

JAERI - M
93-169

H_∞制御とその原子力プラントへの応用

1993年9月

鈴木 勝男

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division
Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-
mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1993

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 いばらき印刷(株)

H_{∞} 制御とその原子力プラントへの応用

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

鈴木 勝男

(1993年8月9日受理)

H_{∞} 制御は H_{∞} ノルム最小の意味での多変数最適制御であり、ロバスト安定化制御の強力な手法である。大規模・複雑なシステムな原子力プラントをいろいろな外乱やパラメータ変動の下で安全かつ高信頼度で運転するためには制御系のロバスト性が重要な役割を果たす。本報は標準的な H_{∞} 制御問題の解法、 H_{∞} 制御によるロバストサーボ系の設計法および応用例をとりまとめたものである。

H_∞ Control and Its Application to Nuclear Plant

Katsuo SUZUKI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received August 9, 1993)

H_∞ control is a multi-variable optimal control in the sense of H_∞ -norm minimum, and provides a powerful control method of robust stabilization. In the nuclear plant, which is a large-size and complex plant, robust stability of the control system plays a very important role in safe and reliable operation of the plant under various disturbances and system parameter changes. This report includes a solution of the standard H_∞ control problem, a design method of H_∞ robust-servo-control system and some application examples.

Keywords: H_∞ Control Theory, Optimal Servo-control-system, Classical Control Theory, Robust Control, Riccati Equation

目 次

1. はじめに	1
2. H_{∞} 制御とその解法	3
2.1 古典理論から H_{∞} 制御へ	3
2.2 H_{∞} 制御の定式化	9
2.3 状態空間における解法	15
2.4 解法上の仮定と制御対象の関係	19
3. H_{∞} 制御によるサーボ系の設計	25
3.1 定式化	25
3.2 拡大系による設計法	27
4. H_{∞} 制御の応用例	32
5. まとめ	40
謝 辞	41
参考文献	41
付 録	42

Contents

1. Introduction	1
2. H_{∞} Control and Solution Method	3
2.1 H_{∞} Control from Classical Control Theory	3
2.2 Formulation of H_{∞} Control	9
2.3 State-space Solutions	15
2.4 Relations between Assumptions for Solutions and Control Object	19
3. Design Method of Servo-system by H_{∞} Control	25
3.1 Formulation	25
3.2 Solution using Augmented System	27
4. Application Examples of H_{∞} Control	32
5. Conclusions	40
Acknowledgement	41
References	41
Appendices	42

1. はじめに

原子力プラントの特徴は大量の核分裂生成物を内蔵する大規模・複雑なシステムであり、多様な外乱入力や設定目標値のもとで安全に運転され高い稼働率を達成することが要求される点にある。従って、原子力プラントにおいて制御系は必要不可欠なシステムのひとつである。

通常、制御系は①運転の自動化および運転員の負担軽減、②機器健全性の担保、③システムの安定性・安全性の確保等の諸点を考慮した設計仕様のもとに設計される。制御対象が大規模になり複雑さが增大すると、多数の観測量のもとに多数のプラント変量を制御する要求が生ずる。このとき制御系の安定性が外乱やシステム変動に対して頑健である性質（ロバスト性）は本質的に重要である。今日の原子力プラントの制御系はその典型例であり、多変数ロバスト制御系の設計法を最も必要とする分野である。

原子力プラントの制御系の設計概念を Fig. 1.1 のようにまとめてみよう。

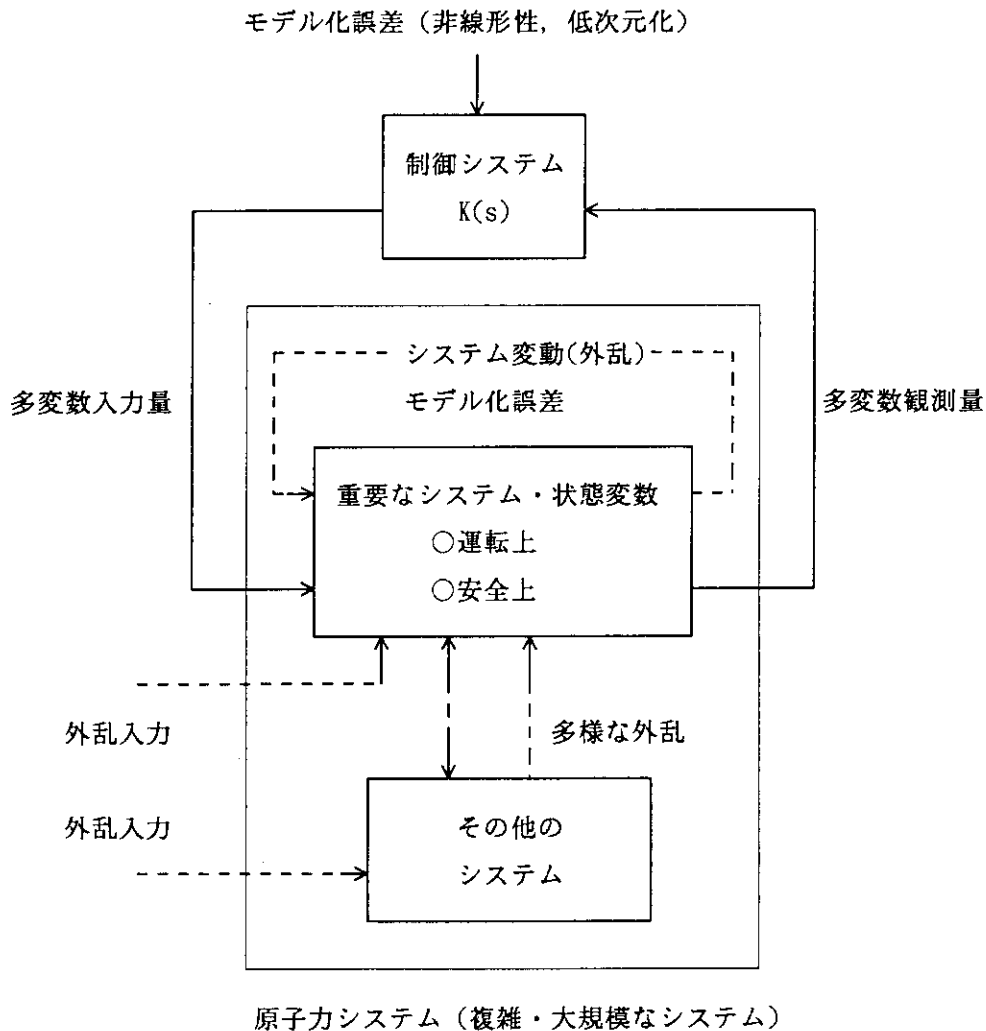


Fig. 1.1 Concept of control system design in nuclear power plant

制御系の設計は制御対象をモデル化することから始まる。このモデルは制御対象の静特性や動特性の一部を表すに過ぎず不完全なものである。この不完全なモデルに基づいて設計される制御系が実際のプラントに適用して有効であるためには、実プラントとモデルとの間の誤差を許容する制御系でなければならない。また、実プラントの外乱は Fig. 1.1 からわかるようにシステムの内部および外部で多様に発生する考えるべきである。したがって、制御系が実際に有効であるためには固定した少数クラスの外乱のみならず、より広いクラスの外乱に対処し得るものでなければならない。このような性質が制御系のロバスト性である。

現在までに得られているロバスト制御に関する主要な結果に次のものがある。

- ①乗法的なモデル化の誤差に対するロバスト性に対しては相補感度関数 (T) のゲインを小さくする。
- ②制御対象が最小位相系ならば無限大のゲイン余裕を達成することができる。逆に、これは不安定なゼロ点や極は感度特性やロバスト安定性の達成を制約することを意味する。
- ③摂動 $\Delta(s)$ が $\sigma(\Delta(j\omega)) < |r(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbb{R}$ を満たすとき、Fig. 1.2 に示す閉ループ系をロバスト安定化する (線形) 安定化器が存在しないならば、安定化器のクラスを非線形あるいは係数時変なクラスまで広げてもロバスト安定化できない。

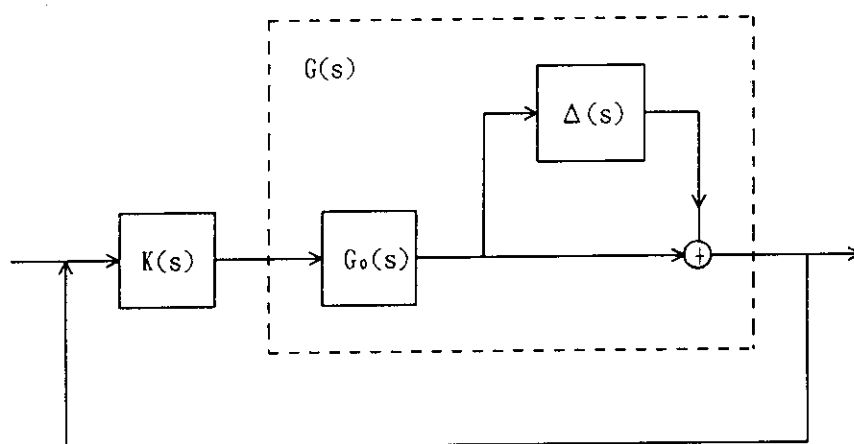


Fig. 1.2 Feedback control system with system perturbation $\Delta(s)$.

本報は多変数ロバスト制御系の設計理論として近年注目され盛んに研究されている H_∞ 制御をとりあげ、その標準的な定式化と解法、 H_∞ 制御によるサーボ系の設計法およびいくつかの応用例に基づいてその有効性を議論するものである。

2. H_∞ 制御とその解法

2. 1 古典理論から H_∞ 制御へ^{1, 2)}

20世紀初頭においてはシステム動特性を常微分方程式を用いて記述し、主に定常偏差や安定性といった制御特性の解析を扱っていた。1930-40年代になると周波数応答法が導入され、補償要素と制御特性の関係が明らかにされた。これらの研究は最小位相推移系に対するゲインと位相の相互関係を述べたBodeの定理に集約された。

1960年代になると周波数応答から常微分方程式へ再び回帰し、状態方程式を基礎とする解析法が登場する。1940年代に発表された難解なKolmogorov-Wienerフィルタ理論が、KalmanとBucyによって線形確率系の状態方程式表現と直交射影理論に基づく実際の応用に適したフィルタ理論の形に整えられたのもこの時代である。70年代には多項式環上の行列理論に基づく多変数制御理論が研究された。現代制御理論の呼称はこれら一連の理論的研究を指すものである。

さて、制御理論の現状はどうであろうか。理論構築の方法は60年代の延長線上にあるが、制御則の演算手段に計算機が大幅に取入れられることに対応してデジタル制御理論が新たな研究課題としてクローズアップされている。また、実装面でもアナログ計装制御からデジタル計装制御に急速に移りつつある。LQG制御、適応制御、非線形制御等の実際への適用が盛んに試みられている。この結果、制御対象のモデルと実プラントとのギャップや設計や理論的に想定する外乱と実際に発生する外乱との相違が実際の制御特性（安定性や過渡特性など）に及ぼす影響が理論と実際の適用の接点で問題となってきた。すなわち、外乱やシステム変動に対するロバスト性は制御系が持つべき重要な性質であるとの認識が高まってきたのである。

1980年代になって、Zames や Doyle らはこのロバスト性の問題を H_∞ ノルムに基づく閉ループ周波数応答の整形問題として定式化することを提案した。これが H_∞ 制御の始まりである。 H_∞ 制御は一言でいえば有関数環上の行列理論や複素関数論を数学的基礎として古典理論のループ整形の考え方を精密化した現代的周波数応答の整形問題であると云えよう。この制御理論は多変数系に対するロバスト制御系の具体的な設計法を与えるものとして注目され、その研究が現在活発に進められている。

上で述べた外乱や実プラントとモデルとの相違に対する制御系のロバスト性が H_∞ ノルムの導入により同形式の閉ループ周波数応答の整形問題に定式化できることを以下に例示する。

(1) 外乱に対するロバスト性

現代的周波数応答法を考察するとき、Fig. 2.1 に示す2自由度系の導入と誤差関数の性質に関する認識が重要な役割を果たすので、これらについて簡単に調べておく。

スカラー制御系において、独立に調整できる閉ループ伝達関数の個数を制御系の自由度という。図では偏差(e)に作用して操作量を演算する補償要素1(F_1)と目標値(r)から操作量へのパスを決定する補償要素2(F_2)を有しているので2自由度制御系のひとつの構造をなしている。

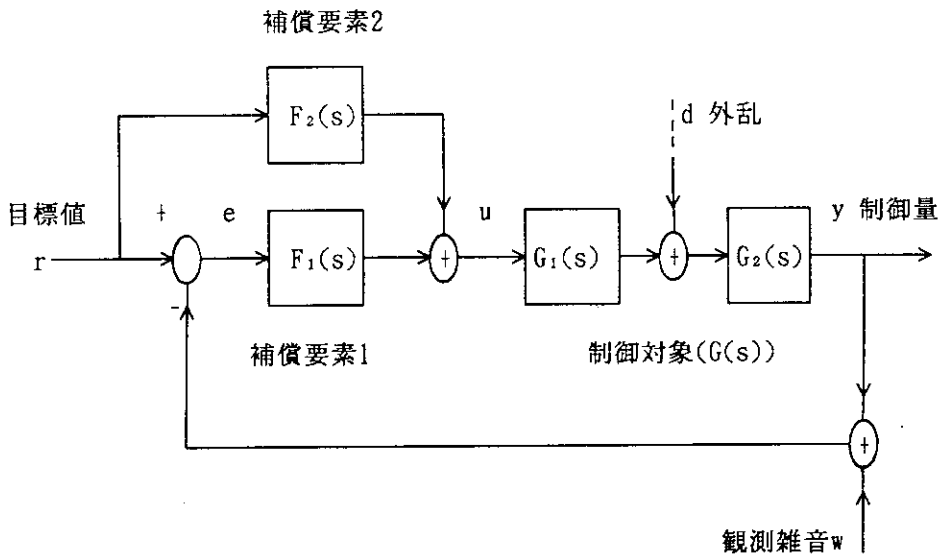


Fig. 2.1 Structure of 2-freedom-degree feedback control system

外乱 (d) と目標値 (r) から制御量 (y) への伝達関数をそれぞれ $W_{y,d}$, $W_{y,r}$ とすると次の関係式が成立つ。

$$W_{y,r} + \frac{(1-F_2G)}{G_2} W_{y,d} = 1 \tag{2.1a}$$

これには補償要素 F_2 含まれており, 2つの伝達関数 $W_{y,d}$, $W_{y,r}$ は設計段階で調整出来ることになる。これは1自由度系構成における固定的な関係

$$W_{y,r} + \frac{1}{G_2} W_{y,d} = 1 \tag{2.1b}$$

と比較して著しい利点がある。すなわち, 2自由度構成の制御系ではフィードバック特性は補償要素 F_1 で調整し, 伝達特性は補償要素 F_2 で調整することが可能である。この自由度の存在が現代的周波数応答法を定式化する上の前提である。

Table 2.1は2自由度系における設計指標と補償要素の関係および重視する周波数帯域をまとめたものである。ただし, 表中の $S(s)$ と $T(s)$ は $F_2(s)=0$ としたときの感度関数と相補感度関数であり, 次式で定義される。

$$S(s) := (1 + L(s))^{-1}, \quad T(s) := L(s)(1 + L(s))^{-1}, \quad L(s) := G(s)F_1(s) \tag{2.2}$$

以下ではフィードバック特性を決定する補償器 $F_1(s)$ を $K(s)$ で表す。これから周波数応答の整形に関して次の2つの方策が得られる。

A) フィードバック特性：外乱やシステム変動に依存しない制御特性を達成するために $F_1(s)$ により指定周波数帯域で $|S(j\omega)|$ と $|T(j\omega)|$ を整形する。

B) 伝達特性： $F_1(s)$ を設定後、 $F_2(s)$ により低周波数域で $|W_{yr}(j\omega)| \approx 1$ に調整する。

Table 2.1 Relation of compensators and design indices[2]

分類	項目	具体的指標	補償要素	重要な周波数域
伝達特性	1. 目標値追従性	$W_{yr}(j\omega)$	$F_2(s)$	低周波域
フィードバック特性	2. 外乱抑制	$S(j\omega)$	$F_1(s)$	低周波域
	3. 安定余裕	$T(j\omega)$		高周波域
	4. 感度	$S(j\omega)$		低周波域
	5. 検出雑音の影響	$T(j\omega)$		高周波域

以上の議論から外乱に対するロバスト性に対しては感度関数の整形問題として次のように定式化できる。すなわち、

$$\|\Phi\|_{\infty} < \gamma, \quad \Phi(s) := W(s)S(s) \quad (2.3)$$

となる制御器 $K(s)$ を求めよ。ただし、

$$\|\Phi\|_{\infty} := \max_{\omega \in \mathbb{R}} \{\bar{\sigma}(\Phi(j\omega))\}$$

$\bar{\sigma}(A)$: 行列 A の最大特異値

$W(s)$: 重み関数

何故このような感度関数の整形がフィードバック制御系を多様な外乱に対してロバストにするかは次式で説明される。

$$\|\Phi\|_{\infty} = \max_{x \in H_2} \{\|\Phi x\|_2 / \|x\|_2\} < \gamma, \quad \Phi := W(s)S(s)$$

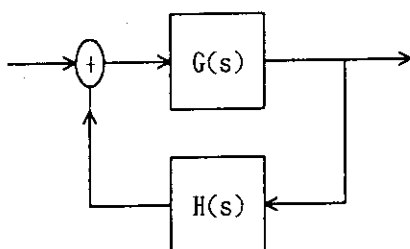
すなわち、 H_{∞} ノルム最適化制御は最悪外乱 (x_0) に対する感度関数 S のゲインを重み W に対応する周波数域で最小化することになるからである。これは LQG 設計法のようにガウス型白色雑音と

固定した外乱に対しての最適化ではなく、すべての外乱 (H_2 空間) を考慮していることになる。

(2) システム変動に対するロバスト安定性

ここでは、システム変動に対するフィードバック制御系のロバスト安定化問題が外乱に対すると同様に周波数応答の整形問題として定式化できることを示す。このための基礎となるのが次に述べる小ゲイン定理である。

【小ゲイン定理】 $G(s)$, $H(s)$ が安定であるとき、次のフィードバック系



が安定であるための十分条件は、 $\|GH\|_\infty < 1$ が成立つことである。

この定理は G , H の具体的な形に無関係に H_∞ ノルムのみから安定性の判別が可能であることを主張するものであり、 H_∞ ノルムの有用性が現れている。また、安定性にはゲイン (H_∞ ノルムはゲインに相当する量) のみではなく位相も関係するはずであるが、本定理はゲインのみで安定性を規定しようとするものであるから安定性に関する十分条件のひとつを述べているに過ぎないのは当然である。

この定理を用いて加法的システム変動と乗法的なそれとに対するロバスト安定化問題を閉ループ周波数応答の整形問題としての定式化を以下に述べる。

①加法的変動に対するロバスト安定化

実システム $G(s)$ が公称モデル $G_0(s)$ に未知の安定な変動 Δ が加法的に加わった形 $G(s) = G_0(s) + \Delta$ で表される次図のフィードバック制御系を考える。

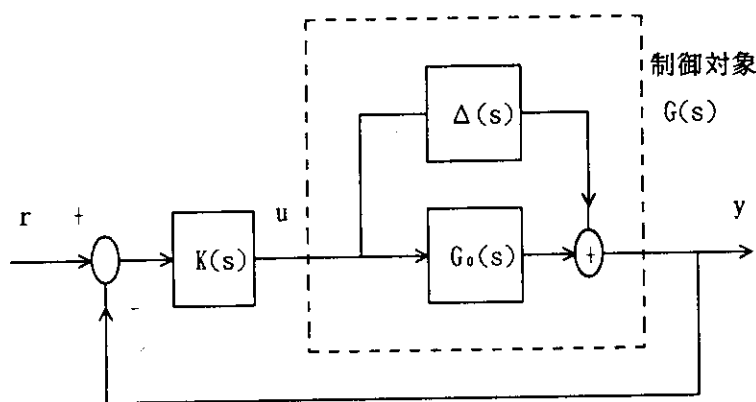


Fig 2.2 Feedback system of $G_0(s)$ with additive change(Δ).

これを等価変換して Fig. 2.3 に示すブロック図を得る。

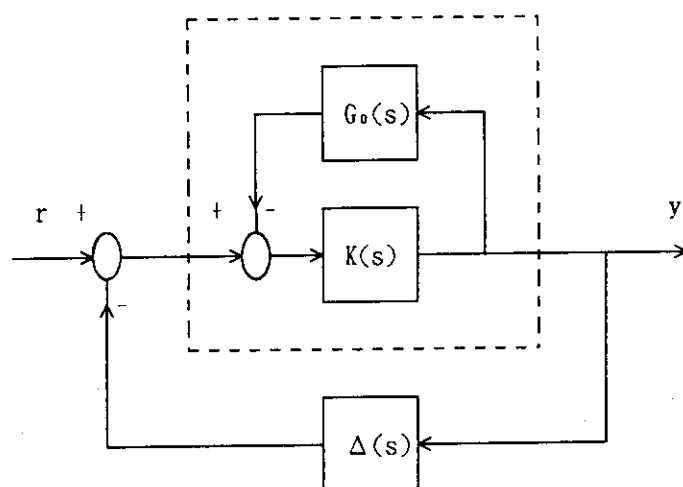


Fig 2.3 Equivalent block diagram of the feedback system shown in Fig. 2.2

これに小ゲイン定理を適用して、フィードバック系が安定であるための十分条件を導くと次の不等式となる。

$$\|\Delta \cdot Q\|_{\infty} < 1, \quad Q := K(1+L)^{-1}, \quad L := G_0K \quad (2.4)$$

ただし、 $Q(s)$ は Fig. 2.2 において $\Delta=0$ (変動無しの場合) の r から u への閉ループ伝達関数であり安定でなければならない。すなわち、制御器 $K(s)$ は公称モデル $G_0(s)$ に対してフィードバック制御系を内部安定化するものでなければならない。

いま、 $\Delta(j\omega)$ の上限 $r(j\omega)$ が既知ならば、

$$|\Delta(j\omega)| \leq |r(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (2.5)$$

である。不等式

$$\|rQ\|_{\infty} < 1 \quad (2.6)$$

を満足するように補償器を設計すれば、Fig. 2.2 の閉ループ系は (2.5) 式を満たす変動 Δ のすべてに対してロバスト安定であることになる。

②乗法的変動に対するロバスト安定化

変動 $\Delta(s)$ の性質によっては、 $G(s)=G_0(s)(1+\Delta(s))$ のように変動を乗法的にみなす方が合理的である場合がある。このフィードバック制御系は次のブロック図で表される。

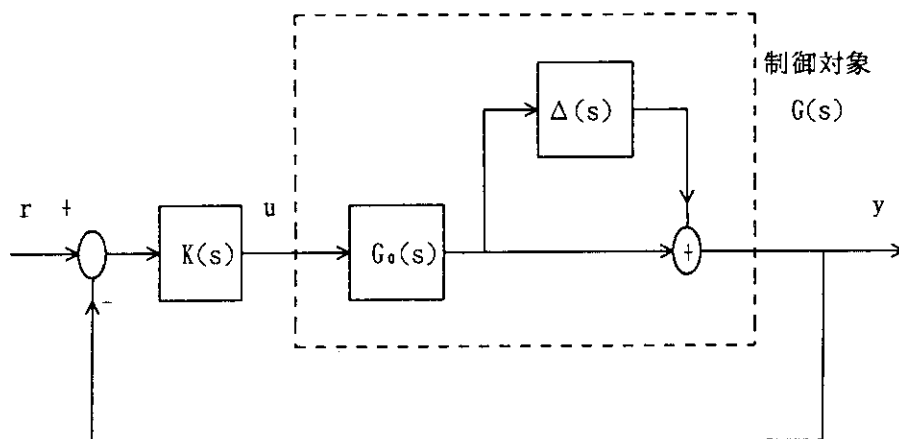


Fig 2.4 Feedback system of $G_0(s)$ with multiplicative change(Δ).

これを加法的変動の場合と同様に等価変換して Fig. 2.5 のブロック図を得る。

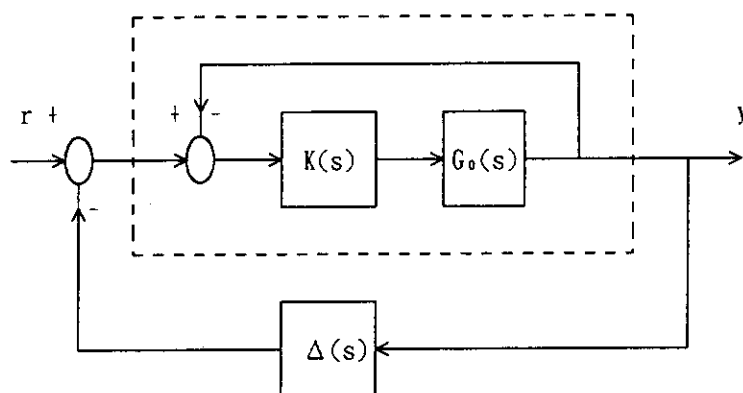


Fig 2.5 Equivalent block diagram of the feedback system shown in Fig. 2.4

これに小ゲイン定理を適用して、フィードバック系が安定であるための十分条件を導くと次の不等式となる。

$$\|\Delta \cdot T\|_{\infty} < 1, \quad T := L(1+L)^{-1}, \quad L := G_0 K \quad (2.7)$$

ただし、 $T(s)$ は Fig. 2.4 において $\Delta=0$ (変動無しの場合) の r から y への閉ループ伝達関数であり安定でなければならない。すなわち、制御器 $K(s)$ は公称モデル $G_0(s)$ に対してフィードバック制御系を内部安定化するものでなければならない。

もし、 $\Delta(j\omega)$ が (2.5) 式を満たしていれば、乗法的変動に対するロバスト安定条件としてつぎの不等式

$$\|rT\|_{\infty} < 1 \quad (2.8)$$

を得る。これを満足するように補償器を設計すれば、Fig. 2.4 の閉ループ系は (2.5) 式を満たす変動 Δ のすべてに対してロバスト安定であることになる。

(3) 周波数応答整形の実現性

以上から H_∞ ノルムを用いると外乱に対するロバスト性もシステム変動に対するロバスト安定性も共に閉ループ周波数応答の周波数重み付き整形問題に帰着できることがわかった。ここでは制御対象 $G(s)$ のゼロ点 (z) や極 (p) が感度関数や相補感度関数の整形を制約することを示し、整形が無制限に実現できるものでないことを注意する。

①感度関数の整形

いま、制御対象 $G(s)$ が不安定ゼロ点 z を持つ非最小位相系を考える。制御器 $K(s)$ は $G(s)$ の不安定な極やゼロ点を相殺しないように設計されるから (付録A.4参照), (2.2) 式から $L(z)=G(z)K(z)=0$ であり, $S(z)=1$ となる。さらに、制御器 $K(s)$ は閉ループ系を安定化するから感度関数 $S(s)$ は複素右閉半平面で解析的 (連続性) である。よって、最大値定理から $S(s)$ の最大値は境界上に存在することになるから、 $|S(j\omega_0)| \geq 1$ となる ω_0 が存在する。これは、 $G(s)$ が不安定ゼロ点 (z) を持つ非最小位相系である場合、感度関数の整形は ω_0 の近傍の周波数帯域では $|S| < 1$ とすることが不可能であることを意味する。

②相補感度関数の整形

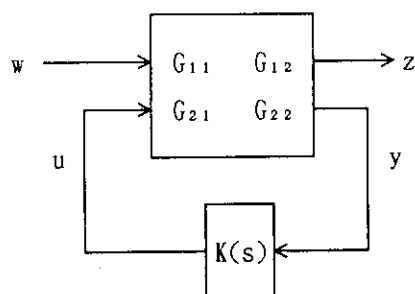
次に、制御対象 $G(s)$ が不安定極 p を持つ不安定系を考える。制御器 $K(s)$ は $G(s)$ の不安定な極やゼロ点を相殺しないように設計されるから、(2.2) 式から $L(p)=G(p)K(p)=\infty$ であり、 $T(p)=1$ となる。さらに、制御器 $K(s)$ は閉ループ系を安定化するから相補感度関数 $T(s)$ は複素右閉半平面で解析的 (連続性) である。よって、最大値定理から $T(s)$ の最大値は境界上に存在することになるから、 $|T(j\omega_0)| \geq 1$ となる ω_0 が存在する。これは、 $G(s)$ が不安定極 (p) を持つ不安定系である場合、相補感度関数の整形は ω_0 の近傍の周波数帯域で $|T| < 1$ とすることが不可能であることを意味する。

本節では古典理論から H_∞ 理論まで制御理論の進展を概観し、 H_∞ ノルムに基づく閉ループ周波数応答の整形問題を議論した。特に、外乱に対するロバスト性と小ゲイン定理に基づくシステム変動に対するロバスト安定性がいずれも H_∞ ノルムの導入により閉ループ周波数応答の重み付き整形問題に帰着することを示した。また、その整形問題において制御対象の不安定な極やゼロ点があることがその実現性を制約していることを示した。

2.2 H_∞ 制御の定式化

前節で外乱に対するロバスト性もシステム変動に対するロバスト安定性も H_∞ ノルムを導入することによって閉ループ周波数応答の周波数重み付き整形問題に帰着することがわかった。これを一般化した H_∞ ノルム基準の最適制御 (H_∞ 制御) の定式化を述べる。

Fig. 2.6 に示すフィードバック制御系を考える。

Fig. 2.6 The standard block diagram for H_∞ control

一般化制御対象 $G(s)$ と入力 $([w^T \ u^T]^T)$ 、出力 $([z^T \ y^T]^T)$ との関係は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ただし、 $G_{ij}(s) \in R_p^{p_i \times p_j}(s)$, $i, j=1, 2$

$w \in R^{n_1}$ (外性信号), $u \in R^{m_2}$ (操作入力)

$z \in R^{p_1}$ (制御量), $y \in R^{p_2}$ (観測出力)

ここで、 $G(s)$ は u から可安定であり、 y から可検出であると仮定する。また、閉ループ系の制御則 $u(s) = K(s)y(s)$, $K(s) \in R_p^{m_2 \times p_2}(s)$ で決定する。 $R_p^{m_2 \times p_2}(s)$ はプロパーな有理関数からなる $m_2 \times p_2$ 行列全体の集合を表す。

このような準備の下で H_∞ 制御は次の様に定式化される。

<設計仕様> : S1) $K(s)$ は $G_{22}(s)$ を内部安定化する。すなわち、 $G(s)$ を内部安定化する⁸⁾。

S2) $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$

を満たす補償器 $K(s) \in R_p^{m_2 \times p_2}(s)$ を求めよ。ただし、 $T_{zw}(s)$ は w から z までの閉ループ系の任意の伝達関数であり、次式で与えられる。

$$T_{zw} := G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (2.10)$$

設計仕様S1)は H_∞ 制御器は制御対象との間に極-ゼロ相殺を生じないことを補償する (付録A.4参照)。なお、設計仕様S2)を時間領域で解釈すると次のようになる。まず、入力 $w(t)$ がエネルギー有界で確定的な外乱の場合には、

$$\int_0^{\infty} \|z\|^2 dt / \int_0^{\infty} \|w\|^2 dt < \gamma^2, \quad \forall w \in H_2 \quad (2.11)$$

を意味する。従って、仕様 S2)は最悪外乱に対するエネルギーゲインの最小化基準になっている。
 $w(t)$ が統計的外乱の場合には、

$$E[z^T z] / [w^T w] < \gamma^2, \quad \forall w \in H_2 \quad (2.12)$$

を意味するから、LQ制御で外乱をガウス型白色雑音に限定するのは異なった最適制御となっていることが分る。

以下に、このように定式化された H_∞ 制御が制御対象 $G(s)$ と(2.10)式の $T_{z,w}(s)$ を適切に設定することによっていろいろの制御問題を扱うことができることを例によって示す。Table 2.2はそのうちの重要なものをいくつかまとめたものである。その説明を以下に簡単に述べる。

①感度低減問題：トラッキング問題や外乱除去問題では(2.2)式で与えられた感度関数 S を重み付きで小さくすること、具体的には与えられた重み W に対して、

$$\|WS\|_\infty < \gamma \quad (2.13)$$

を満たすことを要求する。この問題は H_∞ 制御の原型となったものである。

②ロバスト安定化問題：乗法的不確かさの場合には

$$\|rT\|_\infty < 1 \quad (2.14)$$

となる。ここで、 $T(s)$ は(2.7)式で定義される相補感度関数であり、 $r(s)$ が重み関数である。また、この問題では $\gamma=1$ である。

③混合感度問題：感度関数 S と相補感度関数 T の間には関係

$$S(s) + T(s) = 1$$

が成立している。従って、 S を小さくしようとする感度関数の要求と T を小さくしようとするロバスト安定化の要求は両立し難い場合がある。そのような場合の解決策は S と T に異なる周波数重みを付けた加重和の H_∞ ノルムを最小化することによって両方の要求を妥協させることである。すなわち、そのひとつの方法は次式

$$J = \max_{\omega} \{ |W_s(j\omega)S(j\omega)|^2 + |W_t(j\omega)T(j\omega)|^2 \} < \gamma^2 \quad (2.15)$$

を評価関数にとることである。重み関数 $W_s(s)$, $W_t(s)$ はそれぞれ S , T を重視する周波数域で大きくとり、重視する周波数域の重複が無いようする。

この J は閉ループ伝達関数 $T_{z,w}(s)$ を

$$T_{z,w}(s) := \begin{bmatrix} W_s(s)S(s) \\ W_t(s)T(s) \end{bmatrix}, \quad W_s, W_t : \text{重み関数} \quad (2.16)$$

と定義すれば、 $J = \|T_{z,w}\|_{\infty}$ となるから H_{∞} 制御で扱うことができる。これは混合感度問題といわれ H_{∞} 制御の典型的な問題の一つである。

④ 入力にペナルティのある追従問題：これはトラッキング問題において、追従誤差と制御入力の大きさをペナルティに含んだ評価関数を

$$\begin{aligned} J &= \max_w \left\{ \int_0^{\infty} (q^2 e(t) + u(t)) dt \right\}^{1/2}, \quad 0 < q < 1 \text{ (重み係数)} \\ &= \max_w \left\{ (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} (q^2 e^*(j\omega)e(j\omega) + u^*(j\omega)u(j\omega)) d\omega \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

を最小化する制御問題である。

さて、閉ループ系の $T_{z,w}$ は次のように設定しよう。

$$T_{z,w}(s) := \begin{bmatrix} qT(s) \\ K(s)S(s) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

(2.17) 式の J は

$$\begin{aligned} \|T_{z,w}\|_{\infty} &= \max \{ \|T_{z,w}w\|_2 : w(s) \in H_2, \|w\|_2 = 1 \} \\ &= J \end{aligned} \quad (2.19)$$

であることがわかる。したがって、この問題も H_∞ 制御として扱うことができる。

⑤ フィルタ問題：信号を雑音から分離するフィルタ問題はFig. 2.7に示すブロック線図で表せる。

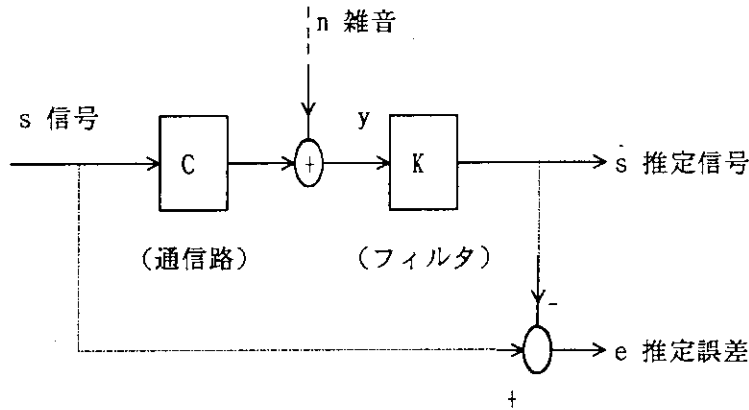


Fig. 2.7 Block diagram of filter problem

この図をもとにTable 2.2のように制御対象 $G(s)$ を設定することによって、フィルタ $K(s)$ の設計をフィードバック制御器の設計に帰着させることができる。ここで、入力 w は $[s^T \ n^T]^T$ であり、制御量 z は推定誤差 $e:=s-s$ である。したがって、 H_∞ 制御で設計されるフィルタはすべての信号 s と通信回路に混入するすべての雑音 n に対して

$$E \| e \|_2^2 / E \{ \| s \|_2^2 + \| n \|_2^2 \} < \gamma^2 \quad (2.20)$$

を満足することになる。

⑥ 2自由度制御系：Fig. 2.8は出力 y を基準入力 w に追従させることを目的とする2自由度のフィードバック制御系である。PF(s)は前置補償器を、K(s)はフィードバック補償器を表す。2自由度制御系の設計問題もTable 2.2に示したように制御対象 G を設定してPF(s)とK(s)を同時に設計する H_∞ 制御に帰着させることができる。

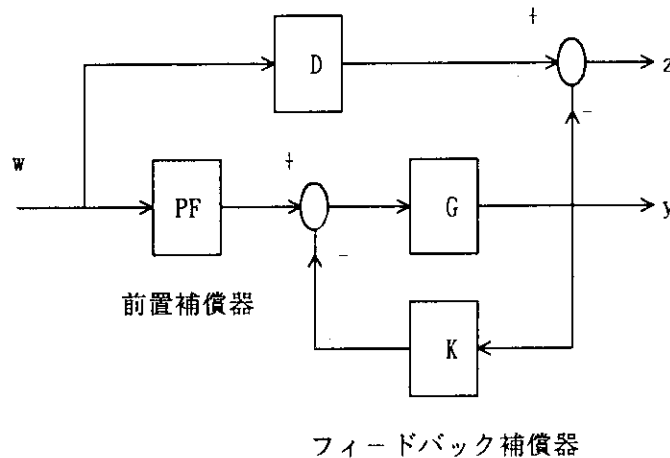


Fig. 2.8 Block diagram of 2-freedom degree control system

Table 2.2 Examples of control problems treated by H_∞ control¹⁾

制御問題	P の構成	P のブロック線図
感度低減問題	$P = \begin{bmatrix} W & -WG \\ 1 & -G \end{bmatrix}$	
ロバスト安定化 (加法的な不確かさ)	$P = \begin{bmatrix} 0 & r \\ 1 & -G \end{bmatrix}$	
ロバスト安定化 (乗法的な不確かさ)	$P = \begin{bmatrix} 0 & rG \\ 1 & -G \end{bmatrix}$	
混合感度問題	$P = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1G \\ 0 & W_2G \\ 1 & -G \end{bmatrix}$	
入力にペナルティをつけた追跡問題	$P = \begin{bmatrix} q & -qG \\ 0 & 1 \\ 1 & -G \end{bmatrix}$	
フィルタ問題	$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & C & 0 \end{bmatrix}$	
2自由度系	$P = \begin{bmatrix} D & -G \\ 1 & 0 \\ 0 & -G \end{bmatrix}$	

2. 3 状態空間における解法

H_∞ 制御の解法には大きく分けて①伝達関数行列に基づく解法と②状態空間表現で解を求める解法とがある。 L_∞ 空間と H_∞ 空間の距離に関するネハリの定理に基づく解法や補間理論に基づく解法(共役化法)は前者に属する代表的なものである。ここでは、計算機を用いた制御系設計に適している後者の解法について述べる。

まず、制御対象 $G(s)$ が状態空間で次のように実現されるとする。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \quad (2.21a)$$

$$z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \quad (2.21b)$$

$$y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) \quad (2.21c)$$

ただし、

$$x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^{m_1}, u \in \mathbb{R}^{m_2}, z \in \mathbb{R}^{p_1}, y \in \mathbb{R}^{p_2}$$

$$G(s) := \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

とする。

通常、解法にあたっては(2.21)式に対して次の6つ条件が成立することを仮定する。

C1) (A, B_2) は可安定対である。すなわち、 $[A-sI \quad B_2], \forall s \in \mathbb{C}(\operatorname{Re}(s) \geq 0)$ が行フルランクである。

C2) $\operatorname{rank}(D_{12}) = m_2$ が成立つ。これは D_{12} が縦長行列で列フルランクであることを意味する。

C3)

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A-j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

したがって、列フルランクである。

Q1) (A, C_2) は可安定対である。

すなわち、 $\begin{bmatrix} A-sI \\ C_2 \end{bmatrix}, \forall s \in \mathbb{C}(\operatorname{Re}(s) \geq 0)$ が列フルランクである。

Q2) $\text{rank}(D_{21}) = p_2$ が成立つ。これは D_{21} が横長行列で行フルランクであることを意味する

Q3)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A-j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{12} \end{bmatrix} = n + p_2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

したがって、行フルランクである。

仮定C1)とO1)は内部安定化補償器 $K(s)$ の存在に関する必要十分条件であり、 H_∞ 制御を考えるためには不可欠の仮定である。仮定C2), C3), O2), O3)は $\inf \|T_{zw}\|_\infty$ を達成する $K(s)$ がプロパーな有理関数行列の空間に存在するための十分条件として仮定されるものである。

文献[3, 4]では問題を簡単にするため、これらの仮定の他に次の2つの仮定を追加して H_∞ 制御の解法を与えた。

A1)

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m2} \end{bmatrix}, \quad D_{21} = [0 \quad I_{p2}]$$

A2)

$$D_{11}=0, \quad D_{22}=0$$

さて、問題は次の2つの設計仕様

S1) $G_{22}(s)$ を内部安定化する

S2) $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$,

を満たす制御器 $K(s) \in \mathbb{R}^{m2 \times p2}(s)$ を求めることである。以下で述べる解法はハミルトン行列に基づく代数リカッチ方程式の安定化解を得る方法を基礎としている^{3, 5, 8)}。

次の $2n \times 2n$ のハミルトン行列 H を定義する。

$$H := \begin{bmatrix} A & R \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

ここで、 A は $n \times n$ の実行列であり、 Q, R は $n \times n$ の実対称行列である。この H が虚軸上に固有値を持た

ない(条件1)時, H の $2n$ 個の固有値は複素左半平面と右半平面に n 個づつ配置する。左半平面の固有値とそれに対応する固有ベクトルに関して次式が成立つ。

$$HZ = ZA \quad (2.23)$$

ここで,

$$\Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \text{Re}(\lambda_i) < 0, i=1, 2, \dots, n$$

$$Z := [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n],$$

$$\lambda_i : H \text{ の固有値}(i=1, 2, \dots, n)$$

$$z_i : \lambda_i \text{ に対応する固有ベクトル}(i=1, 2, \dots, n)$$

次に, $2n \times n$ 行列 Z を2分割して2つの行列 X, Y を定義する。

$$Z := \begin{bmatrix} X \\ \dots \\ Y \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

いま, X が正則である(条件2)とき, 行列 P を次式で定義する。

$$P := YX^{-1} \quad (2.25)$$

これは実対称行列となる。この P は次の方程式

$$PA + A^T P + PRP - Q = 0 \quad (2.26)$$

を満たすから, リカッチ方程式の解である。また, (2.22)式と(2.23)式から,

$$A + RP = X \Lambda X^{-1} \quad (2.27)$$

を得るから, P は $A+RP$ を安定化する(安定化解)ことが直ちに分る。

このような手続きによりリカッチ方程式の解を得ることを H_∞ 制御ではリカッチ作用素(Ric)と呼び,

$$P = \text{Ric}(H) \quad (2.28)$$

と表す³⁾。すなわち, 条件1, 2を満たす H からリカッチ方程式の安定化解 P を求める操作のこ

とである。また、Ric作用素の定義域を $\text{dom}(\text{Ric})$ で表す³⁾。すなわち、

$$\text{dom}(\text{Ric}) = \{ \text{条件1と条件2を満たすハミルトン行列 } H \text{ の集合} \} \quad (2.29)$$

のことである。

以上の準備のもとで、 H_∞ 制御の可解条件は次のようにまとめられる。

仕様HS1), HS2)を満たす $K(s) \in R_p^{m^2 \times p^2}$ が存在する

$$\Leftrightarrow 1) X = \text{Ric}(H_x), Y = \text{Ric}(H_y) \text{ が存在する, かつ, } 2) X \geq 0, Y \geq 0, \bar{\sigma}(X \cdot Y) < \gamma^2 \quad (2.30)$$

ただし、 $\bar{\sigma}(\cdot)$ は行列の最大特異値を表す。また、 H_x, H_y は以下で定義される

$$H_x = \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & B_1 B_1^T / \gamma^2 - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 + C_1^T D_{12} D_{12}^T C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (2.31a)$$

$$H_y = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & C_1^T C_1 / \gamma^2 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T + B_1 D_{21}^T D_{21} B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \quad (2.31b)$$

H_∞ 制御が可解であるとき、最適補償器のクラス K_γ は次のように与えられる。

$$K_\gamma = \{ K(s) = \text{LF}(\bar{K}, \Phi) \mid \Phi(s) \in \text{RH}_\infty^{m^2 \times p^2}, \|\Phi\|_\infty < \gamma \} \quad (2.32a)$$

ここで、

$$\text{LFT}(\bar{K}, \Phi) := \bar{K}_{11} + \bar{K}_{12} \Phi (I - \bar{K}_{22} \Phi)^{-1} \bar{K}_{21} \quad (2.32b)$$

$$\bar{K}(s) := \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_1 & 0 & I_{m_2} \\ \bar{C}_2 & I_{p_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32c)$$

$\bar{K}(s)$ を状態空間実現の係数行列は $X = \text{Ric}(H_x)$, $Y = \text{Ric}(H_y)$ を用いて以下のように決定される。

$$\bar{B}_1 := B_1 D_{21}^T + Y C_2^T \quad (2.33a)$$

$$\bar{B}_2 := B_2 + Y C_1^T D_{12} / \gamma^2 \quad (2.33b)$$

$$\bar{C}_1 := -(D_{12}^T C_1 + B_2^T X)(I - YX / \gamma^2)^{-1} \quad (2.33c)$$

$$\bar{C}_2 := -(C_2 + D_{21} B_1^T X / \gamma^2)(I - YX / \gamma^2)^{-1} \quad (2.33d)$$

$$\bar{A} := (A - B_1 D_{21}^T C_2) + Y(C_1^T C_1 / \gamma^2 - C_2^T C_2) + \bar{B}_2 \bar{C}_1 \quad (2.33e)$$

最後に、 $\Phi(s) \in RH_\infty$ ($\|\Phi\|_\infty < \gamma$) を自由パラメータとして H_∞ 最適補償器 $K(s)$ の状態方程式で表現すると次式となる。

$$\dot{x}_k(t) = \bar{A}x_k(t) + \bar{B}_1 y(t) + \bar{B}_2 \tilde{u}(t) \quad (2.34a)$$

$$\tilde{u}(t) = \bar{C}_1 x_k(t) + 0y(t) + I_{m_2} \tilde{u}(t) \quad (2.34b)$$

$$\tilde{y}(t) = \bar{C}_2 x_k(t) + I_{p_2} y(t) \quad (2.34c)$$

$$\tilde{u}(s) = \Phi(s)\tilde{y}(s), \quad \Phi \in RH_\infty, \quad \|\Phi\|_\infty < \gamma \quad (2.34d)$$

ただし、 $x_k \in R^n$, $y \in R^{p_2}$, $\tilde{u} \in R^{m_2}$, $u \in R^{m_2}$, $\tilde{y} \in R^{p_2}$ である。

また、制御対象 $G(s)$ と $K(s) = \text{LFT}(\bar{K}, \Phi)$ との関係は Fig. 2.9 のブロック図で表わすことができる。

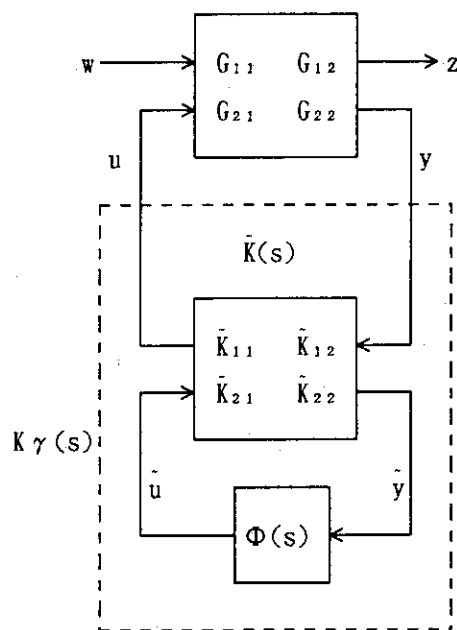


Fig. 2.9 Block diagram of H_∞ controller $K_\gamma(s)$

2. 4 解法上の仮定と制御対象の関係

前節で述べた解法上の仮定は実プラントの動特性とどのように関連するかを簡単に議論する。

① 仮定 C1), O1) は $G(s)$ を内部安定化する補償器 $K(s) \in R_{p, m_2 \times p_2}(s)$ が存在するための必要十分条件

であるから、制御系設計における不可欠の条件である。すなわち、仮定C1)またはO1)のいずれかが一方でも成り立たないならば H_∞ 制御問題として考慮する意味がない。

②仮定C2), C3)とO2), O3)と実プラントとの関係を明らかにするために、 H_∞ 制御問題をそれと等価な次のモデルマッチング問題に変換する。

$$\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty < \gamma \quad (2.35a)$$

よって、 H_∞ 制御は(2.35a)式を満たす $Q(s) \in RH_\infty$ を求める問題に帰着する^{7, 8)}。

ただし、

$$T_2(s) := G_{12}(s)M_2(s), \quad (2.35b)$$

$$T_3(s) := \tilde{M}_2(s)G_{21}(s), \quad (2.35c)$$

$M_2(s)$, $\tilde{M}_2(s)$: 実プラント $P(s)$ の RH_∞ 上の既約分解の分母

さて、仮定C2)とC3)の意味を考える。次の同値関係は明らかである。

$$\text{仮定C2)とC3)が成立つ} \Leftrightarrow \text{rank}T_2(j\omega) = m_2, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty \quad (\text{虚軸上でrank}T_2\text{不変})$$

したがって、虚軸上で T_2 のランクが不変であるためには、(2.35b)式から $P(s)$ が虚軸上に極をもつ(この極は $M_2(s)$ の虚軸上のゼロ点である)場合にはそれは G_{12} の極と相殺しなければならないことが分る。また、 $P(s)$ が虚軸上に極をもたない($M_2(s)$ が虚軸上にゼロ点をもたない)場合には、虚軸上に G_{12} のゼロ点が存在してはならない。これが仮定C2)とC3)がもつシステム論的な意味である。

次に仮定O2)とO3)の意味を考えよう。同様に

$$\text{仮定O2)とO3)が成立つ} \Leftrightarrow \text{rank}T_3(j\omega) = p_2, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty \quad (\text{虚軸上でrank}T_3\text{不変})$$

の関係は明らかである。したがって、虚軸上で T_3 のランクが不変であるためには、(2.35c)式から $P(s)$ が虚軸上に極をもつ(この極は $\tilde{M}_2(s)$ の虚軸上のゼロ点である)場合にはそれは G_{21} の極と相殺しなければならないことになる。また、 $P(s)$ が虚軸上に極をもたない($\tilde{M}_2(s)$ が虚軸上にゼロ点をもたない)場合には、虚軸上に G_{21} のゼロ点が存在してはならない。これが仮定O2)とO3)のシステム論的な意味である。以上の議論を例題によって検討してみよう。

①感度低減問題 ($W_s(s)=I$)

$$G(s) := \begin{bmatrix} A_p & 0 & -B_p \\ C_p & I_{p2} & 0 \\ C_p & I_{p2} & 0 \end{bmatrix}$$

C2) $\text{rank}D_{12} = \text{rank}[0] = 0$: 不成立

$$\text{C3) } \text{rank} \begin{bmatrix} A_p - j\omega I & -B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} = n + m_2 \Leftrightarrow P(s) \text{は虚軸上にゼロ点を持たない。}$$

O2) $\text{rank}D_{21} = \text{rank}(I_{p2}) = p_2$: 成立

$$\text{O3) } \text{rank} \begin{bmatrix} A_p - j\omega I & 0 \\ C_p & I_{p2} \end{bmatrix} = n + p_2 \Leftrightarrow P(s) \text{は虚軸上に極を持たない。}$$

以上から、感度低減問題 ($W_1(s)=I$) では1)仮定C2)は常に不成立、仮定O2)は常に成立する、2)仮定C3)とO3)はP(s)がゼロ点と極を虚軸上に持たないとき成立することが分る。

②ロバスト安定化問題 ($W_1(s)=I$)

$$G(s) := \begin{bmatrix} A_p & 0 & -B_p \\ 0 & 0 & I_{m2} \\ C_p & I_{p2} & 0 \end{bmatrix}$$

C2) $\text{rank}D_{12} = \text{rank}[I_{m2}] = m_2$: 成立

$$\text{C3) } \text{rank} \begin{bmatrix} A_p - j\omega I & -B_p \\ 0 & I_{m2} \end{bmatrix} = n + m_2 \Leftrightarrow P(s) \text{は虚軸上に極を持たない}$$

O2) $\text{rank}D_{21} = \text{rank}(I_{p2}) = p_2$: 成立

$$\text{O3) } \text{rank} \begin{bmatrix} A_p - j\omega I & 0 \\ C_p & I_{p2} \end{bmatrix} = n + p_2 \Leftrightarrow P(s) \text{が虚軸上に極を持たない}$$

したがって、ロバスト安定化問題 ($W_t(s)=1$) では1)仮定C2), 仮定O2)は常に成立する, 2)仮定C3)とO3)は $P(s)$ が虚軸上に極を持たないとき成立することが分る。

最後に、ロバスト安定化問題と混合感度問題のハミルトン行列 H_x と H_y を計算してみよう。

①ロバスト安定化問題 ($D_t=I_{m2}$)

制御対象の状態空間実現は次のようになる。

$$G(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A_t & 0 & 0 & B_t \\ 0 & A_p & 0 & -B_p \\ \hline C_t & 0 & 0 & I_{m2} \\ \hline 0 & C_p & I_{p2} & 0 \end{array} \right]$$

(2.31a) 式を用いて H_x を計算すると

$$H_x = \left[\begin{array}{cc|cc} A_t - B_t C_t & 0 & -B_t B_t^T & B_t B_p^T \\ B_p C_t & A_p & B_p B_t^T & -B_p B_p^T \\ \hline 0 & 0 & -(A_t - B_t C_t)^T & -C_t^T B_p^T \\ 0 & 0 & 0 & -A_p^T \end{array} \right]$$

となる。これは γ を含んでいない。したがって解 X は γ に依存しないことが分る。

また、(2.31b) 式を用いて H_y を計算すると

$$H_y = \left[\begin{array}{cc|cc} A_t^T & 0 & C_t^T C_t / \gamma^2 & 0 \\ 0 & A_p^T & 0 & C_p^T C_p \\ \hline 0 & 0 & -A_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_p \end{array} \right]$$

を得る。

ここで、1) H_y の特殊な形: $H_{y21}=Q=0$, $H_{y12}=-BR^{-1}B^T$ = ブロック対角行列, 2) $W_t(s) \in RH_\infty$ に着目すると、リカッチ方程式の解 Y を

$$Y = \text{Ric}\{H_Y\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_p \end{bmatrix}, \quad Y_p = \text{Ric} \left\{ \begin{bmatrix} A_p^T & -C_p^T C_p \\ 0 & -A_p \end{bmatrix} \right\}$$

として得ることができる。これから解 Y も γ に依存しないことが分る。

以上から、ロバスト安定化問題は $X = \text{Ric}(H_x)$ も $Y = \text{Ric}(H_Y)$ もともに γ に依存しないことになる。

②混合感度問題 ($D_s=0, D_t=I_p$)

制御対象の状態空間実現は次のようになる。

$$G(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A_s & B_s C_p & B_s & 0 \\ 0 & A_p & 0 & -B_p \\ \hline C_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_t & 0 & I_p \\ \hline 0 & C_p & I_p & 0 \end{array} \right]$$

(2.31a) 式を用いて H_x を計算すると

$$H_x = \left[\begin{array}{cc|cc} A_s & B_s C_p & B_s B_s^T / \gamma^2 & 0 \\ 0 & A_p - B_p C_t & 0 & -B_p B_p^T \\ \hline -C_s^T C_s & 0 & -A_s^T & 0 \\ 0 & 0 & -C_p^T B_s^T & -(A_p - B_p C_t)^T \end{array} \right]$$

となる。これは γ を含んでいる。したがって、解 X は γ に依存する。

また、(2.31b) 式を用いて H_Y を計算すると

$$H_Y = \left[\begin{array}{cc|cc} A_s^T & 0 & C_s^T C_s / \gamma^2 & 0 \\ 0 & A_p^T & 0 & C_t^T C_t / \gamma^2 - C_p^T C_p \\ \hline 0 & 0 & -A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_p \end{array} \right]$$

を得る。

ここで、1) H_Y の特殊な形： $H_{Y21}=Q=0$ 、 $H_{Y12}=-BR^{-1}B^T$ =ブロック対角行列、2) $W_*(s) \in RH_\infty$ に着目すると、リカッチ方程式の解 Y を

$$Y = \text{Ric}(H_Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_p \end{bmatrix}, \quad Y_p = \text{Ric} \begin{bmatrix} A_p^T & -C_i^T C_i / \gamma^2 - C_p^T C_p \\ 0 & -A_p \end{bmatrix}$$

と得ることができる。これから解 Y も γ に依存することが分る。

以上から、ロバスト安定化問題は $X=\text{Ric}(H_x)$ も $Y=\text{Ric}(H_Y)$ もともに γ に依存するから H_∞ 最適補償器を設計するには設計パラメータ γ に関する繰返しによる最適化の計算が必要である。

3. H_∞ 制御によるサーボ系の設計

3. 1 定式化

ステップ状の目標信号や外乱に対して定常偏差のないロバストなフィードバック制御系を設計する問題（1型ロバストサーボ系設計問題）を本章では考える。制御系設計の最も基本的な仕様は①内部安定性である。これに加えて②望ましい過渡特性、③望ましい定常特性を持つことが要求される。さらにこれらの特性が制御対象のモデルの不確かさやパラメータ変動に対しても頑健であるという④ロバスト性も重要な仕様となる。2章で扱った H_∞ 制御は仕様S1)によって「内部安定性」と仕様S2)によって「望ましい過渡特性（感度特性など）」および「それらのロバスト性」を考慮することのできる理論であった。しかし、そこでは「望ましい定常特性」と「そのロバスト性」の要求を積極的に扱うことはしていなかった。この要請のもっとも典型的な例はステップ状の目標信号や外乱に対して定常偏差のないロバストなフィードバック制御系を実現することである。このような制御系は1型のロバストサーボ系と云われ、多くの実際の制御の分野でその有効な設計法の確立が望まれているものである。

本節ではFig. 3.1に示すフィードバック制御系の1型ロバストサーボ系の設計を H_∞ 制御の混合感度問題として定式化する。

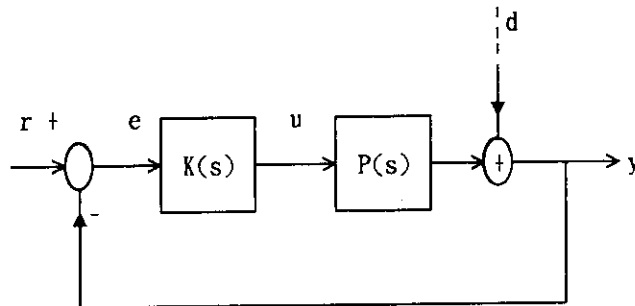


Fig. 3.1 Tracking servo control system

説明を簡単にするために次の仮定をおく。

- A1) 制御対象 $P(s)$ の入・出力の次数 (p) は等しい。
- A2) $P(s)$ は虚軸上に極を持たない。
- A3) $P(s)$ は $s=0$ を伝達ゼロ点に持たない（1型サーボ系の存在条件）。

ステップ状の目標信号や外乱入力に対して、定常偏差がゼロの条件は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0; \quad e(t) := r(t) - y(t) \quad (3.1)$$

である。これは閉ループ系が安定であるときには、ラプラス変換の最終値定理を用いて次のように書換えられる。

$$G_{e,r}(0)=0, G_{e,d}(0)=0 \quad (3.2)$$

ここで、 $G_{e,r}(s)$ は目標値 $r(s)$ から偏差 $e(s)$ までの伝達関数であり、 $G_{e,d}(s)$ は外乱入力 $d(s)$ から偏差 $e(s)$ までの伝達関数を表す。

また、(3.1)式を満たす安定化補償器が存在するための必要十分条件は $|P(0)| \neq 0$ 、すなわち制御対象 $P(s)$ が原点($s=0$)にゼロ点を持たないことである。また、このとき(3.1)式を満たすためには補償器 $K(s)$ が原点に極を持つことが必要十分であり、そのとき定常特性に対するロバスト性も満たされることが知られている。したがって、ロバストサーボ補償器のクラス $K_s(P)$ は

$$K_s(P) = \{K(s) \in R_p^{p \times p}(s) \mid K(0) = \infty, P(s): \text{内部安定}\} \quad (3.3)$$

で与えられる。

以上の考察から、混合感度問題による1型ロバストサーボ系の設計問題は

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} W_s S \\ W_t T \end{array} \right\|_{\infty} &= \left\| \begin{array}{l} W_s (I + PK)^{-1} \\ W_t (I + PK)^{-1} \end{array} \right\|_{\infty} < \gamma \end{aligned} \quad (3.4)$$

を設計仕様としてロバストサーボ補償器 $K(s) \in K_s(P)$ を求める問題となる。

以下の議論では、 $P(s) \in R_p^{p \times p}(s)$ 、 $W_s(s) \in RH_{\infty}^{p \times p}$ 、 $W_t(s) \in RH_{\infty}^{p \times p}$ でその可安定・可検出な状態空間実現が次のように与えられるものとする。

$$P(s) = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix}, \quad W_s(s) = \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ C_s & 0 \end{bmatrix}, \quad W_t \cdot P(s) = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_t & D_t \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ここで、 $W_s(s)$ 、 $W_t P(s)$ は最小位相とする。これはRosenbrockのシステムマトリクスの(不変)ゼロ点が複素右閉半平面に存在しないこととして定義される。すなわち、

$$\begin{vmatrix} A_s - sI & B_s \\ C_s & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (3.6a)$$

$$\begin{vmatrix} A_p - sI & B_p \\ C_t & D_t \end{vmatrix} \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |D_t| \neq 0 \\ |A_p - B_p D_t^{-1} C_t - sI_p| \neq 0 \end{cases} \quad (3.6b)$$

を仮定する。なお、 D_t は正則行列と仮定した。

3. 2 拡大系による設計法⁹⁾

2章で検討したように H_∞ 制御によってロバストサーボ系を設計する際に問題になるのが、虚軸上のランク条件C3)とO3)である。LQ最適制御のサーボ系設計では通常、制御対象 $P(s)$ に積分器を付加した拡大系を構成し、最適レギュレータ理論を適用する方法が用いられる。同様の方法を H_∞ サーボ系設計にも適用しようとする、既に検討したように拡大系が原点($s=0$)に極をもつために、仮定C3)とO3)が成立しないという問題が生じる。この問題を解決する方法がいくつかこれまで提案されているが、その中でもっとも有効であり実用的であると考えられる拡大系による方法を以下に述べる。

この方法は制御対象に積分器を結合した拡大系に H_∞ 制御を適用する方法である。したがって、当然のことであるが、虚軸上($s=0$)のランク条件C3)とO3)が成立しないという状況が生ずる。これを回避するために十分小さな正数 ε を用いた新たな制御量を追加して拡張した一般化プラント $G_\varepsilon(s)$ を導入する。この $G_\varepsilon(s)$ はランク条件C3)とO3)を満たすので、 H_∞ 制御が適用可能となる。この H_∞ 補償器を利用して1型ロバストサーボ系の補償器を設計する手法である。このような設計法の構成が可能となるのは、既に述べたように仮定C3)やO3)等は H_∞ 制御が可解であるための十分条件であることによる。

Fig. 3.2は実制御対象 $P(s)$ に積分器($1/s$)を付加するために拡大系 $P_*(s)$ を

$$P_*(s) := \alpha^{-1}(s)P(s) \quad (3.7)$$

として構成した混合感度問題のブロック図である。

ここで、

$$\alpha(s) := s/(s+1) \quad (3.8)$$

である。

図の一般化プラント $G(s)$ の状態変数を $x := [x_1^T \ x_2^T \ x_p^T]^T$ とすれば、状態空間実現を(3.9)式のように得ることができる。ここで、 x_1, x_2, x_p は $\mathbb{W}_*(s), \alpha^{-1}(s)I_p, P(s)$ のそれぞれの状態空間実現における状態変数を表すものとする。

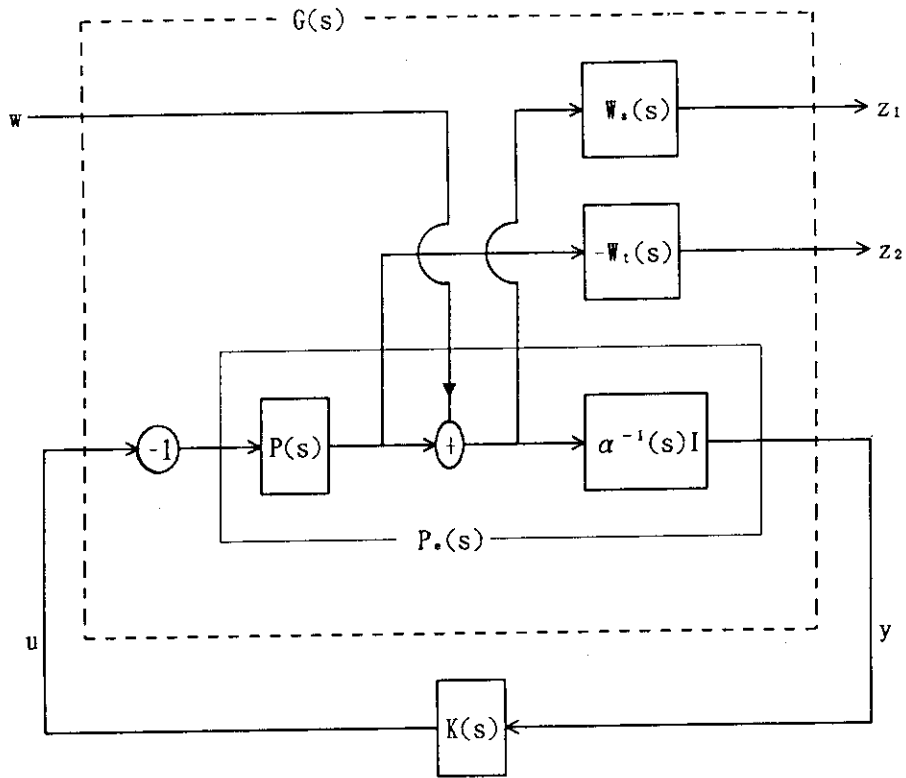


Fig. 3.2 Standard block diagram for mixed sensitivity problem of H_∞ control

$$G(s) := \left[\begin{array}{cc|cc}
 W_1 & -W_1 P & & \\
 0 & (-W_t)(P)(-1) & & \\
 \hline
 \alpha^{-1} I_p & (\alpha^{-1} I_p)(P)(-1) & & \\
 \hline
 A_p & 0 & B_p C_p & B_p & 0 \\
 0 & 0 & C_p & I_p & 0 \\
 0 & 0 & A_p & 0 & -B_p \\
 \hline
 C_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -C_t & 0 & D_t \\
 \hline
 0 & I_p & C_p & I_p & 0
 \end{array} \right]$$

(3.9)

ここで,

$$\alpha(s)^{-1} I_p := \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_p & I_p \end{bmatrix}$$

(3.10)

を用いた。

2. 3節で述べた H_∞ 制御の解法上の仮定の成立性を(3.9)式の状態空間実現に対して調べると次の結果となる。

- 1) 仮定C1), O1), C2), O2)及びO3)は成立する。
- 2) 仮定C3)に関しては

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_s - j\omega I & 0 & B_s C_p & 0 \\ 0 & -j\omega I & C_p & 0 \\ 0 & 0 & A_p - j\omega I & -B_p \\ \hline C_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_t & D_t \end{bmatrix} \leq n_s + p + n_p + p, \omega=0 \quad (3.11)$$

となるから、 $\omega=0$ で仮定C3)は成立しない。これは、 $P(s)$ に $\alpha(s)^{-1}$ を結合したため $s=0$ の極が(2.35b)式の $T_2(s)$ の虚軸上のゼロ点となって現れるためである。

そこで、仮定C3)を成立させるため、Fig. 3.3に示すように新たな制御量 z_s を $G(s)$ に追加して拡大系 $G_\epsilon(s)$ を構成する。ただし、 ϵ は十分小さい正数をとるものとする。

$G_\epsilon(s)$ の状態空間実現は状態変数 x に対して

$$G_\epsilon(s) := \begin{bmatrix} A_s & 0 & B_s C_p & B_s & 0 \\ 0 & 0 & C_p & I_p & 0 \\ 0 & 0 & A_p & 0 & -B_p \\ \hline C_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_t & 0 & D_t \\ 0 & \epsilon^{1/2} I_p & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_p & C_p & I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

となる。この実現に対して仮定C3)の成立性(列フルランク性)を以下で検討する。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_s - j\omega I & 0 & B_s C_p & 0 \\ 0 & -j\omega I_p & C_p & 0 \\ 0 & 0 & A_p - j\omega I & -B_p \\ \hline C_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_t & D_t \\ 0 & \epsilon^{1/2} I_p & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} A_s - j\omega I & B_s C_p & 0 \\ 0 & C_p & 0 \\ 0 & A_p - j\omega I & -B_p \\ C_s & 0 & 0 \\ 0 & -C_t & D_t \end{bmatrix} + p$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} A_s - j\omega I & B_s C_p & 0 \\ 0 & C_p & 0 \\ C_s & 0 & 0 \\ 0 & A_p - j\omega I & -B_p \\ 0 & -C_t & D_t \end{bmatrix} + p$$

$$\geq \text{rank} \begin{bmatrix} A_s - j\omega I \\ 0 \\ C_s \end{bmatrix} + \text{rank} \begin{bmatrix} A_p - j\omega I & -B_p \\ -C_t & D_t \end{bmatrix} + p$$

(Ws(s): 安定)

(WtP(s): 最小位相)

$$= n_s + n_p + p + p, \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{3.13}$$

故に、列フルランクであるから仮定C3)が成立する。

その他の仮定はG(s)に対してすべて成立しているから、Gε(s)の実現に対しても同様に成立することは明らかである。

したがって、Gε(s)にH∞制御の解法が適用できるので、H∞補償器Kε(s)を設計できることになる。このKε(s)を用いて、1型のH∞ロバストサーボ補償器K̂(s)は最終的に

$$\hat{K}(s) := K\varepsilon(s)\alpha(s)^{-1}I_p \tag{3.14}$$

として得ることができる。

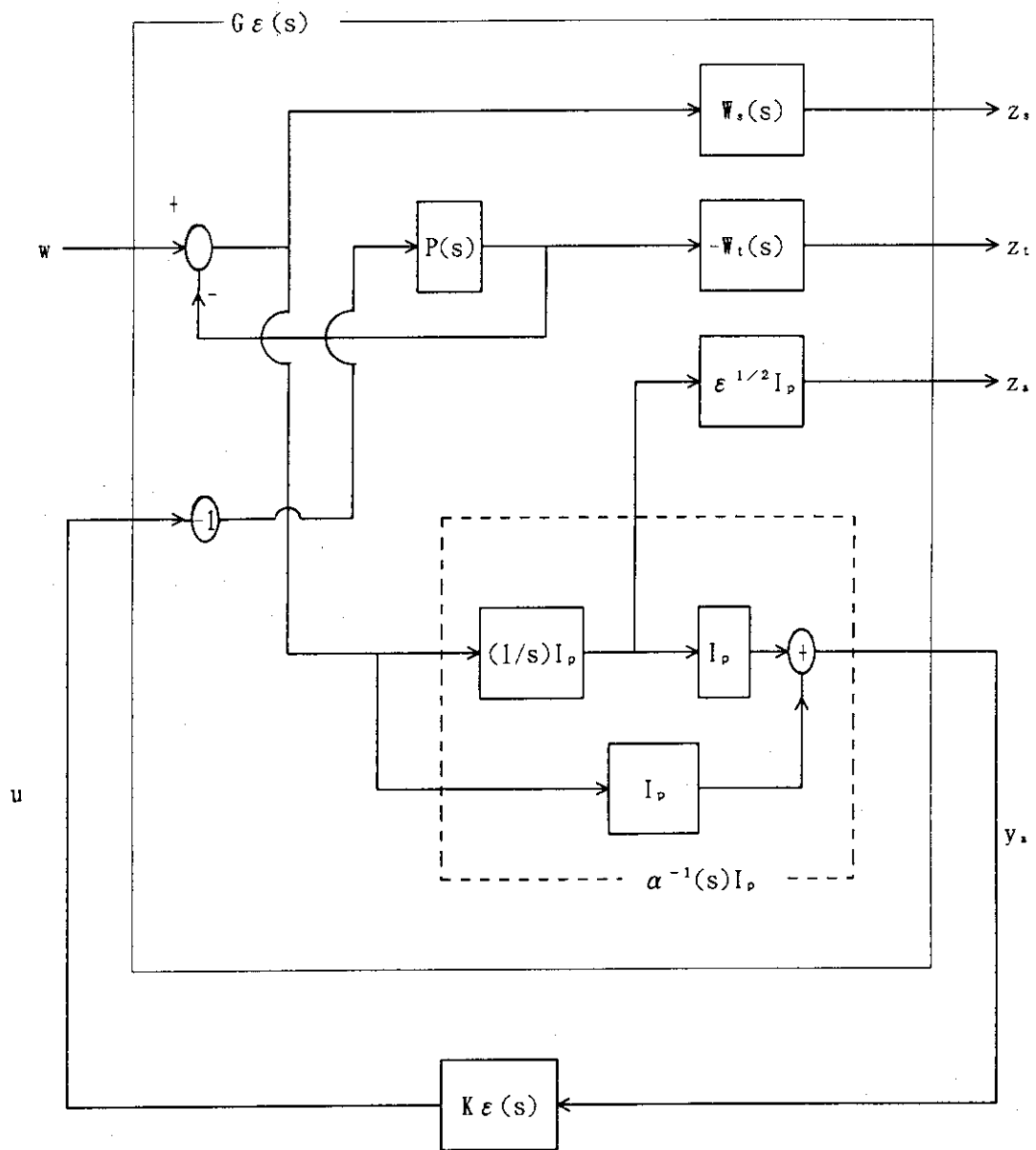


Fig. 3.3 Block diagram of augmented generalized plant $G_\epsilon(s)$

4. H_∞ 制御の適用例

(1) BWRの出力制御¹⁰⁾

① H_∞ 制御系設計

<制御対象>

a)操作量：再循環流量, b)3次の非線形モデル, c)圧力一定(仮定)

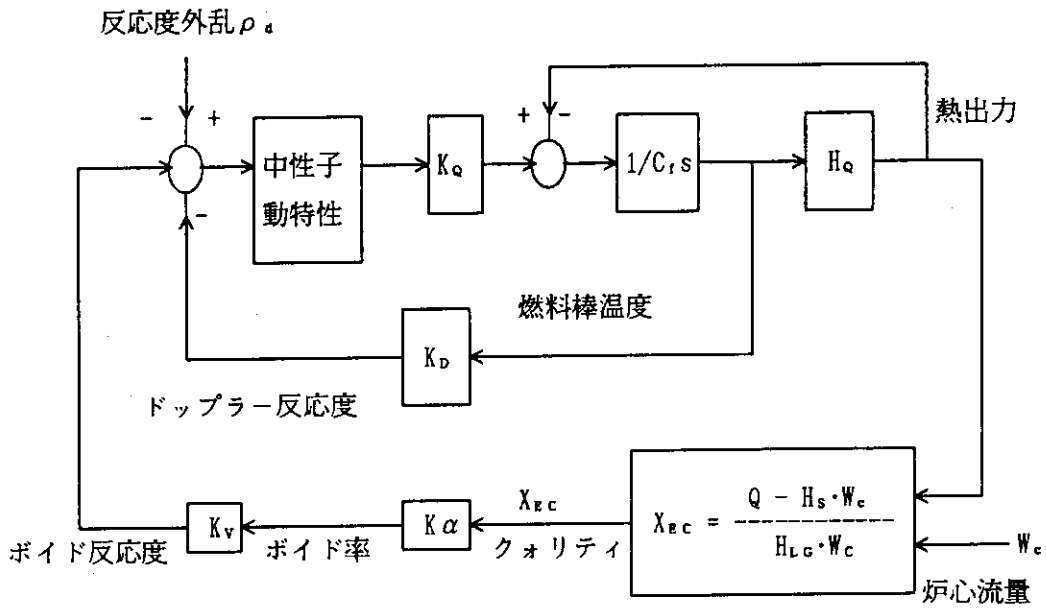


Fig. 4.1 BWR plant model

<制御系>

a)線形化モデルの作成

b)状態フィードバック制御による感度低減問題(外乱抑制)

②結果

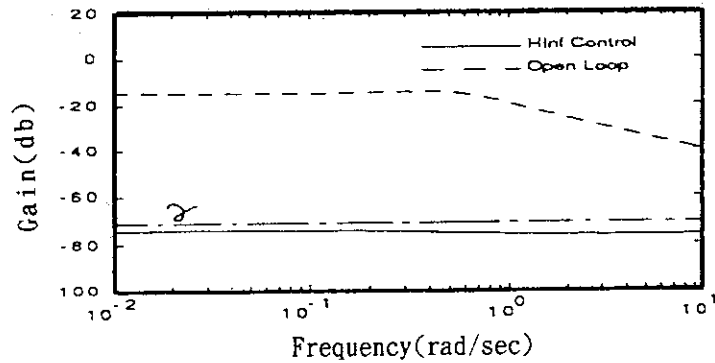


Fig. 4.2 Frequency response of thermal power from reactivity

(2) 非線形原子炉モデルの出力制御¹¹⁾

①非線形原子炉モデル (March-Leuba model) の出力振動

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda c(t) + \frac{\rho(t)}{\Lambda}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda c(t)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = a_1 n(t) - a_2 T(t)$$

$$\frac{d^2 \rho_\alpha(t)}{dt^2} + a_3 \frac{d\rho_\alpha(t)}{dt} + a_4 \rho_\alpha(t) = \epsilon k_0 T(t)$$

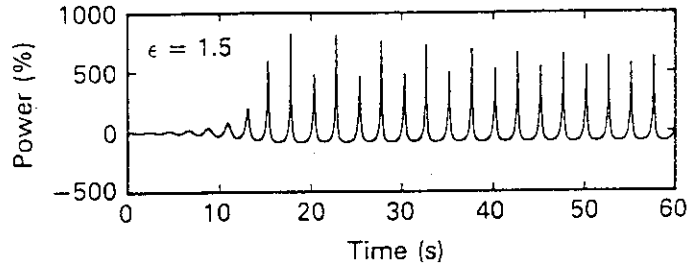


Fig. 4.3 Instability of the power oscillation

②H[∞]制御系設計

<制御対象>ブロック図 (反応度制御装置 + 中性子計装系 + 乗法的モデル化誤差)

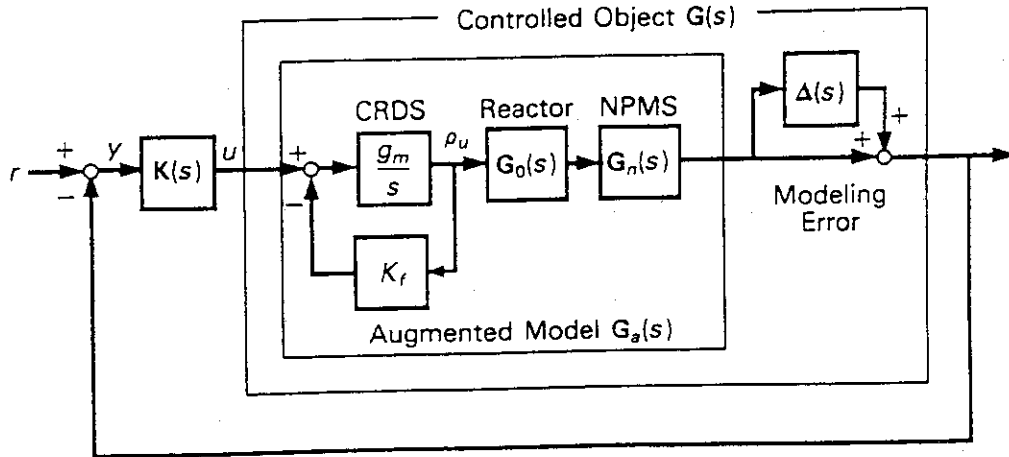


Fig 4.4 Block diagram of feedback control system

<制御系設計>混合感度問題: $W_s(s) = 200 / (400s + 1)$, $W_t(s) = (0.1s^3 + s^2) / 325$

③結果

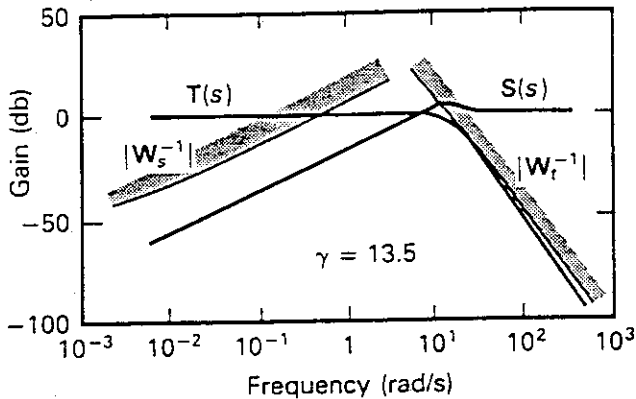


Fig. 4.5 Frequency responses

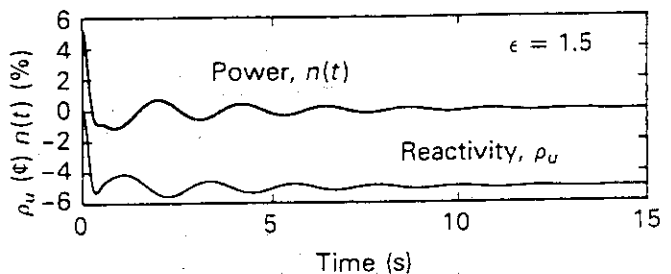


Fig. 4.6 Time responses of power and reactivity

(3) 磁気浮上系^{1,2)}

①概略図

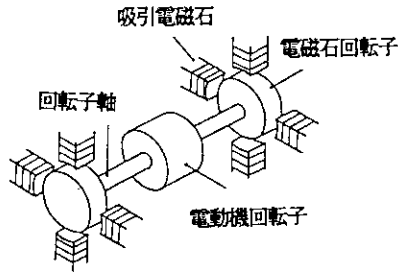


Fig. 4.7(a) Concept of magnetic bearing

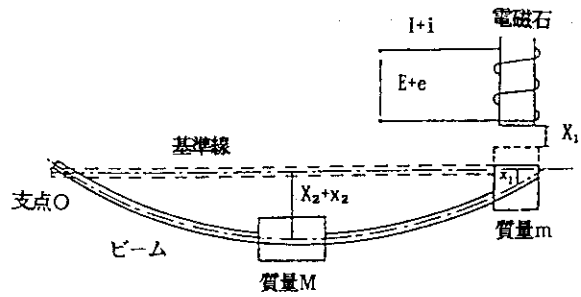


Fig. 4.7(b) Experimental apparatus

②H ∞ 制御系設計

<制御対象>

- a) 回転体軸たわみの固有振動数と電動機回転周波数との共振
- b) 回転軸の低次元モデル (非線形モデル)
- c) 実験機パラメータ

パラメータ	数値	パラメータ	数値
ビームの長さ 2l	3.8 [m]	質量 M	10.36 [Kg]
固有振動数 fn	4.5 [Hz]	定常ギャップ X1	5.0 [mm]
ビームのたわみ X2	12.3 [mm]	電磁石抵抗 R	57 [Ω]
質量 m	5.8 [Kg]	電磁石インダクタンス L	3.16 [H]

<制御系設計>

- a) ロバスト制御系による高次の振動モードの抑制 (制御スピルオーバー, 観測スピルオーバー)
- b) 混合感度問題の適用

$W_s(s)$: 定常外乱に対するロバスト性 (低周波域において高ゲイン)

$W_t(s)$: パラメータ変動, 不確かさに対するロバスト性 (高周波域において低ゲイン)

③結果

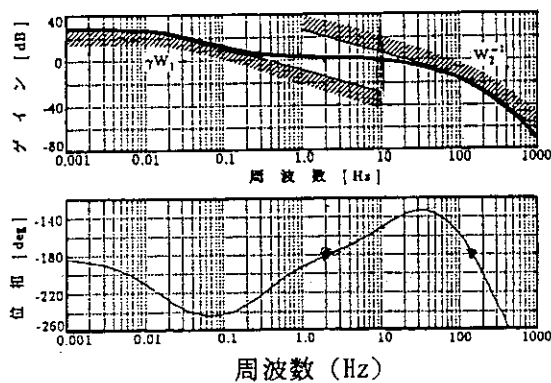


Fig. 4.8 Bode plot(loop transfer function)

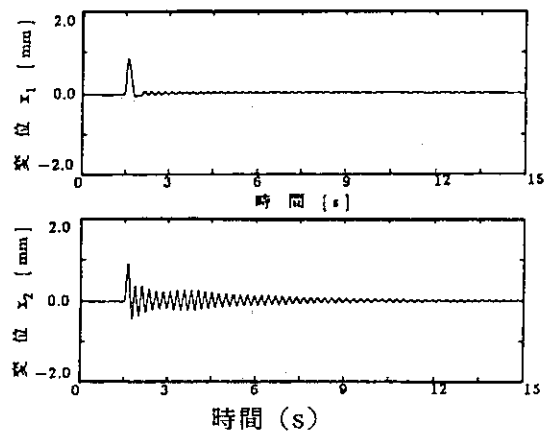
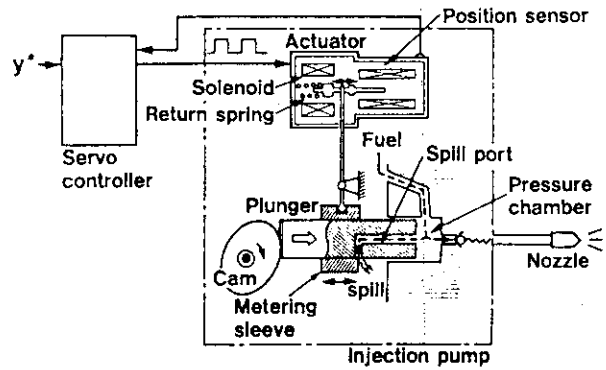


Fig. 4.9 Experimental results

(4) ディーゼルエンジン燃料制御¹³⁾

① 燃料噴射ポンプの概略図



② H_∞ 制御系設計

< 制御対象 >

- a) 燃料粘性の温度依存性大
- b) 高い速応性と定常偏差ゼロ

< 制御系設計 >

- a) 統計的手法による制御対象の同定

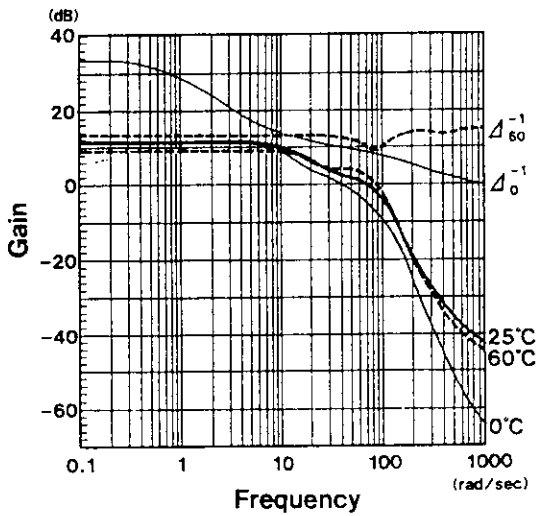


Fig. 4.10 Diesel engine injection pump

b) ロバストサーボ系設計問題

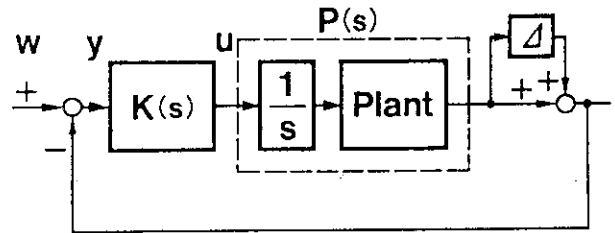


Fig. 4.11 Unity feedback system

③ 実験結果

< H_∞ 制御 >

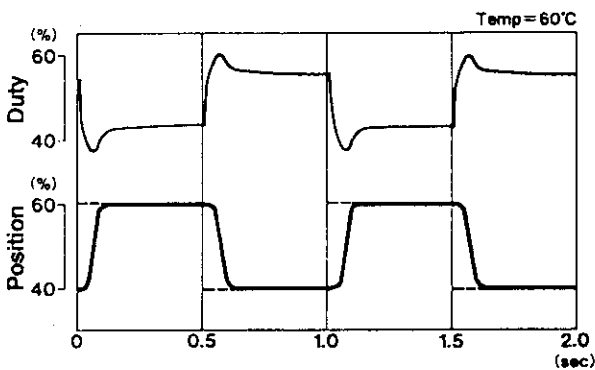


Fig. 4.12(a) Results by H_∞ control

< LQG 制御 >

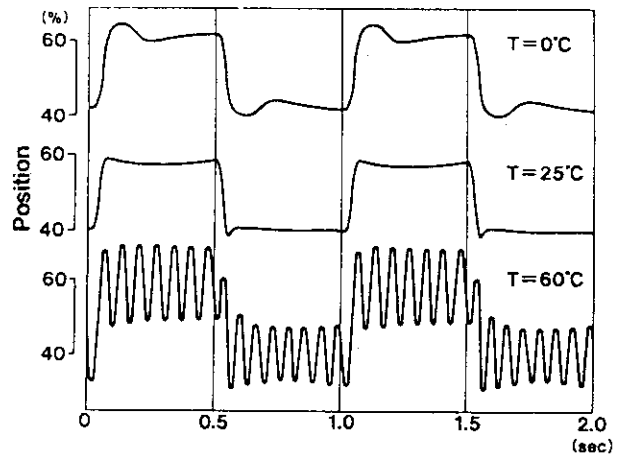


Fig. 4.12(b) Results by LQG control

(5) 倒立振子の制御実験

①概略図

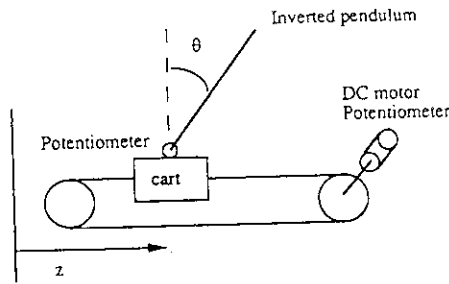


Fig. 4.13 Inverted pendulum system

②H ∞ 制御系設計

< 制御対象の特徴 >

- a) 1 入力による不安定機械系の安定化問題, b) s=0 に伝達ゼロ点を有する
- c) 台車・振子系の運動方程式

$$(M+m) \frac{d^2 z}{dt^2} + D_z \frac{dz}{dt} + m \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - m \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = G_0 u$$

$$(J+ml^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + D_\theta \frac{d\theta}{dt} - mgl \sin \theta + m \cos \theta \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

d) 倒立振子実験系のパラメータ

パラメータ	数値
台車系の等価質量 (M)	14.12 [Kg]
倒立振子質量 (m)	0.064 [Kg]
回転軸から振子の重心までの距離 (l)	0.120 [m]
台車系の等価摩擦係数 (D _z)	56.5 [Kg/s, N/(m·s ⁻¹)]
回転軸回りの粘性摩擦係数 (D _θ)	2.99E-4 [Nm/(rad·s ⁻¹)]
振子の重心回りのモーメント (J)	1.2E-3 [Kg·m ²]
電圧トルク変換係数 (G ₀)	57.57 [N/V]
位置/電圧変換係数 (C _A)	22.0 [V/m]
角度/電圧変換係数 (C _B)	3.25 [V/rad]
重力加速度 (g)	9.8 [m/s ²]

< 制御系設計方針 >

- a) モデル化誤差: 平衡点近傍での線形化に伴う誤差

- a)モデル化誤差：平衡点近傍での線形化に伴う誤差
- b)ロバスト安定化問題の適用
- c)重み関数行列

$$W_t(s) := \begin{bmatrix} W_{t,c}(s) & 0 \\ 0 & W_{t,p}(s) \end{bmatrix},$$

ここで,

$$W_{t,c}(s) = (s/w_c)^2 + 0.2(s/w_c) + 0.01, \quad W_{t,p}(s) = (s/w_p)^2 + 0.2(s/w_p) + 0.01$$

$$W_t(s)P(s) := \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_t & D_t \end{bmatrix}, \quad D_t \text{は列フルランクになるように } W_t(s) \text{ を選ぶ}$$

- d) Fig 4.14 に示す一般化プラント $G(s)$ において仮定 C2), C3), O3) が成立しない。
- e) Fig. 4.15 に示す拡大系 $G_e(s)$ を導入する。すなわち, $G(s)$ の外乱 $w(t)$ と制御量 $z(t)$ を

$$w := [w_1^T \ w_2^T]^T, \quad w_2 \in \mathbb{R}^4, \quad z := [z^T \ z_{e1}^T \ z_{e2}^T]^T, \quad z_{e1} \in \mathbb{R}^4, \quad z_{e2} \in \mathbb{R}^2$$

と拡大する。

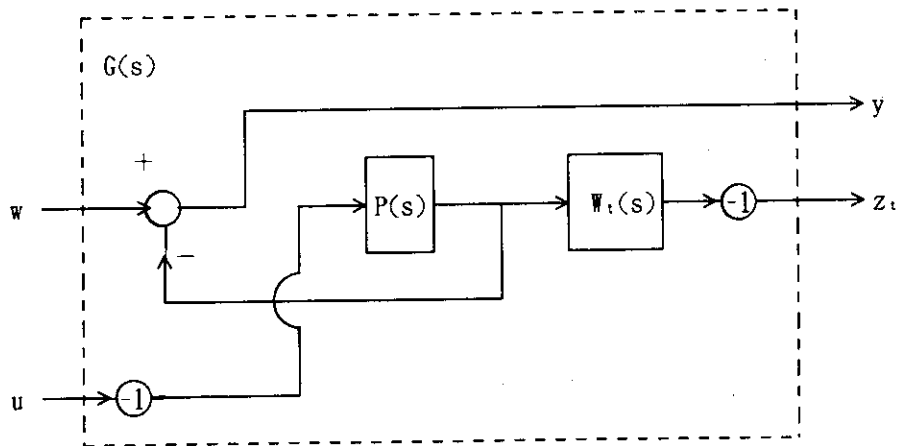


Fig. 4.14 Generalized plant $G(s)$ for the design of H_∞ controller to stabilize the inverted pendulum system

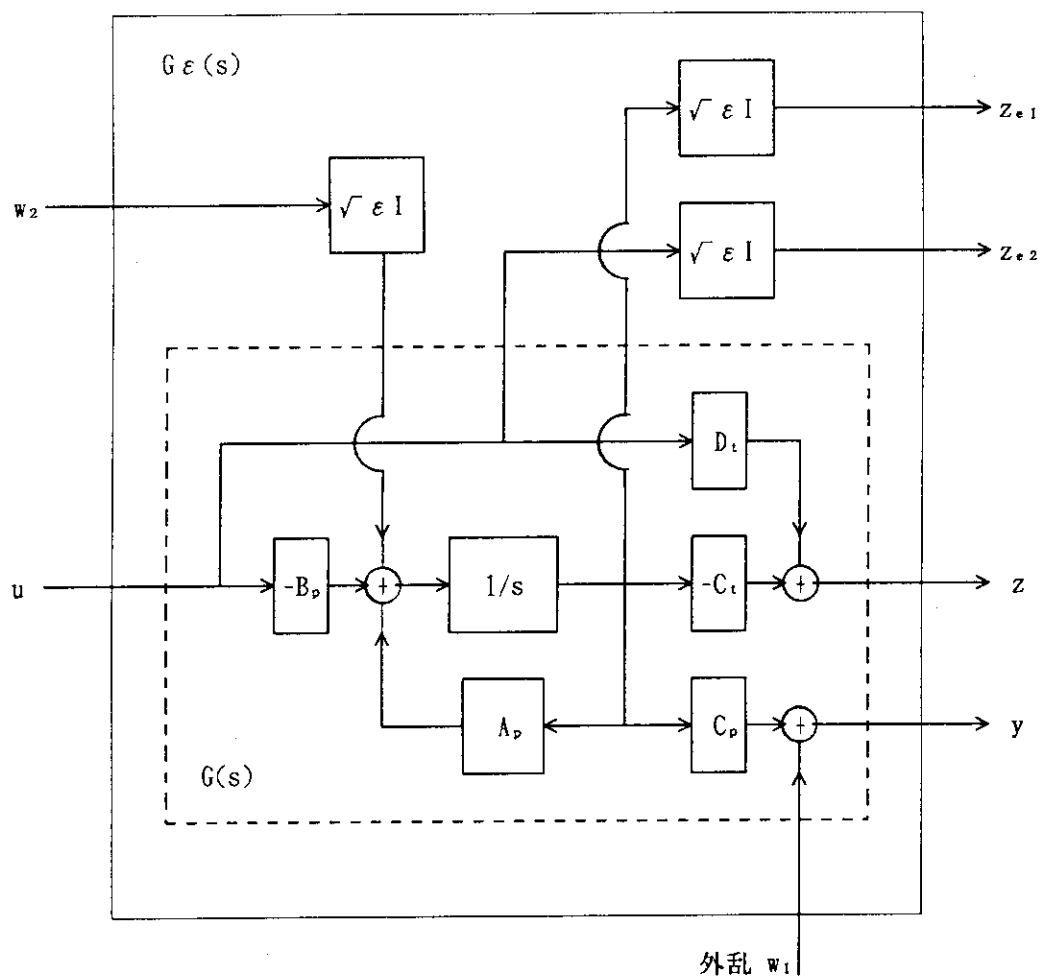


Fig. 4.15 Augmented generalized plant $G_\epsilon(s)$

< 拡大系 $G_\epsilon(s)$ の状態空間実現 >

$$G_\epsilon(s) := \begin{bmatrix} A_p & 0 & \epsilon^{1/2}I_4 & -B_p \\ -C_t & 0 & 0 & D_t \\ \epsilon^{1/2}I_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{1/2}I_2 \\ C_p & I_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この $G_\epsilon(s)$ の状態空間実現に対して仮定 C2), C3), O3) が成立する。

③結果

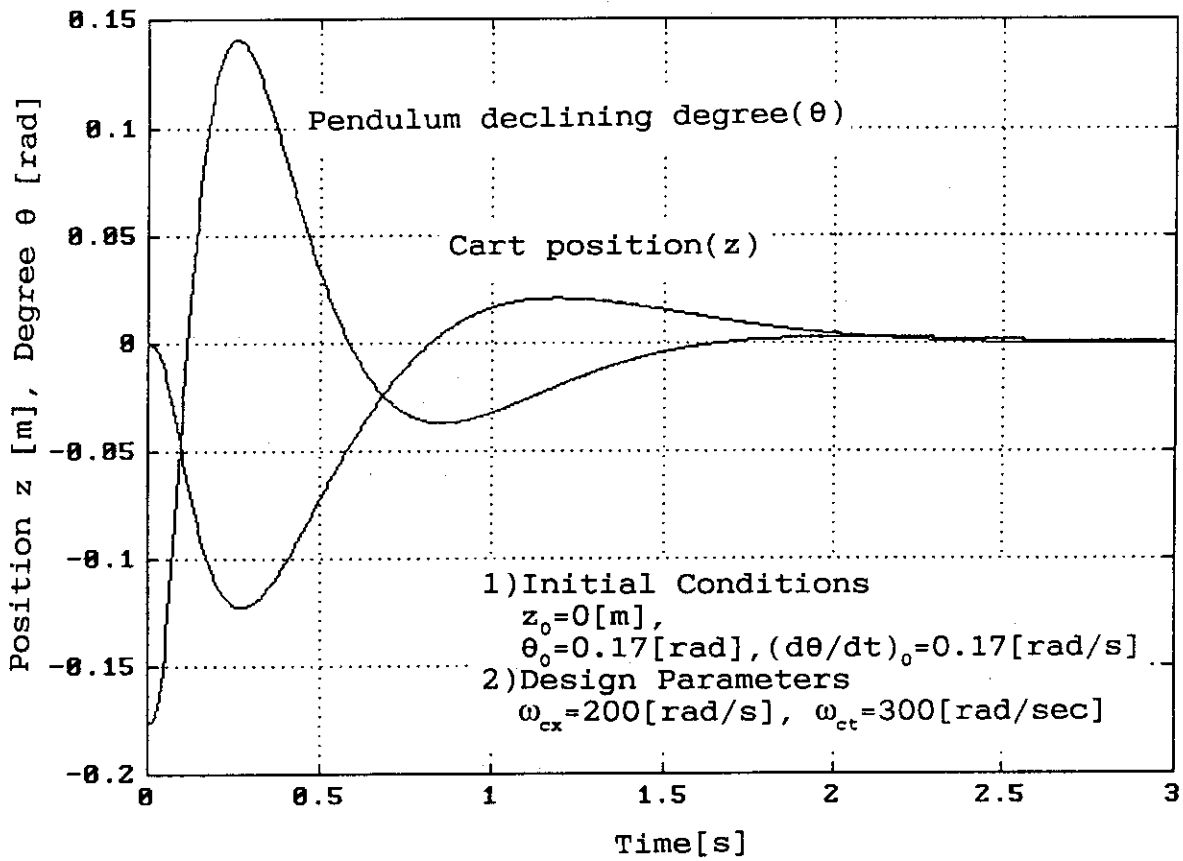


Fig. 4.16 Time responses of the cart and the inverted pendulum

5. まとめ

H_∞ 制御は、従来の多くの最適制御問題が扱った2乗ノルムではなく最大値ノルムを評価関数として最悪ケースに対する最適制御を実現するものであり、多変数ロバスト制御系を設計する系統的手法を与えるものである。

本報は大規模・複雑なシステムである原子力プラントにおいてはロバスト安定な制御系が特に重要であるとの観点から H_∞ 制御の適用に関し次の諸点を検討したものである。

- ①原子力プラントの特徴を要約し、多変数ロバスト制御系の必要性を議論した。
- ②古典制御理論の閉ループ周波数応答の整形問題やロバスト安定化問題は H_∞ ノルムを用いて定式化することにより同形式となることを例示した。この考え方を一般化したものが H_∞ 制御の定式化であることを論じた。また、 H_∞ 制御で扱える制御問題例を簡単に説明した。
- ③標準的な H_∞ 制御の定式化と状態空間法による解法を要約した。また、解法上で通常前提とされる仮定の意味を考察するとともに、その仮定の成立性と実制御対象の極やゼロ点との関係について具体例をもと議論した。
- ④次に原子力プラントを含め多くのプロセス制御においてステップ状目標値変化に対するロバストサーボ系が重要な役割を果たしていることを考慮してサーボ系設計をとりあげた。しかし、標準的解法によって H_∞ 制御サーボ系を設計することが困難であることは③の議論から明らかである。この困難を回避するために現在のところ最も広い適用性を有していると考えられる拡大系による H_∞ 制御ロバストサーボ系の設計法をとりあげその設計法の概要を述べた。
- ⑤ H_∞ 制御の応用例をもとにその有効性を例示した。

さて、原子力プラントに対する運転形態は今後ますます多様化するであろう。この要請に柔軟に対応するためには、計測制御系の機能の高度化が不可欠である。この機能高度化に対しては次の2点を考慮することが必要である。ひとつは多様な運転の要請に応えるために制御系は複雑で巧みな制御操作を行う性能を有することである。現在盛んに研究されている運転員の知識を活用する知的制御やファジー制御等の非線形制御の応用がこのための有効な方法となることが期待される。もうひとつは原子力プラントという特殊性（潜在的危険性大、大規模・複雑なプラント等）を考慮し、プラント運転の安全性および安定性を担保する制御系を確立することである。このために制御系が備えるべき重要な性能が本報で取上げたロバスト性である。 H_∞ 制御はこのロバスト制御系を構成するためのひとつ有力な設計法であると考えられる。

上に述べた制御系機能の高度化を現実的に展開するためには、実機規模での制御実験に基づく研究をより活発化し、シミュレーション等に基づく理論的研究のみならず実験的かつ実践的な研究を並行して進めることがさらに重要になると思われる。

謝辞

本報は日本原子力学会に設置されたマンマシンシステム連絡会研究調査委員会第3回会合（平成5年7月16日）における「高度計測制御」分科会用に準備した討議資料に、会合での討論内容を補足してとりまとめたものである。当分科会への参加と討議資料の準備の機会を筆者に与えられた分科会主査吉川榮和京都大学教授並びに貴重なご討論をいただいた委員の方々に感謝いたします。

参考文献

- 1)木村：LQG から H_∞ へ，計測と制御，29-2, 111/119(1990)
- 2)荒木：周波数応答の考え方，システム／制御／情報，34-1, 2/8(1990)
- 3)K. Glover and J. C. Doyle: Systems & Control Letters, 11, 167/172(1988)
- 4)J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: AC-34-8, 831/847(1989)
- 5)須田：ハミルトン行列とRiccati代数方程式，計測と制御，29-2, 151/152(1990)
- 6)鈴木，島崎，篠原： H_∞ 制御(I)－数学的準備－，JAERI-memo 02-354(1990)
- 7)鈴木，島崎，篠原： H_∞ 制御(III)－モデルマッチング問題と性能限界－，JAERI-memo 02-445(1991)
- 8)B. A. Francis: A course in H_∞ control theory, Springer-Verlag(1987)
- 9)原，他：SICE基礎講習会テキスト－ H_∞ 制御入門－(1991)
- 10)瀬田，宇田川，高橋： H_∞ 制御によるBWRの出力制御，1992春の年会
- 11)K. Suzuki, J. Shimazki and Y. Shinohara: to appear in Nucl. Sci. Eng.
- 12)松村，他： H_∞ 制御理論を適用したロバストな磁気浮上系，電学論D-110-10(1990)
- 13)H. Kuraoka, N. Ohka and M. Ohba: 1898 American Control Conference
- 14)児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会(1978)
- 15)伊藤，木村，細江：線形制御系の設計理論，計測自動制御学会(1978)

謝辞

本報は日本原子力学会に設置されたマンマシンシステム連絡会研究調査委員会第3回会合（平成5年7月16日）における「高度計測制御」分科会用に準備した討議資料に、会合での討論内容を補足してとりまとめたものである。当分科会への参加と討議資料の準備の機会を筆者に与えられた分科会主査吉川榮和京都大学教授並びに貴重なご討論をいただいた委員の方々に感謝いたします。

参考文献

- 1)木村：LQG から H_∞ へ，計測と制御，29-2, 111/119(1990)
- 2)荒木：周波数応答の考え方，システム／制御／情報，34-1, 2/8(1990)
- 3)K. Glover and J. C. Doyle: Systems & Control Letters, 11, 167/172(1988)
- 4)J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: AC-34-8, 831/847(1989)
- 5)須田：ハミルトン行列とRiccati代数方程式，計測と制御，29-2, 151/152(1990)
- 6)鈴木，島崎，篠原： H_∞ 制御(I)－数学的準備－，JAERI-memo 02-354(1990)
- 7)鈴木，島崎，篠原： H_∞ 制御(III)－モデルマッチング問題と性能限界－，JAERI-memo 02-445(1991)
- 8)B. A. Francis: A course in H_∞ control theory, Springer-Verlag(1987)
- 9)原，他：SICE基礎講習会テキスト－ H_∞ 制御入門－(1991)
- 10)瀬田，宇田川，高橋： H_∞ 制御によるBWRの出力制御，1992春の年会
- 11)K. Suzuki, J. Shimazki and Y. Shinohara: to appear in Nucl. Sci. Eng.
- 12)松村，他： H_∞ 制御理論を適用したロバストな磁気浮上系，電学論D-110-10(1990)
- 13)H. Kuraoka, N. Ohka and M. Ohba: 1898 American Control Conference
- 14)児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会(1978)
- 15)伊藤，木村，細江：線形制御系の設計理論，計測自動制御学会(1978)

付録

A.1 システムの不変ゼロ点と伝達ゼロ点

システムが状態空間表現として次式で与えられているとする。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{A1.1a})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{A1.1b})$$

システム行列 $P(s)$ を次式で定義する (Rosenbrockによる)。

$$P(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

$P(s)$ のランクが $s=z$ ($z \in \mathbb{C}$) で最大ランクよりも小さくなるならば, z は (2.1) 式のシステムの不変ゼロ点という。

一方, (2.1) 式の伝達関数行列 $G(s)$ は

$$G(s) := D + C(sI - A)^{-1}B \quad (\text{A1.3})$$

となる。 $G(s)$ が $s=z$ でその最大ランクよりも小さくなるならば, z は伝達ゼロ点と呼ばれる。

また, 伝達ゼロ点の集合 \subset 不変ゼロ点の集合の関係にある。

A.2 フィードバック制御系の内部安定性

次のフィードバック制御系を考える。図中の $K(s)$ は補償器の伝達行列, $P(s)$ は制御対象の伝達行列である。

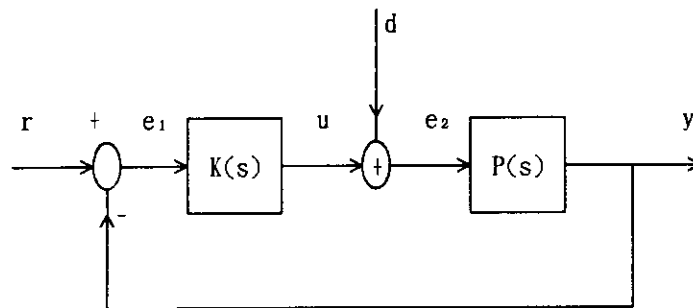


Fig. A2.1 Feedback control system

このシステムを閉ループ系の観測信号 (e_1, e_2) と閉ループの外部からの入力信号 (r, d) との関係式として次式で記述される。

$$\begin{bmatrix} I & P \\ -K & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \quad (\text{A2.1})$$

この方程式の係数行列が正則のとき、またそのときに限り外乱 $[r^T \ d^T]^T$ から $[e_1^T \ e_2^T]^T$ への伝達行列 $G(P, K)$ が定義される。すなわち、

$$G(P, K) = \begin{bmatrix} I & P \\ -K & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A2.2})$$

と一意に定まる。Fig. 2A.1に示すフィードバック制御系において伝達行列が一意に定まるときこのシステムはwell-posednessであるという。well-posednessの条件はブロック行列の行列式から¹⁴⁾

$$\det \begin{bmatrix} I & P \\ -K & I \end{bmatrix} = \det(I + KP) = \det(I + PK) \neq 0 \quad (\text{A2.3})$$

である。いま、フィードバック制御系が①well-posednessであり、② $G(P, K) \in RH_\infty$ であるとき、このフィードバック制御系は内部安定 (internally stable) であるという。

この意味でフィードバック制御系が(内部)安定ならば、外乱 $[r^T \ d^T]^T$ から $[u^T \ y^T]^T$ への伝達行列も安定かつプロパーとなることを次に示そう。特に安定性のみならずプロパーとなることに注意する。まず、次の関係がブロック図から得られる。

$$u = e_2 - d, \quad y = -e_1 + r \quad (\text{A2.4})$$

この関係は次の様に変形できる。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e2 \\ -e1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d \\ r \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} G(P, K) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (I - G(P, K)) \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \tag{A2.5}
\end{aligned}$$

この式はフィードバック制御系が内部安定ならば、 $G(P, K)$ が一意に定まり、かつ RH^∞ に属するから、外乱 $[r^T \ d^T]^T$ から観測信号 $[u^T \ y^T]^T$ への伝達行列が一意に定まり (well-posedness), かつ RH^∞ に属することを示している。

次に P, K の既約分解形を用いて内部安定条件を導く。 P, K の RH^∞ 上の既約分解を次のように仮定する。

$$P = ND^{-1} = \tilde{D}^{-1}\tilde{N} \tag{A2.6a}$$

$$XN + YD = I, \quad \tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y} = I \tag{A2.6b}$$

$$K = N_K D_K^{-1} = \tilde{D}_K^{-1}\tilde{N}_K \tag{A2.7a}$$

$$\tilde{X}_K N_K + Y_K D_K = I, \quad \tilde{N}_K \tilde{X}_K + \tilde{D}_K \tilde{Y}_K = I \tag{A2.7b}$$

これを用いると、well-posedness条件 (A2.3) 式は次のようになる。

$$\det(I + PK) = \det[(\bar{D}^{-1}\bar{D})(D_K D_K^{-1}) + (\bar{D}^{-1}\bar{N})(N_K D_K^{-1})] = \det(\bar{D}^{-1}) \det(\bar{D} D_K + \bar{N} N_K) \det(D_K^{-1}) \neq 0$$

$$\det(I + KP) = \det[(\bar{D}_K^{-1}\bar{D}_K)(D D^{-1}) + (\bar{D}_K^{-1}\bar{N}_K)(N D^{-1})] = \det(\bar{D}_K^{-1}) \det(\bar{D}_K D + \bar{N}_K N) \det(D^{-1}) \neq 0$$

故に, well-posednessの条件は

$$\Delta := \bar{D} D_K + \bar{N} N_K \tag{A2.8a}$$

$$\bar{\Delta} := \bar{D}_K D + \bar{N}_K N \tag{A2.8b}$$

とおくと, $\det \Delta \neq 0$ および $\det \bar{\Delta} \neq 0$ となる。すなわち, 行列 Δ および $\bar{\Delta}$ が逆行列をもつことと等価である。well-posedness条件が成立するとき, $G(P, K)$ は

$$G(P, K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_K \\ N_K \end{bmatrix} \Delta^{-1} \begin{bmatrix} \bar{D} & -\bar{N} \end{bmatrix} \tag{A2.9a}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -N \\ D \end{bmatrix} \bar{\Delta}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{N}_K & \bar{D}_K \end{bmatrix} \tag{A2.9b}$$

と与えられる。したがって, Δ (または $\bar{\Delta}$) がユニモジュラーならば $G(P, K) \in RH_\infty$ は明らかである。逆に, $G(P, K) \in RH_\infty$ ならば (A2.9a) 式に左から $[Y_K \ X_K] \in RH_\infty$, 右から $[\bar{Y}^T \ -\bar{X}^T]^T \in RH_\infty$ を掛けて $\Delta^{-1} \in RH_\infty$ を得る。全く同様にして, $\bar{\Delta}^{-1} \in RH_\infty$ が導かれる。

以上の検討から, 内部安定条件を次のようにまとめることができる。

「 $P(s)$ の RH_∞ 上の右既約分解 (rcf) と左既約分解 (lcf) をそれぞれ (N, D) , (\bar{D}, \bar{N}) とする。また, $K(s)$ の rcf と lcf をそれぞれ (N_K, D_K) , (\bar{D}_K, \bar{N}_K) とする。このとき, 次のことが云える。

- (1) フィードバック制御系は内部安定である
- ⇔
- (2) $\Delta := \bar{D} D_K + \bar{N} N_K$ がユニモジュラーである
- ⇔
- (3) $\bar{\Delta} := \bar{D}_K D + \bar{N}_K N$ がユニモジュラーである

ただし, 特性行列 $\Delta(s)$ がユニモジュラーであるとは $\Delta(s) \in RH_\infty$ ならば $\Delta(s)^{-1} \in RH_\infty$ となるこ

とである。」

このようにフィードバック制御系の内部安定性は Δ と $\bar{\Delta}$ によって支配されることになる。これまでの議論で $P(s)$ と $K(s)$ のプロパー性は特に要請していないこと及び既約分解の選び方に内部安定性は依存しないことを注意しておく。

A.3 プロパーな安定有理行列の階数

$A(s) \in RH_\infty$ の階数 (rank) は $r \times r$ 次小行列式に恒等的に0でないものが存在し、 $(r+1) \times (r+1)$ 次以上の小行列式がすべて恒等的に0となる時、 r を $A(s)$ のランクと呼び、次の様に表す。

$$\text{rank}A(s)=r \quad (\text{A3.1})$$

A.4 H_∞ 補償器が極-ゼロ相殺しないことの説明

H_∞ 制御器は仕様 S_1)を満たすように設計される。すなわち、フィードバック制御系を内部安定化するものである。制御対象 $P(s)$ の RH_∞ 上のrcfを (N, D) 、また $K(s)$ のrcfを (N_K, D_K) とすると、

$$\begin{bmatrix} D & -N_K \\ N & D_K \end{bmatrix}$$

がユニモジュラーとなる。故に、

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} D & -N_K \\ N & D_K \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} D & -N_K \\ 0 & D_K + ND^{-1}N_K \end{bmatrix} \\ &= \det(D)\det(D_K + ND^{-1}N_K) = \det(D)\det(I + PK)\det(D_K) \\ &= \det(D)\det(D_K)\det(I + D_K^{-1}ND^{-1}N_K) \end{aligned}$$

最後の等号から

$$PK = (D_K^{-1}N)(D^{-1}N_K)$$

を得る。これはループ伝達行列PKがふたつの左既約分解形の積で表されることを意味している。すなわち、NとD_KおよびN_KとDが左既約となるからP(s)とK(s)の間には極-ゼロ相殺が生じないことが分る。

A.5 W_iP(s)の最小実現について

ロバスト安定化問題や混合感度問題では相補感度関数に対する重み関数W_i(s)と実制御対象P(s)との積W_iP(s)を状態空間で実現することが必要になる。このため、W_i(s)はW_iP(s)がプロパーとなり、P(s)の極を消去しないsの整式(実制御対象P(s)の分子の次数差をもつ)として通常選ばれる。いま、P(s) ∈ R_p^{p×p}(s)としてその可制御・可観測な状態空間実現が次のように与えられるものとする。

$$P(s) = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.1})$$

このときW_iP(s)の状態空間の最小実現はC_iとD_iとを適当にとれば、次の様に与えられることが知られている。このときの状態変数ベクトルをx_pとする。

$$W_i P(s) = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \quad (\text{A5.2})$$

ところが、W_iP(s)の最小実現は一意には定まらないため、次の様に与えられるのが一般的である。このときの状態変数ベクトルをx_iとする。

$$W_i P(s) = \begin{bmatrix} A_{i,m} & B_{i,m} \\ C_{i,m} & D_{i,m} \end{bmatrix} \quad (\text{A5.3})$$

明らかに、(A5.2)式と(A5.3)式は同じ伝達行列の最小実現であるから互いに相似である。す

なわち、適当な正則行列Tによって、2つの表現はつぎの関係にある。

$$x_i = T x_p \tag{A5.4a}$$

$$A_p = T^{-1} A_{i,m} T, B_p = T^{-1} B_{i,m}, C_i = C_{i,m} T, D_i = D_{i,m} \tag{A5.4b}$$

このような正則行列Tを見出せば、一般的にもとめた $W_i P(s)$ の最小実現(A5.3)式を特定の最小実現である(A5.2)式に変換できることになる。

したがって、どの様に正則行列Tを定めるかが問題である。(A5.3)式の可制御行列を $\Gamma_{i,m}$ とする。(A5.2)式の可制御行列を Γ とする。制御対象 $P(s)$ の最小実現は可制御であるから $\Gamma \Gamma^T$ は正則行列である¹⁵⁾。そこで、Tを

$$T := \Gamma_i \Gamma^T (\Gamma \Gamma^T)^{-1} \tag{A5.5}$$

のように定義すれば¹⁵⁾、これが求める正則行列Tである。

A.6 十分小さな正数 ϵ を用いた拡大系による H_∞ 制御の解法

3章で ϵ を用いた拡大系による H_∞ 制御の解法を述べた。これは一般化プラント $G(s)$

$$G(s) := \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{A6.1}$$

が仮定C2), C3), O2), O3)が満たされないとき、十分小さな正数 ϵ を含む拡大系 $G_\epsilon(s)$ を構成することにより、仮定を満足させて2章で述べた標準的な H_∞ 制御の解法を適用して解くものであった。この拡大系 $G_\epsilon(s)$ の一般的な形は次のようになる⁹⁾。

$$G_\epsilon(s) := \begin{bmatrix} A & [B_1 & \sqrt{\epsilon} Q_b & 0] & B_2 \\ \begin{bmatrix} C_1 \\ \sqrt{\epsilon} Q_c \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{12} \\ 0 \\ \sqrt{\epsilon} Q_{12} \end{bmatrix} \\ C_2 & [D_{21} & 0 & \sqrt{\epsilon} Q_{21}] & 0 \end{bmatrix} \tag{A6.2}$$

(A6.2) 式で Q_b , Q_c , Q_{12} , Q_{21} を適当に選べば仮定 C2), C3), O2), O3) をすべて満足させることができる。例えば, $Q_b = I_n$, $Q_c = I_n$, $Q_{12} = I_{m2}$, $Q_{21} = I_{p2}$ と選べば仮定がすべて満たされていることが分る。

ここで重要な点は $G_\varepsilon(s)$ は $G(s)$ の外生信号 $w(t)$ と制御量 $z(t)$ を拡張した形になっているので, $G_\varepsilon(s)$ に対して H_∞ 制御問題が可解ならば, $G(s)$ に対する H_∞ 制御も可解となっていることである。さらに正数 ε を十分小さくとることにより, 可解条件を一致させることが可能である。これは次の命題で保証される。

【命題】 (A6.2) で表される $G_\varepsilon(s)$ が 2 章で述べた仮定 C1), C2), C3), O1), O2), O3) をすべて満たしているとする。このとき, (A6.1) 式で表される $G(s)$ に対する H_∞ 制御問題が可解であるための必要十分条件は $\exists \varepsilon > 0$ が存在して, $G_\varepsilon(s)$ に対する H_∞ 制御問題が可解であることである。

それでは $G_\varepsilon(s)$ に対する可解条件と (準) 最適補償器のクラスは ε にどのように依存するであろうか。可解条件については, ある $\varepsilon_0 > 0$ で可解ならば $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ の $G_\varepsilon(s)$ に対して H_∞ 制御問題は可解であることがいえる。また, $G_\varepsilon(s)$ -可解であるとき, その最適補償器のクラスは $G(s)$ の補償器のクラスの部分クラスとして得られ, (2.32a) 式と同様な形で与えられる。 ε が小さいほどその部分クラスは $G(s)$ の補償器のクラスに近づくことが知られている。