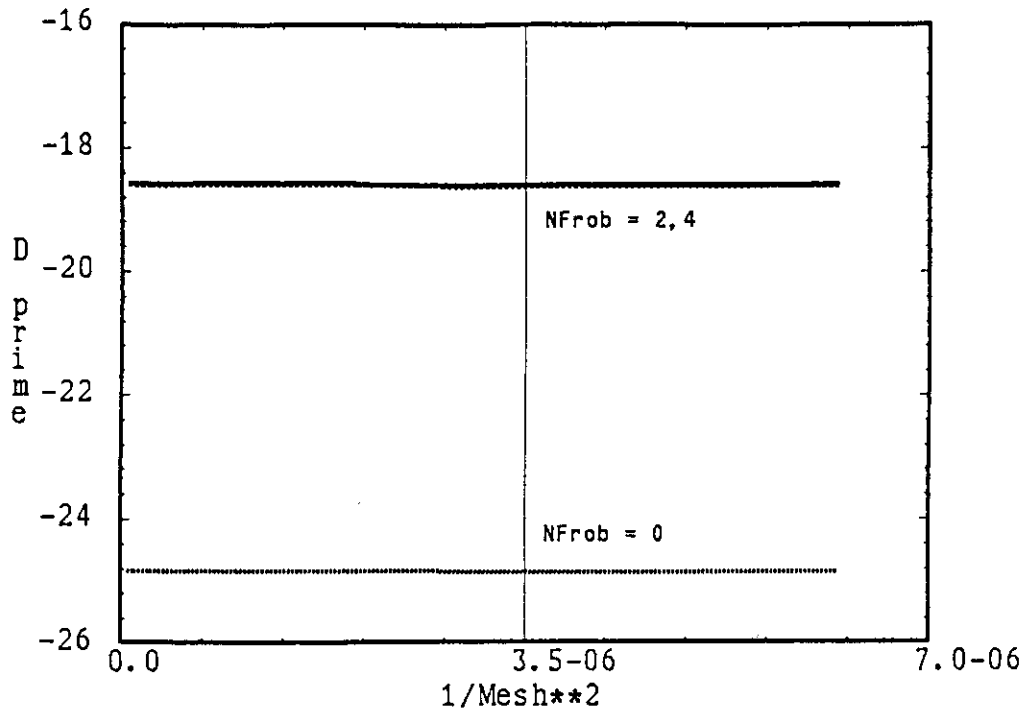


図7.a Example-2($g_0 = 1.0, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Δ' の収束曲線
 $k = 2, N_{\text{Frob}} = 0, 2, 4$

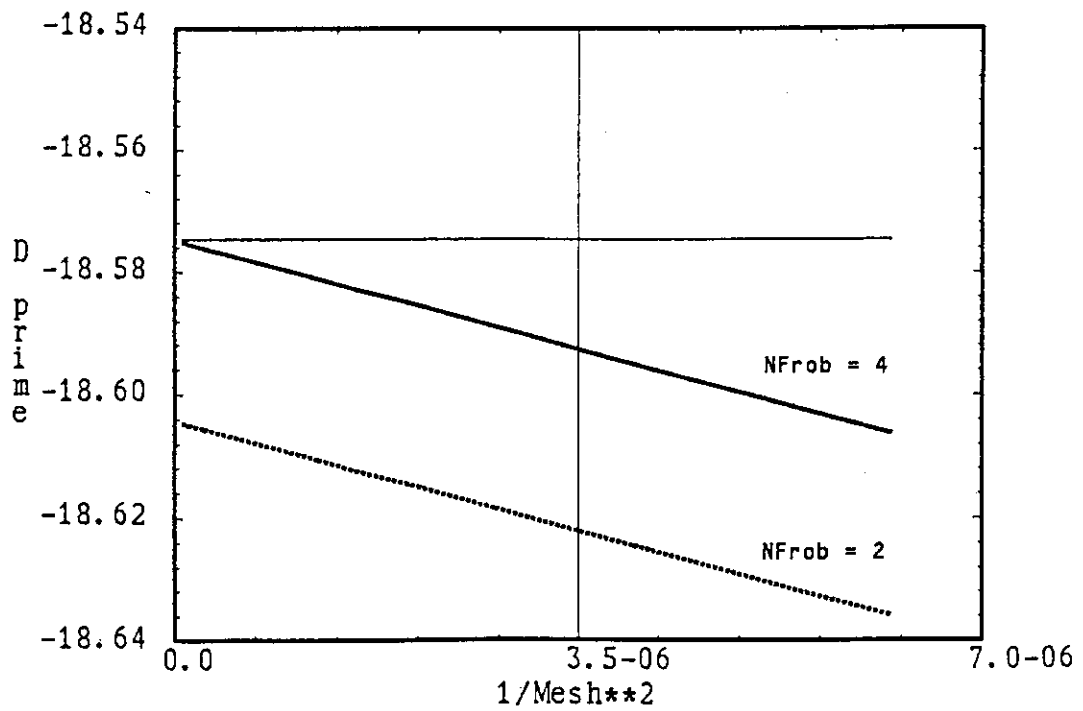


図7.b Example-2($g_0 = 1.0, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Δ' の収束曲線
 $k = 2, N_{\text{Frob}} = 2, 4$

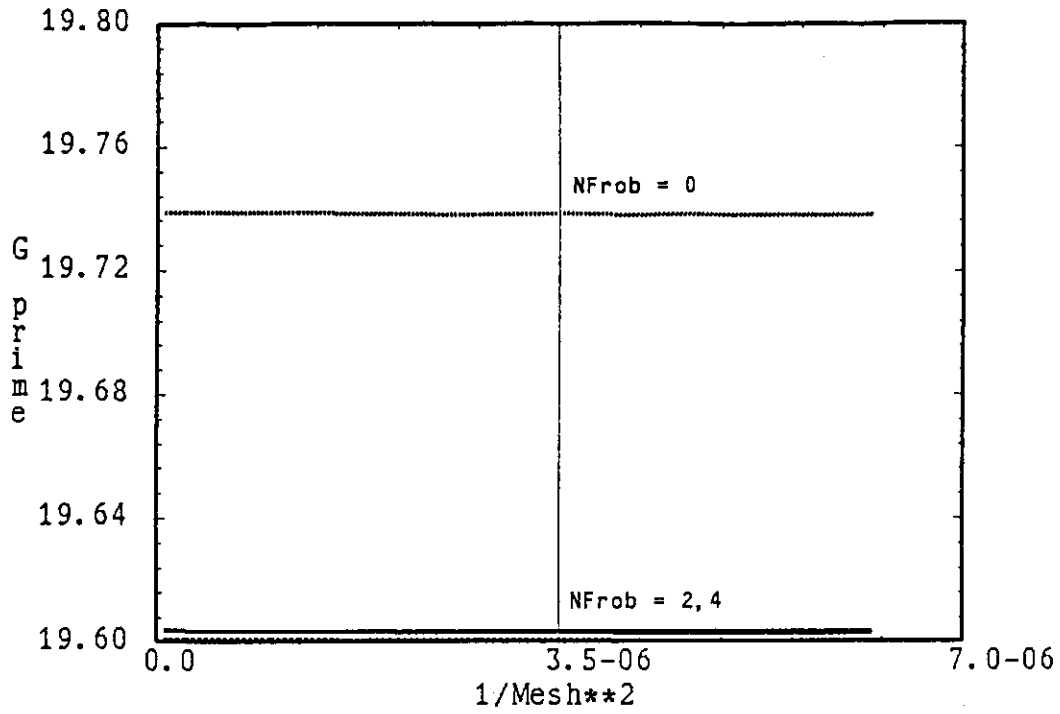


図 7.c Example-2($g_0 = 1.0, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Γ' の収束曲線
 $k = 2, NFrob = 0, 2, 4$

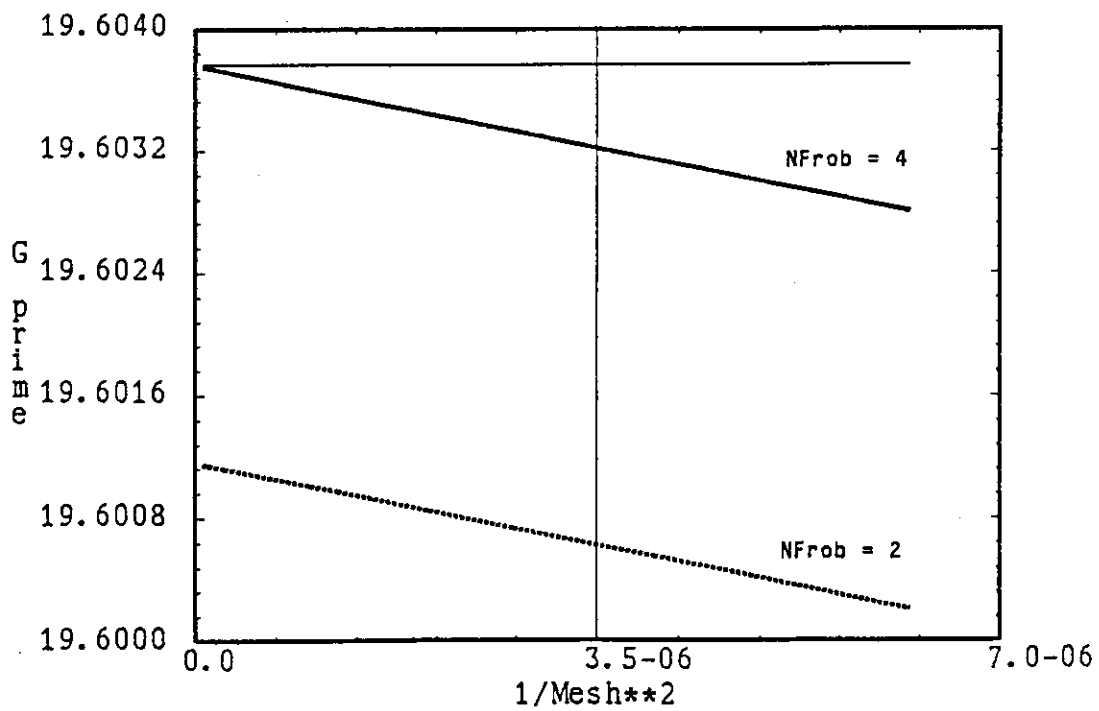


図 7.d Example-2($g_0 = 1.0, g_2 = 1.0$) のときの接続データ Γ' の収束曲線
 $k = 2, NFrob = 2, 4$