

JAERI-M

9612

多連続導体トラス系における渦電流解析
(臨界プラズマ試験装置設計報告・90)

1981年8月

中村 幸治・小関 隆久

この報告書は、日本原子力研究所が JAERI-M レポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

多連続導体トーラス系における過電流解析
(臨界プラズマ試験装置設計報告・90)

日本原子力研究所東海研究所大型トカマク開発部
中村幸治・小関隆久

(1981年7月21日受理)

鉄心のない大型トカマク装置において、トーラス状の真空容器、トロイダルコイル、架台、中心支柱及び受動状態にあるポロイダルコイル等に流れる渦電流、誘導電流を導体間相互の磁氣的結合を考慮し求めるため、有限要素回路理論による定式化を行った。それぞれの導体曲面は薄板で近似できるものとし、導体曲面間相互の磁氣的結合をそれぞれの導体曲面上渦電流固有モード間結合の形でエネルギー積分により求め、多連続導体トーラス系全体に対する回路方程式を立て再び固有値展開法により解くこととした。

この方法は、トーラス断面形状、アスペクト比、抵抗の不均一性等に対する制限を受けない有限要素回路法の利点をそのまま保ち、さらにまた、トカマク装置を構成する構造物の数に対しても制限を受けない。

本報告の定式化によって数多くの構造物からなるトカマク装置実体系の渦電流解析が定量的に行える為、大型トカマク装置で問題となる電磁力評価、プラズマ断面形状及び位置制御特性に対する渦電流磁場効果について、精度良く議論することが可能である。

Analysis of the Eddy Current in Multi-shell Torus System

Yukiharu NAKAMURA and Takahisa OZEKI

Division of Large Tokamak Development,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received July 21, 1981)

In a large tokamak device without an iron core, the formulation of the eddy current or the induced current on torus components such as a vacuum vessel, toroidal coils, support structures, a center column and passive poloidal coil groups has been carried out according to the finite element circuit theory. Assuming an each conductive plate to be infinitely thin, the magnetic interaction between conductive surfaces is obtained by the energy integration for the corresponding eigen mode of eddy current on the respective surface and a set of given circuit equations in this torus system is solved again by the method of eigen value expansion.

Keeping an advantage of the finite element circuit method, i.e. no restriction for the torus cross-section, the aspect ratio, the inhomogeneity of the resistivity of conductive surface, this method gives no restriction for the number of components of the torus system.

Since the present method is applicable to the quantitative analysis of eddy current in the actual tokamak device composed of many components, it will be possible to discuss quantitatively the electromagnetic load and the effects of the eddy current field on the control of a plasma cross-section and its desired position according to the required accuracy.

Keywords; Eddy Current, Multi-shell, Modal Analysis, Energy Integration,
Eigen Mode, Circuit Equation, Conductive Surface,
Tokamak, Finite Element Circuit Method

目 次

1. はじめに.....	1
2. 一般的な曲面上の面電流と回路定数.....	2
3. 固有値解析による回路方程式の解法.....	5
3.1. 回路方程式を固有値解析により解く方法の一般.....	6
3.2. 多連続導体曲面系の回路方程式.....	7
4. 軸対称系における定式化.....	9
4.1. 共に上下対称な2導体曲面系の回路方程式.....	11
4.2. 1つが上下対称でない2導体曲面系の回路方程式.....	14
4.3. 受動コイルシリーズと上下対称な導体曲面が存在する場合.....	18
4.4. 多連続導体トーラス系渦電流解析の実際.....	21
5. まとめ.....	26
参考文献.....	26
Appendix 1 導体曲面間の磁氣的結合.....	27
Appendix 2 導体曲面と軸対称な受動コイルシリーズとの磁氣的結合.....	38

Contents

1. Introduction.	1
2. Surface current on a general conductive surface and the related circuit constants.	2
3. Solution of a set of circuit equations using eigen value analysis.	5
3.1 General description of the solving method of circuit equations by eigen value analysis.	6
3.2 Circuit equations for the system of multi-shell conductive surface. ..	7
4. Formulation in the axisymmetric system.	9
4.1 Circuit equations in the system of double conductive surfaces both of which are symmetric with respect to a horizontal plane.	11
4.2 Circuit equations in the system of double conductive surfaces one of which is nonsymmetric with respect to a horizontal plane.	14
4.3 System of a conductive surface symmetric with respect to a horizontal plane and passive coil series.	18
4.4 Discussion of the eddy current analysis in a torus system of multi- shell conductive surfaces.	21
5. Conclusion.	26
References	26
Appendix 1. Magnetic coupling between conductive surfaces	27
Appendix 2. Magnetic coupling between a conductive surface and axisymmetric coil series in its passive state	38

1. はじめに

大型トカマク装置では、真空容器、架台等に誘起される渦電流が、構造強度上、プラズマ位置断面形状制御上無視できない大きさとなることから、いくつかの解析およびモデル実験等が試みられてきた。^{1, 2, 3)} 一般に大型トカマク装置ではその主要な構造物である真空容器、トロイダルコイル、架台等は複雑な構造を有しており、必然的に渦電流解析も困難となる。このため解析の実際にあたっては装置実体系の合理的なモデル化が不可欠となる。渦電流解析の必要性が強く認識されはじめた頃においては、トーラス効果は無視するか、又は逆アスペクト比による展開を用いて近似的にその導体上渦電流を等価な解析関数によって表わされる回路の重ね合せとみなし、与えられた外部起電力に対し過渡的な渦電流変化の解析が行われてきた。^{4, 5)} 導体は系の大きさに比べ十分薄いと考えられるためその厚さを無視するのが一般的である。導体の厚みを考慮した有限要素法による解析は原理としては妥当なものであるが、実際の数値解析では計算容量、計算時間の点で成功をおさめていない様である。

磁氣的に孤立した1つのトーラス状導体曲面に対し、亀有ら¹⁾はその導体を無限小厚さの薄板と仮定し、有限要素回路法を用い渦電流問題を一般的に取扱った。この方法は導体曲面に対応する面を有限の大きさの要素に分割し、各要素間の磁氣的結合をエネルギー積分によって求め、立てられた一連の回路方程式を固有値展開法によって、渦電流を互いに独立な固有モードに分解し、与えられた外部起電力に対しいわゆるモード合成法によって全体の渦電流を求めるものである。全体系に対しそれぞれの構造物の板厚が十分薄いトカマク装置では、必要とする計算精度に対し薄板近似は十分満足できる仮定であると考えられる。又、渦電流問題における亀有らのモード合成法は得られた固有モードを用い任意の外部起電力に対し容易にそのモード毎の応答を調べることができるという利点を有する。この利点は、いわゆる有限差分法にはみられないものであり計算時間の節約という点で十分な成功をおさめた。さらに有限要素回路法の特徴をあげると

- (1) 有限要素法的に導体を要素分割するため、任意の断面形状が取扱える。この場合アスペクト比に束縛されない。
- (2) 導体板には任意の抵抗分布を与えることができる。又、カットや穴を入れる事ができる。等がある。

本報告では、有限要素回路法に基づき多連続導体系に対する渦電流問題への拡張について述べる。実際のトカマク装置は、真空容器、架台、トロイダルコイル、ポロイダルコイル、中心支柱等数多くの構造物から構成されており、これらは互いに磁氣的結合をしているため、詳細な渦電流解析にあたっては導体間相互の磁氣的結合を考慮しながらこれらの構造物を同時に取扱う必要がある。それぞれの構造物は1つの無限に薄い板厚を有する曲面又はその集合体で構成されていると仮定するが、先に述べた様にこの仮定はトーラス体系の大きさに比べその板厚が十分に小さいトカマク装置に対して、要求される渦電流解析の精度の点から十分良い近似であると考えられる。

次章では、一般的な曲面上の面電流を電流ポテンシャルによって表現する方法をふり返り、考察する回路方程式系で必要とするインダクタンス、抵抗、外部起電力をエネルギー積分により求め

る手続きを多連続導体曲面系に対して述べる。第3章では第4章以後で議論する軸対称トーラス系における諸式の具体的な定式化のための準備として、まず固有値解析による回路方程式の解法の一般について述べ、その後多連続導体曲面系の回路方程式が適当な一次変換によりいちどはそれぞれの導体曲面上で定義され、同一の導体曲面上の固有モードに対してのみ互いに磁氣的に独立で、異なる導体曲面間で磁氣的結合をするモード群に対する回路方程式系に変換され得ることを議論する。第4章では、モード行列で表現される受動回路間の磁氣的結合の具体的な定式化を中心に述べる。又、トーラス断面形状の対称性、トロイダル方向の周期性、ポート穴や導体曲面の境界条件が有限要素分割された各格子点上の節点量に対し適当な一次変換により必要最少限に縮退できることを、文献、1) に従い概説する。特殊な場合として一部の導体曲面がポロイダル断面の上下いずれかにしか存在しない場合についても同様の義論によって解析が可能であることをあわせて議論する。本文中で詳しく述べる事が議論の流れをさまたげ、繁雑にすぎると思われる項目については Appendix 1, 2 にて詳しく述べる。

2. 一般的な曲面上の面電流と回路定数

図1に示す様に互いに相異なり決して重ることのない I 個の導体曲面系について考察する。まず、それぞれ対象とする導体曲面 i ($i = 1, 2, \dots, I$) が有限であり、それぞれの曲面上の二次元直交座標 (u_i, v_i) で曲面上の任意の点が一意的に表わされるとする。三次元直角座標 (x, y, z) に対して、

$$\begin{aligned} x &= x(u_i, v_i), \quad y = y(u_i, v_i), \quad z = z(u_i, v_i), \\ i &= 1, 2, \dots, I, \end{aligned} \quad (1-1)$$

の関係を持つとする。曲面 i 上の線素辺 ds_i は、

$$ds_i^2 = f_i^2 du_i^2 + g_i^2 dv_i^2, \quad (1-2)$$

と表わされる。ここで第一次規格量は

$$\begin{aligned} f_i^2(u_i, v_i) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2, \\ g_i^2(u_i, v_i) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v_i}\right)^2, \end{aligned} \quad (1-3)$$

であり、座標線 u_i, v_i が互いに直交することから

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial v_i} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{\partial y}{\partial v_i} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \frac{\partial z}{\partial v_i} = 0, \quad (1-3')$$

が成り立つ。次に u_i, v_i 両方向への単位ベクトルを e_{u_i}, e_{v_i} とすると、それぞれ

る手続きを多連続導体曲面系に対して述べる。第3章では第4章以後で議論する軸対称トーラス系における諸式の具体的な定式化のための準備として、まず固有値解析による回路方程式の解法の一般について述べ、その後多連続導体曲面系の回路方程式が適当な一次変換によりいぢどはそれぞれの導体曲面上で定義され、同一の導体曲面上の固有モードに対してのみ互いに磁氣的に独立で、異なる導体曲面間で磁氣的結合をするモード群に対する回路方程式系に変換され得ることを議論する。第4章では、モード行列で表現される受動回路間の磁氣的結合の具体的な定式化を中心に述べる。又、トーラス断面形状の対称性、トロイダル方向の周期性、ポート穴や導体曲面の境界条件が有限要素分割された各格子点上の節点量に対し適当な一次変換により必要最少限に縮退できることを、文献、1) に従い概説する。特殊な場合として一部の導体曲面がポロイダル断面の上下いずれかにしか存在しない場合についても同様の義論によって解析が可能であることをあわせて議論する。本文中で詳しく述べる事が議論の流れをさまたげ、繁雑にすぎると思われる項目については Appendix 1, 2 にて詳しく述べる。

2. 一般的な曲面上の面電流と回路定数

図1に示す様に互いに相異なり決して重ることのない I 個の導体曲面系について考察する。まず、それぞれ対象とする導体曲面 i ($i = 1, 2, \dots, I$) が有限であり、それぞれの曲面上の二次元直交座標 (u_i, v_i) で曲面上の任意の点が一意的に表わされるとする。三次元直角座標 (x, y, z) に対して、

$$\begin{aligned} x &= x(u_i, v_i), \quad y = y(u_i, v_i), \quad z = z(u_i, v_i), \\ i &= 1, 2, \dots, I, \end{aligned} \quad (1-1)$$

の関係を持つとする。曲面 i 上の線素辺 ds_i は、

$$ds_i^2 = f_i^2 du_i^2 + g_i^2 dv_i^2, \quad (1-2)$$

と表わされる。ここで第一次規格量は

$$\begin{aligned} f_i^2(u_i, v_i) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2, \\ g_i^2(u_i, v_i) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v_i}\right)^2, \end{aligned} \quad (1-3)$$

であり、座標線 u_i, v_i が互いに直交することから

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial v_i} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{\partial y}{\partial v_i} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \frac{\partial z}{\partial v_i} = 0, \quad (1-3')$$

が成り立つ。次に u_i, v_i 両方向への単位ベクトルを e_{u_i}, e_{v_i} とすると、それぞれ

$$\mathbf{e}_{u_i}(u_i, v_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{f_i \partial u_i} \\ \frac{\partial y}{f_i \partial u_i} \\ \frac{\partial z}{f_i \partial u_i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{v_i}(u_i, v_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{g_i \partial v_i} \\ \frac{\partial y}{g_i \partial v_i} \\ \frac{\partial z}{g_i \partial v_i} \end{pmatrix}, \quad (1-4)$$

の三次元成分を持ち、座標線 u_i と v_i は直交するから、同じ位置の \mathbf{e}_{u_i} 、 \mathbf{e}_{v_i} に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{u_i}(u_i, v_i) \cdot \mathbf{e}_{u_i}(u_i, v_i) &= \mathbf{e}_{v_i}(u_i, v_i) \cdot \mathbf{e}_{v_i}(u_i, v_i) = 1, \\ \mathbf{e}_{u_i}(u_i, v_i) \cdot \mathbf{e}_{v_i}(u_i, v_i) &= 0, \end{aligned} \quad (1-5)$$

が成立する。

面 i に対しその法線方向成分を持たない電流 $\mathbf{j}_i(u_i, v_i)$ には涌出しがない

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_i(u_i, v_i) = 0, \quad (1-6)$$

とすると、曲面 i 上で定義される電流ポテンシャル $V_i(u_i, v_i)$ を用い電流ベクトル $\mathbf{j}_i(u_i, v_i)$ を表現することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i(u_i, v_i) &= j_{u_i}(u_i, v_i) \mathbf{e}_{u_i} + j_{v_i}(u_i, v_i) \mathbf{e}_{v_i} \\ &= \frac{1}{g_i} \frac{\partial V_i}{\partial v_i} \mathbf{e}_{u_i} - \frac{1}{f_i} \frac{\partial V_i}{\partial u_i} \mathbf{e}_{v_i}. \end{aligned} \quad (1-7)$$

さて、有限曲面 i 上の全領域で定義された互いに独立な関数列 $a_{in}(u_i, v_i)$ によって、電流ポテンシャル $V_i(u_i, v_i)$ が

$$V_i(u_i, v_i) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in}(u_i, v_i) V_{in} \quad (1-8)$$

の様に一次結合の形に展開できるとする。(1-8)式を(1-7)式に代入することにより

$$j_{u_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g_i} \frac{\partial a_{in}}{\partial v_i} V_{in} \right), \quad (1-9)$$

$$j_{v_i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{f_i} \frac{\partial a_{in}}{\partial u_i} V_{in} \right),$$

となる。

I 個の曲面からなる曲面系において、電流による全磁気エネルギー U は

$$U = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I \iint \frac{\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{j}_{i'}}{r_{ii'}} ds_i ds_{i'}, \quad (1-10)$$

によって計算できる。ここで μ_0 は真空の透磁率であり、 $j_i = j_i(u_i, v_i)$ 、 $j_{i'} = j_{i'}(u_{i'}, v_{i'})$ である。また $r_{ii'}$ は曲面 i 上の点 (x_i, y_i, z_i) と曲面 i' 上の点 $(x_{i'}, y_{i'}, z_{i'})$ との間の距離で

$$r_{ii'}(u_i, v_i; u_{i'}, v_{i'}) = \sqrt{(x_{i'} - x_i)^2 + (y_{i'} - y_i)^2 + (z_{i'} - z_i)^2}, \quad (1-11)$$

である。 $ds_i = f_i g_i du_i dv_i$ 、 $ds_{i'} = f_{i'} g_{i'} du_{i'} dv_{i'}$ で、積分は (u_i, v_i) 、 $(u_{i'}, v_{i'})$ を i, i' 曲面それぞれに対し全領域で行う。以上の考察から V_{in} と $V_{i'n'}$ との間のインダクタンス $M_{in, i'n'}$ は

$$\begin{aligned} M_{in, i'n'} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{r_{ii'}} \left\{ f_i f_{i'} \frac{\partial a_{in}}{\partial v_i} \frac{\partial a_{i'n'}}{\partial v_{i'}} \mathbf{e}_{ui} \cdot \mathbf{e}_{ui'} \right. \\ & - f_i g_{i'} \frac{\partial a_{in}}{\partial v_i} \frac{\partial a_{i'n'}}{\partial u_{i'}} \mathbf{e}_{ui} \cdot \mathbf{e}_{vi'} \\ & - f_i g_i \frac{\partial a_{in}}{\partial u_i} \frac{\partial a_{i'n'}}{\partial v_{i'}} \mathbf{e}_{vi} \cdot \mathbf{e}_{ui'} \\ & \left. + g_i g_{i'} \frac{\partial a_{in}}{\partial u_i} \frac{\partial a_{i'n'}}{\partial u_{i'}} \mathbf{e}_{vi} \cdot \mathbf{e}_{vi'} \right\} du_i dv_i du_{i'} dv_{i'}, \quad (1-12) \end{aligned}$$

と表わすことができる。

同様の議論により、曲面 i 上のジュール損失から導体曲面 i 上の V_{in} と V_{im} 間の相互抵抗 R_{nm}^i が、また、外部からの磁場が加わり曲面 i 上の電流との磁氣的結合がある場合、相互磁気エネルギーを考えることにより V_{in} に対する起電力 e_{in} が求まる。単位時間当りの全ジュール損失は、

$$W = \sum_{i=1}^I \iint \left\{ \eta^{u_i} (j_{u_i})^2 + 2 \eta^{u_i v_i} j_{u_i} j_{v_i} + \eta^{v_i} (j_{v_i})^2 \right\} ds_i, \quad (1-13)$$

となる。ここで、 $\eta^{u_i}(u_i, v_i)$ 、 $\eta^{u_i v_i}(u_i, v_i)$ 、 $\eta^{v_i}(u_i, v_i)$ は曲面 i の面電気抵抗率で

あり、その行列 $\begin{pmatrix} \eta^{u_i} & \eta^{u_i v_i} \\ \eta^{v_i u_i} & \eta^{v_i} \end{pmatrix}$ は正値対称行列である。互いに異なる導体曲面 i, i' ($i \neq i'$)

の V_{in} と $V_{i'n'}$ との相互抵抗は常に零である。従って、相互抵抗 R_{nm}^i は

$$\begin{aligned} R_{nm}^i = & \iint \left(\eta^{u_i} \frac{f_i}{g_i} \frac{\partial a_{in}}{\partial v_i} \frac{\partial a_{im}}{\partial v_i} - 2 \eta^{u_i v_i} \frac{\partial a_{in}}{\partial v_i} \frac{\partial a_{im}}{\partial u_i} \right. \\ & \left. + \eta^{v_i} \frac{g_i}{f_i} \frac{\partial a_{in}}{\partial u_i} \frac{\partial a_{im}}{\partial u_i} \right) du_i dv_i, \quad (1-14) \end{aligned}$$

となる。外部からの磁場が導体曲面 i 上でベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(u_i, v_i)$ にて表わされる時、全相互磁気エネルギーは、

$$U_M = \sum_{i=1}^I \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_i ds_i, \quad (1-15)$$

となる。従って V_{in} に対する外部起電力 e_{in} は

$$e_{in} = \iint (f_i \frac{\partial a_{in}}{\partial v_i} A_{ui} - g_i \frac{\partial a_{in}}{\partial u_i} A_{vi}) du_i dv_i, \quad (1-16)$$

となる。ここで、 A_{ui} 、 A_{vi} はそれぞれ \mathbf{A} の u_i, v_i 方向成分である。一般に $M_{in, i'n'}$ 、 R_{nm}^i は時間的に変化せず、 e_{in} は時間的に変化する既知関数である。プラズマの位置、断面形状、電流分布等が未知であって時間とともに変化する場合、後述する固有値解析の回路方程式への応用はできない。

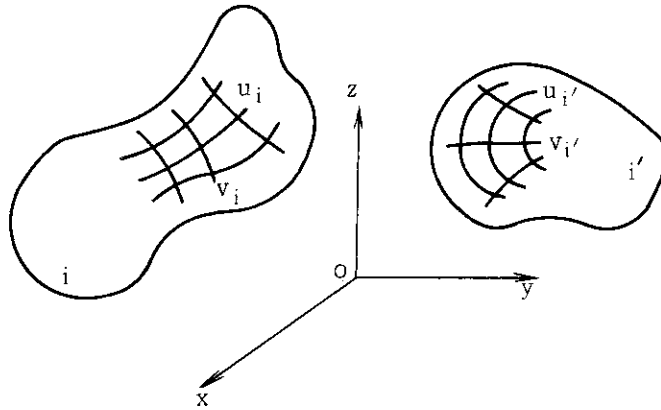


図1 曲面系と座標系。(x, y, z) は空間の三次元直角座標、(u_i, v_i) は曲面 i 上の二次元直交座標。

3. 固有値解析による回路方程式の解法

この章では、前章の定式化によって得られた係数行列 M 、 R および既知列ベクトル \mathbf{E} からできるトーラス曲面系に対する回路方程式について考察する。初めに、有限次元の連立一階線型常微分方程式に対する、固有値解析の一般について述べ、続いて、多連続導体曲面系の過電流問題が、その考察過程の中で、いちどは各導体曲面上でのみ定義され、その曲面上で互いに直交する固有モードを用いて全体系に対する回路方程式として表わされることを述べる。この方法は、複数の導体曲面からなるトーラス実体系における渦電流問題において、1つの導体曲面に対して得られ

となる。外部からの磁場が導体曲面 i 上でベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(u_i, v_i)$ にて表わされる時、全相互磁気エネルギーは、

$$U_M = \sum_{i=1}^I \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_i ds_i, \quad (1-15)$$

となる。従って V_{in} に対する外部起電力 e_{in} は

$$e_{in} = \iint (f_i \frac{\partial a_{in}}{\partial v_i} A_{ui} - g_i \frac{\partial a_{in}}{\partial u_i} A_{vi}) du_i dv_i, \quad (1-16)$$

となる。ここで、 A_{ui} 、 A_{vi} はそれぞれ \mathbf{A} の u_i, v_i 方向成分である。一般に $M_{in, i'n'}$ 、 R_{nm}^i は時間的に変化せず、 e_{in} は時間的に変化する既知関数である。プラズマの位置、断面形状、電流分布等が未知であって時間とともに変化する場合、後述する固有値解析の回路方程式への応用はできない。

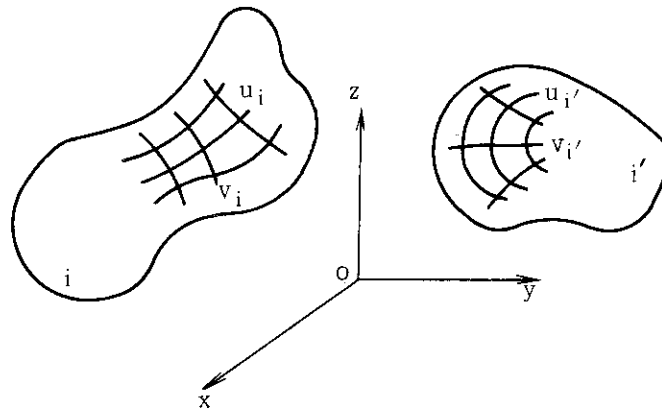


図1 曲面系と座標系。(x, y, z) は空間の三次元直角座標、(u_i, v_i) は曲面 i 上の二次元直交座標。

3. 固有値解析による回路方程式の解法

この章では、前章の定式化によって得られた係数行列 M 、 R および既知列ベクトル \mathbf{E} からできるトーラス曲面系に対する回路方程式について考察する。初めに、有限次元の連立一階線型常微分方程式に対する、固有値解析の一般について述べ、続いて、多連続導体曲面系の過電流問題が、その考察過程の中で、いちどは各導体曲面上でのみ定義され、その曲面上で互いに直交する固有モードを用いて全体系に対する回路方程式として表わされることを述べる。この方法は、複数の導体曲面からなるトーラス実体系における渦電流問題において、1つの導体曲面に対して得られ

た固有モードの内、必ずしも有意でない高次の固有モードを各導体曲面毎に、人為的にけずることができ、適当に選択された各導体上の有限個の等価回路群に対して渦電流問題を考察することができるという利点を有する。しかもこの時、導体曲面系はもとの有限要素に分割されたままである為、良好な計算精度を保っている。

3.1 回路方程式を固有値解析により解く方法の一般

一旦(1-12), (1-14) および(1-16)式により各係数が求めれば電流ベクトルを未知数とする回路方程式を立てることができる。対象とする回路方程式は、実際には無限次元の連立一階線型常微分方程式であるが、解析にあたっては有限個をとらざるを得ない。行列表示を用いて回路方程式は、

$$M \dot{\mathbf{x}} + R \mathbf{x} = \mathbf{E} \quad (2-1)$$

となる。 M はインダクタンス行列、 R は抵抗行列そして \mathbf{E} は外部起電力を意味する既知列ベクトルである。ここで、各曲面 i 上での未知ベクトルの次数を n_i とする。したがって、全体系では $\sum_{i=1}^I n_i = N_I$ 次であるとする。まず固有値問題

$$M \mathbf{x} = R \mathbf{x} D(\tau) \quad (2-2)$$

を考える。ここで $D(\tau)$ は τ をその対角要素とする N_I 次の対角行列である。それぞれ N_I 次の係数行列 M , R はその性質から、実対称行列であり、 R はまた正值である。 N_I 次元ベクトル空間での一次変換 Φ を考える、 Φ は N_I 次の正方行列でありこれをモード行列と呼ぶ。今、電流ベクトル \mathbf{x} を

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (2-3)$$

の形で表わすとする。ここで $\mathbf{q} = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_{N_I}(t)]^T$ であり、 \mathbf{q} を固有電流と呼ぶことにする。 T は転置を意味する。この時(2-1)式は

$$M \Phi \dot{\mathbf{q}} + R \Phi \mathbf{q} = \mathbf{E} \quad (2-4)$$

となり、さらに上式に左側から Φ^T を掛ければ、

$$\Phi^T M \Phi \dot{\mathbf{q}} + \Phi^T R \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{E} \quad (2-5)$$

$$D(\tau) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{E}' \quad (2-5')$$

となる。ここで

$$\mathbf{E}' = (\Phi^T R \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{E} \quad (2-6)$$

である。 \mathbf{E}' を固有起電力と呼ぶことにする。(2-5')式は固有電流、固有起電力の導入により回路方程式(2-1)が各成分毎に互いに独立な方程式に帰着できることを示している。その解は

$$\begin{aligned} \bar{M} &\equiv \Phi^T M \Phi \\ &= \begin{pmatrix} \psi_1^T \xi_1^T & & 0 \\ & \psi_i^T \xi_i^T & \\ 0 & & \psi_l^T \xi_l^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{1i} & M_{1l} \\ & M_{ii} & M_{il} \\ & & M_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \psi_1 & & 0 \\ & \xi_i \psi_i & \\ 0 & & \xi_l \psi_l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1(\tau_1) & & \psi_1^T \xi_1^T M_{1l} \xi_l \psi_l \\ & D_i(\tau_i) & \\ (\psi_1^T \xi_1^T M_{1l} \xi_l \psi_l)^T & & D_l(\tau_l) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2-11)$$

であって、(2-11)式から明らかな様に \bar{M} はやはり対称行列である。この時の回路方程式は、次式で表わされる

$$\bar{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{E}' \quad (2-12)$$

ここで \mathbf{E}' は $\Phi^T \mathbf{E}$ である。(2-12)式の回路方程式は、それぞれの導体曲面上で定義され、同一の導体曲面に属する他の電流モードとは互いに独立な電流モード群から構成される全導体曲面系に対するものを表わす。(2-11)式中の非対角小行列 $\psi_i^T \xi_i^T M_{ij} \xi_j \psi_j$ における要素 $\bar{M}_{in, jm}$ は2つの相異なる導体曲面*i, j*上のそれぞれ固有モード*n, m*間の磁氣的結合を表わし、物理量の次元は秒である。次章で詳しく述べる様にそれは各導体上の電流ポテンシャルで表現された固有ベクトル V_{in}, V_{jm} を用いて以下の様に表わすことができる。

$$\begin{aligned} \bar{M}_{in, jm} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_i \iint_j \frac{1}{r_{ij}} \left\{ f_i f_j \frac{\partial V_{in}}{\partial v_i} \frac{\partial V_{jm}}{\partial v_j} \mathbf{e}_{ui} \cdot \mathbf{e}_{uj} \right. \\ &\quad - f_i g_j \frac{\partial V_{in}}{\partial v_i} \frac{\partial V_{jm}}{\partial u_j} \mathbf{e}_{ui} \cdot \mathbf{e}_{vj} \\ &\quad - f_j g_i \frac{\partial V_{in}}{\partial u_i} \frac{\partial V_{jm}}{\partial v_j} \mathbf{e}_{vi} \cdot \mathbf{e}_{uj} \\ &\quad \left. + g_i g_j \frac{\partial V_{in}}{\partial u_i} \frac{\partial V_{jm}}{\partial u_j} \mathbf{e}_{vi} \cdot \mathbf{e}_{vj} \right\} du_i dv_i du_j dv_j \end{aligned} \quad (2-13)$$

以上の議論から、多数の導体曲面上の渦電流を解析するにあたり、導体曲面を格子化することによってできた有限要素回路に対して、全導体曲面を同時に固有値問題におきかえ解析することも可能であるが、導体間相互の磁氣的結合を無視し、それぞれの導体に対してまず対応する固有値、

固有ベクトルを独立に求め、その後、互いに異なる導体曲面に対してそれら固有モード間の磁気的結合をエネルギー積分により求め、全体系に対する回路方程式を再び固有値解析することが可能であることが解る。後者の方法によれば、それぞれの導体曲面に対して得られた固有モードから、有意の固有モードを人意的に選択し、同様にして得られた他の導体曲面上の固有モードと連立させて全体系に対する回路方程式を立てることができるため、数値解析の実際にあたっては、必要な計算時間、計算容量が大巾に節約できる。

4. 軸対称系における定式化

この章では、鉄心のないトカマク装置における渦電流問題への前記基礎理論の応用について述べる。JT-60等の大型トカマク装置では、一般に導体曲面系は真空容器、トロイダルコイル、架台、中心支柱、その他各種支持構造物から構成されているが、ここでは、これら有限厚さを有する構造物の渦電流解析にあたって、全ての板厚を無視する。さらに軸対称ポロイダルコイルシリーズ、軸対称支持リング等は、その導体断面積が無限に小さい軸対称受動コイルシリーズであると仮定する。

多くのトカマク装置にみられる様に、真空容器等の導体曲面はトーラス方向にある周期性を有しており、この事を利用して電流ポテンシャルの未知数の自由度数を大巾に減らすことが可能である。又、真空容器にあけられた計測用、追加熱用ポート穴やトロイダルコイル、架台等のカットを横切る電流がないという境界条件を用いて同じくその自由度を大巾に減らすことができる。ここで亀有ら¹⁾の議論をふりかえってみると、トーラス方向への周期性から格子点上の対応する電流ポテンシャルが常に等しい事、ポート穴内に位置する格子点やカット上の格子点における電流ポテンシャルが等しい事等の周期条件、境界条件は、回路方程式(2-1)の行列表示された全ての回路定数に対し適当な一次変換 F を行うことにより考慮できる。周期性やポート穴やカットを考慮しないで、式(1-12)、(1-14)、(1-16)により求めた N 行 N 列の係数行列 M 、 R 及び N 次の列ベクトル \mathbf{e} に M 行 N 列の変換行列 F 及び F^T を両側からはさんで、新しい変数列 \mathbf{V}' に対する行列 M' 、 R' 、 \mathbf{e}' は以下の様に表すことができる。

$$\begin{aligned} M' &= F^T M F, \\ R' &= F^T R F, \\ \mathbf{e}' &= F^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3-1)$$

ここで、新しい変数列 \mathbf{V}' と \mathbf{V} との関係は

$$\mathbf{V} = F \mathbf{V}' \quad (3-2)$$

であり、常に $M \leq N$ が成り立つ。

通常の軸対称トーラス系では、導体曲面のポロイダル断面が $z=0$ に関して対称である場合が多く、その場合上で述べた方法と同様に変数の自由度数を大巾に減らすことができる。図2の様に

固有ベクトルを独立に求め、その後、互いに異なる導体曲面に対してそれら固有モード間の磁気的結合をエネルギー積分により求め、全体系に対する回路方程式を再び固有値解析することが可能であることが解る。後者の方法によれば、それぞれの導体曲面に対して得られた固有モードから、有意の固有モードを人意的に選択し、同様にして得られた他の導体曲面上の固有モードと連立させて全体系に対する回路方程式を立てることができるため、数値解析の実際にあたっては、必要な計算時間、計算容量が大巾に節約できる。

4. 軸対称系における定式化

この章では、鉄心のないトカマク装置における渦電流問題への前記基礎理論の応用について述べる。JT-60等の大型トカマク装置では、一般に導体曲面系は真空容器、トロイダルコイル、架台、中心支柱、その他各種支持構造物から構成されているが、ここでは、これら有限厚さを有する構造物の渦電流解析にあたって、全ての板厚を無視する。さらに軸対称ポロイダルコイルシリーズ、軸対称支持リング等は、その導体断面積が無限に小さい軸対称受動コイルシリーズであると仮定する。

多くのトカマク装置にみられる様に、真空容器等の導体曲面はトーラス方向にある周期性を有しており、この事を利用して電流ポテンシャルの未知数の自由度数を大巾に減らすことが可能である。又、真空容器にあげられた計測用、追加熱用ポート穴やトロイダルコイル、架台等のカットを横切る電流がないという境界条件を用いて同じくその自由度を大巾に減らすことができる。ここで亀有ら¹⁾の議論をふりかえってみると、トーラス方向への周期性から格子点上の対応する電流ポテンシャルが常に等しい事、ポート穴内に位置する格子点やカット上の格子点における電流ポテンシャルが等しい事等の周期条件、境界条件は、回路方程式(2-1)の行列表示された全ての回路定数に対し適当な一次変換 F を行うことにより考慮できる。周期性やポート穴やカットを考慮しないで、式(1-12)、(1-14)、(1-16)により求めた N 行 N 列の係数行列 M 、 R 及び N 次の列ベクトル e に M 行 N 列の変換行列 F 及び F^T を両側からはさんで、新しい変数列 V' に対する行列 M' 、 R' 、 e' は以下の様に表すことができる。

$$\begin{aligned} M' &= F^T M F, \\ R' &= F^T R F, \\ e' &= F^T e. \end{aligned} \tag{3-1}$$

ここで、新しい変数列 V' と V との関係は

$$V = F V', \tag{3-2}$$

であり、常に $M \leq N$ が成り立つ。

通常の軸対称トーラス系では、導体曲面のポロイダル断面が $z = 0$ に関して対称である場合が多く、その場合上で述べた方法と同様に変数の自由度数を大巾に減らすことができる。図2の様に

曲面上の直交座標として (φ, ℓ) をとり、対称軸を z 軸とする (r, φ, z) 円筒座標をとる。
 $z = 0$ に関してそのポロイダル断面が上下対称である場合を考える。ポロイダル断面が上下対称
 であることから $\ell^- = -\ell^+$ である。導体曲面に対しそのポロイダル断面形状は

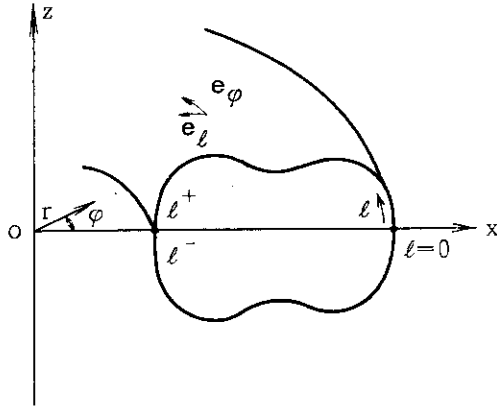


図2 上下対称なトーラス曲面と座標系

$$r = r(\ell), \quad z = z(\ell), \quad (3-3)$$

で表わされ、(1-1)式に対し x 軸を $\varphi = 0$ の方向にとったとすると

$$x = r(\ell) \cos \varphi, \quad y = r(\ell) \sin \varphi, \quad z = z(\ell), \quad (3-4)$$

であり、(1-3)式に対し

$$f = r(\ell), \quad g = 1, \quad (3-5)$$

となる。 ℓ は $\ell^- \leq \ell \leq \ell^+$ の領域をとるとし、 φ は $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ の領域をとるとする。もし
 断面が閉じていれば ℓ^- と ℓ^+ に相当する点は一致し、 $\varphi = -\pi, \pi$ に相当する点は常に一致す
 る。 φ, ℓ それぞれの方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\ell = \begin{pmatrix} \frac{dr}{d\ell} \cos \varphi \\ \frac{dr}{d\ell} \sin \varphi \\ \frac{dz}{d\ell} \end{pmatrix}, \quad (3-6)$$

であり、同一導体曲面上の点 1, 2 に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{e}_{\varphi 2} &= \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \mathbf{e}_{\ell 1} \cdot \mathbf{e}_{\ell 2} &= \frac{dr_1}{d\ell_1} \frac{dr_2}{d\ell_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{dz_1}{d\ell_1} \frac{dz_2}{d\ell_2}, \\ \mathbf{e}_{\varphi 1} \cdot \mathbf{e}_{\ell 2} &= \frac{dr_2}{d\ell_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (3-7)$$

が成立する。上式と同様の関係が相異なる導体曲面間においても成立する。一般の電流ポテンシャル V は導体曲面のポロイダル断面が上下対称であることから、

$$V^+ = \frac{1}{2} \{ V(\varphi, \ell) + V(\varphi, -\ell) \}, \tag{3-8}$$

$$V^- = \frac{1}{2} \{ V(\varphi, \ell) - V(\varphi, -\ell) \},$$

の様に対称、反対称部分に分解できる。4.1節で詳しく述べる様に実際の軸対称系では、対称部分 V^+ と反対称部分 V^- との間の磁氣的結合、抵抗による結合がないため、ポロイダル断面の上下いずれか片方の曲面上の電流ポテンシャル変数に対して、対称部分、反対称部分毎に独立に求めれば良い。この事は、多連続導体曲面系においても2つの相異なる導体曲面間で、それぞれのポロイダル断面が上下対称である限り成り立ち、2導体曲面系での対称部分、反対称部分毎に独立に渦電流を求めれば良い。先に述べた周期性、境界条件に加えて、この様に導体曲面ポロイダル断面の上下対称性を利用してさらに未知自由度数をほぼ半分に減らすことができる。

以下、4.1節で共に上下対称なポロイダル断面を有する2つの導体曲面がある場合について述べ、4.2節でいずれか一方の導体曲面がそのポロイダル断面が $z = 0$ に関し上下いずれか一方にしか存在しない様な2つの導体曲面がある場合について述べ、さらに4.3節では1つの導体曲面と軸対称な受動コイルシリーズがある場合について述べる。4.4節では4.1、4.2、4.3節の議論をまとめ、一般の軸対称系への拡張を試みる。

4.1 共に上下対称な2導体曲面系の回路方程式

図3に示す様にそれぞれのポロイダル断面が共に上下対称で、決して互いに交わる事のない2つの導体曲面について考える。それぞれの導体曲面に対して、それぞれ対称部分、反対称部分に分解された電流ポテンシャルは、同一導体に対するそれぞれ対称部分と反対称部分の結合がな

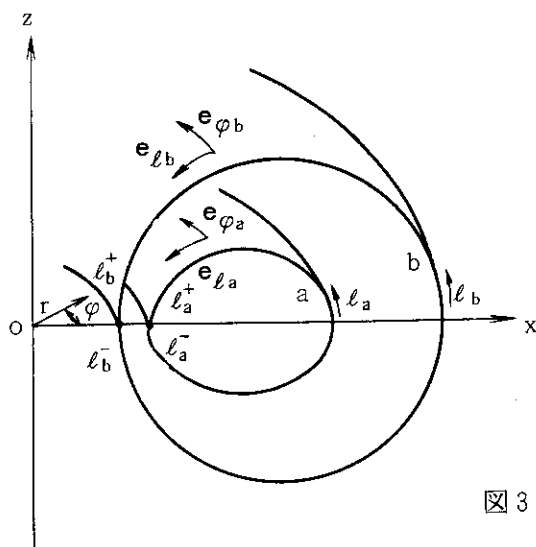


図3 共に上下対称な断面を有する2導体曲面系

い。さらに、以下に述べる様に異なる導体曲面間でも、対称部分是对称部分のみと、反対称部分
は反対称部分のみと結合する。今、曲面 a, b 上の対称部分の電流密度を j_a^+ , j_b^+ , 反対称部
分のそれを j_a^- , j_b^- とすると、各成分に対して

$$\begin{aligned} j_{i\varphi}^+(\varphi_i, -l_i) &= -j_{i\varphi}^+(\varphi_i, l_i), \quad j_{i\ell}^+(\varphi_i, -l_i) = j_{i\ell}^+(\varphi_i, l_i), \\ j_{i\varphi}^-(\varphi_i, -l_i) &= j_{i\varphi}^-(\varphi_i, l_i), \quad j_{i\ell}^-(\varphi_i, -l_i) = -j_{i\ell}^-(\varphi_i, l_i), \end{aligned} \quad (3-9)$$

$i = a, b$

が成立する。ところで、 $e_{\varphi_a} \cdot e_{\varphi_b}$, $e_{\ell_a} \cdot e_{\ell_b}$ が l に関して対称で $e_{\varphi_a} \cdot e_{\ell_b}$, $e_{\ell_a} \cdot e_{\varphi_b}$ が反対称であるから $j_a^+(\varphi_a, l_a) \cdot j_b^-(\varphi_b, l_b) = -j_a^+(\varphi_a, -l_a) \cdot j_b^-(\varphi_b, -l_b)$ となり (1-10) 式の積分は常に零となる。全く同様の議論により j_a^- と j_b^+ との間にも磁氣的結合がない。抵抗による結合は、この場合明らかに零である。以上のことから、2つの相異なる導体曲面系ではそれぞれの対称部分どうし、反対称部分どうしを全く独立に考えれば良いことが解る。これに対し2つの導体曲面の内いずれか一方がポロイダル断面で上下いずれか片方にしか存在しない場合は、その導体曲面にて、対称部分、反対称部分が互いに抵抗を介して結合するため、この系では対称部分と反対称部分とは別々に取扱うことができない。これについては、次節で詳しく述べる。

前章 3.2 節で行った議論により、対称部分、反対称部分について全く同じ形式で、2つの相異なる導体曲面系の回路方程式を

$$\bar{M} \dot{q} + q = E', \quad (3-10)$$

と表わすことができる。ここで

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} D_a(\tau_a) & \bar{M}_{ab} \\ \bar{M}_{ab}^T & D_b(\tau_b) \end{pmatrix}, \quad (3-11)$$

であり、導体曲面 a, b 上の各固有モードのジュール損失は毎秒 1 Joule である。導体曲面 a 上の固有モード V_{an} と導体曲面 b 上の固有モード V_{bm} 間の磁氣的結合 \bar{M}_{ab} は

$$\bar{M}_{ab} = \psi_a^T \xi_a^T M_{ab} \xi_b \psi_b, \quad (3-12)$$

であり、 V_{an} , V_{bm} のモード次数をそれぞれ n_a , n_b とすると、小行列 \bar{M}_{ab} は n_b 行 n_a 列である。物理量の次元は秒である。これに対し回路方程式

$$M \dot{x} + R x = E, \quad (3-13)$$

ただし、

$$M = \begin{pmatrix} D_a(L_a) & M_{ab} \\ M_{ab}^T & D_b(L_b) \end{pmatrix}, \quad (3-14)$$

$$R = \begin{pmatrix} D_a(R_a) & 0 \\ 0 & D_b(R_b) \end{pmatrix},$$

を考えると、導体曲面 a, b に対するそれぞれの固有値問題 $M \mathbf{x} = D(L) \mathbf{x}$, $R \mathbf{x} = D(R) \mathbf{x}$ における規格化された固有ベクトルで表わされる各固有モードのジュール損失は毎秒 R_{ij} ($i = a, b$, $j = n, m$) ジュールである。すなわちその固有ベクトルは電流に対して規格化されている。(3-14)式における小行列の要素 $M_{an, bm}$ は、電流で規格化された固有モード V'_{an} と V'_{bm} のモード間相互インダクタンスを表わし、それぞれの電流 j_{an} , j_{bm} に対して

$$M_{an, bm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_a \iint_b \frac{\mathbf{j}_{an} \cdot \mathbf{j}_{bm}}{r_{ab}} ds_a ds_b, \quad (3-15)$$

となる。(3-15)式の物理量の次元は Henry である。今、(3-14)式の R はすでに対角化されているから $R^{-1/2}$ は容易に求まり、(3-11)式の \bar{M} と (3-14)式の M との間に

$$\bar{M} = R^{-1/2} M R^{-1/2}, \quad (3-16)$$

$$R^{-1/2} = \begin{pmatrix} D_a(R_a^{-1/2}) & 0 \\ 0 & D_b(R_b^{-1/2}) \end{pmatrix}$$

なる関係がある。したがって(3-11)式の \bar{M}_{ab} は

$$\bar{M}_{ab} = D_a(R_a^{-1/2}) M_{ab} D_b(R_b^{-1/2}), \quad (3-17)$$

となり、その要素 $\bar{M}_{an, bm}$ は

$$\bar{M}_{an, bm} = \frac{1}{\sqrt{R_{an} R_{bm}}} M_{an, bm}, \quad (3-18)$$

となる。一方 V_{an} と V_{bm} がそれぞれジュール損失に対して規格化されていることと、(3-18)式に(3-15)式を代入して、(3-11)式中の非対角小行列 \bar{M}_{ab} の要素 $\bar{M}_{an, bm}$ は

$$\bar{M}_{an, bm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_a \iint_b \frac{1}{r_{ab}} \left\{ f_a f_b \frac{\partial V_{an}}{\partial l_a} \frac{\partial V_{bm}}{\partial l_b} \mathbf{e}_{\varphi_a} \cdot \mathbf{e}_{\varphi_b} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -f_a g_b \frac{\partial V_{an}}{\partial l_a} \frac{\partial V_{bm}}{\partial \varphi_b} \mathbf{e}_{\varphi_a} \cdot \mathbf{e}_{l_b} \\
 & -f_b g_a \frac{\partial V_{an}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial V_{bm}}{\partial l_b} \mathbf{e}_{l_a} \cdot \mathbf{e}_{\varphi_b} \\
 & + g_a g_b \frac{\partial V_{an}}{\partial \varphi_a} \frac{\partial V_{bm}}{\partial \varphi_b} \mathbf{e}_{l_a} \cdot \mathbf{e}_{l_b} \} d\varphi_a dl_a d\varphi_b dl_b
 \end{aligned}
 \tag{3-19}$$

となる。 (3-19) 式のさらに具体的な導出は Appendix 1 にて詳しく述べる。全く同様の議論により $\mathbf{E}' = R^{-1/2} \mathbf{E}$ であることが容易に解り、 (3-10) 式の外部起電力は V_{an}, V_{bm} を用いて、軸対称磁場 A_φ に対して

$$\begin{aligned}
 E'_{ij} &= - \frac{d\nu'_{ij}}{dt} \\
 \nu'_{ij} &= \iint_i f_i \frac{\partial V_{ij}}{\partial l_i} A_\varphi d\varphi_i dl_i
 \end{aligned}
 \tag{3-20}$$

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & b \\ n, & m \end{pmatrix}$$

となる。

(3-11) 式は (3-12) 式から明らかに実対称行列であるから、再び固有値問題を

$$\bar{M} \mathbf{q} = D(\tau') \mathbf{q} \quad , \tag{3-21}$$

を解いて、 $n_a + n_b$ 個の新らたな固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めれば良い。

4.2 1つが上下対称でない2導体曲面系の回路方程式

図4の様に、一方の導体曲面が $z > 0$ にしか存在しない場合を考える。他方の導体曲面は上下対称であるとする。

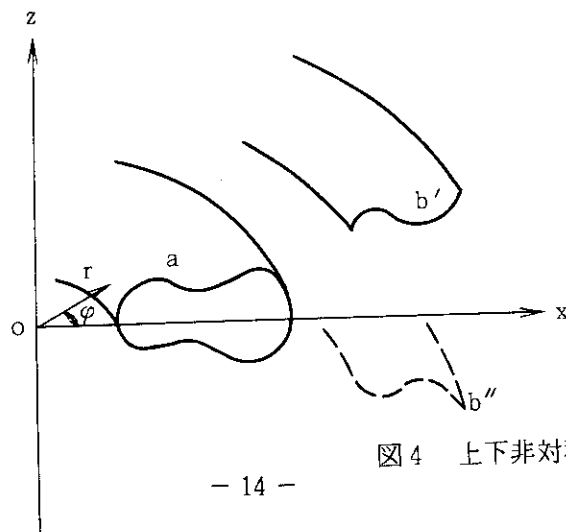


図4 上下非対称な導体曲面系

上下対称でない導体曲面 b' に対し $z < 0$ の領域に存在する導体曲面 b' の鏡像 b'' を仮想し、曲面 b' , b'' を曲面 b と総称する。曲面 b'' 上の電流は零であるため、導体曲面 b 上の対称部分 V_b^+ , 反対称部分 V_b^- とは独立でなく、導体曲面 a, b に対する回路方程式は、その対称部分, 反対称部分に分離できない。

今、導体曲面 a, b 上の電流ポテンシャル V がそれぞれ

$$\begin{aligned} V_a^+ &= \frac{1}{2} \{ V_a(\varphi_a, \ell_a) + V_a(\varphi_a, -\ell_a) \}, \\ V_a^- &= \frac{1}{2} \{ V_a(\varphi_a, \ell_a) - V_a(\varphi_a, -\ell_a) \}, \\ V_b^+ &= \frac{1}{2} \{ V_b(\varphi_b, \ell_b) + V_b(\varphi_b, -\ell_b) \}, \\ V_b^- &= \frac{1}{2} \{ V_b(\varphi_b, \ell_b) - V_b(\varphi_b, -\ell_b) \}, \end{aligned} \tag{3-22}$$

の様にその対称, 反対称部分に分離できるとする。一般に電流ポテンシャル V は定数の任意性を有するため、電流が存在しない導体曲面 b'' 上で、電流ポテンシャル $V_b(\varphi_b, \ell_b) = 0$ とおくことができる。ただし $\ell_b < 0$ である。したがって (3-22) 式より、 V_b^+ と V_b^- との間には

$$\begin{aligned} V_b^+(\varphi_b, \ell_b) &= V_b^-(\varphi_b, \ell_b) = \frac{1}{2} V_b(\varphi_b, \ell_b), \\ V_b^+(\varphi_b, \ell_b) &= V_b^+(\varphi_b, -\ell_b), \\ V_b^-(\varphi_b, \ell_b) &= -V_b^-(\varphi_b, -\ell_b), \end{aligned} \tag{3-23}$$

なる関係がある。 $V_a^+, V_b^+, V_a^-, V_b^-$ に対する導体曲面 a, b に対する回路方程式は

$$\begin{pmatrix} D_a(\tau_a^+) & M_{ab}^+ & 0 & 0 \\ M_{ab}^{+T} & D_b(\tau_b^+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_a(\tau_a^-) & M_{ab}^- \\ 0 & 0 & M_{ab}^{-T} & D_b(\tau_b^-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_a^+ \\ \dot{x}_b^+ \\ \dot{x}_a^- \\ \dot{x}_b^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ I \\ I \\ I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a^+ \\ x_b^+ \\ x_a^- \\ x_b^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_a^+ \\ E_b^+ \\ E_a^- \\ E_b^- \end{pmatrix}, \tag{3-24}$$

である。ここで、サフィックス a, b は導体曲面を、スーパーSCRIPT $+, -$ は対称部分, 反対称部分をそれぞれ表わし, \mathbf{x} は電流ベクトル, M は導体曲面 a, b 間の磁氣的結合を, \mathbf{E} はそれぞれのモードに働く外部起電力を表わす。電流ベクトル \mathbf{x}_b^+ と \mathbf{x}_b^- の次数は同じであり n_b とする。さらに $\mathbf{x}_a^+, \mathbf{x}_a^-$ の次数をそれぞれ n_a^+, n_a^- とすると, (3-23) 式からわかる様に (3-24) 式の回路方程式は $n_a^+ + n_a^- + 2n_b$ 次から, $n_a^+ + n_a^- + n_b$ 次へと書き換える事ができる。ここで, 以下で定義される $(n_a^+ + n_a^- + n_b)$ 行, $(n_a^+ + n_a^- + 2n_b)$ 列の一次変換 F を考える。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_a^+ \\ \mathbf{V}_b^+ \\ \mathbf{V}_a^- \\ \mathbf{V}_b^- \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \mathbf{V}_a^+ \\ \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_a^- \end{pmatrix} \quad (3-25)$$

$$F = \begin{pmatrix} I_{na^+} & 0 & 0 \\ 0 & I_{nb} & 0 \\ 0 & 0 & I_{na^-} \\ 0 & I_{nb} & 0 \end{pmatrix}$$

(3-1) 式にならって, 新しい変数列 $\mathbf{V}' = [\mathbf{V}_a^+, \mathbf{V}_b, \mathbf{V}_a^-]^T$ に対するインダクタンス行列 M' , 抵抗行列 R' , 起電力ベクトル \mathbf{E}' を求めると,

$$M' = F^T M F = \begin{pmatrix} D_a(\tau_a^+) & M_{ab}^+ & 0 \\ M_{ab}^{+T} & D_b(\tau_b^+) + D_b(\tau_b^-) & M_{ab}^{-T} \\ 0 & M_{ab}^- & D_a(\tau_a^-) \end{pmatrix}, \quad (3-26)$$

$$R' = F^T R F = \begin{pmatrix} I_{na^+} & 0 & 0 \\ 0 & D_b(2) & 0 \\ 0 & 0 & I_{na^-} \end{pmatrix}, \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{F}^T \mathbf{E} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a^+ \\ \mathbf{E}_b^+ + \mathbf{E}_b^- \\ \mathbf{E}_a^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3-28}$$

となる。さらに、変換行列 Φ

$$\Phi = \begin{pmatrix} I_{na^+} & 0 & 0 \\ 0 & D_b(\frac{1}{\sqrt{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & I_{na^-} \end{pmatrix}, \tag{3-29}$$

を用いて、回路方程式を書き下すと (3-24) 式は

$$\bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{E}'' , \tag{3-30}$$

となる。ここで、 \mathbf{E}'' および \mathbf{x} と \mathbf{q} の関係は、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \Phi^T \mathbf{M}' \Phi \\ &= \begin{pmatrix} D_a(\tau_a^+) & M_{ab}^+ D_b(\frac{1}{\sqrt{2}}) & 0 \\ D_b(\frac{1}{\sqrt{2}}) M_{ab}^{+T} & D_b(\frac{\tau_b^+ + \tau_b^-}{2}) & D_b(\frac{1}{\sqrt{2}}) M_{ab}^{-T} \\ 0 & M_{ab}^- D_b(\frac{1}{\sqrt{2}}) & D_a(\tau_a^-) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E}'' &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a^+ \\ \frac{\mathbf{E}_b^+ + \mathbf{E}_b^-}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{E}_a^- \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3-31}$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_a^+ \\ \sqrt{2} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_a^- \end{pmatrix},$$

である。 $\bar{\mathbf{M}}$ は明らかに対称行列であり、(3-30) 式に対し固有値問題

$$\bar{M} \mathbf{q} = D(\tau') \mathbf{q} \quad (3-32)$$

を解いて、 $n_a^+ + n_b + n_a^-$ 個の新たな固有値とそれに対応する固有ベクトルを求め、それぞれのモードに対して独立に (2-7) 式を用い時刻歴解析し解くことができる。

4.3 受動コイルシリーズと上下対称な導体曲面が存在する場合

図5の様に、1つの上下対称な導体曲面と軸対称な受動コイルシリーズが上下適当に配置されている場合を考える。受動コイルシリーズの単位電流が造る導体曲面 a 上の磁場 A_φ は、上下対称部

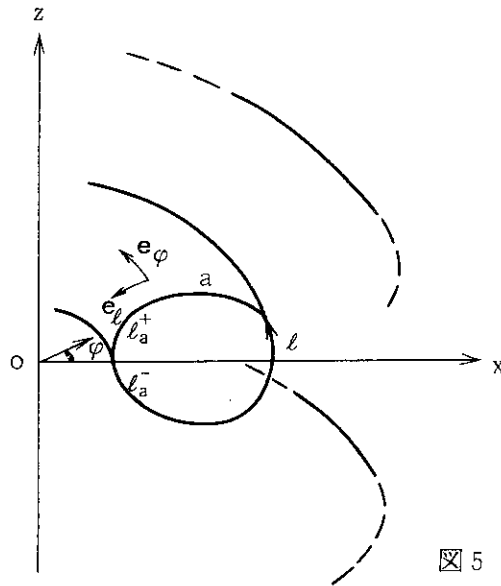


図5 受動コイルシリーズと導体曲面

分のそれと、反対称部分のそれとに分けることができる。(1-15) 式と (3-9) 式から、導体曲面 a 上の V の l に関する反対称部分は A_φ の対称部分と、対称部分は A_φ の反対称部分とのみ結合するため、回路方程式は、 V の反対称部分と A_φ の対称部分のそれと、 V の対称部分と A_φ の反対称部分のそれとに分離することができる。導体曲面 a が上下片方にしか存在しない場合には、もう一方の仮想導体上で V の反対称部分と対称部分の和が零となる境界条件が加わり抵抗による結合が生じるため、 V の対称部分、反対称部分は分離して考えることができない。この場合も、前節の議論と同様に求められたインダクタンス行列、抵抗行列、起電力ベクトルに適当な一次変換をほどこし、以下と同じ形式の回路方程式に帰着させることができる。ここでは、導体曲面 a 上の V の反対称部分 (対称部分) と A_φ の対称部分 (反対称部分) のみの場合を考える。

導体曲面 a だけに対して、固有値問題 (2-2) 式が解かれ、固有値 τ_l 、固有ベクトル V_l が求まっているとする。この時 V_l はそのジュール損失が毎秒 1 ジュールとなる様に規格化されているとする。ところで、外部に受動的に電流を変化させるコイルシリーズがある場合には、その電流値 y_i ($i = 1, \dots, n$) も変数として取り扱い、導体曲面上の互いに独立な渦電流 x_l と同時に回路方程式を解く必要がある。それに対する方程式は行列表示により次の様に表わすことができる。

$$M \dot{\mathbf{x}} + R \mathbf{x} = \mathbf{E}, \quad (3-33)$$

ここで

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \\ E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} & & & m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ & D_a(\tau_\ell) & & \vdots & & \vdots \\ & & & m_{m1} & \cdots & m_{mn} \\ m_{11} & \cdots & m_{m1} & M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ m_{1n} & \cdots & m_{mn} & M_{1n} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & D(R_n) \end{pmatrix}, \quad (3-34)$$

である。 R_i は受動コイルシリーズ毎の抵抗であり、 M_{ij} は i 番目受動コイルシリーズと j 番目受動コイルシリーズ間の相互インダクタンス、 m_{ij} は i 番目の導体曲面 a 上の固有モードと j 番目受動コイルシリーズ間の磁氣的結合であり、その性質上 M, R は共に実対称行列である。磁氣的結合 m_{ij} は、 i 番目受動コイルシリーズ上の単位電流が造る導体曲面 a 上の磁場 A_φ^i を用いて (1-15) 式から

$$m_{ij} = \iint A_\varphi^i \frac{\partial V_j}{\partial \ell} r d\varphi d\ell, \quad (3-35)$$

と表わすことができる。起電力ベクトルの成分 E_i は定電流コイルと i 番目受動コイル間の相互インダクタンス μ_i を用いて

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{d}{dt}(\mu_i I) \\ &= -\mu_i \dot{I}, \end{aligned} \quad (3-36)$$

$$\bar{M} \mathbf{q} = D(\tau') \mathbf{q}, \tag{3-40}$$

を考え、得られた $m+n$ 次の規格化された正方モード行列 Φ を用いて (3-38) 式はさらに、

$$D(\tau') \Phi^T \mathbf{q} + \Phi^T \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{E}', \tag{3-40'}$$

と書き換えられ、外部受動コイルシリーズを含む新しい固有モード毎に互いに独立な方程式を得る。ところで (3-40') 式の右辺の起電力ベクトルについてももう少し議論する。ここで右辺の成分を E'' と略記し、磁束関数 ν'' を用いて $E''_i = -\frac{d}{dt} (I_i \nu''_i)$ と表わす。 I_i は定電流コイル電流であり ν''_i ($i = 1, \dots, m$) は単位定電流の作る i 番目の古い固有モードに加わる磁束関数であり、 $\nu''_i = \mu_j$ ($i = m+1, \dots, m+n$) は j 番目受動コイルシリーズとの相互インダクタンスである。(3-39) 式から

$$\mathbf{E}'' = \begin{pmatrix} E''_1 \\ E''_2 \\ \vdots \\ E''_m \\ E''_{m+1} \\ \vdots \\ E''_{m+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{m,1} & \phi_{m+1,1} & \dots & \phi_{m+n,1} \\ \phi_{12} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \phi_{1,m} & \dots & \phi_{m,m} & \phi_{m+1,m} & \dots & \phi_{m+n,m} \\ \phi_{1,m+1} & \dots & \phi_{m,m+1} & \phi_{m+1,m+1} & \dots & \phi_{m+n,m+1} \\ \vdots & & & & & \\ \phi_{1,m+n} & \dots & \phi_{m,m+n} & \phi_{m+1,m+n} & \dots & \phi_{m+n,m+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \\ E_1 \sqrt{R_1} \\ \vdots \\ E_n \sqrt{R_n} \end{pmatrix}, \tag{3-41}$$

と表わされ、新しい i 番目固有モードの磁束関数 ν''_i は

$$\nu''_i = \sum_{k=1}^m \phi_{ki} \nu_k + \sum_{k=1}^n \phi_{m+k,i} \frac{\mu_k}{\sqrt{R_k}}, \tag{3-42}$$

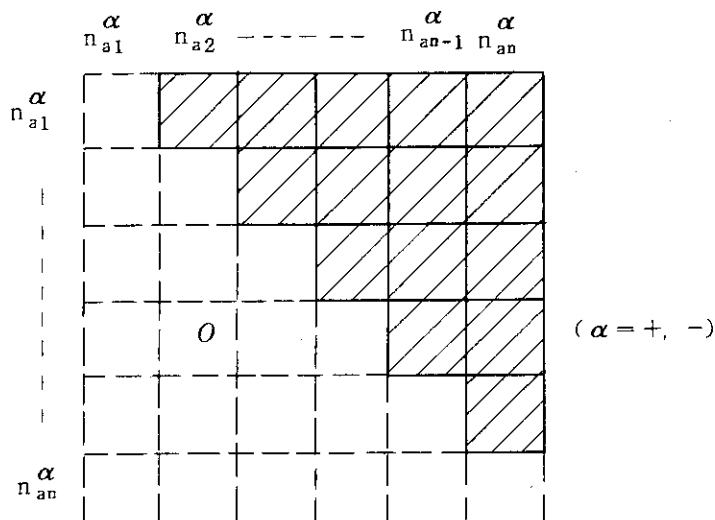
である。(3-42) 式は新たに求められた導体曲面 a 上の固有ベクトル V'_i を用いてその第一項が

$$\sum_{k=1}^m \phi_{ki} \nu_k = \iint A_\varphi \frac{\partial V'_i}{\partial \ell} r d\varphi d\ell, \tag{3-43}$$

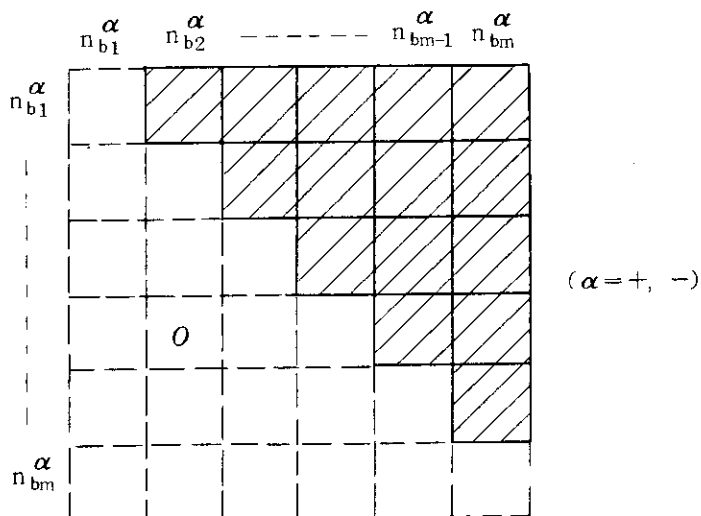
となる。ここで A_φ は導体曲面 a 上の外部磁場を表わす。

4.4 多連続導体トーラス系渦電流解析の実際

この節では、先の議論をまとめ、多連続導体及び多数の受動コイルシリーズからなるトーラス実体系の渦電流問題を一般的に取扱う。定電流コイルシリーズ等による軸対称外部磁場 A_φ は、それぞれ $z=0$ に関し対称部分 A_φ^+ 、反対称部分 A_φ^- に分離でき、 A_φ^+ は導体表面上の V の反対称部分 V^- 、 A_φ^- は V の対称部分 V^+ のみとそれぞれ結合する。 $z=0$ に関しそのポロイダル断



の形を有する行列であり、 M_b^+ , M_b^- はそれぞれ導体曲面 b_j 上 V の対称部分, 反対称部分の各固有モードと導体曲面 $b_{j'}$ ($j' \neq j$) 上 V の対称部分, 反対称部分の各固有モードとの磁氣的結合を表わす。



の形を有する行列である。 M_{ab}^+ , M_{ab}^- は、それぞれ導体曲面 a_i 上 V の対称部分, 反対称部分の各固有モードと導体曲面 b_j 上 V の対称部分, 反対称部分の各固有モードとの磁氣的結合を表わすそれぞれ $\sum_{j=1}^m n_{bj}$ 行 $\sum_{i=1}^n n_{ai}^+$ 行, $\sum_{j=1}^m n_{bj}$ 行 $\sum_{i=1}^n n_{ai}^-$ 列の行列を表わす。(3-44) 式に対して、固有値問題

$$M x = D(\tau') x \quad (3-46)$$

を解いて、全導体曲面上で定義される互いに独立な $J = \sum_{i=1}^n (n_{ai}^+ + n_{ai}^-) + \sum_{j=1}^m n_{bj}$ 個の固有モードが求まる。受動コイルシリーズ $c_1, c_2, \dots, c_r, d_1, d_2, \dots, d_s$ を含む回路方程式は

$$M' \dot{\mathbf{x}} + R \mathbf{x} = \mathbf{E}' \quad (3-47)$$

であり、ここで

$$M' = \begin{pmatrix} D(\tau') & m_r & m_s \\ m_r^T & M_r & O \\ m_s^T & O & M_s \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & R_r & O \\ O & O & R_s \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} e' \\ E'_r \\ E'_s \end{pmatrix}, \quad (3-48)$$

と表わされる。 M_r は受動コイルシリーズ c_i ($i=1, \dots, r$) 間の相互インダクタンスを表わす r 行 r 列の行列であり、 M_s は受動コイルシリーズ d_i ($i=1, \dots, s$) 間の相互インダクタンスを表わす s 行 s 列の行列であり物理量の次元は共に Henry である。 m_r, m_s はそれぞれ導体表面上の固有モードと受動コイルシリーズ c_i ($i=1, \dots, r$), d_i ($i=1, \dots, s$) との磁氣的結合を表わす r 行 J 列, s 行 J 列の行列であり、物理量の次元は共に $\text{Henry} \cdot \Omega^{-1/2}$ である。固有値問題 (3-46) を解いて得られた各固有モードは l に関する電流ポテンシャルの対称性がくずれているため外部受動コイルシリーズ c_i, d_i とは一般には必ず結合することに注意する必要がある。行列 m_r, m_s の各要素は (3-35) 式により計算されるが、具体的な定式化は Appendix 2 を参照されたい。回路方程式 (3-47) に対する固有値問題

$$(R^{-1/2} M' R^{-1/2}) \mathbf{x} = D(\tau'') \mathbf{x} \quad (3-49)$$

を解くことにより、導体曲面及び受動コイルシリーズを含む互いに独立な $J+r+s$ 個の固有モードを得ることができる。さらに前節と同様の議論により与えられた外部起電力に対し (2-7) 式を用いてその動的応答を各モード毎に独立に調べることができる。

それぞれ互いに独立な l 番目固有モードに働く外部起電力 E_l'' は、磁束関数 ν_l を用いて

$$E_l'' = - \frac{d}{dt} (\nu_l I), \quad (3-50)$$

と表わされる。ここで I は定電流コイルシリーズの電流であり、 A_φ^j をその単位電流のつくる j

番目導体曲面上の磁場とすると、前節での議論と同様に (3-42) 式より

$$\nu_l = \sum_j \iint A_\varphi^j \frac{\partial V_{jl}}{\partial \ell_j} r d\varphi_j d\ell_j + \sum_k \phi_{J+k,l} \frac{\mu_k}{\sqrt{R_k}} \quad (3-51)$$

と表わされる。ここで J は考慮した導体曲面上の全固有モード次数であり、j の和は導体曲面数に対して、k の和は受動コイルシリーズ数に対してとる。V_{jl} は (3-49) 式を解いて得られたジュール損失に対して規格化された固有ベクトルである。A_φ^j は外部磁場の z = 0 に対して対称、反対称部分を含み、積分はそれぞれの導体曲面全体で行う。(3-48) 式において、磁氣的結合 m_r, m_s は、(3-35) 式と同様にして l 番目固有モードと k 番目受動コイルシリーズとの間に対しその行列の成分が

$$m_{lk} = \sum_j \iint A_\varphi^k \frac{\partial V_{jl}}{\partial \ell_j} r d\varphi_j d\ell_j \quad (3-52)$$

と表わされる。ここで A_φ^k は k 番目受動コイルシリーズの単位電流が造る j 番目導体曲面上の磁場であり、V_{jl} は j 番目導体上で定義され、固有値問題 (3-46) 式を解いて得られたジュール損失で規格化された固有ベクトルである。積分は同じく導体曲面 j 全体で行う。さらに (3-45) 式の各要素は、i' ≠ i に対し、(2-13) 式にしたがい、

$$\begin{aligned} M_{in, i'n'} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_i \iint_{i'} \frac{1}{r_{ii'}} \left\{ \frac{\partial V_{in}}{\partial \ell_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \ell_{i'}} r_i r_{i'} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) \right. \\ &\quad - \frac{\partial V_{in}}{\partial \ell_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} r_i \frac{dr_{i'}}{d\ell_i} \sin(\varphi_{i'} - \varphi_i) \\ &\quad - \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \ell_{i'}} r_{i'} \frac{dr_i}{d\ell_i} \sin(\varphi_i - \varphi_{i'}) \\ &\quad \left. + \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} \left(\frac{dr_i}{d\ell_i} \frac{dr_{i'}}{d\ell_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) + \frac{dz_i}{d\ell_i} \frac{dz_{i'}}{d\ell_{i'}} \right) \right\} d\varphi_i d\ell_i d\varphi_{i'} d\ell_{i'} \quad (3-53) \end{aligned}$$

となる。ここで r_{ii'} は (1-11) 式にて与えられる。サフィックス in は i 番目導体曲面上の n 番目固有モードを表わし、V_{in}, V_{i'n'} は対応する各導体曲面上で定義された電流ポテンシャルである。

5. ま と め

従来から行われてきた磁氣的に孤立した、ただ1つの薄板導体上の渦電流解析法をさらに発展させ、外部受動コイルシリーズ、複数個の薄板導体系に対して、相互の磁氣的結合を考慮し全体系を同時に解く方法を確立した。三次元的構造である実際のトカマク装置は、各構造物が全体系に対してその板厚が十分薄いため、本論文で採用した複数個の薄板導体系としての取扱いが、渦電流解析において十分良いモデルであると考えられ、目的とする構造強度評価、渦電流磁場評価に際し大きな力を発揮するものと考えられる。本報告で述べた定式化を用いて、多連続導体トーラス系における渦電流評価コード (EDDYMULT) を開発中であり、近日中に完成する予定である。JT-60 実体系を例にとり数多くの構造物からなるトーラス装置における総合的な渦電流評価を行う予定であり、後日追って報告する。

本論文で述べた解析手法は、薄板導体上渦電流場の問題を任意の回路の集合とみなし、回路方程式を定値対称行列に対する固有値問題として取扱うことを基調としているため、プラズマの位置変化、断面形状変化を未知として解く特殊な場合には適用できない。今後の問題として、プラズマの運動も考慮して、総合的に計算を行ないプラズマ位置断面形状制御のためのシミュレーターとして利用できる計算コードの開発が望まれる。

最後に、終始有益な議論をしていただいた三菱原子力工業株式会社亀有昭久氏に感謝の意を表す。亀有氏には4.3節について特に重要なコメントをしていただいた。JT-60第1開発室長飯島勉氏、太田充両氏の理解ある助力と援助に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) A. Kameari et al.; JAERI-M 7120 (1977)
- 2) I. Takano and Y. Suzuki ; JAERI-M 7062 (1977)
- 3) T. Sometani ; 渦電流評価実験に関する研究 (1979)
- 4) A. Kameari, H. Ninomiya and Y. Suzuki ; JAERI-M 6953 (1977)
- 5) Y. Suzuki, A. Ogata, H. Ninomiya, A. Kameari, H. Aikawa and N. Noda ; JAERI-M 6531 (1976)

5. ま と め

従来から行われてきた磁氣的に孤立した、ただ1つの薄板導体上の渦電流解析法をさらに発展させ、外部受動コイルシリーズ、複数個の薄板導体系に対して、相互の磁氣的結合を考慮し全体系を同時に解く方法を確立した。三次元的構造である実際のトカマク装置は、各構造物が全体系に対してその板厚が十分薄いため、本論文で採用した複数個の薄板導体系としての取扱いが、渦電流解析において十分良いモデルであると考えられ、目的とする構造強度評価、渦電流磁場評価に際し大きな力を発揮するものと考えられる。本報告で述べた定式化を用いて、多連続導体トラス系における渦電流評価コード (EDDYMULT) を開発中であり、近日中に完成する予定である。JT-60 実体系を例にとり数多くの構造物からなるトラス装置における総合的な渦電流評価を行う予定であり、後日追って報告する。

本論文で述べた解析手法は、薄板導体上渦電流場の問題を任意の回路の集合とみなし、回路方程式を定値対称行列に対する固有値問題として取扱うことを基調としているため、プラズマの位置変化、断面形状変化を未知として解く特殊な場合には適用できない。今後の問題として、プラズマの運動も考慮して、総合的に計算を行ないプラズマ位置断面形状制御のためのシミュレーターとして利用できる計算コードの開発が望まれる。

最後に、終始有益な議論をしていただいた三菱原子力工業株式会社亀有昭久氏に感謝の意を表す。亀有氏には4.3節について特に重要なコメントをしていただいた。JT-60第1開発室長飯島勉氏、太田充両氏の理解ある助力と援助に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) A. Kameari et al.; JAERI-M 7120 (1977)
- 2) I. Takano and Y. Suzuki ; JAERI-M 7062 (1977)
- 3) T. Sometani ; 渦電流評価実験に関する研究 (1979)
- 4) A. Kameari, H. Ninomiya and Y. Suzuki ; JAERI-M 6953 (1977)
- 5) Y. Suzuki, A. Ogata, H. Ninomiya, A. Kameari, H. Aikawa and N. Noda ; JAERI-M 6531 (1976)

Appendix 1 導体曲面間の磁氣的結合

磁氣的結合 (3-53) 式は, i 番目導体曲面, $i' (\neq i)$ 番目導体曲面のそれぞれに対しその積分領域が $l_i^- \leq l_i \leq l_i^+$, $-\pi \leq \varphi_i \leq \pi$, $l_{i'}^- \leq l_{i'} \leq l_{i'}^+$, $-\pi \leq \varphi_{i'} \leq \pi$ であるが V_{in} , $V_{i'n'}$ それぞれの l に関する対称性, 反対称性を考慮することによりその積分が簡単になる。 V_{in} が l に関し対称である時には $V_{i'n'}$ の反対称部分との結合が零であるため, $V_{i'n'}$ は対称部分のみを考えれば良く, V_{in} が反対称部分である時には $V_{i'n'}$ は反対称部分のみを考えれば良い。

V_{in} , $V_{i'n'}$ のそれぞれ反対称部分を考えてみる。今全体系に対し, $\varphi = \pi i / N_\varphi (i = 0, \dots, 2N_\varphi - 1)$ に対して φ に関して対称とすると, この時 φ 方向に $2\pi / N_\varphi$ の周期を有する。 V_{in} , $V_{i'n'}$ の両方に対し

$$V(\varphi, l) = -V(\varphi, -l) \tag{A1-1}$$

$$V\left(\varphi + \frac{2\pi i}{N_\varphi}, l\right) = V\left(-\varphi + \frac{2\pi i}{N_\varphi}, l\right) = V(\varphi, l)$$

$$(i = 0, \dots, 2N_\varphi - 1)$$

とおき, 境界条件として

$$(\varphi, 0) = 0 \tag{A1-2}$$

$$-V(\varphi, l^-) = V(\varphi, l^+) = \frac{1}{2} V^t$$

を課することができる。ここで V^t はトーラスを一周する電流を表わす。さらに軸対称曲面 i, i' が $l_i = -l_{Ni}, \dots, -l_1, 0, l_1, \dots, l_{Ni}$, $\varphi_i = \pi k / M_i N_\varphi (k = -M_i N_\varphi, \dots, M_i N_\varphi)$, $l_{i'} = -l_{N_{i'}}, \dots, -l_1, 0, l_1, \dots, l_{N_{i'}}$, $\varphi_{i'} = \pi k' / M_{i'} N_\varphi (k' = -M_{i'} N_\varphi, \dots, M_{i'} N_\varphi)$ でそれぞれ全体を格子化されているとし, 各格子点上で 2 章の方法により固有ベクトル V_{in} , $V_{i'n'}$ が求まっているとする。同じ導体曲面上の V_{in} , $V_{i'n'} (n' \neq n)$ は磁氣的に結合しない。

まず, $\varphi_i = 0$, $l_i = 0$, $\varphi_{i'} = 0$, $l_{i'} = 0$ に関して (3-53) 式の被積分関数が対称であることから

$$\begin{aligned} M_{in, i'n'} &= 4 M'_{in, i'n'} \\ &= \frac{\mu_0}{\pi} \int_0^{l_i^+} \int_0^\pi \int_{l_{i'}^-}^{l_{i'}^+} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{r_{i'i'}} \left\{ \frac{\partial V_{in}}{\partial l_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial l_{i'}} r_i r_{i'} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial V_{in}}{\partial l_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} r_i \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \sin(\varphi_{i'} - \varphi_i) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial l_{i'}} r_{i'} \frac{dr_i}{dl_i} \sin(\varphi_i - \varphi_{i'}) \\
 & + \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} \left(\frac{dr_i}{dl_i} \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) + \frac{dz_i}{dl_i} \frac{dz_{i'}}{dl_{i'}} \right) \} d\varphi_i dl_i d\varphi_{i'} dl_{i'}
 \end{aligned}
 \tag{A1-3}$$

となる。さらに (A1-1) 式に示されている様に V_{in} , $V_{i'n'}$ 共に $\varphi = \pi i / N_\varphi$ ($i = 0, \dots, 2N_\varphi - 1$) に対して φ に関して対称であることから, (A1-3) 式は

$$M'_{in, i'n'} = \frac{\mu_0 N_\varphi}{4\pi} \int_0^{l_i^+} \int_0^{\frac{\pi}{N_\varphi}} \int_{l_{i'}^-}^{l_{i'}^+} \int_{-\pi}^{\pi} F d\varphi_i dl_i d\varphi_{i'} dl_{i'}
 \tag{A1-4}$$

に等しい。ここで

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{r_{ii'}} \left\{ \frac{\partial V_{in}}{\partial l_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial l_{i'}} r_i r_{i'} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) \right. \\
 & - \frac{\partial V_{in}}{\partial l_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} r_i \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \sin(\varphi_{i'} - \varphi_i) \\
 & - \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial l_{i'}} r_{i'} \frac{dr_i}{dl_i} \sin(\varphi_i - \varphi_{i'}) \\
 & \left. + \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} \left(\frac{dr_i}{dl_i} \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) + \frac{dz_i}{dl_i} \frac{dz_{i'}}{dl_{i'}} \right) \right\} d\varphi_i dl_i d\varphi_{i'} dl_{i'}
 \end{aligned}
 \tag{A1-5}$$

である。さらに導体曲面 i' に対する積分において, $V_{i'n'}(\varphi_{i'}, l_{i'}) = -V_{i'n'}(\varphi_{i'}, -l_{i'})$ であり, $z_{i'}(l_{i'}) = -z_{i'}(-l_{i'})$ であることから, 領域 $l_{i'}^- \leq l_{i'} \leq 0$ のそれは, $0 \leq l_{i'} \leq l_{i'}^+$ のそれに対して $z_{i'}(l_{i'})$ の符号を変えたものに等しい。今,

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_i r_{i'} \frac{\partial V_{in}}{\partial l_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial l_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) \\
 F_2 &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_i \frac{\partial V_{in}}{\partial l_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \sin(\varphi_i - \varphi_{i'}) \\
 F_3 &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_{i'} \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial l_{i'}} \frac{dr_i}{dl_i} \sin(\varphi_{i'} - \varphi_i)
 \end{aligned}$$

$$F_4 = \left\{ \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii}^*} \right) \frac{dr_i}{d\ell_i} \frac{dr_{i'}}{d\ell_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) + \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii}^*} \right) \frac{dz_i}{d\ell_i} \frac{dz_{i'}}{d\ell_{i'}} \right\} \\ \times \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} \quad (A1-6)$$

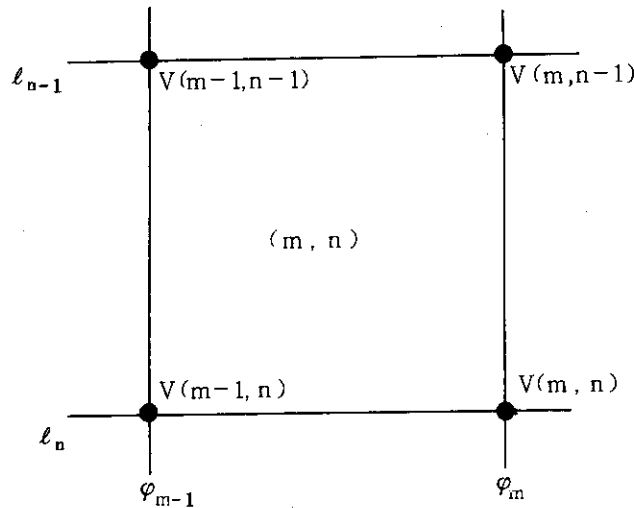
ただし、 $r_{ii}^* = \sqrt{r_i^2 + r_{i'}^2 - 2r_i r_{i'} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) + (z_i + z_{i'})^2}$ において、(A1-4)式は、

$$M_{in, i'n'} = \frac{\mu_0 N \varphi}{4\pi} \int_0^{\ell_i^+} \int_0^{\frac{\pi}{N\varphi}} \int_0^{\ell_{i'}^+} \int_{-\pi}^{\pi} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) d\varphi_i d\ell_i d\varphi_{i'} d\ell_{i'} \quad (A1-7)$$

となる。

さて、図A-1で示す様に、長方形要素番号を節点番号にて表わすこととし、次の積分を考える。

$$k_{in, i'n'}^1 = \int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \int_{\ell_{n'-1}}^{\ell_{n'}} \int_{\varphi_{m'-1}}^{\varphi_{m'}} F_1 d\varphi_i d\ell_i d\varphi_{i'} d\ell_{i'} \quad (A1-8)$$



図A-1 導体表面上のメッシュ図

導体曲面 i 上の n 番目固有モードの電流ポテンシャル V_{in} が有限要素 (m, n) 内で φ_i, ℓ_i それぞれに対し一次的に

$$V_{in}(\varphi_i, \ell_i) = \frac{1}{\delta_{mn}} \left\{ (\varphi_{m-1} - \varphi_i)(\ell_{n-1} - \ell_i) V_{in}(m, n) \right. \\ \left. + (\varphi_i - \varphi_m)(\ell_{n-1} - \ell_i) V_{in}(m-1, n) \right. \\ \left. + (\varphi_i - \varphi_m)(\ell_i - \ell_n) V_{in}(m-1, n-1) \right.$$

$$+ (\varphi_{m-1} - \varphi_i) (\ell_i - \ell_n) V_{in} (m, n-1) \} \quad (A1-9)$$

$$\delta_{mn} = \Delta \varphi_m \cdot \Delta \ell_n \quad (A1-10)$$

と表わせるとする。導体曲面 i' 上の電流ポテンシャル $V_{i'n'}$ に対しても同様とする。従って、(A1-8) 式の被積分関数中の $\ell_i, \ell_{i'}$ に関する微分項は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{in}}{\partial \ell_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \ell_{i'}} &= \frac{1}{\delta_{mn} \delta_{m'n'}} [(\varphi_m - \varphi_i) (\varphi_{m'} - \varphi_{i'}) (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m-1, n)) \\ &\quad \times (V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m'-1, n')) \\ &\quad + (\varphi_m - \varphi_i) (\varphi_{i'} - \varphi_{m'-1}) (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m-1, n)) (V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n')) \\ &\quad + (\varphi_i - \varphi_{m-1}) (\varphi_{m'} - \varphi_{i'}) (V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n)) (V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m'-1, n')) \\ &\quad + (\varphi_i - \varphi_{m-1}) (\varphi_{i'} - \varphi_{m'-1}) (V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n)) (V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n'))] \end{aligned} \quad (A1-11)$$

と表わすことができる。(A1-11) 式を (A1-8) 式に代入し、導体曲面 i, i' の幾何学的な量のみで決る関数 $h(\varphi_i, \ell_i; \varphi_{i'}, \ell_{i'})$

$$h(\varphi_i, \ell_i; \varphi_{i'}, \ell_{i'}) = \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_i r_{i'} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) \quad (A1-12)$$

を定義すると (A1-8) 式は

$$\begin{aligned} k_{in, i'n'}^1 &= (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m-1, n)) (V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m'-1, n')) \alpha_1 \\ &\quad + (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m-1, n)) (V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n')) \alpha_2 \\ &\quad + (V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n)) (V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m'-1, n')) \alpha_3 \\ &\quad + (V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n)) (V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n')) \alpha_4 \end{aligned} \quad (A1-13)$$

となる。ここで

$$\alpha_1 = \frac{1}{\delta_{mn} \delta_{m'n'}} \int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \int_{\ell_{n'-1}}^{\ell_{n'}} \int_{\varphi_{m'-1}}^{\varphi_{m'}} h(\varphi_m - \varphi_i) (\varphi_{m'} - \varphi_{i'}) d\varphi_i d\ell_i d\varphi_{i'} d\ell_{i'}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\delta_{mn} \delta_{m'n'}} \int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \int_{\ell_{n'-1}}^{\ell_{n'}} \int_{\varphi_{m'-1}}^{\varphi_{m'}} h(\varphi_m - \varphi_i) (\varphi_{i'} - \varphi_{m'-1}) d\varphi_i d\ell_i d\varphi_{i'} d\ell_{i'}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\delta_{mn} \delta_{m'n'}} \int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \int_{\ell_{n'-1}}^{\ell_{n'}} \int_{\varphi_{m'-1}}^{\varphi_{m'}} h(\varphi_i - \varphi_{m-1}) (\varphi_{m'} - \varphi_{i'}) d\varphi_i d\ell_i d\varphi_{i'} d\ell_{i'}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\delta_{mn} \delta_{m'n'}} \int_{\ell_{n-1}}^{\ell_n} \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \int_{\ell_{n'-1}}^{\ell_{n'}} \int_{\varphi_{m'-1}}^{\varphi_{m'}} h(\varphi_i - \varphi_{m-1})(\varphi_{i'} - \varphi_{m'-1}) d\varphi_i d\ell_i d\varphi_{i'} d\ell_{i'} \quad (A1-14)$$

である。さらにこれを変数変換すると

$$\alpha_1 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h(1-x_1)(1-x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\alpha_2 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h(1-x_1)x_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

(A1-14')

$$\alpha_3 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h x_1 (1-x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\alpha_4 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h x_1 x_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

となる。(A1-14), (A1-14') 式は明らかに系の幾何学量のみで決まり、電流ポテンシャルの固有モードとは関係しない。 α_i ($i=1, 2, 3, 4$) を形状関数と呼ぶ。異なる導体曲面上のそれぞれ固有モード間の磁氣的結合を求めるにあたっては、その積分は一度求めれば十分であって、モードが異なれば対応する節点量の電流ポテンシャルを単純に四則演算するだけで良い。

全く同様なことが (A1-7) 式の第2, 3 および4項についても言えて、それぞれを $k_{in, i'n'}^2$, $k_{in, i'n'}^3$, $k_{in, i'n'}^4$ とおくと

$$\begin{aligned} k_{in, i'n'}^2 &= (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m-1, n))(V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m', n'-1)) \beta_1 \\ &+ (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m-1, n))(V_{i'n'}(m'-1, n') - V_{i'n'}(m', n')) \beta_2 \\ &+ (V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n))(V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m', n'-1)) \beta_3 \\ &+ (V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n))(V_{i'n'}(m'-1, n') - V_{i'n'}(m', n')) \beta_4 \end{aligned} \quad (A1-15)$$

$$\begin{aligned} k_{in, i'n'}^3 &= (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m, n-1))(V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m'-1, n')) \gamma_1 \\ &+ (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m, n-1))(V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n')) \gamma_2 \\ &+ (V_{in}(m-1, n) - V_{in}(m, n))(V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m'-1, n')) \gamma_3 \\ &+ (V_{in}(m-1, n) - V_{in}(m, n))(V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n')) \gamma_4 \end{aligned} \quad (A1-16)$$

$$\begin{aligned}
 k_{in, i'n'}^4 = & (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m, n-1))(V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m', n'-1)) \chi_1 \\
 & + (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m, n-1))(V_{i'n'}(m'-1, n') - V_{i'n'}(m', n')) \chi_2 \\
 & + (V_{in}(m-1, n) - V_{in}(m, n))(V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m', n'-1)) \chi_3 \\
 & + (V_{in}(m-1, n) - V_{in}(m, n))(V_{i'n'}(m'-1, n') - V_{i'n'}(m', n')) \chi_4 \quad (A1-17)
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 \beta_1 = & \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p (1-x_1)(1-y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 \beta_2 = & \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p (1-x_1)y_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 \beta_3 = & \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p x_1 (1-y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 \beta_4 = & \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p x_1 y_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (A1-18) \\
 p = & \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii}^*} \right) r_i \frac{dr_{i'}}{d\varphi_{i'}} \sin(\varphi_i - \varphi_{i'})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 = & \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q (1-y_1)(1-x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 \gamma_2 = & \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q (1-y_1)x_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 \gamma_3 = & \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q y_1 (1-x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\
 \gamma_4 = & \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q y_1 x_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (A1-19) \\
 q = & \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii}^*} \right) r_{i'} \frac{dr_i}{d\varphi_i} \sin(\varphi_{i'} - \varphi_i)
 \end{aligned}$$

$$\chi_1 = \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s (1-y_1)(1-y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \Delta \ell_n \Delta \ell_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s(1-y_1) y_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ \chi_3 &= \Delta \ell_n \Delta \ell_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s y_1 (1-y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \\ \chi_4 &= \Delta \ell_n \Delta \ell_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s y_1 y_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned} \tag{A1-20}$$

$$s = \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii}^*} \right) \frac{dr_i}{d\ell_i} \frac{dr_{i'}}{d\ell_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) + \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii}^*} \right) \frac{dz_i}{d\ell_i} \frac{dz_{i'}}{d\ell_{i'}}$$

であり、従って (A1-3) 式は

$$M_{in, i'n'} = \frac{\mu_0 N \varphi}{\pi} \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{m'=1}^{M_{i'} N \varphi} \sum_{n'=1}^{N_{i'}} \sum_{j=1}^4 k_{in, i'n'}^j \tag{A1-21}$$

となる。

さて、有限要素 (m, n), (m', n') が導体曲面の曲率や大きさに比べ十分小さいとし、又、点 (m, n), (m', n') が十分離れているとすると、(A1-14'), (A1-18), (A1-19), (A1-20) 式の積分において被積分関数のそれぞれ h, p, q, s は定数 $\bar{h}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{s}$ とおくことができる。数値計算においてはこれらは有限要素のそれぞれ重心点に対するものと考えて良い。この時積分は簡単になり、

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 &= \frac{1}{4} \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \bar{h} \\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 &= \frac{1}{4} \Delta \varphi_m \Delta \ell_{n'} \bar{p} \\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 &= \frac{1}{4} \Delta \ell_n \Delta \varphi_{m'} \bar{q} \\ \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_4 &= \frac{1}{4} \Delta \ell_n \Delta \ell_{n'} \bar{s} \end{aligned} \tag{A1-22}$$

と表わすことができ、(A1-3) 式は、

$$\begin{aligned} M_{in, i'n'} &= \frac{\mu_0 N \varphi}{4 \pi} \sum_{m=1}^{M_i} \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{m'=1}^{M_{i'} N \varphi} \sum_{n'=1}^{N_{i'}} \{ (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m-1, n) + V_{in}(m, n-1) \\ &\quad - V_{in}(m, n)) (V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m'-1, n') + V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n')) \} \\ &\quad \times \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \bar{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (V_{in}(m-1, n-1) - V_{in}(m-1, n) + V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n)) \\
 & \times (V_{i'n'}(m'-1, n'-1) + V_{i'n'}(m'-1, n') - V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n)) \Delta\varphi_m \Delta\ell_n \bar{p} \\
 & + (V_{in}(m-1, n-1) + V_{in}(m-1, n) - V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n)) \\
 & \times (V_{i'n'}(m'-1, n'-1) - V_{i'n'}(m'-1, n') + V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n)) \Delta\ell_n \Delta\varphi_m \bar{q} \\
 & + (V_{in}(m-1, n-1) + V_{in}(m-1, n) - V_{in}(m, n-1) - V_{in}(m, n)) \\
 & \times (V_{i'n'}(m'-1, n'-1) + V_{i'n'}(m'-1, n') - V_{i'n'}(m', n'-1) - V_{i'n'}(m', n)) \Delta\ell_n \Delta\ell_n \bar{s}]
 \end{aligned}
 \tag{A1-23}$$

となる。

さらに、トロイダル方向の格子間隔がそれぞれの導体曲面上で等間隔であって、導体曲面 i, i' のそれが $\Delta\varphi_m = \Delta\varphi_{m'} = \Delta\varphi$ の時、

$$\begin{aligned}
 \alpha_i(m, n, m', n') &= \alpha_i(m+k, n, m'+k, n') \\
 \beta_i(m, n; m', n') &= \beta_i(m+k, n; m'+k, n') \\
 \gamma_i(m, n; m', n') &= \gamma_i(m+k, n; m'+k, n') \\
 \chi_i(m, n; m', n') &= \chi_i(m+k, n; m'+k, n')
 \end{aligned}
 \tag{A1-24}$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$1 \leq m+k \leq M$$

が成り立ち、形状関数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \chi_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) は $m=1$ に対してのみ求めるだけで十分である。

全く同様の系に対し $V_{in}, V_{i'n'}$ のそれぞれ対称部分の磁氣的結合を考えてみる。 $V_{in}, V_{i'n'}$ の両方に対し

$$V(\varphi, \ell) = V(\varphi, -\ell) \tag{A1-25}$$

$$\begin{aligned}
 V\left(\varphi + \frac{2\pi i}{N_\varphi}, \ell\right) &= V\left(-\varphi + \frac{2\pi i}{N_\varphi}, \ell\right) = V(\varphi, \ell) \\
 & \quad (i = 0, \dots, 2N_\varphi - 1)
 \end{aligned}$$

であって、同じ導体曲面上の $V_{in}, V_{i'n'}$ ($n' \neq n$) は磁氣的に結合しない。(3-53)式の被積分関数が $\varphi_i = 0, \ell_i = 0, \varphi_{i'} = 0, \ell_{i'} = 0$ に関して対称で、さらに(A1-25)式に示されている様に $V_{in}, V_{i'n'}$ 共に $\varphi = \pi i / N_\varphi$ ($i = 0, \dots, 2N_\varphi - 1$) に対して φ に関して対称であ

ることから、(A1-4)式と同様の結果を得る。さらに導体曲面*i'*に対する積分において、 $V_{i'n'}$
 $(\varphi_{i'}, l_{i'}) = V_{i'n'}(\varphi_{i'}, -l_{i'})$ であり、 $z_{i'}(l_{i'}) = -z_{i'}(-l_{i'})$ であることから、領域 $l_{i'}^-$
 $\leq l_{i'} \leq 0$ のそれは、 $0 \leq l_{i'} \leq l_{i'}^+$ のそれに対して $z_{i'}(l_{i'})$ の符号を変えたものに等しい。
 今

$$\begin{aligned}
 F_1' &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_i r_{i'} \frac{\partial V_{in}}{\partial l_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial l_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) \\
 F_2' &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_i \frac{\partial V_{in}}{\partial l_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \sin(\varphi_i - \varphi_{i'}) \\
 F_3' &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_{i'} \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial l_{i'}} \frac{dr_i}{dl_i} \sin(\varphi_{i'} - \varphi_i) \\
 F_4' &= \left\{ \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) \frac{dr_i}{dl_i} \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) + \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) \frac{dz_i}{dl_i} \frac{dz_{i'}}{dl_{i'}} \right\} \\
 &\quad \times \frac{\partial V_{in}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial V_{i'n'}}{\partial \varphi_{i'}} \tag{A1-26}
 \end{aligned}$$

とにおいて

$$M_{in, i'n'} = \frac{\mu_0 N \varphi}{4\pi} \int_0^{l_i^+} \int_0^{l_{i'}^+} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi (F_1' + F_2' + F_3' + F_4') d\varphi_i dl_i d\varphi_{i'} dl_{i'} \tag{A1-27}$$

を得る。新たに、導体曲面*i, i'*の幾何学的な量のみで決る関数 $h'(\varphi_i, l_i; \varphi_{i'}, l_{i'})$,
 $p'(\varphi_i, l_i; \varphi_{i'}, l_{i'})$, $q'(\varphi_i, l_i; \varphi_{i'}, l_{i'})$ および $s'(\varphi_i, l_i; \varphi_{i'}, l_{i'})$ をそれ
 ぞれ

$$\begin{aligned}
 h'(\varphi_i, l_i; \varphi_{i'}, l_{i'}) &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_i r_{i'} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) \\
 p'(\varphi_i, l_i; \varphi_{i'}, l_{i'}) &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_i \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \sin(\varphi_i - \varphi_{i'}) \\
 q'(\varphi_i, l_i; \varphi_{i'}, l_{i'}) &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) r_{i'} \frac{dr_i}{dl_i} \sin(\varphi_{i'} - \varphi_i) \\
 s'(\varphi_i, l_i; \varphi_{i'}, l_{i'}) &= \left(\frac{1}{r_{ii'}} - \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) \frac{dr_i}{dl_i} \frac{dr_{i'}}{dl_{i'}} \cos(\varphi_{i'} - \varphi_i) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{r_{ii'}} + \frac{1}{r_{ii'}^*} \right) \frac{dz_i}{dl_i} \frac{dz_{i'}}{dl_{i'}} \tag{A1-28}
 \end{aligned}$$

の様に表わし、反対称部分間の磁氣的結合を検討する際に求めた (A1-14'), (A1-18),

(A1-19), (A1-20) 式に対する形状関数 $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \chi'_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) はそれぞれ

$$\alpha'_1 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h' (1-x_1)(1-x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\alpha'_2 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h' (1-x_1) x_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

(A1-29)

$$\alpha'_3 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h' x_1 (1-x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\alpha'_4 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h' x_1 x_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

であり,

$$\beta'_1 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p' (1-x_1)(1-y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\beta'_2 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p' (1-x_1) y_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

(A1-30)

$$\beta'_3 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p' x_1 (1-y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\beta'_4 = \Delta \varphi_m \Delta \varphi_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p' x_1 y_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

であり,

$$\gamma'_1 = \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q' (1-y_1)(1-x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\gamma'_2 = \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q' (1-y_1) x_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

(A1-31)

$$\gamma'_3 = \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q' y_1 (1-x_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\gamma'_4 = \Delta \varphi_n \Delta \varphi_{m'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 q' y_1 x_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

であり,

$$\chi'_1 = \Delta \ell_n \Delta \ell_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s' (1-y_1)(1-y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\chi'_2 = \Delta \ell_n \Delta \ell_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s' (1-y_1) y_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

(A1-32)

$$\chi'_3 = \Delta \ell_n \Delta \ell_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s' y_1 (1-y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

$$\chi'_4 = \Delta \ell_n \Delta \ell_{n'} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 s' y_1 y_2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

となる。対称部分どうしの磁氣的結合は (A1-29), (A1-30), (A1-31), (A1-32) 式を (A1-13), (A1-15), (A1-16), (A1-17) 式にそれぞれ代入しこれらを (A1-21) 式にさらに代入し, 求めることができる。

Appendix 2 導体曲面と軸対称な受動コイルシリーズとの磁氣的結合

Appendix 1 の議論と同様に、導体曲面上の V が $\varphi = \pi i / N_\varphi$ ($i = 0, \dots, 2N_\varphi - 1$) に対して φ に関して対称であるとし、曲面が $\ell = -\ell_N, \dots, -\ell_1, 0, \ell_1, \dots, \ell_N$, $\varphi = \pi m / MN_\varphi$ ($m = -MN_\varphi, \dots, MN_\varphi$) で全体を格子化されているとする。軸対称な受動コイルシリーズの単位電流の作る導体曲面上のベクトルポテンシャルは φ 成分しか持たずこの時磁氣的結合は、(3-35) 式にて与えられる。

$$m = \int_{\ell^-}^{\ell^+} \int_{-\pi}^{\pi} A_\varphi \frac{\partial V_i(\varphi, \ell)}{\partial \ell} r d\varphi d\ell \quad (A2-1)$$

電流ポテンシャル V_i には

$$V_i\left(\varphi + \frac{2\pi i}{N_\varphi}, \ell\right) = V_i\left(-\varphi + \frac{2\pi i}{N_\varphi}, \ell\right) = V_i(\varphi, \ell) \quad (A2-2)$$

$$(i = 0, \dots, 2N_\varphi - 1)$$

の関係があり、 A_φ は φ 方向に一定であるから (A2-1) 式は

$$m = 2N_\varphi \int_{\ell^-}^{\ell^+} \int_0^{\frac{\pi}{N_\varphi}} A_\varphi \frac{\partial V_i}{\partial \ell} r d\varphi d\ell \quad (A2-3)$$

となる。(A1-9), (A1-10) 式と同様に i 番目固有モードの電流ポテンシャル V_i が有限要素 (m, n) 内で φ, ℓ それぞれに対し対応する4つの節点量 $V_i(m, n), V_i(m-1, n), V_i(m, n-1), V_i(m-1, n-1)$ を用いて一次的に表わされるとすると (A2-3) 式は

$$m = 2N_\varphi \sum_{n=1-N}^N \sum_{m=1}^M \{ (V_i(m-1, n) - V_i(m-1, n-1)) \delta_1 + (V_i(m, n) - V_i(m, n-1)) \delta_2 \} \quad (A2-4)$$

となる。ここで

$$\delta_1 = \Delta \varphi_m \int_0^1 \int_0^1 t (1-x) dx dy \quad (A2-5)$$

$$\delta_2 = \Delta \varphi_m \int_0^1 \int_0^1 t x dx dy$$

$$t = r A_\varphi$$

である。 t は系の幾何学量のみで決り、したがって δ_1, δ_2 は固有モードとは関係しない。また有限要素 (m, n) が導体曲面の曲率や大きさに比べ十分小さいとすると t は定数 \bar{t} とおくことができ (A2-5) 式の積分は

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2} \Delta \varphi_m \bar{t} \quad (A2-6)$$

とおくことができる。