

J A E R I - M
93-168

数式処理による マニピュレータ
機構方程式の表現

1993年9月

佐々木 忍

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合せは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課(〒319-11 茨城県那珂郡東海村)あて、お申しこみください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター(〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内)で複写による実費領布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1993

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 ニッセイエプロ株式会社

数式処理によるマニピュレータ機構方程式の表現

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1993年8月9日受理)

マニピュレータのハンドの位置・姿勢を決定することは原理的に単純であるが、その計算過程は回転や旋回操作のなかで三角関数を何回も計算しなければならぬため極めて取扱いにくいとみなされてきた。しかしながら、反復法に基づく汎用的なアルゴリズムの開発によりこの問題は首尾よく解決された。本報では、このアルゴリズムを利用して自動的に機構方程式を生成することを考える。このため、繰り返し表現を数式処理系 REDUCE に適用して、すべての機構学的属性を含む 6 関節アームの完全な機構モデルを導く。このような機構方程式の自動生成は、作業空間の解析と共に煩雑な計算からの解放に役立つであろう。

Expressions of Manipulator Kinematic Equations via
Symbolic Computation

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received August 9, 1993)

While it is simple in principle to determine the position and orientation of the manipulator hand, its computational process has been regarded as extremely laborious since trigonometric functions must be calculated many times in operations of revolute or rotation. Due to development of a general class of kinematic algorithm based on iterative methods, however, we have come to a satisfactory settlement of this problem. In the present article, we consider to construct symbolic kinematic equations in an automatic fashion making use of the algorithm.

To this end, recursive expressions are applied to a symbolic computation system REDUCE. As a concrete result, a complete kinematic model for a six-jointed arm having all kinematic attributes is provided. Together with work space analysis, the computer-aided generation of kinematic equations in symbolic form will serve to liberate us from their cumbersome derivations.

Keywords : Kinematics, Symbolic Computation, REDUCE Language,
Six-link Manipulator, Hand, Arm.

目 次

1. はじめに	1
2. 再帰表現と数式処理への適用	2
3. おわりに	6
謝 辞	6
参考文献	6
付 錄	7

Contents

1. Introduction	1
2. Recursive Representation and Application to Symbolic Computation. 2	2
3. Concluding Remarks	6
Acknowledgements	6
References	6
Appendix	7

1. はじめに

回転, 旋回, 並進ならびにねじれの機能をもつ関節・リンクを直列連鎖状に結合した空間リンク機構の中には, カムや歯車といった古くからの機械工学が対象とする機構のはかに, 機構の先端にハンドをもたせ, 対象物のマニピュレーションを行う目的で開発された斬新な機構としてマニピュレータがあり, ロボットの手としての役割を担う。各関節はアクチュエータにより駆動され, 相対的な運動を通してハンドの位置を目標方向に定めながら目的の作業を達成する。

こうした制御を前提とするアーム機構の解析的研究は, 順運動学と逆運動学の2つの問題が中心となる。すなわち, 各関節角の変位(回転または旋回)を与えて指先の位置・姿勢を求める前者と, 逆に指先の位置・姿勢から各関節角の変位を決定する後者に分類できる。

ところで, 指先の位置・姿勢を決定する方法は, 座標変換行列を利用するのもっとも便利である。先導研究となったDenavit-Hartenbergの考え方を基にPaulによる同次座標変換法を用いると, 関節角と指先位置・姿勢との対応関係が行列計算で決定でき, アーム機構を解析するツールとして重要な役割を果している。^{1), 2)} しかしながら, 所要の機構方程式を導き出す場合, 自由度が増加するにつれてその処理は極めて複雑になる。

こうした状況から, 関節の種類, その数(自由度), 軸間のねじれ等の機構学的属性をすべて一般化したまま基本的機構関係式を再帰的に表現するアルゴリズムが提案された。³⁾ この体系化により順問題が簡単かつ効率的に求められるようになった。本報では, このアルゴリズムから数式処理言語と計算機のもつ能力を活用して目的の機構関係式の自動生成を行う。原理的にはn自由度のアーム機構に適用できるが, 計算容量等も大きく関係することから, 6自由度に重点をおいた汎用的ロボット・アーム機構を取上げる。典型的な6自由度マニピュレータの位置・姿勢関係の誘導を通して数式処理の有効性を再認識した。

2. 再帰表現と数式処理への適用

既報3)では、開ループ特性をもつn自由度マニピュレータのアーム運動学をつきの漸化式で表現した。すなわち、

$$P_i = P_{i-1}c_i + U_{i-1}s_i, \quad (1)$$

$$Q_i = Q_{i-1}c_i + V_{i-1}s_i, \quad (2)$$

$$R_i = R_{i-1}c_i + W_{i-1}s_i, \quad (3)$$

$$U_i = -L_i \gamma_i + D_{i-1} \eta_i, \quad (4)$$

$$V_i = -M_i \gamma_i + E_{i-1} \eta_i, \quad (5)$$

$$W_i = -N_i \gamma_i + F_{i-1} \eta_i, \quad (6)$$

$$D_i = L_i \eta_i + D_{i-1} \gamma_i, \quad (7)$$

$$E_i = M_i \eta_i + E_{i-1} \gamma_i, \quad (8)$$

$$F_i = N_i \eta_i + F_{i-1} \gamma_i, \quad (9)$$

$$X_i = a_i P_i + d_i D_{i-1} + X_{i-1}, \quad (10)$$

$$Y_i = a_i Q_i + d_i E_{i-1} + Y_{i-1}, \quad (11)$$

$$Z_i = a_i R_i + d_i F_{i-1} + Z_{i-1}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

ただし、

$$L_i = P_{i-1}s_i - U_{i-1}c_i, \quad (13)$$

$$M_i = Q_{i-1}s_i - V_{i-1}c_i, \quad (14)$$

$$N_i = R_{i-1}s_i - W_{i-1}c_i. \quad (15)$$

ここに、添字(i-1)をもつ変数は、(i-1)個の関節変数から構成された下記の変換行列の要素で、マニピュレータ本体を支える台座(ベース)に設定した基準座標系 Σ_0 からみた(i-1)番目のリンク先端の位置・姿勢であり、漸化式はこれに任意の回転(あるいは並進)操作を施した関係を示す。

$${}^0T_{i-1} = \begin{vmatrix} P_{i-1} & U_{i-1} & D_{i-1} & X_{i-1} \\ Q_{i-1} & V_{i-1} & E_{i-1} & Y_{i-1} \\ R_{i-1} & W_{i-1} & F_{i-1} & Z_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16)$$

周知のごとく、この変換行列の左上に位置するいわゆる 3×3 回転行列が姿勢を、また右端の 3×1 列ベクトル $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})^T$ が位置を示す。 a_i, d_i はそれぞれi番目のリンク長さとオフセット(直動関節の場合は並進量)であり、三角関数は慣習的な表現 $s_i = \sin \theta_i$ 。

$c_1 = \cos \theta_1$ を用いる。また、リンク相互のねじれ具合(ねじれ角 α_1)をつぎのパラメータで表す。

$$\gamma_1 = \cos \alpha_1, \quad \eta_1 = \sin \alpha_1 \quad (\gamma_1^2 + \eta_1^2 = 1) \quad (17)$$

さて、(16)で示した変換行列の方向余弦と位置座標の初期値を

$$\begin{aligned} P_0 &= V_0 = F_0 = 1, \\ Q_0 &= R_0 = U_0 = W_0 = D_0 = E_0 = 0, \\ X_0 &= Y_0 = Z_0 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

と定め、(1)から(15)の関係を関節1から逐次先端まで繰り返し実行することにより、作業空間での指先位置・姿勢が容易に求まる。ここでは数値計算とは別に、上の再帰関係を数式処理言語により機構方程式の自動生成の問題に焦点を絞る。

数式処理は、日頃われわれが紙のうえで行っている式の展開・整理などの過程を直接計算機に実行させることが目的で開発され、今日REDUCEやMACSYMAなどの汎用システムがよく利用されている。⁴⁾ 筆者は大型計算機上で稼働するREDUCEを利用してマニピュレータの動特性方程式を誘導したが⁵⁾、その後パソコン上でも容易に処理できる3.3 versionを入手したので⁶⁾、機構方程式の自動生成に活用する。方程式の生成に必要な手順は、REDUCE上の規約に従って上記アルゴリズムを含む一連のステートメントを入力Fileとして作成し、同時に処理の結果を書き出す出力Fileを用意する。計算は、自由度とともに計算結果が飛躍的に増加するため、自由度6の汎用的なロボット・アームを取扱う。その結果は、指先の位置・姿勢以外に先端までの各リンクの関係式もあわせて付録に記載する。明らかに、5軸から6軸への自由度の変化で急激に式の量が増えることがわかる。一般に、オフセットや関節軸間のねじれ効果が関係式の上にいかに影響するかを直感的に把握することは困難であるが、この陽的表現はパラメータの動きを探る一助となる。また、作業領域をできるだけ拡大するためにとるべき幾何学的考察、つまりマニピュレータの設計や作業空間の解析において有用なツールと考えられる。付録に記載した関係式は、関節の種類、配置形態、オフセットの有無など多様な構造をすべて包含するもので、各ロボット間でのシミュレーション比較にも役立つであろう。因みに、これまで解析研究によく利用してきたFig.1のマニピュレータは、Table 1に与えたリンク・パラメータにより下記のように簡単に機構方程式が誘導できる。(16)式からわかるように、P(6), Q(6), W(6)等はそれぞれ指先座標系のx₆方向単位ベクトルと基準系x₀方向の単位ベクトルとの方向余弦、指先座標系のx₆方向単位ベクトルと基準系y₀方向の単位ベクトルとの方向余弦、指先座標系のy₆方向単位ベクトルと基準系z₀方向の単位ベクトルとの方向余弦を表す。X(6), Y(6), Z(6)は基準座標系における指先の位置座標を示す。

なお、生成式の中でS1, S3, C1, C3等はそれぞれ関節角1および関節角3の正弦、余弦を表し、A2, D2はリンク2の長さとオフセットを表す。また、E5, G5を(17)式に示したリンク5, 6間のねじれ角の正弦、余弦と記す。また、姿勢についての出力のなかで、REDUCE言語ではEが予約語であるため変数として使用できず、E(i)の代りにEE(i)と記載した。

$P(6) := C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 + C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_4 \cdot S_6 - C_1 \cdot C_2 \cdot C_6 \cdot S_3 \cdot S_5 - C_1 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot S_5$
 $- C_1 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_4 \cdot S_1 \cdot S_6 - C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_4$
 $Q(6) := - (C_1 \cdot C_4 \cdot C_6 - C_1 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_4 - C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 - C_2 \cdot C_3 \cdot S_1 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_2$
 $\cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 + C_3 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_5 + C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6)$
 $R(6) := - (C_2 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_5 + C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_3 + C_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_2 + C_3$
 $\cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_6 - C_6 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_5)$
 $U(6) := - (C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_4 - C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 \cdot S_5 \cdot S_6 - C_1 \cdot C_3 \cdot S_2 \cdot$
 $S_5 \cdot S_6 - C_1 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_6 + C_1 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 - C_4 \cdot C_6 \cdot S_1 - C_5 \cdot S_1 \cdot S_4 \cdot S_6)$
 $V(6) := - (C_1 \cdot C_4 \cdot C_6 + C_1 \cdot C_5 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_6 - C_2 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_4 - C_2$
 $\cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 \cdot S_6 - C_3 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_5 \cdot S_6 - C_4 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_6 + C_6 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4)$
 $W(6) := C_2 \cdot C_3 \cdot S_5 \cdot S_6 + C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_3 \cdot S_6 - C_2 \cdot C_6 \cdot S_3 \cdot S_4 + C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_2 \cdot S_6 - C_3 \cdot C_6$
 $\cdot S_2 \cdot S_4 - S_2 \cdot S_3 \cdot S_5 \cdot S_6$
 $D(6) := - (C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot S_5 + C_1 \cdot C_2 \cdot C_5 \cdot S_3 + C_1 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot S_2 - C_1 \cdot C_4 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_5 -$
 $S_1 \cdot S_4 \cdot S_5)$
 $EE(6) := - (C_1 \cdot S_4 \cdot S_5 + C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot S_1 \cdot S_5 + C_2 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_3 + C_3 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_2 - C_4 \cdot S_1$
 $\cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_5)$
 $F(6) := - (C_2 \cdot C_3 \cdot C_5 - C_2 \cdot C_4 \cdot S_3 \cdot S_5 - C_3 \cdot C_4 \cdot S_2 \cdot S_5 - C_5 \cdot S_2 \cdot S_3)$
 $X(6) := A_2 \cdot C_1 \cdot C_2 + A_5 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 - A_5 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 \cdot S_5 - A_5 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot S_2 \cdot S_5 - A_5$
 $\cdot C_1 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_2 \cdot S_3 - A_5 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_4 + A_6 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 + A_6 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot$
 $S_4 \cdot S_6 - A_6 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_6 \cdot S_3 \cdot S_5 - A_6 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot S_5 - A_6 \cdot C_1 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot$
 $S_3 - A_6 \cdot C_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 + A_6 \cdot C_4 \cdot S_1 \cdot S_6 - A_6 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_2 \cdot D_4 \cdot S_3$
 $+ C_1 \cdot C_3 \cdot D_4 \cdot S_2 - D_2 \cdot S_1 - D_3 \cdot S_1$
 $Y(6) := A_2 \cdot C_2 \cdot S_1 + A_5 \cdot C_1 \cdot C_5 \cdot S_4 + A_5 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_1 - A_5 \cdot C_2 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 - A_5 \cdot C_3$
 $\cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_5 - A_5 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 - A_6 \cdot C_1 \cdot C_4 \cdot S_6 + A_6 \cdot C_1 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_4 + A_6 \cdot$
 $C_2 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 + A_6 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_1 \cdot S_4 \cdot S_6 - A_6 \cdot C_2 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 - A_6 \cdot C_3 \cdot$
 $C_6 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_5 - A_6 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 - A_6 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_1 \cdot D_2 + C_1$
 $\cdot D_3 + C_2 \cdot D_4 \cdot S_1 \cdot S_3 + C_3 \cdot D_4 \cdot S_1 \cdot S_2$
 $Z(6) := - (A_2 \cdot S_2 + A_5 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_5 + A_5 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_3 + A_5 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_2 - A_5 \cdot S_2 \cdot$
 $S_3 \cdot S_5 + A_6 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_5 + A_6 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_3 + A_6 \cdot C_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 + A_6 \cdot$
 $C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_2 + A_6 \cdot C_3 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_6 - A_6 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_5 - C_2 \cdot C_3 \cdot D_4 - D_1$
 $+ D_4 \cdot S_2 \cdot S_3)$

以上、ロボット・アームの機構解析に対する手法を直接、方程式の自動生成に結びつけた。一般的な体系でのヤコビ行列の生成についても、文献3)のアルゴリズムを利用すると、同様に数式処理が可能となる。

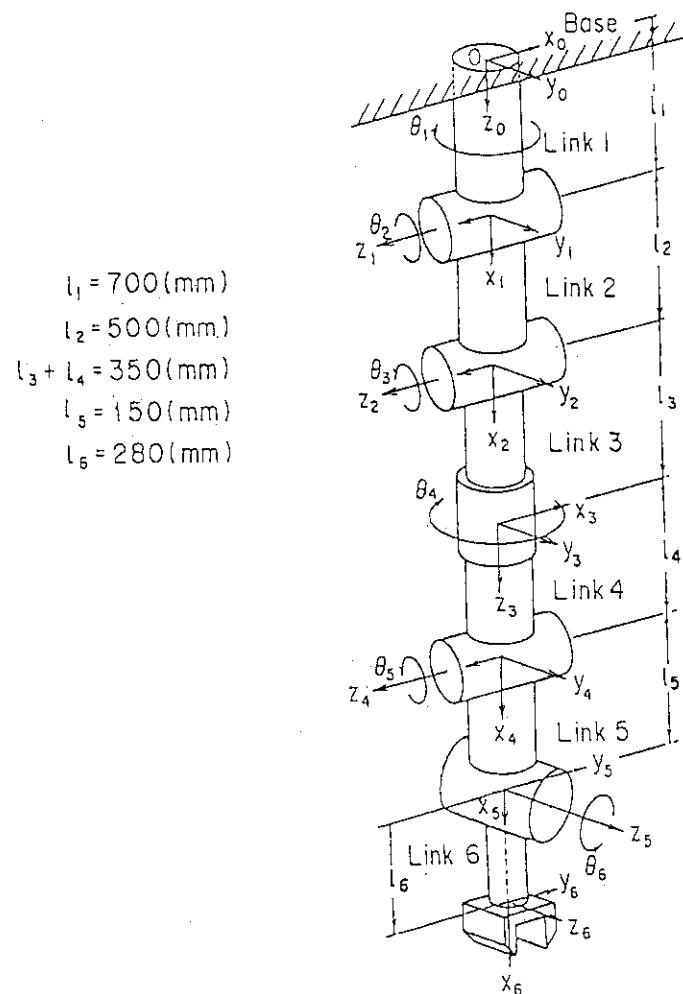


Fig. 1 A Six-Link Manipulator Studied

Table 1 Link Parameters for a Six-Link Manipulator

関節	関節角	ねじれ角 α_i	リンク長さ a_i	X-軸間の距離 d_i
1	θ_1	α_1	-90(deg)	a_1
2	θ_2	α_2	0(deg)	a_2
3	θ_3	α_3	90(deg)	a_3
4	θ_4	α_4	-90(deg)	a_4
5	θ_5	α_5	-90(deg)	a_5
6	θ_6	α_6	0(deg)	a_6

3. おわりに

ロボット・アーム機構に関する汎用的なアルゴリズムと数式処理言語からその機構方程式を自動的に生成させた。従来、大型、中型計算機上で稼働していたソフトウェアがパソコンクラスでも十分実用に供することが判明した。通常、機構の解析的研究では数値計算が主役となり、基本的な指先位置・姿勢と関節変数の関係は比較的単純な体系では手計算に頼ることが多かったが、手軽に式の誘導まで行える処理能力は迅速・正確であることからむしろ積極的に利用すべきである。シンボリックな表現は、オフセットやリンク長さ、ねじれ角の影響が明確になるとともに作業空間の解析にも役立つと考えられる。各ロボット間での式の比較も可能になり、数値計算にない特徴をもつ。いずれにしても、再帰関係や数式処理システムの活用により複雑な計算式から解放されることは最大の利点である。

謝　　舌辛

本報告書の作成に対してコメントをいただいた篠原慶邦室長に深謝します。

参考文献

- 1) R. C. Paul : Robot Manipulators - Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
- 2) J. Denavit & R. S. Hartenberg : A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Applied Mechanics, 22, June, 215/221, (1955).
- 3) S. Sasaki: On Numerical Techniques for Kinematics Problem of General Serial-Link Robot Manipulators, Robotica, Cambridge Univ. (to be published)
- 4) A. C. Hearn : REDUCE User's Manual Version 3.0, Rand Corporation, Apr. (1983).
- 5) 広田, 伊藤 : REDUCE入門<パソコンによる数式処理活用法>, サイエンス社 (1989).
- 6) 佐々木 : Lagrange の力学に基づくマニピュレータ動特性方程式の完全な記述, JAERI-M 89-121, Sep. (1989).

3. おわりに

ロボット・アーム機構に関する汎用的なアルゴリズムと数式処理言語からその機構方程式を自動的に生成させた。従来、大型、中型計算機上で稼働していたソフトウェアがパソコンクラスでも十分実用に供することが判明した。通常、機構の解析的研究では数値計算が主役となり、基本的な指先位置・姿勢と関節変数の関係は比較的単純な体系では手計算に頼ることが多かったが、手軽に式の誘導まで行える処理能力は迅速・正確であることからむしろ積極的に利用すべきである。シンボリックな表現は、オフセットやリンク長さ、ねじれ角の影響が明確になるとともに作業空間の解析にも役立つと考えられる。各ロボット間での式の比較も可能になり、数値計算にない特徴をもつ。いずれにしても、再帰関係や数式処理システムの活用により複雑な計算式から解放されることは最大の利点である。

謝　　舌辛

本報告書の作成に対してコメントをいただいた篠原慶邦室長に深謝します。

参考文献

- 1) R. C. Paul : Robot Manipulators - Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
- 2) J. Denavit & R. S. Hartenberg : A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Applied Mechanics, 22, June, 215/221, (1955).
- 3) S. Sasaki: On Numerical Techniques for Kinematics Problem of General Serial-Link Robot Manipulators, Robotica, Cambridge Univ. (to be published)
- 4) A. C. Hearn : REDUCE User's Manual Version 3.0, Rand Corporation, Apr. (1983).
- 5) 広田, 伊藤 : REDUCE入門<パソコンによる数式処理活用法>, サイエンス社 (1989).
- 6) 佐々木 : Lagrange の力学に基づくマニピュレータ動特性方程式の完全な記述, JAERI-M 89-121, Sep. (1989).

3. おわりに

ロボット・アーム機構に関する汎用的なアルゴリズムと数式処理言語からその機構方程式を自動的に生成させた。従来、大型、中型計算機上で稼働していたソフトウェアがパソコンクラスでも十分実用に供することが判明した。通常、機構の解析的研究では数値計算が主役となり、基本的な指先位置・姿勢と関節変数の関係は比較的単純な体系では手計算に頼ることが多かったが、手軽に式の誘導まで行える処理能力は迅速・正確であることからむしろ積極的に利用すべきである。シンボリックな表現は、オフセットやリンク長さ、ねじれ角の影響が明確になるとともに作業空間の解析にも役立つと考えられる。各ロボット間での式の比較も可能になり、数値計算にない特徴をもつ。いずれにしても、再帰関係や数式処理システムの活用により複雑な計算式から解放されることは最大の利点である。

謝　　舌辛

本報告書の作成に対してコメントをいただいた篠原慶邦室長に深謝します。

参考文献

- 1) R.C.Paul : Robot Manipulators - Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
- 2) J.Denavit & R.S.Hartenberg : A Kinematic Notation for Low-Pair Mechanisms Based on Matrices, J. Applied Mechanics, 22, June, 215/221. (1955).
- 3) S.Sasaki: On Numerical Techniques for Kinematics Problem of General Serial-Link Robot Manipulators, Robotica, Cambridge Univ. (to be published)
- 4) A.C.Hearn : REDUCE User's Manual Version 3.0, Rand Corporation, Apr. (1983).
- 5) 広田, 伊藤 : REDUCE入門<パソコンによる数式処理活用法>, サイエンス社 (1989).
- 6) 佐々木 : Lagrange の力学に基づくマニピュレータ動特性方程式の完全な記述, JAERI-M 89-121, Sep. (1989).

付録 作業空間における各リンクの位置・姿勢

11) 指先(第6リンク先端)の位置と姿勢

$G1*G5*S4*S6 - C1*C2*C3*C1*G4*S4*S5 + C1*C2*C3*C4*E4*E3*S4*S6 - C1*C2*C4*E5*C1*G4*G5*S3*S6 - C1*C2*C4*G6*G3*G4*S3*S5$
 $C2*C5*F3*E4*G5*S3*S6 + C1*C2*C4*E3*E5*G4*S3*S5 + C1*C2*C4*G3*G5*S3*S4*S5*S6 - C1*C3*C4*G5*G4*G3*G3*$
 $E3*G2*G3*S2*S6 - C1*C3*C5*C6*G2*G3*S2*S4 + C1*C3*C4*E3*E4*G2*G5*G2*S2*S6 + C1*C3*C6*E3*E4*G2*G2*S2*S5 + C1*C3*E3*G2*$
 $S2*S3 + C1*C4*G5*E2*E3*G4*S2*S5 - C1*C4*E2*E3*E4*E5*S3*S6 + C1*C4*E2*G3*S2*S3*S5 + C1*C4*E2*G5*S2*S5*S6 + C1*E4*G3*$
 $C5*G2*G4*G5*S2*S3 + C1*C5*E2*E4*G3*S5 + C1*C5*E2*E4*G3*S4*S5 + C1*C5*E2*G4*S2*S3*S4*S5 - C1*E2*E3*G5*S2*S5*S6 + C1*E2*E3*G3*$
 $G3*G4*G5*S1*S6 - C2*E3*C4*C6*G1*G2*G3*G4*S1*S5 + C2*C3*C4*E4*E5*G1*G2*G3*S1*S6 - C2*C3*C5*G1*G2*G3*S1*S4 + C2*$
 $+ C2*C3*E3*E5*G1*G2*G4*S1*S6 + C2*C3*E6*G1*G2*G3*G5*S1*S6 - C2*C4*C5*G1*G2*G1*S1*S3 + C2*C4*G5*E2*E3*G1*G4*G5$
 $*G5*G1*S1*S6 + C2*C4*G1*G2*G5*S1*S3*S5*S6 + C2*C5*G6*E2*E3*G1*S1*S4 + C2*C5*E2*E4*G1*G3*G5*S1*S6 + C2*G5*$
 $*S1*S3*S4*S5 - C2*E2*E3*G1*G5*S1*S4*S5*S6 + C2*E2*E4*G1*G3*G5*S1*S4*S6 - C2*E4*E5*G1*G2*G3*S1*S4*S6 - C3*G5*E$
 $*G3*G4*S1*S5 - C3*C4*E1*E2*E4*E5*G4*S1*S6 + C3*E4*G1*G5*S1*S2*S5*S6 + C3*G3*E1*E2*G3*G5*S1*S1*S4 - C3*E4*E5*E2*E3*E4$
 $*E4*S1*S5 + C3*E6*G1*G4*S1*S2*S4*S5 - C3*E6*E1*E2*E3*E4*G4*S1*S6 - C3*E1*E2*G3*G5*S1*E1*S2*S4 - C3*E4*E5*E1*E2*G3*G5*$
 $*G4*S5 + C4*C5*G1*G3*G4*G5*S1*S2*S3*S6 + C4*C5*E1*E3*G2*G4*S1*S5 + C4*C6*G1*G3*G4*S1*S2*S3*S5 - C4*E1*E2*G3*G5*$
 $*S1*S4 + C5*C5*E1*E3*G2*S1*S4 + C5*G5*G1*G3*S1*S2*S3*S4 - C5*E1*E2*G4*G5*S1*S3*S4*S6 + C5*E1*E4*G2*G3*G5*S1*S6 - C5*E3*$
 $E4*E6*G2*G3*S1*S5 - C6*E3*E4*G1*S1*S2*S3*S5 + E1*E2*E4*E5*S1*S3*S4*S6 - E1*E3*G2*G5*S1*S4*S5*S6 + E1*E4*G2*G3*G4*S1*S6$

$$\begin{aligned}
Q(6) := & C1*C2*C3*C4*C5*C1*G2*E3*G4*G5*S6 + C1*C2*C3*C4*E5*G1*G2*E3*G1*S5 - C1*C2*C3*C4*E5*G1*G2*E3*G1*S6 + C1*C2*C3*C4*E5*G1*G2*E3*G1*S5 - C1*C2*C3*C4*E5*G1*G2*E3*G1*S6 \\
& *C6*E3*E4*G1*G2*S5 - C1*C2*C3*E3*E4*G1*G2*E3*G1*S6 + C1*C2*C4*G5*S5*S6 - C1*C2*C4*G5*S5*S3 - C1*C2*C4*G5*S5*S3 - C1*C2*C4*G5*S5*S6 - C1*C2*C4*G5*S5*S6 \\
& + C1*C2*C4*E2*E3*E4*G1*S6 - C1*C2*C4*G1*G2*E3*G1*S6 - C1*C2*C4*G1*G2*E3*G1*S6 - C1*C2*C4*G1*G2*E3*G1*S6 - C1*C2*C4*G1*G2*E3*G1*S6 \\
& *S5 - C1*C2*C6*G1*G2*E4*S3*S4*S5 + C1*C2*E2*E3*G1*G2*E4*S3*S5 + C1*C2*E2*E3*G1*G2*E4*S3*S5 + C1*C2*E2*E3*G1*G2*E4*S3*S5 + C1*C2*E2*E3*G1*G2*E4*S3*S5 \\
& *S6 - C1*C3*C4*C6*E1*E2*G3*G4*S5 + C1*C3*C4*E1*E2*E3*G1*G5*S2*S5*S6 - C1*C3*C4*E1*E2*E3*G1*G5*S2*S5*S6 - C1*C3*C4*E1*E2*E3*G1*G5*S2*S5*S6 \\
& *S6 + C1*C3*C6*E1*E2*E3*E4*S5 - C1*C3*C6*E1*E2*E3*E4*S5 + C1*C3*C6*E1*E2*E3*E4*S5 + C1*C3*C6*E1*E2*E3*E4*S5 + C1*C3*C6*E1*E2*E3*E4*S5 \\
& C5*E1*E3*G2*G4*G5*S6 - C1*C4*C5*G1*G3*G4*S2*S3*S5 + C1*C4*G6*E1*E3*F4*E5*G2*S6 + C1*C4*E1*E2*E3*G5*S3*S5 + C1*C4*E1*E2*E3*G5*S3*S5 \\
& E4*E5*G1*G3*S2*S3*S6 - C1*E5*C6*E1*E3*G2*S4 - C1*E5*C6*G1*G3*S2*S3*S4 + C1*E5*E1*E2*G4*G5*S3*S4*S6 - C1*E5*E1*E4*G2*G3*G5*S6 + C1*E5*E1*E2*G3*G5*S6 \\
& G4*S3*S4*S5 - C1*E6*E1*E4*E2*G3*S5 + C1*E6*E3*E4*G1*G2*E3*S4*S5 - C1*E1*E2*E4*E5*S3*S4*S6 + C1*E1*E2*E4*E5*S3*S4*S6 - C1*E3*E5*G1*G2*E3*G5*S3*S6 \\
& G1*G3*G5*S2*S3*S4*S5 + C2*C3*C4*G5*S1*S6 - C2*E3*C4*G5*S1*S6 - C2*C3*C4*G5*S1*S6 - C2*C3*C4*G5*S1*S6 - C2*C3*E4*E5*S1*S4*S5 + C2*C3*E4*E5*S1*S4*S5 \\
& - C2*C4*G6*G4*G4*S1*S5 + C2*E4*E5*G3*G4*S1*S5 + C2*E4*E5*G3*G4*S1*S5 + C2*E4*E5*G3*G4*S1*S5 + C2*E4*E5*G3*G4*S1*S5 + C2*E4*E5*G3*G4*S1*S5 \\
& S5*S6 - C3*C4*G5*G2*G3*G4*G5*S1*S2*S6 - C3*C4*C6*G2*G4*S1*S2*S6 + C3*G2*G4*G5*S1*S2*S5 + C4*G5*E2*E3*G4*G4*S1*S2*S5 - C4*E2*E3*E4*E5*S1*S2*S5 \\
& S1*S2*S5 + C3*E3*E5*G2*G4*S1*S2*S6 + C3*G2*G4*G5*S1*S2*S4*S5*S6 - C4*G5*C6*G2*G3*S1*S2*E3*S3 + C4*G5*E2*E3*G4*G4*S1*S2*E3*S3 + C4*G5*E2*E3*E4*E5*S1*S2*E3*S3 \\
& + C4*G2*G5*S1*S2*S3*S5*S6 + C5*G5*E2*E3*S1*S2*S4 + C3*E2*E4*G3*G3*S1*S2*S5 + C5*G2*G4*G5*S1*S2*S5 + C6*E2*E4*G3*S1*S2*S5 + C6*G2*G4*G5*S1*S2*S5 - E2*E3*G5*S1*S2*S5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(6) &:= C_2^* C_3^* C_4^* C_5^* E_1^* G_2^* G_3^* G_4^* G_5^* S_6 + C_2^* C_3^* C_4^* E_1^* E_4^* E_5^* G_2^* G_3^* S_6 - C_2^* C_3^* C_4^* E_1^* E_4^* G_2^* G_3^* S_6 + C_2^* C_3^* C_4^* E_1^* E_4^* G_2^* G_3^* S_6 - C_2^* C_3^* C_4^* E_1^* E_4^* G_2^* G_3^* S_6 - C_2^* C_3^* C_4^* E_1^* E_4^* G_2^* G_3^* S_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - C2*C3#E1#E3#G2#G4*S6 - C2*C3#E1#G2#G3#S4*S5 + C2*C4*C5#E1#E2#E3#G4*S5 - C2*C4*C6#E1#E2#E3#G4*S5 + C2*C4#E1#E2#E3#G4#S5 - C2*C4#E1#E2#E3#G5#S5 \\
& E1#G2#G5#S3#S5#S6 - C2#C5#S5#E1#F2#E3#S4 - C2#C5#E1#F2#E3#S4 - C2#C4#E1#F2#E4#G3#G5#S6 - C2#C5#E1#G2#G3#S4*S5 + C2#C6#E1#G2#G3#S4#S5 \\
& S5 - C2#E1#E2#E5#G4#S6 + C2#E1#E4#E5#G4#S6 + C3#C4#E5#E1#S2 + C3#C4#E5#G4#S3#S4*S6 - C2#C6#E1#E4#G3#S5 - C2#C6#E1#E2#E3#G5#S5 \\
& G1#G3#S6 + C3#C5#S6#E2#G1#G3#S4 - C3#C5#E1#G4#G5#S2#S4*S6 - C3#C6#E1#G4#S2#S4*S5 - C3#G6#E2#E3#E1#G1#S5 - C3#G6#E2#E3#S3#S5 \\
& G1#G4#S6 - C3#H2#G1#G3#G5#S4*S6 - C4#C3#C6#E2#G1#S3 - C4#C5#E1#G2#G4#G5#S6 - C4#C5#E3#E1#G2#G4#S5 - C4#E1# \\
& E4#E3#G3#S2#S4*S6 - C4#E2#G1#G5#S3#S4 - C5#C6#E3#G1#G2#S4 + C5#C6#E3#G1#G2#S3#S4 - C5#E1#E3#G4#S2#S3#S6 + C5#E4# \\
& G1#G3#G5#S6 - C6#E1#E3#E4#S2#S3#S5 - C6#E2#G1#G4#S3#S4 + E1#B3#E5#G4#S2#S3#S5 + E1#E4#G1#G2#G3#S5 - E3#G1#G2#G5# \\
& G1#G3#S5#S6 + E5#G1#G2#G3#G4#S6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(6) := & - (C1*C2#C3#C4#G3#S6 + C1*C2#C3#C4#G5#S5 + C1*C2#C3#C5#G5#S4 - C1*C2#C3#C6#G4#S5 - C1*C2#C4#C5#G5#S3 - C1*C2#C4#G4#S5 \\
& G3#S3 - C1*C2#C4#G3#G4#S3#S5 - C1#G2#C5#C6#E3#G5#S3 - C1#G2#C5#G3#S3#S4#S6 - C1#C2#C6#G3#G5#S8#S4#S5 + C1#C2#E3#E4#S3#S5#S6 + C1#C3#C4#C5# \\
& G6#G2#G3#G4#G5#S2 - C1#C3#C4#G5#S2 - C1#C3#C4#G5#S2#S4#S5 - C1#C3#C4#G5#S2#S4#S6 - C1#C3#G5#G2#G3#S2#S4#S5 - C1#C3#C6# \\
& *G2#G3#G4#S2#S4#S5 + C1#C3#C4#E4#E5#G2#G3#S2 - C1#C4#C5#C6#E2#E3#E1#E5#S2 - C1#C4#E2#E3#G5#S2#S3#S5 + C1#C4#E2#E3#G4#S2 \\
& *G5#S6 - C1#C3#G5#S2#S4#S5 + C1#C3#E3#E4#G6#S2#S3#S5 - C1#C4#E4#G6#S2#S3#S4 - C1#C4#E5#G2#S2#S3#S4 + C1#C4#E5#G2#S2#S3#S5 + C1#C4#E5#G2#S2#S3#S6 \\
& *E4#G3#S2#S5#S6 + C1#G2#G4#S2#S3#S4 - C2#C3#C4#C5#G6#G4#G5#S1 - C2#C3#C4#C6#E4#E5#G1#G2#G3#G4#S1 - C2#C3#C4#G1#G2#G3#G4#S1 - C2#C4#C5# \\
& G5#S1 - C2#C3#C5#G1#G2#G3#S1#S4#S5 - C2#C3#C6#E3#G1#G2#G3#S1 - C2#C4#E2#E3#G1#G2#G3#S1 - C2#C5#G6#G4#S1 - C2#C5#G6#G4#S1 \\
& *G1#G2#S1#S3#S6 + C2#C4#C6#E2#E3#E4#S1#S3#S6 - C2#C4#E2#E3#G1#G2#S1#S3#S4 + C2#C4#E2#E4#G1#G3#S1#S3#S6 + C2#G1#G2#G4#S1#S3#S5#S6 - C3#C4 \\
& *C5#C6#E1#F2#G3#G4#G5#S1 - C3#C4#C5#G1#S1#S2#S5 + C3#C4#C6#E1#E2#E4#G5#G3#S1 - C3#C4#C6#E1#E2#E5#G3#S1#S5#S6 + C3#C5#G6#E1#E2#E3#E4#G5#S1 - C3#C5 \\
& *C5#C6#E1#F2#G3#G4#G5#S1 + C3#C5#E1#F2#G3#G4#G5#S1 + C3#C6#E1#F2#G3#G4#G5#S1 + C3#C6#E1#F2#G3#G4#G5#S1 + C3#G1#G4#S1 \\
& *C6#G1#G4#G5#S1#S2#S4 + C3#C5#E1#F2#G3#G4#G5#S1 - C4#C5#E1#E2#S1#S2#S3 + C4#C6#E1#E2#S1#S2#S4 - C3#E1#E3#G5#S1#S3 + C5#E1#E3#G5#S1#S4 \\
& *S2#S4#S5#S6 - C4#C5#C6#E1#E3#G2#G4#G5#S1 - C4#G1#G3#G4#S1#S2#S3#S4 + C5#C6#E1#E2#G4#G5#S1#S5 - C6#E1#E3#G2#G3#G4#S1 + C6#G1#G3#G4#S1#S2#S3#S4 \\
& *S6 + C5#G1#G3#S1#S2#S3#S4#S6 + C4#E1#E2#E4#E5#S1#S2#S4 + C6#E1#E3#G2#G3#G4#S1#S5 - E1#E2# \\
& G4#S1#S3#S4#S5#S6 + E1#E4#G2#G3#S1#S5#S6 - E3#A#G1#S1#S2#S3#S4#S5#S6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(6) := & C1*C2#C3#C4#C5#C6#G1#G2#G3#G4#G5 - C1*C2#C3#C4#C6#E4#E5#G1#G2#G3 - C1*C2#C3#C5#C6#F3#E4#G1#G2#G5 - C1*C2#C3#C5#G1#G2#G3#S4#S6 - C1#C2#C4# \\
& *G6#E3#E5#G1#G2#G4# - C1#C2#C3#C6#G1#G2#G3#G5#S4#S5 + C1#C2#C3#E3#E4#G1#G2#S5#S6 - C1#C2#C4#C5#C6#E2#B3#G1#G4#G5 - C1#C2#C4#C5#E2#E3#G1#G5 \\
& *S5 - C1#C2#C5#E2#E5#G1#G3#G4 + C1#C2#C6#E4#E5#G1#G2#S3#S4 + C1#C2#E2#F4#G1#G3#S5#S6 - C1#C3#C4#C5#C6#E1#E2#G3#G4#G5 - C1#C3#C4#C5# \\
& *S6 + C1#C3#C4#C6#E1#E2#F4#G1#G3#G4 - C1#C3#C4#E1#F2#G3#G4#S5#S6 + C1#C3#C4#E1#F2#E3#E4#G5#S1 - C1#C3#C5#C6#G1#G4#G5#S1 + C1#C4# \\
& *S6 + C1#C3#C6#E1#E2#E3#E4#G5#S1 + C1#C3#C6#E1#E2#G3#G4#S5#S6 + C1#C4#C5#C6#E1#E2#G3#S3#S5 + C1#C5#C6#E1#E2#G3#S2#S3 + C1#C5#C6#E1#E2# \\
& C1#C4#C5#C6#G1#G3#G4#G5#S2#S3 + C1#C4#C5#E1#E2#G4#G5#S3#S4 - C1#C5#C6#E1#E2#G4#G5#S1#S2#S3 + C1#C5#G1#G2#G3#S5#S6 - C1#E1#E4#G2#G3#S5#S6 - \\
& C1#E3#A#G1#S2#S3#S5#S6 - C2#C3#C4#C5#S1#S5#S6 - C2#C3#C4#C6#G5#S1#S4 + C2#C3#C5#C6#G5#S1#S3#S5#S6 + C2#C4#C5#C6#E4#E5#S1#S4 + C2#C4#C5#C6#E4#E5#S1#S3 \\
& *S5#S6 - C3#C4#C5#C6#G2#G3#G4#S1#S2#S4 + C3#C4#C6#E1#E5#G6#S1#S2#S4 + C3#C5#C6#E3#E4#G2#S3#S4#S6 + C3#C6#E3#E4#G2#S3#S4#S5 - C2#E3#F4#S1#S2 \\
& *G6#S1#S2 + C3#G1#G2#G3#G4#S1#S2#S3#S4 + C5#C6#G2#S1#S2#S3#S5 - C3#E3#A#G2#G3#G4#S1#S2#S3#S4 - C4#C5#G2#S1#S2#S3#S5 + C4#C6#G2#G3#S1#S2#S3 \\
& *S1#S2#S3#S4 - E2#E4#G3#S1#S2#S3#S6 - G2#G4#S1#S2#S3#S4#S5#S6
\end{aligned}$$

三

$$\begin{aligned}
& + A6*C3*C4*C5*E2*G1*G3*G4*G5*S6 + A6*C3*C4*E1*G5*S2*G4*S5 - A6*C3*C4*E2*E4*E5*G1*G3*S4 - A6*C3*C5*C6*E2*G1*G3*S4 \\
& *S6 - A6*C3*C5*E2*G1*G3*G5*S6 - A6*C3*C6*E1*G4*S2*S4*S5 - A6*C3*C6*E1*E4*E5*S2*S4*S6 - A6*C3*E2*G1*G3*S5*S6 + \\
& A6*C4*C5*E2*G1*S3 - A6*C4*C5*E1*G3*G4*S3*S6 + A6*C4*C5*E3*G1*G2*G4*G5*S6 - A6*C4*C5*E1*E4*E5*S2*S3*S6 - \\
& A6*C4*E2*G1*G3*G4*S3*S6 - A6*C4*E2*E4*E5*G1*G2*S6 - A6*C4*C6*E3*G1*G2*G4*S5 + A6*C4*E1*E4*E5*S2*S3*S6 - \\
& A6*C5*E2*G1*G3*G4*S3*S6 - A6*C5*E2*E4*E5*G1*G2*S4 + A6*C5*E3*G1*G2*G3*S6 - A6*C5*E2*G1*G4*G5*S3*S4*S6 + A6*C5*E1*G3*S5*S6 \\
& G1*G2*G3*G4*S6 + A6*C6*E1*G3*S2*S3*S4 + A6*C6*E1*G3*G2*G3*S5 + A6*C6*E1*E3*G1*G2*G3*S5 + A6*C6*E1*G3*G5*S2*S3*S4*S6 + A6*C6*E2*E4*E5*G1*G3*S5*S6 \\
& S6 - A6*C7*G1*G3*G4*S5*S6 + A6*C6*E1*E3*E4*S2*S3*S5 - A6*C6*E1*E4*E5*G1*G2*S6 - C2*C3*C4*D6*E1*E5*G2*G3*G5 + C2*C3*C5*D6*E1*E4*E5*G2*G3*G5 \\
& - C2*C3*D5*E1*E5*G2*G3*G4 - C2*C3*D6*E1*E3*G2*G4*G5 + C2*C3*D6*E1*E2*F3*L5*G4 + C2*C4*D5*E1*E2*E3*E4 + C2*C4*D6*E1*E3*E4 \\
& *E3*E4*G5 + C2*C4*D6*E1*E3*G2*G4 - C2*C4*D6*E1*E2*E4*E5*G3 + C2*C5*D6*E1*E3*G2*G3*S4 - C2*C3*G1*D6*E1*E2*G3 - C2*D5*E1*E4*G2*G3*S4 - C2 \\
& *D6*E1*E2*E3*E5*S4*S5 - C2*D5*E1*E2*G3*G4*G5 + C2*D6*E1*E4*E5*G3 + C3*C4*D5*E2*E4*G1*G3 - C3*C4*D5*E2*E4*G1*G3 \\
& *G5 + C3*C5*D6*E1*E5*G4*S2*S4 + C3*C5*D6*E2*E3*E4*G5*G1 + C3*D5*E1*E4*S2*S4 - C3*D6*E1*E4*G1*G4 + C3*D6*E2*E3*G1*G5 + C3*D6*E2* \\
& *E5*G1*G3*S4*S5 + C4*C3*D6*E1*E5*G3*G4*S2*S3 - C4*C5*D6*E3*E5*G1*G2*G4 + C4*D3*E1*E4*G3*G5*S2*S3 + C4*D6*E2*E5*G1*G3*S5 - C4* \\
& D6*E3*E4*G1*G2*G5 - C5*D6*E1*E3*E4*E5*G1*G2*G3 + C5*D6*E2*E5*G1*G2*G3 + D1 + D2*G1 + D3*G1*G2 + D4*E1*E3*G2*G3 + D5*E1*E3*G4*G5 \\
& + D3*E2*E4*G1*G3*S4 + D5*G1*G2*G3*G4 + D6*E1*E3*G4*G5*S2*S3 - D6*E1*E5*G3*S2*S3 + D6*E2*E4*G1*G5*S3*S4 + D6*E3*E5*G1*G2*G3*G4*G5
\end{aligned}$$

(2) 第1リンク先端の位置と姿勢

$$\begin{aligned}
P(1) &:= C1 \\
Q(1) &:= S1 \\
R(1) &:= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(1) &:= -G1*S1 \\
V(1) &:= C1*G1 \\
W(1) &:= E1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(1) &:= E1*S1 \\
EE(1) &:= -C1*E1 \\
F(1) &:= G1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(1) &:= A1*C1 \\
Y(1) &:= A1*S1 \\
Z(1) &:= D1
\end{aligned}$$

(3) 第2リンク先端の位置と姿勢

$$\begin{aligned}
P(2) &:= C1*C2 - G1*S1*S2 \\
Q(2) &:= C1*G1*S2 + C2*S1 \\
R(2) &:= E1*S2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(2) &:= -(C1*G2*S2 + C2*G1*G2*S1 - F1*E2*S1) \\
V(2) &:= C1*C2*G1*G2 - C1*E1*F2 - G2*S1*S2
\end{aligned}$$

$$W(2) := C2*E1*G2 + E2*G1$$

$$\begin{aligned} D(2) &:= C1*E2*S2 + C2*E2*G1*S1 + E1*G2*S1 \\ EE(2) &:= -(C1*C2*E2*G1 + C1*E1*G2 - E2*S1*S2) \\ F(2) &:= -(C2*E1*E2 - G1*G2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(2) &:= A1*C1 + A2*C1*C2 - A2*G1*S1*S2 + D2*E1*S1 \\ Y(2) &:= A1*S1 + A2*C1*G1*S2 + A2*C2*S1 - C1*D2*E1 \\ Z(2) &:= A2*E1*S2 + D1 + D2*G1 \end{aligned}$$

(4) 第3リンク先端の位置と姿勢

$$\begin{aligned} P(3) &:= C1*C2*C3 - C1*G2*S2*S3 - C2*G1*G2*S1*S3 - C3*G1*S1*S2 + E1*E2*S1*S3 \\ Q(3) &:= C1*C2*G1*G2*S3 + C1*C3*G1*S2 - C1*E1*E2*S3 + C2*E3*S1 - G2*S1*S2*S3 \\ R(3) &:= C2*E1*G2*S3 + C3*E1*S2 + E2*G1*S3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(3) &:= -(C1*C2*G3*S3 + C1*C3*G2*G3*S2 - C1*E2*E3*S2 + C2*C3*G1*G2*G3*S1 - C2*E2*E3*G1*S1 - C3*E1*E2*G3*S1 - G1*E3*G2*S1 - G1*E3*S1*S2*S3) \\ V(3) &:= C1*C2*G3*G1*G2*G3 - C1*C2*E2*G3*G1 - C1*C3*E1*E2*G3 - C1*E1*E3*G2 - C1*G1*G3*S2*S3 - C2*G3*S1*S2 + E2*E3*S1*S2 \\ W(3) &:= C2*C3*E1*G2*G3 - C2*E1*E2*E3 + C3*E2*E1*G3 - E1*E3*S2*S3 + E3*G1*G2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(3) &:= C1*C2*G3*S3 + C1*C3*E3*G2*S2 + C1*E2*E3*S2 + C2*C3*E3*G1*G2*S1 + C2*E2*G1*G3*S1 - C3*E1*E2*E3*S1 + E1*E2*G3*S1 - C3*E1*S1*S2*S3 \\ EE(3) &:= -(C1*C2*G3*E3*G1*G2 + C1*C2*E2*G1*G3 - C1*C3*E1*E2*G3 + C1*E1*G2*G3 - C1*E3*G1*S2*S3 - C2*E3*S1*S2 - E2*G3*S1*S2) \\ F(3) &:= -(C2*C3*E1*E3*G2 + C2*E1*E3*G3 + C3*E1*E2*E3*G1 - E1*E3*S2*S3 - G1*G2*G3) \\ X(3) &:= A1*C1 + A2*C1*C2 - A2*G1*S1*S2 + A3*C1*C2*C3 - A3*C1*G2*S2*S3 - A3*C2*G1*G2*S1*S3 - A3*C3*G1*S1*S2 + A3*E1*E2*G1*S1 + C2*D3*E2*G1*S1 + D2*E1*S1 + D3*E1*G2 \\ Y(3) &:= A1*S1 + A2*C1*G1*S2 + A2*C2*S1 + A3*C1*C2*G1*G2*S1 + A3*C1*C3*G1*S2 - A3*C1*E1*E2*S3 + A3*C2*C3*S1 - A3*G2*S1*S2*S3 - C1*D2*E1 - C1*D3*E2*G1 + D3*E2*S1 \\ Z(3) &:= A2*E1*S2 + A3*C2*E1*G2*S3 + A3*C3*E1*S2 + A3*E2*G1*S3 - C2*D3*E1*E2 + D1 + D2*G1 + D3*G1*G2 \end{aligned}$$

(5) 第4リンク先端の位置と姿勢

$$\begin{aligned} P(4) &:= C1*C2*C3*C4 - C1*C2*G3*S3*S4 - C1*C3*G2*G3*S2*S4 - C1*E2*E3*S2*S3 + C1*E2*E3*G3*S1*S4 - C2*C3*G1*G2*G3*S1*S4 - C3*C4*G1*S1*S4 + C3* \\ &\quad E1*E2*G3*S1*S4 + C4*E1*E2*S1*S3 + E1*E3*G2*S1*S4 + G1*G3*S1*S2*S3*S4 \\ Q(4) &:= C1*C2*C3*G1*G2*G3*S4 + C1*C2*C4*G1*G2*S3 - C1*C3*E1*E2*G3*S4 - C1*E3*G2*S1 - C2*C3*C4*S1 - \\ &\quad C2*G3*S1*S3*S4 - C3*G2*G3*S1*S2*S4 - C4*G2*S1*S2*S3 + E2*E3*S1*S2*S4 \\ R(4) &:= C2*C3*E1*G2*G3*S4 + C2*CA*E1*G2*S3 - C2*E1*E2*E3*S4 + C3*CA*E1*S2 + C3*E2*G1*G3*S3 - E1*G3*S2*S3*S4 + E3*G1*G2*S4 \\ U(4) &:= -(C1*C2*C3*G1*S4 + C1*C2*G3*G4*S3 - C1*C3*E3*E4*G3*S2 - C1*E2*E4*G3*S2 - C1*G2*G4*S2*S3 + C2*C3*C4*G1 \\ &\quad *G2*G3*S1 - C2*C3*E3*E4*G1*G2*S1 - C2*CA*E2*E3*G1*G4*S1 - C2*E2*E4*G1*G3*S1 - C3*CA*E1*E2*G3*G4*S1 + C3*E1*E2*E3*E4*S1 - C3*G1*G4*S1*S2*S4 - C4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(A) &:= C1*C2*C3*C4*C1*G2*G3*G4*S1 - C4*G1*G3*G4*S1*S3 + E1*E2*G4*S1*S3 + E1*E4*G2*G3*S1 + E3*E4*G1*S1*S2*S3 \\
&\quad - C1*C2*G1*G2*G3*G4 - C1*C2*C3*C4*E2*F3*G1*G2 - C1*C2*E2*G1*G1*G3 - C1*C3*G1*G2*G3*G4 + C1*C3*E1*E2*G3*G4 - C1*C3*G1*G4 \\
&\quad *S2*S4 - C1*C4*E1*E3*G2*G4 - C1*C4*G1*G2*G3*G4 + C1*E1*E2*G4*S3 + C1*E3*E4*G1*S2*S3 - C2*C3*G4*S1*S3 + C2*E3*E4*S1*S3 - C3*C4* \\
&\quad G2*G3*G4*S1*S2 + C3*E3*G1*G2*S1*S2 + C4*E2*G3*G1*S2 + E2*G1*G3*G1*S2 + G2*G4*S1*S2*S3 \\
W(A) &:= C2*C3*C4*E1*G2*G3*G4 - C2*C4*E1*E2*E3*G4 - C2*E1*E2*E4*G3 - C2*E1*G2*G4*S3 + C3*C4*E2*G1*G3*G4 - C3*E1*G4*S2*S4 - C3*E1*G3*G4*S2* \\
&\quad S3 + C4*E3*G1*G2*G4 + E1*E3*G1*G2*G3 - E2*G1*G4*S3 + E4*G1*G2*G3 \\
D(4) &:= C1*C2*C3*E4*S4 + C1*C2*C4*E4*S3 + C1*C2*B3*G4*S3 + C1*C3*C4*E4*S2 + C1*C3*E3*G2*G4*S2 - C1*C4*E2*E3*G4*S2 + C1*E2*G3*G4*S2 - C1*E4*G2* \\
&\quad G2*G3*S1 + C2*C3*E3*G1*G2*G4*S1 - C2*C4*E2*B3*E4*G1*S1 - C2*E4*G1*G3*G4*S1 - C3*C4*E1*E2*G4*S1 - C3*E4*G1*S2*S4 - C4*E1* \\
&\quad E3*E4*G2*S1 - C4*E4*G1*G3*S1*S2*S3 + E1*E2*G3*G4*S1 - E1*E2*G4*S1*S3 + E1*E2*G3*G4*S1 - E3*G1*G4*S2*S3 \\
E4(A) &:= -(C1*C2*C3*C4*E4*G1*G2*G3 + C1*C2*C3*E3*G2*G4 - C1*C2*E2*G1*G3*G4 - C1*C2*E4*G1*G3*G4 - C1*C3*G4*S1*S3 - C1*E1*E2*E3*G4*S1 - C1*E1* \\
&\quad E4*G1*S2*S4 - C1*C4*E1*E3*E4*G2 - C1*C4*E4*G1*G3*G2*G4 - C1*E1*E2*E4*S4 + C1*E1*E2*E3*G4*S1*S3 - C2*C3*E4*S1*S3 - \\
&\quad C3*E4*E4*G2*G3*S1*S2 - C3*E3*G2*G4*S1*S2 + C4*E2*E3*E4*S1*S2 - E2*G3*G4*S1*S2 + E4*G2*S1*S2*S3*S4) \\
F(4) &:= -(C2*C3*C4*E1*E4*G2*G3 + C2*E3*E1*E3*G2*G4 - C2*E4*E1*E2*E3*E4 + C2*E1*E4*G2*G3*G4 - C3*E1*E4*S2*S4 + C3*E2*E3*G1*G4 - C4*E1*E4*G3 \\
&\quad *S2*S3 + C4*E3*E4*G1*G2 - E1*E3*G4*S2*S3 - E2*E4*G1*S3*S4 - E1*E2*G2*G3*G4) \\
X(4) &:= A1*C1 + A2*C1*C2 - A2*G1*S1*S2 + A3*G1*E2*C3 - A3*G2*G1*G2*S2*S3 - A3*C3*G1*S1*S2 + A3*E1*E2*S1*S3 + A4*C1*E2*C3*G4 - A4*C1*C2*G3*G2*G3 \\
&\quad *S2*S4 - A4*C1*C4*G2*S2*S3 + A4*E1*G3*G2*G3*S1*S4 - A4*C2*C3*G1*G2*G3*S1*S4 - A4*C2*E2*F3*G1*S1*S4 - A4*C3*C4*G1*S1*S2 + A4*C4 \\
&\quad *E1*E2*S1*S3 + A4*E1*G3*G2*G3*S1*S4 + A4*G1*G3*G1*S2*S3*S4 + C1*C2*D4*E3*G2*S2 + C1*D3*E2*S2 + C1*D4*E2*G3*S2 + C2*C3*D4*E3*G1*G2* \\
&\quad D4*E2*G1*G3*S1 - C3*D4*E1*E2*E3*S1 + D2*E1*S1 + D3*E1*G2*G3*S1 - D4*E3*G1*S1*S2*S3 \\
&\quad *C1*C2*E2*E3*G1*S4 + A4*C1*C3*E4*G1*S2 - A4*C1*C3*E1*E2*S3 - A3*C2*C3*G1*S1 - A3*C2*C3*G1*G2*G3*S4 + A4*C1*C2* \\
&\quad *G2*G3*S1*S2*S4 - A4*C1*G2*S1*S3 + A4*E2*E3*G2*S2*S4 - C1*C2*D3*E2*G1*G2 - C1*C2*E2*E1*E2*E3 - C1*D3*E1*G2 - C1*D4* \\
&\quad E1*G2*G3 + C1*D4*E3*G1*S2*S3 + C2*D4*E3*G1*S2*S3 + D3*E2*G1*G2*G3*S1*S2 + D4*E2*G3*S1*S2 \\
Y(4) &:= A1*S1 + A2*C1*G1*S2 + A2*C2*S1 + A3*C1*E2*G1*G2*S3 + A3*C1*C3*G1*S2 - A3*C1*E1*E2*S3 + A3*C2*C3*G1*G2*G3*S4 - A4*C1*E1* \\
&\quad *C1*C2*E2*E3*G1*S4 + A4*C1*C3*E4*G1*S2 - A4*C1*E1*E2*G3*S4 - A4*C1*E1*E2*G3*S4 + A4*C2* \\
&\quad *G2*G3*S1*S2*S4 - A4*C1*G2*S1*S3 + A4*E2*E3*G2*S2*S4 - C1*D4*E3*G1*G2*G3*S1*S2 - C1*D4*E3*G1*G2*G3*S1*S2 \\
&\quad E1*G2*G3 + A3*E1*G2*G3*S1*S2 + A3*E2*G1*G2*G3*S1*S2 + A4*C2*E3*G1*G2*G3*S1*S2 + A4*C3*E1*E2*E3*G1*G2*G3*S1*S2 \\
&\quad Z(4) &:= A2*E1*S2 + A3*E3*G2*S1*S3 + A3*E4*G1*G2*S1*S3 + A4*C2*E3*G1*G2*G3*S1*S2 + A4*C3*E1*E2*E3*G1*G2*G3*S1*S2 \\
&\quad S3 - A4*E1*G3*S1*S2*S3*S4 + A4*E3*G1*G2*S1*S4 - C2*D3*E1*E2*G3 - C2*D4*E1*E2*G3 - C3*D4*E1*E2*E3*G1 + D1 + D2*G1 + D3*G1*G2 + D4*G1*G2*G3
\end{aligned}$$

(6) 第5リンク先端の位置と姿勢

$$\begin{aligned}
P(5) &:= C1*C2*C3*C4*C5 - C1*C2*C3*G4*S4*S5 - C1*C2*C4*G3*G4*S3*S4 + C1*C2*E3*E4*G3*G4*S3*S5 - C1*C3*C4*G2*G3*S2*S4 + C1*C3*E3*E4*G2* \\
&\quad S5 - C1*E4*C3*G2*G3*S2*S3 + C1*C4*E2*E3*G4*S2*S4 + C1*C5*E2*E3*G4*S2*S5 + C1*G2*G4*S3*G1*S2*S4 + C1*G2*G3*G1*S2*S5 - C2* \\
&\quad C3*E3*E4*G1*G2*S1*S5 - C2*G1*C5*G1*G2*S1*S4 + C2*E4*E2*E3*G1*G2*S1*S5 + C2*E5*G1*G2*G4*S1*S2 + C3*C4 \\
&\quad *E1*E2*E3*G4*S1*S5 + C3*C5*E1*E2*E3*G1*G2*S1*S4 - C3*E1*E2*E3*E4*S1*S5 + C4*C5*E1*E2*E3*G1*G2*G4*S1*S5 + C4*E1* \\
&\quad G2*S1*S4 + C5*G1*G3*S1*S2*S3*S4 - E1*E2*G4*S1*S3*S5 + E1*E4*G2*G3*S1*S4*S5 - E3*E4*G1*S1*S2*S3*S5 \\
Q(5) &:= C1*C2*C3*C4*C5 - C1*C2*C3*G4*G3*S4 + C1*C2*C3*C5*G1*G2*G3*S4 - C1*C2*C3*E4*E2*E3*G1*G4*S5 - C1*C2*C5*E2*E3*G1*G4 \\
&\quad *S5 - C1*E4*C3*G2*G3*S2*S3 + C1*C3*C4*G4*S3*S5 + C1*C3*C4*E2*E3*G4*S5 + C1*C3*C5*E1*E2*E3*G3*S1*S5 - C1*E3* \\
&\quad C1*C4*E1*E3*G2*G1*S5 - C1*C4*G1*G3*G4*S2*S3*S4 - C1*C5*G1*G3*G4*S2*S3*S5 - C1*E1*E2*G4*S3*S5 + C1*E1*E2* \\
&\quad *S1 - C2*C3*G4*S1*S5 - C2*C4*G3*G4*S1*S3*S5 - C2*C5*G2*G3*S1*S2*S5 - C3*C4*G2*G3*S1*S2*S5 + C3*E4*E4*G2*G3*S1*S2*S5 - C4* \\
&\quad *S1*S2*S3 + C4*E2*E3*G4*S1*S2*S5 + C5*E2*E3*G4*S2*S4 + E2*E4*G3*S1*S2*S5 + G2*G4*S1*S2*S3*S4*S5
\end{aligned}$$

```

(R(5)) := C2*C3*C4*E1*G2*G4*S5 + C2*C3*C5*E1*G3*SA - C2*C3*E1*E3*G4*G2*S5 + C2*C4*E5*E1*G2*S3 - C2*C4*E1*E2*E4*G3*S5 - C2*E1*G2*G4*S5 +
*S4*S5 + C3*C4*C5*E1*S2 + C3*C4*E2*G1*G3*G4*S5 + C3*G5*E2*G1*G3*SA - C3*E2*G4*S1*S5 - C3*E2*G3*E4*G1*S5 + C4*C5*E2*G1*S3 - C4*E1*G3*G4*S3 + C4*E3*G1*G2*G4*S5 -
C5*E1*G3*S2*S3*S4 + C5*E3*G1*G2*S4 + E1*E3*E4*S3*S5 - E2*G1*G4*S3*S5 + E4*G1*G2*G3*S5

(U(5)) := -(C1*C2*C3*C4*G5*S5 + C1*C2*C3*C5*G4*G5*S4 - C1*C2*C3*E4*E5*S4 + C1*C2*C3*E4*E5*G3*S3 - C1*C2*C3*E3*E5*G4*S3 - C1*C2*G3*

```

$$\begin{aligned} G(5) := & - (C2*C3*C4*C5*E1*E5*G2*G3*G4 + C2*C3*C4*E1*E4*G2*G3*G5 - C2*C3*E1*E5*G2*G3*S4*S5 - C2*C4*C5*E1*E2*E3*G5*G4 - C2*C4*E1* \\ & *E2*E3*E4*G5 - C2*C4*E1*E5*G2*S3*S5 - C2*C5*E1*E2*E4*E4*5*G3 - C2*C5*E1*E2*E4*G2*G3*S4*S5 + C3*C4*C3*E2*E5* \\ & G1*G3*G4 - C3*C4*E1*E5*S2*S3 + C3*C4*E2*E4*G1*G3*G5 - C3*C5*E1*E5*G4*S2*S4 - C3*E5*E2*E3*E4*E5*G1 - C3*E1*E4*G5* \\ & *E1*E5*E3*G4*S2*S3 + C4*C5*E3*G4 - C4*E1*E4*G2*G4 - C4*E2*E3*G5*S2*S3 - C4*E2*E3*G1*G2*G5 + C5*E2*E5*G1*S3* \\ & G3 - E1*E2*G1*G2*S2*S3 + E1*E5*G3*S2*S3*S4*S5 - E2*E4*G1*G3*S4*S5 - E3*E5*G1*G2*S4*S5 - G1*G2*G3*G4*G5) \end{aligned}$$

