

J A E R I - M  
93-192

ステップ幅の自動調整アルゴリズムによる  
アーム解の改善

1993年9月

佐々木 忍

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合せは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこみください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費領布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokaimura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1993

編集兼発行 日本原子力研究所  
印 刷 ニッセイエプロ株式会社

ステップ幅の自動調整アルゴリズムによるアーム解の改善

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

佐々木 忍

(1993年9月6日受理)

本報は、マニピュレータの逆問題を解く場合に遭遇する重要な数値問題について取扱う。すなわち、線形化計算で発生する解の初期値依存性や狭い探索範囲などの基本的な問題点をステップ幅の自動調整アルゴリズムにより首尾よく改善する。

変数次元の削減と線形近似に基づく実用的な最適化モデルにおいて、アーム解が十分に広い範囲にわたって迅速に探索できることが明らかになり、またNewton法による従来の計算もこのアルゴリズムやシンプレクス法との併用により探索能力が大きく向上する。

Improvement of Arm Solutions via  
Step Width Self-tuning Algorithm

Shinobu SASAKI

Department of Reactor Engineering  
Tokai Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received September 6, 1993)

This paper is concerned with the significant numerical problems encountered in solving the manipulator inverse kinematics. That is, essential difficulties occurred in linearized calculations such as dependence on initial guess or narrow search region are improved with great success by means of a step width self-tuning algorithm.

In a practical optimization model based on the reduction of dimensionality and linearized approximation, it is shown that the desired arm solutions are found out at a faster rate over a wider application range. Also, the capability of finding solutions via a traditional Newton method is enhanced to a large extent by combined application of the proposed idea and simplex method.

**Keywords:** Arm Solutions, Step Width Control, Manipulator Inverse Kinematics, Newton Method, Jacobian, Optimization Techniques, Simplex Method

## 目 次

1. はじめに .....	1
2. 自由度を下げた機構モデル .....	2
3. 線形近似に基づく解法 .....	6
3.1 目的関数の最小化による関節解 .....	6
3.2 Newton 法による関節解 .....	7
3.3 ステップ幅の自動調整アルゴリズム .....	7
4. 計算結果の検討 .....	9
5. おわりに .....	13
謝 辞 .....	13
参考文献 .....	14
付 錄 .....	15

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Kinematic Model with Reduced Dimensionality .....	2
3. Solution Procedures Based on Linearized Approximations .....	6
3.1 Arm Solutions Derived by Minimization of Objective Function ..	6
3.2 Arm Solutions Derived by Newton Method .....	7
3.3 Step Width Self-tuning Algorithm .....	7
4. Computed Results and Discussion .....	9
5. Conclusions .....	13
Acknowledgement .....	13
References .....	14
Appendix .....	15

## 1. はじめに

関節・リンクを有機的に結合させた直列連鎖形ロボット機構において、指先を望みの位置・姿勢にもっていくために各関節の動きはどのように決定すべきであるか。この問題はマニピュレータの指先を制御する最も基本的な問題であるが、特別なアーム形態を除いて目的の関節解(以下、アーム解とも呼ぶ)を引出すことは複雑な機構関係式のためそれほど単純ではない。これまで提案されているさまざまなアプローチ<sup>1)</sup>のなかで、Newton法を使った逐次反復計算が実用上広く利用されている。しかし、この方法はアルゴリズムの単純さとは裏腹に、解の初期値依存性やヤコビ行列のランク落ちにより指先がある方向に動けなくなるいわゆる特異点の存在の可能性等、解を導くうえで深刻な問題を抱えている。

本報は、これまでに提案した線形最適化法や在来のNewton法に共通する線形化の弱点を積極的に改善する方法を提案し、その検討を行う。ヤコビ行列の計算を通して発生する個々の問題点は明らかでも、初期値に依存し狭い探索範囲に限定した取扱いへの具体的な対策は、降下法における曲線補間法<sup>10)</sup>以外にはあまり講じられていないようであるから、比較的単純で有効な解決策を見い出すことが目的となる。

ところで、多関節形マニピュレータの機構関係式に含まれる独立変数は、それを一括して扱うと概して式の煩雑さや計算負担を伴う。このことは、一般に指先の位置を変えようとすれば姿勢も変り、姿勢を変えようとすれば位置も追随して変るマニピュレータ特有の複雑多岐なるまいからもわかるように、各関節変数が指先の位置と姿勢双方に深く関係していることに起因する。この場合、位置と姿勢を決定する機構がそれぞれ独立した3自由度の構成であれば解析的取扱いも単純になることから、形式的に3変数で表現した方程式系に線形最適化手法を適用することで所要のアーム解が容易に誘導できる。<sup>2)~4)</sup> その誘導過程で発生する数値的発散・振動現象に対する安定化は、ステップ幅(刻み幅)に関するある種の相関式が有効となる。ここでは、ステップ幅の操作的重要性を発展させ、関節変数の変化に追随して自動的に変動幅を調整する新しい計算方法を提案する。△θの変化に対して、関数値が補正直線上であるレベル以下に減少するまで縮小因子αを更新し続けることがポイントになる。計算機シミュレーションはアーム解の迅速な収束を達成し、手軽で実用的な方法と確認できた。一方、この安定化のアルゴリズムは冗長系の解法<sup>5)</sup>においても効果を発揮したように、伝統的なNewton法に対しても重要な役割をはたした。

## 2. 自由度を下げた機構モデル

マニピュレータの機構方程式は、6つの独立な関節変数 $\theta_1 \sim \theta_6$ がつくる関節空間から位置・姿勢を含むデカルト空間への写像と考えられつぎのように表せる。

$$f_i = f_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6), \quad (i=1, \dots, 6) \quad (1)$$

デカルト空間で最初の3つの方程式 $f_1, f_2, f_3$ が指先の位置を、また残り3つが指先の姿勢を定めるが、それぞれ各関節変数が複雑に関与していることが特徴である。しかし、指先位置を決定する機構と姿勢を決定する機構が分離できる構造として、例えば球形関節(ball-joint構造)やスリー・ロールリスト<sup>11)</sup>を採用すると、アーム解の導出が容易になる。

本報ではこうした特殊な関節機構がもつ利点から離れた一般的な関節構成に対して、形式的に自由度を下げた数値解法を提唱する。

まず、(1)式をなんらかの方法(例えば後述の方法)で2つのグループに分けた後、一方のグループの3変数を残る3変数で表現し、それを他方のグループと関連づけて全体として3変数系の問題に変換する。すなわち、姿勢についての3式 $f_4, f_5, f_6$ のなかから、仮に3つの関節変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (以下これを基準変数と呼ぶ)を固定すると、残りの関節変数は

$$\theta_j \equiv G(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (j=4, 5, 6) \quad (2)$$

と表現できる(記法'≡G'は、「左辺は右辺の変数で構成される関数」であることを示す)。これを先の $f_1, f_2, f_3$ に代入すると指先位置が基準変数のみで表され、原式(1)に代る新しい方程式となる。こうした取扱いの利点は、4章の結果が示すように少ない独立変数によるモデルの簡潔化と収束計算の向上にある。

ところで、マニピュレータの指先の位置・姿勢は、Denavit-Hartenbergの記法による同次変換行列 ${}^{i-1}A_i$ をベースを起点に左から右に乘じて決定される<sup>6), 7)</sup>。この行列積 $T_6$ は結合則が成立することから、最初の行列 ${}^0A_1$ と残り5つの積との掛け算で表すことができる。(以下、 $s_i = \sin \theta_i, c_i = \cos \theta_i, s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j), c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j); \gamma_i = \cos \alpha_i, \eta_i = \sin \alpha_i$ と略記する)。

$$\begin{aligned}
 T_6 &= \prod_{i=1}^6 {}^{i-1}A_i = \begin{vmatrix} c_1 & -\gamma_1 s_1 & \eta_1 s_1 & a_1 c_1 \\ s_1 & \gamma_1 c_1 & -\eta_1 c_1 & a_1 s_1 \\ 0 & \eta_1 & \gamma_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} {}^0L_1 & {}^0M_1 & {}^0N_1 & {}^0X_1 \\ {}^0L_2 & {}^0M_2 & {}^0N_2 & {}^0X_2 \\ {}^0L_3 & {}^0M_3 & {}^0N_3 & {}^0X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3)
 \end{aligned}$$

また、行列 $T_6$ は最初の5つの積に最後の行列 $A_6$ を掛合わせた形でも表現できる。ただし、通常指先ではリンク座標系の指定がなく開放となるため $\gamma_6=1$ ,  $\eta_6=0$ とする。

$$T_6 = \begin{vmatrix} {}^B L_1 & {}^B M_1 & {}^B N_1 & {}^B X_1 \\ {}^B L_2 & {}^B M_2 & {}^B N_2 & {}^B X_2 \\ {}^B L_3 & {}^B M_3 & {}^B N_3 & {}^B X_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_6 & -\gamma_6 s_6 & \eta_6 s_6 & a_6 c_6 \\ s_6 & \gamma_6 c_6 & -\eta_6 c_6 & a_6 s_6 \\ 0 & \eta_6 & \gamma_6 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

ここに、(3), (4)式における5つの変換行列積の要素 ${}^A L_j$ ,  ${}^B M_j$ 等はつきの記法で表した関数である。

$$\begin{aligned} {}^A L_j, {}^A M_j, {}^A N_j, {}^A X_j &\equiv G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5), \\ {}^B L_j, {}^B M_j, {}^B N_j, {}^B X_j &\equiv G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5). \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5)$$

二つの行列を展開すると、例えば先端位置のx-座標 $P_x$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} P_x &= {}^A X_1 c_1 - {}^A X_2 \gamma_1 s_1 + {}^A X_3 \eta_1 s_1 + a_1 c_1 \equiv G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5), \\ P_x &= a_6 ({}^B L_1 c_6 + {}^B M_1 s_6) + d_6 {}^B N_1 + {}^B X_1 = a_6 n_x + d_6 {}^B N_1 + {}^B X_1 \equiv G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5). \end{aligned}$$

と書け、 $P_x$ が実質的に関節変数 $\theta_1$ から $\theta_5$ で構成されることが分る。同様にして、6リンク・マニピュレータの指先の位置・姿勢に対する独立変数の関わりはつぎのように整理できる( $n_x$ は目標値で、以下上付き記号 $\hat{\cdot}$ を目標の指定値とする)。

$$\begin{aligned} n_x, n_y, o_x, o_y &\equiv G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5), \\ P_x, P_y, a_x, a_y &\equiv G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5), \\ P_z, a_z &\equiv G(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5), \\ n_z, o_z &\equiv G(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5). \end{aligned} \quad (6)$$

このなかから位置と方向余弦に関する6つの(できるだけ単純な)式を選択する。例えば(1)式は

$$\begin{aligned} P_x &= P_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5), \\ P_y &= P_y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5), \\ P_z &= P_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5), \\ a_x &= a_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5), \\ a_z &= a_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5), \\ o_z &= o_z(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_5). \end{aligned} \quad (7)$$

と表せる。ここで、姿勢ベクトル $a$ の要素等から基準変数で表せる関係を見い出す。因みに、 $a$ の要素は先の行列展開(3)により、

$$\begin{aligned} a_x &= {}^A N_1 c_1 - {}^A N_2 s_1 \gamma_1 + {}^A N_3 s_1 \eta_1, \\ a_y &= {}^A N_1 s_1 + {}^A N_2 c_1 \gamma_1 - {}^A N_3 c_1 \eta_1, \\ a_z &= {}^A N_2 \eta_1 + {}^A N_3 \gamma_1. \end{aligned}$$

となり、コンポーネント ${}^A N_1$ 等がつぎのように基準変数 $\theta_1$ で表示できる。

$$\begin{aligned} {}^A N_1 &= a_x c_1 + a_y s_1, \\ {}^A N_2 \gamma_1 - {}^A N_3 \eta_1 &= a_y c_1 - a_x s_1. \end{aligned} \quad (8)$$

以下、Fig.1に示すマニピュレータを例にあげて、(7)と付録の関係式を照し合せて考える。まず、(8)式に示した関係は、

$$\begin{aligned} -{}^A N_1 &= s_4 c_5 = -(a_z s_1 + a_x c_1) = w_1(\theta_1), \\ {}^A N_2 \gamma_1 - {}^A N_3 \eta_1 &= c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5 = a_y c_1 - a_x s_1 = w_2(\theta_1), \end{aligned} \quad (9)$$

となり、これを $a_z$ と関係づけると

$$\begin{aligned} c_4 c_5 &= w_2 c_{23} - a_z s_{23} \quad (= \zeta_1), \\ s_5 &= -(a_z c_{23} + w_2 s_{23}) \quad (= \zeta_2), \end{aligned} \quad (10)$$

が導き出され、 $\theta_4, \theta_5$ がつぎのように基準変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ で表現できる。

$$\tan \theta_5 = \pm \frac{\zeta_2}{(w_1^2 + \zeta_1^2)^{1/2}}, \quad (11)$$

$$\tan \theta_4 = \frac{(w_1/c_5)}{(\zeta_1/c_5)} = \frac{w_1}{\zeta_1}. \quad (12)$$

残る $\theta_6$ は、例えば付録の $o_z, n_z$ の式からつぎのように定まる。

$$\tan \theta_6 = \frac{{}^B M_3 n_z - {}^B L_3 o_z}{{}^B L_3 n_z + {}^B M_3 o_z}, \quad (13)$$

ただし、 $\zeta_1 = w_2 c_{23} - a_z s_{23} \neq 0$ ,

$${}^B L_3 n_z + {}^B M_3 o_z \neq 0. \quad (14)$$

この結果、マニピュレータの指先位置 $P_x, P_y, P_z$ は形式的につぎの3変数系で表現できる。

$$\begin{aligned} P_x &= P_x(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \\ P_y &= P_y(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \\ P_z &= P_z(\theta_1, \theta_2, \theta_3). \end{aligned} \quad (15)$$

以上で、6リンク・マニピュレータに対する機構方程式の原モデル(1)または(7)は、(15)式の形に書き直せたことから、数理計画の問題に置き換えて処理ができる。すなわち、指先の位置とその目標値との誤差 $e_1(\theta)$ の二乗和からなる目的関数

$$M(\theta) = M(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \|e\|^2 \quad (16)$$

を導入して、これを最小にするあてはめ量を見い出し、方程式(1)の近似解とする。

$$\begin{aligned} \text{ここに, } e &= (e_1, e_2, e_3)^\top; e_1(\theta) = P_x(\theta) - \bar{P}_x, e_2(\theta) = P_y(\theta) - \bar{P}_y, \\ e_3(\theta) &= P_z(\theta) - \bar{P}_z. \end{aligned} \quad (17)$$

さて、二乗和の形を積極的に生かした解法としてa)制約条件のない非線形最小二乗法やb) 線形近似モデル等を考えられる。前者は、2階の微分項の計算まで立入り、Levenberg-

- $a_1 = 700 \text{ (mm)}$   
 $a_2 = 500 \text{ (mm)}$   
 $a_3 + a_4 = 350 \text{ (mm)}$   
 $a_5 = 150 \text{ (mm)}$   
 $a_6 = 280 \text{ (mm)}$   
  
 $-200 \leq \theta_1 \leq 200 \text{ (deg)}$   
 $-90 \leq \theta_2 \leq 120 \text{ (deg)}$   
 $-90 \leq \theta_3 \leq 90 \text{ (deg)}$   
 $-180 \leq \theta_4 \leq 180 \text{ (deg)}$   
 $-90 \leq \theta_5 \leq 90 \text{ (deg)}$   
 $-60 \leq \theta_6 \leq 60 \text{ (deg)}$

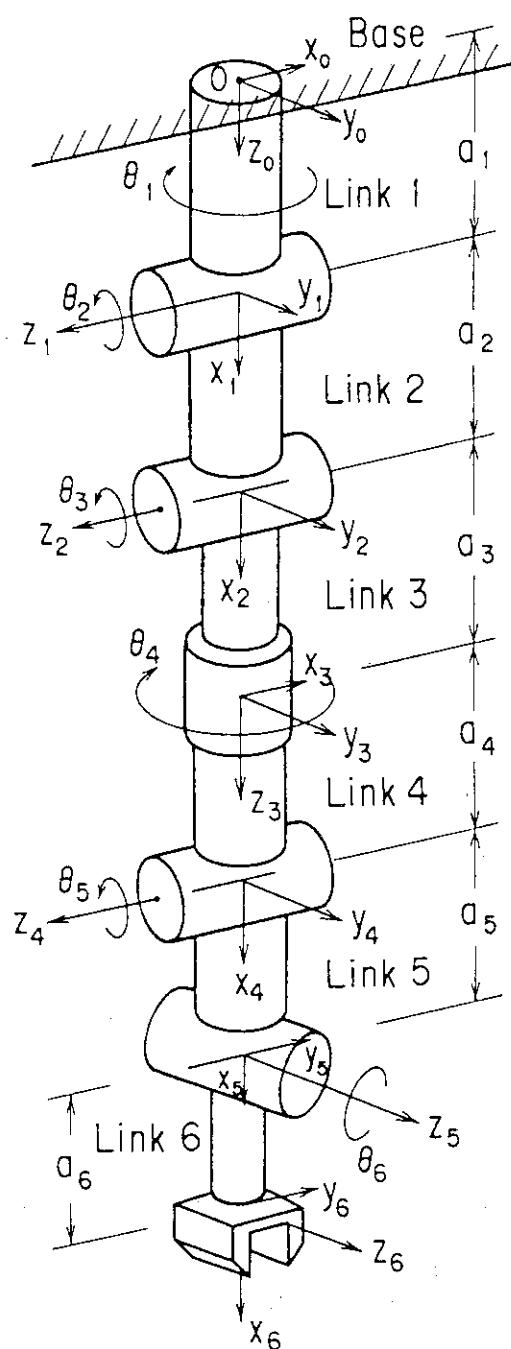


Fig. 1 Schematic of an articulated robot manipulator

Marquardt法や準Newton法のなかのDavidon-Fletcher-Powell(DFP法)/Broyden法により高精度な安定解を導くことが可能であるが<sup>4), 8)~10)</sup>、本論文の趣旨が線形化のなかで生じる問題点の改善に絞っているので前者を除く。つきの2節では最適化と関係づけた反復計算法や古典的Newton法による解法を述べ、また最後の節でそれらに対する変動幅の適切な区間補正を行う簡単なアルゴリズムを説明する。

### 3. 線形近似に基づく解法

#### 3.1 目的関数の最小化による関節解

まず、指先位置 $P_x, P_y, P_z$ の関係式(15)を初期推定値 $\theta^0$ の近傍で線形化し、目的関数(16)をつぎのように書き換える。

$$\begin{aligned} M(\theta^0 + \Delta\theta) &= \{P_x(\theta^0 + \Delta\theta) - \hat{P}_x\}^2 + \{P_y(\theta^0 + \Delta\theta) - \hat{P}_y\}^2 \\ &\quad + \{P_z(\theta^0 + \Delta\theta) - \hat{P}_z\}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^3 R_{ij} \Delta\theta_i \Delta\theta_j - 2 \sum_{i=1}^3 b_i \Delta\theta_i + Q. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{ここに, } Q = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \quad q_1 = e_1(\theta^0), \quad q_2 = e_2(\theta^0), \quad q_3 = e_3(\theta^0). \quad (19)$$

この目的関数Mを極小にする各関節変数の変位 $\Delta\theta$ は、つぎの方程式の解から求まる。

$$R \Delta\theta = b \quad (20)$$

ただし、 $R = (R_{ij})$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ ,

$$\begin{aligned} R_{ij} &= L_i L_j + M_i M_j + N_i N_j, \\ b_i &= -(q_1 L_i + q_2 M_i + q_3 N_i), \quad (i, j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} L_i &= (\partial P_x / \partial \theta_i)_0 + \sum_{k=4}^6 (\partial P_x / \partial \theta_k)_0 (\partial \theta_k / \partial \theta_i)_0, \\ M_i &= (\partial P_y / \partial \theta_i)_0 + \sum_{k=4}^6 (\partial P_y / \partial \theta_k)_0 (\partial \theta_k / \partial \theta_i)_0, \\ N_i &= (\partial P_z / \partial \theta_i)_0 + \sum_{k=4}^6 (\partial P_z / \partial \theta_k)_0 (\partial \theta_k / \partial \theta_i)_0. \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (22)$$

$\Delta\theta$ の決定により、関節角の初期推定値 $\theta^0$ が

$$\theta = \theta^0 + \Delta\theta \quad (23)$$

と更新され、一連の反復操作を許容範囲に落着くまで実行する。ただ、この反復過程で計算される $\Delta\theta$ の大きな変化に対しても所要のアーム解を安定に誘導するためには、3.3節で述べるアルゴリズムが有効となる。

なお、基準変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ が決定すると、残る関節変数 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ は(11), (12), (13)式から容易に決定する。

Marquardt法や準Newton法のなかのDavidon-Fletcher-Powell(DFP法)/Broyden法により高精度な安定解を導くことが可能であるが<sup>4)・8)～10)</sup>、本論文の趣旨が線形化のなかで生じる問題点の改善に絞っているので前者を除く。つきの2節では最適化と関係づけた反復計算法や古典的Newton法による解法を述べ、また最後の節でそれらに対する変動幅の適切な区間補正を行う簡単なアルゴリズムを説明する。

### 3. 線形近似に基づく角解法

#### 3.1 目的関数の最小化による関節解

まず、指先位置 $P_x, P_y, P_z$ の関係式(15)を初期推定値 $\theta^0$ の近傍で線形化し、目的関数(16)をつぎのように書き換える。

$$\begin{aligned} M(\theta^0 + \Delta\theta) &= \{P_x(\theta^0 + \Delta\theta) - \hat{P}_x\}^2 + \{P_y(\theta^0 + \Delta\theta) - \hat{P}_y\}^2 \\ &\quad + \{P_z(\theta^0 + \Delta\theta) - \hat{P}_z\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 R_{ij} \Delta\theta_i \Delta\theta_j - 2 \sum_{i=1}^3 b_i \Delta\theta_i + Q. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{ここに, } Q = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \quad q_1 = e_1(\theta^0), \quad q_2 = e_2(\theta^0), \quad q_3 = e_3(\theta^0). \quad (19)$$

この目的関数Mを極小にする各関節変数の変位 $\Delta\theta$ は、つぎの方程式の解から求まる。

$$R \Delta\theta = b \quad (20)$$

ただし、 $R = (R_{ij})$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ .

$$\begin{aligned} R_{ij} &= L_i L_j + M_i M_j + N_i N_j, \\ b_i &= -(q_1 L_i + q_2 M_i + q_3 N_i), \quad (i, j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} L_i &= (\partial P_x / \partial \theta_i)_0 + \sum_{k=1}^6 (\partial P_x / \partial \theta_k)_0 (\partial \theta_k / \partial \theta_i)_0, \\ M_i &= (\partial P_y / \partial \theta_i)_0 + \sum_{k=1}^6 (\partial P_y / \partial \theta_k)_0 (\partial \theta_k / \partial \theta_i)_0, \\ N_i &= (\partial P_z / \partial \theta_i)_0 + \sum_{k=1}^6 (\partial P_z / \partial \theta_k)_0 (\partial \theta_k / \partial \theta_i)_0. \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (22)$$

$\Delta\theta$ の決定により、関節角の初期推定値 $\theta^0$ が

$$\theta = \theta^0 + \Delta\theta \quad (23)$$

と更新され、一連の反復操作を許容範囲に落着くまで実行する。ただ、この反復過程で計算される $\Delta\theta$ の大きな変化に対しても所要のアーム解を安定に誘導するためには、3.3節で述べるアルゴリズムが有効となる。

なお、基準変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ が決定すると、残る関節変数 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ は(11), (12), (13)式から容易に決定する。

### 3.2 Newton法による関節解

ヤコビ行列Jを使ったNewton法は(7)式を直接線形化し、つぎの式を得る。

$$\Delta \mathbf{r} = -\mathbf{J} \Delta \theta \quad (24)$$

ただし、

$$\Delta \mathbf{r} = (\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z, \Delta a_x, \Delta a_z, \Delta o_z)^T (= f),$$

$$\Delta \theta = (\Delta \theta_1, \Delta \theta_2, \dots, \Delta \theta_6)^T,$$

$$\Delta P_x = P_x - \hat{P}_x, \Delta P_y = P_y - \hat{P}_y, \dots, \Delta o_z = o_z - \hat{o}_z,$$

$$\mathbf{J} = (\partial f_i / \partial \theta_k) = (j_{ik}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

初期値に対する増分値は直接逆行列を計算せずに連立方程式の消去法などにより精度よく求めることが数値解法上重要で、関節解は(22)と同様に逐次反復が基本となる。

### 3.3 ステップ幅の自動調整アルゴリズム

前2節では、変数 $\theta$ の変位 $\Delta \theta$ を理論的に導き出したが、その大きさの制約については何も触れていない。一般に、非線形系を線形化した過程は解を導くまでに数値的不安定性を発生することが多く、初期値が真の解から大きく離れていたり、関数の非線形性が大きい場合に安定性が悪い。式(16)の残差二乗和 $M(\theta)$ についても反復毎の計算で減少することが保証されていないため、関数値に対応させて変位を適宜調節することが重要である。つまり、変位ベクトルに縮小因子を作用させこれを逐次制御する操作が不可欠で、この因子を自動的に決定するアルゴリズムをここで考える。

さて、誤差二乗和 $M(\theta)$ に対して、その平方根(つまり、各誤差関数からなるノルム)で系の挙動を評価する。Fig. 2に示すように、出発点 $\theta$ での関数値を $\overline{A_0 P_0} (=F)$ で表し、区間 $\Delta \theta$ 内で関数値が大きさ $F$ より減少することを期待して以下の操作を施す。その場合、関数値がもとの $F$ に比べどのくらいに減少すれば良いかの判断基準として、長さ $F$ を仮に棄却部と許容部の二つに分け、区間 $\overline{P_1 C_1} = F\alpha$ と $\overline{B_1 P_1} = F(1-\alpha)$ で表す。まず、点 $B_1$ における関数値が指定レベル $P_1$ から外れ $\overline{P_1 C_1}$ に属するかあるいはそれ以下におさまるかを検討する。その値が $F(1-\alpha)$ を越えた場合、許容域を $F(1-\alpha)$ からつぎの $F(1-\alpha^2)$ に少し拡げ、点 $B_2$ で再度関数値との比較を行う。関数値がこの区間 $\overline{B_2 P_2}$ 内に入れば、変位はもとの $\Delta \theta$ から $\alpha \Delta \theta$ に減少したものを探用する。 $\alpha$ は1と0の間の正数で、これを次第に小さくしながら指定レベルを広げる(緩める)操作を続けると、関数値を包含する許容域とそのときの( $\alpha$ に依存して縮小した)変位 $\Delta \theta$ の発見に到達する。一般的な手順として、Fig. 2に示す $\theta$ と $\theta + \Delta \theta$ の間で

$$\begin{aligned} \frac{\overline{P_1 C_1}}{\overline{A_1 P_1}} &= \frac{\overline{P_2 C_2}}{\overline{A_2 P_2}} = \dots = \frac{\overline{P_k C_k}}{\overline{A_k P_k}} = \frac{\overline{P_{k+1} C_{k+1}}}{\overline{A_{k+1} P_{k+1}}} = \dots \\ \frac{F\alpha}{\Delta \theta} &= \frac{F\alpha^2}{\Delta \theta^2} = \dots = \frac{F\alpha^k}{\Delta \theta^k} = \frac{F\alpha^{k+1}}{\Delta \theta^{k+1}} = \dots \end{aligned} \quad (25)$$

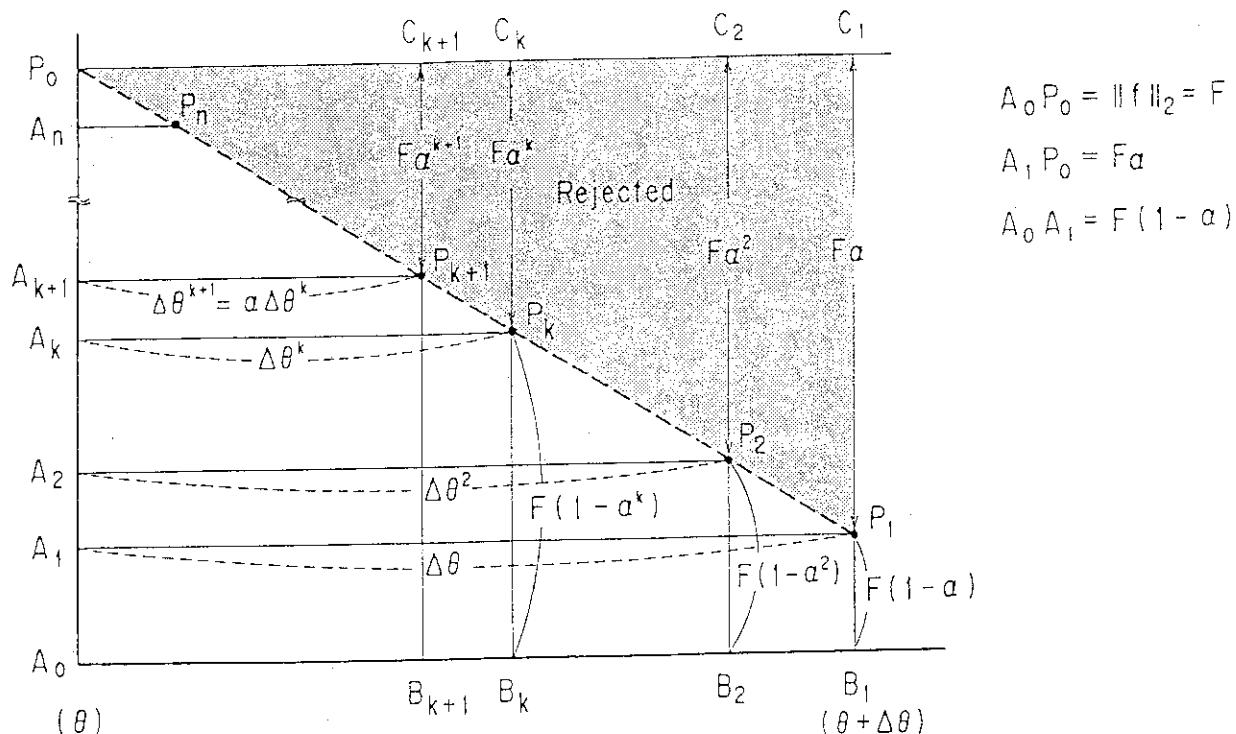


Fig. 2 A basic concept for establishing corrected displacements

- | Step | Description  |
|------|--|
| 1.   | Estimate $\theta^*$ and $\Delta\theta$ , Set $h:=2$ .  |
| 2.   | Set $\alpha := 1/h$ .  |
| 3.   | Set $\tilde{\theta}^* := \theta^* + h\alpha\Delta\theta$ .   |
| 4.   | Compute $E(\tilde{\theta}^*)$ and $E(\theta^*)$ ,  |
|      | where $E(\theta^*) = \{M(\theta^*)\}^{1/2} = \{\sum_{i=1}^3 f_i(\theta^*)^2\}^{1/2}$ .                         |
| 5.   | If $E(\tilde{\theta}^*) < (1-\alpha)E(\theta^*)$ , then go to step 7.  |
| 6.   | Set $\alpha := \alpha h$ within $\alpha \geq c_0$ . Go to step 3.<br>If $\alpha \leq c_0$ , then go to step 8. |
| 7.   | Find a new value $\theta^{*+1} := \tilde{\theta}^*$ . Go to step 9.  |
| 8.   | Find a new value $\theta^{*+1} := \theta^* - \beta\Delta\theta$ .  |
| 9.   | If $M(\theta^{*+1}) < M(\theta^*)$ , then go to step 11.   |
| 10.  | Set $h := 3$ . Go to step 2.   |
| 11.  | .....  |

Fig. 3 Algorithm of self-tuning for step widths

を満たす直線(点線)上に点列 $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots$ を定める。上述の $B_1, B_2$ における関数チェックに続き、 $k$ 番目に改善する変位を $\Delta\theta^*(=A_kP_k)$ とし、点 $B_k$ での関数値と $B_kP_k$ の大きさを比較する。その関数値が $B_kP_k$ 以内におさまれば、これを始点 $\theta$ での関数値 $F$ に対するもっとも適当な補正幅 $A_kP_k (= \Delta\theta^*)$ と定める。関数値が $B_kP_k$ より大きく評価された場合、現在の許容域 $F(1-\alpha^*)$ をすこし広げ、変位 $\Delta\theta^*$ を始点 $\theta$ の方へ縮小させて探索を続行する。その場合、Fig. 2に示した幾何学的関係から $\Delta\theta^*$ の大きさ( $=A_kP_k$ )を $\alpha$ 倍縮めた $A_{k+1}P_{k+1}$ がつぎの変位 $\Delta\theta^{k+1}$ となる。以下同様な繰り返し手順により $\theta$ における適切な変動幅 $\Delta\theta$ を自動的に補正する。もちろん、計算では $\alpha$ に下限 $c_0$ を設定してあり、反復は有限回で打切る(通常、 $\alpha=1/2$ あるいは $1/3$ を適用すると、5~6回で棄却域が $1/100$ にまで縮小する)。一方、強い非線形性による大きな変化のため区間 $\Delta\theta$ 内でこの縮小操作が実現できなかった場合は、違う $\alpha$ を初期値にして最初からやり直す。つまり、 $\alpha$ による縮小操作を続けてなお関数値が大きい場合(Fig. 3のステップ6から8へのジャンプが示すように)、補正をしないつぎのステップの関節角 $\theta + \Delta\theta$ は、一般に不安定性を発生しやすい。それで、関数値がまだ大きい場合に一旦 $\theta - \beta \Delta\theta$  ( $\beta=0.1$ )と置き換えて別の新しい $\alpha$ で対応する。この逐次反復アルゴリズムをFig. 3に記す。

#### 4. 計算結果の検討

本章では、線形近似を仮定する計算手法のなかで、ステップ幅の補正を組入れた簡単な最適化モデルと在来のNewton法の解析能力がいかに効果的に改善されるかを計算結果により比較・検討する。

2つのモデルはともに初期条件に大きく支配されることから、異なる初期推定値のもとで解の挙動を検証し、モデルの性能を評価することが必要である。いま、Fig. 1に示すマニピュレータの指先位置 $(\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z) = (-0.10, 0.35, 1.63)$  (m)、指先姿勢 $n_x=0., n_y=0., o_z=1.$ を与えたとき、これを実現する関節角の計算をここでのベンチマーク問題とする。この計算は、多項式モデルを使って厳密解が引出されているので<sup>12)</sup>、この情報を初期値の設定に利用する(それらはTable 1の下に記載した6つの解A, B, ..., Fである)。この表は厳密解の一組(実際には $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のみ)を目標値として、その値から種々変化させたときの計算結果であり、ステップ幅の補正機能の有無により整理してある。すなわち、初期推定値を表中の $\pm\Delta\theta$ が示すように、 $\theta_1=18.0896, \theta_2=70.5747, \theta_3=-87.7473$  (deg)からの変化量として任意に与える。初期偏差は、指先での現在値と目標値との隔たり(ノルム)を表す。とくに、初期アームの姿勢(関節2と3)が特別な場合の計算( $\theta_1=0.0$ を除く)をTable 2に示す。いずれも式(11)~(13)が特異とならないことから、表に示す収束解が得られた。

上述の数値実験から、初期条件の違いにより収束解はA, B, ..., Fのいずれかに到達することが観察できる。線形最適化モデルにおけるステップ幅は適切に計算され全てのrunについて好ましい結果を提供している。この調整効果は、一般的に初期偏差が大きい場合の収

を満たす直線(点線)上に点列 $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots$ を定める。上述の $B_1, B_2$ における関数チェックに続き、 $k$ 番目に改善する変位を $\Delta\theta^k (= \overline{A_kP_k})$ とし、点 $B_k$ での関数値と $\overline{B_kP_k}$ の大きさを比較する。その関数値が $\overline{B_kP_k}$ 以内におさまれば、これを始点 $\theta$ での関数値 $F$ に対するもっとも適当な補正幅 $\overline{A_kP_k} (= \Delta\theta^k)$ と定める。関数値が $\overline{B_kP_k}$ より大きく評価された場合、現在の許容域 $F(1-\alpha^k)$ をすこし広げ、変位 $\Delta\theta^k$ を始点 $\theta$ の方へ縮小させて探索を続行する。その場合、Fig. 2に示した幾何学的関係から $\Delta\theta^k$ の大きさ( $= \overline{A_kP_k}$ )を $\alpha$ 倍縮めた $\overline{A_{k+1}P_{k+1}}$ がつぎの変位 $\Delta\theta^{k+1}$ となる。以下同様な繰り返し手順により $\theta$ における適切な変動幅 $\Delta\theta$ を自動的に補正する。もちろん、計算では $\alpha$ に下限 $c_0$ を設定しており、反復は有限回で打切る(通常、 $\alpha=1/2$ あるいは $1/3$ を適用すると、5~6回で棄却域が $1/100$ にまで縮小する)。一方、強い非線形性による大きな変化のため区間 $\Delta\theta$ 内でこの縮小操作が実現できなかった場合は、違う $\alpha$ を初期値にして最初からやり直す。つまり、 $\alpha$ による縮小操作を続けてなお関数値が大きい場合(Fig. 3のステップ6から8へのジャンプが示すように)、補正をしないつぎのステップの関節角 $\theta + \Delta\theta$ は、一般に不安定性を発生しやすい。それで、関数値がまだ大きい場合に一旦 $\theta - \beta \Delta\theta$  ( $\beta=0.1$ )と置き換えて別の新しい $\alpha$ で対応する。この逐次反復アルゴリズムをFig. 3に記す。

#### 4. 計算結果の検討

本章では、線形近似を仮定する計算手法のなかで、ステップ幅の補正を組入れた簡単な最適化モデルと在来のNewton法の解析能力がいかに効果的に改善されるかを計算結果により比較・検討する。

2つのモデルはともに初期条件に大きく支配されることから、異なる初期推定値のもとで解の挙動を検証し、モデルの性能を評価することが必要である。いま、Fig. 1に示すマニピュレータの指先位置 $(\dot{P}_x, \dot{P}_y, \dot{P}_z) = (-0.10, 0.35, 1.63)$  (m)、指先姿勢 $n_x=0., n_y=0., o_z=1.$ を与えたとき、これを実現する関節角の計算をここでのベンチマーク問題とする。この計算は、多項式モデルを使って厳密解が引出されているので<sup>12)</sup>、この情報を初期値の設定に利用する(それらはTable 1の下に記載した6つの解A, B, ..., Fである)。この表は厳密解の一組(実際には $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のみ)を目標値として、その値から種々変化させたときの計算結果であり、ステップ幅の補正機能の有無により整理してある。すなわち、初期推定値を表中の $\pm \Delta\theta$ が示すように、 $\theta_1=18.0896, \theta_2=70.5747, \theta_3=-87.7473$  (deg)からの変化量として任意に与える。初期偏差は、指先での現在値と目標値との隔たり(ノルム)を表す。とくに、初期アームの姿勢(関節2と3)が特別な場合の計算( $\theta_1=0.0$ を除く)をTable 2に示す。いずれも式(11)~(13)が特異とならないことから、表に示す収束解が得られた。

上述の数値実験から、初期条件の違いにより収束解はA, B, ..., Fのいずれかに到達することが観察できる。線形最適化モデルにおけるステップ幅は適切に計算され全てのrunについて好ましい結果を提供している。この調整効果は、一般的に初期偏差が大きい場合の収

束回数にはっきりと反映している。

一方、Newton法に組込んだ計算も同じ初期条件で比較するため、 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ は最適化モデルの初期値を利用した。ステップ幅を更正しない場合、Table 1に示す初期値で計算すると少ない回数(実験では100回を上限に設定)での収束は2, 3の例を除いてほとんど期待できない。そのなかで、run2, 7, 11は比較的良い推定値のため2次収束的挙動となった。最適化手法と同様に、反復補正操作を実行すると発散傾向にあるアーム解も迅速に改善され収束ゾーンに導く結果を得た。収束回数は全体的に低く抑えられる傾向にあり、十分有効であることが分る。ただ、6つの関節変数が同時に関与するため前モデルに比べて非線形性も一段と複雑となり、計算の負担も大きくなる。また、関数値が急激に大きくなる例も少なくなく、因子 $\beta$ や $\alpha$ の新しい設定が、発散の食止めに効果を發揮した。しかしながら、Table 1のrun 5, 19やTable 2のrun 1, 5が示すように、変数が増えかつ目標値との偏差(距離)が相当大きくなると困難さを増すことがわかる。

最適化モデルは、ある評価基準を設けその枠内で最適解の探索を効率的に実行したが、Newton法は漠然とした近傍での取扱いであるから、局所的補正効果の積み重ねだけでは果たして探索が目標に向っているかの正しい見通しは難しい。これが(第1近似)Newton法の根本的な欠陥であり、解析能力の限界をきたす。

のことから、6自由度以上の多変数系を大域的に探索できるためには、なんらかの評価指針が不可欠となる。便宜的に目標値との誤差二乗和で構成する評価関数を導入して、このノルムを一定の収束域にもっていく予備的操作が必要と考えられる。その際、単純に関数値の直接探索を行う単体法(シンプレクス法)が役立つ<sup>9), 10)</sup>。この方法は、 $R^n$ 空間内で正則な単体(凸包)を構成した後、4つの基本操作を施しながら関数の最小値を目指して探索を続行するものである。各探索段階において微分操作が不要で、解の近傍に容易に接近できる利点をもつ。次に、操作で得た近傍値を初期値にしてNewton法とステップ幅の補正アルゴリズムの支援により所要の関節解を導く。一般に、シンプレクス法は解に近づくにつれ計算効率が低下するので、近似がある程度良くなればNewton法に切換えることが望ましい。良い初期条件を提供しさえすれば本来の2次収束も期待できる。このようなハイブリッド化によりNewtonで求められなかった解もすべて誘導できた。なお、補正を組入れた二つの解析モデルに関する収束精度は、同じ判定基準のもとで厳密解と対比してほぼ有効数字5~7桁程度の一一致がみられた。

以上、線形化を前提とする2つのアプローチを比較検討し、ステップ幅を補正するアルゴリズムが安定な関節解を導く重要な操作であると確認された。また、変数の数を減らした最適化手法は計算効率の向上に欠かせないモデルである。

Table 1 Comparisons of optimization model and Newton method

N = Number of iterations, G = Solution group, x = Failure

ID = 1; with step width control, ID = 0; without step width control

Test No.	Initial guess values(deg)			Optimization method				Newton method				Initial Deviation (m)
				ID = 1		ID = 0		ID = 1		ID = 0		
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	N	G	N	G	N	G	N	G	
ref.	18.0896	70.5747	-87.7473	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	+ $\Delta$ 20.0	+ $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 40.0	5	B	8	B	6	B	32	A	0.6767
2	+ $\Delta$ 20.0	- $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 40.0	4	B	4	B	4	B	4	B	0.2677
3	- $\Delta$ 20.0	+ $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 40.0	6	B	12	B	6	B	x	-	0.5818
4	+ $\Delta$ 40.0	+ $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 160.0	7	B	15	F	11	C	x	-	1.8371
5	+ $\Delta$ 40.0	+ $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 100.0	6	B	38	F	x	-	x	-	1.6719
6	+ $\Delta$ 40.0	+ $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 50.0	6	B	10	F	7	B	x	-	0.8740
7	+ $\Delta$ 40.0	+ $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 0.0	5	B	5	B	5	B	5	B	0.4858
8	- $\Delta$ 40.0	- $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 140.0	6	A	14	B	48	A	x	-	1.0386
9	- $\Delta$ 40.0	- $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 60.0	5	B	8	B	6	B	x	-	0.3441
10	- $\Delta$ 40.0	+ $\Delta$ 30.0	+ $\Delta$ 40.0	7	B	11	B	7	B	x	-	0.7039
11	+ $\Delta$ 40.0	- $\Delta$ 60.0	+ $\Delta$ 140.0	6	A	14	B	6	A	6	A	0.4029
12	+ $\Delta$ 40.0	- $\Delta$ 60.0	+ $\Delta$ 40.0	7	B	20	B	8	B	x	-	0.5582
13	+ $\Delta$ 60.0	- $\Delta$ 70.0	+ $\Delta$ 120.0	7	A	31	B	7	A	x	-	0.4455
14	+ $\Delta$ 100.0	- $\Delta$ 150.0	+ $\Delta$ 130.0	7	F	28	F	8	E	x	-	0.8186
15	+ $\Delta$ 100.0	+ $\Delta$ 40.0	+ $\Delta$ 30.0	8	B	12	F	9	B	x	-	1.1007
16	+ $\Delta$ 140.0	+ $\Delta$ 120.0	+ $\Delta$ 100.0	9	F	14	B	31	B	x	-	2.1866
17	- $\Delta$ 100.0	- $\Delta$ 110.0	+ $\Delta$ 160.0	6	E	9	E	6	E	x	-	0.4036
18	- $\Delta$ 100.0	- $\Delta$ 150.0	+ $\Delta$ 130.0	6	E	13	B	7	E	52	B	0.8352
19	- $\Delta$ 100.0	+ $\Delta$ 80.0	+ $\Delta$ 90.0	4	E	16	E	x	-	x	-	2.1864
20	- $\Delta$ 100.0	+ $\Delta$ 100.0	+ $\Delta$ 120.0	6	B	7	B	8	B	88	B	2.1937

$$\begin{aligned}
 A &= \{\theta_1 = 2.7532988, \theta_2 = 0.1501932, \theta_3 = 85.7259216, \theta_4 = -33.7722473, \theta_5 = -85.0427856, \theta_6 = 33.6731110\} \\
 B &= \{\theta_1 = 18.0896149, \theta_2 = 70.5746613, \theta_3 = -87.7473450, \theta_4 = -18.8751221, \theta_5 = 16.2995300, \theta_6 = -5.4810343\} \\
 C &= \{\theta_1 = -177.246689, \theta_2 = -0.1501932, \theta_3 = -85.7259216, \theta_4 = 146.2277370, \theta_5 = -85.0427856, \theta_6 = 33.6731110\} \\
 D &= \{\theta_1 = 182.753296, \theta_2 = -0.1501932, \theta_3 = -85.7259216, \theta_4 = 146.2277370, \theta_5 = -85.0427856, \theta_6 = 33.6731110\} \\
 E &= \{\theta_1 = -161.9103851, \theta_2 = -70.5746613, \theta_3 = 87.7473450, \theta_4 = 161.1248779, \theta_5 = 16.2995300, \theta_6 = -5.4810343\} \\
 F &= \{\theta_1 = 198.0896149, \theta_2 = -70.5746613, \theta_3 = 87.7473450, \theta_4 = 161.1248779, \theta_5 = 16.2995300, \theta_6 = -5.4810343\}
 \end{aligned}$$

Table 2 Comparisons of optimization model and Newton method with step control  
 N= Number of iterations, G=Solution group, x=Failure

Test run No.	Initial guess values			Optimization Model N, G	Newton Model N, G	Initial Deviation (m)
	$\theta_1$ (deg)	$\theta_2$ (deg)	$\theta_3$ (deg)			
1	40.0	90.0	0.0	6 B	x -	0.9321
2	40.0	90.0	90.0	9 E	23 A	1.7245
3	40.0	0.0	-90.0	6 B	9 B	0.7938
4	40.0	0.0	90.0	6 A	5 A	0.3238
5	40.0	-90.0	0.0	7 B	x -	1.4161
6	40.0	-90.0	-90.0	9 A	45 E	1.9076

## 5. おわりに

マニピュレータのアーム解は非線形機構方程式を線形化し、逐次反復的に計算することが一般的である。その場合、考慮しなければならない典型的な問題点と対応策はつぎのようである。

- (1) 反復近似計算における单一収束解は、マニピュレータの姿勢に関する多値性に対応できない。これは代数方程式への原式の変換によりあらゆる実現可能解が引出せる。ただし、Tableで示したように、異なる初期値の設定により別の解を見出すことは可能である。
- (2) 初期値に依存し狭い範囲に限定したアプローチに対して、本報で提唱したアルゴリズムは探索範囲の拡大と、安定で信頼性の高い解を誘導する。とくに、実用的側面から自由度を減らし、評価関数を設定した最適化技法があらゆる面で優位となる。また、Newton法と単体法とのハイブリッド化も解の探索に有効である。
- (3) 特異点の問題は、2階微分をもつヘシアンの計算を取り入れたり、冗長自由度の導入で解の不定性が回避できる。

このように、線形化を前提にした数値計算で発生する問題点のなかで(2)の提案は、実現可能な解を十分広範囲にわたって探索することを可能にし、近似計算の不利な点を克服する1つの有効な手段と考えられる。

### 謝　　辞

本報告書の作成に対してコメントをいただいた篠原慶邦室長に深謝します。

## 5. おわりに

マニピュレータのアーム解は非線形機構方程式を線形化し、逐次反復的に計算することが一般的である。その場合、考慮しなければならない典型的な問題点と対応策はつぎのようである。

- (1) 反復近似計算における单一収束解は、マニピュレータの姿勢に関する多値性に対応できない。これは代数方程式への原式の変換によりあらゆる実現可能解が引出せる。ただ、Tableで示したように、異なる初期値の設定により別の解を見出すことは可能である。
- (2) 初期値に依存し狭い範囲に限定したアプローチに対して、本報で提唱したアルゴリズムは探索範囲の拡大と、安定で信頼性の高い解を誘導する。とくに、実用的側面から自由度を減らし、評価関数を設定した最適化技法があらゆる面で優位となる。また、Newton法と単体法とのハイブリッド化も解の探索に有効である。
- (3) 特異点の問題は、2階微分をもつヘシアンの計算を取り入れたり、冗長自由度の導入で解の不定性が回避できる。

このように、線形化を前提にした数値計算で発生する問題点のなかで(2)の提案は、実現可能な解を十分広範囲にわたって探索することを可能にし、近似計算の不利な点を克服する1つの有効な手段と考えられる。

## 謝　　辞

本報告書の作成に対してコメントをいただいた篠原慶邦室長に深謝します。

## 参考文献

- 1) 日本ロボット学会編：ロボット工学ハンドブック，コロナ社（1990）。
- 2) 佐々木 忍：6リンク・マニピュレータの機構表現について，JAERI-M 90-227 (1990).
- 3) 佐々木 忍：関節変数の分離に基づく逆運動学の解法，計測自動制御学会論文集，Vol. 26, No. 6, 685/691 (1990).
- 4) S. Sasaki : Feasibility Study of Manipulator Inverse Kinematics Problems with Applications of Optimization Principles, Mechanism and Machine Theory, Vol. 28, No. 5, 685/697 (1993).
- 5) S. Sasaki : On Numerical Techniques for Kinematics Problem of General Serial-link Robot Manipulators, Robotica (to be published).
- 6) J. Denavit & R. S. Hartenberg : A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices, Trans. ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 22, No. 2, 215/221 (1955).
- 7) R. C. Paul : Robot Manipulators-Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981).
- 8) S. Sasaki : New Approaches to Manipulator Arm Solutions via Unconstrained Optimization Theory, Robotica, Vol. 11, No. 4, 253/262 (1993).
- 9) J. Kowarik and M. R. Osborne : Methods for Unconstrained Optimization Problems, American Elsevier Publishing Company, Inc. (1968).
- 10) 今野浩, 山下浩 : 非線形計画法, 日科技連 (1984).
- 11) 吉川 恒夫 : ロボット制御基礎論, コロナ社 (1990).
- 12) 佐々木 忍 : 多項式表現を用いた6リンク・マニピュレータの逆問題計算法, 計測自動制御学会論文集, 23-5, 485/490 (1987).

付  
録

Fig. 1に与えた6リンク・マニピュレータの機構方程式は、基準系に対する指先の姿勢と位置ベクトルをそれぞれ、 $n=(n_x, n_y, n_z)^T$ ,  $o=(o_x, o_y, o_z)^T$ ,  $a=(a_x, a_y, a_z)^T$ ;  $p=(P_x, P_y, P_z)^T$ とすると、つぎのように表される。

$$\begin{aligned} n_x &= {}^B L_1 C_6 + {}^B M_1 S_6, \quad o_x = {}^B M_1 C_6 - {}^B L_1 S_6, \\ n_y &= {}^B L_2 C_6 + {}^B M_2 S_6, \quad o_y = {}^B M_2 C_6 - {}^B L_2 S_6, \\ n_z &= {}^B L_3 C_6 + {}^B M_3 S_6, \quad o_z = {}^B M_3 C_6 - {}^B L_3 S_6, \\ a_x &= S_1 S_{23} S_5 - S_1 C_{23} C_4 C_5 - S_4 C_1 C_5, \\ a_y &= C_1 C_{23} C_4 C_5 - S_{23} S_5 C_1 - S_1 S_4 C_5, \\ a_z &= -(S_{23} C_4 C_5 + S_5 C_{23}), \\ p_x &= a_6({}^B L_1 C_6 + {}^B M_1 S_6) + a_5 {}^B L_1 - G_1 S_1 = a_6 n_x + a_5 {}^B L_1 - G_1 S_1, \\ p_y &= a_6({}^B L_2 C_6 + {}^B M_2 S_6) + a_5 {}^B L_2 + G_1 C_1 = a_6 n_y + a_5 {}^B L_2 + G_1 C_1, \\ p_z &= a_6({}^B L_3 C_6 + {}^B M_3 S_6) + a_5 {}^B L_3 + G_2 + a_1 = a_6 n_z + a_5 {}^B L_3 + G_2 + a_1, \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} {}^B L_1 &= -(S_1 S_{23} C_5 + S_4 S_5 C_1 + S_1 S_5 C_{23} C_4), \\ {}^B L_2 &= S_{23} C_1 C_5 - S_1 S_4 S_5 + S_5 C_1 C_{23} C_4, \\ {}^B L_3 &= C_{23} C_5 - S_{23} S_5 C_4, \\ {}^B M_1 &= C_1 C_4 - S_1 S_4 C_{23}, \quad {}^B M_2 = S_1 C_4 + S_4 C_1 C_{23}, \quad {}^B M_3 = -S_{23} S_4, \\ G_1 &= (a_3 + a_4) S_{23} + a_2 S_2, \quad G_2 = (a_3 + a_4) C_{23} + a_2 C_2. \end{aligned}$$