

JAERI-M
9410

助走区間を含んだ拡大流路内層流熱伝達
の解析

(純粋な外向き流が存在する場合の解)

1981年3月

椎 名 保 顕

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

助走区間を含んだ拡大流路内層流熱伝達の解析
(純粋な外向き流が存在する場合の解)

日本原子力研究所東海研究所高温工学部

椎 名 保 顕

(1981年2月5日受理)

拡大流路内層流熱伝達を固有関数展開法を用いて解いた。流速分布は Rosenhead や Millsaps-Pohlhausen らにより Jeffery-Hamel 流として解析的に解かれている。拡大流においては、ある Reynolds 数と流路開き角に対して外向き流れ及び内向き流れが混在して存在するが、本解析ではそのような複雑な流れは除外し、純粋な外向き流れが存在する領域のみを取り扱った。

熱伝達については、はじめ熱流束が $1/r$ で変化する場合について解き、重ね合わせ法により熱流束が r^δ で変化する場合の解を求めた。その結果によれば、 $q \sim 1/r$ の場合は、ヌッセルト数は熱流束一定の場合の平行平板層流熱伝達のヌッセルト数に比べると低く、 $Re \alpha$ が大きいと低下の度合いが大きくなる。また $q \sim r^\delta$ の場合には、 $\delta = -1$ の値を境にして流路内温度分布、ヌッセルト数の振る舞いとも縮小流路内熱伝達の場合と逆の傾向を持っていることが分かった。

Laminar Heat Transfer in the Thermal Entry Region
of Diverging Plane-Walled Channels
(Solutions for Unidirectional Outflow)

Yasuaki SHIINA

Division of High Temperature Engineering,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received February 5, 1981)

Heat transfer to laminar flow in divergent channel is solved analytically using series expansion of eigen functions. Velocity profiles in tapered passages, which are known as Jeffery-Hamel flow, are solved by Rosenhead and Millsaps-Pohlhausen et al. using elliptic functions. There are complex patterns of inflow and outflow in divergent channel, depending on Reynolds number and half taper angle α . In the present study, the analysis is confined to the unidirectional outflow.

Heat transfer problem is studied with wall heat flux varying as $q \sim 1/r$. Solution with wall heat flux $q \sim r^\delta$ is obtained by superposition of the solution with $q \sim 1/r$. The results show that Nusselt number for diverging flow with $q \sim 1/r$ is lower than that for parallel-channel flow with $q = \text{constant}$. It decreases with increase of Re_α . In the case of $q \sim r^\delta$, the behaviour of Nusselt number depends on the condition whether the value of δ exceeds -1 or not. The relation between Nu and Re_α for diverging flow is contrary to that for converging flow.

Keywords: Laminar Heat Transfer, Tapered Passage, Jeffery-Hamel Flow, Diverging Flow, Graetz Problem, Series Expansion of Eigen Functions

目 次

1. ま え が き	1
2. 流 速 分 布	2
3. 熱 伝 達	3
(1) $q \sim 1/r$ の場合 (両面加熱)	4
(2) $q \sim r^\delta$ の場合 (両面加熱)	5
(3) $q \sim 1/r$ の場合 (片面加熱片面断熱)	8
(4) $q \sim r^\delta$ の場合 (片面加熱片面断熱)	8
4. 結 論	9
参 考 文 献	11

Contents

1. Introduction	1
2. Velocity profiles	2
3. Heat transfer	3
(1). For the case of $q \sim 1/r$ (both walls heated)	4
(2). For the case of $q \sim r^\delta$ (both walls heated)	5
(3). For the case of $q \sim 1/r$	
(one wall heated one wall adiabatic)	8
(4). For the case of $q \sim r^\delta$	8
(one wall heated one wall adiabatic)	8
4. Conclusions	9
References	11

記 号 表

a	: 温度伝導率
A	: Re 数と α に依存した定数
C_n	: 固有関数の係数
D	: 代表直径, 拡大流路の場合は $4r\alpha$, 平行流路の場合は流路幅の2倍
g	: 無次元速度分布 U/U_m
Nu	: ヌッセルト数
Nu_0	: 縮小流路の場合の $r \rightarrow 0$ におけるヌッセルト数
Nu_∞	: 拡大流路の場合の $r \rightarrow \infty$ におけるヌッセルト数
P	: 圧力
Pr	: プラントル数
q	: 熱流束
q_0	: 熱流束の次元をもった定数
r	: r 座標
r_0	: 加熱開始点における r の値
\bar{r}	: 無次元 r 座標 r/r_0
Re	: レイノルズ数 UmD/r
T	: 温度
\bar{T}	: 無次元温度 $(T - T_i) \lambda / q_0 r_0 \alpha$
T_i	: 入口温度
\bar{T}_0	: (16)式であらわされる $\bar{T}(t, \xi)$
\bar{T}_M	: 無次元混合平均温度 $\int_{-1}^1 \bar{T} g d\xi / 2$
\bar{T}_w	: 無次元壁温度
U	: 速度
U_m	: 平均速度
X	: 平行平板における加熱開始点からの距離
Y_n	: 固有関数

α	: 流路傾斜角の $1/2$	ν	: 動粘性係数
β, β_n	: 固有値	ξ	: θ/α
δ	: 任意の実数	ρ	: 密度
θ	: θ 座標	$\phi_2(\xi)$: (13)式で定義される関数
λ	: 熱伝導率	$\phi_3(\xi)$: (31)式で定義される関数

1. ま え が き

管内層流熱伝達についてはGretzが円管内層流熱伝達を取り扱って以来多くの研究が行われてきている。特に円管内流，平行平板流，二重管内流については速度分布が初等関数で表されるため数多くの研究が行われている^{(1)~(5)}。これらの研究で取り扱われている境界条件の多くは壁面熱流束一定，又は壁温一定の場合である。壁面における任意の境界条件に対する解は基本的にこれらの解を重ね合わせることにより求めることができる。すなわち，古くから行われてきた層流熱伝達の解法は固有関数展開法で，壁面熱流束一定の条件に対しては，温度分布を助走区間の温度分布と発達領域の温度分布の和で表し，助走区間の温度分布を固有関数展開で求めるという方法である。計算機が発達する以前には固有値を求めるためにかなりの労力が費やされてきたが，それら固有値の精度は必ずしも十分なものとはいえなかった。1960年以前の研究においても，固有値を求めるために様々な工夫がこらされている。1960年以降になると固有値の計算に計算機が導入され，求められる固有値の数，桁数及び信頼性も飛躍的に増大してきた⁽⁴⁾。しかし，円管，平行平板，二重円管の層流熱伝達の研究は1960年代にはほとんど解明されており，層流熱伝達の研究は主として，ペクレ数の小さい場合，すなわち流れ方向の熱伝導が無視できない場合等に移ってきている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

これらの研究は断面形状が一定の場合であり，断面形状や寸法が変化した場合については余り研究されていない。特にテーパー状流路形状の場合は加速による層流化現象とも関連して流れの実験⁽⁸⁾，及び熱伝達の実験⁽⁹⁾などが行われている。それらはすべて乱流における実験であるが，それらの正確な解釈，層流化したかどうかの判定のためにも層流熱伝達の解明は重要である。

テーパー状流路の流れに関しては古くから研究が行われている。速度分布はJefferyとHamelによりはじめて採り上げられRosenhead⁽¹⁰⁾，MillsepsとPohlhausen⁽¹¹⁾及びFraenkel⁽¹²⁾らにより詳しく解析された。

熱伝達問題はMillsapsとPohlhausen⁽¹¹⁾により扱われたが，彼らを取り扱ったのは流体中の摩擦による発熱とそれに伴う温度分布である。筆者の知る限り，壁からの熱伝達問題をはじめて取り扱ったのはSparrowとStarr⁽¹³⁾である。彼らは速度分布を表す非線型常微分方程式を線型化し，壁面熱流束が $1/r$ に比例する場合と等温の場合について十分発達した領域におけるヌッセルト数を求めている。その結果によると，縮小流路では平行平板の場合よりヌッセルト数は増加し，拡大流路ではヌッセルト数は減少する。YangとPrice⁽¹⁴⁾は入口流速一様，壁温一定の場合の温度助走区間における温度及び速度の発達，また，平均ヌッセルト数を差分法により数値計算で求めている。筆者⁽¹⁵⁾は縮小流路の熱伝達について，熱流束 q が r^δ で変化する場合の助走区間を含めた温度分布とヌッセルト数を解析的に求めた。それによると $\delta > -1$ の場合にはレイノルズ数の絶対値とテーパー状流路の傾斜角の半分 α との積 $|Re| \alpha$ がある値を越えると $r \rightarrow 0$ でヌッセルト数は0になる。

本報告では拡大流路の場合の助走区間を含んだ熱伝達問題を取り扱っている。解を得るため

の手法は文献(15)と同様に固有関数展開法を用いている。

2. 流速分布

流体の物性値が一定と仮定すると速度分布を温度分布から切り離して求めることができる。基礎方程式及び解法は以前に報告したもの⁽¹⁵⁾と基本的に同じである。Fig. 1に解析モデルを示す。流れは十分に発達している場合には $v_\theta = 0$ と考えることができる。従って基礎方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{U}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$0 = - \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

となる。ここで、次の量を導入し

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2r\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} U r d\theta \\ g(\theta) &= U/U_m \\ Re &= \frac{U_m D}{\nu} = \frac{U_m \cdot 4r\alpha}{\nu} \\ \xi &= \theta/\nu \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2)式を(1)式に代入して整理すると

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} + 4\alpha^2 g + \frac{1}{4} Re \alpha g^2 + \frac{8\alpha^3 A}{Re} = 0 \quad (3)$$

($\xi = \pm 1$ で $g = 0$)

$$\int_{-1}^1 g d\xi = 2 \quad (4)$$

となる。

(3)式は非線型であり、初等関数を用いて表すことはできない。(3)式はRosenhead⁽¹⁰⁾、Fraenkel⁽¹²⁾、Milsaps-Pohlhausen⁽¹¹⁾らによりだ円関数を用いて詳しく研究されている。縮小流路の場合、

の手法は文献(15)と同様に固有関数展開法を用いている。

2. 流速分布

流体の物性値が一定と仮定すると速度分布を温度分布から切り離して求めることができる。基礎方程式及び解法は以前に報告したもの⁽¹⁵⁾と基本的に同じである。Fig. 1に解析モデルを示す。流れは十分に発達している場合には $v_\theta = 0$ と考えることができる。従って基礎方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{U}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$0 = - \frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

となる。ここで、次の量を導入し

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2r\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} U r d\theta \\ g(\theta) &= U/U_m \\ Re &= \frac{U_m D}{\nu} = \frac{U_m \cdot 4r\alpha}{\nu} \\ \xi &= \theta/\nu \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2)式を(1)式に代入して整理すると

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} + 4\alpha^2 g + \frac{1}{4} Re \alpha g^2 + \frac{8\alpha^3 A}{Re} = 0 \quad (3)$$

($\xi = \pm 1$ で $g = 0$)

$$\int_{-1}^1 g d\xi = 2 \quad (4)$$

となる。

(3)式は非線型であり、初等関数を用いて表すことはできない。(3)式はRosenhead⁽¹⁰⁾、Fraenkel⁽¹²⁾、Milsaps-Pohlhausen⁽¹¹⁾らによりだ円関数を用いて詳しく研究されている。縮小流路の場合、

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときは中心に向かう流れが存在する。また $|\text{Re}| \alpha$ が無限大の場合には境界層厚さは 0 に近づき速度分布は流路断面で一様となる。

拡大流路の場合は縮小流路の場合とは異なり純粋の外向き流れ以外に内向き流れと外向き流れが混在する。純粋な外向き流れが可能な領域を Fig. 2 に示す。この曲線より右側では純粋な外向き流れは不可能である。例えば $\alpha = \pi/2$ では、 $R_m > 0$ のときは純粋な外向き流れは不可能となる。 R_m が大となると限界線は

$$\alpha R_m = 10.31$$

の曲線に漸近する。

Rosenhead⁽¹⁰⁾ は(3)式を詳しく吟味し、種々の流れの起こり得る限界を求めた。その流れの一例を Fig. 3 に示す。要するに、与えられた α と Re に応じて、様々な型の流れが可能となる。しかし、実際には外向き流れ内向き流れの混在する多重流れは不安定性のために存在し得ないであろう。また、現実には 1 つの流路内に複雑な圧力分布は存在し得ないことからより単純な流れになるものと考えられる。

本報告はそのような複雑な流れを取り扱うことを目的としていない。また、後に述べるように流路内に速度がゼロとなる点が存在すると固有関数展開法を用いることができない。それらの理由から、本報告では流れが純粋に外向き流れの場合のみの熱伝達を取り扱うことにする。

ここでは速度分布の計算に円関数を用いずに差分法を用いて数値的に解いた。Fig. 4 に速度分布を示す。Fig. 4 には縮小流路の速度分布も同時に示されている。 α がゼロに近い場合には破線で示すように放物線分布となる。レイノルズ数 Re と α の積 $\text{Re} \alpha$ が大きくなると壁における速度こう配が小さくなり、 $\text{Re} = 20000$ 、 $\alpha = 0.001$ の場合には壁近くで逆流が生じている。この場合、図からは明らかではないが、流速分布は流路中心で増大し、平均流速と最大流速の比は 2.158 程度となる。

3. 熱 伝 達

流体内部におけるまさつによる発熱、及び流体内部の熱伝導を無視するとエネルギー方程式は次のように書ける。

$$U \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (5)$$

文献(15)と同様に次の量を導入する。

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r/r_0 \\ \xi &= \theta/\alpha \\ \bar{T} &= (T-T_1) \lambda/q_0 r_0 \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

また、

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときは中心に向かう流れが存在する。また $|\text{Re}| \alpha$ が無限大の場合には境界層厚さは 0 に近づき速度分布は流路断面で一様となる。

拡大流路の場合は縮小流路の場合とは異なり純粋の外向き流れ以外に内向き流れと外向き流れが混在する。純粋な外向き流れが可能な領域を Fig. 2 に示す。この曲線より右側では純粋な外向き流れは不可能である。例えば $\alpha = \pi/2$ では、 $R_m > 0$ のときは純粋な外向き流れは不可能となる。 R_m が大となると限界線は

$$\alpha R_m = 10.31$$

の曲線に漸近する。

Rosenhead⁽¹⁰⁾ は(3)式を詳しく吟味し、種々の流れの起こり得る限界を求めた。その流れの一例を Fig. 3 に示す。要するに、与えられた α と Re に応じて、様々な型の流れが可能となる。しかし、実際には外向き流れ内向き流れの混在する多重流れは不安定性のために存在し得ないであろう。また、現実には 1 つの流路内に複雑な圧力分布は存在し得ないことからより単純な流れになるものと考えられる。

本報告はそのような複雑な流れを取り扱うことを目的としていない。また、後に述べるように流路内に速度がゼロとなる点が存在すると固有関数展開法を用いることができない。それらの理由から、本報告では流れが純粋に外向き流れの場合のみの熱伝達を取り扱うことにする。

ここでは速度分布の計算にだ円関数を用いずに差分法を用いて数値的に解いた。Fig. 4 に速度分布を示す。Fig. 4 には縮小流路の速度分布も同時に示されている。 α がゼロに近い場合には破線で示すように放物線分布となる。レイノルズ数 Re と α の積 $\text{Re} \alpha$ が大きくなると壁における速度こう配が小さくなり、 $\text{Re} = 20000$ 、 $\alpha = 0.001$ の場合には壁近くで逆流が生じている。この場合、図からは明らかではないが、流速分布は流路中心で増大し、平均流速と最大流速の比は 2.158 程度となる。

3. 熱 伝 達

流体内部におけるまさつによる発熱、及び流体内部の熱伝導を無視するとエネルギー方程式は次のように書ける。

$$U \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (5)$$

文献(15)と同様に次の量を導入する。

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r/r_0 \\ \xi &= \theta/\alpha \\ \bar{T} &= (T-T_1) \lambda/q_0 r_0 \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

また、

$$\bar{r} = e^{\alpha t} \quad (7)$$

と変換し、(6)、(7)式を(5)式に代入すると (5)式に代わって次式を得る。

$$\frac{1}{4} \text{RePr}g(\xi) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} \quad (8)$$

加熱区間は $r = r_0$ から $r = \infty$ である。従って(6)、(7)式より、これは $t = 0$ から ∞ までが加熱区間となる。

(8)式の形は縮小流路の場合の無次元エネルギー式と比べると符号が異なっていることが分かる。

任意の熱流束に対する解を求めるためには、壁における単位熱流束 $\partial \bar{T} / \partial \xi = \pm 1$ の場合の解を求めなければならない。これは $q \sim 1/r$ に対応する。

(1) $q \sim 1/r$ の場合 (両面加熱)

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \quad : \quad \bar{T} = 0 \\ \xi = \pm 1 \quad : \quad \partial \bar{T} / \partial \xi = \pm 1 \end{array} \right\} \quad (9)$$

解法は文献(15)と同様である。すなわち

$$\bar{T}(t, \xi) = \bar{T}_1(t, \xi) + \bar{T}_2(t, \xi) \quad (10)$$

と表すことができる。ここで \bar{T}_1 は温度助走区間における解、 \bar{T}_2 は発達領域における解である。

$$\bar{T}_2(t, \xi) = t \phi_1(\xi) + \phi_2(\xi) \quad (11)$$

と書くことができる。(11)式を(8)式、(9)式、及び(8)式の積分形に代入すると

$$\phi_1(\xi) = \frac{4}{\text{RePr}} \quad (12)$$

また

$$\frac{d^2 \phi_2}{d \xi^2} = g, \quad \xi = \pm 1 \quad : \quad \frac{d \phi_2}{d \xi} = \pm 1 \quad (13)$$

となる。

$$\text{従って} \quad \bar{T}_2(t, \xi) = \frac{4}{\text{RePr}} t + \phi_2 \quad (14)$$

$\bar{T}_1(t, \xi) = R(t) \cdot \Theta(\xi)$ と変数分離をすると

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR}{dt} + \frac{4}{\text{RePr}} \beta R = 0 \\ \frac{d^2 \Theta}{d \xi^2} + \beta g \Theta = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

(15)式を解いてまとめると

$$\bar{T}(t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \exp\left(-\frac{4}{\text{RePr}} \beta_n t\right) + \frac{4}{\text{RePr}} t + \phi_2(\xi) \quad (16)$$

$t \rightarrow \bar{r}$ に変換すると

$$\bar{T}(\bar{r}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{-4\beta_n/\text{RePr}\alpha} + \frac{4}{\text{RePr}\alpha} \ln \bar{r} + \phi_2(\xi) \quad (16')$$

ここで β_n , $Y_n(\xi)$ は(15)式の固有値及び固有関数である。また C_n は次の式で与えられる。

$$C_n = - \int_{-1}^1 \phi_2 g Y_n d\xi / \int_{-1}^1 g Y_n^2 d\xi \quad (17)$$

Fig. 5に \bar{T}_w と $\ln \bar{r}/\text{RePr}\alpha$ の関係を示す。 $q \sim 1/r$ の場合は Re が増加すると加熱開始点付近では \bar{T}_w の差が大きいが $\ln \bar{r}/\text{RePr}\alpha$ が大きくなるにつれ \bar{T}_w の差は相対的に小さくなる。(16)'式は縮小流路の場合と全く同じ形をしている。また次式が成り立つ

$$\int_{-1}^1 g \phi_2 d\xi = 0 \quad (18)$$

ヌッセルト数は

$$\text{Nu} = 4 / \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \bar{r}^{-4\beta_n/\text{RePr}\alpha} + \phi_2(1) \right\} \quad (19)$$

と求められる。この式も縮小流路の場合と同じ形をしている。 $\bar{r} \rightarrow \infty$ では(19)式の分母第1項はゼロとなり、

$$\text{Nu}_{\infty} = 4 / \phi_2(1) \quad (20)$$

が求められる。

Fig. 6にヌッセルト数 Nu と $4x/\text{RePr}D$ の関係を示す。ここで D は加熱開始点の等価直径 $4r_0\alpha$ である。拡大流路の場合は平行平板のヌッセルト数よりも低くなり、 $\text{Re}\alpha$ が大きくなるとともにヌッセルト数は低くなる。Fig. 7に Nu と $\ln \bar{r}/\text{RePr}\alpha$ の関係を示す。縮小流路の場合には $\bar{r} = 0$ の付近で $\text{Nu} - 4x/\text{RePr}D$ の関係と $\text{Nu} - \ln \bar{r}/\text{RePr}\alpha$ の関係はかなり異なるが、拡大流路の場合にはFig. 6とFig. 7の差は顕著ではない。

Table 1に固有値 β_n と $C_n Y_n(1)$ を様々な Re 数及び α に対して、最初の $n = 10$ まで示す。

(2) $q \sim r^{\delta}$ の場合 (両面加熱)

境界条件は

$$\xi = \pm 1 \text{ で } \partial \bar{T} / \partial \xi = \pm \exp\{\alpha(\delta+1)t\} = \pm \bar{r}^{-\delta+1} \quad (21)$$

(16)式の $\bar{T}(t, \xi)$ を $\bar{T}_0(t, \xi)$ と書くと $q \sim r^{\delta}$ の場合の温度分布は

$$\bar{T}(t, \xi) = \bar{T}_0(t, \xi) + \alpha(\delta+1) \int_0^t \exp\{\alpha(\delta+1)\tau\} \cdot \bar{T}_0(t-\tau, \xi) d\xi \quad (22)$$

と表すことができる。(22)式を計算すると

$$\begin{aligned} \bar{T}(t, \xi) = & \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \exp\{\alpha(\delta+1)t\} \cdot \left\{ \frac{(\delta+1) \text{Re Pr } \alpha}{(\delta+1) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n \exp(-4\beta_n t / \text{Re Pr}) \cdot \left\{ \frac{4\beta_n}{(\delta+1) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} + \\ & \frac{4}{\text{Re Pr } \alpha (\delta+1)} \{ \exp\{\alpha(\delta+1)t\} - 1 \} + \phi_2(\xi) \exp\{\alpha(\delta+1)t\} \end{aligned} \quad (23)$$

$\bar{r} = e^{\alpha t}$ より変換すると

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{r}, \xi) = & \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{-\delta+1} \cdot \left\{ \frac{(\delta+1) \text{Re Pr } \alpha}{(\delta+1) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{-4\beta_n / \text{Re Pr } \alpha} \\ & \cdot \left\{ \frac{4\beta_n}{(\delta+1) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} + \frac{4}{\text{Re Pr } \alpha (1+\delta)} (\bar{r}^{-\delta+1} - 1) + \phi_2(\xi) \bar{r}^{-\delta+1} \end{aligned} \quad (24)$$

この式は縮小流路の場合の温度分布と同じである。混合平均温度及びヌッセルト数は次のように求められる。

$$\bar{T}_M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{T} \cdot g d\xi = \frac{1}{(1+\delta)} \cdot \frac{4}{\text{Re Pr } \alpha} (\bar{r}^{-\delta+1} - 1) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{Nu} = & 4 / \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \bar{r}^{-\frac{4\beta_n}{\text{Re Pr } \alpha} - 1 - \delta} \left\{ \frac{4\beta_n}{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \left\{ \frac{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha}{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} + \phi_2(1) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

壁面熱流速一定、すなわち $\delta = 0$ の場合の \bar{T}_M と $\ln \bar{r} / \text{Re Pr } \alpha$ の関係を Fig. 8 に示す。 $q \sim 1/r$ 、すなわち $\delta = -1$ の場合には $\ln \bar{r} / \text{Re Pr } \alpha$ が大となると $\text{Re } \alpha$ の違いによる \bar{T}_w の差は小さくなるが、 $q = \text{一定}$ の場合には $\ln \bar{r} / \text{Re Pr } \alpha$ が大きくなると $\text{Re } \alpha$ の違いによる \bar{T}_w の差はさらに大きくなること分かる。また、 $\text{Re } \alpha$ が大きくなると、 \bar{T}_w は $\alpha \rightarrow 0$ の場合の \bar{T}_w よりも増加する。これは熱流束一定の場合の縮小流路における \bar{T}_w の振る舞いとは逆である。

さて、 \bar{T} 及び Nu と δ の関係をみてみよう。拡大流路内熱伝達においても縮小流路内熱伝達と同様に $\delta = -1$ を境にして \bar{T} 及び Nu 数の振る舞いは変化する。

$\delta < -1$ の場合には(24)式の $\bar{r}^{-\delta+1}$ は $\bar{r} \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。従って

$$\bar{T}(t, \xi) = \frac{4}{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha} \quad (27)$$

に収束する。この場合は壁温も含めて $\bar{r} \rightarrow \infty$ で一様な流路内温度分布が達成される。

一方、 $\delta \geq -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ で \bar{T} は無限大に発散する。24式から分かるように、温度分布の形が \bar{r} に無関係に相似形となるのは $\delta = -1$ の場合だけである。

Nu数についてみると、 $\delta \geq -1$ の場合には $-4\beta_n/\text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta < 0$ となり26式において $\bar{r} \rightarrow \infty$ で $\bar{r}^{-4\beta_n/\text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta} \rightarrow 0$ となりヌッセルト数は

$$\text{Nu}_\infty = 4 \left/ \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \left\{ \frac{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha}{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} + \phi_2(1) \right) \right. \quad (28)$$

に収束する。

$$\text{ここで } C_n Y_n < 0 \text{ 及び } \frac{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha}{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} > 0 \text{ より}$$

$$\text{Nu}_\infty (\delta > -1) > \text{Nu}_\infty (\delta = -1)$$

となる。

一方、 $\delta < -1$ の場合には $-4\beta_n/\text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta$ の正負はレイノルズ数と α の積 $\text{Re } \alpha$ により異なる。最小固有値の値を β_1 とすると $-4\beta_1/\text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta < 0$ となる $\text{Re } \alpha$ に対しては $\bar{r} \rightarrow \infty$ におけるヌッセルト数は26式で与えられる。しかし、 $-4\beta_1/\text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta > 0$ となる $\text{Re } \alpha$ に対しては、 $\bar{r} \rightarrow \infty$ で26式の分母が ∞ に発散し $\text{Nu}_\infty \rightarrow 0$ となる。

Fig. 9 に $q = \text{一定}$, $\text{Re} = 18500$, $\alpha = 0.001$ の場合の流路内温度分布を示す。24式に $\delta = 0$ を代入すれば直ちに分かるように、 \bar{T} の分布形は \bar{r} の値により異なり、 \bar{r} が大となると壁と流路中央部の温度差はますます拡大される。

Fig. 10 に $q = \text{一定}$, $\alpha = 0.001$ の場合のヌッセルト数と $4x/\text{Re Pr } D$ の関係を示す。実線は $\alpha \sim 0$ の場合の曲線を示したものである。 $q \sim 1/r$ の場合と同様に $\text{Re } \alpha$ が大きくなるとヌッセルト数は、助走区間及び \bar{r} 大の区間の全区間で $\alpha \sim 0$ の値よりも低くなる。しかし、 $\text{Re} \leq 10000$ の範囲では \bar{r} 大 ($4x/\text{Re Pr } D > 0.1$) の領域でのヌッセルト数の差は小さい。また、 $\text{Re} = 18500$ の場合のヌッセルト数は $\alpha \sim 0$ の場合と比べかなり低くなっている。

Fig. 11 は Fig. 10 の横軸に $\ln \bar{r}/\text{Re Pr } \alpha$ を採ったものである。 $\ln \bar{r}/\text{Re Pr } \alpha$ を横軸に採ると $4x/\text{Re Pr } D$ を横軸に採る場合と比べて、横軸が右側に引き伸ばされた形となる。

Fig. 12 に両面加熱の場合の Nu_∞ と $\text{Re } \alpha/4$ の関係を示す。Fig. 12 には縮小流路の場合の Nu_0 と $\text{Re } \alpha/4$ の関係も併わせて示してある。 $\text{Re } \alpha/4$ が負の領域は縮小流路内流れを示している。縮小流路の場合は、 $q \sim 1/r$ に対しては $|\text{Re } \alpha/4|$ が増大すると Nu_0 は増大する。しかし、 $q = \text{const.}$ に対しては Nu_0 は減少し $|\text{Re } \alpha/4| \sim 15.7$ で Nu_0 はゼロとなる。一方、拡大流路の場合は、 $q \sim 1/r$ に対しては $\text{Re } \alpha/4$ が増大すると Nu_∞ は減少する。また $q = \text{const.}$ に対しても Nu_∞ は減少するが、 $q \sim 1/r$ の場合の Nu_∞ と比べると $q = \text{const.}$ の場合の Nu_∞ の方が大きい。これは縮小流路の場合とは逆である。拡大流路の場合 Nu_∞ と $\text{Re } \alpha/4$ の関係を表すグラフは途中で切れているが、その点が純粋な外向き流の限界を示している。

(3) $q \sim 1/r$ の場合 (片面加熱片面断熱)

境界条件は次のように書ける

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ で } \bar{T}(t, \xi) &= 0 \\ \xi = +1, \partial \bar{T} / \partial \xi &= 1, \xi = -1 \text{ で } \partial \bar{T} / \partial \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

基礎式(8)式を(29)式の境界条件の下で片面加熱の場合と同様に解き、 $t \rightarrow \bar{r}$ に変換すると

$$\bar{T}(\bar{r}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{-4\beta_n / \text{RePr}\alpha} + \frac{2}{\text{RePr}\alpha} \ln \bar{r} + \phi_3(\xi) \quad (30)$$

ここで $\phi_3(\xi)$ は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} g &= \frac{d_2 \phi_3}{d \xi^2} \\ \xi = 1 ; \frac{d \phi_3}{d \xi} &= 1, \quad \xi = -1 ; \frac{d \phi_3}{d \xi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

を満たす。

ヌッセルト数は

$$\text{Nu} = 4 / \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \bar{r}^{-4\beta_n / \text{RePr}\alpha} + \phi_3(1) \right\} \quad (32)$$

と表される。

(30)式、(32)式は縮小流路の場合の解と全く同じ形をしている。

Fig. 13 に片面加熱片面断熱の場合のNu数と $\ln \bar{r} / \text{RePr}\alpha$ の関係を示す。実線は $\alpha \sim 0$ の場合のヌッセルト数の分布を示す。両面加熱の場合と同様に $\text{Re}\alpha$ が増加するとヌッセルト数は全加熱区間で平行平板の値より減少することが分かる。

Table 2 に固有値 β_n 及び $C_n Y_n(1)$ を様々なRe数、及び α に対して最初の $n=10$ まで示す。Table 1 と比較すると、片面加熱片面断熱の場合は同じ n に対し両面加熱の場合と比べて固有値が小さいことが分かる。

(4) $q \sim r^\delta$ の場合 (片面加熱片面断熱)

両面加熱の場合と同様に解くと無次元温度及びヌッセルト数は次のように解ける。

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{r}, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{-4\beta_n / \text{RePr}\alpha} \cdot \left\{ \frac{4\beta_n}{(1+\delta)\text{RePr}\alpha + 4\beta_n} \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(\xi) \bar{r}^{\delta+1} \left\{ \frac{(1+\delta)\text{RePr}\alpha}{(1+\delta)\text{RePr}\alpha + 4\beta_n} \right\} + \frac{1}{(1+\delta)} \cdot \frac{2}{\text{RePr}\alpha} \\ &\{ \bar{r}^{\delta+1} - 1 \} + \phi_3(\xi) \bar{r}^{\delta+1} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{Nu} = 4 / \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \bar{r}^{-4\beta_n / \text{RePr} \alpha - 1 - \delta} \left\{ \frac{4\beta_n}{(1+\delta) \text{RePr} \alpha + 4\beta_n} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \left\{ \frac{(1+\delta) \text{RePr} \alpha}{(1+\delta) \text{RePr} \alpha + 4\beta_n} \right\} + \phi_3(1) \right) \quad (34)$$

この場合も \bar{T} 及び Nu 数の式の形は縮小流路の場合と全く同じである。両面加熱の場合と同様に $\delta \geq -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ におけるヌッセルト数は

$$\text{Nu}_{\infty} = 4 / \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \left\{ \frac{(1+\delta) \text{RePr} \alpha}{(1+\delta) \text{RePr} \alpha + 4\beta_n} \right\} + \phi_3(1) \right) \quad (35)$$

に収束する。一方、 $\delta < -1$ の場合には $-4\beta_1 / \text{RePr} \alpha - 1 - \delta < 0$ となる $\text{Re} \alpha$ に対しては Nu_{∞} は(35)式で表される。一方 $-4\beta_1 / \text{RePr} \alpha - 1 - \delta > 0$ となる $\text{Re} \alpha$ に対しては Nu_{∞} は 0 になる。

Fig. 14 に $\delta = 0$ すなわち熱流束一定の場合の Nu と $\ln \bar{r} / \text{RePr} \alpha$ の関係を示す。実線は $\alpha \sim 0$ の場合のヌッセルト数の分布を示したものである。Re α が大となると助走区間では平行平板のヌッセルト数よりも低くなるが \bar{r} が大きくなると逆に平行平板のヌッセルト数よりも高くなる。しかし、 $\text{Re} = 18500$ 、 $\alpha = 0.001$ の場合には \bar{r} 大におけるヌッセルト数は再び減少している。

$\bar{r} \rightarrow \infty$ におけるヌッセルト数 Nu_{∞} と $\text{Re} \alpha / 4$ の関係を示したのが Fig. 15 である。実線は $q \sim 1/r$ の場合を示す。この場合、拡大流では $\text{Re} \alpha / 4$ が増加すると Nu_{∞} は減少する。しかし、 $q = \text{const.}$ の場合には縮小流の場合とは逆に拡大流の場合には、はじめ Nu_{∞} は増大し、極大値に達した後減少する。逆流発生限界における Nu_{∞} はまだ $\text{Re} \alpha / 4 = 0$ のときの Nu_{∞} より大きい。図には $\alpha \sim 0$ の場合と $\alpha = 1$ の場合の Nu_{∞} の違いも示されている。 α が大きいときには $q \sim 1/r$ 、及び $q = \text{const.}$ で拡大流の場合に Nu_{∞} は α が小さいときより低くなることが分かる。

4. 結 論

拡大流路内層流熱伝達を固有関数展開法を用いて解いた結果以下の結論を得た。ここで、流れは Re 及び α が逆流を生じない領域に限定した。

1. 熱流束が $1/r$ で変化する場合には無次元温度は両面加熱の場合、(16)式または(16)'式で、片面加熱片面断熱の場合には(30)式で表される。また、ヌッセルト数は両面加熱及び片面加熱片面断熱の場合、それぞれ(19)式及び(32)式で表される。どちらの場合にもヌッセルト数は平行平板の場合に比べて低下する。Re α が大きくなると低下量は増加する。
2. 熱流束が r^{δ} で変化する場合、無次元温度、ヌッセルト数は両面加熱、片面加熱片面断熱の場合にはそれぞれ(23)、(24)、(26)式及び(33)、(34)式で表される。 $\delta \geq -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ で \bar{T} は無限大に発散するが $\delta < -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ で \bar{T} は(27)式に収束する。ヌッセルト数についてみると $\delta \geq -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ で(28)式に収束する。一方、 $\delta < -1$ の場合には $-4\beta_1 /$

$$\text{Nu} = 4 / \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \bar{r}^{-4\beta_n / \text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta} \left\{ \frac{4\beta_n}{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \left\{ \frac{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha}{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} + \phi_3(1) \right) \quad (34)$$

この場合も \bar{T} 及びNu数の式の形は縮小流路の場合と全く同じである。両面加熱の場合と同様に $\delta \geq -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ におけるヌッセルト数は

$$\text{Nu}_{\infty} = 4 / \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(1) \left\{ \frac{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha}{(1+\delta) \text{Re Pr } \alpha + 4\beta_n} \right\} + \phi_3(1) \right) \quad (35)$$

に収束する。一方、 $\delta < -1$ の場合には $-4\beta_1 / \text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta < 0$ となる $\text{Re } \alpha$ に対しては Nu_{∞} は(35)式で表される。一方 $-4\beta_1 / \text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta > 0$ となる $\text{Re } \alpha$ に対しては Nu_{∞} は0になる。

Fig. 14に $\delta = 0$ すなわち熱流束一定の場合のNuと $\ln \bar{r} / \text{Re Pr } \alpha$ の関係を示す。実線は $\alpha \sim 0$ の場合のヌッセルト数の分布を示したものである。 $\text{Re } \alpha$ が大となると助走区間では平行平板のヌッセルト数よりも低くなるが \bar{r} が大きくなると逆に平行平板のヌッセルト数よりも高くなる。しかし、 $\text{Re} = 18500$ 、 $\alpha = 0.001$ の場合には \bar{r} 大におけるヌッセルト数は再び減少している。

$\bar{r} \rightarrow \infty$ におけるヌッセルト数 Nu_{∞} と $\text{Re } \alpha / 4$ の関係を示したのがFig. 15である。実線は $q \sim 1/r$ の場合を示す。この場合、拡大流では $\text{Re } \alpha / 4$ が増加すると Nu_{∞} は減少する。しかし、 $q = \text{const.}$ の場合には縮小流の場合とは逆に拡大流の場合には、はじめ Nu_{∞} は増大し、極大値に達した後減少する。逆流発生限界における Nu_{∞} はまだ $\text{Re } \alpha / 4 = 0$ のときの Nu_{∞} より大きい。図には $\alpha \sim 0$ の場合と $\alpha = 1$ の場合の Nu_{∞} の違いも示されている。 α が大きいときには $q \sim 1/r$ 、及び $q = \text{const.}$ で拡大流の場合に Nu_{∞} は α が小さいときより低くなることが分かる。

4. 結 論

拡大流路内層流熱伝達を固有関数展開法を用いて解いた結果以下の結論を得た。ここで、流れは Re 及び α が逆流を生じない領域に限定した。

1. 熱流束が $1/r$ で変化する場合には無次元温度は両面加熱の場合、(16)式または(16)'式で、片面加熱片面断熱の場合には(30)式で表される。また、ヌッセルト数は両面加熱及び片面加熱片面断熱の場合、それぞれ(19)式及び(32)式で表される。どちらの場合にもヌッセルト数は平行平板の場合に比べて低下する。 $\text{Re } \alpha$ が大きくなると低下量は増加する。
2. 熱流束が r^{δ} で変化する場合、無次元温度、ヌッセルト数は両面加熱、片面加熱片面断熱の場合にはそれぞれ(23)、(24)、(26)式及び(33)、(34)式で表される。 $\delta \geq -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ で \bar{T} は無限大に発散するが $\delta < -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ で \bar{T} は(27)式に収束する。ヌッセルト数についてみると $\delta \geq -1$ の場合には $\bar{r} \rightarrow \infty$ で(28)式に収束する。一方、 $\delta < -1$ の場合には $-4\beta_1 /$

$\text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta < 0$ となる $\text{Re } \alpha$ に対しては Nu_∞ は (28) 式で表されるが $-4\beta_1 / \text{Re Pr } \alpha - 1 - \delta > 0$ となる $\text{Re } \alpha$ に対しては $\text{Nu}_\infty = 0$ に収束する。 $\text{Nu}_\infty (\delta \geq -1) > \text{Nu}_\infty (\delta = -1)$ の関係が成り立つ。

3. 熱流束一定，すなわち $\delta = 0$ の場合には定性的には $\delta \geq -1$ と同じ振舞をする。定量的にみると両面加熱の場合には，ヌッセルト数は助走区間では平行平板の値より低下する。 \bar{r} が大きい領域では $\text{Re } \alpha$ が大きくなるにつれてヌッセルト数はより低下する傾向を示す。

これに対し片面加熱片面断熱の場合には，助走区間では平行平板のヌッセルト数より下がるが， \bar{r} が大きくなると逆転し，拡大流のヌッセルト数の方が高くなる。

4. これらのことから，拡大流路内層流熱伝達の解析結果は縮小流路内層流熱伝達の結果とはちょうど逆の性質を示していることが分かる。

参 考 文 献

- (1) Siegel R., Sparrow E.M., Hallman T.M.: Appl. Sci. Res., Sec.A, 7, 386-392 (1958)
- (2) Singh S.N.: Appl. Sci. Res., Sec.A, 7, 325-340 (1958)
- (3) Sellars J.R., Tribus M., Klein J.S.: Trans ASME., 78, 441-448 (1956)
- (4) Hatton A.P., Quarmby A.: Int. J. Heat Mass Transfer, 5, 973-980 (1962)
- (5) Lundberg R.E., Mccuen P.A., Reynolds W.C.: Int. J. Heat Mass Transfer, 6, 495-529 (1963)
- (6) Hsu C.J.: Appl. Sci. Res., 17, 359-376 (1968)
- (7) Michelsen M.L., Villadsen J.: Int. J. Heat mass Transfer, 17, 1391-1402 (1974)
- (8) Patel V.C., Head M.R.: J. Fluid Mech., 34, 371-392 (1968)
- (9) Tanaka H., Shimizu J.: Trans. ASME., Ser.C, 99, 682-684 (1977)
- (10) Rosenhead L.: Proc. R. Soc.(London) Ser.A, 175, 436-467 (1940)
- (11) Millsaps K., Pohlhausen K.: J. Aeronaut. Sci., 20, 187-196 (1953)
- (12) Fraenkel L.E.: Proc. R. Soc.(London) Ser.A, 267, 119-138 (1962)
- (13) Sparrow E.M., Starr J.B.: J. Appl. Mech., 87, 684-689 (1965)
- (14) Yang J.W., Price G.N.: Appl. Sci. Res., 21, 361-371 (1972)
- (15) 椎名保顕：原子力誌 , 22, 62-69 (1980)

Table 1 Eigenvalues and constants for diverging flow with both walls heated.

Re = 100, $\alpha = 5 \times 10^{-8}$		Re = 5000, $\alpha = 0.001$		Re = 10000, $\alpha = 0.001$	
n	β_n	CnYn(l)	n	β_n	CnYn(l)
1	12.2527369	- 0.222194	1	12.5250648	- 0.225766
2	45.9512137	- 0.0725185	2	46.6790621	- 0.0749498
3	100.9465197	- 0.0373640	3	102.3818878	- 0.0388327
4	177.1635513	- 0.0232829	4	179.5607734	- 0.0242655
5	274.5076115	- 0.0161162	5	278.1188743	- 0.0168240
6	392.8602413	- 0.0119266	6	397.9334583	- 0.0124635
7	532.0782972	- 0.0092445	7	538.8555572	- 0.00966741
8	691.9937038	- 0.0074134	8	700.7099203	- 0.0077561
9	872.4134248	- 0.00610 8	9	883.2950715	- 0.0063857
10	1073.1195299	- 0.0051266	10	1086.3834159	- 0.0053660

Re = 15000, $\alpha = 0.001$		Re = 18500, $\alpha = 0.001$			
n	β_n	CnYn(l)	n	β_n	CnYn(l)
1	13.8730090	- 0.23072	1	15.4346171	- 0.218361
2	50.4837277	- 0.0831613	2	55.5509695	- 0.0833788
3	109.8896037	- 0.0446448	3	120.2866612	- 0.0465917
4	192.0371797	- 0.0284686	4	209.5349664	- 0.0306382
5	296.8229409	- 0.0199997	5	323.1461701	- 0.0220661
6	424.1042039	- 0.0149529	6	460.9286537	- 0.0168442
7	573.7025971	- 0.0116761	7	622.6485461	- 0.0133883
8	745.4055311	- 0.00941436	8	808.0301953	- 0.0109621
9	938.9669552	- 0.00778003	9	1016.7562494	- 0.00918192
10	1154.1078145	- 0.00655610	10	1248.4677830	- 0.00783003

Table 2 Eigenvalues and constants for diverging flow with one wall heated and one wall adiabatic.

Re = -100, $\alpha = 5 \times 10^{-8}$			Re = 5000, $\alpha = 0.001$			Re = 10000, $\alpha = 0.001$		
n	β_n	CnYn (1)	n	β_n	CnYn (1)	n	β_n	CnYn (1)
1	3.4144614	- 0.332041	1	3.5479891	- 0.325480	1	3.7501612	- 0.315584
2	12.2527365	- 0.111097	2	12.5250648	- 0.112883	2	12.9712811	- 0.114769
3	26.4355902	- 0.0578724	3	26.9046945	- 0.0594748	3	27.6860461	- 0.0615815
4	45.9512126	- 0.0362592	4	46.6790621	- 0.0374749	4	47.8954952	- 0.0391839
5	70.7910984	- 0.0252100	5	71.8409006	- 0.0261385	5	73.5953391	- 0.0274912
6	100.9465174	- 0.0186820	6	102.3818878	- 0.0194163	6	104.7783740	- 0.0205098
7	136.4076983	- 0.0145280	7	138.2922773	- 0.0151186	7	141.4351312	- 0.0160124
8	177.1635474	- 0.0116415	8	179.5607734	- 0.0121327	8	183.5541165	- 0.0128842
9	223.2015287	- 0.0096151	9	226.1744795	- 0.0100252	9	231.1219157	- 0.0106589
10	274.5076057	- 0.0080581	10	278.1188743	- 0.00841198	10	284.1232489	- 0.00896195

Re = 15000, $\alpha = 0.001$			Re = 18500, $\alpha = 0.001$		
n	β_n	CnYn (1)	n	β_n	CnYn (1)
1	4.1085483	- 0.297646	1	4.6300720	- 0.269839
2	13.8730090	- 0.115360	2	15.4346171	- 0.109181
3	29.3283227	- 0.0639881	3	32.4103967	- 0.0625219
4	50.4837277	- 0.0415806	4	55.5509695	- 0.0416894
5	77.3392035	- 0.0295928	5	84.8470614	- 0.0303076
6	109.8896037	- 0.0223224	6	120.2866612	- 0.0232958
7	104.1261646	- 0.0175646	7	161.8550662	- 0.0186215
8	148.0371797	- 0.0142343	8	209.5349064	- 0.0153191
9	241.6083429	- 0.0118303	9	263.3061613	- 0.0128880
10	296.8229409	- 0.00999985	10	323.1461701	- 0.0110331

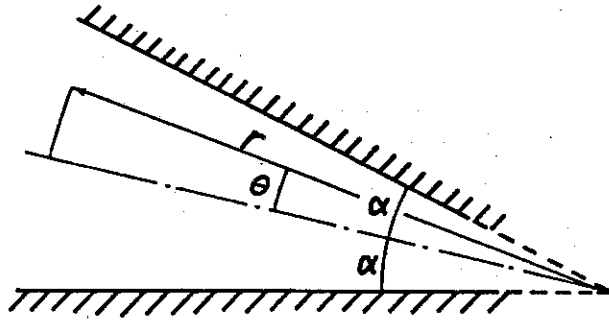


Fig. 1 A model for analysis

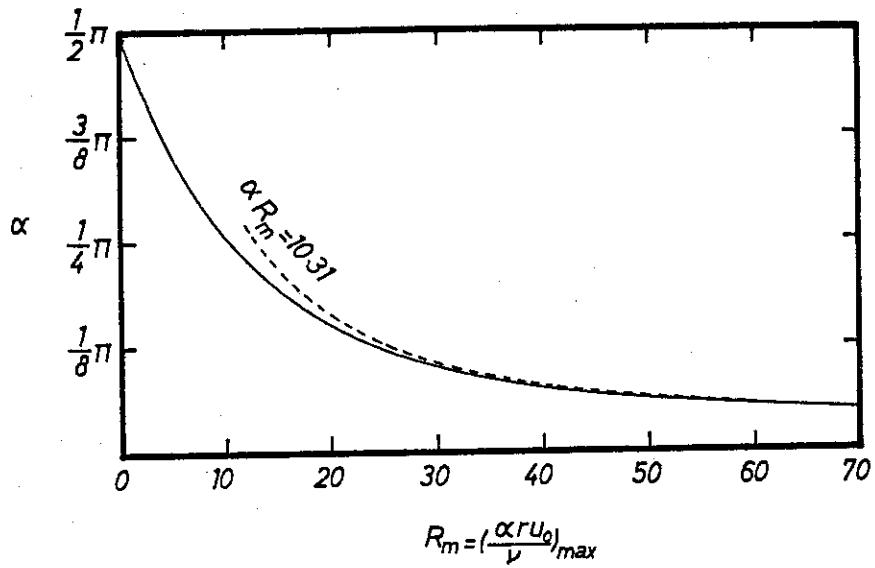


Fig. 2 Relation between α and R_m when pure outflow can exist

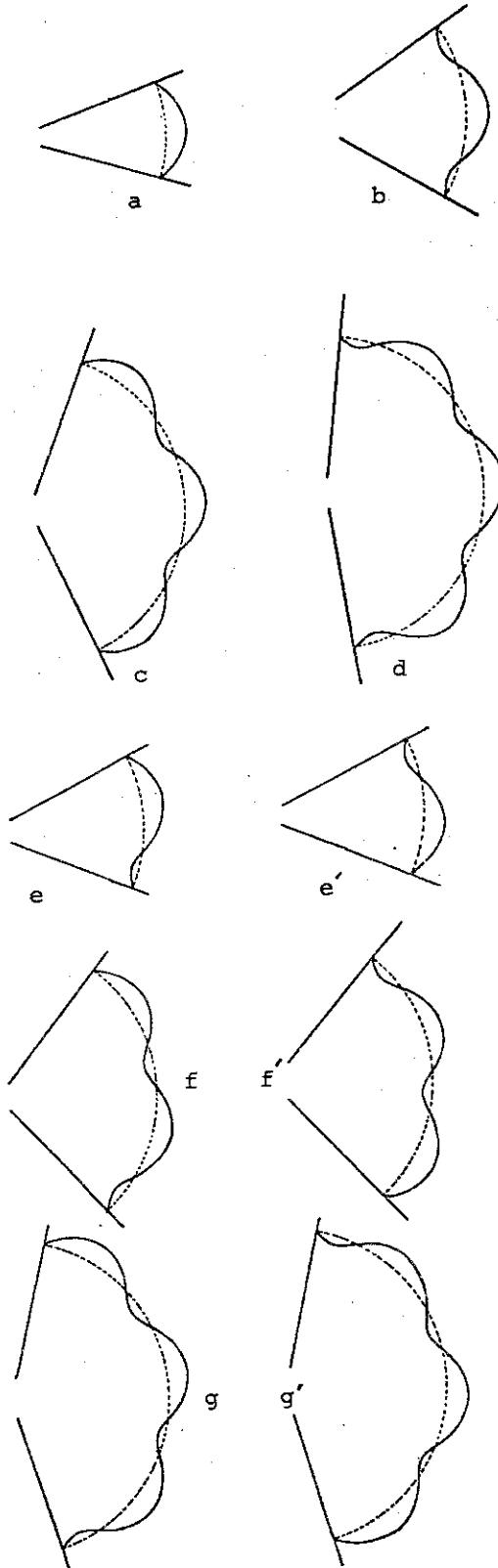


Fig. 3 Some examples of velocity profiles in divergent channels

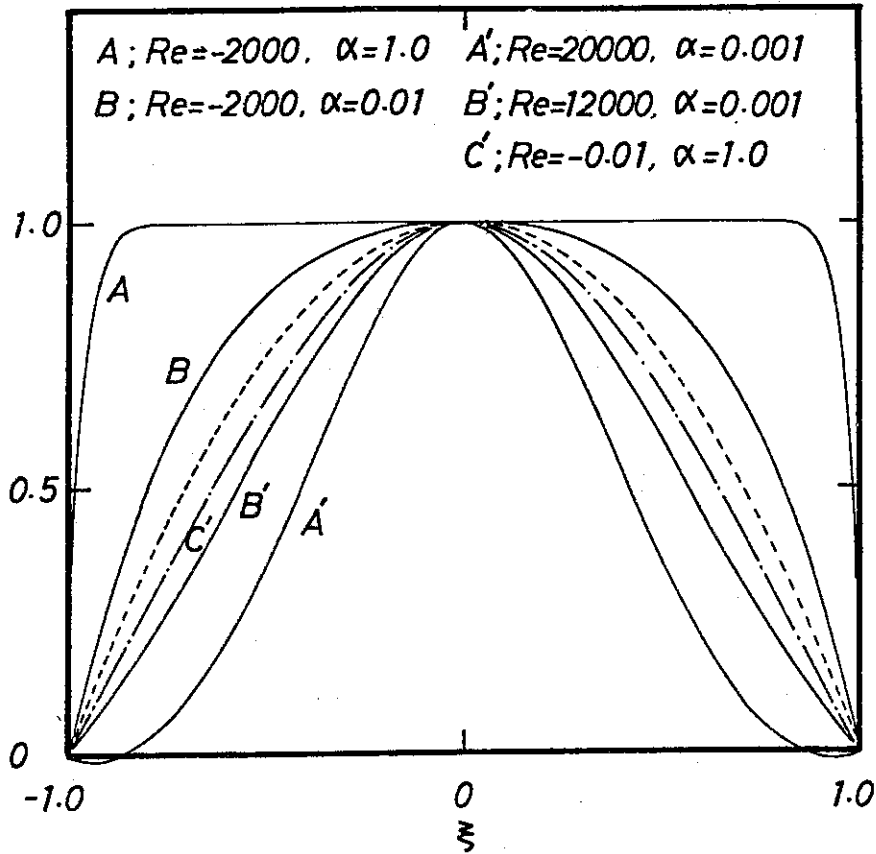


Fig. 4 Velocity profiles in tapered passages. The dotted line is the poiseuille parabola

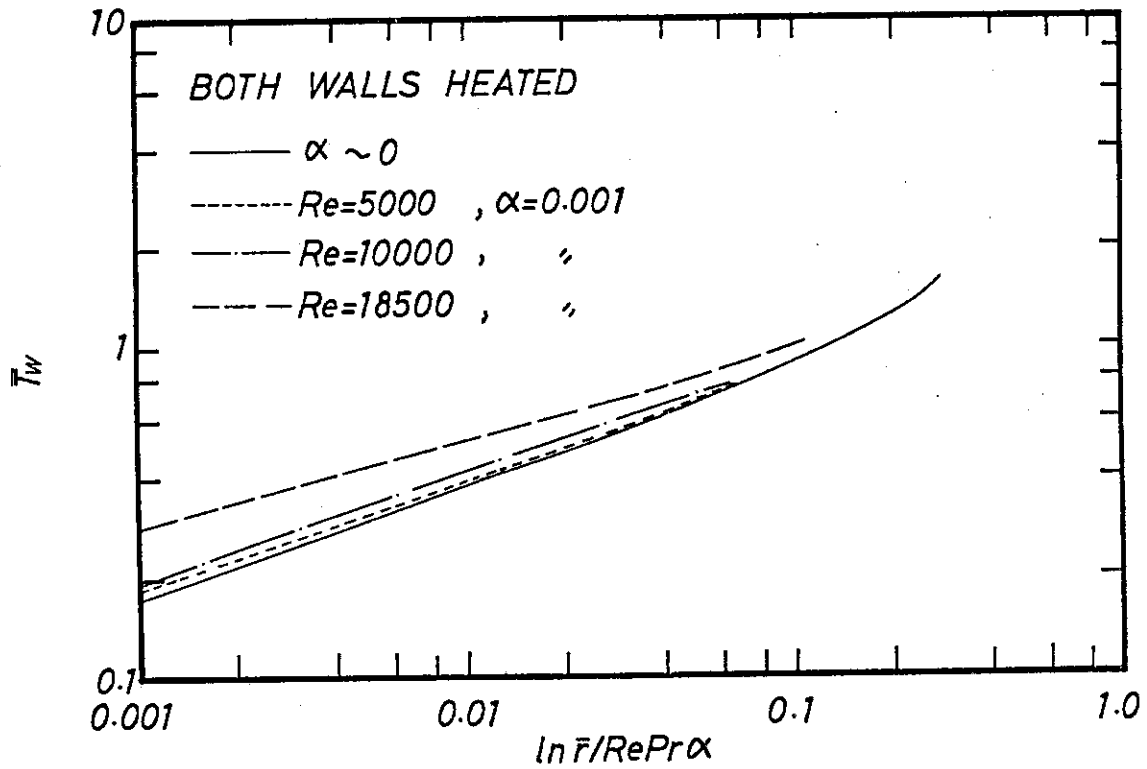


Fig. 5 Relation between \bar{T}_w and $\ln \bar{r} / Re Pr \alpha$ with both walls heated as $q l/r$

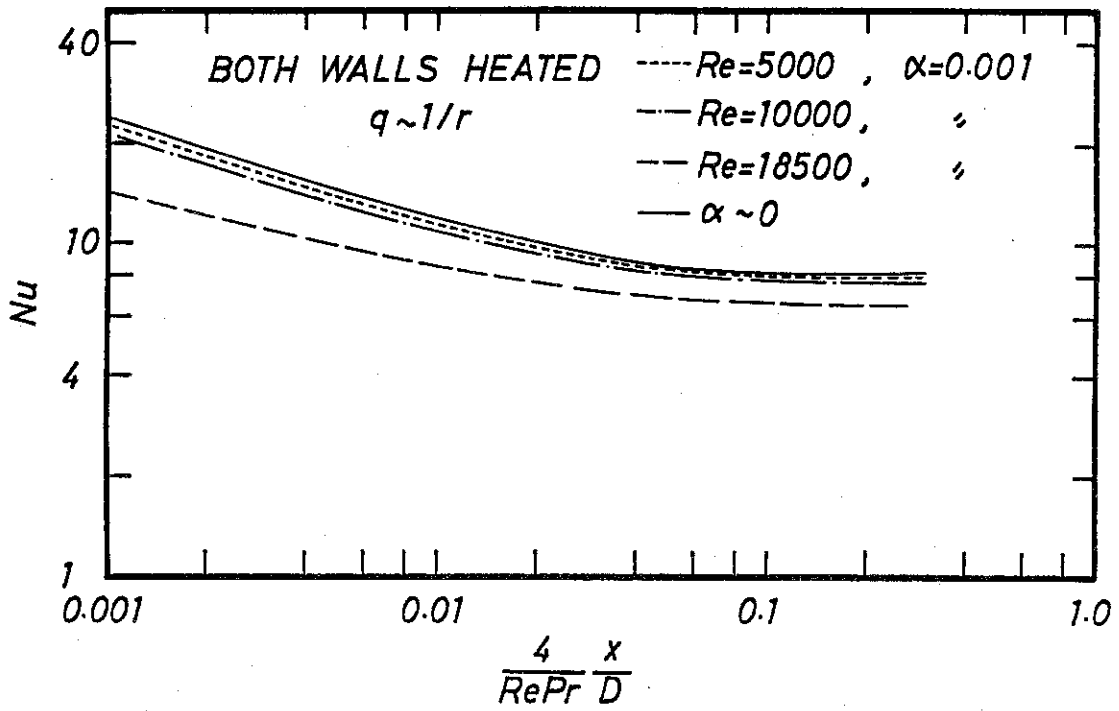


Fig. 6 Relation between Nu and $4x/RePrD$ with both walls heated as $q \sim 1/r$

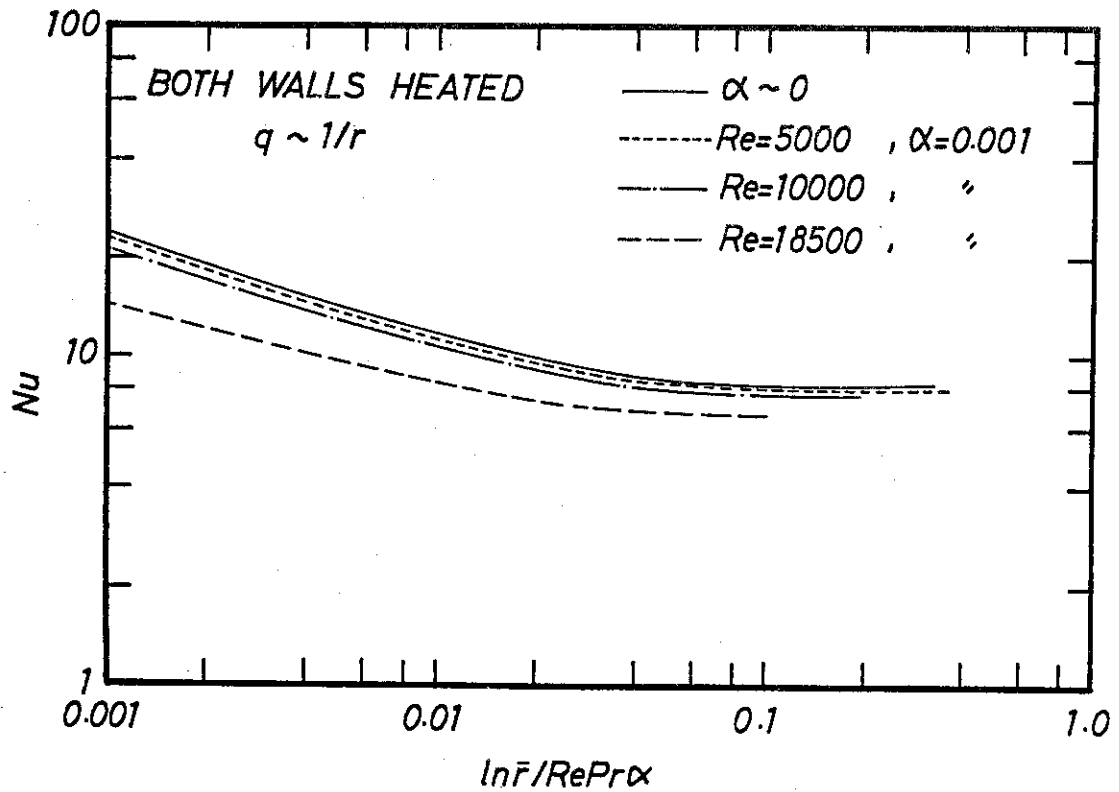


Fig. 7 Relation between Nu and $\ln \bar{r}/RePr\alpha$ with both walls heated as $q \sim 1/r$

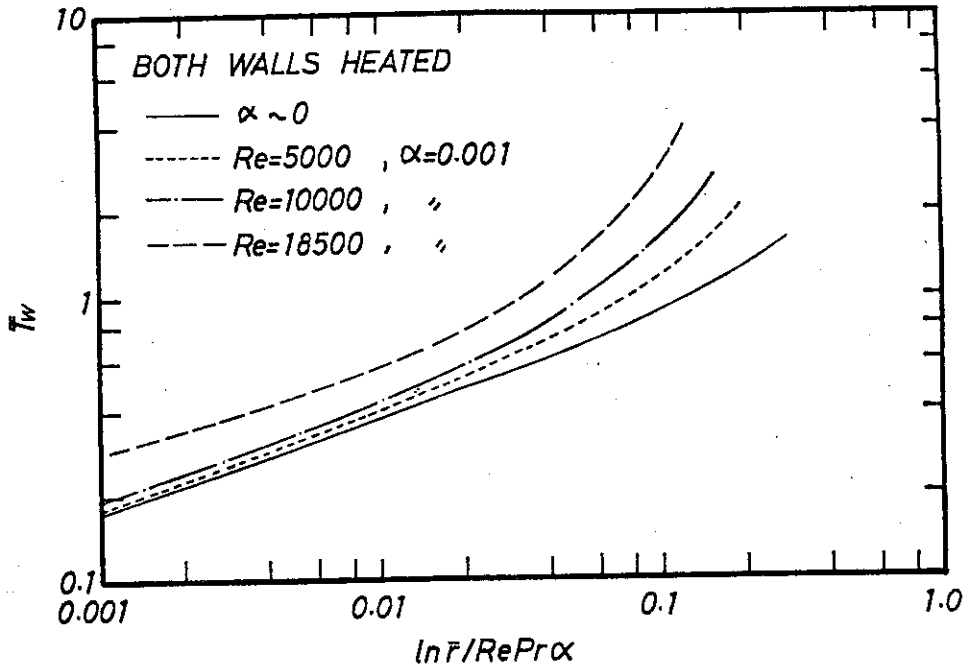


Fig. 8 Relation between \bar{T}_w and $\ln \bar{r}/RePr\alpha$ with constant heat flux on both walls

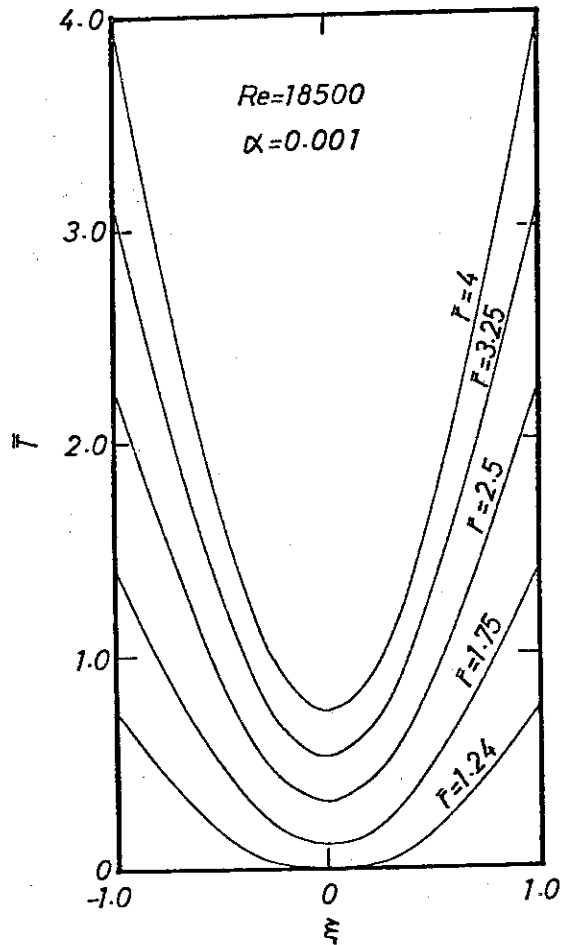


Fig. 9 Dimensionless temperature distributions in diverging plane-walled channels at $Re=18500$ and $\alpha=0.001$ with constant heat flux on both walls

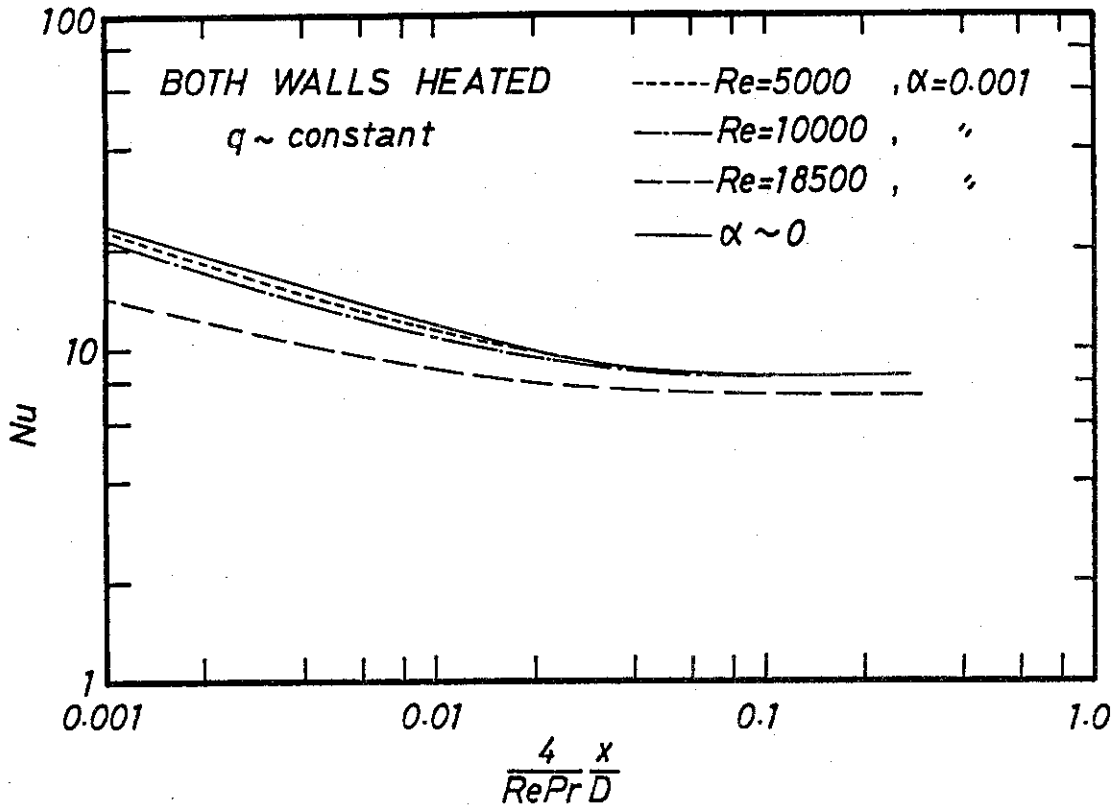


Fig. 10 Relation between Nu and $4x/RePrD$ with constant heat flux on both walls

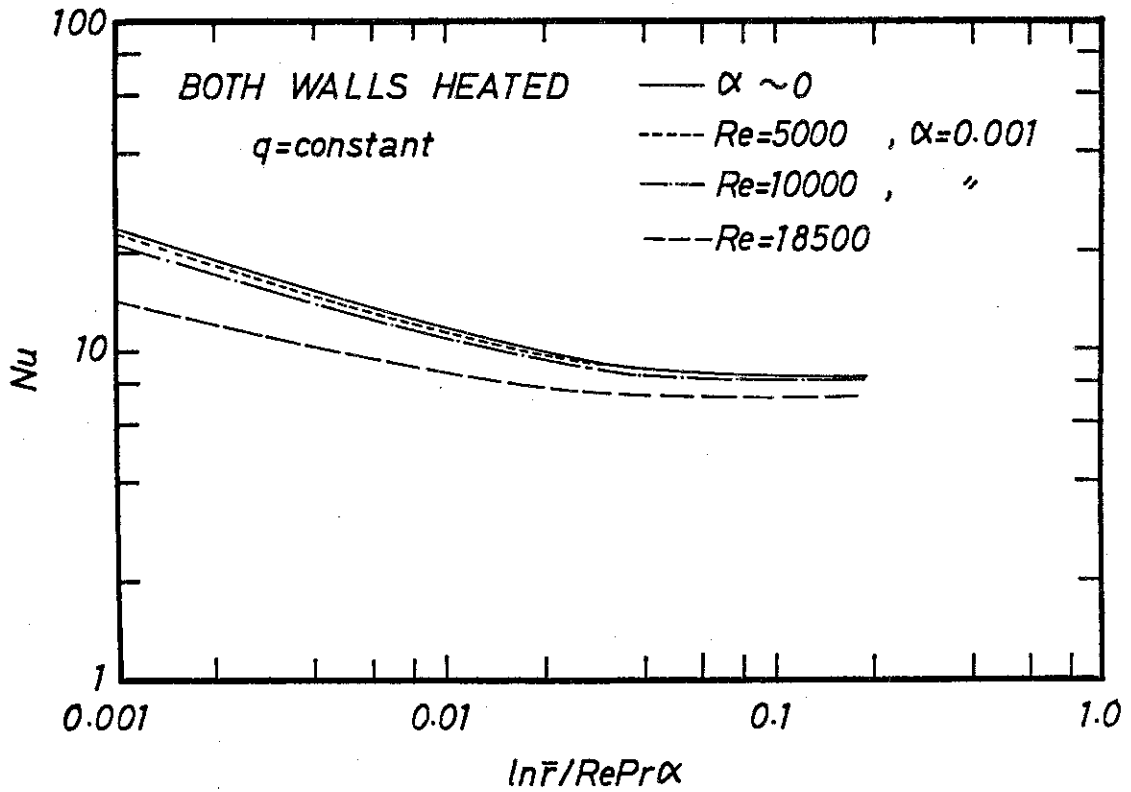


Fig. 11 Relation between Nu and $\ln \bar{r}/RePr\alpha$ with constant heat flux on both walls

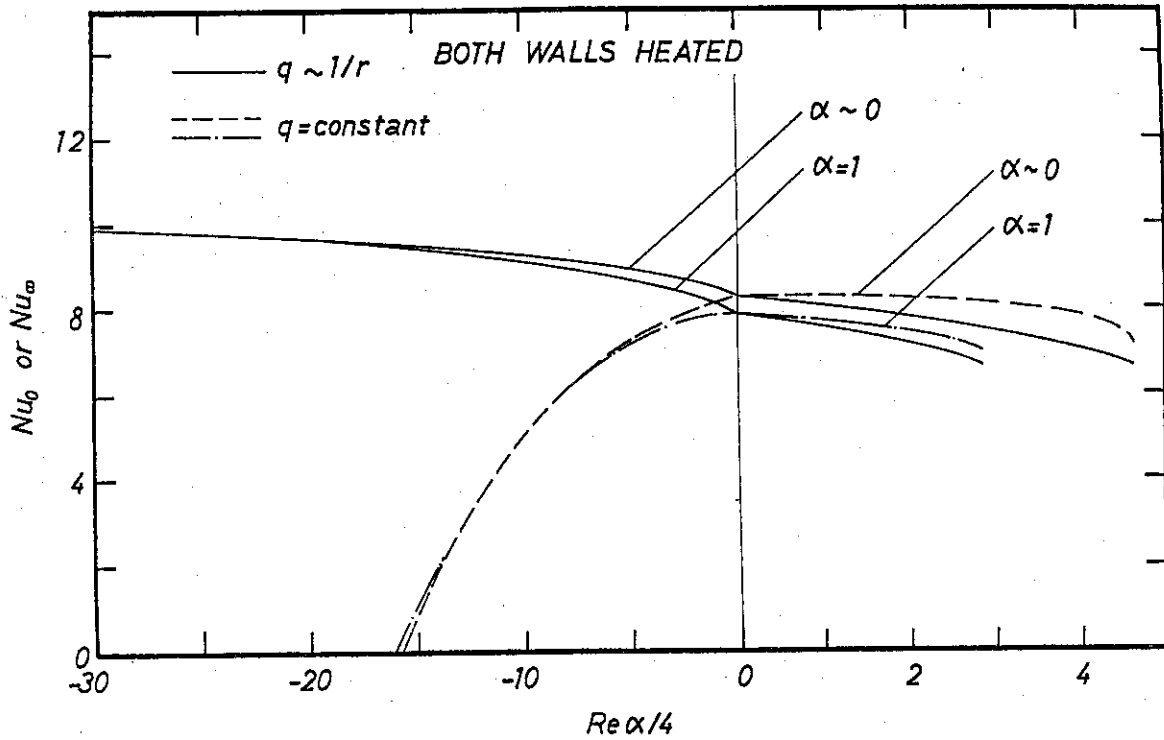


Fig. 12 Relation between Nu_∞ and $Re\alpha/4$ as a parameter of α with both walls heated

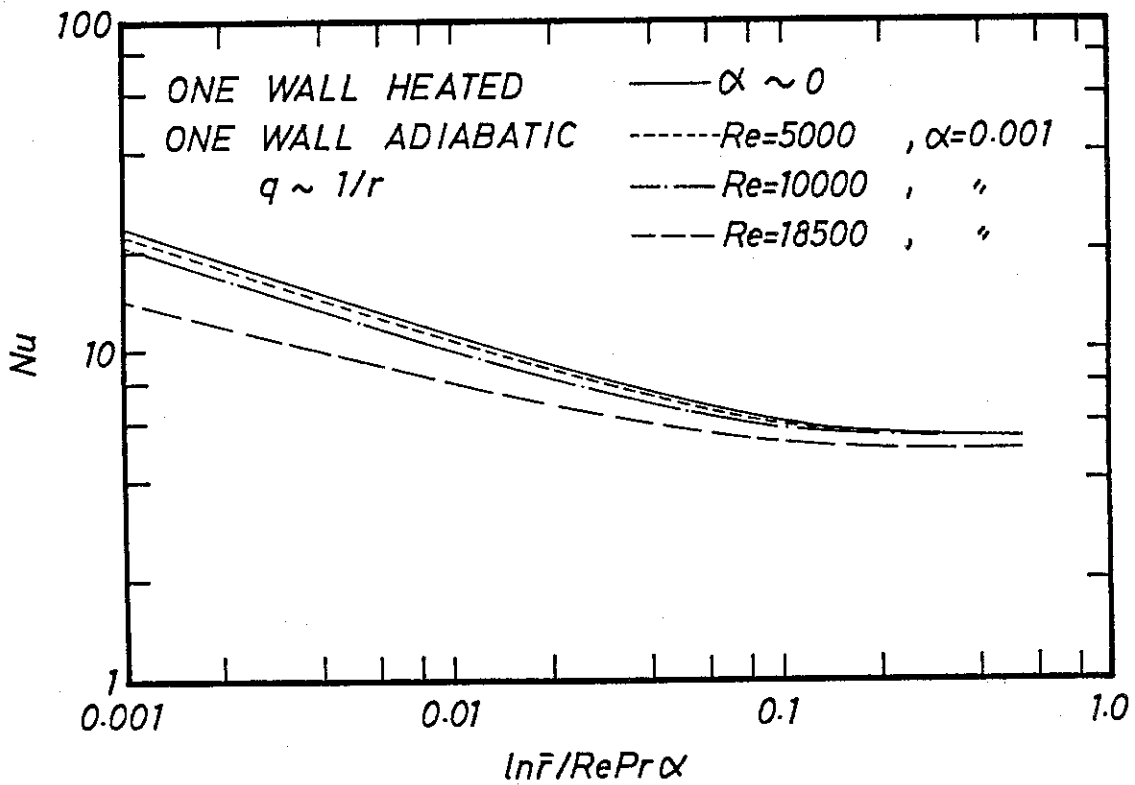


Fig. 13 Relation between Nu and $\ln \bar{r} / Re Pr \alpha$ with one wall heated as $q \sim 1/r$ and one wall adiabatic

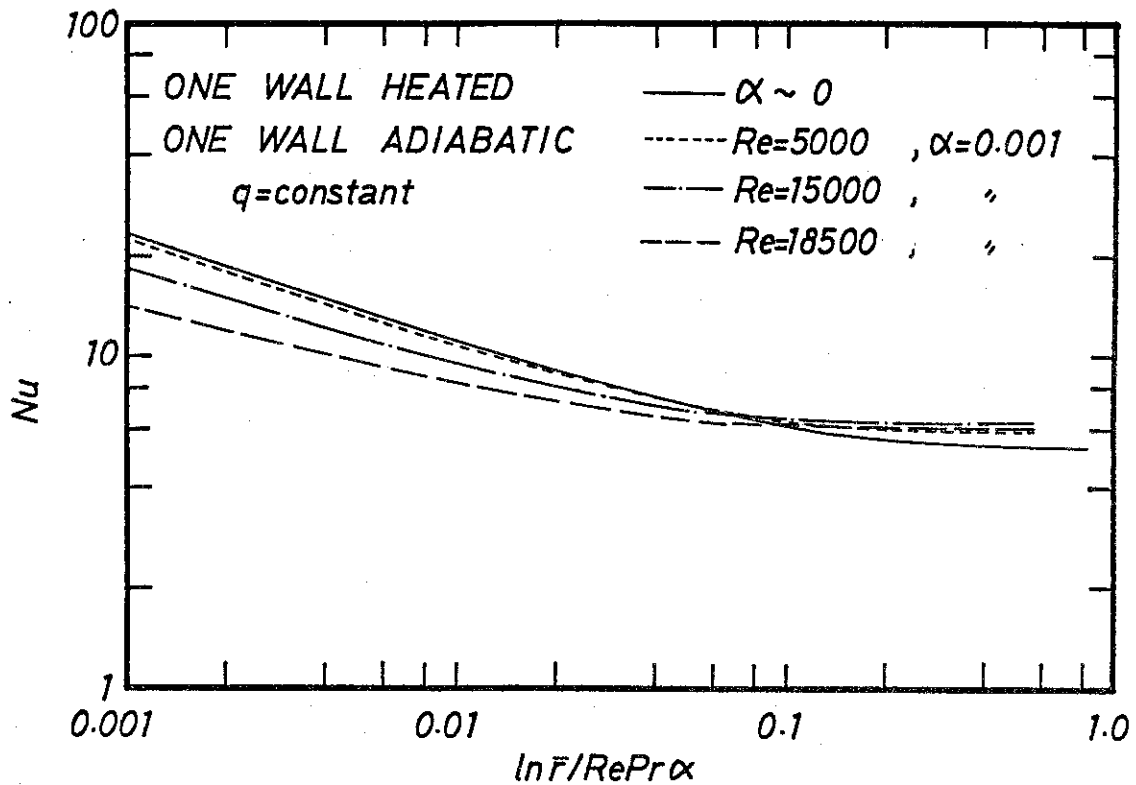


Fig. 14 Relation between Nu and $\ln \bar{r} / Re Pr \alpha$ with constant heat flux on the one wall and one wall adiabatic

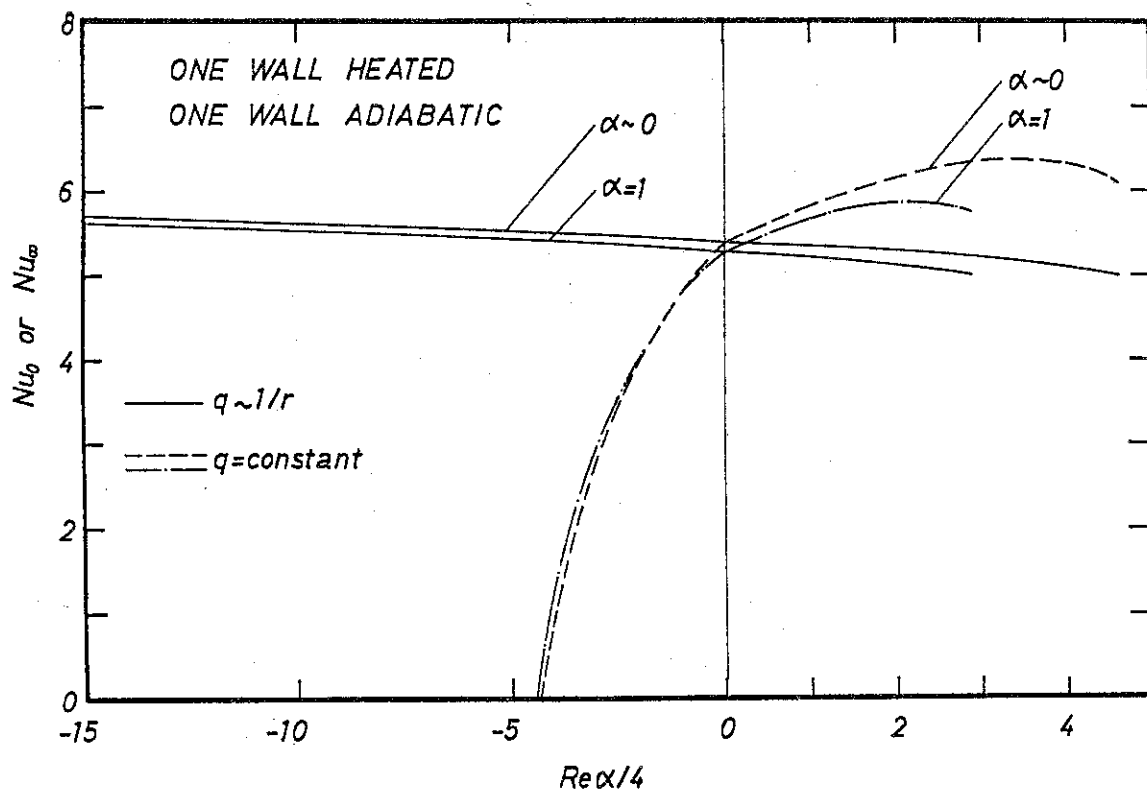


Fig. 15 Relation between Nu_∞ and $Re \alpha / 4$ as a parameter of α with one wall heated and one wall adiabatic