

JAERI - M
93-140

静電ドリフト波による磁気島中粒子の
ストカスティックな挙動の解析

1993年7月

西村泰太郎^{*}・安積 正史・矢木 雅敏・浜松 清隆
谷 啓二・岡田 成文^{**}・後藤 誠一^{**}

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公開している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1993

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 株式会社原子力資料サービス

静電ドリフト波による磁気島中粒子の
ストカスティックな挙動の解析

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部
西村泰太郎*・安積 正史・矢木 雅敏・浜松 清隆
谷 啓二・岡田 成文**・後藤 誠一**

(1993年6月10日受理)

単一モードの磁場摂動により形成された磁気島中を運動している荷電粒子に対する静電ドリフト波摂動の効果の数値計算および理論計算により解析し、粒子軌道の統計的（ストカスティックな）挙動を評価した。この解析の結果、磁場摂動及び静電波摂動単独では粒子軌道が統計的にならない場合でも、磁場摂動と静電波摂動の協同効果により磁気島内の広い領域にわたって粒子軌道が統計的になることをK-Sエントロピーの評価によって明らかにした。又、統計的粒子軌道が、磁気面上の運動と静電波摂動によるE x Bドリフトとの共鳴による二次的アイランド生成によるものであり、統計性の発生がChirikov条件と一致することを確認した。粒子軌道の統計的挙動は、同じ摂動エネルギーに対しては、単一の静電波摂動より、モード数が連続し共鳴面が接近したバレーニング・タイプの静電波摂動で顕著になることを明らかにした。更に、粒子軌道の統計化による粒子の拡散過程を解析し、この過程が基本的にガウス型であり、粒子位置の3次以上のキュームラントが局所拡散係数の空間変化で生じることを示した。

那珂研究所：〒311-01 茨城県那珂郡那珂町大字向山 801-1

* 特別研究生

**大阪大学

Analysis of Stochastic Particle Behavior
in a Magnetic Island due to Electrostatic Drift Waves

Yasutaro NISHIMURA*, Masafumi AZUMI, Masatoshi YAGI
Kiyotaka HAMAMATSU, Keiji TANI, Shigefumi OKADA**
and Seiichi GOTO**

Department of Fusion Plasma Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received June 10, 1993)

Stochastic particle motion in the magnetic island in the presence of electrostatic perturbations has been studied both numerically and analytically. By evaluating the K-S entropy, it was shown that particle orbits can be stochastic by the simultaneous effects of magnetostatic perturbation and electrostatic ones with amplitude which are not large enough to induce the orbit stochasticity alone. The generation of orbit stochasticity is due to the overlapping of subisland formed by the E B drift driven by electrostatic perturbations and is consistent with the Chirikov criterion. For the given perturbed energy, the wide region in the particle orbit can be stochastic by the electrostatic perturbations with adjacent resonance surfaces and successive mode numbers, rather than the single perturbation with large amplitude. The particle diffusion process was also analysed by evaluating the cumulants of particle displacement in time and it was shown that the process is basically the Gauss one and the higher order cumulants that the second one are appeared due to the spatial inhomogeneity of the local diffusion coefficient.

Keywords: Stochasticity, Magnetic Island, Radial Diffusion

* JAERI Student Fellow
** Osaka University

目 次

1. 序 論	1
2. 粒子軌道解析	2
2.1 摂動場モデル	3
2.2 モデル運動方程式	4
2.3 粒子軌道計算	7
3. 粒子軌道不規則性の評価法	8
3.1 ストカスティシティーの概念の導入	9
3.2 KSエントロピーを用いたストカスティシティーの評価	10
3.3 非線形振子における作用角変数を用いた粒子軌道解析法	11
3.4 チリコフの重なるの判定	13
4. 粒子軌道統計性の解析	13
4.1 KSエントロピーの算出	14
4.2 サブアイランドに対するチリコフの重なるの判定	16
4.2.1 サブアイランドの形成	16
4.2.2 サブアイランドに対するチリコフの重なるの判定	19
4.3 静電波の性質とストカスティシティーの関係	19
5. 静電ドリフト波による磁気島中の粒子拡散	21
5.1 ストカスティックな粒子拡散	21
5.2 ガウス過程とフォッカープランク方程式	22
5.3 粒子軌道の自己相関時間の算出	23
5.4 キュムラントによる粒子分布の評価	24
5.5 局所的拡散係数の算出	26
5.6 フォッカープランク方程式の解と軌道計算結果の比較	27
6. 結論及び今後の課題	28
謝 辞	30
参考文献	30
付録A サブアイランドのセパトリックス方程式の導出	50
付録B モーメントとキュムラント	52

Contents

1. Introduction	1
2. Analysis of Particle Orbit	2
2.1 Model of Perturbed Field	3
2.2 Model Equation of Particle Orbit	4
2.3 Numerical Results of Particle Orbit Calculation	7
3. Evaluation of Particle Orbit Stochasititity	8
3.1 Concept of Stochasititity	9
3.2 Evaluation of Stochasititity by KS Entropy	10
3.3 Analysis of Particle Orbit by using Action Variables	11
3.4 Chirikov Criterion of Island Overlapping	13
4. Analysis of Particle Orbit Calculations	13
4.1 Evaluation of KS Entropy	14
4.2 Application of Chirikov Criterion	16
4.2.1 Sub-island Formation due to Electrostatic Perturbations ..	16
4.2.2 Chirikov Criterion for Sub-islands	19
4.3 Relation of Stochasititity and Character of Electrostatic Perturbation	19
5. Particle Diffusion due to Electrostatic Perturbations in a Magnetic Island	21
5.1 Stochastic Particle Diffusion	21
5.2 Gaussian Process and Fokker-Planck Equation	22
5.3 Selfcorrelation Time	23
5.4 Cummurants of Particle Distribution	24
5.5 Local Diffusion Coefficient	26
5.6 Diffusion Equation	27
6. Conclusion and Discussion	28
Acknowledgment	30
Appendix A Separatrix Equation of Sub-island	50
Appendix B Moments ad Cummurants	52

1. 序 論

トカマク・プラズマ中ではプラズマ電流に駆動される様々な磁場摂動が励起され、プラズマ閉じ込めをさらに劣化させている。この磁場摂動は通常ミルノフ振動として観測され、軟X線や、電子サイクロトロン放射 (ECE) の計測においてもプラズマ中の磁気島形成として観測されている。ここで、磁気島とはトカマクにおいて磁場摂動が存在した場合、それまで同心円をなしていた磁力線の構造が磁力線の再結合によって局所的に閉じた構造をもつ磁気面群である。このとき磁気島の境界面 (セパトリック面) により、それまでは互いに離れていた磁気面はこのセパトリック面で短絡された状態になり、荷電粒子はこの磁力線に沿って運動することにより、等価的に磁力線垂直方向の拡散が助長されることになる。プラズマ中に単一のヘリカル・ピッチを持った磁気島が存在するだけでは磁気面は壊れずにいるが、さらに異なったヘリカル・ピッチをもった磁場摂動が同時に存在した場合 (例えば、トロイダル効果によるサイド・バンドの形成や異なったテアリング・モードが同時に不安定になった場合等)、磁力線と荷電粒子の運動はストカスティック=統計的な振舞いをするところがある。粒子運動のストカスティシティーは粒子や熱の拡散を引き起こす。さらに、複数の磁気島が重なると粒子は一つの磁気島から別の磁気島へ移動することが可能になり、径方向のより大域的粒子拡散を引き起こす。この観点から、磁気島構造の破壊が粒子及びエネルギー閉じ込めの研究課題の一つとして研究されてきた [1、2]。

一方、荷電粒子の観点から見ると、その運動には磁場摂動だけでなく電場の摂動も影響を与える。磁気島中を運動している荷電粒子に対しても、プラズマ異常輸送の第一義的要因である短波長の静電波摂動が加わっている。従って、実際のプラズマ中では荷電粒子はこれら磁場および電場両者の摂動を同時に受けて運動しており、磁力線自身がストカスティックとなっていなくても粒子運動がストカスティックな挙動をする可能性がある。つまり、磁気面自身の破壊が顕著でなくても (あるいは、全く無くても) 静電波摂動を考慮すると粒子は大域的な拡散を引き起こし得る。この場合、本論文で示されるように、磁気島中心までの粒子軌道の乱れが可能であり、ECEトモグラフィー等により観測されている磁気島内部でのプラズマ分布の平坦化は、磁気島構造の破壊よりもむしろ、こうした機構によると考えることができる。また、いくつかの磁気島が近傍にある場合、磁気島同士が厳密に重なることが無くても粒子軌道の乱れが磁気島間をつなぐ事によって、より大域的な径方向の拡散が起こりうる。磁気島自身が重なりあった場合の粒子は元来の磁気島セパトリック近傍だけを通して移動することができたのに対し、この場合の径方向の拡散には磁気島全体を通して拡散するプロセスが

加わることに注意しておく必要がある。

前述の荷電粒子への磁場摂動と電場摂動の相乗効果の例として、磁気島を形成する共鳴的な磁場摂動に単一モードの静電波摂動が加わった場合の粒子軌道の解析結果が報告されている [3]。この報告では、磁場摂動と同程度の大振幅を持った静電波摂動が加わった場合を解析しており、磁場摂動と静電波摂動の共鳴面が接近してくると粒子軌道がストカスティックになることが示されている。前述した様に、トカマク・プラズマ中に励起されていると考えられる静電ドリフト波の磁力線に垂直方向の波長はイオンのラーマー半径と同程度であり、また、その振幅もテアリング不安定性によって引き起こされる磁場摂動の振幅に比べて充分小さい。従って、[3]において解析された様な大振幅の静電波摂動の解析結果を現実のプラズマ中に適用することには困難が伴う。更に、トカマク・プラズマ中の静電ドリフト波では、小振幅ではあるが、径方向に近接した距離で連続的に多数のモードが生起しており、これらのモードはトロイダル効果によるポロイダル・モード間結合により振幅及び位相が互いに関連を持ったバルーニング型の構造を持っている。このような静電波摂動が磁場摂動中を運動している荷電粒子におよぼす影響については未だ研究がなされていない。このような観点にたつて、本論文では単一モードの大局的な磁場摂動と多数のモードが連続した短波長・小振幅の静電波摂動が同時にある場合の荷電粒子の運動の機構を解析し、粒子拡散におよぼす影響を定量的に評価する。第2章では本研究のモデルについて説明し、得られたモデル案内中心方程式を数値的に解いて得られた軌道計算結果（ポアンカレ写像）を示す。第3章ではストカスティックな粒子軌道の評価法について述べる。第4章では第3章の方法を用いて粒子軌道の定量的評価を行う。また本論文では小振幅、短波調、空間的に局在した多数の連続した静電波モードを取扱い、その粒子軌道への影響を文献 [1] の解析結果と比較し、静電波の性質と粒子軌道ストカスティシティーの関係を明かにする。第5章ではストカスティックな粒子拡散について考察する。第6章で本研究で得られた結果をまとめるとともに今後の研究課題について述べる。

2. 粒子軌道解析

本章では磁場摂動と静電波摂動が加わった場合の荷電粒子の案内中心方程式に対するモデル方程式を導出し、この方程式を解いて得られた軌道計算結果（ポアンカレ写像）を示す。

加わることに注意しておく必要がある。

前述の荷電粒子への磁場摂動と電場摂動の相乗効果の例として、磁気島を形成する共鳴的な磁場摂動に単一モードの静電波摂動が加わった場合の粒子軌道の解析結果が報告されている [3]。この報告では、磁場摂動と同程度の大振幅を持った静電波摂動が加わった場合を解析しており、磁場摂動と静電波摂動の共鳴面が接近してくると粒子軌道がストカスティックになることが示されている。前述した様に、トカマク・プラズマ中に励起されていると考えられる静電ドリフト波の磁力線に垂直方向の波長はイオンのラーマー半径と同程度であり、また、その振幅もテアリング不安定性によって引き起こされる磁場摂動の振幅に比べて充分小さい。従って、[3]において解析された様な大振幅の静電波摂動の解析結果を現実のプラズマ中に適用することには困難が伴う。更に、トカマク・プラズマ中の静電ドリフト波では、小振幅ではあるが、径方向に近接した距離で連続的に多数のモードが生起しており、これらのモードはトロイダル効果によるポロイダル・モード間結合により振幅及び位相が互いに関連を持ったバルーニング型の構造を持っている。このような静電波摂動が磁場摂動中を運動している荷電粒子におよぼす影響については未だ研究がなされていない。このような観点にたつて、本論文では単一モードの大局的な磁場摂動と多数のモードが連続した短波長・小振幅の静電波摂動が同時にある場合の荷電粒子の運動の機構を解析し、粒子拡散におよぼす影響を定量的に評価する。第2章では本研究のモデルについて説明し、得られたモデル案内中心方程式を数値的に解いて得られた軌道計算結果（ポアンカレ写像）を示す。第3章ではストカスティックな粒子軌道の評価法について述べる。第4章では第3章の方法を用いて粒子軌道の定量的評価を行う。また本論文では小振幅、短波調、空間的に局在した多数の連続した静電波モードを取扱い、その粒子軌道への影響を文献 [1] の解析結果と比較し、静電波の性質と粒子軌道ストカスティシティーの関係を明かにする。第5章ではストカスティックな粒子拡散について考察する。第6章で本研究で得られた結果をまとめるとともに今後の研究課題について述べる。

2. 粒子軌道解析

本章では磁場摂動と静電波摂動が加わった場合の荷電粒子の案内中心方程式に対するモデル方程式を導出し、この方程式を解いて得られた軌道計算結果（ポアンカレ写像）を示す。

2.1 摂動場モデル

本節では本論文で取り扱う磁場摂動と静電波摂動のモデルについて説明する。磁場摂動としては、軸対称円形トカマク・プラズマの平衡磁場

$$\mathbf{B}_{\text{eq}} = B_0 \left(\frac{r}{R_0 q(r)} \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \right) \quad (2-1)$$

に低 n テアリング不安定性等によって励起された単一の大局的な共鳴モード

$$\tilde{\mathbf{B}} = B_0 \tilde{\mathbf{b}}^{M/N} = B_0 \nabla \times \psi^{M/N}(r) \cos(M\theta - N\phi) \mathbf{e}_\phi \quad (2-2)$$

が加わった場合を考える。 B_0, R_0, q は、それぞれ、トロイダル磁場、主半径、安全係数分布である。又、 ψ_{MN} は平衡トロイダル磁場で規格化された摂動磁束関数であり、 (M, N) は磁場摂動のポロイダル及びトロイダル方向のフーリエ・モード数である。座標系としてはトロイダル座標 (r, θ, ϕ) を用いている。この磁場摂動は、 $q(r_s) = M/N$ を満たす $r = r_s$ で磁気島を形成し、 $r = r_s$ の周りの磁場構造は近似的に次式で表される：

$$(r - r_s)^2 - W_M^2 \cos(M\theta - N\phi) = \text{const} \quad (2-3)$$

ここで、 W_M は磁気島幅であり次式で定義される：

$$W_M = 2 \left(R_0 \psi^{M/N} / \frac{dq}{dr} r_s \right)^{1/2} \quad (2-4)$$

(2-3) 式では大局的モードを考え ψ_{MN} は半径方向に一定と近似している。

次に、静電波摂動としては半径方向にそれぞれ局在化し、互いに近接した高 n 静電モードを考える：

$$\tilde{\mathbf{E}} = B_0 \sum_m \tilde{\mathbf{e}}^{m/n} = -B_0 \nabla \sum_m \phi^{m/n}(r) \cos(\omega t + m\theta - n\phi) \quad (2-5)$$

ϕ_{mn} は平衡トロイダル磁場で規格化された摂動静電ポテンシャルであり、 (m, n) は静電波摂動のポロイダル及びトロイダル方向のフーリエ・モード数、 ω は角周波数である。摂動静電ポテンシャルの半径方向の構造 $\phi_{mn}(r)$ は想定する不安定性に依存しており、正確には線形固有値方程式等を解いて求める必要があるが、以下では次式近似することにする：

$$\phi^{m/n}(r) = \phi_0 \Phi(r - r_{m/n}) \quad (2-6)$$

$$\Phi(x) = \exp[-(x/\lambda)^2]$$

λ は静電波摂動の半径方向の局在化を与えるパラメータである。次節以下で示されるように、摂動静電ポテンシャルの各フーリエ・モード成分も、 $E \times B$ ドリフトにより、次式に示す共鳴面 $r_{m/n}$ で粒子軌道に島構造を形成する：

$$q(r_{m/n}) = m / (n - R_0 \omega / v_{//}) \quad (2-7)$$

この摂動静電ポテンシャルによりつくられる粒子軌道の島の幅は $\Phi(x) = \text{一定}$ で近似すると

$$w = 2 \left(R_0 \phi_0 / r_{m/n} \frac{dq}{dr} v_{//} \right)^{1/2} \quad (2-8)$$

で与えられる。ここで、 $v_{//}$ は粒子の磁力線に沿った速度である。又、(2-7) 式から、多数のフーリエ・モードがある場合、隣り合うモードの共鳴位置の距離は

$$|r_{m+1/n} - r_{m/n}| = \frac{1}{m s}, \quad s = \frac{1}{q} \frac{dq}{dr} \quad (2-9)$$

となる。ここで、 s はシェアー・パラメータである。

2.2 モデル運動方程式

本節では、前節で述べた磁場および静電波摂動が加わった場合の粒子運動に対するモデル方程式を導出する。基礎方程式として次の案内中心方程式から出発する

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v_{//} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{v_{//}^2 + \mu B}{\Omega} \frac{\mathbf{B}}{B} \times \frac{\nabla B}{B} \\ \frac{dW}{dt} &= \Omega \frac{\mathbf{E}}{B} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mu \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{d\mu}{dt} = 0, \\ W &= \frac{v_{//}^2}{2} + \mu B, \quad \mu B = \frac{v_{\perp}^2}{2}, \quad \Omega = \frac{e B}{M} \end{aligned} \quad (2-10)$$

本論文の目的は、磁場摂動と静電波摂動のある場合の粒子軌道の振舞いを評価することであり、これ

らの摂動の効果は第一義的には、磁力線に沿った粒子運動と $E \times B$ ドリフト運動によって表現される。トロイダル配位ではトロイダル・ドリフト運動及び磁場勾配による粒子捕捉もあり、これらの効果と摂動場の関係も重要であるが、本論文では簡単のためこれらトロイダル効果は二次的效果として無視することにする。又、粒子は摂動場とエネルギーのやりとりを行い、この効果は粒子運動の変化をもたらすだけでなく、摂動場の成長あるいは減衰自身にも影響を与える。この効果は摂動場と共鳴する粒子にとって特に重要となるが、本研究では磁場および静電波摂動場は与えられたものとして取り扱い、粒子と摂動場のエネルギーのやりとりも簡単のために無視することにする。以上の仮定から、案内中心方程式を次のように簡単化する：

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad \frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0. \quad (2-11)$$

(2-1、2、5) 式を代入すると、粒子運動案内方程式の具体的な表式は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v_{\parallel} \tilde{b}_r^{M/N} \sin(M\theta - N\phi) + \sum_m \tilde{e}_\theta^{m/n} \sin(\omega t + m\theta - n\phi) \\ r \frac{d\theta}{dt} &= v_{\parallel} \left[\frac{r}{qR_0} + \tilde{b}_\theta^{M/N} \cos(M\theta - N\phi) \right] + \sum_m \tilde{e}_r^{m/n} \cos(\omega t + m\theta - n\phi) \\ R_0 \frac{d\phi}{dt} &= v_{\parallel} \end{aligned} \quad (2-12)$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{b}_r^{M/N} &= \frac{M}{r} \psi^{M/N}, \quad \tilde{b}_\theta^{M/N} = - \frac{\partial \psi^{M/N}}{\partial r} \\ \tilde{e}_r^{m/n} &= - \frac{\partial \phi^{m/n}}{\partial r}, \quad \tilde{e}_\theta^{m/n} = - \frac{m}{r} \phi^{m/n} \end{aligned} \quad (2-13)$$

摂動場に対しては $r/R_0 (\ll 1)$ の効果は無視している。更に、トロイダル方向の運動では右辺第1項が優勢であり摂動場の効果による項を無視すると方程式は更に簡単となり

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v_{\parallel} \tilde{b}_r^{M/N} \sin(M\theta - N\phi) + \sum_m \tilde{e}_\theta^{m/n} \sin(\omega t + m\theta - n\phi) \\ r \frac{d\theta}{dt} &= v_{\parallel} \frac{r}{qR_0} \\ R_0 \frac{d\phi}{dt} &= v_{\parallel} \end{aligned} \quad (2-14)$$

となる。磁場摂動と静電波摂動の複合的効果は共鳴面で顕著になる。本論文では、大局的な共鳴磁場摂動と互いに隣接した多数の微視的な静電波摂動を考えているので、磁場摂動による磁気島の近傍における粒子運動に着目して、上記の方程式を $r=r_s$ の回りで展開し、適当な変数変換、規格化を行う。この近似により最終的に解くべきモデル運動方程式として次式が得られる：

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\alpha}{4} \sin \zeta + \sum_m \frac{\beta_{m/n}}{4} \sin \left(\frac{N}{M} \zeta - v_{m/n} \varphi \right) \quad (2-15)$$

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = -\alpha x$$

が得られる。以下、この方程式を用いて粒子運動を解析することにする。ここで、 x 及び ζ は

$$x = (r - r_s) / W_M \quad (2-16)$$

$$\zeta = M\theta - N\varphi$$

であり、各パラメータは次式で定義される

$$\alpha = N s W_M$$

$$\beta^{m/n} = \beta \Phi(r - r_{m/n}), \quad \beta = \frac{w^2 n s}{W_M} \quad (2-17)$$

$$v_{m/n} = n - \frac{N}{M} m - \gamma, \quad \gamma = \frac{\omega R_0}{v_{||}}$$

$$s = \frac{1}{q} \frac{dq}{dr}$$

W_M 及び w は、それぞれ、磁場摂動及び静電波摂動による島の幅であり、(2-4、8)で定義されている。

このモデル方程式を用いて磁気島中 ($|x| < 1$) に共鳴位置を持つ静電波摂動のフーリエ・モードの個数を求めておく。(2-15)第2式より

$$\zeta = -\alpha x \varphi$$

であり、これを(2-15)第1式に代入すると

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\alpha}{4} \sin \zeta + \sum_m \frac{\beta_{m/n}}{4} \sin \left[\left(-\frac{m}{M} \alpha x - v_{m/n} \right) \varphi \right]$$

となる。共鳴条件は各 (m, n) モードに対して

$$-\frac{m}{M} \alpha x - v_{m/n} = 0$$

で与えられる。これから粒子と静電波摂動の共鳴位置は

$$x_{m/n} = -\frac{Nm^* - \gamma M}{\alpha m}, \quad m = m_0 + m^*, \quad m_0 = n \frac{M}{N} \quad (2-18)$$

となる。従って、隣接した共鳴面の距離 Δ_m は

$$\Delta_m \equiv |x_{m+1/n} - x_{m/n}| = \frac{N}{\alpha m} \quad (2-19)$$

となり、磁気島内の共鳴面の数は $m \sim m_0 \gg 1$ として $2\alpha m_0/N$ で与えられる。この事から、(2-17) 式のパラメータ α は磁気島内に存在する共鳴静電波摂動のフーリエ・モード数を与えるパラメータとなっていることが分かる。

2.3 粒子軌道計算

この節では、前節で導出したモデル運動方程式 (2-15) を数値的に解き、粒子軌道を追跡した結果について述べる。計算パラメータとしては以下の数値を用いた。

・ トカマク・プラズマ・パラメータ

$$\begin{aligned} \text{大半径 } R &= 3 \text{ m, 小半径 } r = 0.5 \text{ m, } B = 5 \text{ T,} \\ q &= 2, s = 1.5, T = 5 \text{ keV} \end{aligned}$$

・ 磁場摂動

$$\begin{aligned} \text{モード数 } M &= 2, N = 1 \\ \text{磁気島巾 } W_M &= 5 \text{ cm} \\ \text{これから } \alpha &= 0.1 \text{ が得られる。} \end{aligned}$$

・ 静電波摂動

$$\begin{aligned} \phi / T \sim n_i / n_e \sim 10^{-4}, k_{\perp} \rho_i \sim 1, \omega \sim \omega^* \text{ とすると} \\ m \sim 250, n \sim 125 \\ e_0 = m \phi / r B \sim 50, \omega \sim 10^6 \end{aligned}$$

これから

イオンに対して $\beta \sim 10^2, \gamma \sim 6$

電子に対して $\beta \sim 10^3, \gamma \sim 0.1$

が得られる。しかし、これらのパラメータは数値計算の立場からは、計算精度および計算時間の点で実際的でないので以下では

$$m_0 = 50, n = 25$$

$$\beta = 0.005, \gamma = 0$$

として計算することにする。

又、磁気島幅で規格化したモードの半径方向の広がり ($d = \lambda / W_M$) は

$$d = 0.1$$

とする。

上記のパラメータを用いた計算結果を示したのが図 2.1 である。粒子の運動方程式の解法としては二次の予測子-修正子法を用いた。これらの図はそれぞれ、 $(\theta = 0, \varphi = 0)$ で x 軸に沿って等間隔に置かれた粒子の運動を追跡し、トラスを周回した時のポロイダル断面 (x, θ) での粒子軌道の通過点をプロットして行ったものであり、ポアンカレ写像と呼ばれているものである。粒子の初期位置、磁場摂動強度 α 、静電波摂動強度 β はそれぞれ図中の表に示した。まず、図 2.1 (a) は磁場摂動のみ加わった場合で、粒子軌道が $M = 2, N = 1$ のモードの磁気島に対応する島構造を形成している様子が示されている。一方、図 2.1 (b) は静電波摂動のみ加わった場合で、 θ 方向に連なった各々の帯が静電波の各フーリエ・モードに対応する粒子軌道の島構造を表している。このように、上記のパラメータのもとでは、各フーリエ・モードに対応する粒子軌道島間の相互作用は弱く、静電波摂動のみで粒子軌道はほとんど乱れない事を示している。これに対して、図 2.1 (c) では、磁場摂動と静電波摂動が同時に加わった場合、粒子は両方の摂動を感じ不規則な振舞いをする事を示している。明かに、この場合は運動の不変量が壊れている。このような粒子軌道の不規則性に関する定量的評価は次章以降に行う。

3. 粒子軌道不規則性の評価法

前章では粒子軌道計算結果を示し、磁場摂動と静電波摂動が同時に加わった場合粒子軌道が不規則

これから

イオンに対して $\beta \sim 10^2, \gamma \sim 6$

電子に対して $\beta \sim 10^3, \gamma \sim 0.1$

が得られる。しかし、これらのパラメータは数値計算の立場からは、計算精度および計算時間の点で実際的でないので以下では

$$m_0 = 50, n = 25$$

$$\beta = 0.005, \gamma = 0$$

として計算することにする。

又、磁気島幅で規格化したモードの半径方向の広がり ($d = \lambda / W_M$) は

$$d = 0.1$$

とする。

上記のパラメーターを用いた計算結果を示したのが図 2.1 である。粒子の運動方程式の解法としては二次の予測子-修正子法を用いた。これらの図はそれぞれ、 $(\theta = 0, \varphi = 0)$ で x 軸に沿って等間隔に置かれた粒子の運動を追跡し、トーラスを周回した時のポロイダル断面 (x, θ) での粒子軌道の通過点をプロットして行ったものであり、ポアンカレ写像と呼ばれているものである。粒子の初期位置、磁場摂動強度 α 、静電波摂動強度 β はそれぞれ図中の表に示した。まず、図 2.1 (a) は磁場摂動のみ加わった場合で、粒子軌道が $M = 2, N = 1$ のモードの磁気島に対応する島構造を形成している様子が示されている。一方、図 2.1 (b) は静電波摂動のみ加わった場合で、 θ 方向に連なった各々の帯が静電波の各フーリエ・モードに対応する粒子軌道の島構造を表している。このように、上記のパラメータのもとでは、各フーリエ・モードに対応する粒子軌道島間の相互作用は弱く、静電波摂動のみで粒子軌道はほとんど乱れない事を示している。これに対して、図 2.1 (c) では、磁場摂動と静電波摂動が同時に加わった場合、粒子は両方の摂動を感じ不規則な振舞いをする事を示している。明かに、この場合は運動の不変量が壊れている。このような粒子軌道の不規則性に関する定量的評価は次章以降に行う。

3. 粒子軌道不規則性の評価法

前章では粒子軌道計算結果を示し、磁場摂動と静電波摂動が同時に加わった場合粒子軌道が不規則

な振舞いをすることを示した。本章ではこの不規則性を説明するストカスティシティーの定義を述べ、これを定量的に評価する方法としてKSエントロピー、及び、ストカスティシティー生成の条件となるチリコフ判定条件について述べる。また、粒子軌道を解析する上で有効な変数、作用角変数への正準変換について述べる。これらの手法を実際に用いた軌道計算の評価は第4章で述べる。

3.1 ストカスティシティーの概念の導入

前章では、荷電粒子の案内中心軌道のポロイダル断面でのポアンカレ写像を示し、磁場摂動或は静電波摂動の一方だけが加わった場合にはポアンカレ写像が線を形成し（三次元的には面の形成を意味する）、運動の不変量が存在することを示した。これに対し、両方の摂動が荷電粒子に同時に加わった場合、ポアンカレ写像は図2.1(c)に示されたように離散した点状になり、規則性が失われていた。この場合のポアンカレ写像は線を形成しなくなり、単一の摂動に対して存在していた運動の不変量が破壊されていることが推察される。このような不規則な粒子挙動を説明し得る性質として、統計性=ストカスティシティーを考えることができる。ストカスティシティーは「初期値の僅かなずれが時間とともに指数関数的に発散し、その後の力学量の正確な予測が実質的に不可能になる様な力学的性質」として定義される。（古典力学では初期値が決定すれば運動方程式は積分可能であり、運動は決定論的であると考えられてきたが、この思想には系の初期値が全く誤差なく測定し得るという大前提があることが見逃されていた。）さてここで、古典力学で予測不可能な運動の例として微粒子のブラウン運動を記述するランジュバン方程式を考えてみる。

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + R(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

ここで、 $\gamma v(t)$ はブラウン粒子の速度に比例する摩擦抵抗の項であり γ はその比例係数、 $R(t)$ は粒子の運動によらない不規則な力であり、時間とともに確率的に変化する。すると $R(t)$ によって駆動される微粒子の運動 $v(t)$ 、 $x(t)$ もまた確率過程となり、粒子は「酔歩する」。このように系に確率的でランダムな力が内包され運動が確率的になる時、粒子の運動は明かに予測不可能でストカスティックになる。これに対し、第2章で与えた二つの摂動が同時に加わった場合の粒子の案内中心方程式

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\alpha}{4} \sin(\zeta) + \sum_m \frac{\beta_{m/n}}{4} \sin\left(\frac{N}{M} \zeta - v_{m/n} \varphi\right)$$

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = -\alpha x$$

の場合には、ランジュバン方程式のような確率的な力 $R(t)$ は含まれていない。しかし、決定論的な運動方程式に従う場合でも複数の異なる摂動があると粒子挙動が統計的になる場合がある。これは異なる摂動によって別々に粒子軌道のアイランドが形成され、この各々のアイランドが粒子を同時に捕捉しようとした時、粒子はどちらのアイランドに行きよいか迷いだし酔歩するためであると考えられている。第2章の計算結果はこの様な例である。ただし、粒子軌道の不規則性がストカスティシティーを意味するかどうかはこの時点ではあくまでも推測に過ぎないので、これを4章で確認する。粒子軌道がストカスティックで予測不可能になると言うことは、プラズマ閉じ込めの劣化を意味し、このような粒子挙動解析はプラズマ閉じ込めの観点から非常に重要な問題であることは言うまでもない。

3.2 KSエントロピーを用いたストカスティシティーの評価

粒子軌道のストカスティシティーを定量的に評価する手段としてKSエントロピーを導入する。非常に接近した異なる二つの粒子を考え、時刻 $t=0$ におけるこれらの間の距離、つまりストカスティシティーの定義で述べた初期値の僅かなずれを δ_0 とし、これが時刻 t 後に

$$\delta(t) = \delta_0 \exp(ht) \quad (3-1)$$

の様に指数関数的に発散したとする。このときの定数 h をKSエントロピーと呼び、近接粒子軌道間距離の発散を定量的に表すことができる[4, 5, 6]。 (3-1) のような指数関数的な発散を仮定するとKSエントロピー h は近接位置から出発した粒子間の距離の時間変化 $\delta(t)$ を計算することにより

$$h = \log \frac{[\delta(t)/\delta_0]}{t} \quad (3-1')$$

から計算される。実際の問題では h 自身も時間的に変化する。しかし、充分長い時間経った後に h が一定ならば二粒子間の距離は全体として指数関数的に発散し、粒子位置は初期位置の僅かなずれに強く依存して事実上予測不可能となり、ストカスティックに振舞うことになる。逆に h が時間とともに減少すれば、二粒子間の距離の増加は指数関数的でなく、近傍から出発した粒子は常に近傍に留まるという意味で、粒子軌道は安定である。

3.3 非線形振子における作用角変数を用いた粒子軌道解析法

一般的に保存系での周期運動に関して、作用角変数（ J 、 Θ ）と呼ばれる正準変数に変換して運動を議論すると都合がよい。まず、この正準変数の効用を述べる。（ J 、 Θ ）を定義すると、運動を表すハミルトニアン H が J のみの関数となり運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= 0 \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial J} = \Omega\end{aligned}\quad (3-2)$$

として記述され、 $J = \text{一定}$ 、 $\Theta = \Omega t$ なる定速直線運動で表現される。従って、実空間座標上で無摂動場での粒子運動が複雑な表式になるのに比べて、正準変数を用いると摂動場が加わった場合の解析が容易になることが分る。次に、具体的に実空間座標（ x 、 ζ ）から作用角変数（ J 、 Θ ）への正準変換について述べる。先ず（ x 、 ζ ）座標での保存系に対して、作用変数を運動の一周期にわたった積分を

$$J = \frac{1}{2\pi} \int x(\zeta, H) d\zeta \quad (3-3)$$

として定義すると、作用変数 J はハミルトニアン H のみの関数となる。それゆえ変換の母関数 W は

$$W = W(\zeta, J) \quad (3-4)$$

として表すことができ、（ x 、 ζ ）から作用角変数（ J 、 Θ ）への変換式は

$$\Theta = \frac{\partial W}{\partial J}, \quad x = \frac{\partial W}{\partial \zeta} \quad (3-5)$$

$$W = \int_0^x x(\zeta') d\zeta'$$

となる。また Θ に関する運動方程式は $\Omega(J)$ を J のみの関数として

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \Omega(J)$$

$$\Theta = \Omega(J) t + \text{const}$$

となる。さて、ここで運動の完全な 1 サイクルの間に Θ に生じる変化を計算すると

$$\Delta\Theta = \int \frac{\partial\Theta}{\partial\zeta} d\zeta = \int \frac{\partial^2 W}{\partial\zeta\partial J} d\zeta = \frac{\partial}{\partial J} \int \frac{\partial W}{\partial\zeta} d\zeta = \frac{\partial}{\partial J} \int x d\zeta = \frac{\partial}{\partial J} 2\pi J = 2\pi$$

となる。一方 (3-2) 式より運動の周期を τ とすると

$$\Delta\Theta = \Omega(J) \tau = 2\pi$$

となり $\Omega(J)$ は運動の周波数であることが示される。

静電波擾動のない場合の磁気島中を運動する粒子のハミルトニアンは

$$H_0(x, \zeta, \varphi) = \frac{1}{2} \alpha x^2 - \frac{1}{4} \alpha \cos(\zeta) \quad (3-6)$$

で表され、非線形振子と同様に周期的な運動をする。ここで後の便宜を図り、実空間変数 (x, ζ) から作用角変数 (J, Θ) に変換する。楕円積分の母数を

$$k = \sqrt{\frac{H_0 + \alpha/4}{\alpha/2}} \quad (3-7)$$

とすると

(1) $k > 1$ の場合

$$\begin{aligned} J(k) &= \frac{2kE}{\pi} \quad (1/k) = \text{const} \\ \Theta &= \Theta(\zeta) = \frac{\pi F(\zeta/2, 1/k)}{K(1/k)} \\ \zeta &= \zeta(\Theta) = 2 \operatorname{am} \left(K(1/k) \frac{\Theta}{\pi}, \frac{1}{k} \right) \\ \Omega(k) &= \frac{\alpha k \pi}{2K(1/k)} \end{aligned} \quad (3-8)$$

(2) $k < 1$ の場合

$$\begin{aligned} J(k) &= \frac{4}{\pi} \{ E(k) - (1-k^2)K(k) \} = \text{const} \\ \Theta &= \frac{(\pi/2) F \left[\sin^{-1} \left(\frac{1}{k} \sin \frac{\zeta}{2} \right), k \right]}{K(k)} \\ \zeta &= 2 \sin^{-1} \left[k \operatorname{sn} \left(\frac{2\Theta}{\pi} K(k), k \right) \right] \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$\Omega(k) = \frac{\alpha \pi}{4K(k)}$$

ただし、ここで、 $K(k)$ は第1種完全楕円積分、 $E(k)$ は第2種完全楕円積分である。これらの対応関係を明確にするために (図3.1) (図3.2) に (x, ξ) 空間における定J曲線、定 Θ 曲線を図示する。(図3.1) から明らかのように定J曲線は実空間における磁気面に対応している。

3.4 チリコフの重なるの判定

軌道がストカスティックになる機構の (非常にnaiveな) 解釈は、位相空間における軌道のアイランドが互いに重なるという「チリコフの判定」によって行われる[5]。簡単のため1自由度の系を考え、位相空間内での粒子運動の軌道を考える。ここになんらかの周期的な摂動が入った場合、粒子の運動の周期と摂動の周期が整数比をなし共鳴条件を満たす座標近傍で軌道は図3.3の様なアイランドを形成する (§2.2 磁気島の形成を参照)。図3.3 (a) の様に複数のアイランドがお互いに離れている場合は粒子は各々のアイランドの中を廻り続けるだけだが、図3.4の様に摂動が大きくなりアイランドの幅が成長しこれらが重なったとき、軌道はもとのアイランドをまわればいいのか、それとも隣のアイランドに乗り移ってまわればいいのか迷いはじめ、ストカスティックな振舞いをすると考えられる。アイランドの重なるの条件を定式化したものがチリコフの判定と呼ばれるものであり、図3.3 (b) において二つのアイランドの幅を $2\Delta_m$ 、 $2\Delta_{m+1}$ 、アイランド軸の位置を p_m 、 p_{m+1} すると

$$\Delta_m + \Delta_{m+1} > |p_m - p_{m+1}| \quad (3-10)$$

がストカスティシティー生成の条件となる。

4. 粒子軌道統計性の解析

第3章でストカスティシティーの評価法を述べたが、この章では第2章で計算した粒子軌道結果にこれを適用する。先ずKSエントロピーを算出し粒子軌道がストカスティックになる事を確認する。さらに、磁気島中の各磁気面に対して静電波摂動が粒子軌道の「サブアイランド」を形成することを示した後、これらのサブアイランドにチリコフの重なるの判定を適用し粒子軌道がストカスティック

$$\Omega(k) = \frac{\alpha \pi}{4K(k)}$$

ただし、ここで、 $K(k)$ は第1種完全楕円積分、 $E(k)$ は第2種完全楕円積分である。これらの対応関係を明確にするために (図3.1) (図3.2) に (x, ξ) 空間における定J曲線、定 Θ 曲線を図示する。(図3.1) から明らかのように定J曲線は実空間における磁気面に対応している。

3.4 チリコフの重なるの判定

軌道がストカスティックになる機構の(非常にnaiveな)解釈は、位相空間における軌道のアイランドが互いに重なるという「チリコフの判定」によって行われる[5]。簡単のため1自由度の系を考え、位相空間内での粒子運動の軌道を考える。ここになんらかの周期的な摂動が入った場合、粒子の運動の周期と摂動の周期が整数比をなし共鳴条件を満たす座標近傍で軌道は図3.3の様なアイランドを形成する (§2.2 磁気島の形成を参照)。図3.3 (a) の様に複数のアイランドがお互いに離れている場合は粒子は各々のアイランドの中を廻り続けるだけだが、図3.4の様に摂動が大きくなりアイランドの幅が成長しこれらが重なったとき、軌道はもとのアイランドをまわればいいのか、それとも隣のアイランドに移ってまわればいいのか迷いはじめ、ストカスティックな振舞いをすると考えられる。アイランドの重なるの条件を定式化したものがチリコフの判定と呼ばれるものであり、図3.3 (b) において二つのアイランドの幅を $2\Delta_m$ 、 $2\Delta_{m+1}$ 、アイランド軸の位置を p_m 、 p_{m+1} すると

$$\Delta_m + \Delta_{m+1} > |p_m - p_{m+1}| \quad (3-10)$$

がストカスティシティー生成の条件となる。

4. 粒子軌道統計性の解析

第3章でストカスティシティーの評価法を述べたが、この章では第2章で計算した粒子軌道結果にこれを適用する。先ずKSエントロピーを算出し粒子軌道がストカスティックになる事を確認する。さらに、磁気島中の各磁気面に対して静電波摂動が粒子軌道の「サブアイランド」を形成することを示した後、これらのサブアイランドにチリコフの重なるの判定を適用し粒子軌道がストカスティック

になる機構についての解釈を行った。

4.1 KSエントロピーの算出

§ 3. 2で述べた粒子軌道に関するKSエントロピーの計算結果を示す。対象とした一つの粒子に対し僅かに異なる磁気面に別の試験粒子を設置し、二つの粒子について同時に軌道計算し、各時刻における二粒子間の距離 $\delta(t)$ より(3-1)式に従ってKSエントロピー h を評価することになるが、単純にこの方法を適用すると、2つの粒子間の距離が時間と共に大きくなってしまいうため誤差が大きくなってしまふ。この誤差を低減するため試験粒子の位置を定期的に対象粒子の位置から δ_0 だけ離れた位置に置き直し h を評価することにする[6]。つまり j ステップ目に R_j および $r_j = R_j + \delta_0 n_j$ (n_j は後に述べる単位ベクトル)から出発した粒子位置がある一定の時間 δt の後に R_{j+1} および r_{j+1} となった時このステップでの h_j を

$$h_j = \log \frac{[\delta_j(\delta t) / \delta_0]}{\delta t} \quad (4-1)$$

で評価し、ついで試験粒子の位置を r_{j+1} から

$$\begin{aligned} r_{j+1}^* &= R_{j+1} + \delta_0 n_{j+1} \\ n_{j+1} &= \frac{R_{j+1} - r_{j+1}}{|R_{j+1} - r_{j+1}|} \end{aligned} \quad (4-2)$$

に置き直して計算を進める。この置き換えによって試験粒子の位置は常に対象粒子の近傍に留まることになる。この計算を繰り返すことによって最終的にKSエントロピー h は

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h_j \quad (4-3)$$

で評価される[4]。ここで、試験粒子の初期位置 r_0 は対象粒子の軌道ベクトル $R_0(t)$ に垂直な位置に置く必要があり、この場合、 r_0 の設定の仕方として自由度が2つあり、原理的には、KSエントロピーはそれぞれについて計算する必要がある。しかし、本論文では静電波摂動のないときの粒子軌道は作用変数 $J = \text{一定面}$ にのっているため、この面に垂直な成分に対してのみKSエントロピーの評価を行うことにする。

図4.1は磁気島中の初期位置の同じ粒子について、トーラス250周後まで粒子軌道計算を行いこのときの粒子軌道のポアンカレ写像と、これに対応するKSエントロピーの時間変化を図示したもので、静電波摂動の振幅 β を変化させ粒子軌道のストカスティシティーの変化を比較している。先ず、図4.1 (a)の静電波摂動のない $\beta=0$ の場合、粒子は規則的な運動をしポアンカレ写像は線を形成している様子が解る。これに対応しKSエントロピーの値が時間とともに単調に減少しており、静電波摂動のないときは軌道は安定である事が示されている。これに対して静電波摂動が加わった $\beta=0.0025$ (図4.1 (b))及び $\beta=0.005$ (図4.1 (c))の場合には、粒子のポアンカレ写像は離散した点状になり、線を形成しなくなっている。これに対応して、KSエントロピーの振舞いは単調減少せず、長時間の後一定の値におちつき有限の値を持つことが解る。では、少しでも静電波摂動を加えたら (つまり $\beta \neq 0$) ならば必ずKSエントロピーは有限の値を持つかというところではない。この問題に対してはKAMの定理 [8] が答を与えてくれる。保存系における無摂動軌道は位相空間における不変トーラスを形成し、この不変トーラスが破壊されたとき軌道は不安定になる。KAMの定理によれば、不変トーラスは僅かな摂動に対しては (無摂動トーラスと比較すると少し変形するが) 安定な軌道であり、この不変トーラスを破壊する摂動の大きさにはあるしきい値が存在する。従って少しでも静電波摂動を加えたら軌道は必ずストカスティックになるのではなく各磁気面に対して軌道をストカスティックにする摂動強度のしきい値が存在する。

図4.1は一つの粒子に対するKSエントロピーを示したものだが、次の図4.2に (各磁気面に対応して) 初期位置の異なる多数の粒子についてトーラス2000周後のKSエントロピーの値を算出し、この空間分布を示した。この図に示されるように殆どの場所で静電波摂動がある場合のKSエントロピーは摂動のないときに比べて大きな値をとり、大局的に見てもストカスティックになっていることが解る。ただしこの図では、静電波摂動のないときでも有限のKSエントロピーをとっているが、これは計算時間が有限であるためであり、図4.1に示したように、無限時間たつと全てのKSエントロピーの値は0に収束する。 $\beta=0.005$ の場合にも所々小さな h を取るものがあるが、これは摂動の加わった場合でも局所的には規則的な運動をするものがあることを示唆している。KAMの定理の言葉を借りれば、その場所においては摂動の大きさが不変トーラスを破壊するしきい値よりも小さいと言う意味である。その結果として、ストカスティックな粒子軌道と安定な粒子軌道が隣合わせになっている。また、摂動のない $\beta=0$ の場合でも、セパトリックス上の値が大きくなっているが、これは厳密なセパトリックス上の軌道を与えることが数値計算上難しく、このために生じた数値誤差によるものである。これらの計算により、磁気島中の粒子に本論文で与えたタイプの静電波摂動が加わった

場合、粒子軌道はストカスティックになることが定量的に示された。

4.2 サブアイランドに対するチリコフの重なるの判定

この節では、チリコフの重なるの判定を適用し、磁気島中の粒子軌道がなぜストカスティックになるかの解釈を行う。この機構を簡単に説明すると、磁場摂動に従って運動している粒子の運動の周期と静電波摂動のフーリエ・モードが共鳴してサブ・アイランドを形成し、これらのサブ・アイランドが重なりあう事により粒子軌道がストカスティックになる。ここでサブ・アイランドとは、元の磁場摂動および静電波摂動によるアイランドと区別して、アイランド中の軌道面上に形成される二次的なアイランドのことを指している。

4.2.1 サブアイランドの形成

まず、§ 2. 4 で導いた案内中心の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \frac{\alpha}{4} \sin(\zeta) + \sum_m \frac{\beta_{m/n}}{4} \sin\left(\frac{N}{M} \zeta - v_{m/n} \varphi\right) \\ \frac{d\zeta}{d\varphi} &= -\alpha x \end{aligned} \quad (2-15)$$

であった。粒子は実際は三次元空間を運動しているが、ここではポロイダル断面でのポアンカレ写像のみに着目して、仮想的に上式が (x, ζ) 二次元平面内での運動を記述しているものとして考える。(ここでトロイダル角 φ は時間変数と見なしている)。すると (x, ζ) 面内の運動を表すハミルトニアンは

$$H(x, \zeta, \varphi) = \frac{1}{2} \alpha x^2 - \frac{1}{4} \alpha \cos(\zeta) - \sum_m \frac{M}{m} \frac{\beta_{m/n}}{4} \cos\left(\frac{m}{M} \zeta - v_{m/n} \varphi\right) \quad (4-4)$$

で表される。これを

$$H_0(x, \zeta) = \frac{1}{2} \alpha x^2 - \frac{1}{4} \alpha \cos(\zeta) \quad (4-4')$$

$$H_1(x, \zeta, \varphi) = \sum_m \frac{M}{m} \frac{\beta_{m/n}}{4} \cos\left(\frac{m}{M} \zeta - v_{m/n} \varphi\right) \quad (4-4'')$$

の様に0次の無摂動ハミルトニアン H_0 と1次の摂動ハミルトニアン H_1 に分ける。すると0次の運動は良く知られた非線形振子と同型の周期的な運動をする事が解る。既に§3.3で述べたように、(4-4')の非線形振子における実空間変数 (x, ζ) から作用角変数 (J, Θ) に変換すると0次の運動方程式は

$$\frac{dJ}{d\varphi} = - \frac{\partial H_0(J)}{\partial \Theta} = 0 \tag{4-5}$$

$$\frac{d\Theta}{d\varphi} = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J} = \Omega(J) = \text{const}$$

であり、運動は周波数 $\Omega(J)$ を持つ。ここで一次の摂動ハミルトニアン H_1 を考慮した運動方程式は

$$\frac{dJ}{d\varphi} = - \frac{\partial(H_0 + H_1)}{\partial \Theta} = 0 - \frac{\partial H_1}{\partial \Theta} \tag{4-6}$$

$$\frac{d\Theta}{d\varphi} = - \frac{\partial(H_0 + H_1)}{\partial J} \equiv \Omega(J)$$

となる。作用角変数に変換した一つの効用は、0次の運動に関し作用 J の値が一定であるために(4-6)第1式の様摂動項の寄与が明確になることである。又、(4-6)第2式で摂動項を無視したのは(2-14)第2式で摂動項を無視したのと同じ理由による。摂動ハミルトニアン H_1 を作用角変数を用いて表すと、静電波の径方向の構造(2-9)式を考慮し

$$H_1(J, \Theta, \varphi) = \frac{M}{m} \frac{\beta_0}{4} \sum_m \exp(-(x-x_{m/n})^2/d^2) \cos\left(\frac{m}{M} \zeta(\Theta) - v_{m/n} \varphi\right) \tag{4-7}$$

$$\Theta = \frac{(\pi/2) F \left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{k} \sin \frac{\zeta}{2}\right), k \right]}{K(k)}, \quad k = \sqrt{\frac{H_0 + \alpha/4}{\alpha/2}}$$

であるが、このままでは共鳴条件は得られない。そこで H_1 を Θ に関しフーリエ展開し、

$$H_1(J, \Theta, \varphi) = \sum_m \sum_l \frac{M}{m} \frac{\beta_0}{4} a_m(J) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (l\Theta - v_{m/n}\varphi) \tag{4-8}$$

$$a_{ml} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-(x - x_{m/n})^2 / d^2) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\} \left(\frac{M}{m} \zeta(\Theta) \right) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\} (l\Theta) d\Theta$$

とする。これを運動方程式 (4-6) に代入すると

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \sum_l \sum_m \frac{M}{m} \frac{\beta_0}{4} l a_{ml}(J) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\} (l\Theta - v_{m/n}\varphi) \quad (4-9)$$

$$\frac{d\Theta}{d\varphi} = \Omega(J)$$

となり、第2式の解を第1式に代入すると

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \sum_l \sum_m \frac{M}{m} \frac{\beta_0}{4} l a_{ml}(J) \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\} [(l\Omega(J) - v_{m/n})\varphi] \quad (4-10)$$

となる。すると $l\Omega(J) - v_{m/n}$ を満たす $J = J_r$ 、近傍でモード (m, l) の静電波摂動のフーリエモードに対して共鳴が起こることが解る。従って、 J_r 近傍の軌道は共鳴するフーリエモードの項のみ残してハミルトニアンを

$$H(J, \Theta, \varphi) = H_0(J) + \frac{M}{m} \frac{\beta_0}{4} a_{ml}(J) \cos(l\Theta - v_{m/n}\varphi) \quad (4-11)$$

で記述することができる。この式で $H_0(J)$ を二次の項まで、 $a_{ml}(J)$ を一次の項まで展開すると、 J_r 近傍ではセバトリックス方程式

$$J = J_r \pm \Delta J_r \sin \left(\frac{l\Theta - v_{m/n}\varphi}{2} \right)$$

$$l\Omega(J_r) - v_{m/n} = 0 \quad (4-12)$$

$$\Delta J_r = \sqrt{M \beta_0 a_{ml}(J_r) / m \frac{\partial \Omega}{\partial J}(J_r)}$$

で表されるサブアイランド形成される。(導出は付録 [A] 参照)

4.2.2 サブアイランドに対するチリコフの重なるの判定

元の静電波のモードが単一である場合（この場合 $m=49$ ）の粒子軌道計算におけるサブアイランドと、 (J, Θ) 空間において解析的に求めたサブアイランドの位置及び振幅の比較を行った。図 4.3 (a) は、磁場摂動に $m=49$ の静電波摂動のみが加わった場合に対する実空間 (x, ζ) 空間での粒子軌道計算結果である。 $m=49$ 静電波モードの、作用角変数 (J, Θ) 空間での各フーリエ・モードに対して共鳴条件 (4-12) が成立するような粒子の初期値を与えると、対応するフーリエ・モード数のピッチを持ったアイランドが形成される。単一 m の静電波モードに対しても作用角変数 (J, Θ) 空間では多数のフーリエ・モードが生成され、 J 方向に次々と共鳴条件が満たされていることがわかる。磁気島のセパトリックスから離れたところでは、サブ・アイランド間の距離が大きいためこれらが重なることは無いが、セパトリックス近傍ではサブ・アイランドが稠密に存在するため、これらが重なりあい、軌道がストカスティックになっている様子が伺える。一方、図 4.3 (b) は (J, Θ) 空間での各フーリエ・モードに対するサブ・アイランドのセパトリックス方程式 (4-12) を解き、図示したものである。右側の長方形はサブ・アイランドの重なりが解り易いように共鳴位置とセパトリックス幅を図示したものである。ここでも、セパトリックスから離れた低フーリエ・モード数のサブ・アイランドは重ならないが、高モード数のサブ・アイランドは重なりあっている。正準変換により x と J の対応はとれており、軌道計算におけるストカスティックな領域と、解析結果によるサブアイランドの重なる領域は、数値的にも一致していることが確認できる。静電波摂動のモードが複数である場合は、前述の単一モードのものを静電波のモード数分だけ足し込む形になるので、軌道計算でアイランド数は増えて重なり易くなる（図 4.4 (a)）。同様に (J, Θ) 空間で解析的に求めたサブアイランドに関しても、これらは重なり易くなる事は明らかである。図 4.4 (b) の左端に示したものが全てのサブ・アイランドを重ねあわせたものである。

4.3 静電波の性質とストカスティシティーの関係

ここでは、となりあうサブアイランドにチリコフの重なるの判定を適用し、静電波の性質と粒子軌道のストカスティシティーの関係を明らかにする。

まず、磁気島の中心を通る静電波のモード数を m_0 とし

$$m^* = m - m_0 \quad (4-13)$$

を定義する。したがって図4.5 (a) に示したように m で表される静電波は磁気島中央から数えて m 番目に位置することになる。

次に複数の静電波があるときの共鳴面の位置関係を調べてみる。図4.5 (b) における $m=1$ の静電波のフーリエモード l と $l+1$ に対する共鳴面間を図4.5 (c) の様に拡大し、この区間をAとする。静電波のフーリエモードに対する共鳴条件は

$$\Omega(J)l - v_{m/n} = 0$$

であったので、

$$v_{m/n} = n - \frac{N}{M}m = \frac{N}{M}(m_0 - m) = -\frac{N}{M}m^*$$

なる関係を用いると

$$l = -\frac{N}{M\Omega(J)}m^* \quad (4-14)$$

となり、 $\Omega(J)$ で表される磁気面では $m=1$ の静電波のフーリエ・モード l が共鳴するのに対して $m=k$ の静電波はフーリエモード $l \times k$ に対し共鳴をすることになる。したがって各静電波 m に対する共鳴面の位置関係は図4.5 (c) の様になり、 $m=1$ の静電波が作る共鳴面数に対して $m=k$ の静電波の作る共鳴面数は k 倍に増えることになる。

さて区間Aの距離 δJ は $\Omega(J)$ を J_l の近傍で一次まで展開することにより

$$\delta J = J_{l+1} - J_l = \frac{\Omega(J_{l+1}) - \Omega(J_l)}{\Omega'(J_l)} = -\frac{v_{m/n}}{l(l+1)\Omega'(J_l)} \quad (4-15)$$

で与えられる。また m の静電波の共鳴面間の距離は区間A内では $\delta J/m$ で等間隔だとする。ここで異なる静電波の作る共鳴面を全て考慮し図4.5 (c) の J 軸上に射影しこの中で最も大きい区間をBとすると、Bの間隔は

$$\delta J / \max\{m^*\} \quad (4-16)$$

である。A内全てがストカスティックになるためにはこの一番広い区間Bでアイランドが重なりあえばよいので、区間Bにチリコフの重なるの判定を適用する。

ところで、静電波のモード数が大きくなった場合、サブアイランドの幅を与える(4-8)の中に見えるフーリエ係数 a_m は $1/m$ によらず一定でありこれは

$$\Delta = \sqrt{\frac{M\beta a}{m \frac{\partial \Omega}{\partial J}(J_r)}} \quad (4-17)$$

で与えられる。サブアイランドの幅 Δ とアイランド軸間の距離 $\delta J / \max\{m_*\}$ を用いるとチリコフの重なるの判定は

$$2\Delta \geq \delta J / \max\{m_*\}$$

となり、(4-3-6) (4-3-7) を代入すると

$$\sqrt{\beta} \geq \sqrt{\frac{m}{M a \Omega} \frac{v_{m/n}}{l(l+1)2 m_*} \frac{1}{m_*}} \sim \frac{1}{m_*} \quad (4-18)$$

なる関係が得られる。したがってAをストカスティックにする静電波強度のしきい値は

$$\beta_{\text{crit}}^2 \sim m_*^{-4} \quad (4-19)$$

と表す事ができる。この関係から粒子軌道をストカスティックにする電場エネルギー β_{crit}^2 は磁気島の中にある静電波数の4乗に反比例し、磁気島中にある静電波の数が多いほど小さいエネルギーで粒子軌道をストカスティックにすることが言える。これを示したのが図4.6である。これらは同じ電場エネルギーを持つ、単一モードの静電波を入れた場合(図4.6 (a))と、空間的に局在した複数の静電波を入れた場合(図4.6 (b))とを比較したもので後者の方がよりストカスティックになっていることがわかる。

5. 静電ドリフト波による磁気島中の粒子拡散

今まで述べたストカスティックな粒子挙動が粒子の酔歩に起因し拡散過程となっていることが予想される。本章では粒子挙動が拡散過程となっていることを示し、次いで拡散係数を算出する。

5.1 ストカスティックな粒子拡散

前章までの議論で磁場摂動中を運動している荷電粒子の軌道が静電波摂動によってサブ・アイランドを形成し、隣接したサブ・アイランドが互いに重なると、粒子がどちらのアイランドを回るか迷い

$$\Delta = \sqrt{\frac{M\beta a}{m \frac{\partial \Omega}{\partial J}(J_r)}} \quad (4-17)$$

で与えられる。サブアイランドの幅 Δ とアイランド軸間の距離 $\delta J / \max\{m_*\}$ を用いるとチリコフの重なる判定は

$$2\Delta \geq \delta J / \max\{m_*\}$$

となり、(4-3-6) (4-3-7) を代入すると

$$\sqrt{\beta} \geq \sqrt{\frac{m}{M a \Omega} \frac{v_{m/n}}{l(l+1)2} \frac{1}{m_*}} \sim \frac{1}{m_*} \quad (4-18)$$

なる関係が得られる。したがってAをストカスティックにする静電波強度のしきい値は

$$\beta_{\text{crit}}^2 \sim m_*^{-4} \quad (4-19)$$

と表す事ができる。この関係から粒子軌道をストカスティックにする電場エネルギー β_{crit}^2 は磁気島の中にある静電波数の4乗に反比例し、磁気島中にある静電波の数が多いほど小さいエネルギーで粒子軌道をストカスティックにすることが言える。これを示したのが図4.6である。これらは同じ電場エネルギーを持つ、単一モードの静電波を入れた場合(図4.6 (a))と、空間的に局在した複数の静電波を入れた場合(図4.6 (b))とを比較したもので後者の方がよりストカスティックになっていることがわかる。

5. 静電ドリフト波による磁気島中の粒子拡散

今まで述べたストカスティックな粒子挙動が粒子の酔歩に起因し拡散過程となっていることが予想される。本章では粒子挙動が拡散過程となっていることを示し、次いで拡散係数を算出する。

5.1 ストカスティックな粒子拡散

前章までの議論で磁場摂動中を運動している荷電粒子の軌道が静電波摂動によってサブ・アイランドを形成し、隣接したサブ・アイランドが互いに重なると、粒子がどちらのアイランドを回るか迷い

だし、ストカスティックな振るまいをすることを述べた。この描像から粒子はいわゆる「酔歩」をしている事が予想され、ブラウン運動などとのアナロジーから粒子拡散が考えられる。実際今までの計算においても、粒子が拡散的振舞いをしていることは予想されていた。これを明示したものが図 5.1 であり、これらは時刻 $t=0$ において一つの磁気面上に等間隔に並べられた 200 個の粒子の、トラス 0 周後（初期値）、250 周後、500 周後のポアンカレ写像であり、時間の変遷とともに粒子が磁気面に垂直方向に「拡散」して行っている様子が分かる。ところで、粒子が酔歩し拡散しているというのは現段階では、あくまでも推測に過ぎない。そこで、この考えを確証するために、先ず軌道計算から各時刻における粒子分布を求め、ガウス過程の条件を満たしているかどうかを検証する。この上でガウス過程を記述するフォッカー・プランク方程式における拡散係数を計算する。ところで、サブ・アイランドの重なり程度は場所によって異なるので、軌道の乱れは空間的に一様でなく、拡散係数は空間的に変化していると考えられる。これを確認するために（ア）拡散係数を用いフォッカー・プランク方程式を解いて得た粒子分布と、（イ）粒子軌道計算によって直接得た粒子分布と、を比較する。

5.2 ガウス過程とフォッカー・プランク方程式

ガウス過程は、空間座標 J 及び時間 t に関する、ある確率過程 $z(J, t)$ の異なった時刻 t_1 及び t_2 の間の相関関数 ϕ が次式によって規定されるものである。

$$\phi(t_1 - t_2) = \langle z(J_1, t_1) z(J_2, t_2) \rangle = g(J_1, J_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (5-1)$$

ここで、 $\langle \rangle$ は粒子に対するアンサンブル平均である。すなわち、ガウス過程では確率過程 $z(J, t)$ に関する任意の二つの事象の相関が無限小時間で消滅する。このガウス過程では、粒子の分布関数 $f(J, t)$ の時間変化は、次の「フォッカー・プランク方程式」によって記述される。

$$\frac{\partial}{\partial t} f(J, t) = \left(-\frac{\partial}{\partial J} V(J) + \frac{\partial^2}{\partial J^2} D(J) \right) f(J, t) \quad (5-2)$$

$$V(J) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta J \rangle}{\Delta t}$$

$$D(J) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta J)^2 \rangle}{2 \Delta t}$$

上式は S を流束とすると

$$\frac{\partial}{\partial t} f(J, t) = - \frac{\partial S}{\partial J} \quad (5-3)$$

$$S = V(J) f(J, t) - \frac{\partial}{\partial J} D(J) f(J, t)$$

と変形され、平衡状態における分布関数を $f_{eq}(J)$ とすると

$$S = V(J) f_{eq}(J, t) - \frac{\partial}{\partial J} D(J) f_{eq}(J, t) = 0$$

となるから

$$\begin{aligned} V(J) &= \frac{1}{f_{eq}} \frac{\partial}{\partial J} (D(J) f_{eq}) \\ &= - \frac{\partial D(J)}{\partial J} + D(J) \frac{\partial (\log f_{eq})}{\partial u} \end{aligned}$$

が得られ、これを代入し (5-2) は

$$\frac{\partial}{\partial t} f(J, t) = \frac{\partial}{\partial J} \left[D(J) \left\{ - \left(\frac{\partial}{\partial J} \log f_{eq}(J) \right) + \frac{\partial}{\partial J} \right\} f(J, t) \right]$$

と変形される。ここで詳細釣り合いの原理が成立すれば、 $f_{eq}(J) = \text{const.}$ であり、

$$\frac{\partial f(J, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial J} D(J) \frac{\partial f(J, t)}{\partial J} \quad (5-4)$$

となる。(5-2) における拡散係数 $D(J)$ が求まれば上式を解くことにより系の粒子分布が記述できることになる。

5.3 粒子軌道の自己相関時間の算出

さて § 5.2 において厳密な意味での相関時間が無限小で (5.2.1) を満たすガウス過程がフォック-プランク方程式で記述される事を述べた。しかしながら現実にかかる現象では、相関時間が無限

小であることは考えられない。本研究の粒子運動を考えた場合、粒子が過去の履歴を忘れ全く違った運動の状態に移り、拡散過程と見なせるようになるためには、有限時間の経過が必要である。この有限時間として自己相関時間が一つの目安となる。ある時間に関する不規則変量を $x(t)$ とすると τ 時間隔った二つの変動の積の平均値

$$C(\tau) = \langle x(t) x(t+\tau) \rangle \quad (5-5)$$

を自己相関関数という（隔たり時間 τ をラグという）。ここでの平均操作 $\langle \rangle$ は原義的には粒子のアンサンブル平均であるが、定常確率過程ではこれを時間平均に置き換えることができ（エルゴート仮説）、時刻 t に無関係な τ のみで決まるものとなる。従って (5-5) 式は

$$C(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt \quad (5-6)$$

として表される。この相関関数が

$$\frac{C(\tau)}{C(0)} = \frac{1}{e}$$

（ e は自然対数）に減衰する時間を自己相関時間 τ_c と定義する。今回は速度を変数として自己相関関数を求めた [10]。

$$\begin{aligned} C_v(\tau) &= \overline{\delta v(t) \delta v(t+\tau)} & (5-7) \\ \delta v(t) &= v(t) - \overline{v(t)} \\ v(t) &= \frac{dJ}{dt} \end{aligned}$$

図 5.2 (a) は初期値 $J=0.71$ ($x=0.8, \zeta=0.0$) としたときの一つの粒子について軌道計算を行い作用変数 J に関する速度 $\delta v(t)$ の時間変化を表したものである。図 5.2 (b) は横軸にラグタイム τ をとり、(5-7) の相関関数を示したものである。ここで相関時間 $\tau_c=1.2$ であり、トーラス 1.2 周回ると粒子は過去の履歴を失うといえる。この様に予め各磁気面に対して自己相関時間を算出しておき、粒子の統計量の算出に当っては自己相関時間より十分長く粒子軌道を追跡するようにした。

5.4 キュムラントによる粒子分布の評価

本節では、キュムラントを算出し、粒子の統計的振舞いがガウス過程であるかどうかを判定する。

ガウス過程である粒子の分布関数 f は、 m を平均値、 σ^2 を分散とすると、常にガウス分布

$$f(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(J-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5-8)$$

に従い、 $\langle \Delta J^n \rangle_c$ を n 次のキュムラントとすると（キュムラントに関しては付録 [B] 参照）

$$\begin{aligned} \langle \Delta J \rangle_c &= m \\ \langle \Delta J^2 \rangle_c &= \sigma^2 \\ \langle \Delta J^n \rangle_c &= 0 \quad (n \geq 3) \end{aligned} \quad (5-9)$$

が成立する。ガウス過程であれば、2次のキュムラントは時間に比例して増加し、三次以上のキュムラントは0である。従って複数の粒子について、キュムラントを算出してこれが(5-9)の各式を満たせば粒子の統計的振舞いはガウス過程であるといえる。

図5.3は $J/J_s = 0.8$ (J_s はセパトリックス上における作用変数の値) の磁気面上に1000個の粒子を等間隔に並べ軌道計算を行い、1次～4次のキュムラントを算出しその時間変化を表したものである。キュムラントはモーメント

$$\langle \Delta J^n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta J_i^n \quad (1 \leq n \leq 4) \quad (5-10)$$

より求めた。（付録 [B] 参照）ここで、 N は粒子数である。この図から分かるように、自己相関時間を越える特徴的な時間 ($t = T_{sk}$) に達するまでは2次のキュムラントは時間に比例して増加し、3次、4次のキュムラントは有為の値をとらない。従って、ガウス過程の条件(5-9)は満たされており、粒子の振舞いが局所的には拡散過程となっている事を示している。これに対して、粒子を T_{sk} を超えて長時間追跡するとこの関係は成立しなくなり、粒子分布はガウス型からずれて来る。このガウス型からのずれは、拡散係数が空間的に一様でないためにある程度時間がたつと初期位置から大きく離れた粒子が初期位置の拡散係数と異なる拡散係数に従って運動し、拡散係数の大きい方へと粒子が拡散するためであると考えられる。この場合、ガウス型からずれる特徴的な時間 T_{sk} は拡散係数の空間的不均一性を表す指標になっていると考えられる。このことを確認するために、以下で、拡散係数の空間分布を計算し、この値を用いて「拡散係数が空間的に変化している系」での拡散方程式を解き、粒子軌道によって直接得られた粒子分布との比較を行う。

5.5 局所的拡散係数の算出

前節において短い時間に関しては粒子はガウス過程の条件を満たしていることを示した。この条件を満たしている範囲内では拡散係数

$$D(J) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle (\Delta J)^2 \rangle}{2 \Delta t} \quad (5-11)$$

が定義される。ところで、前述したようにKAMの定理によれば摂動があるしきい値より大きい時のみ粒子軌道はストカスティックになる。この摂動のしきい値の大きさは場所によって異なるので、粒子軌道のストカスティックな領域と安定な領域が分かれて存在することになる。このような安定な軌道領域とストカスティックな軌道領域の界をKAM面と呼ぶ。この様子を示したのが図5.4である。これは1000個の粒子のトーラス2000周後までのポアンカレ写像であり、粒子の通過点によって黒く塗りつぶされた領域と、粒子が通過しない白い領域とに分かれる。したがって、粒子が自由に移動でき拡散が見られるのはストカスティックな領域内のみであり、安定な領域へは移動することはできない。拡散係数はストカスティックな領域内のみで算出した。

図5.5及び図5.6に具体的な拡散係数算出法を示した。図において時刻 $T = T_{sk}$ まではガウス過程と見なすことができるので拡散係数を時刻 T_{sk} における2次のキュムラントの値を用いて

$$D(J) = \frac{\langle (\Delta J)^2 \rangle_c (t = T_{sk})}{T_{sk}} \quad (5-11')$$

として算出した。セパトリックスを界に磁気面のトポロジーは不連続に異なっているため、粒子がセパトリックスを越えて（磁気島の内から外、逆に外から内に）移動すると、粒子の振舞いはガウス過程から外れることになる。粒子の初期値がセパトリックスに近い場合には自己相関時間経過以前にセパトリックスを越える粒子が存在し、ガウス過程と見なせる時間が存在しなくなる。そのような場合ここでは粒子がセパトリックス外にでる時刻における微係数

$$D = \frac{d \langle (\Delta J)^2 \rangle_c}{dt} \quad (5-11'')$$

で拡散係数を代用することにした。粒子の初期位置に対応して局所的拡散係数を算出しこれをプロットしたものが図5.7 (a)である。図に示されているように、拡散係数は摂動の微細な構造を反映して空間的に細かい構造を持っている事がわかる。しかし、全体的には、容易に推測できるように、拡

散係数は磁気島のセパトリックスに近づくに従って大きくなっている。以下では、粒子分布の大局的な振舞いを調べるために、拡散係数の微細な空間構造を無視し、図5.7 (a)を放物線型の拡散係数分布で近似することにする。拡散係数の大きさの影響を見るために、絶対値として拡散係数を大きめにとったものが図5.7 (b) 小さめにとったものが図5.7 (c) である。

5.6 フォッカープランク方程式の解と軌道計算結果の比較

さて、前節で求めた拡散係数Dの空間分布を用い、粒子密度nに対するフォッカープランク方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla n) \quad (5-12)$$

を数値的に解いて粒子分布の時間変化を求め、この解を粒子軌道計算から直接求めた粒子分布と比較し、フォッカープランク方程式にもとづいたモデルの妥当性を検討する。この際、キュムラントをもって両者の粒子分布の特性を比較する。3次のキュムラントは歪度を表し、これが正(負)の値をとる場合は座標の正(負)方向に重心がずれていることになる。4次のキュムラントは分布の尖度を表し、これが正の値をとるときガウス分布よりも尖った分布をすることになる。

図5.8は粒子軌道計算により直接求めた粒子分布の1次～4次のキュムラントの時間変化を、また、図5.9、図5.10はそれぞれ拡散係数の上限及び下限を用いて拡散方程式の解より求めた1次～4次のキュムラントの時間変化を示したものである。いずれも粒子の初期位置をセパトリックス内の $J/J_s = 0.7$ とした。4次のキュムラント以外は、大局的な挙動は一致している。特に粒子分布の非対称性を表すところの3次のキュムラントが拡散モデル、軌道計算の双方で正の値をとっていることは、座標の正の方向つまり磁気島のセパトリックスにむかって拡散係数が大きくなるという大局的な傾向の反映であることが確認できた事になる。一方4次のキュムラントが両者で全く違う振舞いをしているのは、より細かい拡散係数の構造に起因していると考えられる。実際、高次のキュムラントは場の乱れの微細構造をより敏感に反映する。従って、高次のキュムラントを解析するためには、拡散係数分布の微細構造を考慮した解析が必要である。冒頭でも述べたように、ストカスティックな振舞いをする粒子が磁気島を横切る時間を評価する事が本研究の目標であった。フォッカープランク方程式に現れる拡散係数D(J)が求まれば、軌道計算を行わなくても系の拡散現象を評価することができるようになる。

6. 結論及び今後の課題

トカマク・プラズマで磁気島を形成する共鳴的な磁場摂動を受けて運動している荷電粒子に、プラズマの異常輸送を引き起こしている、バルーニング・タイプの小振幅、短波長でかつ半径方向に近接した多数の連続したモードを持つ静電ドリフト波摂動が加わった場合の粒子軌道計算を行い、磁気島内及びその近傍で、磁場摂動と静電波摂動の協同効果により粒子軌道がストカスティックな振舞いをすることを示した。粒子軌道のストカシシティーを定量的に評価するためKSエントロピーを計算し、KSエントロピーが静電波摂動の振幅と共に大きくなる事を示した。又、粒子軌道がストカスティックになる機構について調べ、磁気摂動による粒子の運動周期と静電波摂動のフーリエ・モードとの共鳴によりサブ・アイランドが次々と形成され、これらのサブ・アイランドが互いに重なるためである事を確認した。更に、チリコフのアイランド重なるの判定条件を用いて、静電波の性質と粒子軌道をストカスティックにする摂動電場エネルギーの関係を定式化した。その結果、磁気島中に入っている静電波摂動のモード数を m とすると、粒子軌道をストカスティックにするのに必要な摂動電場のエネルギー β_{crit}^2 は

$$\beta_{crit}^2 \sim m^4$$

として与えられる事を示した。この関係は磁気島中にある静電波のモード数が多いほど静電波摂動全体のエネルギーが小さくても粒子軌道がストカスティックになることを示している。これを実際の静電波の性質に即して考えると、磁気島中の粒子をストカスティックにするには、単一モードで空間的に広がった静電波よりも小振幅で多数の連続したモードを持つ静電波の方が、小さな電場エネルギーで済むということが言える。今までは磁気島同士等、同程度の振幅を持つ摂動の共同作用による粒子軌道のストカシシティーについては調べられてきたが、本研究で大振幅で巨視的な波動と（磁気島を作る磁場摂動）、小振幅で微視的な波動（静電ドリフト波）という全くスケールの異なる波動が協同作用した場合でも粒子がストカスティックになる事が示された事は一般のストカスティックな軌道の考察に対しても重要な結果であると言える。

粒子軌道がストカスティックになるのはサブ・アイランドが重なりあい、粒子がどちらのアイランドを回るか迷い出すからであった。したがって粒子は酔歩しており、拡散現象が起きていると考えられる。実際、多数の粒子についての軌道計算を行い、そのキュムラントを調べたところ粒子が初期位置から大きく隔たらない範囲では粒子分布は2次以下のキュムラントで規定されるガウス型となって

おり、粒子の統計的振舞いは局所的には拡散過程となっていること事を示した。又、粒子の初期値を変え局所的拡散係数の空間分布を求めたところ、拡散係数が空間的な構造を持っており、磁気島のセパトリックスに近づくに従って大きくなっている事を確認した。この拡散係数の空間的な構造は場のストカシィシィティの空間的な構造を反映したものであり、K S エントロピー分布に対応している。一方で粒子を長時間追跡すると3次以上の高次のキュムラントが有為の値を持つようになり、粒子分布はガウス型からずれてくる。これは、上に述べたように、拡散係数が空間的に変化しているためであると考えられる。この為、(ア)局所的拡散係数の空間分布を粗視化した拡散係数分布を用いて拡散方程式を解くことにより得られた粒子分布と、(イ)粒子軌道計算によって直接求めた粒子分布、の比較を行い、この事を確認した。又、この解析で4次のキュムラントについては両者で異なった振舞いをする事を示したが、これは拡散方程式拡散係数の細かい構造に起因していることが推測される。

本研究を通して、粒子軌道がストカスティックになり、これが大域的な拡散現象に結び付いている事を示した。この結果は、磁気島近傍で粒子軌道がストカスティックになると、半径方向に磁気島が列んでいた場合には、厳密に磁気島同士が重なりあわなくても、より大域的な径方向の拡散が起こる事を示唆している。

最後に、本研究で残された課題について述べておく。本研究では、磁気島内での粒子挙動に焦点をあわせて問題を単純化し、数値計算と解析両面から、サブ・アイランドのサイズで粗視化した場合、粒子挙動が拡散過程で表現できることを示した。しかし、静電波摂動の振幅が小さくなった場合粒子挙動は、より場の詳細な構造に依存するようになり、拡散過程からずれてくると考えられる。一方、より大域的には磁気島全体にわたっての閉じ込めの観点からは、磁気島のサイズで粗視化した粒子挙動解析も必要である。これらの解析は今後の研究課題として残されている。更に、本研究では粒子間の衝突時間が、粒子のストカシィシィティに関する自己相関時間より充分長いため、クーロン衝突の効果を考慮していないが、粒子を長時間追跡する場合には衝突効果も無視できなくなる。又、トロイダル配位での捕捉粒子に対する効果も実際のプラズマを解析する上で重要になる。これらの効果は、今後、トロイダル配位で、モンテカルロ法を用いた解析により研究を進めていく事を考えている。最後に、本研究では、一番大きな物理的仮定として、摂動場は粒子運動と独立に与えられたものとして解析を進めてきた。更に、磁場摂動と静電摂動も独立の摂動であると仮定してきた。しかし、プラズマ中に生起する摂動は粒子運動に起因しており、特に、静電摂動は粒子運動を通じて磁場摂動の影響を強く受けると考えられる。この問題を取り扱う為には、粒子運動と摂動を矛盾無く解析する必要

があり、今後の長期的な研究課題である。

謝 辞

本論文は著者の一人（西村）が日本原子力研究所の特別研究生として同研究所に滞在中に行った研究をまとめたものである。本研究の機会を与え終始支援してくださいました那珂研究所長 田村早苗博士及び炉心プラズマ研究部長 岸本浩博士に感謝致します。又、本研究について貴重な議論をして頂いたプラズマ理論研究室の津田孝、滝塚知典両博士に深く感謝致します。

参 考 文 献

- [1] J.D.Callen et al., "Magnetic 'Islandography' in Tokamaks", in Plasma Phys. and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 7th Int. Conf., Innsbruck, 1978), Vol 1, IAEA, Vienna (1970) 415
- [2] D.F.Duchs et al., "On Diffusion of Magnetic Field Lines", Plasma Phys. and Controlled Fusion, 33 (1991)919
- [3] B.Weyssow et al., "Chaotic Diffusion across Magnetic Island Due to A Single Low-Frequency Electrostatic Wave, Plasma Phys. and Controlled Fusion, 33 (1991)763
- [4] B.V.Chirikov, "A Universal Description of Many Dimensional Oscillator Systems", Phys. Rep. 52(1979)263
- [5] B.V.Chirikov, "Particle Dynamics in Magnetic Traps", Review of Plasma Phys.13(1987)1
- [6] Lichtenberg and Lieberman, "Regular and Stochastic Motion" (Springer Verlag, Berlin, 1983)

があり、今後の長期的な研究課題である。

謝 辞

本論文は著者の一人（西村）が日本原子力研究所の特別研究生として同研究所に滞在中に行った研究をまとめたものである。本研究の機会を与え終始支援してくださいました那珂研究所長 田村早苗博士及び炉心プラズマ研究部長 岸本浩博士に感謝致します。又、本研究について貴重な議論をして頂いたプラズマ理論研究室の津田孝、滝塚知典両博士に深く感謝致します。

参 考 文 献

- [1] J.D.Callen et al., "Magnetic 'Islandography' in Tokamaks", in Plasma Phys. and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 7th Int. Conf., Innsbruck, 1978), Vol 1, IAEA, Vienna (1970) 415
- [2] D.F.Duchs et al., "On Diffusion of Magnetic Field Lines", Plasma Phys. and Controlled Fusion, 33 (1991)919
- [3] B.Weyssow et al., "Chaotic Diffusion across Magnetic Island Due to A Single Low-Frequency Electrostatic Wave, Plasma Phys. and Controlled Fusion, 33 (1991)763
- [4] B.V.Chirikov, "A Universal Description of Many Dimensional Oscillator Systems", Phys. Rep. 52(1979)263
- [5] B.V.Chirikov, "Particle Dynamics in Magnetic Traps", Review of Plasma Phys.13(1987)1
- [6] Lichtenberg and Lieberman, "Regular and Stochastic Motion" (Springer Verlag, Berlin, 1983)

があり、今後の長期的な研究課題である。

謝 辞

本論文は著者の一人（西村）が日本原子力研究所の特別研究生として同研究所に滞在中に行った研究をまとめたものである。本研究の機会を与え終始支援してくださいました那珂研究所長 田村早苗博士及び炉心プラズマ研究部長 岸本浩博士に感謝致します。又、本研究について貴重な議論をして頂いたプラズマ理論研究室の津田孝、滝塚知典両博士に深く感謝致します。

参 考 文 献

- [1] J.D.Callen et al., "Magnetic 'Islandography' in Tokamaks", in Plasma Phys. and Controlled Nuclear Fusion Research (Proc. 7th Int. Conf., Innsbruck, 1978), Vol 1, IAEA, Vienna (1970) 415
- [2] D.F.Duchs et al., "On Diffusion of Magnetic Field Lines", Plasma Phys. and Controlled Fusion, 33 (1991)919
- [3] B.Weyssow et al., "Chaotic Diffusion across Magnetic Island Due to A Single Low-Frequency Electrostatic Wave, Plasma Phys. and Controlled Fusion, 33 (1991)763
- [4] B.V.Chirikov, "A Universal Description of Many Dimensional Oscillator Systems", Phys. Rep. 52(1979)263
- [5] B.V.Chirikov, "Particle Dynamics in Magnetic Traps", Review of Plasma Phys.13(1987)1
- [6] Lichtenberg and Lieberman, "Regular and Stochastic Motion" (Springer Verlag, Berlin, 1983)

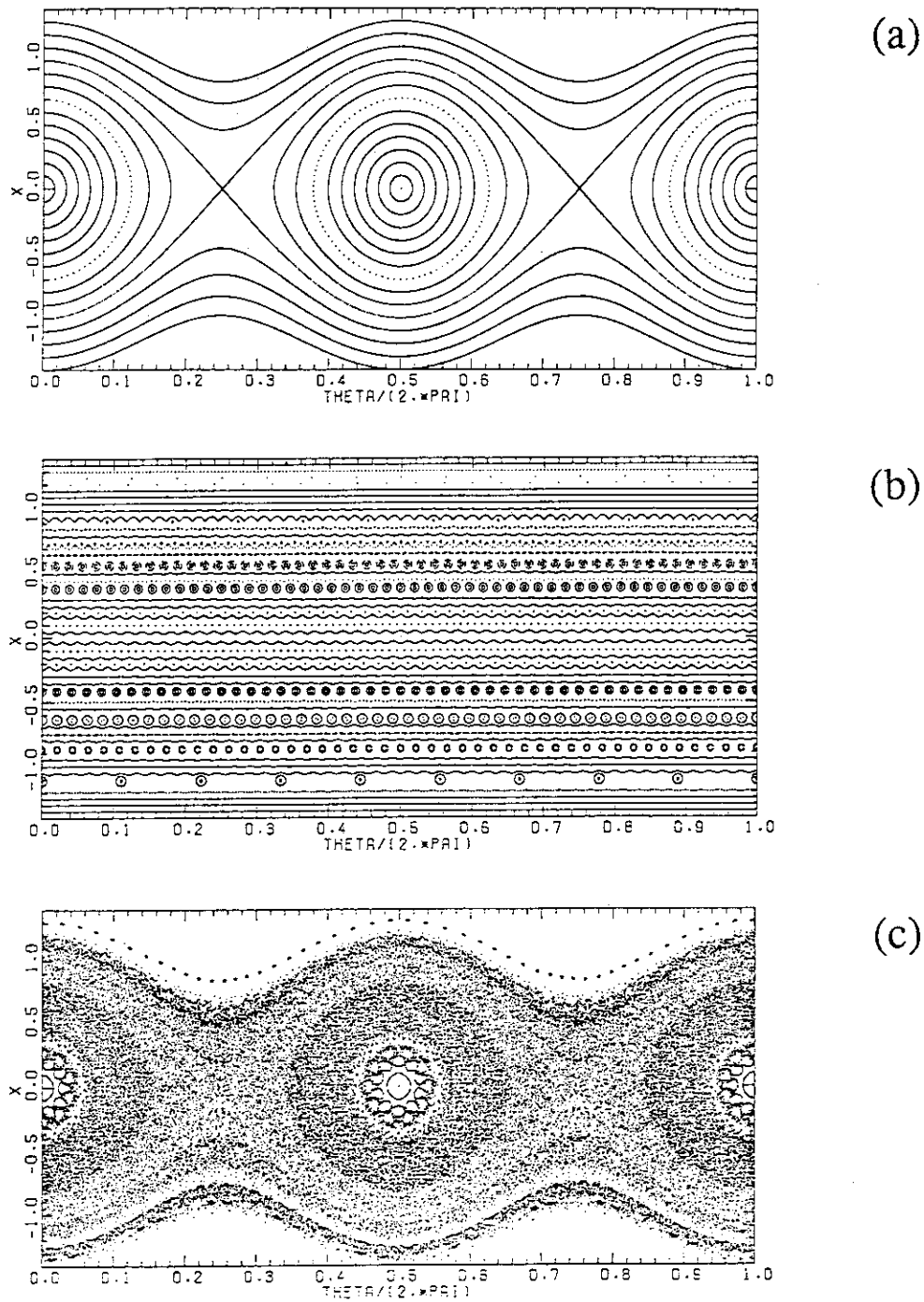


図2.1 案内中心のトーラス2000周後までのポアンカレ写像。縦軸が径方向，横軸がポロイダル方向に相当。(a)磁場摂動のみ加わった場合， $\alpha=0.1$ ， $\beta=0$ ，初期値： $x_i=(1/14) \times i-1$ ， $\zeta_i=0$ ($1 \leq i \leq 28$) (b)静電波摂動のみ加わった場合， $\alpha=0$ ， $\beta=0.005$ ， $45 \leq m \leq 55$ ，初期値： $x_i=(1/28) \times i-1$ ， $\zeta_i=0$ ($1 \leq i \leq 56$) (c)磁場摂動と静電波摂動の両方が加わった場合， $\alpha=0.1$ ， $\beta=0.005$ ， $45 \leq m \leq 55$ ，初期値： $x_i=(1/14) \times i-1$ ， $\zeta_i=0$ ($1 \leq i \leq 28$)

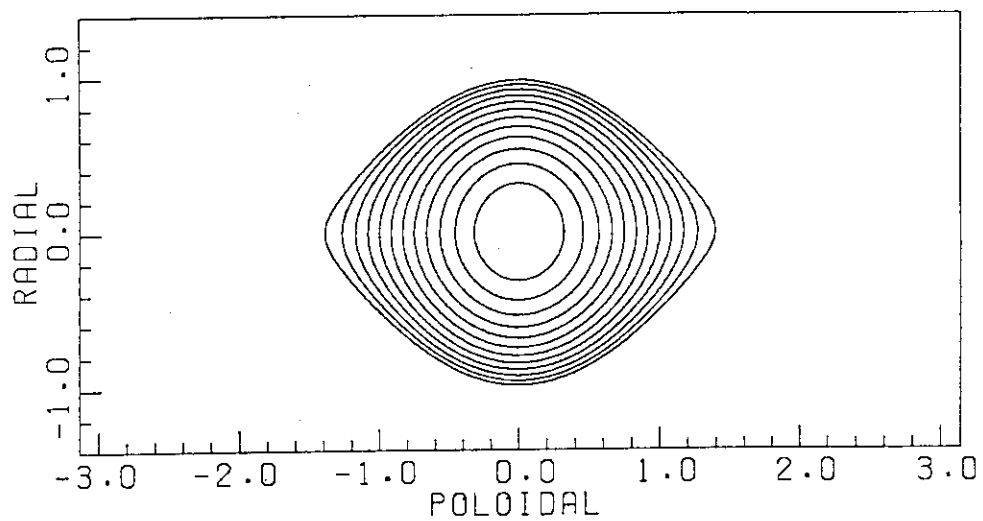


図3.1 磁気島内の定J曲線 (Jに関して等間隔, $\Delta J = 0.10$)

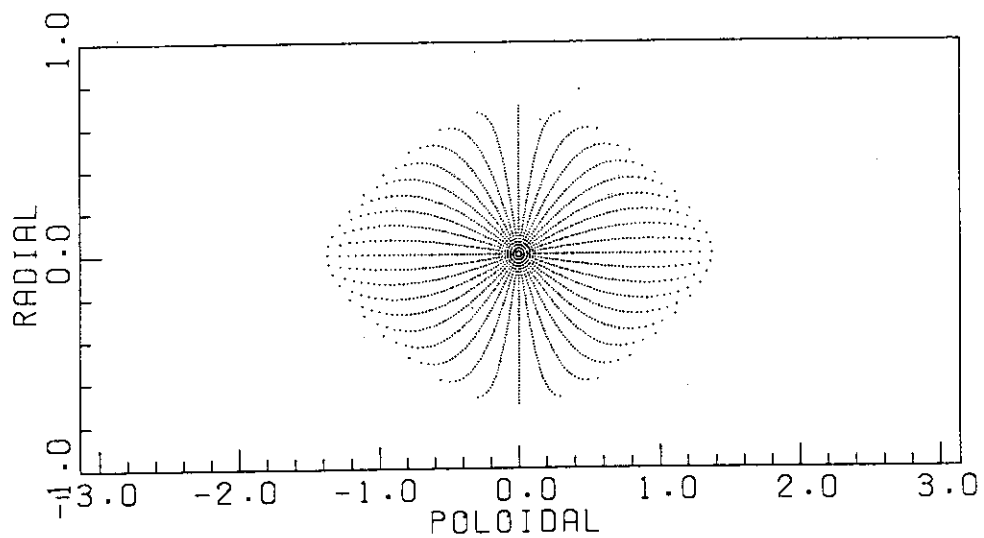


図3.2 磁気島内の定 θ 曲線 (θ に関して等間隔, $\Delta\theta = 2\pi/40$)

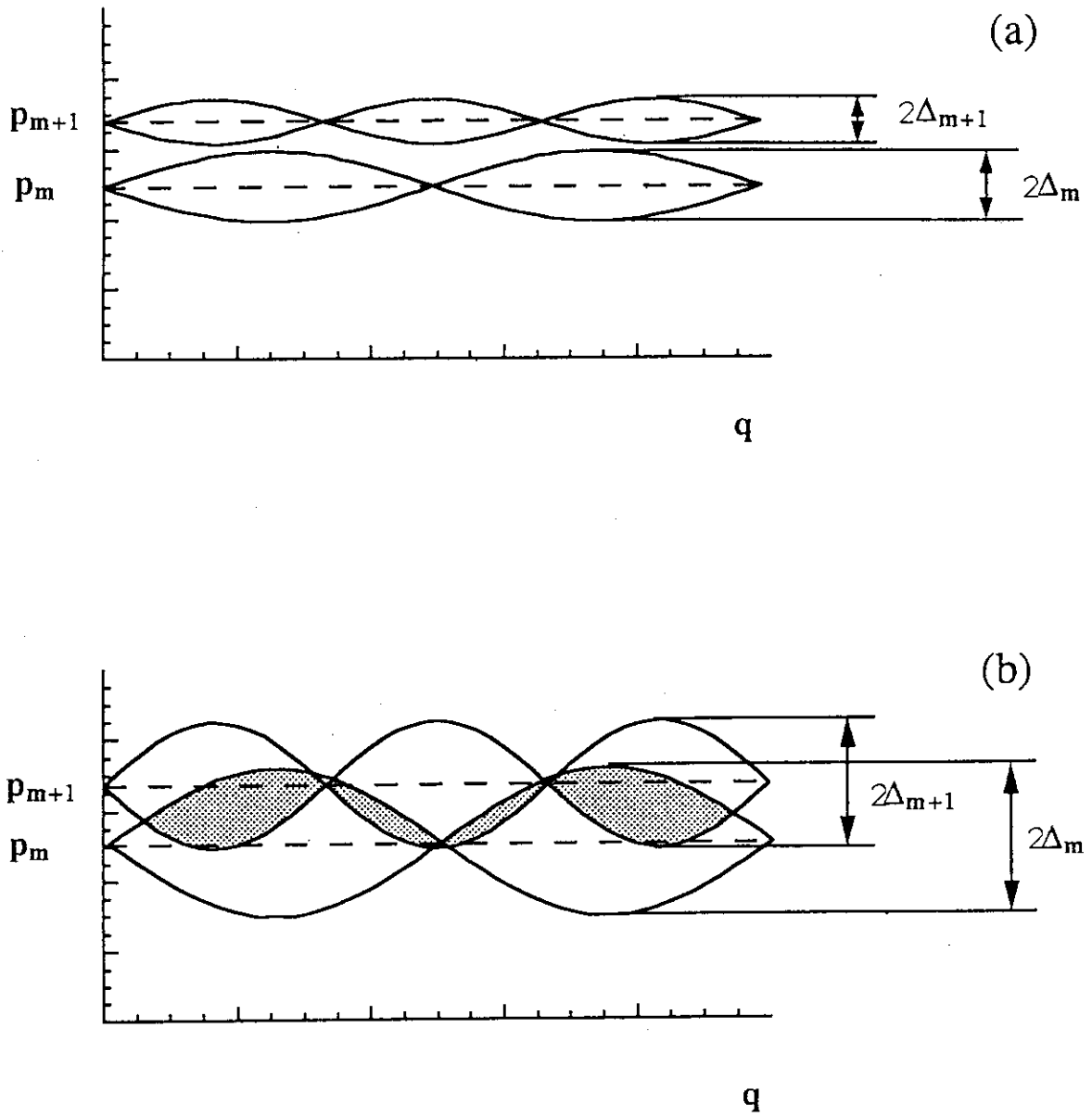


図3.3 チリコフの重なり判定 (a)アイランドが離れている状態 ($\Delta_m + \Delta_{m+1} < |P_m - P_{m+1}|$): Δ_m はアイランドの半振幅, P_m はアイランド軸の位置 (b)アイランドが重なった状態 ($\Delta_m + \Delta_{m+1} > |P_m - P_{m+1}|$)

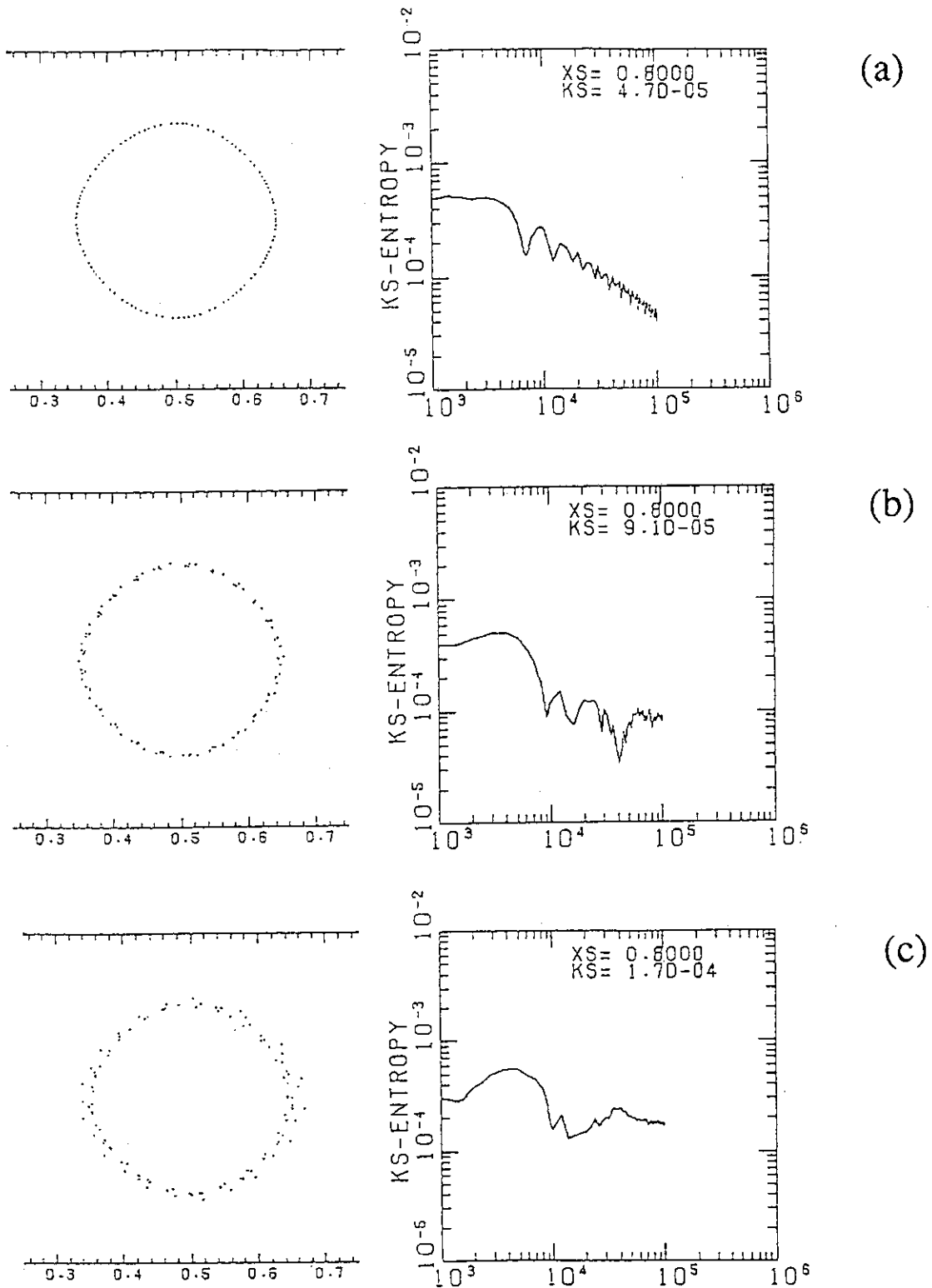
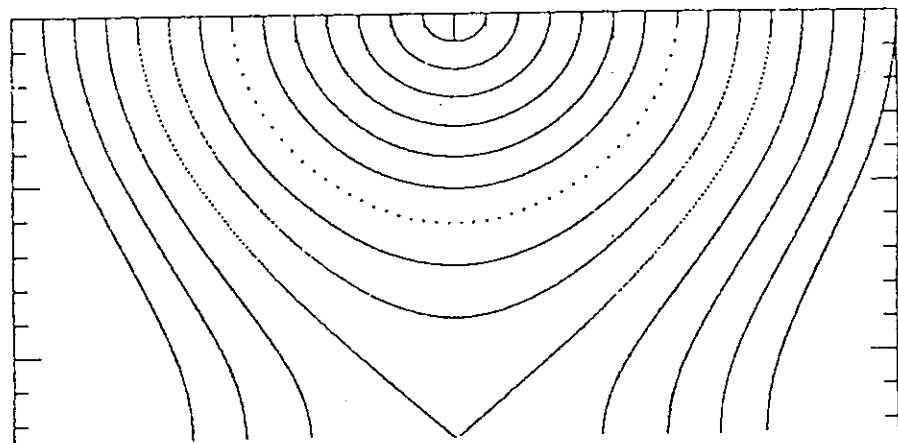
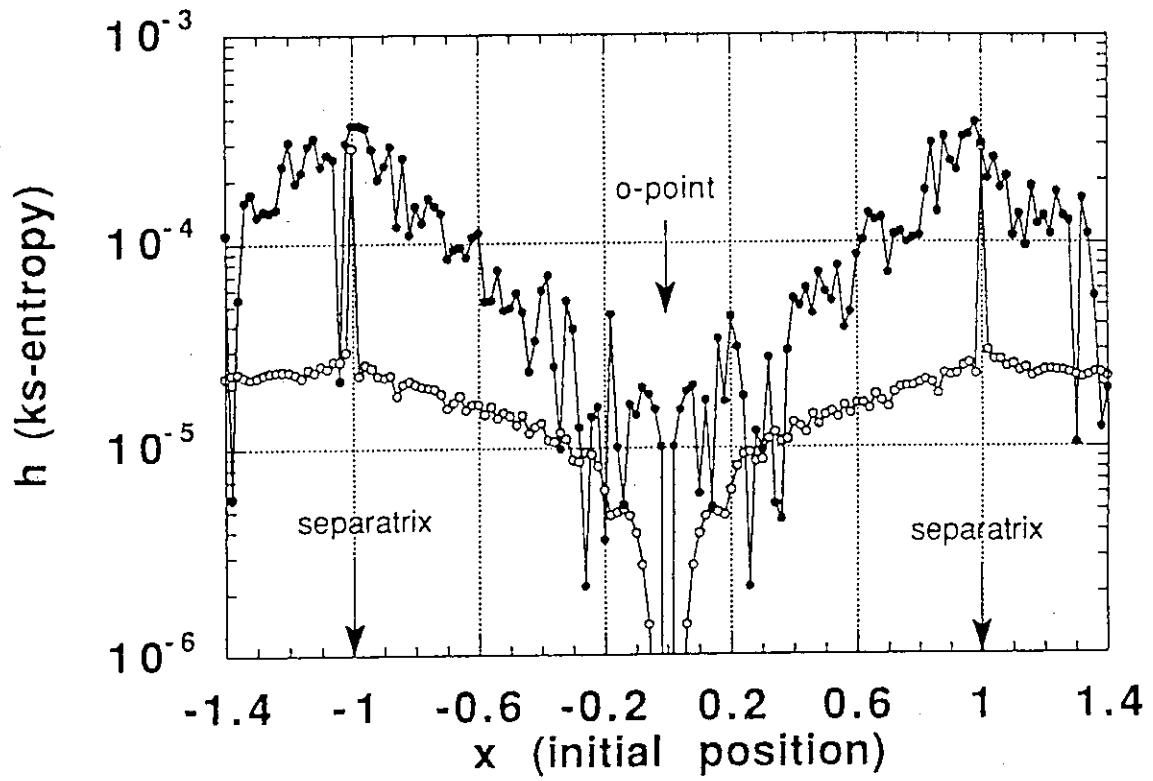


図4.1 粒子軌道に関するポアンカレ写像とKSエントロピーの時間変化, 摂動静電波の強度 β を変化させたものを比較: いずれも初期値 $x_0 = 0.8$, $\zeta_0 = 0$ の一つの粒子についてトーラス 200 周後まで. (a) $\beta = 0$ (b) $\beta = 0.0025$, 静電波のモード $45 \leq m \leq 55$ (c) $\beta = 0.005$, 静電波のモード $45 \leq m \leq 55$



実空間との対応

図4.2 初期値の異なる複数の粒子のトーラス 700周後のKSエントロピーの値, $\alpha=0.1$, 初期値: $x_i = i \times 0.02 - 1.4$, $\zeta_i = 0$, ($1 \leq i \leq 140$), \circ : $\beta = 0$, 静電波摂動のない場合, \bullet : $\beta = 0.005$, $45 \leq m \leq 55$, 静電波摂動のある場合

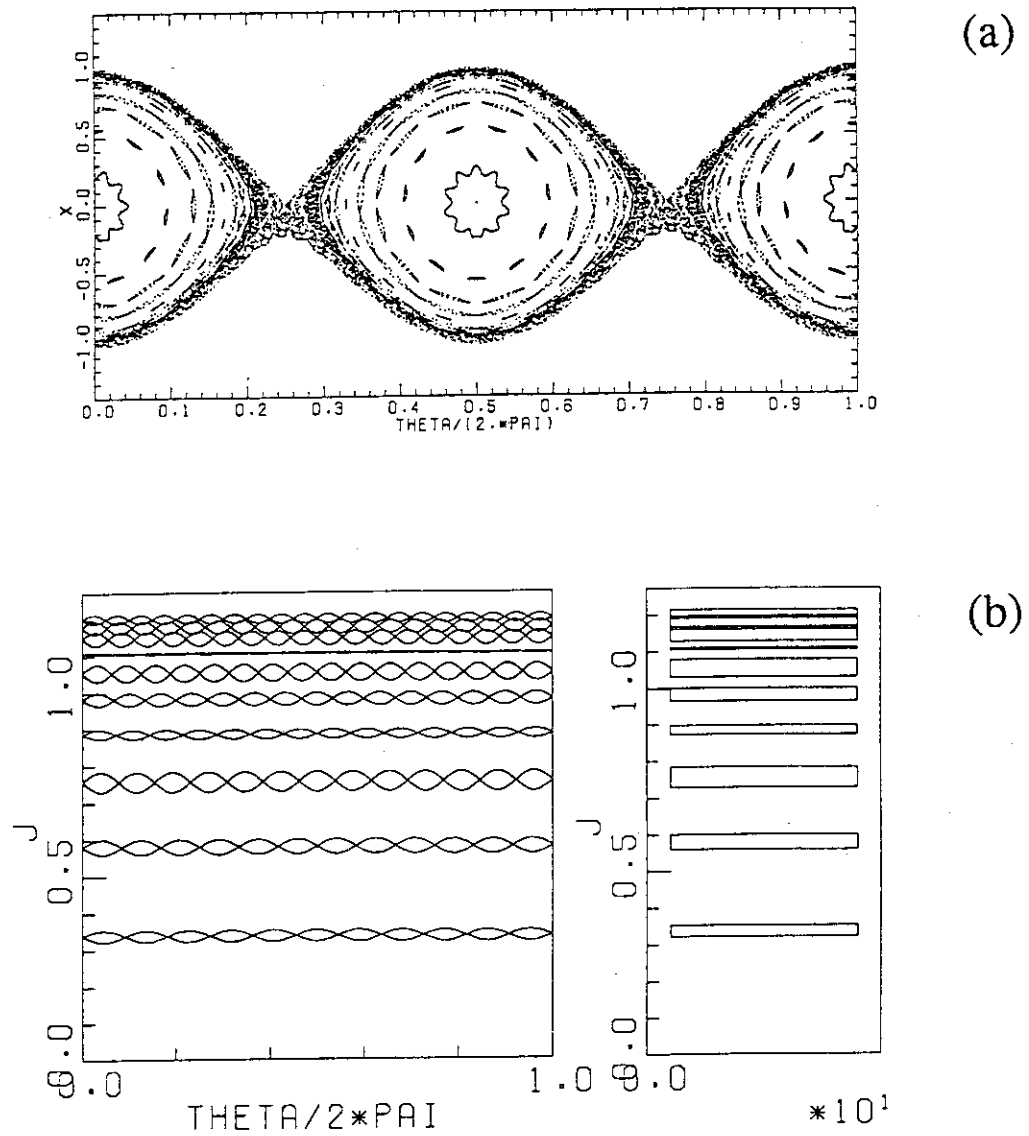


図4.3 (a)実空間 (x, ζ) でのポアンカレ写像, $\alpha=0.1$, $\beta=0.005$, $m=49$, トーラス 2000周後まで, 初期値: $x_1=0$; $\zeta_1=0$; $x_2=0.2$; $\zeta_2=0$; $x_3=0.567$; $\zeta_3=0$; $x_4=0.736$; $\zeta_4=0$; $x_5=0.824$; $\zeta_5=0$; $x_6=0.880$; $\zeta_6=0$; $x_7=0.917$; $\zeta_7=0$; $x_8=0.942$; $\zeta_8=0$; $x_9=0.958$; $\zeta_9=0$; $x_{10}=0.970$; $\zeta_{10}=0$; $x_{11}=0.978$; $\zeta_{11}=0$; $x_{12}=0.984$; $\zeta_{12}=0$; $x_{13}=1.000$; $\zeta_{13}=0$; (b)作用角変数 (J, θ) 空間での解析結果によるセパトトリックス方程式, 右側; 共鳴位置とアイランド幅を示唆したもの

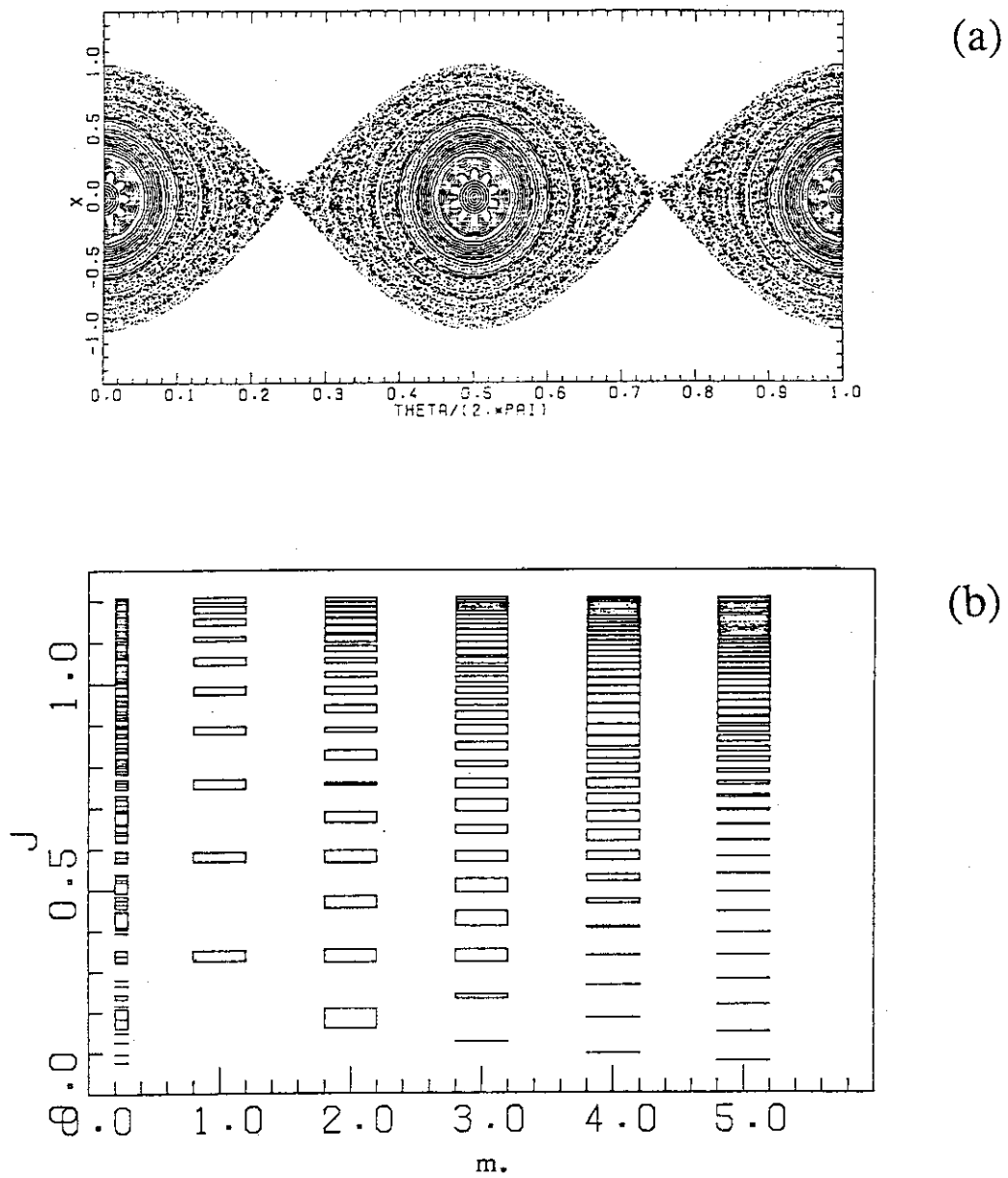


図4.4 (a)実空間 (x, ζ) でのポアンカレ写像, $\alpha=0.1$, $\beta=0.001$, $45 \leq m \leq 55$, トーラス 2000周後まで, 初期値: $x_i = i \times 0.02$, $\zeta_i = 0$, ($1 \leq i \leq 50$) (b)作用角変数 (j, θ) 空間での解析結果によるセパトトリックスの共鳴位置とアイランド幅を示唆したもの

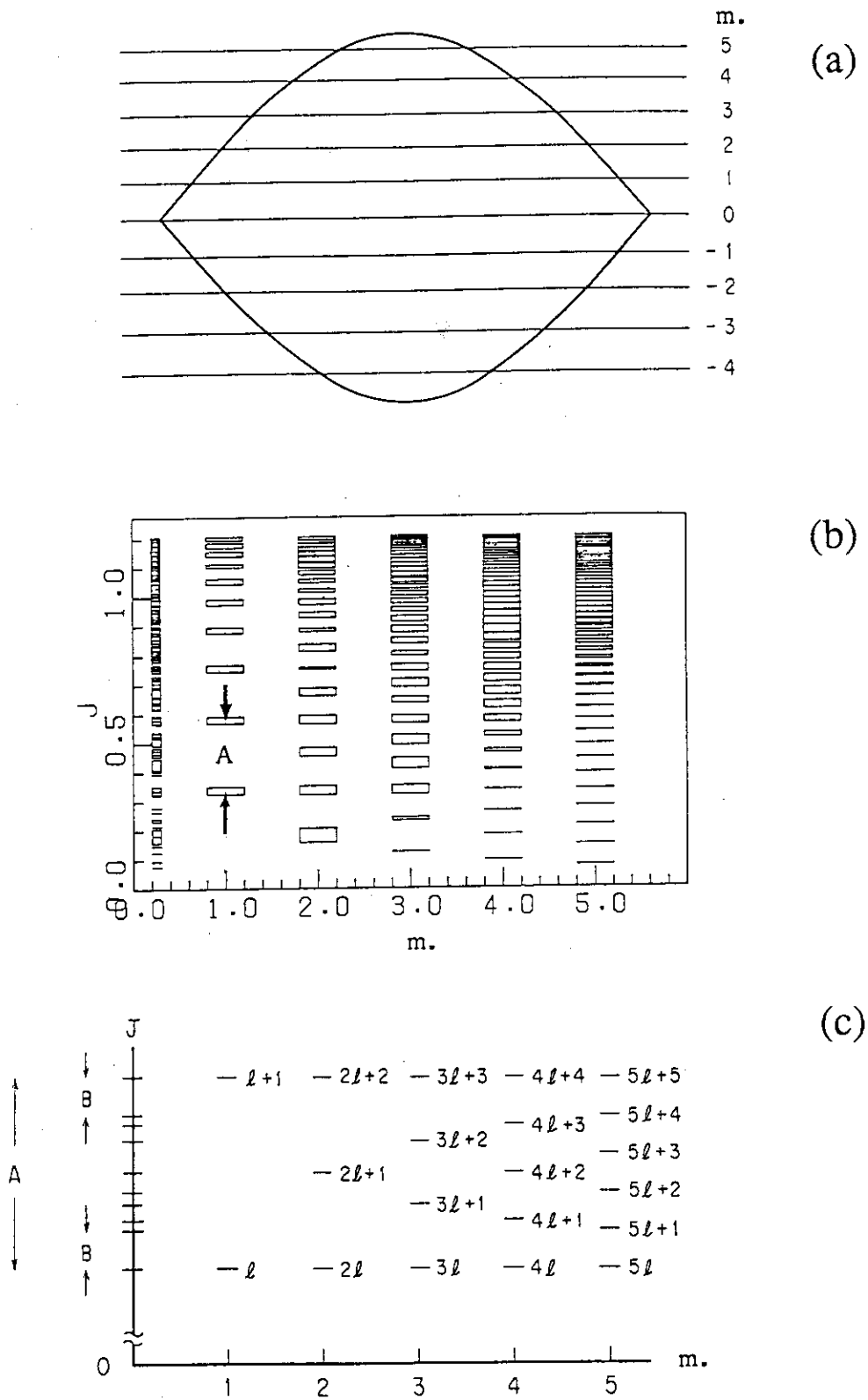


図4.5 (a)磁気島中における静電波の共鳴位置と m^* の関係 (b)サブアイランドの共鳴面と振幅区間Aの幅： δJ (c)共鳴面の位置関係(b)の空間Aを拡大したもの)区間Bの幅： $\delta J/\max\{m^*\}$

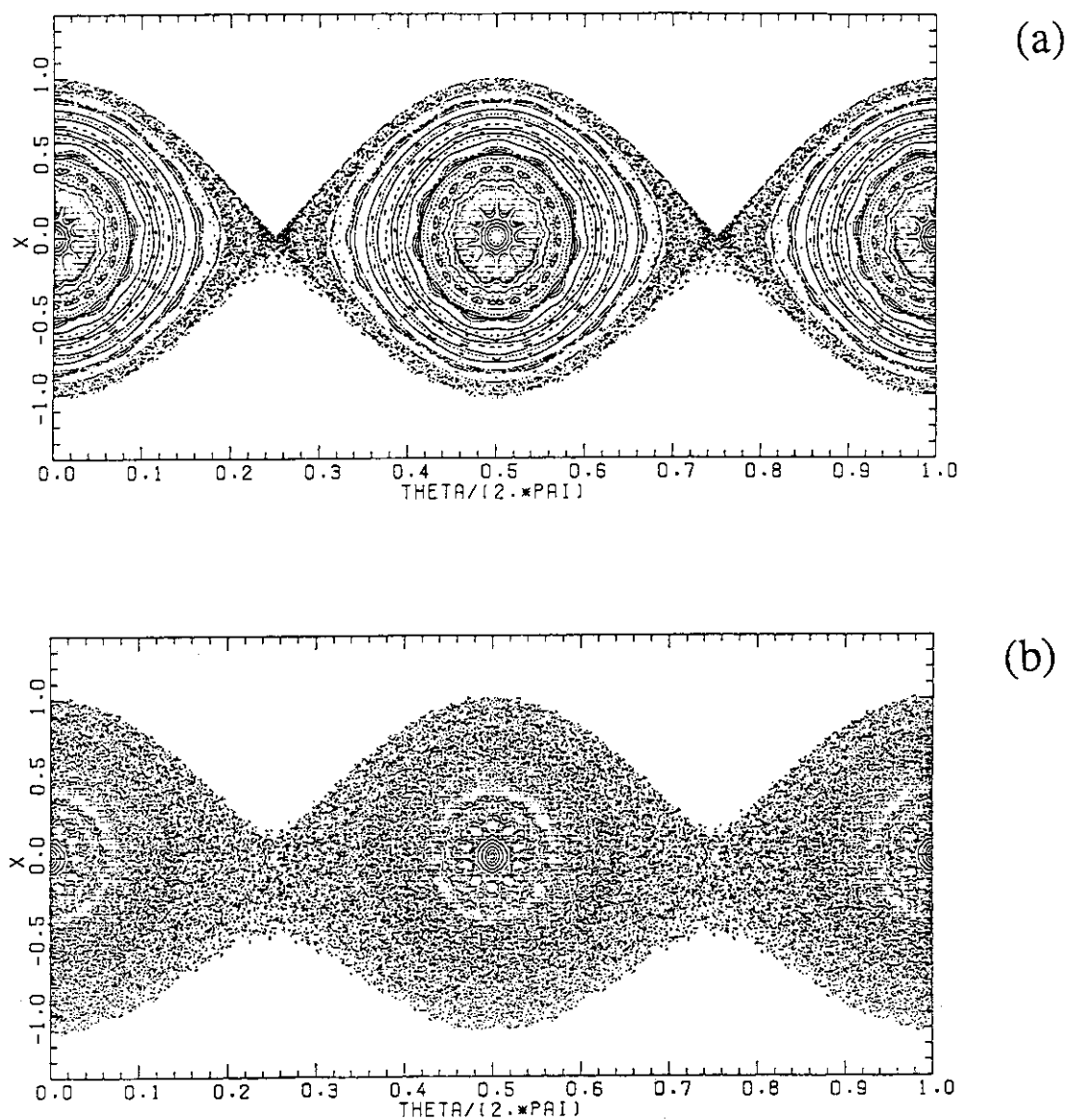


図4.6 (a)単一モードの静電波が加わった場合のポアンカレ写像, $\beta(x) = \beta_0 = \text{const}$, $\alpha = 0.1$, $\beta_0 = 0.005$, $m = 49$, トーラス2000周後まで, 初期値: $x_i = i \times 0.02$, $\zeta_i = 0$, ($1 \leq i \leq 50$) (b)空間的に局在した複数の静電波が加わった場合のポアンカレ写像, $\beta(x) = \beta_0 \sum_m \exp[-(x - x_m)^2/d^2]$, $\alpha = 0.1$, $\beta_0 = 0.005$, $45 \leq m \leq 55$, トーラス2000周後まで, $d = 0.1$, 初期値: $x_i = i \times 0.02$, $\zeta_i = 0$, ($1 \leq i \leq 50$)

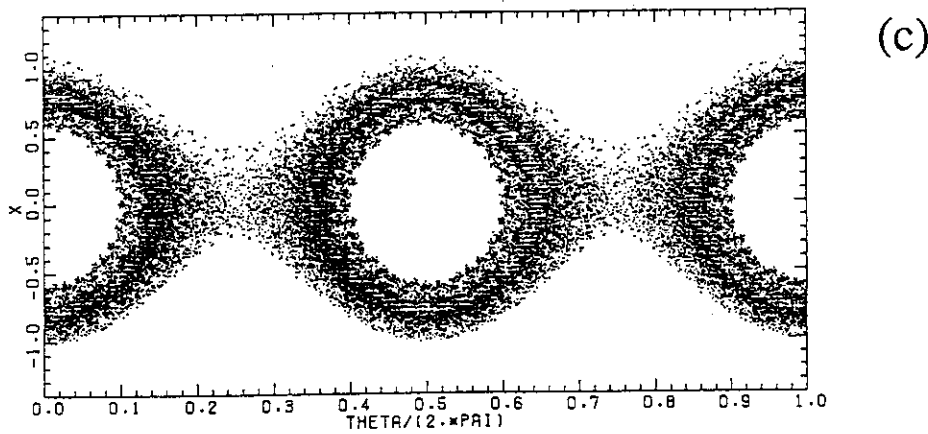
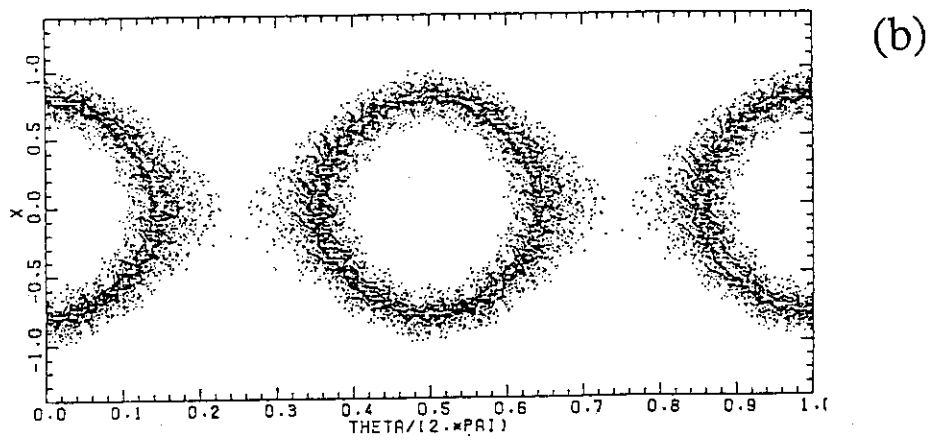
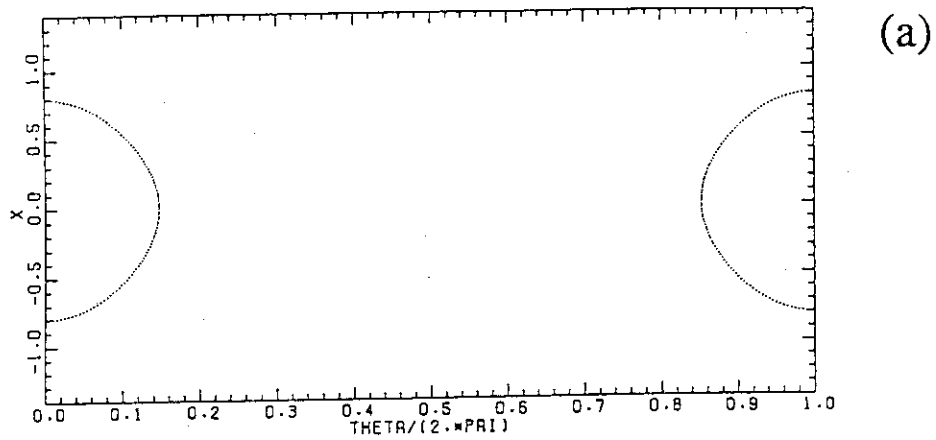


図5.1 粒子の拡散的振舞い, $\alpha=0.1$, $\beta=0.005$, $45 \leq m \leq 55$, 初期値 $j_i=0.71$, $\theta_i = (\pi/100) \times i$, ($1 \leq i \leq 200$) (a)初期値 (b)トーラス250周後までのポアンカレ写像 (c) トーラス500周後までのポアンカレ写像

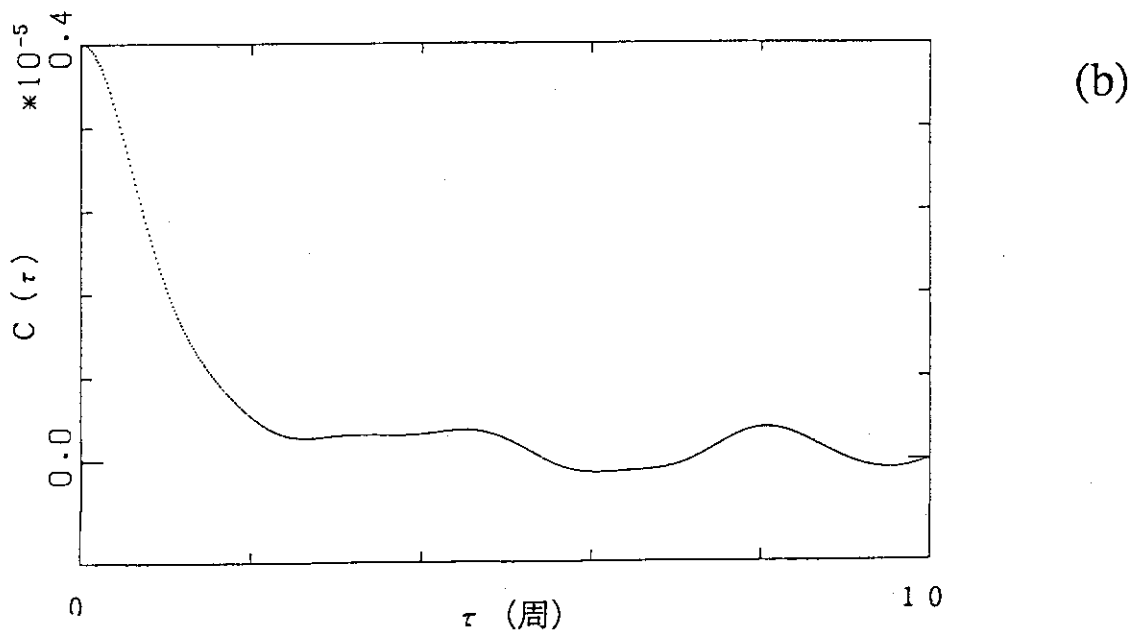
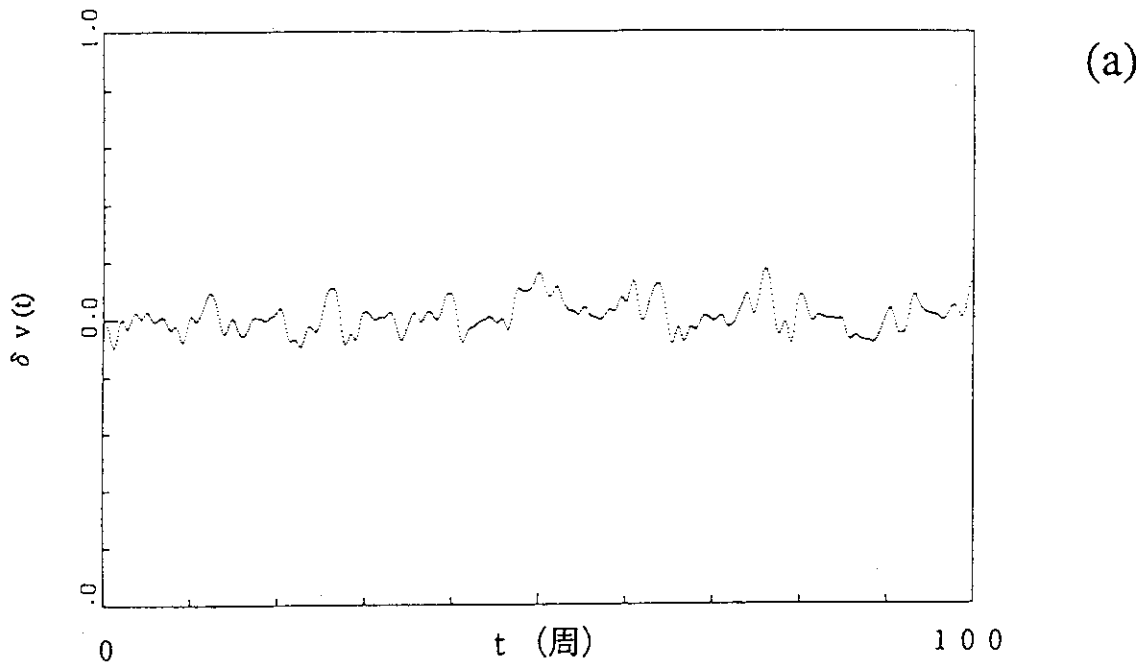


図5.2 (a)作用変数 J を座標変数としたときの速度 $\delta v(t)$ の時間変化: $\alpha=0.1$, $\beta=0.005$, $45 \leq m \leq 55$, トーラス 100 周後まで, 初期値 $x=0.8$, $\zeta=0$, (b)ラグタイム-自己相関関数

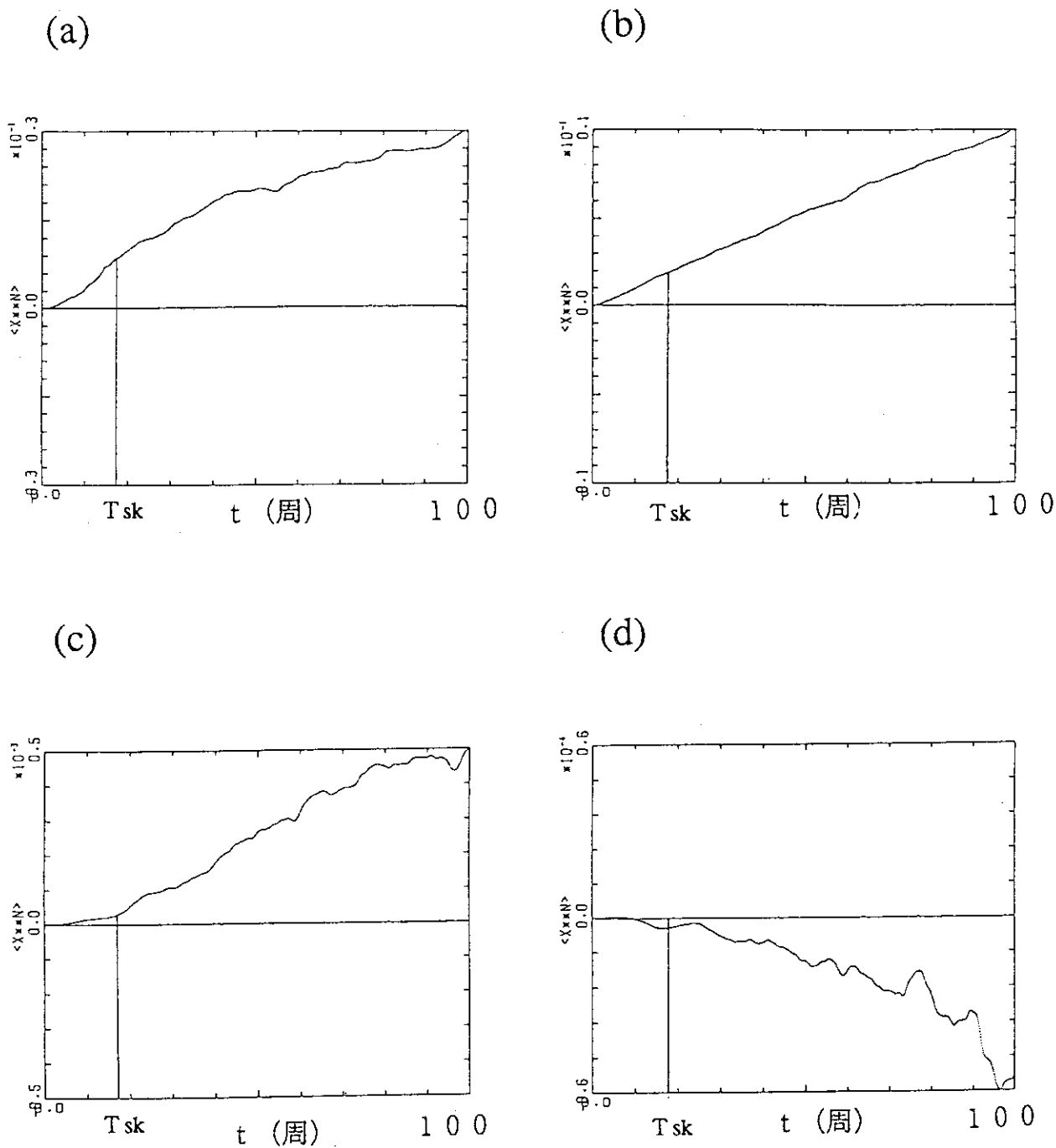


図5.3 粒子軌道計算より求めた1次～4次のキュムラント $\alpha=0.1$, $\beta=0.005$, $45 \leq m \leq 55$, 初期値: $J_i/J_s=0.7$, $\Theta_i = (2\pi/1000) \times i$, x_i ($1 \leq i \leq 1000$), ガウス過程の条件を満たすと見なせる時間 $T_{sk}=17$ (周) (a)1次のキュムラント (b)2次のキュムラント (c)3次のキュムラント (d)4次のキュムラント

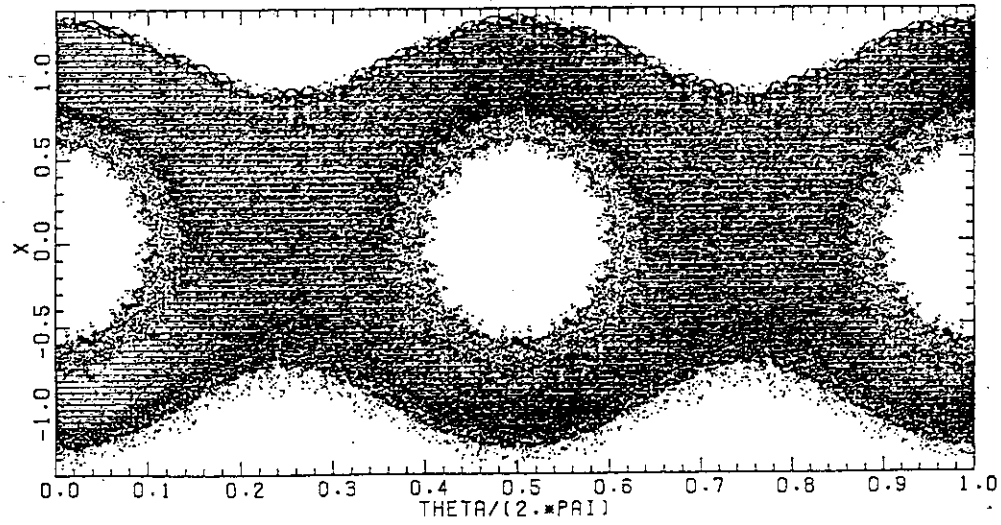


図5.4 KAM面の示唆. トーラス2000周後までのポアンカレ写像; $\alpha=0.1$, $\beta=0.005$,
 $45 \leq m \leq 55$, 初期値: $J_i/J_s=1.26$, $\Theta_i = (4\pi/1000) \times i$ ($1 \leq i \leq 1000$)

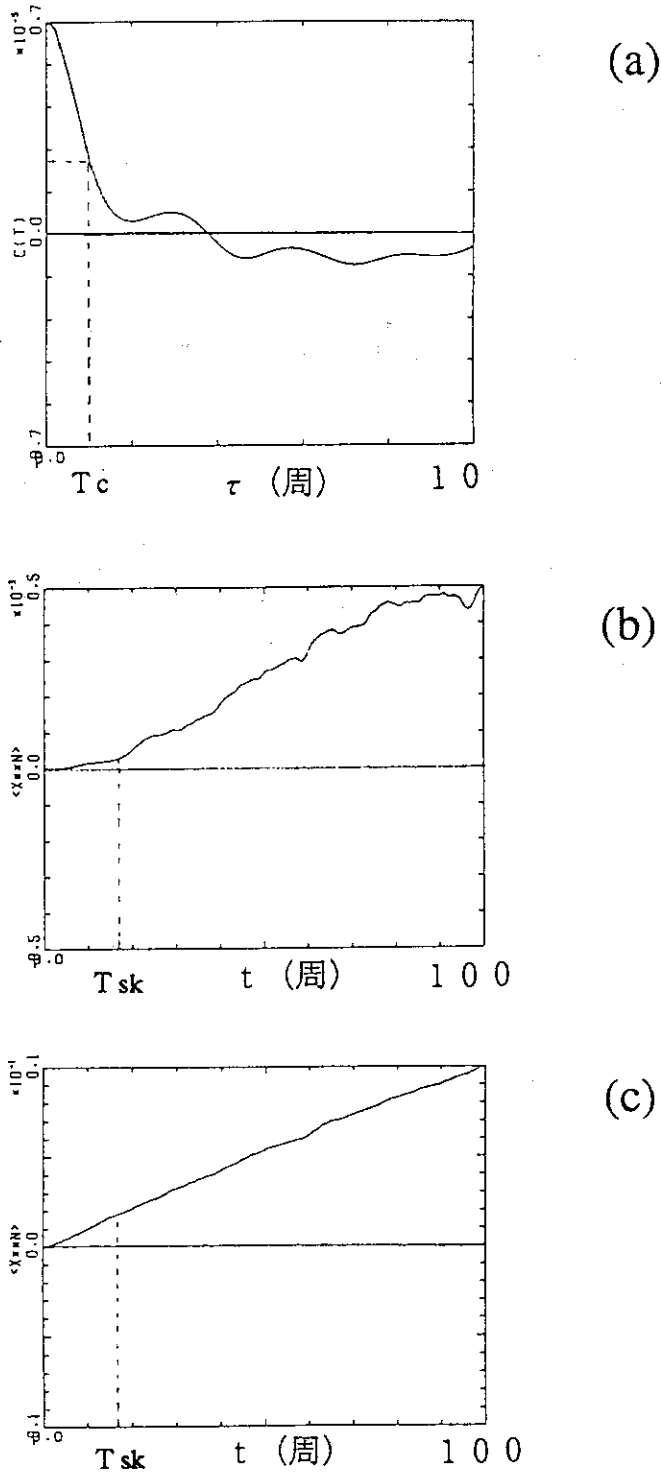


図5.5 粒子の初期値がセパトリックスより充分内側にある場合の拡散係数の算出法。
 $\alpha=0.1$, $\beta=0.005$, $45 \leq m \leq 55$ (a)ラグタイム—粒子速度の自己相関, 初期値
 $J/J_s=0.7$, $\Theta=0$, 自己相関時間 $T_c=1.15$ (b)3次のキュムラントの時
 間変化, 初期値: $J_i/J_s=0.7$, $\Theta_i=(2\pi/1000) \times i$ ($1 \times \leq i \leq 1000$), 粒子
 分布の対象性が歪み出す時刻 $T_{sk}=17$, (c)2次のキュムラントの時間変化。
 $t=T_{sk}$ における2次キュムラントの値より(5-11')式の拡散係数を算出。

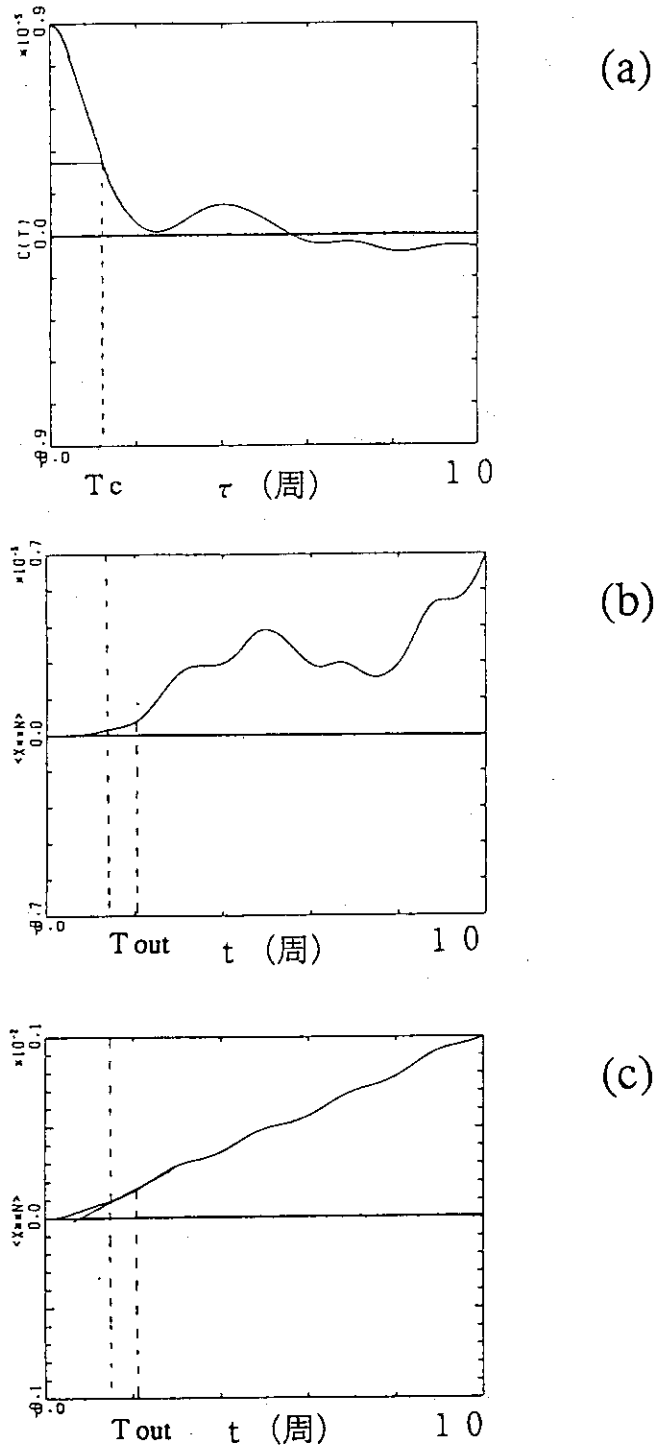
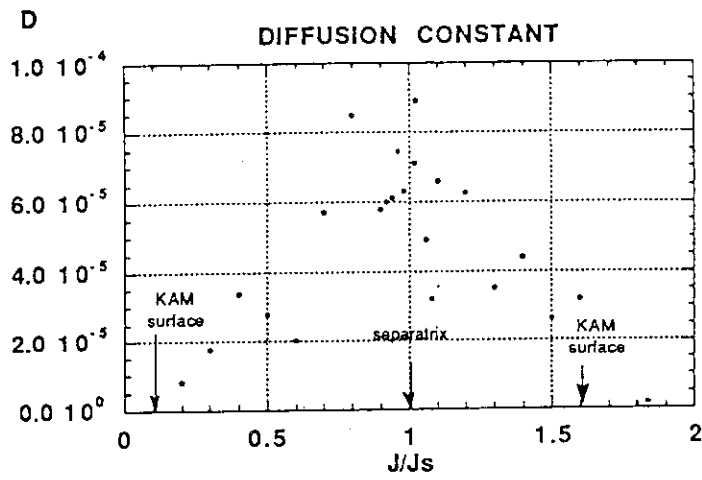
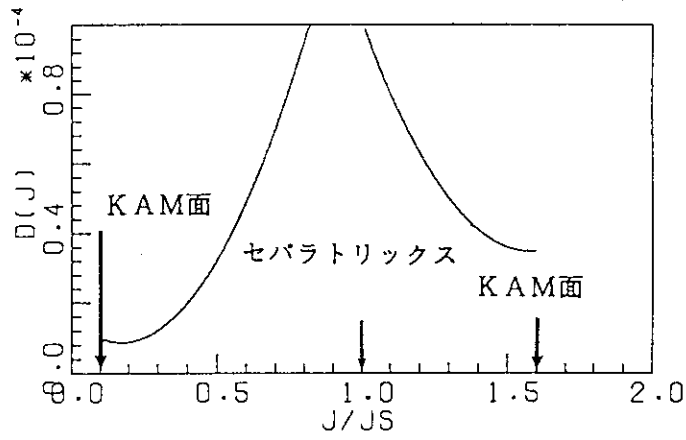


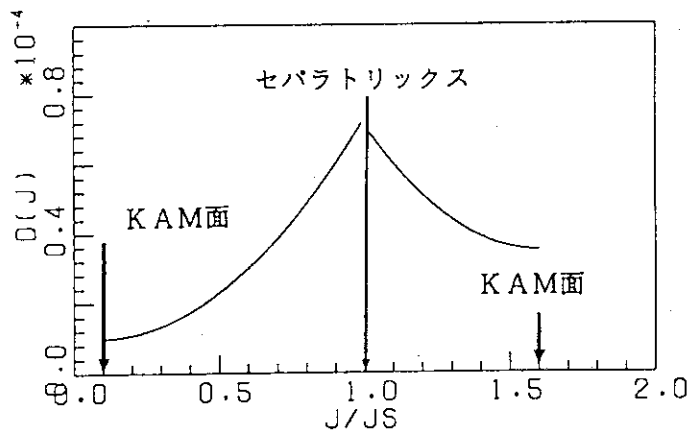
図5.6 粒子の初期値がセパトラリックス近傍にある場合の拡散係数の算出法.
 $\alpha=0.1$, $\beta=0.005$, $45 \leq m \leq 55$ (a)ラグタイム—粒子速度の自己相関, 初期値
 : $J/J_s=0.91$, 自己相関時間 $T_c=1.0$ (b)3次のキュムラントの時間変化, 初
 期値 : $J_i/J_s=0.96$, $\Theta_i=(2\pi/1000) \times i (1 \leq i \leq 1000)$, (c)2次のキュムラ
 ントの時間変化, セパトラリックス外に粒子が出た時刻 $T_{out}=2.05$ での微係数よ
 り(5-11")式の拡散係数を算出.



(a)



(b)



(c)

図5.7 (a)局所的拡散係数のプロット (b)拡散係数の上限をフィッティングしたもの (c)拡散係数の下限をフィッティングしたもの

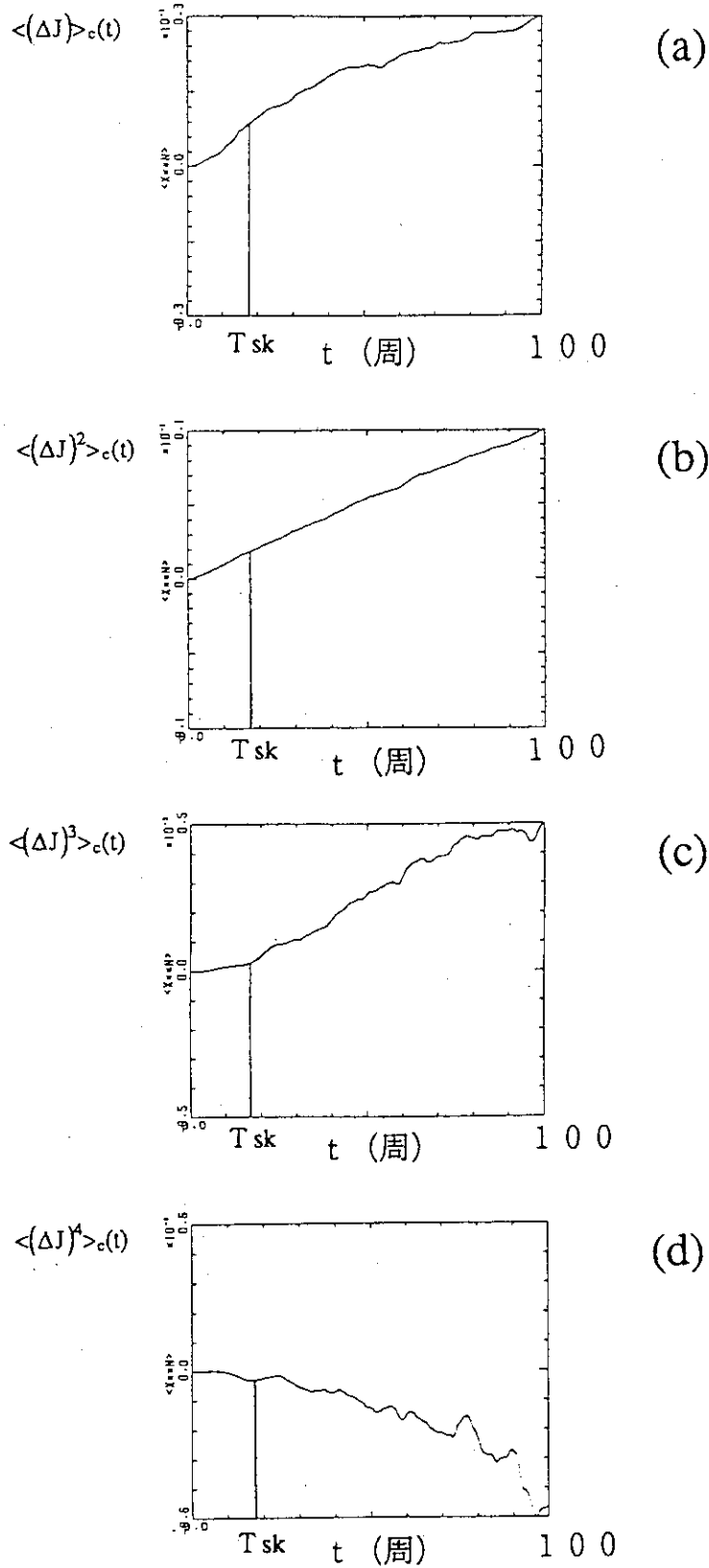
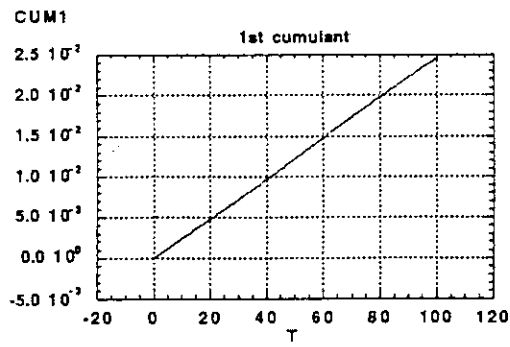
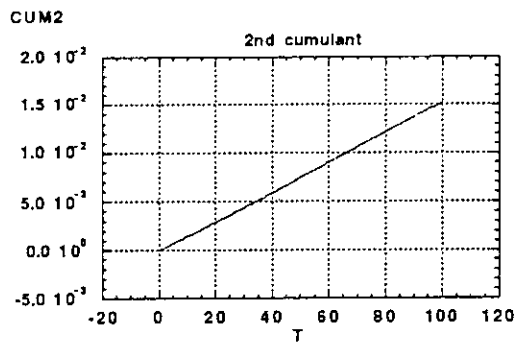


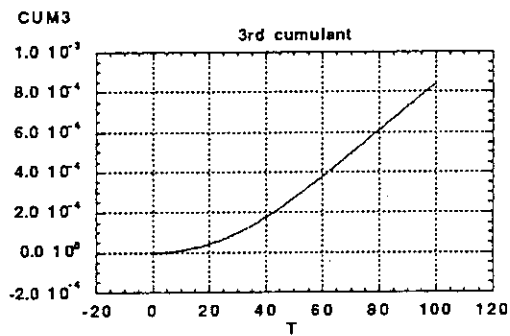
図5.8 粒子軌道より直接求めた1次～4次のキュムラント：初期値： $J/J_0=0.7$ ，トーラス100周まで。(a)1次のキュムラント (b)2次のキュムラント (c)3次のキュムラント (d)4次のキュムラント



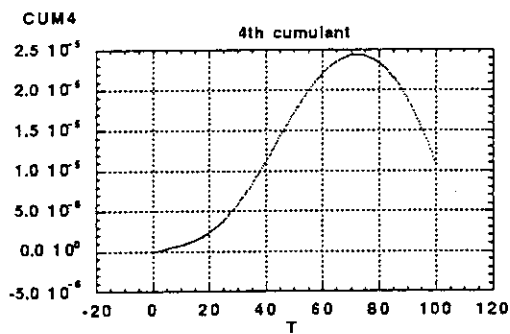
(a)



(b)



(c)



(d)

図5.9 拡散係数の上限のフィッティングを用いた拡散方程式の解より求めた1次～4次の
 キュムラント：初期値： $J/J_0=0.7$ ， トーラス 100周まで。(a)1次のキュムラント
 (b)2次のキュムラント (c)3次のキュムラント (d)4次のキュムラント

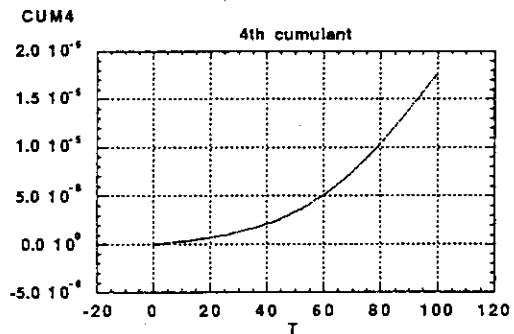
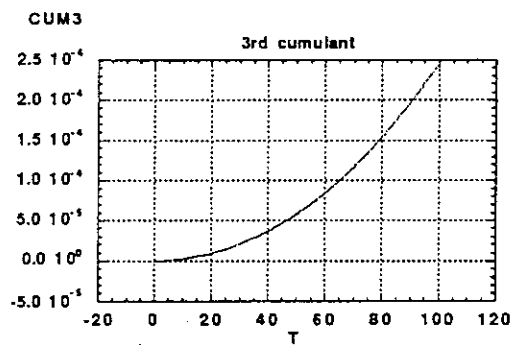
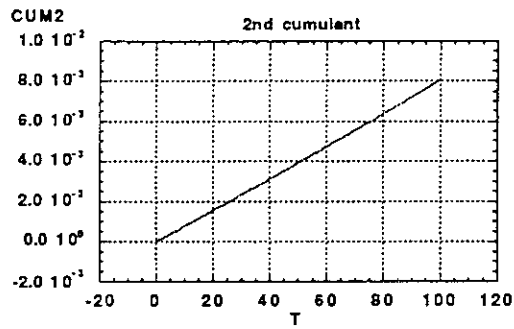
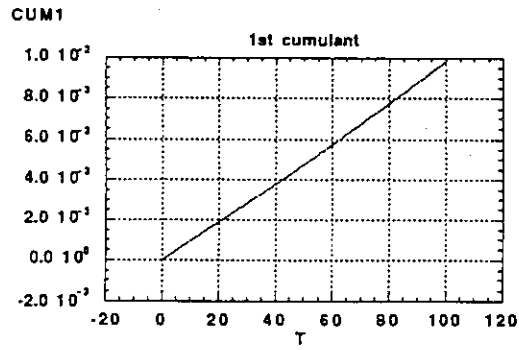


図5.10 拡散係数の下限のフィッティングを用いた拡散方程式の解より求めた1次～4次の
 キュムラント：初期値 $J/J_s=0.7$ ，トーラス100周まで。(a)1次のキュムラン
 ト (b)2次のキュムラント (c)3次のキュムラント (d)4次のキュムラント

付録A サブアイランドのセパトリックス方程式の導出

次のハミルトニアンによって記述される粒子の軌道の考える

$$H(J, \Theta, \varphi) = H_0(J) + \frac{M}{m} \frac{\beta}{4} a_{lm}(J) \cos(l\Theta - v_{m/n}\varphi) \quad (4-2-16)$$

$$H_0(J) = \int \Omega(J) dJ$$

先ず $(J, \Theta) \rightarrow (p, \psi)$ への正準変換を行う。変換の母関数を

$$F_3(J, \psi, \varphi) = -(J - J_r) \frac{\psi + v_{m/n}\varphi}{l} \quad (A-1)$$

とすると、正準変換の変換式は

$$p = -\frac{\partial F_3}{\partial \psi} = \frac{J - J_r}{l} \quad (A-2)$$

$$\Theta = -\frac{\partial F_3}{\partial J} = \frac{\psi + v_{m/n}\varphi}{l} \quad (A-3)$$

となり、新しいハミルトニアンKは

$$\begin{aligned} K &= H(p, \psi, \varphi) + \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \\ &= H(p, \psi, \varphi) - (J - J_r) \frac{v_{m/n}}{l} \\ &= H(p, \psi, \varphi) - v_{m/n}p \end{aligned} \quad (A-4)$$

として表される。 $H_0(J)$ を共鳴する J_r 近傍で二次の項まで展開すると

$$\begin{aligned} H_0(J) &\equiv H_0(J_r) + \frac{\partial H_0(J_r)}{\partial J} (J - J_r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0(J_r)}{\partial J^2} (J - J_r)^2 \\ &= H_0(J_r) + \Omega(J_r)(J - J_r) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(J_r)}{\partial J} (lp)^2 \end{aligned} \quad (A-5)$$

同様に J_r 近傍でフーリエ係数 $a_{ml}(J)$ を一次まで展開する

$$a_{ml}(J) = a_{ml}(J_r) + a'_{ml}(J_r) (J - J_r) \quad (A-6)$$

(A-5) (A-6) を (A-4) に代入すると

$$\begin{aligned} K &= H_0(J_r) + \frac{M\beta}{m4} a_{ml}(J_r) \cos \psi \\ &\quad + [\Omega(J_r)l - v_{m/n}]p + \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(J_r)}{\partial J} l^2 p^2 + \frac{M}{m} \frac{\beta}{4} a_{ml}(J_r) \cos \psi \end{aligned} \quad (A-7)$$

となる。共鳴条件 $\Omega(J_r) - \nu_{m/n} = 0$ を考慮し、(A-7)の第一項、第二項を無視すると

$$M = \left(\frac{\partial \Omega(J_r)}{\partial J} l^2 \right)^{-1} \quad (\text{A-8})$$

$$V = \frac{M \beta}{m} \frac{1}{4} a_{ml}(J_r) \quad (\text{A-9})$$

として (A-7) は

$$K(p, \psi, \varphi) = \frac{p^2}{2M} + V \cos \psi \quad (\text{A-10})$$

となり、非線形振子と同じ形のハミルトニアンをとる事になる。従って軌道は位相空間において、捕捉軌道と非捕捉軌道とに分かれ、その境界でセバトリックスが形成される。セバトリックス上では $K = V = \text{一定}$ であり

$$\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \quad (\text{A-11})$$

なる関係を用いると (A-10) より

$$p = \pm 2 \sqrt{M V} \sin \frac{\psi}{2} \quad (\text{A-12})$$

が得られる。ここで

$$p = \frac{J - J_r}{l} \quad (\text{A-13})$$

$$\psi = l \Theta - \nu_{m/n} \varphi \quad (\text{A-14})$$

なる関係を用いて $(p, \psi) \rightarrow (J, \Theta)$ に戻すと (A-11) は

$$J = J_r \pm 2l \sqrt{M V} \sin \frac{l \Theta - \nu_{m/n} \varphi}{2} \quad (\text{A-15})$$

となる。従って、

$$\Delta J_r = 2l \sqrt{M V} = \sqrt{\frac{M \beta a_{ml}(J_r)}{m \Omega'(J_r)}} \quad (\text{A-16})$$

とすると、セバトリックス方程式

$$J = J_r \pm \Delta J_r \sin \frac{l \Theta - \nu_{m/n} \varphi}{2} \quad (4-2-17)$$

が導出された。

付録B モーメントとキュムラント

確率変数 x の関数 $f(x)$ の平均値は x の確率密度関数 $p(x)$ により

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx \quad (B-1)$$

で、求められる。特に、 $f(x, u) = e^{iux}$ としたとき

$$\psi(u) = E[e^{iux}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}p(x)dx \quad (B-2)$$

であり、 $\psi(u)$ を特性関数と呼ぶ。(B-2)に示されるように特性関数は確率密度関数のフーリエ変換に相当する。(B-2)の両辺を変数 u に関して n 回微分すれば、

$$\psi^{(n)}(u) = (i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) e^{iux} dx \quad (B-3)$$

となる。ここで $u=0$ とおけば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx = \frac{\psi^{(n)}(0)}{(i)^n} \quad (B-4)$$

となる。

<モーメントの定義>

ところで n 次のモーメントは変数 x の n 乗の平均値

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (B-5)$$

で定義される。従って(B-4)の關係を用いて n 次のモーメントは

$$\langle x^n \rangle = \frac{\psi^{(n)}(0)}{(i)^n} \quad (B-6)$$

として表される。これにより特性関数 $\psi(u)$ は次のようにTaylor展開できることが分かる。

$$\psi(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i^n}{n!} \langle x^n \rangle \right) u^n \quad (B-7)$$

<キュムラントの定義>

特性関数の対数をTaylor展開し、

$$\ln \psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x \rangle_c \frac{i^n}{n!} u^n \quad (B-8)$$

$$\langle x^n \rangle_c = \left[\frac{(-1)^n d^n \ln(\psi(u))}{du^n} \right]_{u=0} \quad (B-9)$$

としたときの $\langle x^n \rangle_c$ を n 次のキュムラントと定義する。

(B-7) (B-8) よりモーメントとキュムラントの関係が求まる。以下、1~4次のキュムラントとモーメントの関係を示す。

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x^3 \rangle_c = \langle x^3 \rangle - 3 \langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2 \langle x \rangle^3$$

$$\langle x^4 \rangle_c = \langle x^4 \rangle - 4 \langle x \rangle \langle x^3 \rangle - 3 \langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6 \langle x \rangle^4$$

となる。