

JAERI-M
9761

統計的解析手法に基づく原子炉システム
の動特性解析および異常診断用コード：
STAR

1981年10月

林 光二・尾熊 律雄・渡辺 光一

JAERI-M 9761 訂正版

本誌 p.28 ~ p.29 の ノイズ寄与率 の記述の中に誤りがありました。

p.28 中段から、p.29 の (2.6.29) 式までを、下記の文章に訂正させていただきます。

P.28 中段

2.6.3 多変数フィードバック・システムの解析

ノイズ寄与率

多入力 1 出力システムをさらに発展させ、その出力がそれぞれ他のシステムを通り再びそれぞれの入力にもどってくるフィードバック・システム Fig. 23 を考える。このようなシステムに対しては、AR モデルの係数から (2.5.11) 式を用いて各サブシステムのインパルス応答関数を求め、さらに (2.6.1) 式を用いて周波数応答関数を決定することができる。

このとき、各システム雑音 $\{ u_1(s), \dots, u_k(s) \}$ が独立であるという仮定から、各変数 $x_i(s)$ のパワー・スペクトル $S_{ii}(f)$ は、それぞれの $u_j(s)$ からの寄与分の和として下記のように表現できる。

$$S_{ii}(f) = \sum_{j=1}^k |B_{ij}(f)|^2 \cdot S_{u_j u_j}(f) \quad \dots\dots (2.6.26)$$

ここで、 $B_{ij}(f)$ はクローズド・ループ・システムにおける周波数応答関数であり、オープン・ループ・システムの周波数応答関数行列 $H(f)$ から下式によって計算される。

$$B(f) = H^{-1}(f) \quad \dots\dots (2.6.27)$$

ただし

$$B(f) = \begin{bmatrix} B_{11}(f) & \dots & B_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1}(f) & \dots & B_{kk}(f) \end{bmatrix}, \quad H(f) = \begin{bmatrix} 1 & -H_{12}(f) & \dots & -H_{1k}(f) \\ -H_{21}(f) & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -H_{k1}(f) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

したがって、変数 $x_i(s)$ のパワー・スペクトル $S_{ii}(f)$ に対する雑音源 $u_j(s)$ の寄与の割合 (ノイズ寄与率) $r_{ij}(f)$ は下式で評価できる。

P.29 上段

$$r_{ij}(f) = \frac{|B_{ij}(f)|^2 S_{u_j u_j}(f)}{S_{ii}(f)} \quad \dots\dots (2.6.28)$$

ここで、システム雑音 $u_j(s)$ のパワー・スペクトル $S_{u_j u_j}(f)$ は、雑音源 $\epsilon_j(s)$ の分散および $\epsilon_j(s)$ を有色化する AR モデルの係数 ($a_{jj}(m); m=1, \dots, M$) を使って下記のように表現される。

$$S_{u_j u_j}(f) = \frac{1}{|1 - H_{jj}(f)|^2} S_{\epsilon_j \epsilon_j}(f) = \frac{1}{|1 - H_{jj}(f)|^2} \sigma_{\epsilon_j}^2 \quad \dots\dots (2.6.29)$$

ただし

$$H_{jj}(f) = \sum_{m=1}^M a_{jj}(m) e^{-j \frac{\pi m f}{M}} \quad (f=0, 1, \dots, F)$$

統計的解析手法に基づく原子炉システムの動特性
解析および異常診断用コード：STAR

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

林 光二・尾熊 律雄・渡辺 光一

(1981年9月30日受理)

多変数システムの動特性解析および診断解析のために、ハイブリッド計算機用の計算コードSTAR (Statistical Analysis of Random Data) を作成した。運転中のシステムで得られた多量の時系列データの取り扱いを容易にするために、ハイブリッド計算機の持つ種々の機能を広範に用いている。本計算コードは、データの取り込み、前処理、磁気テープやディスク・システムを使ったデータ管理、時間および周波数領域におけるシステムの動特性解析、得られた結果のグラフィック・ディスプレイ上での表示など種々のルーチンを含んでいる。システムの動特性解析は、時系列データのBlackman-Tukey法によるスペクトル解析あるいはAR (自己回帰) モデリングに基づいて実行される。

本報告は、本コードに用いられている種々のデータ処理方法や解析手法、およびその使用法を幾つかの適用例とともに記述したものである。

JAERI-M 9761

Computer Code "STAR : Statistical Analysis of Random Data"
for Dynamics Analysis and Diagnosis of Nuclear Reactor Systems

Koji HAYASHI, Ritsuo OGUMA and Koichi WATANABE

Division of Reactor Engineering, Tokai Research Establishment, JAERI

(Received September 30, 1981)

The computer code "STAR" is developed for a hybrid computer for dynamics analysis as well as for diagnostic analysis of multivariable systems.

Extensive use is made of various functions equipped in the hybrid computer in order to facilitate handling of a large number of time series data collected from a system in operation. This computer code includes various routines for data acquisition, preprocessing, data management with use of the magnetic tape and disk system, system dynamics analysis in both time and frequency domain, display of the obtained results on the graphic display and so forth. The system dynamics analysis is performed based on spectral analysis by Blackman-Tukey method or autoregressive modeling for the time series data.

In this report, various data handling procedures and analysis methods used in the code, and its usage are described together with some examples.

Keywords : Dynamics Analysis, Diagnostic Analysis, Hybrid Computer,
Spectral Analysis, Autoregressive Modeling, Computer Code,
Nuclear Reactor Systems

目 次

1. はじめに	1
1.1 統計的手法による原子炉動特性解析	1
1.2 原子炉異常診断	1
1.3 計算コードSTARの位置づけ	2
2. 理論およびアルゴリズム	4
2.1 前処理, 統計量の推定および検定	4
2.1.1 サンプリング・データの較正	4
2.1.2 基本的な統計量の推定	5
2.1.3 確率密度関数の推定	5
2.1.4 定常性の検定	6
2.1.5 正規性の検定	7
2.1.6 トレンド除去	8
2.2 相関関数およびスペクトル密度関数の推定	9
2.2.1 相関関数の推定	9
2.2.2 スペクトル密度関数の推定	10
2.3 AR (自己回帰) モデルの同定	13
2.3.1 1変数ARモデルの同定	13
2.3.2 多変数ARモデルの同定	15
2.3.3 操作変数を含む多変数ARモデルの同定	17
2.4 ARモデルによる状態推定と予測	18
2.4.1 1段予測	18
2.4.2 操作変数が入力されるシステムの1段予測	19
2.4.3 状態推定	19
2.5 時間領域でのシステムの動特性解析	20
2.5.1 1入力1出力システムのインパルス応答関数	20
2.5.2 多変数フィードバック・システムのインパルス応答関数の推定	21
2.5.3 ステップ応答関数	22
2.5.4 モード特性関数	22
2.6 周波数領域でのシステムの動特性解析	23
2.6.1 1入力1出力システムの解析	23
2.6.2 多入力1出力システムの解析	26
2.6.3 多変数フィードバック・システムの解析	28
3. コードの概要	35
3.1 ハイブリッド計算機のコード	35

3.2	STARの構成	35
3.2.1	プログラムの構成	35
3.2.2	データ・ファイルの構成	36
3.3	STAR11	37
3.4	STAR22	38
3.5	STAR33	39
3.6	STAR44	40
3.7	STAR55	41
3.8	STAR66	42
3.9	STAR67	43
4.	使用法	58
4.1	コードの準備と実行	58
4.2	コード使用上の制約条件および実行の打ち切り	58
4.3	アナログ信号の前処理とサンプリング	59
4.3.1	信号の増幅	59
4.3.2	アンチ・エリアジング・フィルター	60
4.3.3	サンプリング・タイム Δt , フィルタのカット・オフ周波数 f_c の選択	60
4.3.4	サンプリングの準備	61
5.	適用例	69
6.	おわりに	77
	謝辞	77
	参考文献	78

CONTENTS

1. Introduction	1
1.1 Dynamics analysis of nuclear reactors based on statistical method	1
1.2 Diagnosis of nuclear reactors	1
1.3 Relations between computer code STAR and other tools	2
2. Theory and algorithm	4
2.1 Preprocessing, estimation of statistics and statistical test...	4
2.1.1 Calibration of sampled data	4
2.1.2 Estimation of basic statistics	5
2.1.3 Estimation of probability density function	5
2.1.4 Test of stationarity	6
2.1.5 Test of normality	7
2.1.6 Trend removal.....	8
2.2 Estimation of correlation functions and spectral density functions	9
2.2.1 Estimation of correlation functions	9
2.2.2 Estimation of spectral density functions	10
2.3 Identification of autoregressive model	13
2.3.1 Identification of univariate autoregressive model	13
2.3.2 Identification of multivariate autoregressive model.....	15
2.3.3 Identification of multivariate autoregressive model with manipulated variables	17
2.4 State estimation and prediction using autoregressive model	18
2.4.1 One step prediction	18
2.4.2 One step prediction of system with manipulated variables...	19
2.4.3 State estimation.....	19
2.5 Dynamics analysis of systems in time domain	20
2.5.1 Impulse response function of single input and single output system	20
2.5.2 Estimation of impulse response functions of multivariate system with feedback	21
2.5.3 Step response function	22
2.5.4 Mode characteristics function	22

2.6 Dynamics analysis of systems in frequency domain.....	23
2.6.1 Analysis of single input and single output system.....	23
2.6.2 Analysis of multiple inputs and single output system.....	26
2.6.3 Analysis of multivariate system with feedback.....	28
3. Brief description of computer code.....	35
3.1 Computer codes for hybrid computer.....	35
3.2 Structure of STAR.....	35
3.2.1 Structures of programs.....	35
3.2.2 Structures of data files.....	36
3.3 STAR11.....	37
3.4 STAR22.....	38
3.5 STAR33.....	39
3.6 STAR44.....	40
3.7 STAR55.....	41
3.8 STAR66.....	42
3.9 STAR67.....	43
4. Usage of computer code.....	58
4.1 Preparation and execution of computer code.....	58
4.2 Restrictions imposed on the code and terminating of execution.....	58
4.3 Preprocessing and sampling of analog data.....	59
4.3.1 Amplification of signals.....	59
4.3.2 Anti-aliasing filter.....	60
4.3.3 Selection of sampling interval Δt and cut-off frequency f_c of filter.....	60
4.3.4 Preparation of sampling.....	61
5. Applications.....	69
6. Conclusion.....	77
Acknowledgement.....	77
References.....	78

1. はじめに

1.1 統計的手法による原子炉動特性解析

原子炉の炉心内外の中性子束あるいは炉心を通過する冷却材の温度や流量，さらには圧力容器内の蒸気圧，水位，蒸気流量，給水流量などおおよそ原子炉の計装系で観測される変量は全てある定常値を中心として不規則な変動を示している。これらの観測量は不規則な変動をしながらも統計的にみると本来の物理的な関係を満すという確率変数であり，しかもそれぞれの観測量は現在の値に対し過去の自分自身あるいは他の観測量との間に時間的な相互関係をもっている。

このように，原子炉を統計的ダイナミック・システムとしてとらえる時，原子炉である時間にわたり観測された各種変量の時刻歴データ（時系列データ）を統計的手法を用いて解析することにより，不規則変動成分の中から原子炉システムの動特性に関する情報を引き出すことができる。特にこの種の方法は原子炉にもともと設置されている各種計装の出力信号を利用してデータを取得できる点で有利とされている。

ところで従来行なわれてきた実験的な動特性解析は，あらかじめある動特性の物理モデルを想定しておいてこのパラメータを実験等により決定するという方法が一般的であったが，統計的解析手法の中でもAR (Autoregressive) モデルまたはARMA (Autoregressive-moving average) モデルによる方法では，取得したデータにもとづいて動特性の線形多項式モデルを決定するという立場にある。

いずれの手法を用いたとしても動特性解析の最終的な目的は対象とするシステムのより合理的な制御あるいは予測にある。その意味からも，前述の手法は優れており，実際に工場規模のシステムにおいてARモデルを使用した自動制御が実用化され従来の制御方式以上の成績を収めている。

一方，原子炉システムの場合，動特性解析の目的は現在のところ「より合理的な制御」よりは「安全性の確保」に重点が置かれている。

1.2 原子炉異常診断⁽¹⁾

原子炉をはじめとする原子力関連施設は潜在的なリスクが大きいために，施設の設計，建設に当っては，それぞれの段階で安全性を考慮した設計，高い信頼性を持った技術での建設が行なわれている。さらに施設が一旦運転開始されると，運転中はオペレータによって，また停止中あるいは立入りの可能な範囲においては運転中でもメンテナンス要員によって，定常的な運転が維持できるように施設の状態の監視が行なわれている。

ところで，運転中に異常が生じたとき，その原因や場所が直ちに確認できる場合には，オペレータやメンテナンス要員によって対策が施されるが，原因や場所が不明であり今後その異常

かどのように進行していくか判断できない場合、それまでに得られている施設の状態に関する種々の情報を駆使してその異常状態を正確に把握した後、その異常の程度と場所を明らかにし、さらに異常の進展の予測を可能にするといった一連のデータ解析すなわち診断が必要となる。

異常現象の性格として、異常発生後直ちに処置をしないと重大な故障や事故に発展する場合と、比較的時間をかけて調査を行ないこの結果に基づいて処置をしても十分間に合う場合がある。特に前者の場合、警報系やスクラム系などの安全系統あるいはオペレータの機敏な判断によって危険を回避する事はできるが、その原因や場所などの評価は残されたデータや機器の状態から調査によって明らかにされねばならない。このような異常状態あるいは故障、事故後の施設の状態を評価する作業も広い意味で診断技術のカテゴリーに属すると考えられる。

本コードの基本となっている統計的解析手法は、先にも述べた様にシステムで観測される各種信号(中性子束、温度、圧力、流量、音響など)の不規則変動分をデータとして、システムの動特性解析を行なうものである。したがって、システムに何らかの異常またはその前兆現象が生じた場合に、過去の正常な場合に解析された結果とつき合わせる事によって、異常の早期発見、発生場所の同定、異常の性質、程度の評価からその原因を推定し、さらに今後の異常の進展の予測を行なう事が可能である。

特に、生じた異常の原因、場所、今後の動向などが不明な場合に行なわねばならない情報収集作業は、現在および過去にわたり得られた有限個のデータから、いかに多くの情報を引き出すかが重要となり、種々の分野の異なった手法から引き出された結果を集約することにより、異常現象に対する正しい理解と判断がなされるべきである。その意味からも、統計的解析手法の異常診断への応用は重要であろう。

1.3 計算コードSTARの位置づけ

原子炉雑音などの時系列データを解析する場合、通常は3つの段階の処理がなされる。すなわち、アナログデータのデジタル化、各種手法による計算処理、そして結果のグラフ表示である。

現在のところ、ハードウェアとしてはこれらの機能を全て一体に組みあげたスペクトル・アナライザが市販されている。この装置は処理時間の速さと装置のコンパクトさのため、実験室レベルでの使用は独壇場であるが、ハードウェアの制限として通常2変数しかあつかえない事、ソフトウェアの制限として多くの場合FFT(高速フーリエ変換)を基本とするスペクトル解析(しかも1入力1出力モデルを対象としたもの)しか実行できないという制約がある。

一方、A/D変換などのアナログ信号処理は外部装置で適宜行なうこととし、各種手法による計算処理ならびにグラフ処理に重点を置くものとして、計算センターに設置されているような汎用大型計算機を使用する方法がある。この場合、ソフトウェアに自由度があり計算処理の速さが優れているが、その反面、専用の入力装置としてアナログ信号処理装置が用意されている事は希であり、しかも処理の待ち時間が大きいという事を考え合わせると、全体を通じた処理時間は遅くなり即応性に欠けるという制約がある。

計算コードSTARは、この両者の優れた点(処理の即応性およびソフトウェアの自由度)を

実現する目的で、ハイブリッド計算機のソフトウェアとして作られたものである。したがって、3つの段階の処理を一貫して実行することが可能である。

使用されている解析手法は、赤池らのTIMSAC⁽²⁾を基本とし、これにシステムの動特性解析に使われるいくつかの手法(状態推定, ステップ応答, モード特性関数, 伝達関数), さらには1次元ARモデルの同定に際してBurgのアルゴリズムを含めるといった拡張がなされている。さらにデータの前処理に関する部分は、筆者の一部によって作成されたハイブリッド計算機用コードMLCOSP⁽³⁾およびFILEMKを基本として、データ管理, 統計的手法による前処理, 検定が新たに付け加えられている。また, グラフ処理ルーチンは前述のコードの他, DYSAC⁽⁴⁾に使われたルーチンを基本として全ての結果が表示できるように新たに作成されたものである。

2. 理論およびアルゴリズム

この章では計算コードSTARに使われている時系列データの前処理、検定、解析の理論について述べる。これらの理論は時間領域および周波数領域での変数の表現を全て離散型化し、しかも有限個として取り扱っており、大部分はそのまま計算アルゴリズムとして用いる事ができる。

システムの動特性解析においては、動特性を記述する関数が種々のモデルを仮定して定義されているため、各モデルに付随した固有の問題があり、これらを念頭に入れておかないと使用方法を誤り、結果的に間違った結論をひき出す事になりかねないので注意を要する。

2.1 前処理、統計量の推定および検定

2.1.1 サンプリング・データの較正

通常の時系列解析では、実験で得られた測定値に対してその定常値を差引いた変動分のみを取り扱う。この変動分は、センサーの出力信号レベルがデータ・レコーダやADコンバータの最大入力レベルに比べて小さい場合には、増幅してやらなければならないし、出力信号特性そのものが直線性を持たない場合もあるので、必ずしも物理量とは対応していない。

今、実験である物理量Pを時間Tに渡り測定し、これをサンプリング間隔 Δt でサンプリングして、次の様なデータが得られたとする。

$$\{y(s); s=1, 2, \dots, N\} \quad \dots\dots (2.1.1)$$

$$\text{ただし, } T = N \cdot \Delta t$$

このとき、 $y(s)$ は次の様に表現される。

$$y(s) = \{P(s) \cdot D(p) - V_{ST}\} \prod_{m=1}^M G(m) \quad \dots\dots (2.1.2)$$

ここで、 $P(s)$; 時刻 s における物理量の値

$D(p)$; センサーの出力特性

V_{ST} ; 測定される物理量の定常値に対応するアンプのバイアス

$G(m)$; 直列につながれたM台のアンプのうち、 m 番目のゲイン

したがって、求める物理量の変動分 $x(s)$ は、下式で計算される。

$$x(s) = \left\{ P(s) - \frac{V_{ST}}{D(p)} \right\} = \frac{y(s)}{D(p) \cdot \prod_{m=1}^M G(m)} \quad \dots\dots (2.1.3)$$

2.1.2 基本的な統計量の推定

不規則な変動を示す定常時系列 $\{x(s); s=1, \dots, N\}$ が与えられているとする。このとき、この時系列の1次モーメント(平均) μ_x および2次モーメント(2乗平均)は、それぞれ下式により推定される。

$$\overline{x^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \{x(s)\}^n \quad \dots\dots (2.1.4)$$

ここで $\begin{cases} n=1 \text{ のとき平均} \\ n=2 \text{ のとき2乗平均} \end{cases}$

時系列 $\{x(s)\}$ から平均を除いた新たな系列について2次モーメントを計算したものが分散である。

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \{x(s) - \mu_x\}^2 \quad \dots\dots (2.1.5)$$

この分散、平均と2乗平均の間には次の関係がある。

$$\overline{x^2} = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad \dots\dots (2.1.6)$$

さらに、平均を除いた新たな系列の3次、4次のモーメント μ_{3x}, μ_{4x} を分散の平方根 σ (標準偏差) で規格化したスキューネス(歪み度) およびクルトシス(尖り度) は次式で推定される。

$$r_1 = \frac{\mu_{3x}}{\sigma^3} \quad \dots\dots (2.1.7)$$

$$r_2 = \frac{\mu_{4x}}{\sigma^4} \quad \dots\dots (2.1.8)$$

以上の統計量は時系列のもつ確率密度関数の形状を定量的に表わす指標となる。分散はすその部分の拡がりの程度を、スキューネスは対称性の度合を、クルトシスは山の部分の平坦さの度合を表わしている。例えば、時系列がガウス過程であれば $r_1=0, r_2=3$ となる。時系列のもつ確率密度関数がガウス型のものより正側に歪んでいれば r_1 は正の値を示し、ガウス型のものより尖っていれば r_2 は3より上の値を示す。

2.1.3 確率密度関数の推定

時系列 $\{x(s); s=1, \dots, N\}$ の確率密度関数 $P_x(\ell)$ は次式で推定される。

$$P_x(\ell) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta x} \sum_{s=1}^N \frac{n_x(\ell, s)}{N} \quad \dots\dots (2.1.9)$$

$$\text{ただし } n_x(\ell, s) = \begin{cases} 1 \cdots \Delta x \cdot (\ell - \frac{1}{2}) < x(s) \leq \Delta x \cdot (\ell + \frac{1}{2}) \\ 0 \cdots \cdots \cdots \text{その他} \end{cases}$$

$$\ell = -L, -L+1, \dots, 0, \dots, L$$

これはヒストグラムによる方法であり、データ数 N が十分大きく、振幅の間隔 Δx が十分小さ

いときに良い推定値が得られる。

2.1.4 定常性の検定

時系列 $\{x(s); s=1, \dots, N\}$ が定常であるかどうかは非常に重要である。何故ならば、前節の統計量の推定から後述する種々の手法に至る全ての理論が定常である事を前提として組み立てられているからである。ここでは連の検定を応用して定常性を検定する手法について述べる。

まずこの手法を適用するにあたり、時系列 $\{x(s)\}$ は次の条件が満たされていることを仮定する。

- (i) 問題となる非定常性が適切に反映されていること
- (ii) 非定常的なトレンド成分が分離できる程度にデータ数 N が大きいこと。
- (iii) $\{x(s)\}$ の 2 乗平均系列を考えたとき、非定常性はトレンドとして現われる性格をもつこと

まず、検定すべき時系列を M 分割し

$$\{x(\ell); \ell=1, \dots, L\}_m; m=1, \dots, M \quad \dots\dots (2.1.10)$$

とする。このとき、それぞれの小区間系列の 2 乗平均 $X(m)$ から成る 2 乗平均系列を考える。

$$\{X(m); m=1, \dots, M\} \quad \dots\dots (2.1.11)$$

ここで

$$X(m) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \{x_m(\ell)\}^2$$

この系列にトレンドが存在するか否か、あるいは予期される変動以外のものが存在するか否かを調べる。これには連の検定を用いる。(2.1.11) 式から平均値を除いた値の符号系列は下記のように表現される。

$$\{\text{sign } X'(m); m=1, \dots, M\}$$

$$\text{ここで } X'(m) = X(m) - \mu_x, \mu_x \text{ は (2.1.11) の平均値} \quad \dots\dots (2.1.12)$$

このとき、2 乗平均系列の連の総数 r_M は、以下のように計算される。

$$r_M = 1 + \sum_{m=1}^{M-1} S[\text{sign } X'(m), \text{sign } X'(m+1)] \quad \dots\dots (2.1.13)$$

$$\text{ここで } S(+, +) = S(-, -) = 0$$

$$S(+, -) = S(-, +) = 1$$

系列 $\{X(m)\}$ においてトレンド成分(傾向変動さらには周期変動をも含めて)が存在する場合には、連の総数は少なくなり、逆に短い周期をもつ確定的な変動分が支配的な場合、連の総数は多くなる。

一般に系列が不規則過程であれば(2.1.12)式の符号系列の+ - の数は同数となる。したがって、ある測定された系列 $\{x(s)\}$ から計算された連の総数 r_M は、 M が十分に大きい場合には、

次のような平均 μ_r および分散 σ_r^2 をもつガウス分布で近似されるような分布関数に従う確率変数となる。

$$\mu_r = \frac{M}{2} + 1 \quad \dots (2.1.14)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{M(M-2)}{4(M-1)} \quad \dots (2.1.15)$$

したがって、時系列 $\{x(s)\}$ の定常性の成否すなわち 2 乗平均系列におけるトレンドの有無を判定するには、ある有意水準 α を設定したときに (2.1.13) 式で得られた連の総数 r_M が下式を満足するか否かの判定を行なえば良い。

$$\text{Prob} [r_{M, 1-\frac{\alpha}{2}} < r_M < r_{M, \frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha \quad \dots (2.1.16)$$

ここで $\alpha = 0.05$ とするとき

$$\begin{aligned} r_{M, 1-\frac{\alpha}{2}} &= \mu_r - 2\sqrt{\sigma_r^2} \\ r_{M, \frac{\alpha}{2}} &= \mu_r + 2\sqrt{\sigma_r^2} \end{aligned}$$

この判定によって、 r_M が棄却域にあると判断された場合に、2 乗平均系列にはトレンドが存在する、したがって元の時系列 $\{x(s)\}$ は非定常であるという検定がなされる。

2.1.5 正規性の検定

時系列 $\{x(s); s=1, \dots, N\}$ の正規性を検定する事も重要である。ここでは、 χ^2 検定を使った方法で検定を行なう。まず、ガウス型確率密度関数 $P_G(\ell)$ は下式で与えられる。

$$P_G(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(\ell \Delta x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \dots (2.1.17)$$

$$\ell = -L, -L+1, \dots, 0, \dots, L$$

ただし平均 μ_x および分散 σ_x^2 はそれぞれ (2.1.4), (2.1.5) 式で推定されたものである。

一方、時系列のもつ確率密度関数の推定値 $P_E(\ell)$ は (2.1.9) 式によって得られる。

ここで、 $P_G(\ell)$, $P_E(\ell)$ はクラス間隔およびクラス数がともに同じ値 Δx , $(2L+1)$ の関数であるとき、両者の一致性は下記の関数で評価できる。

$$X^2 = \sum_{\ell=-L}^L \frac{\{P_E(\ell) - P_G(\ell)\}^2}{P_G(\ell)} \quad \dots (2.1.18)$$

この X^2 の値は、 χ^2 分布に近似した分布を示す。 X^2 の自由度 n は次式で与えられる。

$$n = (2L+1) - 3 \quad \dots (2.1.19)$$

X^2 が大きくなると、ガウス型の $P_G(\ell)$ と推定値の $P_E(\ell)$ の一致性が悪化する事になるから、 χ^2 分布を利用した X^2 の右側検定を行なう事により、正規性の検定が行なえる。

ある有意水準 α を設定したときに下式が満足されれば、時系列 $\{x(s)\}$ は正規性を満足すると判定される。

$$\text{Prob}[X^2 \leq \chi_{n;\alpha}^2] = \alpha \quad \dots\dots (2.1.20)$$

ここで $\chi_{n;\alpha}^2$: 有意水準 α , 自由度 n のときの χ^2 の値
 χ^2 の値は, $n = 1 \sim 30$ については χ^2 分布表を用い, $n > 30$ については下記の近似式で算出することとする。

$$\chi_{n;\alpha}^2 = (\sqrt{n - 0.5} + 1.163)^2 \quad \dots\dots (2.1.21)$$

ただし $\alpha = 0.05$ とする。

2.1.6 トレンド除去

後述するスペクトル解析においては、観測しようとする周波数領域よりもはるかに低い周波数の変動成分がデータ中に存在する場合、有害となる場合がある。これを除去する方法として、最小2乗法を用いた多項式のフィッティングによるものがある。

時系列 $\{x(s); s = 1, \dots, N\}$ に存在するトレンド成分が、次の K 次多項式で近似できるものとする。

$$y(s) = \sum_{k=0}^K a_k(k) \cdot s^k \quad \dots\dots (2.1.22)$$

$$= a_k(0) + a_k(1) \cdot s + \dots\dots + a_k(K) \cdot s^k$$

$s = 1, 2, \dots, N$

実際には多項式の次数 K と係数 $a_k(k)$ は未知であり、これをデータから得られる情報だけで決定する必要がある。

まず、係数 $\{a_k(k); k = 0, 1, \dots, K\}$ は以下のようにして決定される。時系列 $\{x(s)\}$ とトレンド成分 $\{y(s)\}$ の残差の2乗平均値は下式で表わされる。

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \{x(s) - y(s)\}^2 \quad \dots\dots (2.1.23)$$

これを最小化するように (2.1.22) 式の係数 $\{a_k(k)\}$ を決定するには、次の $K+1$ 元連立方程式を解けば良い。

$$\sum_{k=0}^K a_k(k) \cdot \sum_{s=1}^N s^{k+\ell} = \sum_{s=1}^N x(s) \cdot s^\ell \quad \dots\dots (2.1.24)$$

ただし $\ell = 0, 1, \dots, K$

これは行列表示になおすと、計算が簡略化される。

$$A_K = \begin{pmatrix} a_k(0) \\ a_k(1) \\ \vdots \\ a_k(K) \end{pmatrix}, \quad S_K = \sum_{s=1}^N \begin{pmatrix} 1 & s & \dots & s^K \\ \vdots & s & s^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^K & \dots & \dots & s^{2K} \end{pmatrix}, \quad X_K = \sum_{s=1}^N \begin{pmatrix} x(s) \\ x(s) \cdot s \\ \vdots \\ x(s) \cdot s^K \end{pmatrix}$$

とおくと、求めるK次多項式の係数は下式で計算できる。

$$A_K = S_K^{-1} \cdot X_K \quad \dots\dots (2.1.25)$$

またトレンド成分をフィットする多項式の次数Kは、情報量規準AICが最小となるように決定すれば良い。

$$AIC(K) = N \cdot \log \hat{\sigma}_K^2 + 2(K+1) \quad \dots\dots (2.1.26)$$

2.2 相関関数およびスペクトル密度関数の推定

2.2.1 相関関数の推定

(1) 直接法

2つの時系列データ $\{x_1(s), x_2(s); s=1, \dots, N\}$ が与えられているとき、自己相関および相互相関関数は下式で推定される。

$$\begin{cases} R_{11}(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-\ell} x_1(s) \cdot x_1(s+\ell) \\ R_{11}(-\ell) = R_{11}(\ell) \end{cases} \quad \dots\dots (2.2.1)$$

$$\begin{cases} R_{21}(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-\ell} x_1(s) \cdot x_2(s+\ell) \\ R_{21}(-\ell) = R_{12}(\ell) \end{cases} \quad \dots\dots (2.2.2)$$

ただし $\ell = 0, 1, \dots, L$

(2) FFT (高速フーリエ変換) による方法

$\{x_1(s), x_2(s); s=1, \dots, N\}$ からFFT法により推定したパワーおよびクロス・スペクトル密度関数として、 $S_{11}(f), S_{21}(f) (f=0, \pm 1, \dots, \pm F)$ が与えられているとき、Wiener-Khinchine の公式を利用して、これらを逆フーリエ変換することにより自己相関および相互相関関数を推定することができる。

$$R_{11}(\ell) = \frac{1}{2\Delta t F} \sum_{f=-F}^F S_{11}(f) e^{j \frac{\pi f \ell}{F}} \quad \dots\dots (2.2.3)$$

$$R_{21}(\ell) = \frac{1}{2\Delta t F} \sum_{f=-F}^F S_{21}(f) e^{j \frac{\pi f \ell}{F}} \quad \dots\dots (2.2.4)$$

ただし $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$

(3) MEM (最大エントロピー法)

1次元の時系列データ $\{x(s); s=1, \dots, N\}$ についてBurgのアルゴリズムによるARモデル(MEM)を同定する過程で、情報エントロピーを最大にするような自己相関関数が推定でき

る。(詳しくは、2.3.1のBurgの方法を参照されたい)

2.2.2 スペクトル密度関数の推定

(1) Blackman-Tukey法

(2.2.1), (2.2.2)式のように相関関数 $R_{11}(\ell)$, $R_{21}(\ell)$ ($\ell=1, \dots, L$)が与えられているとき、パワーおよびクロス・スペクトル密度関数は下式で推定できる。

$$S_{11}(f) = \sum_{u=-U}^U W(u) \cdot S'_{11}(f-u) \quad \dots\dots (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } S'_{11}(f) &= \Delta t \sum_{\ell=-L}^L R_{11}(\ell) e^{j\frac{\pi f \ell}{F}} \\ &= \Delta t \left\{ R_{11}(0) + 2 \sum_{\ell=1}^{L-1} \cos\left(\frac{\pi f \ell}{F}\right) R_{11}(\ell) + (-1)^f R_{11}(L) \right\} \end{aligned}$$

$$S_{21}(f) = \sum_{u=-U}^U W(u) \cdot S'_{21}(f-u) \quad \dots\dots (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } S'_{21}(f) &= \Delta t \sum_{\ell=-L}^L R_{21}(\ell) e^{-j\frac{\pi f \ell}{F}} \\ &= \Delta t \left\{ R_{21}(0) + \sum_{\ell=1}^{L-1} (R_{21}(\ell) + R_{12}(\ell)) \cos\left(\frac{\pi f \ell}{F}\right) + (-1)^f (R_{21}(L) + R_{12}(L)) \right\} \\ &\quad + j \Delta t \left\{ \sum_{\ell=1}^{L-1} (R_{21}(\ell) - R_{12}(\ell)) \sin\left(\frac{\pi f \ell}{F}\right) \right\} \end{aligned}$$

ただし $f=0, 1, \dots, F$ 。また $\{W(u), u=-U, \dots, U\}$ はウィンド関数である。例えば、ハンニグ・ウィンド係数の場合、次の値をとる。

$$\begin{cases} W(1) = 0.25 \\ W(0) = 0.5 \\ W(-1) = 0.25 \end{cases} \quad \dots\dots (2.2.7)$$

(2) FFT (高速フーリエ変換) による方法

時系列 $\{x_1(s), x_2(s); s=1, \dots, N\}$ が与えられている。このデータを K 個の小区間 $\{x_1(s), x_2(s); s=1, \dots, M\}_k$ ($k=1, \dots, K$)に分割したとき、もとのデータのパワーおよびクロス・スペクトル密度関数は下式で推定される。

$$S_{11}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_{11}(f) \quad \dots\dots (2.2.8)$$

$$\text{ここで } S_{11}(f) = \frac{K}{N \Delta t} |X_1(f)|^2$$

$$S_{21}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_{21}(f) \quad \dots\dots (2.2.9)$$

$$\text{ここで } S_{21}(f) = \frac{K}{N \Delta t} X_2(f) \cdot X_1^*(f)$$

ただし、 $X_k(f)$, $X_k(s)$ はそれぞれ $\{x_k(s)\}$ $\{x_k(s)\}$ のフーリエ成分であり次式で計算される。

$$X(f) = \Delta t \cdot \sum_{s=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} x(s) \cdot e^{-j \frac{2\pi f s}{F}} \quad \dots\dots (2.2.10)$$

($f = 0, 1, \dots, F$)

(3) AR (自己回帰) モデルによる方法

1変数ARモデル (Yule-Walker法) の場合

時系列 $\{x(s); s=1, \dots, N\}$ の1変数ARモデルが Yule-Walker 法によって同定され、係数 $\{a_m(m); m=1, \dots, M\}$ および残差系列の共分散 σ_M^2 が与えられているとき、パワー・スペクトル密度関数 $S_{xx}(f)$ は下式で推定される。

$$S_{xx}(f) = \frac{\Delta t \cdot \sigma_M^2}{\left| 1 - \sum_{m=1}^M a_m(m) \cdot e^{-j \frac{\pi f m}{F}} \right|^2} \quad \dots\dots (2.2.11)$$

($f = 0, 1, \dots, F$)

1変数ARモデル (MEM) の場合

時系列 $\{x(s); s=1, \dots, N\}$ の1変数ARモデルが Burg 法によって同定され、AR係数(予測誤差フィルタ係数)として $\{r_m(m); m=1, \dots, M\}$ および残差系列の共分散(予測誤差フィルタの正逆両方向の出力信号の平均パワー)として P_M が与えられているとき、パワー・スペクトル密度関数 $S_{xx}(f)$ は下式で推定される。

$$S_{xx}(f) = \frac{\Delta t P_M}{\left| 1 + \sum_{m=1}^M r_m(m) e^{-j \frac{\pi f m}{F}} \right|^2} \quad \dots\dots (2.2.12)$$

($f = 0, 1, \dots, F$)

多変数ARモデルの場合

時系列 $\{x_1(s), \dots, x_k(s); s=1, \dots, N\}$ のARモデルが Yule-Walker 法によって同定され、係数行列 $\{A_M(m); m=1, \dots, M\}$ および残差系列の共分散行列 Σ_M が与えられているとき、スペクトル密度行列 $S(f)$ は下式で推定される。

$$S(f) = \{A_M^{-1}(f)\} \Sigma_M \{A_M^{*-1}(f)\}^t \quad \dots\dots (2.2.13)$$

($f = 0, 1, \dots, F$)

ここで $A_M(f) = \sum_{m=0}^M A_M(m) e^{-j \frac{\pi f m}{F}}$

- 1 : 逆行列, * : 共役, t : 転置行列

ただし

$$S(f) = \begin{pmatrix} S_{11}(f) & \dots & S_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k1}(f) & \dots & S_{kk}(f) \end{pmatrix}, \quad \Sigma_M = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \dots & \sigma_{1k}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1}^2 & \dots & \sigma_{kk}^2 \end{pmatrix}_M$$

$$A_M(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(f) & \cdots & \alpha_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1}(f) & \cdots & \alpha_{kk}(f) \end{pmatrix}_M, \quad A_M(m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11}(m) & \cdots & a_{1k}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(m) & \cdots & a_{kk}(m) \end{pmatrix}_M \\ = -I & ; m=0 \end{cases}$$

I は単位行列

操作変数を含む多変数ARモデルの場合

前節は、取り扱う変数が全て被制御変数である場合のスペクトルであった。これに対し、操作変数 $\{y_1(s), \dots, y_j(s)\}$ を含む場合の時系列 $\{x_1(s), \dots, x_k(s)\} (s=1, \dots, N)$ のARモデルが同定され、被制御変数に関する部分の係数行列 $\{A_M(m); m=1, \dots, M\}$ 、残差系列の共分散行列 Σ_M および操作変数に関する部分の係数行列 $\{B_M(m); m=1, \dots, M\}$ が与えられているとき、被制御変数に関するスペクトル密度行列 $S_x(f)$ は以下のように推定される。

(i) 操作変数 (y_1, \dots, y_j) に関するスペクトル密度行列 $S_y(f)$ を計算する。

$$S_y(f) = \begin{pmatrix} S_{y11}(f) & \cdots & S_{y1j}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{yj1}(f) & \cdots & S_{yjj}(f) \end{pmatrix} \quad \dots\dots (2.2.14)$$

この計算には、前出の計算法が使える。ただし、操作変数が全て独立な場合、非対角項は0と置く。

(ii) このとき、被制御変数のスペクトル密度行列 $S_x(f)$ は次式で推定される。

$$S_x(f) = \{A_M^{-1}(f)\} \Sigma_M \{A_M^{*-1}(f)\}^t + \{A_M^{-1}(f)\} B_M(f) \cdot S_y(f) B_M^*(f) \{A_M^{-1}(f)\}^t \quad \dots\dots (2.2.15)$$

ここで $A_M(f) = \sum_{m=0}^M A_M(m) e^{-j \frac{\pi f m}{F}}$

$$B_M(f) = \sum_{m=1}^M B_M(m) e^{-j \frac{\pi f m}{F}}$$

ただし

$$S_x(f) = \begin{pmatrix} S_{11}(f) & \cdots & S_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k1}(f) & \cdots & S_{kk}(f) \end{pmatrix}, \quad \Sigma_M = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1k}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1}^2 & \cdots & \sigma_{kk}^2 \end{pmatrix}_M$$

$$A_M(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(f) & \cdots & \alpha_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1}(f) & \cdots & \alpha_{kk}(f) \end{pmatrix}_M, \quad A_M(m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11}(m) & \cdots & a_{1k}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(m) & \cdots & a_{kk}(m) \end{pmatrix}_M \\ = -I & ; m=0 \end{cases}$$

$$B_M(f) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(f) & \cdots & \beta_{1j}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1}(f) & \cdots & \beta_{kj}(f) \end{pmatrix}_M, \quad B_M(m) = \begin{pmatrix} b_{11}(m) & \cdots & b_{1j}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}(m) & \cdots & b_{kj}(m) \end{pmatrix}_M$$

2.3 AR (自己回帰) モデルの同定

2.3.1 1変数ARモデルの同定

定常不規則な変動をするある変数 x の現在の値が下記のように表現できるとする。

$$x(s) = \sum_{m=1}^M a_m(m) x(s-m) + \epsilon(s) \quad \dots\dots (2.3.1)$$

ここで、 $\{ a_m(m); m=1, \dots, M \}$ は係数

$\epsilon(s)$ は、白色雑音

すなわち、 x の現在の値 $x(s)$ は、過去の値に適当な重み (係数) をかけた (線形関係にある) 部分と過去の値と相関を持たない白色雑音の部分から構成されている。このモデルをAR(自己回帰) モデルと呼ぶ。(Fig. 2.1)

有限長の時系列データ $\{ x(s); s=1, \dots, N \}$ が与えられているとき、このモデルを同定するには、何らかの方法で係数 $\{ a_m(m) \}$ と残差系列 $\{ \epsilon(s) \}$ の共分散 σ_M^2 を決めてやれば良い。

Yule - Walker 法

$\{ x(s) \}$ の相関関数 $\{ R(\ell); \ell=0, 1, \dots, M \}$ とAR係数 $\{ a_m(m); m=1, \dots, M \}$, 残差系列の共分散 σ_M^2 の間には次の関係がある。(Yule - Walker 方程式)

$$\begin{bmatrix} R(0) & \dots & R(M) \\ R(1) & R(0) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R(M) & \dots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a(1) \\ \vdots \\ -a(M) \end{bmatrix}_M = \begin{bmatrix} \sigma_M^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (2.3.2)$$

ここで相関関数 $\{ R(\ell); \ell=0, 1, \dots, M \}$ は既知であるとする。また $\{ a_m(m); m=1, \dots, M \}$, σ_M^2 は未知である。このとき、 $(M+1)$ 個の未知のパラメータを決定するには、上記の $(M+1)$ 元連立1次方程式を解けば良い。

$M=1$ のとき、上式を解いて次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_1(1) &= \frac{R(1)}{R(0)} \\ \sigma_1^2 &= R(0) (1 - a_1^2(1)) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (2.3.3)$$

$M=2$ 以降については、次の漸化式によって前段階の計算結果を利用することができ、希望の次数 M まで逐次計算を行えば良い。

$$\left. \begin{aligned} a_M(M) &= \frac{1}{\sigma_{M-1}^2} \cdot \left\{ R(M) - \sum_{m=1}^{M-1} a_{M-1}(m) \cdot R(M-m) \right\} \\ a_m(m) &= a_{M-1}(m) - a_M(M) \cdot a_{M-1}(M-m); m=1, \dots, M-1 \\ \sigma_M^2 &= \sigma_{M-1}^2 (1 - a_M^2(M)) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

もう1つの未知数 M (モデルの次数) の決定には、通常の場合、最終予測誤差 $FPE(M)$ あるいは情報量規準 $AIC(M)$ が評価関数として用いられ、これを最小とする M をモデルの次数とする。

$$\left. \begin{aligned} \text{FPE}(M) &= \frac{N+(M+1)}{N-(M+1)} \cdot \sigma_M^2 \\ \text{AIC}(M) &= N \cdot \log \sigma_M^2 + 2(M+1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.3.5)$$

モデルの次数Mの決定には、さらに次式で定義されるパーシャル自己相関関数の0への収束性が参考となる。

$$\hat{R}(M) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_M^2}} \cdot a_M(M) \quad (M=1, 2, 3, \dots) \dots\dots (2.3.6)$$

Burg 法

(2.3.2) 式と同様な Yule - Walker 方程式を考える。

$$\begin{bmatrix} R(0) & \dots & R(M) \\ R(1) & R(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R(M) & \dots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(M) \end{bmatrix}_M = \begin{bmatrix} R_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots (2.3.7)$$

ここで相関関数 $\{ R(\ell); \ell=0, 1, \dots, M-1 \}$ は既知であるとする。 $R(M)$, $\{ \gamma_m(m); m=1, \dots, M \}$, P_M は未知である。このとき、 $(M+2)$ 個の未知のパラメータを決定するには、まず $\gamma_M(M)$ を上式とは独立に決定し、その後上式を解けば良い。

$\gamma_M(M)$ を決定するには、次の仮定が必要である。まず、ARモデルを予測誤差フィルタと考えるとき、その出力信号の2乗平均値 P_M の推定値は下式で与えられる。

$$P_M = \frac{1}{2(N-M)} \sum_{s=1}^{N-M} \left\{ (x(s) + \sum_{m=1}^M \gamma_M(m) x(s+m))^2 + (x(s+M) + \sum_{m=1}^M \gamma_M(m) x(s+M-m))^2 \right\} \dots\dots (2.3.8)$$

Yule - Walker方程式を解いてパラメータを決定するに際し、上記の P_M はその値が取り得る範囲内で常に最小となるように決定すること。

以上の仮定から、次の関係式が成立する。

$$\gamma_M(M) = \frac{-2 \sum_{s=1}^{N-M} f_M(s) \cdot b_M(s)}{\sum_{s=1}^{N-M} \{ f_M^2(s) + b_M^2(s) \}} \dots\dots (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad f_M(s) &= f_{M-1}(s) + \gamma_{M-1}(M-1) \cdot b_{M-1}(s) \\ b_M(s) &= b_{M-1}(s+1) + \gamma_{M-1}(M-1) \cdot f_{M-1}(s+1) \end{aligned}$$

ただし、 $M=1$ のとき $f_1(s) = x(s)$

$$b_1(s) = x(s+1)$$

このようにして、 $\gamma_M(M)$ が決定されると、 $\{ R(\ell); \ell=0, \dots, M-1 \}$ を与えることにより、(2.3.7) 式を解くことができる。

$M=1$ のとき、

$$\left. \begin{aligned} R(1) &= -R(0) \cdot \gamma_1(1) \\ P_1 &= R(0) \cdot (1 - \gamma_1^2(1)) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.3.10)$$

M=2以降については、次の漸化式によって前段階の計算結果を利用することができ、希望の次数Mまで逐次計算を行なえば良い。

$$\begin{aligned} \gamma_M(m) &= \gamma_{M-1}(m) + \gamma_M(M) \cdot \gamma_{M-1}(M-m); m=1, \dots, M-1 \\ R(M) &= -\sum_{m=1}^M R(M-m) \cdot \gamma_M(m) \dots\dots (2.3.11) \\ P_M &= P_{M-1} (1 - \gamma_M^2(M)) \end{aligned}$$

もう1つの未知数M(モデルの次数)の決定には、最終予測誤差FPE(M)あるいは情報量規準AIC(M)が評価関数として用いられることがある。

$$\left. \begin{aligned} FPE(M) &= \frac{N+(M+1)}{N-(M+1)} \cdot P_M \\ AIC(M) &= N \cdot \log P_M + 2(M+1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.3.12)$$

一般に、このARモデル同定の過程で得られる自己相関関数{R(l); l=0, 1, ..., M, ...}は原点を除いて、直接法で求めた結果とは等しくない。さらに、現在{R(l); l=0, ..., M}が得られているとき、AR係数{γ_M(m); m=1, ..., M}を利用して、l>Mについての相関関数を外挿計算することができる。

$$R(l) = -\sum_{m=1}^M R(l-m) \gamma_M(m) \quad (l=M+1, \dots) \dots\dots (2.3.13)$$

2.3.2 多変数ARモデルの同定

定常不規則な変動をするk個の変数X(x₁, ..., x_k)の現在の値が下記のように表現できるとする。

$$X(s) = \sum_{m=1}^M A_M(m) X(s-m) + U(s) \dots\dots (2.3.14)$$

ここで、

$$X(s) = \begin{bmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_k(s) \end{bmatrix}, \quad A_M(m) = \begin{bmatrix} a_{11}(m) & \dots & a_{1k}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(m) & \dots & a_{kk}(m) \end{bmatrix}_M, \quad U(s) = \begin{bmatrix} \epsilon_1(s) \\ \vdots \\ \epsilon_k(s) \end{bmatrix}$$

ただし、ε₁(s), ..., ε_k(s)は独立な白色雑音

多変数ARモデルの中でも特に簡単な2変数の場合については、Fig.2.2で説明できる。まず、Fig.2.2(a)のような2変数フィードバック・システムを考える。このシステムは、AB2つのサブシステムから構成されており、それぞれx₁(s)およびx₂(s)によって駆動されている。このx₁(s), x₂(s)はそれぞれABの出力にシステム雑音u₁(s), u₂(s)が加わったものである。

したがって、全体のシステムは、2つの雑音源 $u_1(s), u_2(s)$ によって駆動されている。Fig. 2.2(b)は、これらのシステム雑音を白色化して、最終的にシステムを駆動する雑音源として白色雑音 $\epsilon_1(s), \epsilon_2(s)$ を想定したモデルである。これが Fig. 2.2(a) のシステムについての AR 表現である。

一般の多変数 AR モデルはさらに複雑となり、 k 変数の場合 Fig. 2.3 のように、全体のシステムは k 個の独立な雑音源 $\epsilon_1(s), \dots, \epsilon_k(s)$ で駆動されている。 $x_i(s)$ について見てみると、他の変数によって駆動されたそれぞれのサブシステムの出力と雑音源 $\epsilon_1(s)$ によって駆動されたサブシステムの出力から成り立っており、 $x_1(s)$ 自身も他のサブシステムを駆動する変数の1つであることがわかる。

多変数 Yule - Walker 法

$X(s)$ の相関関数行列 $\{C(\ell); \ell = 0, \pm 1, \dots, \pm M\}$ と AR 係数行列 $\{A_m(m); m = 1, \dots, M\}$ 、残差系列 $U(s)$ の共分散行列 Σ_M の間には、次の関係がある。(多次元 Yule - Walker 方程式)

$$\begin{bmatrix} C(0) & C(1) & \dots & C(M) \\ C(-1) & C(0) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(-M) & \dots & \dots & C(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -A^t(1) \\ \vdots \\ -A^t(M) \end{bmatrix}_M = \begin{bmatrix} \Sigma_M^t \\ O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix} \quad \dots (2.3.15)$$

ここで、

$$C(m) = \begin{bmatrix} R_{11}(m) & R_{12}(m) & \dots & R_{1k}(m) \\ R_{21}(m) & R_{22}(m) & \dots & R_{2k}(m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k1}(m) & \dots & \dots & R_{kk}(m) \end{bmatrix}, \quad \Sigma_M = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \dots & \dots & \sigma_{kk} \end{bmatrix}$$

I は単位行列、 O はゼロ行列

相関関数行列 $\{C(m); m = 0, \dots, M\}$ は既知であり、AR 係数行列 $\{A_m(m); m = 1, \dots, M\}$ および残差共分散行列 Σ_M が未知である。このとき、 $(M+1)$ 個の未知のパラメータ行列を決定するには、上記の $(M+1)$ 元連立1次行列方程式を解けば良い。これを解くに当り1次元 AR モデルの同定と同じ様に漸化式を使った逐次計算が利用できる。ただし、信号の時間経過が逆方向の AR モデルを考慮しておく必要がある。

まず、(2.3.14) 式に対応する式は以下に与えられる。

$$X(s) = \sum_{m=1}^M B_m(m) X(s+m) + V(s) \quad \dots (2.3.16)$$

ここで、

$$B_m(m) = \begin{bmatrix} b_{11}(m) & \dots & b_{1k}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}(m) & \dots & b_{kk}(m) \end{bmatrix}_M, \quad V(s) = \begin{bmatrix} \eta_1(s) \\ \vdots \\ \eta_k(s) \end{bmatrix}$$

ただし、 $\eta_1(s), \dots, \eta_k(s)$ は独立な白色雑音

また(2.3.15)式に対応する式は以下に与えられる。

$$\begin{bmatrix} C(0) & C(1) & \dots & C(M) \\ C(-1) & C(0) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(-M) & & & C(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B^t(M) \\ -B^t(1) \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {}^t\Omega_M \end{bmatrix} \quad \dots (2.3.17)$$

ここで,

$$\Omega_M = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1k} \\ W_{21} & W_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{k1} & & & W_{kk} \end{bmatrix}_M$$

M=1 のとき, 両式を解いて次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_1(1) &= {}^t\{C^{-1}(0) \cdot C(-1)\} = C(1) C^{-1}(0) \\ \Sigma_1 &= {}^t\{C(0) - C(1) A_1^t(1)\} = C(0) - A_1(1) C^t(1) \\ B_1(1) &= {}^t\{C^{-1}(0) C(1)\} = C^t(1) C^{-1}(0) \\ \Omega_1 &= {}^t\{C(0) - C(-1) B_1^t(1)\} = C(0) - B_1(1) C(1) \end{aligned} \right\} \quad \dots (2.3.18)$$

M=2 以降については, 次の漸化式によって前段の計算結果を利用することができ, 希望の次数Mまで逐次計算を行なえば良い。

$$\left. \begin{aligned} A_M(M) &= \{C(M) - \sum_{m=1}^M A_{M-1}(m) C(M-m)\} \{ \Omega_{M-1}^{-1} \} \\ B_M(M) &= {}^t\{C(M) - \sum_{m=1}^{M-1} A_{M-1}(m) C(M-m)\} \{ \Sigma_{M-1}^{-1} \} \\ A_M(m) &= A_{M-1}(m) - A_M(M) B_{M-1}(M-m) \\ B_M(m) &= B_{M-1}(m) - B_M(M) A_{M-1}(M-m) \\ &\quad (m=1, \dots, M-1) \\ \Sigma_M &= C(0) - \sum_{m=1}^M A_M(m) {}^t\{C(m)\} \\ \Omega_M &= C(0) - \sum_{m=1}^M B_M(m) C(m) \end{aligned} \right\} \quad \dots (2.3.19)$$

モデルの次数Mの決定には, 最終予測誤差 FPE(M)あるいは情報量規準 AIC(M) を評価関数として用い, これを最小とするように決定する。

$$\left. \begin{aligned} FPE_{(k)}(M) &= \frac{\left(1 + \frac{M \cdot k + 1}{N}\right)^k}{\left(1 - \frac{M \cdot k + 1}{N}\right)^k} \det \Sigma_M \\ AIC_{(k)}(M) &= N \cdot \log(\det \Sigma_M) + 2(Mk^2 + 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots (2.3.20)$$

2.3.3 操作変数を含む多変数ARモデルの同定

前節は, 取り扱う変数が全て被制御変数である場合のモデル同定であった。これに対し, 操作変数 $\{y_1(s), \dots, y_j(s)\}$ を含む場合の時系列 $\{x_1(s), \dots, x_k(s)\}$ ($s=1, \dots, N$) のAR

モデルは、下記のように表現できる。

$$Z(s) = \sum_{m=1}^M D_M(m) Z(s-m) + W(s) \quad \dots\dots (2.3.21)$$

ここで、

$$Z(s) = \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}, \quad D_M(m) = \begin{bmatrix} A_M(m) & B_M(m) \\ * & * \end{bmatrix}, \quad W(s) = \begin{bmatrix} U(s) \\ * \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_k(s) \end{bmatrix}, \quad Y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_j(s) \end{bmatrix}, \quad U(s) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \vdots \\ \varepsilon_k(s) \end{bmatrix}$$

$$A_M(m) = \begin{bmatrix} a_{11}(m) & \dots & a_{1k}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(m) & \dots & a_{kk}(m) \end{bmatrix}_M, \quad B_M(m) = \begin{bmatrix} b_{11}(m) & \dots & b_{1j}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}(m) & \dots & b_{kj}(m) \end{bmatrix}$$

ただし、 $\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_k(s)$ は独立な白色雑音

*はここでは必要の無い部分

上式は下記のように書き直すことができる。

$$X(s) = \sum_{m=1}^M A_M(m) X(s-m) + \sum_{m=1}^M B_M(m) Y(s-m) + U(s) \quad (2.3.22)$$

このモデルは Fig. 2.4 に示された簡単なシステムで説明できる。この図は 1 入力 1 出力システムである。まず、操作変数として $y(s)$ がシステムを駆動する。この出力にシステム雑音 $u(s)$ が加わり被制御変数 $x(s)$ が生ずる。このようなシステムに対し操作変数付の AR モデルを適用したものが Fig. 2.5 である。ここでは、雑音源として白色雑音 $\varepsilon(s)$ を考え、これがサブシステム 11 を駆動して、システム雑音 $u(s)$ を出力している。被制御変数が 2 変数となると、Fig. 2.6 のように、独立な 2 つの雑音源 $\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s)$ をもつフィードバック・システムに、操作変数 $y(s)$ がサブシステム 1Y, 2Y を通じて加わるといふモデルである。

このモデルの同定は前節のアルゴリズムがそのまま適用できる。ただし、(2.3.21) 式の * の部分は必要がないので、この部分については計算を行なわない。

2.4 ARモデルによる状態推定と予測

2.4.1 1 段予測

あるシステムにおいて、 k 個の変数 $X(s) = (x_1(s), \dots, x_k(s))^t$ を観測し、次のデータ・セット I を得たとする。

$$\{ X(s); s=1, \dots, N \}_I \quad \dots\dots (2.4.1)$$

このデータ・セットに基づいて、ARモデルの同定が行なわれ、AR係数行列 $\{ A_M(m); m=1, \dots, M \}$ が得られたとする。さらに、現在次のようなデータ・セット II が観測されたとする。

$$\{ X(s); s=-M+1, \dots, 1, 0 \}_II \quad \dots\dots (2.4.2)$$

このとき、この $(M-1)$ 点の過去および1点の現在の観測値から、次式によって1点未来の観測値 $\{ X(s); s=1 \}$ が予測できる。

$$\hat{X}(s) = \sum_{m=1}^M A_M(m) X(s-m) \quad \dots\dots (2.4.3)$$

この予測値 $\hat{X}(s)$ は、1点未来で観測された実現値 $X(s)$ との間に次の関係がある。

$$X(s) = \hat{X}(s) + U(s) \quad \dots\dots (2.4.4)$$

ここで、 $U(s) (\epsilon_1(s), \dots, \epsilon_k(s))$ は予測誤差(残差)である。この $U(s)$ は使用したデータ・セット I, II がともに定常過程であり、AR係数行列が正しく同定されている場合には、白色雑音を近似した系列となる。

以上の原理を利用して、あらかじめAR係数行列を同定しておきさえすれば、観測で得られた時系列

$$\{ X(s); s=1, \dots, N \}$$

に対し、Fig. 2.7のように、予測系列

$$\{ \hat{X}(s); s=M+1, \dots, N+1 \} \quad \dots\dots (2.4.5)$$

を計算することができる。

2.4.2 操作変数が入力されるシステムの1段予測

あるシステムにおいて、 ℓ 個の操作変数 $Y(s) (y_1(s), \dots, y_\ell(s))$ から、

$$\{ Y(s); s=1, \dots, N \}_I \quad \dots\dots (2.4.6)$$

がシステムに入力され、同時に k 個の変数 $X(s) (x_1(s), \dots, x_k(s))$ を観測し、(2.4.1) 式のデータ・セットを得たとする。

これらのデータ・セットに基づいて、ARモデルが同定され、被制御変数に関する部分 $\{ A_M(m); m=1, \dots, M \}$ および操作変数に関する部分 $\{ B_M(m); m=1, \dots, M \}$ のAR係数行列が得られたとする。さらに、現在までに操作変数から次のようなデータ・セット

$$\{ Y(s); s=-M+1, \dots, 1, 0 \}_I \quad \dots\dots (2.4.7)$$

が入力され、(2.4.2)式のデータ・セットが観測されたとする。

このとき、これらの $(M-1)$ 点の過去および1点の現在の観測値と入力値から、次式によって1点未来の観測値 $\{ X(s); s=1 \}$ が予測できる。

$$\hat{X}(s) = \sum_{m=1}^M A_M(m) X(s-m) + \sum_{m=1}^M B_M(m) Y(s-m) \quad \dots\dots (2.4.8)$$

この予測値 $\hat{X}(s)$ は、1点未来で観測された実現値 $X(s)$ との間に(2.4.4)式の関係がある。

2.4.3 状態推定

前節の1段予測と同様に、ARモデルの係数 $\{ A_M(m), B_M(m) \}$ が与えられているとき、システムに対し入力された操作変数の実現値として、

$$\{ Y(s); s=1, \dots, N \}_{\parallel} \quad \dots\dots (2.4.9)$$

また、初期条件として被制御変数の実現値

$$\{ X(s); s=1, \dots, M \}_{\parallel} \quad \dots\dots (2.4.10)$$

が与えられれば、被制御変数の推定系列

$$\{ \tilde{X}(s); s=M+1, \dots, N+1 \}_{\parallel} \quad \dots\dots (2.4.11)$$

を下式により計算することができる。

$$\tilde{X}(s) = \sum_{m=1}^M A_M(m) \tilde{X}(s-m) + \sum_{m=1}^M B_M(m) Y(s-m) \quad \dots\dots (2.4.12)$$

$$(s=M+1, \dots, N+1)$$

ただし、I.C. $\tilde{X}(s) = X(s)$ (s=1, \dots, M)

この原理が1段予測と最も異なる点は、Fig 2.8に示すようにM点の初期値を除き、推定値 $\tilde{X}(s)$ は過去に得られたM点の推定値と、操作変数の実現値

$$\{ \tilde{X}(s); s=-M, \dots, -1 \}, \{ Y(s); s=-M, \dots, -1 \} \quad \dots\dots (2.4.13)$$

を使用して計算される点にある。

この推定値 $\tilde{X}(s)$ と実現値 $X(s)$ との間には、次の関係がある。

$$X(s) = \tilde{X}(s) + U(s) \quad \dots\dots (2.4.15)$$

推定誤差（残差） $U(s)$ ($\epsilon_1(s), \dots, \epsilon_k(s)$) は、一般に白色雑音とはならない。

2.5 時間領域でのシステムの動特性解析

2.5.1 1入力1出力システムのインパルス応答関数

Fig. 2.4で示される1入力1出力システムを考える。このとき、出力 $x(s)$ は、入力 $y(s)$ によって駆動されたシステムの出力とシステム雑音 $u(s)$ の和として次式のように表現される。

$$x(s) = \Delta t \cdot \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_{xy}(\ell) y(s-\ell) + u(s) \quad \dots\dots (2.5.1)$$

ここで $h_{xy}(\ell)$ はインパルス応答関数であり、入力 $y(s)$ と出力 $x(s)$ との間に存在するシステムの動特性を記述する関数である。

実システムのインパルス応答関数は

$$h_{xy}(\ell) \begin{cases} = h_{xy}(\ell) & ; \ell \geq 0 \\ = 0 & ; \ell < 0 \end{cases}$$

最小2乗法による $h(\ell)$ の推定

今、入出力データ $\{ y(s), x(s); s=1, \dots, N \}$ が与えられているとする。このとき、最小2乗法を適用して残差

$$\delta(s) = x(s) - \sum_{m=1}^M \alpha(m) y(s-m) \quad \dots\dots (2.5.2)$$

の2乗平均値が最小になるような係数の組 $\{ \alpha(m); m=1, \dots, M \}$ を計算し、これをインパルス応答関数 $\{ h(m); m=1, \dots, M \}$ の推定値とする。

この場合、残差系列 $\delta(s)$ は、分散として

$$A^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \{ \delta(s) \}^2 \quad \dots\dots (2.5.3)$$

を持つ白色雑音となる。したがって、システム雑音 $u(s)$ が有色雑音である場合には、この方法による推定値は偏りがある。

ARモデルによる $h(\ell)$ の推定

同様に、Fig. 2.4 のシステムに対して、ARモデルではシステム雑音 $u(s)$ を白色化し、Fig. 2.5 のモデルをつくる。この場合、出力 $x(s)$ は以下のように表現される。

$$x(s) = \sum_{m=1}^M b_{1y}(m) y(s-m) + \sum_{m=1}^M a_{11}(m) x(s-m) + \varepsilon(s) \quad \dots\dots (2.5.4)$$

したがって、このモデルにおいてはシステム雑音 $u(s)$ を第2項、第3項が担当しており、係数を求めるため最小2乗法が適用されても第3項の雑音源 $\varepsilon(s)$ が白色雑音となるだけで、第2項の有色化の過程は依然と残る。このため、システム雑音が白色であろうと無かろうと、係数 $\{ b_{1y}(m); m=1, \dots, M \}$ がインパルス応答関数 $\{ h(\ell); \ell=1, \dots, M \}$ の正しい推定値となる。

2.5.2 多変数フィードバック・システムのインパルス応答関数の推定

一般にフィードバックの存在する多変数システムにおいて、2変数間に存在するサブシステムのインパルス応答関数は、直接に最小2乗法を適用しても正しい推定値は得られない。

Fig. 2.2(a)に示された2変数フィードバック・システムでは、サブシステムとして2つのもの、すなわちAとBが存在する。したがってインパルス応答関数としては、AとBに対して $h_{12}(\ell)$, $h_{21}(\ell)$ が定義され、2変数間を記述する方程式として下記の2式が存在する。

$$x_1(s) = \sum_{\ell=1}^L h_{12}(\ell) x_2(s-\ell) + u_1(s) \quad \dots\dots (2.5.5)$$

$$x_2(s) = \sum_{\ell=1}^L h_{21}(\ell) x_1(s-\ell) + u_2(s) \quad \dots\dots (2.5.6)$$

このようなシステムは、システム雑音 $u_1(s)$, $u_2(s)$ に対し白色雑音源 $\varepsilon_1(s)$, $\varepsilon_2(s)$ を有色化するサブシステム 11, 22 を導入した Fig. 2.2(b) のモデルに置きかえて考えると良い。システム雑音 $u_1(s)$, $u_2(s)$ はそれぞれ、

$$u_1(s) = \sum_{k=1}^K h_{11}(k) u_1(s-k) + \varepsilon_1(s) \quad \dots\dots (2.5.7)$$

$$u_2(s) = \sum_{k=1}^K h_{22}(k) u_2(s-k) + \varepsilon_2(s) \quad \dots\dots (2.5.8)$$

ここで、変数 $x_1(s)$ についてのAR表現をみると、

$$x_1(s) = \sum_{m=1}^M a_{11}(m) x_1(s-m) + \sum_{m=1}^M a_{12}(m) x_2(s-m) + \varepsilon_1(s) \quad \dots\dots (2.5.9)$$

したがって、このようなフィードバック・システムにおけるインパルス応答関数とAR係数との間には次の関係のあることがわかる。

$$a_{11}(m) = h_{11}(m); m=1, \dots, M \quad \dots\dots (2.5.10)$$

$$a_{12}(m) \begin{cases} = h_{12}(m) ; m=1 \\ = h_{12}(m) - \sum_{\ell=1}^{m-1} h_{11}(\ell)h_{12}(m-\ell) \\ ; m=2, \dots, M \end{cases} \dots (2.5.11)$$

ここで, $h_{11}(m) \begin{cases} = h_{11}(m) ; m=1, \dots, K \\ = 0 ; m=K+1, \dots, M \end{cases}$

$$M=K+L$$

一般に多変数フィードバック・システムの任意の2変数 $x_i(s)$, $x_j(s)$ 間のインパルス応答関数 $\{h_{ij}(\ell); \ell=1, \dots\}$ はARモデルの係数行列の要素 $\{a_{ii}(m), a_{ij}(m); m=1, \dots, M\}$ が既知であれば, 次式で推定できる。

$$h_{ij}(\ell) \begin{cases} = 0 ; \ell=0 \\ = a_{ij}(\ell) ; \ell=1 \\ = a_{ij}(\ell) + \sum_{m=1}^{\ell-1} a_{ii}(m)h_{ij}(\ell-m) ; \ell=2, \dots, M \\ = \sum_{m=1}^{\ell-1} a_{ii}(m)h_{ij}(\ell-m) ; \ell=M+1, \dots \end{cases} \dots (2.5.12)$$

ここで, $a_{ii}(m) \begin{cases} = a_{ii}(m) ; m=1, \dots, M \\ = 0 ; m=M+1, \dots \end{cases}$

2.5.3 ステップ応答関数

インパルス応答関数 $\{h(\ell); \ell=1, \dots, L\}$ が与えられているとき, ステップ応答関数 $g(n)$ は下式で計算される。

$$g(n) = \Delta t \sum_{\ell=1}^n h(\ell) \dots (2.5.13)$$

(n = 1, \dots, L)

2.5.4 モード特性関数⁽¹⁰⁾

ステップ応答関数 $\{g(\ell); \ell=1, \dots, L\}$ が与えられているものとする。ここで, 十分大きな L について,

$$g(L) \simeq g(\infty) = \text{const} \dots (2.5.14)$$

が成りたっているものとする。このとき, モード特性関数 $MCF(\ell)$ は下記のように定義される。

$$MCF(\ell) = \log(g(L) - g(\ell)) \dots (2.5.15)$$

ただし, $g(L) > g(\ell); \ell=1, \dots, L-1$

ここで, 取り扱うシステムが M 次の非周期安定システムの場合, ステップ応答関数 $g(\ell)$ は次のように表現できる。

$$g(\ell) = g(L) - \sum_{m=1}^M K(m) \cdot e^{-\frac{\ell \Delta t}{T(m)}} \quad \dots (2.5.16)$$

ここで、 $T(m)$; $m=1, \dots, M$ はシステムの時定数

$$\text{かつ } 0 \leq T(M) < \dots < T(1)$$

$$K(m) ; m=1, \dots, M \text{ は係数}$$

したがって、十分大きな L に対して、モード特性関数 $MCF(\ell)$ は下式のように直線となる。

$$MCF(\ell) \simeq -\frac{\ell \Delta t}{T(1)} + \log K(1) \quad \dots (2.5.17)$$

2.6 周波数領域でのシステムの動特性解析

2.6.1 1入力1出力システムの解析

(1) 周波数応答関数の推定 (直接法)

入力を $y(s)$, 出力を $x(s)$ とする Fig. 2.9(a) のような 1入力1出力システムを考える。このとき、入出力変数間に存在するシステムの動特性を記述するものとして、時間領域ではインパルス応答関数 $\{ h_{xy}(\ell) ; \ell = 0, 1, \dots, L \}$ が定義された。周波数領域においては、これをフーリエ変換したものとして、下記の周波数応答関数 $H_{xy}(f)$ が定義される。

$$H_{xy}(f) = \Delta t \sum_{\ell=0}^L h_{xy}(\ell) \cdot e^{-j \frac{\pi f \ell}{F}} \quad (f = 0, 1, \dots, F) \quad \dots (2.6.1)$$

この関数は一般に複素量となるため、通常の場合、次のゲイン $G_{xy}(f)$ および位相 $PH_{xy}(f)$ とに分けて評価される。

$$G_{xy}(f) = |H_{xy}(f)| \quad \dots (2.6.2)$$

$$PH_{xy}(f) = \angle H_{xy}(f) \quad \dots (2.6.3)$$

(2.6.1) 式を利用した $H_{xy}(f)$ の推定法は AR モデルが同定され、システムのインパルス応答関数が求まっている場合に用いることができる。

(2) 周波数応答関数の推定 (スペクトルによる方法)

取り扱うシステムが線形である場合、入力 $y(s)$ および出力 $x(s)$ のパワーおよびクロス・スペクトル密度関数 $S_{xy}(f)$, $S_{xx}(f)$, $S_{yy}(f)$ は周波数応答関数 $H_{xy}(f)$ と次の関係にある。

$$S_{xx}(f) = |H_{xy}(f)|^2 S_{yy}(f) \quad \dots (2.6.4)$$

$$S_{xy}(f) = H_{xy}(f) \cdot S_{yy}(f) \quad \dots (2.6.5)$$

特に (2.6.5) 式から、何らかの方法で $\{ S_{yy}(f), S_{xy}(f) ; f = 0, 1, \dots, F \}$ が与えられれば、

次式によって $H_{xy}(f)$ を推定できる。

$$H_{xy}(f) = \frac{S_{xy}(f)}{S_{yy}(f)} \quad \dots\dots (2.6.6)$$

この方法は、Fig. 2.9(b)のようにシステム雑音 $u(s)$ が付加されている場合でも、 $u(s)$ が入力 $y(s)$ と独立な雑音であれば正しい推定を得ることができる。

(3) オーディナリ・コヒーレンス関数の推定

また、Fig. 2.9(a)のような入力 $y(s)$ 、出力 $x(s)$ 間に存在するシステムの線形性を評価する関数として、(2.6.4)、(2.6.5)式から導出される次のオーディナリ・コヒーレンス関数 $r_{xy}^2(f)$ がある。

$$r_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{yy}(f) \cdot S_{xx}(f)} \quad \dots\dots (2.6.7)$$

この関数は、システムが線形である場合 1、また $x(s)$ と $y(s)$ との間にシステムが存在しない（すなわち、無相関である）場合 0 となり、その他の場合はその線形性の程度に応じて 0 ~ 1 の間の値をとる。

ただし、Fig. 2.9(b)のようにシステム雑音 $u(s)$ が付加されている場合には、 $u(s)$ が入力 $y(s)$ と独立な雑音であれば $r_{xy}^2(f)$ は次式となる。

$$r_{xy}^2(f) = \frac{|S_{zy}(f)|^2}{S_{yy}(f) \cdot \{ S_{zz}(f) + S_{uu}(f) \}} \quad \dots\dots (2.6.8)$$

このときシステムが線形であれば、

$$r_{xy}^2(f) = 1 - \frac{S_{uu}(f)}{S_{xx}(f)} < 1 \quad \dots\dots (2.6.9)$$

となり、常に 1 より小さくなる。

ここで、システム雑音 $u(s)$ が入力 $y(s)$ と独立でない場合には、オーディナリ・コヒーレンス関数による方法では、システムに対する正しい評価は得られない。この場合は、後述する多入力システムのコヒーレンスを考える必要がある。

(4) 伝達関数の推定⁽⁹⁾

周波数応答関数 $\{ H(f) ; f = 0, 1, \dots, F \}$ が与えられているとき、システムの伝達関数 $\{ G(s) \}$ は下記の方法によって推定することができる。

まず、推定すべき伝達関数として、以下の有理関数形を仮定する。

$$G_{L,M}(s) = \frac{N_{L,M}(s)}{D_{L,M}(s)} = \frac{b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + \dots + b_M S^M}{1 + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_L S^L} \quad \dots\dots (2.6.10)$$

ただし、 L, M は次数

$S \rightarrow j\omega$ と置きかえると上式は、

$$G_{L,M}(j\omega) = \frac{N_{L,M}(j\omega)}{D_{L,M}(j\omega)} = \frac{\{b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots\} + j\omega\{b_1 - b_3\omega^2 + \dots\}}{\{1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots\} + j\omega\{a_1 - a_3\omega^2 + \dots\}} \quad \dots\dots (2.6.11)$$

したがって、伝達関数を推定する問題は、今得られている周波数応答関数から上式の係数 $\{a_1, \dots, a_L\}$, $\{b_0, \dots, b_M\}$ および次数L, Mを決定する問題に置きかえられる。

次数L, Mにおける係数 $\{a_1, \dots, a_L\}$, $\{b_0, \dots, b_M\}$ は下式を評価関数として採用し、最小2乗法を適用することにより決定できる。

$$E = \sum_{f=0}^F w(f) |D_{L,M}(f) \cdot H(f) - N_{L,M}(f)|^2 \cdot \frac{1}{2\Delta t} \quad \dots\dots (2.6.12)$$

ここで、 $w(f)$ は重み関数

$$w = \frac{\omega}{2\pi}$$

したがって係数 $\{a_1, \dots, a_L\}$, $\{b_0, \dots, b_M\}$ は下記の(L+M)元連立1次方程式の解として与えられる。

$$P = A^{-1} \cdot C \quad \dots\dots (2.6.13)$$

ここで、

$$P = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 - \lambda_2 & 0 & \dots & T_1 & S_2 - T_3 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 - \lambda_4 & \dots & S_2 & T_3 & S_4 & \dots \\ \lambda_2 & 0 - \lambda_4 & 0 & \dots & T_3 & S_4 & T_5 & \dots \\ 0 & \lambda_4 & 0 - \lambda_6 & \dots & S_4 & T_5 & S_6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_1 - S_2 - T_3 & S_4 & \dots & U_2 & 0 & -U_4 & \dots \\ S_2 & T_3 - S_4 - T_5 & \dots & 0 & U_4 & 0 & \dots \\ T_3 - S_4 - T_5 & S_6 & \dots & U_4 & 0 & -U_6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} S_0 \\ T_1 \\ S_2 \\ T_3 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\lambda_h = \sum_{f=0}^F w(f) (2\pi f \Delta t)^h \cdot \frac{1}{2\Delta t}$$

$$S_h = \sum_{f=0}^F w(f) (2\pi f \Delta t)^h \operatorname{Re}[H(f)] \cdot \frac{1}{2\Delta t}$$

$$T_h = \sum_{f=0}^F w(f) (2\pi f \Delta t)^h \operatorname{Im}[H(f)] \cdot \frac{1}{2\Delta t}$$

$$U_h = \sum_{f=0}^F w(f) (2\pi f \Delta t)^h |H(f)|^2 \cdot \frac{1}{2\Delta t}$$

重み関数 $w(f)$ は以下の漸化式を使って逐次計算を実行し、評価関数 E_w がある値 ϵ_w に収束したときの値を採用する。まず、伝達関数の次数を(M+L=1)と置いたとき、

第1回目の計算 (K=1)

$$w^{(1)}(f) = 1 \quad \dots\dots (2.6.14)$$

これをもとにして、(2.6.13)式を解き係数 { a₁, ..., a_L }, { b₀, ..., b_M } を決定する。

第2回目以降 (K=2, ...)

$$w^{(K)}(f) = \frac{1}{|D_{L,M}^{(K-1)}(f)|^2} \quad \dots\dots (2.6.15)$$

評価関数 E_w は、

$$E_w = \frac{1}{F+1} \sum_{f=0}^F \left| 1 - \frac{|D_{L,M}^{(K-1)}(f)|}{|D_{L,M}^{(K)}(f)|} \right| \leq \epsilon_w \quad \dots\dots (2.6.16)$$

以上の計算によって、重み関数 w(f) および係数 { a₁, ..., a_L }, { b₀, ..., b_M } が決定される。

今度は伝達関数の次数 (L, M) を決定する。これについては、下記の評価関数 E_G が ある値 ε_G に収束したときの次数を採用する。したがって、これが満されるまで、次数を1次ずつ上げながら (M+L → M+L+1) くりかえし計算を実行する。

$$E_G = \frac{\sum_{f=0}^F \left| H(f) - G_{L,M}(f) \right|^2 \cdot \frac{1}{2\Delta t}}{\sum_{f=0}^F \left| H(f) \right|^2 \cdot \frac{1}{2\Delta t}} \leq \epsilon_G \quad \dots\dots (2.6.17)$$

この際、(2.6.14)式は、前回の (L+M) 次の計算結果を利用して下式で置き換えて計算を開始する。

$$w^{(1)}(f) = \frac{1}{|D_{L,M}^{(FinalK)}(f)|^2} \quad \dots\dots (2.6.18)$$

なお、ε_w, ε_G は経験的な値として 0.05 および (0.01)² ~ (0.05)² が選ばれる。

2.6.2 多入力1出力システムの解析

(1) パーシャル・コヒーレンス関数の推定

k個の入力 { y₁(s), y₂(s), ..., y_k(s) } と1個の出力 x(s) とからなる Fig. 2.10の多入力1出力システムを考える。このとき、入力 y₁(s) と出力 x(s) のオーディナリ・コヒーレンス関数 r²_{y₁x}(f) は下式となる。

$$r^2_{y_1x}(f) = \frac{|S_{y_1x}(f)|^2}{S_{y_1y_1}(f) \cdot S_{xx}(f)} \quad \dots\dots (2.6.19)$$

ここで、k個の入力が互いに独立であれば、

$$r^2_{y_1x}(f) = \frac{|S_{y_1z_1}(f)|^2}{S_{y_1y_1}(f) \{ S_{z_1z_1}(f) + S_{z_2z_2}(f) + \dots + S_{z_kz_k}(f) + S_{uu}(f) \}} \quad \dots\dots (2.6.20)$$

となり、(2.6.8)式の場合と同じように、 $y_1(s)$ 以外の入力は全てシステム雑音 $u(s)$ にくり入れて考えることができる。したがって、 $y_1(s)$ と $x(s)$ の間に存在するシステムの周波数応答関数は(2.6.6)式で評価できることがわかる。

一方、入力相互間に相関がある場合は(2.6.20)式は成り立たず、したがって(2.6.19)式は意味不明のものとなる。このような場合、(2.6.19)式を構成しているスペクトルを、他の入力 $\{y_2(s), \dots, y_k(s)\}$ と線形関係にある部分を最小2乗法によって取り除いた $x(s)$ と $y_1(s)$ のスペクトルすなわち条件付スペクトルで置き換えたパーシャル・コヒーレンス関数によって評価すると良い。

$$r_{y_1x | y_2 \dots y_k}^2(f) = \frac{|S_{y_1x | y_2 \dots y_k}(f)|^2}{\{S_{y_1y_1 | y_2 \dots y_k}(f)\} \{S_{xx | y_2 \dots y_k}(f)\}} \dots (2.6.21)$$

ここで、条件付スペクトルは下式を用いて計算する。

$$P_{y_1x | w} = P_{y_1x} + P_{y_1xw} \cdot \{P_{ww}^{-1}\} \{P_{y_1xw}^{t*}\} \dots (2.6.22)$$

ただし、

$$P_{y_1x | w} = \begin{bmatrix} S_{xx | w_1 \dots w_k} & S_{xy | w_1 \dots w_k} \\ S_{yx | w_1 \dots w_k} & S_{yy | w_1 \dots w_k} \end{bmatrix}, \quad P_{y_1x} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix}$$

$$P_{ww} = \begin{bmatrix} S_{w_1w_1} & \dots & S_{w_1w_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{w_kw_1} & \dots & S_{w_kw_k} \end{bmatrix}, \quad P_{y_1xw} = \begin{bmatrix} S_{xw_1} & \dots & S_{xw_k} \\ S_{yw_1} & \dots & S_{yw_k} \end{bmatrix}$$

このパーシャル・コヒーレンス関数を使用することによって、多入力1出力システムにおける注目した1つの経路についての線形性を評価することができる。

(2) マルチプル・コヒーレンス関数の推定

さらに、多入力1出力システムにおける入力全体と出力との線形性を評価する関数として、次のマルチプル・コヒーレンス関数 $r_{x | y}^2(f)$ が定義される。

$$r_{x | y}^2(f) = 1 - \frac{S_{vv}(f)}{S_{xx}(f)} \dots (2.6.23)$$

ただし、 $S_{vv}(f)$ はシステム雑音 $u(s)$ およびシステムの線形性からのズレをパワー・スペクトルで表現したもので、以下のように計算される。

$$S_{vv}(f) = \frac{|P_{xyw}(f)|}{|P_{yw}(f)|} \dots (2.6.24)$$

ここで、

$$P_{xyw} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy1} \cdots S_{xyk} \\ S_{yx1} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ S_{ykx} & \vdots \end{bmatrix}, P_{yw} = \begin{bmatrix} S_{y1y1} & S_{y1y2} \cdots S_{y1yk} \\ S_{y2y1} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ S_{ky1} & \vdots \end{bmatrix}$$

(3) 条件付周波数応答関数の推定

多入力1出力システムの任意の経路の周波数応答関数は、1入力1出力システムにおいて(2.6.6)式で推定できたのと同様に、条件付スペクトルを使うことによって下式で求めることができる。

$$H_{xy1 | y2 \cdots yk}(f) = \frac{S_{xy1 | y2 \cdots yk}(f)}{S_{y1y1 | y2 \cdots yk}(f)} \quad \cdots \cdots (2.6.25)$$

以上のように(1)~(3)の関数は多入力1出力システムを前提とした関数であり、フィードバックのあるシステムには適用できない。

2.6.3 多変数フィードバック・システムの解析

ノイズ寄与率

多入力1出力システムをさらに発展させ、その出力がそれぞれ他のシステムを通り再びそれぞれの入力にもどってくるフィードバック・システム Fig. 2.3 を考える。このようなシステムに対しては、ARモデルの係数から(2.5.11)式を用いて各サブシステムのインパルス応答関数を求め、さらに(2.6.1)式を用いて周波数応答関数を決定することができる。

このとき、各システム雑音 $\{ \epsilon_1(s), \dots, \epsilon_k(s) \}$ が独立であるという仮定から、各変数 $x_i(s)$ のパワー・スペクトル $S_{ii}(f)$ は、それぞれの $\epsilon_j(s)$ からの寄与分の和として下記のように表現できる。

$$S_{ii}(f) = \sum_{j=1}^k |B_{ij}(f)|^2 \cdot S_{\epsilon_j \epsilon_j}(f) \quad \cdots \cdots (2.6.26)$$

ここで、 $B_{ij}(f)$ はクローズド・ループ・システムにおける周波数応答関数であり、オープン・ループ・システムの周波数応答関数行列 $H(f)$ から下式によって計算される。

$$B(f) = H^{-1}(f) \quad \cdots \cdots (2.6.27)$$

ただし

$$B(f) = \begin{bmatrix} B_{11}(f) & \cdots & B_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1}(f) & \cdots & B_{kk}(f) \end{bmatrix}, H(f) = \begin{bmatrix} 1-H_{11}(f) & -H_{12}(f) & \cdots & -H_{1k}(f) \\ -H_{21}(f) & 1-H_{22}(f) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -H_{k1}(f) & \cdots & & 1-H_{kk}(f) \end{bmatrix}$$

したがって、変数 $x_i(s)$ のパワー・スペクトル $S_{ii}(f)$ に対する雑音源 $\epsilon_j(s)$ の寄与の割合(ノイズ寄与率) $r_{ij}(f)$ は下式で評価できる。

$$r_{ij}(f) = \frac{|B_{ij}(f)|^2 S_{\epsilon_j \epsilon_j}(f)}{S_{ii}(f)} \quad \dots\dots (2.6.28)$$

また、有色化されたシステム雑音 $u_j(s)$ のパワー・スペクトルは下式となる。

$$S_{u_j u_j}(f) = |1 - H_{jj}(f)|^2 S_{\epsilon_j \epsilon_j}(f) = |1 - H_{jj}(f)|^2 \sigma^2_{\epsilon_j \epsilon_j} \quad \dots\dots (2.6.29)$$

ARモデルの係数行列 $\{A_M(m); m=1, \dots, M\}$ を用いると、ノイズ寄与率 $r_{ij}(f)$ は下式で計算できる。

$$r_{ij}(f) = \frac{|D_{ij}(f)|^2 \sigma^2_{\epsilon_j \epsilon_j}}{\sum_{\ell=1}^K |D_{i\ell}(f)|^2 \sigma^2_{\epsilon_\ell \epsilon_\ell}} \quad \dots\dots (2.6.30)$$

ここで、 $D_{ij}(f), D_{i\ell}(f)$ は下式で求まる。

$$D(f) = -\{A_M(f)^{-1}\} \quad \dots\dots (2.6.31)$$

ただし、

$$D(f) = \begin{bmatrix} D_{11}(f) & \dots & D_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{ki}(f) & \dots & D_{kk}(f) \end{bmatrix}, \quad A_M(f) = \begin{bmatrix} a_{11}(f) & \dots & a_{1k}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}(f) & \dots & a_{kk}(f) \end{bmatrix}_M$$

$$a_{ij}(f) = \sum_{m=0}^M a_{ij}^M(m) e^{-j \frac{\pi m f}{M}} \quad (f = 0, 1, \dots, F)$$

$$m=0 \text{ のとき, } \begin{aligned} a_{ij}^M(m) &= -1 \\ a_{ij}^M(m) &= 0 \end{aligned}$$

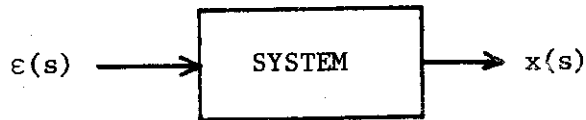


Figure 2.1(a) AR model of scalar time series

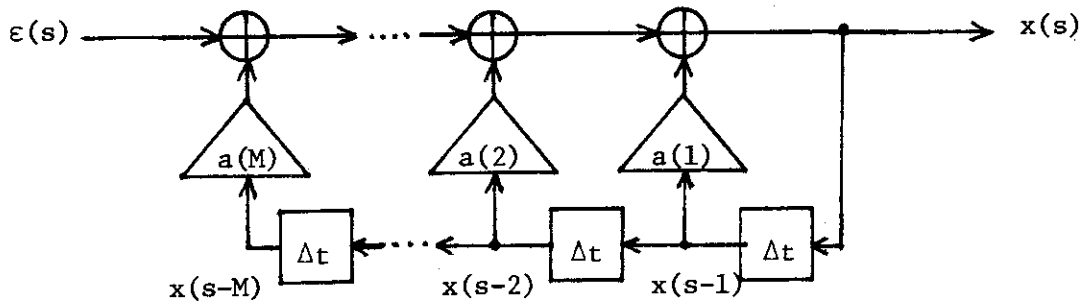


Figure 2.1(b) Block diagram of AR model

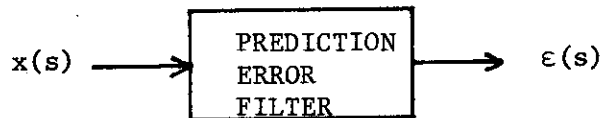


Figure 2.1(c) Prediction error filter (AR model) of scalar time series

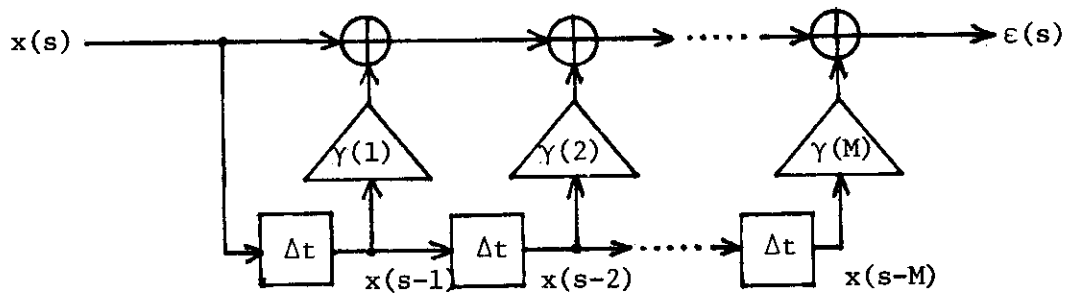


Figure 2.1(d) Block diagram of prediction error filter

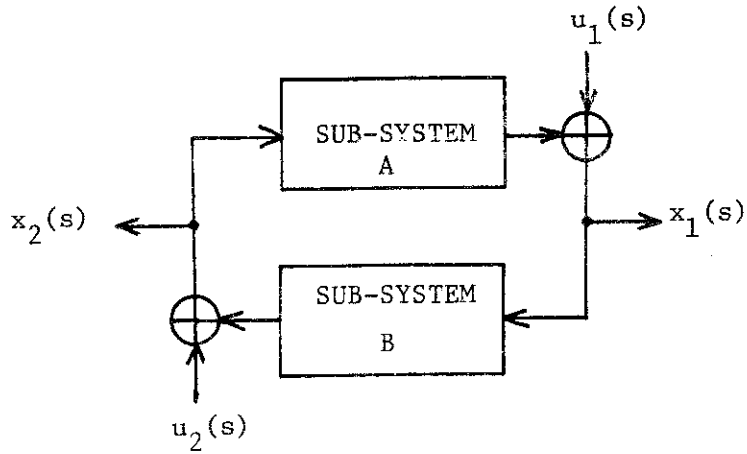


Figure 2.2(a) Feedback system of 2-dimensional variables

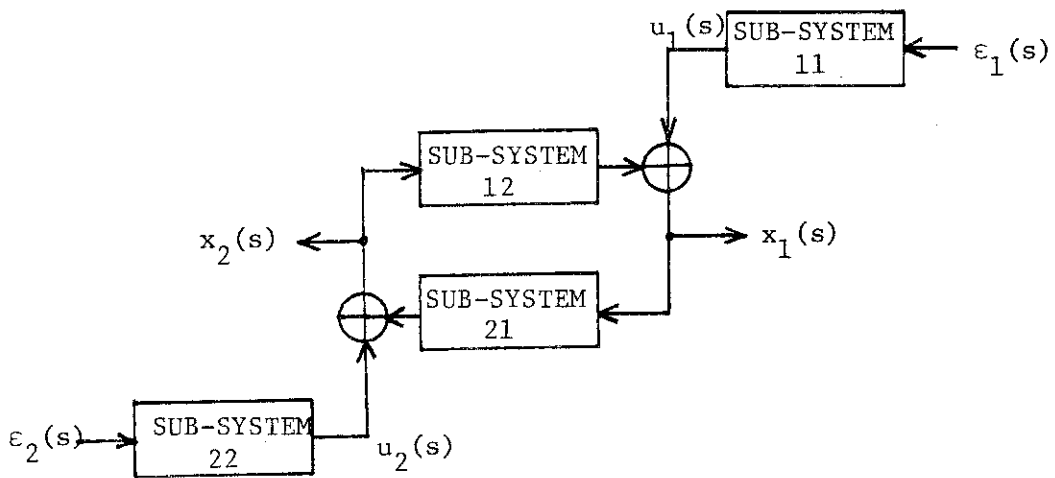


Figure 2.2(b) AR model of 2-dimensional time series

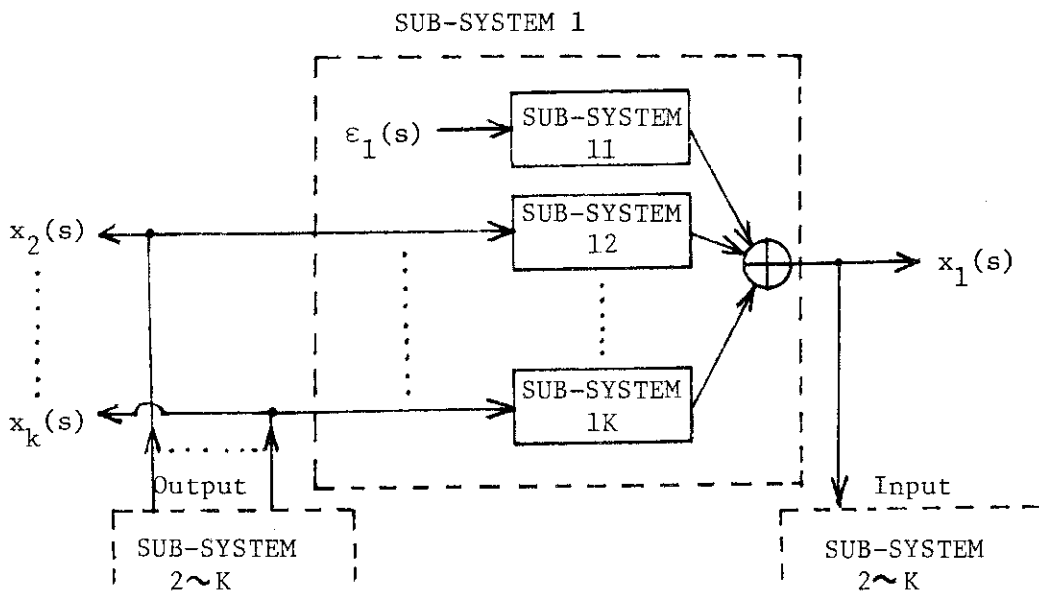


Figure 2.3 AR model of K-dimensional time series (a part of variable $x_1(s)$)

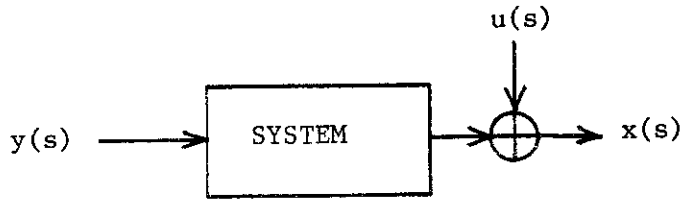


Figure 2.4 Single input and single output system

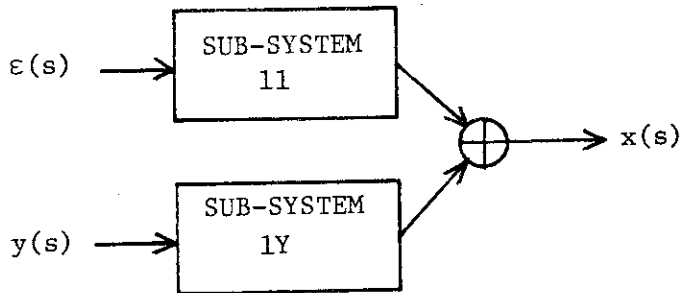


Figure 2.5 AR model of 1-controlled variable with 1-manipulated variable

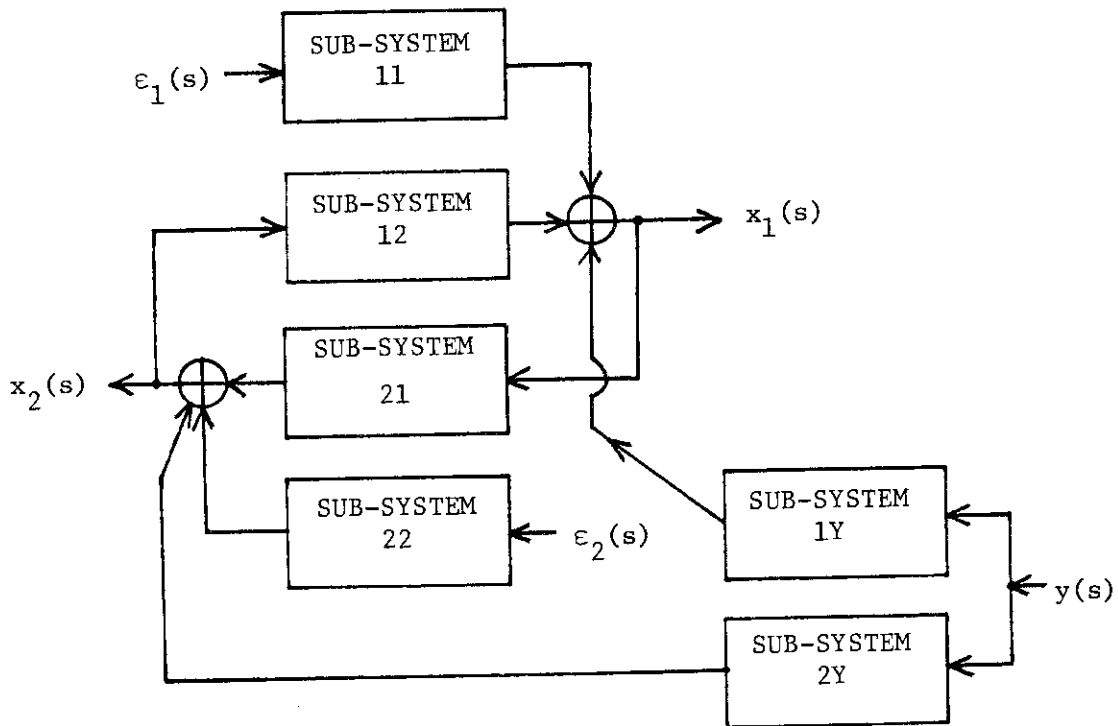


Figure 2.6 AR model of 2-controlled variables with 1-manipulated variable

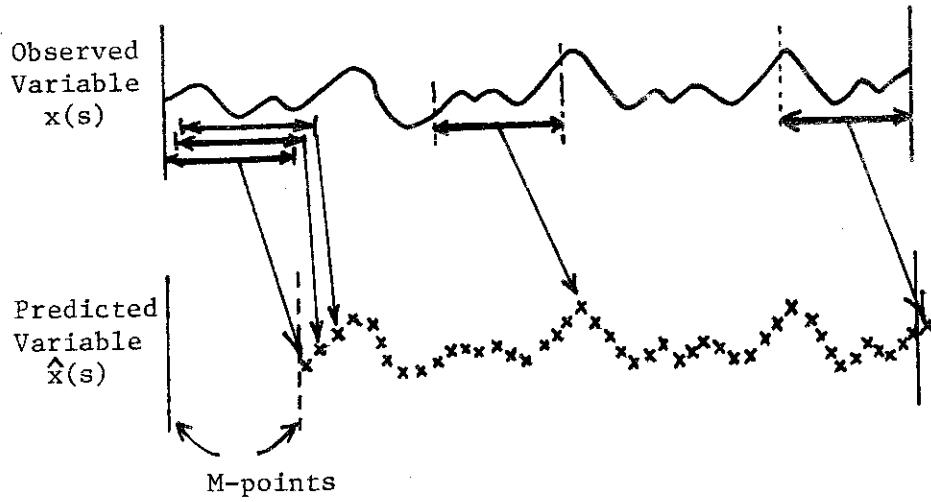


Figure 2.7 One step prediction procedure (for scalar time series)

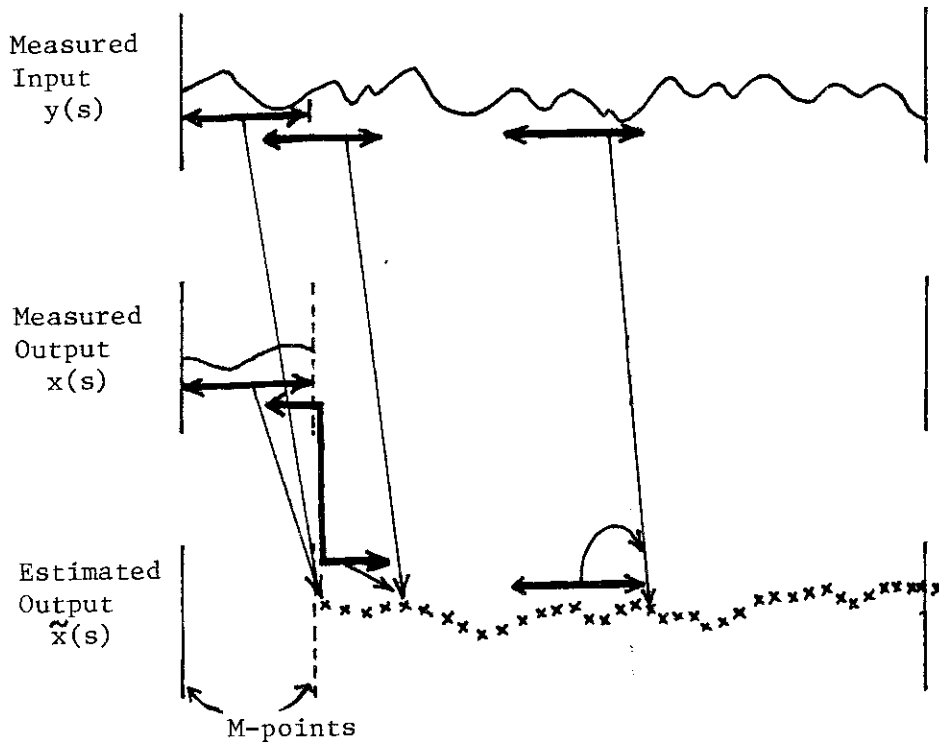


Figure 2.8 State estimation procedure (for 1-controlled variable with 1-manipulated variable)



Figure 2.9(a) Single input and single output system

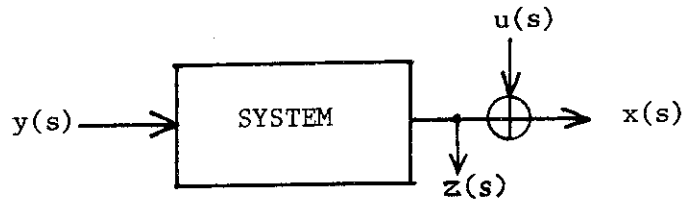


Figure 2.9(b) Single input and single output system with additive noise $u(s)$

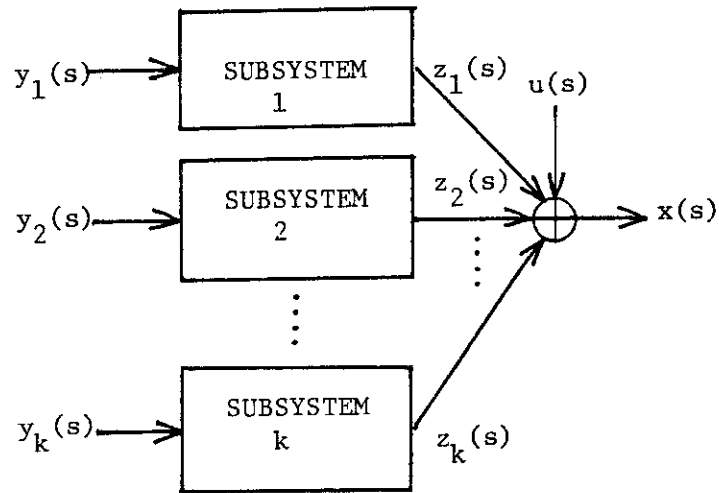


Figure 2.10 Multiple inputs and single output system

3. コードの概要

3.1 ハイブリッド計算機のコード

STARはハイブリッド計算機EAI-PACER-600の使用を前提として作成された。ハイブリッド計算機のデジタル部と通常のデジタル計算機との本質的な相異点は、アナログ部との結合のためのリンケージ部が接続されている事にある。したがって、通常のI/O装置の他に、アナログ・デジタル(A/D)コンバータおよびD/Aコンバータが接続され、しかもこれらをデジタル部のソフトウェアで制御可能である。このため、本コードのように取り扱うデータの大半がアナログ・データであるような原子炉雑音解析や異常診断を目的とする場合には、非常に能率の良い処理が期待できる。

ただし、PACER-600のデジタル部は、1 wordが16 bitsのDOS方式のミニコンであり、コア・メモリは約30 kwords(実数型データに換算して約15 kwords)と小さい。このため、大がかりな計算処理を行なう場合には、プログラミングの繁雑さを覚悟のうえでオーバーレイ方式を採用し、プログラム・サイズのできる限りの縮小化と分割化がはからねばならない。したがって、各プログラム間のデータのやり取りは、全てディスク上の共通なテンポラリー・ファイルを媒介として行なわなければならない。STARは、以上の制約条件のもとでプログラミングされた。

さらに、原子炉雑音解析や異常診断を行なう場合には、取り扱うデータからどんな結果が出てくるかは未知であるために、常に種々の手法をシステムチェックに用いながら解析を進めて行く必要がある。したがって、このようなケース・スタディを必要とするコードの場合には、1ステップ毎の処理結果に対する迅速な評価と対応ができなくてはならない。このためSTARでは、オペレータと計算機のやりとりの大半をグラフィック・ディスプレイを兼ねたCRTディスプレイとキーボードで行ない、処理結果は全てグラフ表示される方式を採用している。カード・リーダーは、パンチされた時系列データおよび校正用データなど特別の場合のみ使用され、ライン・プリンターは、原則としてオペレータがコマンドを入力した場合だけ計算結果を出力するようにしてある。

3.2 STARの構成

3.2.1 プログラムの構成

STARは全体を通してFORTRAN-IVでプログラミングされており、オーバーレイ制御用ルーチンの一部だけアセンブラーを使用している。またグラフ・プロットのためのルーチン、ハイブリッド・リンケージのためのルーチンおよびディスク、MTのI/O関係のルーチンは、PACER-600に用意されているFORTRAN-IVのサブプログラム・ライブラリーを使用している。

STARの各プログラムは、オーバーレイ方式を採用しているために、1つのメイン・プログ

ラムの下に複数のオーバーレイ・プログラムがぶら下がる構造となっている。これらのプログラムは全て実行形式に変換された後、オーバーレイ・プログラムの単位でディスクNo 1にファイルされている。したがって、メイン・プログラムは単にオーバーレイ・プログラムを管理する機能だけを担当し、実際の処理はオーバーレイ・プログラムが担当する。

STARは、以下に記す7つの独立したプログラムによって構成されている。

- (1) STAR 11 ……テンポラリ・ファイルの準備、時系列データの管理
- (2) STAR 22 ……相関・スペクトル解析
- (3) STAR 33 ……ARモデルの同定、状態推定と予測
- (4) STAR 44 ……ARモデルによる時間領域の解析
- (5) STAR 55 ……ARモデルによる周波数領域の解析
- (6) STAR 66 ……ARモデルによるスペクトル解析
- (7) STAR 67 ……1変数ARモデルの同定とスペクトル解析

これらのプログラムは、独立に作成されているものの、Fig. 3.1に示すように相互に関連し合っている。まず、原子炉などの実システムで測定されたデータ、あるいはシミュレータによって作られたデータが、直接あるいはデータ・レコーダなどを介して間接的に計算機に入力される。STAR 11は時系列データのオリジナル・データ・ファイルを作成し、このファイルに対してSTAR 22あるいはSTAR 33、STAR 67によって解析、同定が成される。ARモデルが同定されれば、その結果を利用してSTAR 44、55、66によって種々の解析が成される。

3.2.2 データ・ファイルの構成

STARで使用されるディスク・データ・ファイルは2種類のものがある。1つは時系列データを収納したオリジナル・データ・ファイルと呼ばれるもので、ディスクNo 1に作成されたものである。もう1つは、コードがオーバーレイ方式となっているためにプログラム間のデータのやりとりの媒介として使われるテンポラリ・ファイルであり、ディスクNo 2に作成されるものである。

(1) オリジナル・データ・ファイル

このファイルは後で述べるようにSTAR 11で作成される。構造はFig. 3.2に示すとおりである。種々の測定やシミュレーションで得られた時系列データは、全てこの形式で保存される。データ・サイズの大小にかかわらずファイルの大きさは一定である。ただし、磁気テープに保存する場合、不要の領域は除かれるようになっている。

(2) テンポラリ・ファイル

このファイルはTable 3.1に示すように6種類ある。このうち、IDDATAはARモデルの同定結果を収納するためのもので、同定作業を異なる時系列データでやりなおすことによりファイルを更新しない限り、ファイルの内容は保存され続ける。TSDATAは解析する時系列データを収納するためのファイルであり、オリジナル・データの希望の変数や領域だけを抽出する作業に使われる。CODATAは、相関関数の保存に使用される。その他のファイルは文字通りテンポラリに使われるが、原則として可能な限り各処理段階で共通して使われるデータは保存できるように配慮している。

(3) 準テンポラリ・ファイル

やや特殊な使い方をするファイルとしてTable 3.2に示すDATA $\phi\phi$ がある。これはディスクNo.1に定義されているファイルで、オリジナル・データ・ファイルと同一サイズとなっている。ディスクNo.1は、STARの全プログラムがファイルされているため、データ・ファイルに割り当てることのできる領域が制限されている。このため、一担作成されたオリジナル・データ・ファイルは磁気テープや他のディスク・プッラーに保存される。DATA $\phi\phi$ は、これらのファイルをコピー・ルーチンによって再びディスクNo.1に呼び出すときの領域である。

3.3 STAR 11

3.3.1 STAR 11の機能

このプログラムは、STARのイニシアライズおよび時系列データの取り込み、前処理、管理などデータに関する作業全般を担当しており、以下の機能を有する。

(1) コード使用のためのイニシアライズ

(i) STAR全体で共通に使用されるテンポラリ・ファイルの準備

(2) オリジナル・データ・ファイルの作成

(i) 時系列データの取り込み

(a) パンチ・カード入力

(b) アナログ信号入力

(ii) 時系列データの前処理

(a) スパイク・ノイズの除去

(b) トレンド成分の除去

(c) 振幅の物理量への変換

(d) 保存領域の選択

(3) 時系列データの統計的検定

(i) 正規性

(ii) 定常性

(4) 時系列データの管理

(i) 磁気テープ (MT) ファイルの作成および参照

(ii) ライン・プリンタへの出力

(iii) グラフ・プロット

3.3.2 STAR 11のプログラムの構成

STAR 11のメイン・プログラムはFig. 3.3に示すように、14のオーバーレイ・プログラムで構成されている。これらのオーバーレイ・プログラムは、Fig. 3.4のようなサブルーチン・プログラムで構成されている。各オーバーレイ・プログラムは次のルーチンを担当している。

CONT 11 プログラムの流れの制御

NEWFIL	アナログ信号をサンプリングするための準備およびノーマル・サンプリング
FSAMPL	ファースト・サンプリング
DSTORE	サンプル・データのファイル収納
PLTDAT	時系列データのグラフ表示
SPIKEL	スパイク・ノイズの除去
PHYSCL	サンプル・データの物理量への変換
REGNSL	サンプル・データの保存領域選択
NORMAL	時系列データの正規性検定
STATIO	時系列データの定常性検定
DMCONV	オリジナル・データをディスクからMTへコピー
MDCONV	オリジナル・データをMTからディスクへコピー
DPRINT	オリジナル・データ・ファイルの内容を印刷
GRDATA	時系列データの任意の区間をグラフ表示

3.4 STAR 22

3.4.1 STAR 22 の機能

このプログラムは、オリジナル・データ・ファイルから任意の時系列を取り出し、直接法に基づく相関関数の推定およびBlackman-Tukey法によるスペクトル密度関数の推定を行なう。さらに、オープン・ループ・システムの1入力1出力モデルおよび多入力1出力モデルを仮定した解析を担当し、以下の機能を有する。

- (1) 多変数相関関数の推定
 - (i) 解析に必要なオリジナル・データの編集
 - (a) 解析変数の選択
 - (b) 解析領域の選択
 - (ii) 相関関数の推定とグラフ表示
 - (a) 自己相関関数
 - (b) 相互相関関数
- (2) 多変数スペクトル密度関数の推定とグラフ表示
 - (i) パワー・スペクトル密度関数
 - (ii) クロス・スペクトル密度関数
- (3) 1入力1出力モデルのスペクトル解析とグラフ表示
 - (i) 周波数応答関数の推定
 - (ii) オーディナリ・コヒーレンス関数の推定
- (4) 多入力1出力モデルのスペクトル解析とグラフ表示
 - (i) 条件付周波数応答関数の推定
 - (ii) パーシャル・コヒーレンス関数の推定
 - (iii) マルチプル・コヒーレンス関数の推定

3.4.2 STAR 22 のプログラムの構成

STAR 22 のメイン・プログラムは Fig. 3.5 に示すように、9つのオーバーレイ・プログラムで構成されている。これらのオーバーレイ・プログラムは、Fig. 3.6 のようなサブルーチン・プログラムで構成されている。各オーバーレイ・プログラムは次のルーチンを担当している。

INITIA	オリジナル・データ・ファイルから解析すべき変数および区間を抽出
MULCOR	自己および相互相関関数の計算
PLTCOR	自己および相互相関関数のグラフ表示
MULSPE	パワーおよびクロス・スペクトル密度の計算
PLTSPE	パワーおよびクロス・スペクトル密度のグラフ表示および周波数応答関数、オーディナリ・コヒーレンス関数の計算とグラフ表示
VMCONV	スペクトル密度 (ベクトル配列) の行列化
MULFRE	パーシャルおよびマルチプル・コヒーレンス関数、条件付周波数応答関数の計算
MVCONV	上記の関数 (行列配列) のベクトル化
PLTFRE	上記の関数のグラフ表示

3.5 STAR 33

3.5.1 STAR 33 の機能

このプログラムは、オリジナル・データ・ファイルから任意の時系列データを取り出し、直接法に基く相関関数の推定を行なった後、この結果を利用して自己回帰 (AR) モデルの同定を行なう。さらに同定されたモデルによる状態推定および予測などを行なう。これらは、モデルの妥当性診断にも役立つ。以下にこのプログラムの詳細な機能を記す。

(1) ARモデルの同定

(i) 解析に必要なオリジナル・データの編集

- (a) 操作変数の選択
- (b) 被制御変数の選択
- (c) 解析領域の選択

(ii) 相関関数行列の推定

(iii) 情報量基準にもとづく ARモデルの同定

- (a) 任意のモデル次数の AR 係数行列、残差共分散の推定
- (b) AIC, FPE によるモデル次数の決定

(2) 同定されたモデルの妥当性診断

(i) AR 係数の偏自己相関関数の計算

(ii) 残差系列計算とデータ・ファイル DATA $\phi\phi$ への転送 (STAR 22 によるスペクトル解析による評価)

(3) 状態推定と予測

- (i) 操作変数を入力した場合の状態推定
- (ii) 被制御変数を入力した場合の状態推定
- (iii) 一段予測

3.5.2 STAR 33 のプログラムの構成

STAR 33 のメイン・プログラムは Fig. 3.7 に示すように、8 つのオーバーレイ・プログラムで構成されている。これらのオーバーレイ・プログラムは、Fig. 3.8 のようなサブルーチン・プログラムで構成されている。各オーバーレイ・プログラムは次のルーチンを担当している。

ARANGE	オリジナル・データ・ファイルから解析すべき被制御変数，操作変数および区間を抽出
CORREL	直接法による相関関数の推定
SUBCOR	相関関数（ベクトル配列）の行列化
MARFIT	ARモデルの同定，評価関数のグラフ表示
NOISAR	AR係数行列の対角要素のグラフ表示
MDIAGC	状態推定および予測計算
PLTEST	推定値，予測値のグラフ表示
RESIDL	残差系列の計算，ファイル転送

3.6 STAR 44

3.6.1 STAR 44 の機能

このプログラムは、STAR 33 で同定された AR モデルに基づいて、時間領域の動特性解析を行なう。具体的には、オープン・ループ・システムまたは、フィードバック・システムのいずれかのモデルを想定し、それぞれ注目した 1 つの変数と他の変数間に存在する経路を全て切断した場合の 1 入力 1 出力システムについて解析を行なう。以下に、このプログラムの詳細な機能を記す。

(1) オープン・ループ・システムの解析

操作変数を入力，被制御変数を出力とする 1 入力 1 出力システムの

- (i) ステップ応答関数の推定とグラフ表示
- (ii) モード特性関数の推定とグラフ表示

(2) フィードバック・システムの解析

被制御変数を入力，出力とする 1 入力 1 出力システムの

- (i) ステップ応答関数の推定とグラフ表示
- (ii) モード特性関数の推定とグラフ表示

3.6.2 STAR 44 のプログラムの構成

STAR 44 のメイン・プログラムは Fig. 3.9 に示すように、3 つのオーバーレイ・プログラ

ムで構成されている。これらのオーバーレイ・プログラムは、Fig. 3.10のようなサブルーチン・プログラムで構成されている。各オーバーレイ・プログラムは次のルーチンを担当している。

STEPOP オープン・ループ・システムのステップ応答関数の推定とグラフ表示
 STEPCL クローズド・ループ・システムのステップ応答関数の推定とグラフ表示
 MODCHF モード特性関数の推定とグラフ表示

3.7 STAR55

3.7.1 STAR55の機能

このプログラムは、STAR33で同定されたARモデルに基づいて、周波数領域の動特性解析を行なう。具体的には、AR係数行列のフーリエ変換を計算し、システムの雑音源に関する解析、およびオープン・ループ・システムまたはフィードバック・システムのいずれかのモデルを想定し、それぞれ注目した1つの変数と他の変数間に存在する経路を全て切断した場合の1入力1出力システムについての解析を行なう。以下に、このプログラムの詳細な機能を記す。

(1)前処理

- (i) AR係数行列のフーリエ変換
- (ii) 残差共分散行列の非対角項許容性の評価

(2)雑音源に関する解析

- (i) 雑音源パワー・スペクトル密度関数の推定とグラフ表示
- (ii) ノイズ寄与率の推定とグラフ表示

(3)オープン・ループ・システムの解析

- 操作変数を入力、被制御変数を出力とする1入力1出力システムの
- (i) 周波数応答関数の推定とグラフ表示
 - (ii) 伝達関数のフィッティング

(4)フィードバック・システムの解析

- 被制御変数を入力、出力とする1入力1出力システムの
- (i) 周波数応答関数の推定とグラフ表示
 - (ii) 伝達関数のフィッティング

3.7.2 STAR55のプログラムの構成

STAR55のメイン・プログラムはFig. 3.11に示すように、10のオーバーレイ・プログラムで構成されている。これらのオーバーレイ・プログラムは、Fig. 3.12のようなサブルーチン・プログラムで構成されている。各オーバーレイ・プログラムは次のルーチンを担当している。

SETINC AR係数行列のフーリエ変換および残差共分散行列の表示
 SELECT プログラムの流れの制御
 NOSPSD 雑音源パワー・スペクトル密度関数の推定とグラフ表示

PSDMAR	各変数のパワー・スペクトル密度関数の推定
NPCONT	ノイズ寄与率計算
PLTPCR	ノイズ寄与率のグラフ表示
PRODAB	オープン・ループ・システム解析の準備
FROPEN	オープン・ループ・システムの周波数応答関数推定とグラフ表示
FEEDBK	フィードバック・システムの周波数応答関数推定とグラフ表示
FITTRF	伝達関数のフィッティング

3.8 STAR66

3.8.1 STAR66の機能

このプログラムは、STAR33で同定されたARモデルに基づいて、スペクトル密度関数の推定を行ない、さらにオープン・ループ・システムの1入力1出力モデルおよび多入力1出力モデルを仮定した解析を行なう。以下に、このプログラムの詳細な機能を示す。

(1) 前処理

(i) AR係数行列のフーリエ変換

(2) 多変数スペクトル密度関数の推定とグラフ表示

(i) パワー・スペクトル密度関数

(ii) クロス・スペクトル密度関数

(3) 1入力1出力モデルのスペクトル解析とグラフ表示

(i) 周波数応答関数の推定

(ii) オーディナリ・コヒーレンス関数の推定

(4) 多入力1出力モデルのスペクトル解析とグラフ表示

(i) 条件付周波数応答関数の推定

(ii) パーシャル・コヒーレンス関数の推定

(iii) マルチプル・コヒーレンス関数の推定

3.8.2 STAR66のプログラムの構成

STAR66のメイン・プログラムはFig. 3.13に示すように、7つのオーバーレイ・プログラムで構成されている。ただし、最初の2つを除いた残りのプログラムはSTAR22と共通のもので構成されている。各オーバーレイ・プログラムは、Fig. 3.14のようなサブルーチン・プログラムで構成され、次のルーチンを担当している。

FTARCO AR係数行列のフーリエ変換

ARSPEC スペクトル密度行列の推定およびベクトル配列化

3.9 STAR67

3.9.1 STAR67の機能

このプログラムは、オリジナル・データ・ファイルから任意の時系列を取り出し、直接Burgのアルゴリズムに基づく1変数ARモデルを同定し、さらに相関関数やスペクトル計算を行なう。以下にこのプログラムの詳細な機能を記す。

(1) ARモデルの同定

(i) 解析に必要なオリジナル・データの編集

- (a) 解析変数の選択
- (b) 解析領域の選択

(ii) ARモデルの同定

- (a) 任意のモデル次数のAR係数、残差共分散の推定
- (b) AR係数による自己相関関数の推定

(2) 相関・スペクトル解析とグラフ表示

- (i) 自己相関関数の外挿
- (ii) パワー・スペクトル密度関数の推定

3.9.2 STAR67のプログラムの構成

STAR67のメインプログラムはFig. 3.15に示すように、3つのオーバーレイ・プログラムで構成されている。各オーバーレイ・プログラムは、Fig. 3.16のようなサブルーチン・プログラムで構成され、次のルーチンを担当している。

INITIA オリジナル・データ・ファイルから解析すべき変数および区間を抽出
 MEMCOE BurgのアルゴリズムによるAR係数の同定
 PLTSGL スペクトル推定、相関関数外挿およびグラフ表示

Table 3.1 Temporary files on No.2 disk

File Name	Size [words]		
	Sector	Record	Total
IDDATA	88	x 300	26,400
TSDATA	88	x 1,300	114,400
AAAAAA	88	x 2,400	211,200
BBBBBB	88	x 2,400	211,200
CCCCCC	88	x 2,400	211,200
CODATA	88	x 2,400	211,200

Table 3.2 Temporary file on No.1 disk

File Name	Size [words]		
	Sector	Record	Total
DATA00	88	x 1,400	123,200

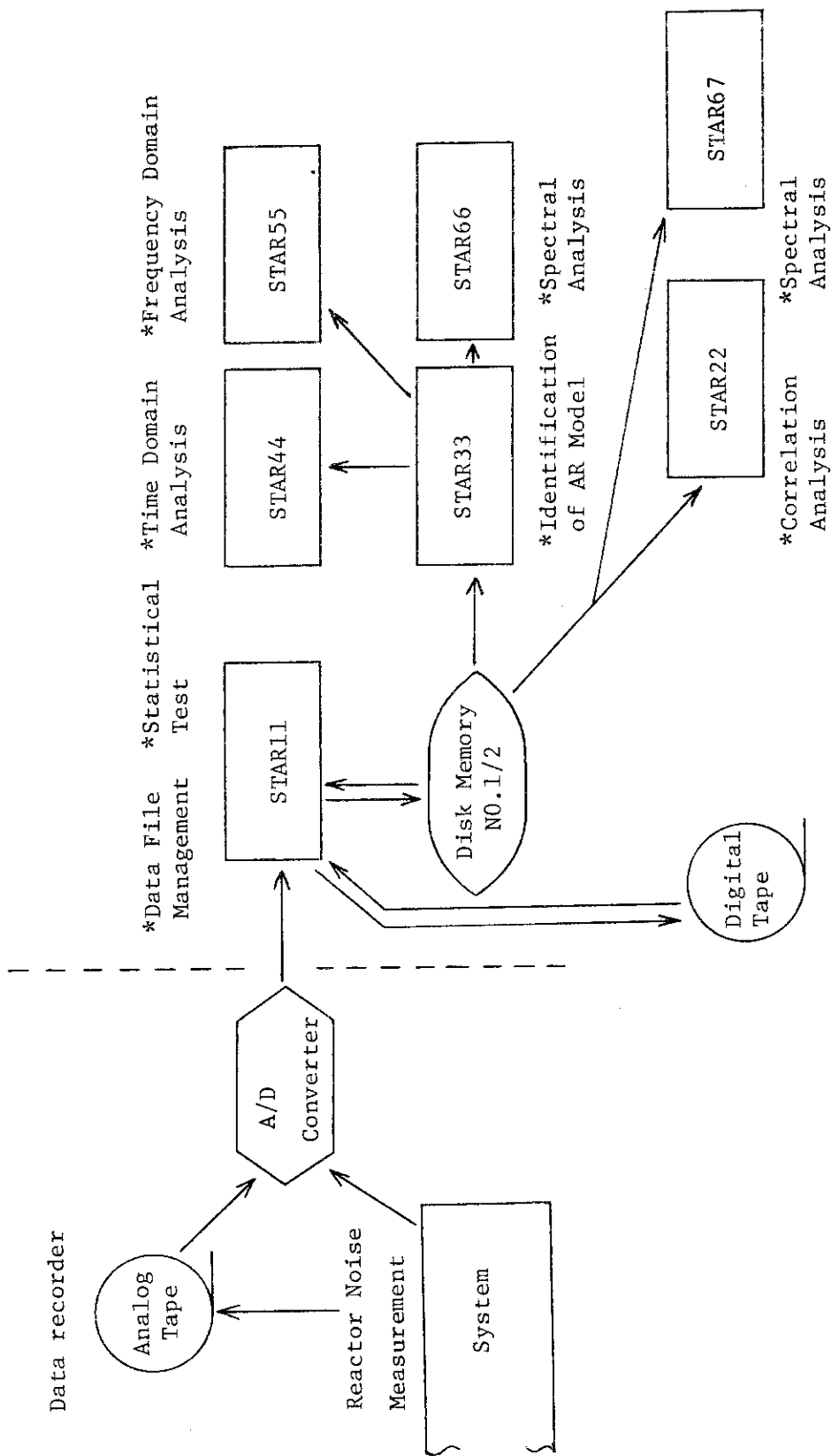


Figure 3.1 Flow diagram of STAR codes

Contents	Sector
File Name	1st
Comment for the data set	2nd
Parameters	3rd
Comment for the each variable	4th ⋮ (K+3)th
Data ⋮	(K+4)th ⋮

$$\begin{aligned}
 \text{Size} &= 88 \text{ [words/record]} \times 1400 \text{ [records]} \\
 &= 123,200 \text{ [words]}
 \end{aligned}$$

Figure 3.2 Structure of the original data file

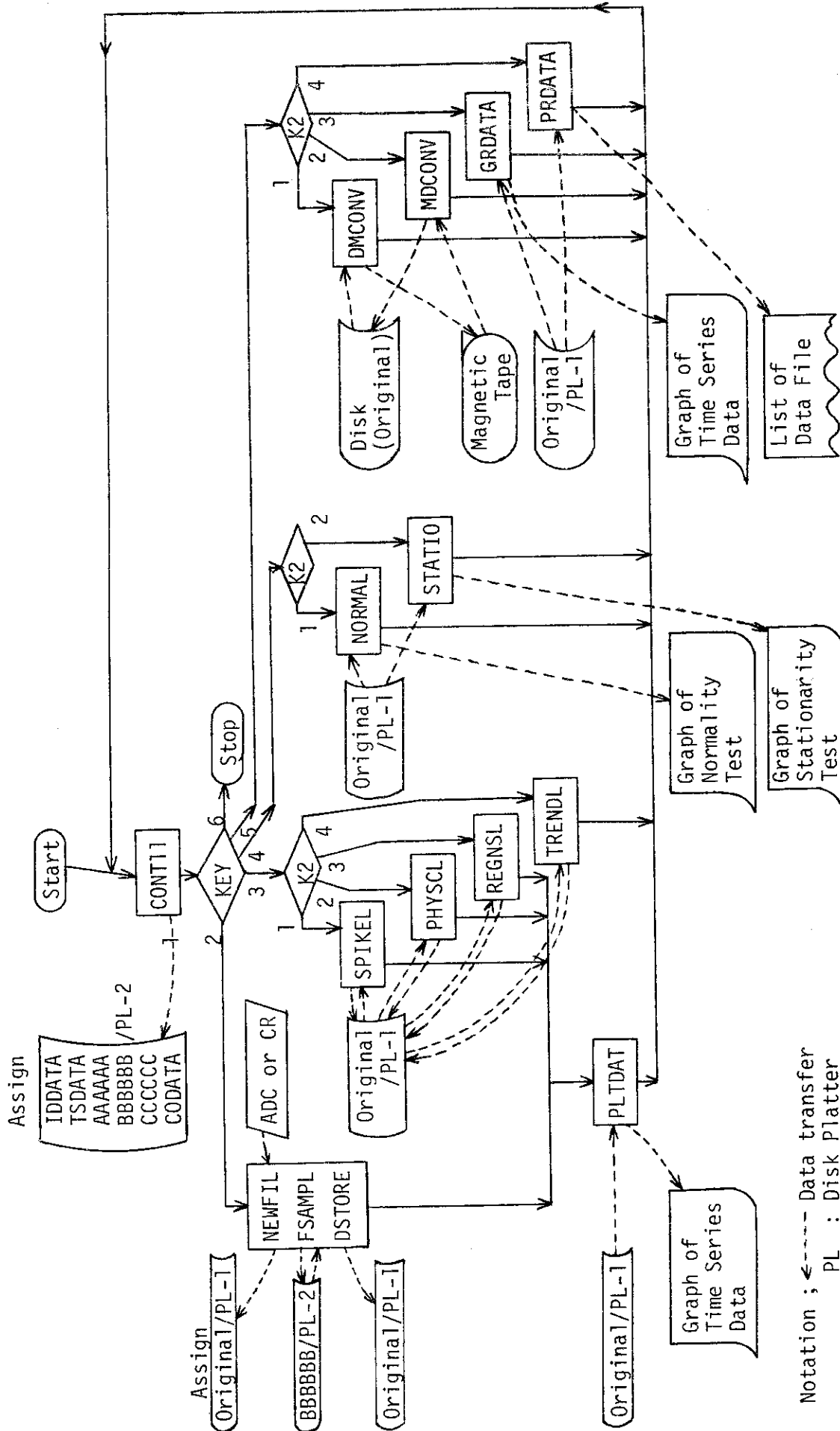


Figure 3.3 Flow diagram of START1

STAR11

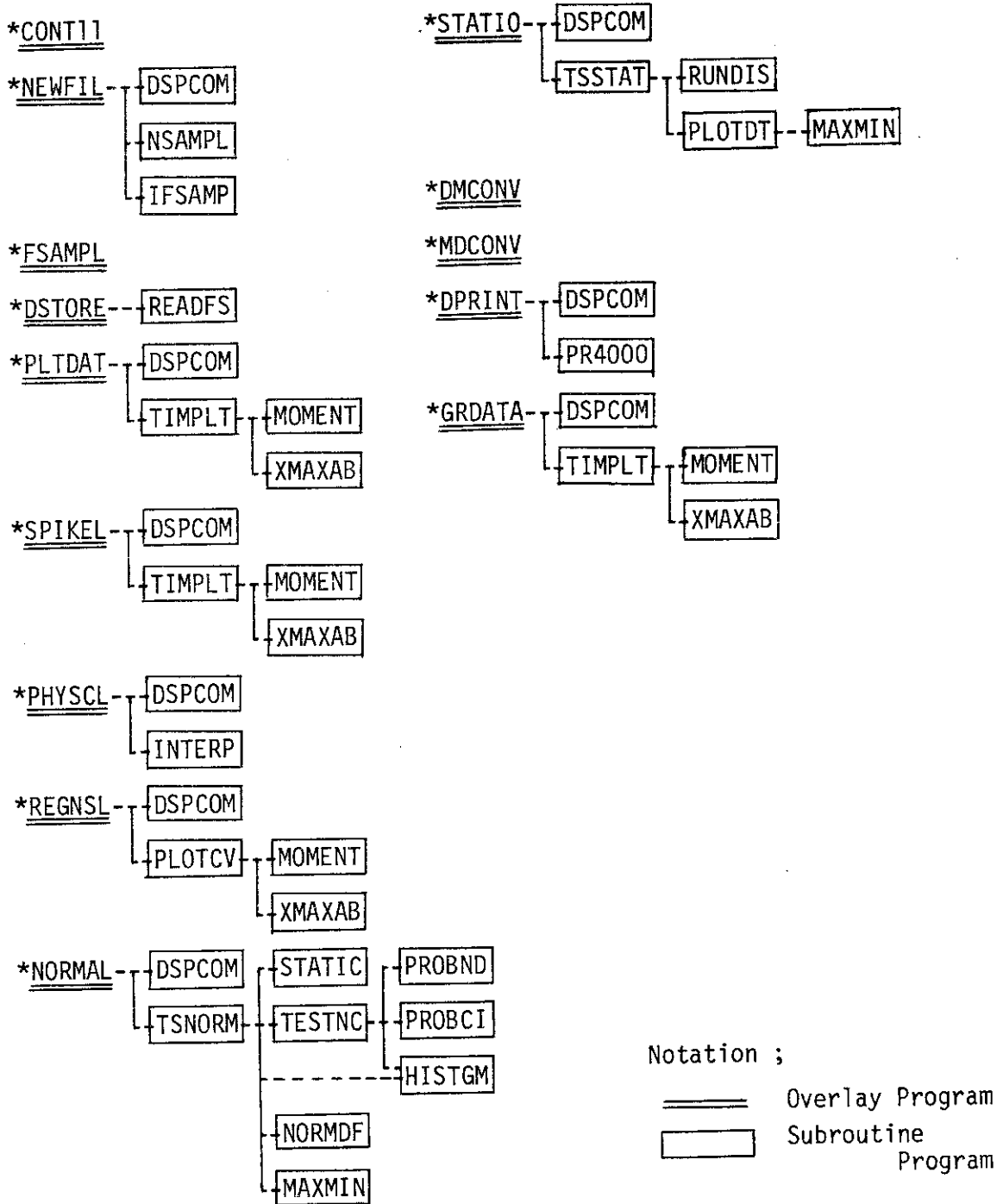


Figure 3.4 Structure of STAR11

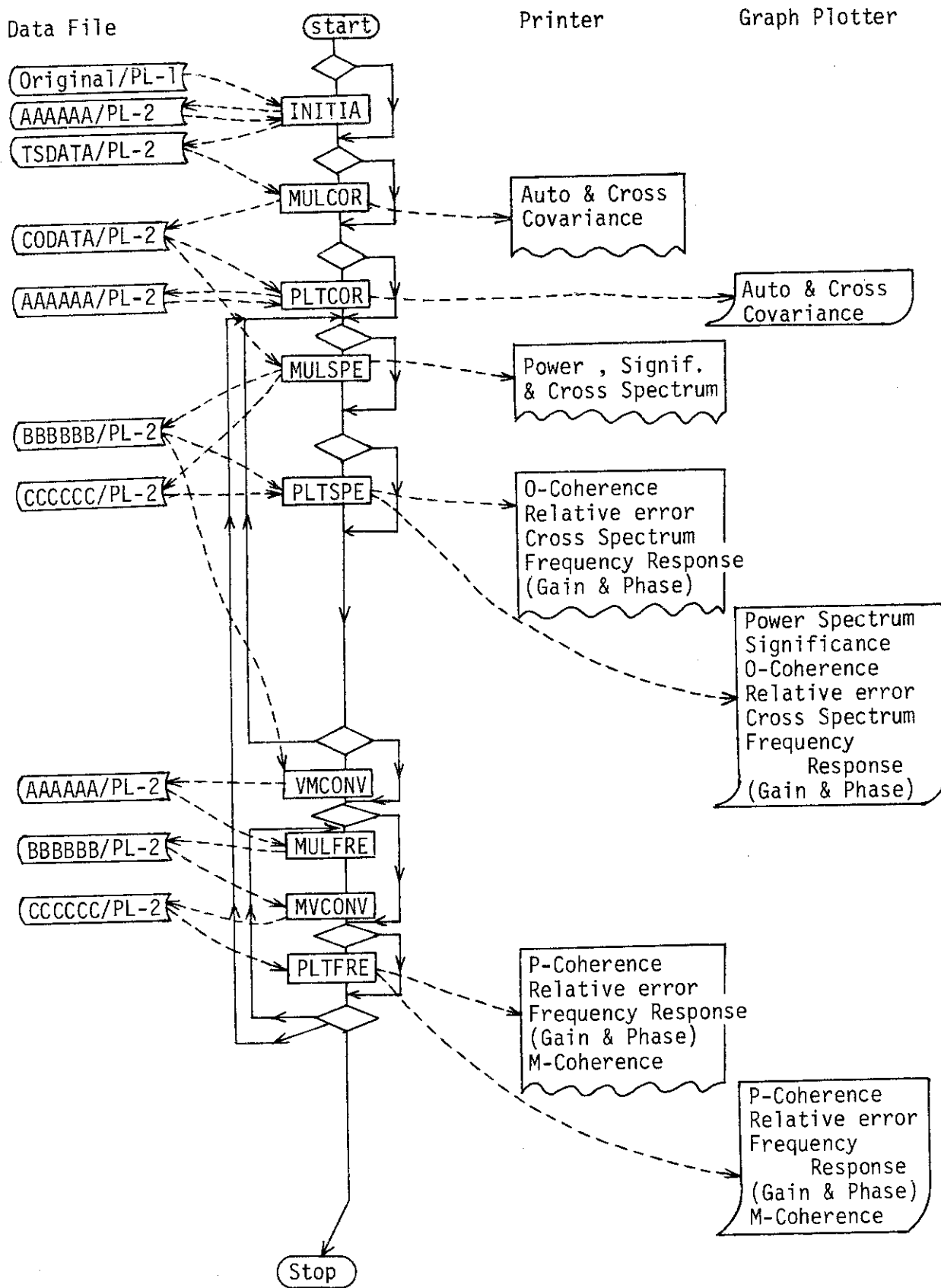


Figure 3.5 Flow diagram of STAR22

STAR22

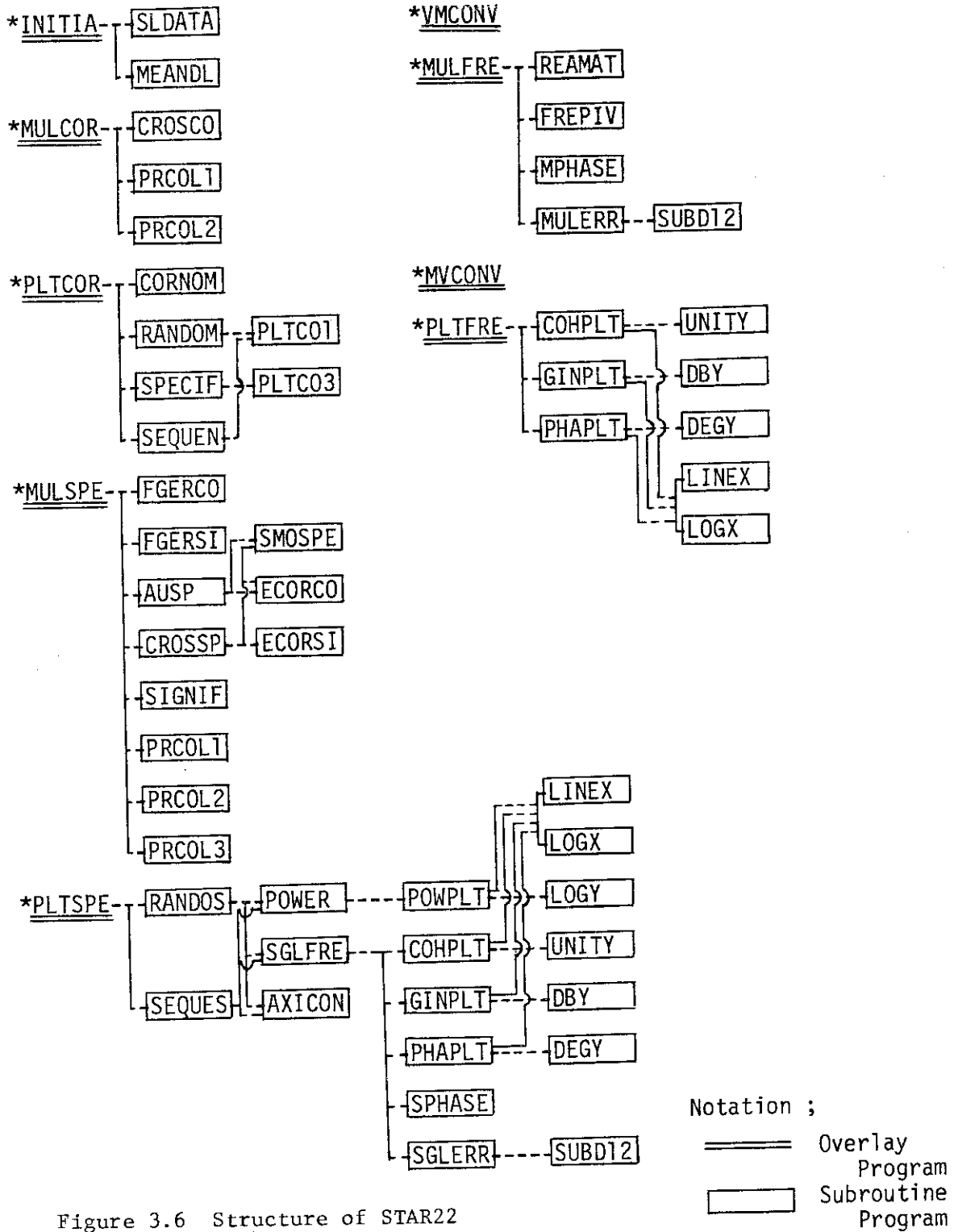


Figure 3.6 Structure of STAR22

Data File

Printer

Graph Plotter

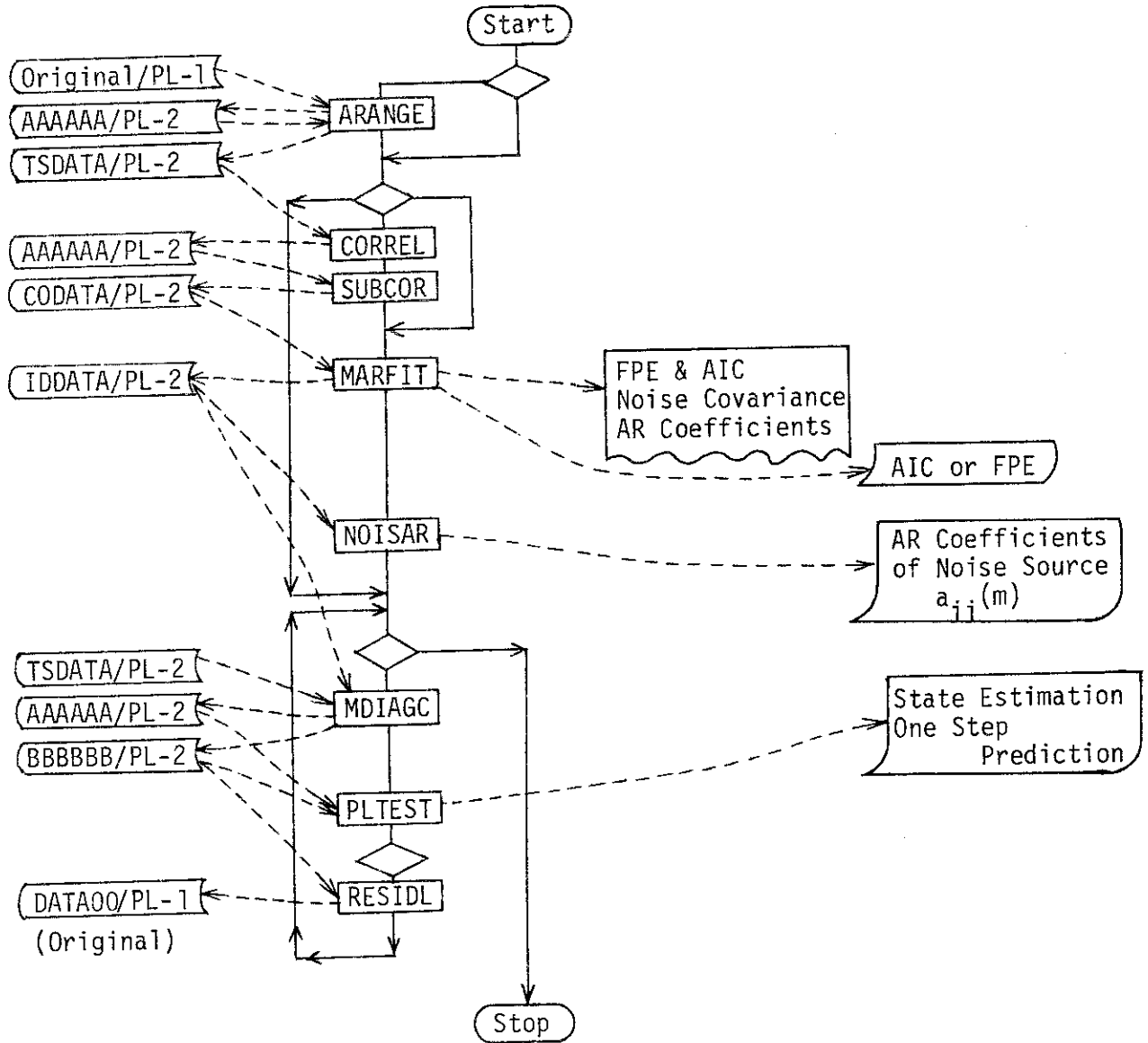


Figure 3.7 Flow diagram of STAR33

STAR33

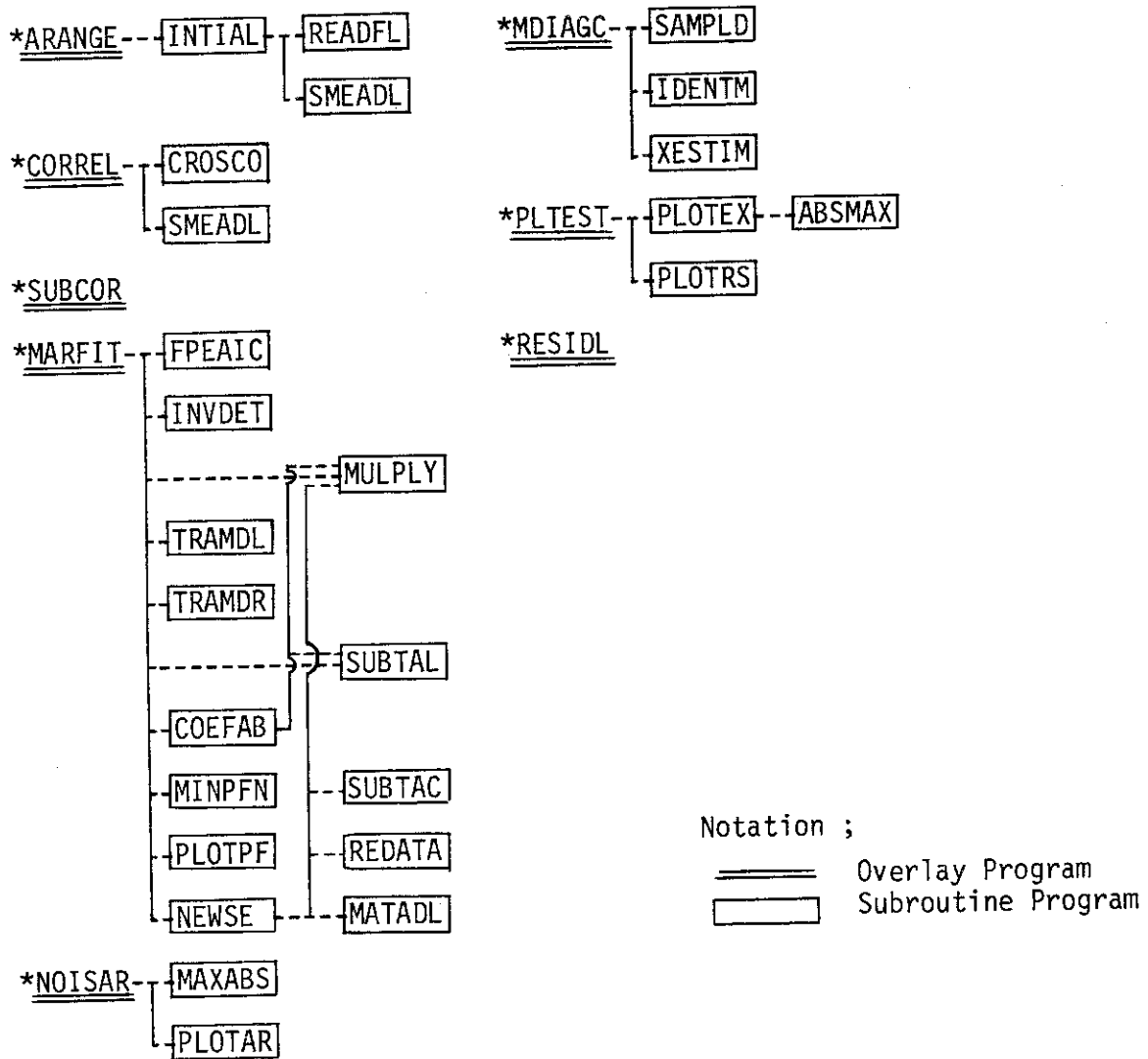


Figure 3.8 Structure of STAR33

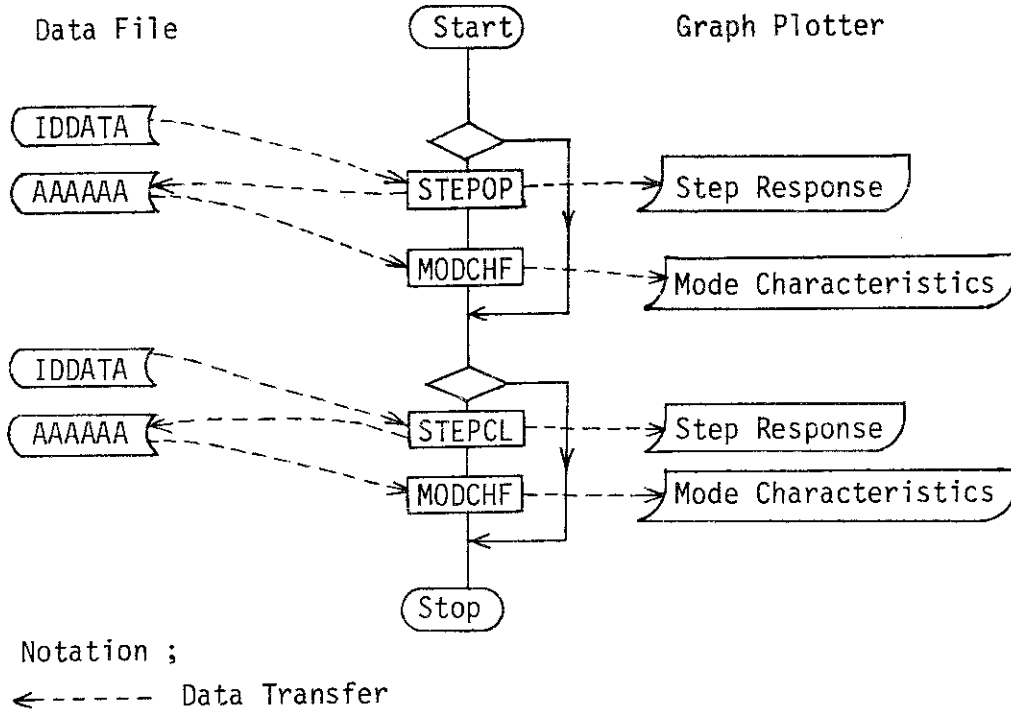


Figure 3.9 Flow diagram of STAR44

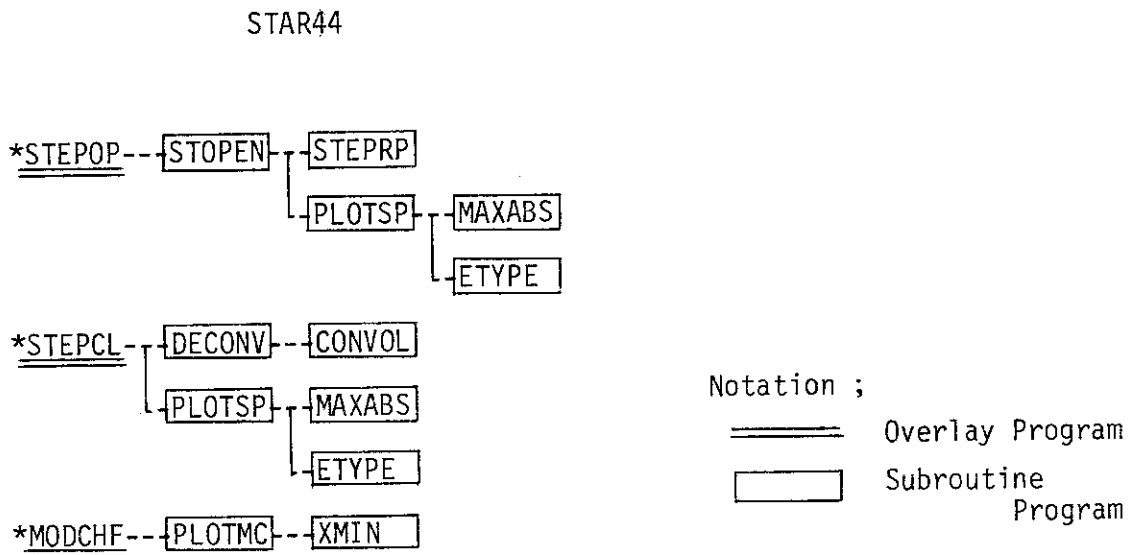


Figure 3.10 Structure of STAR44

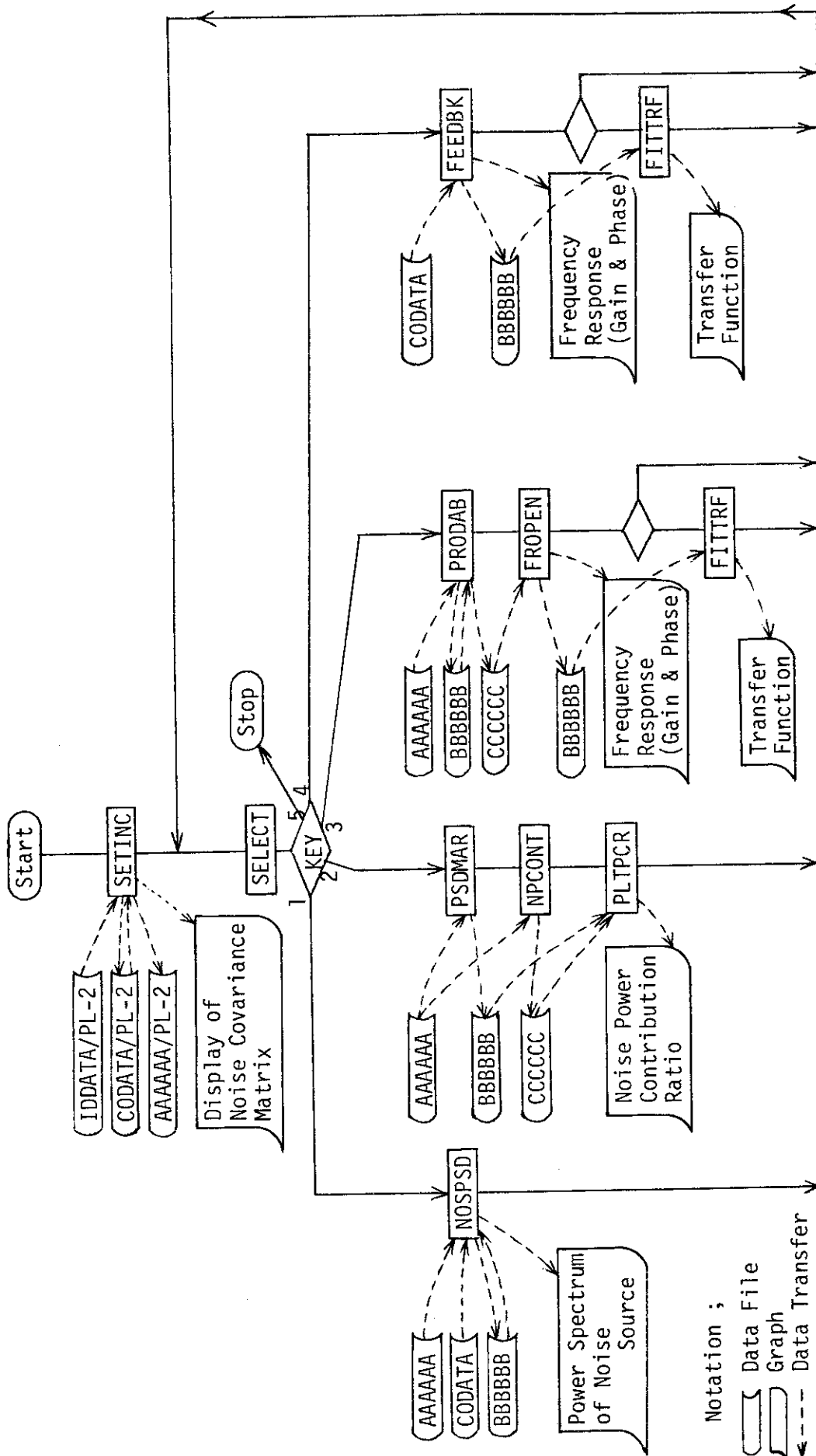


Figure 3.11 Flow diagram of STAR55

STAR55

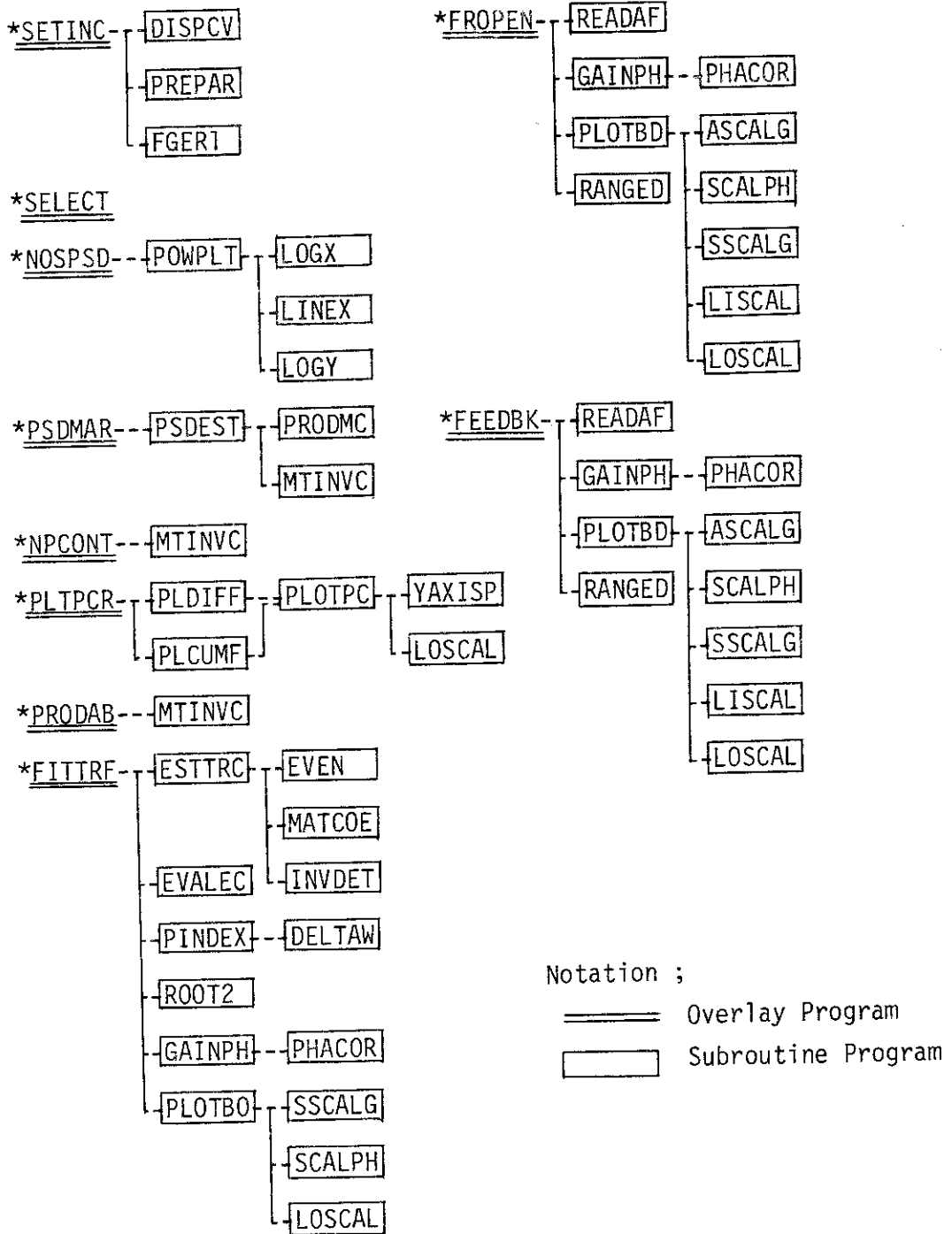


Figure 3.12 Structure of STAR55

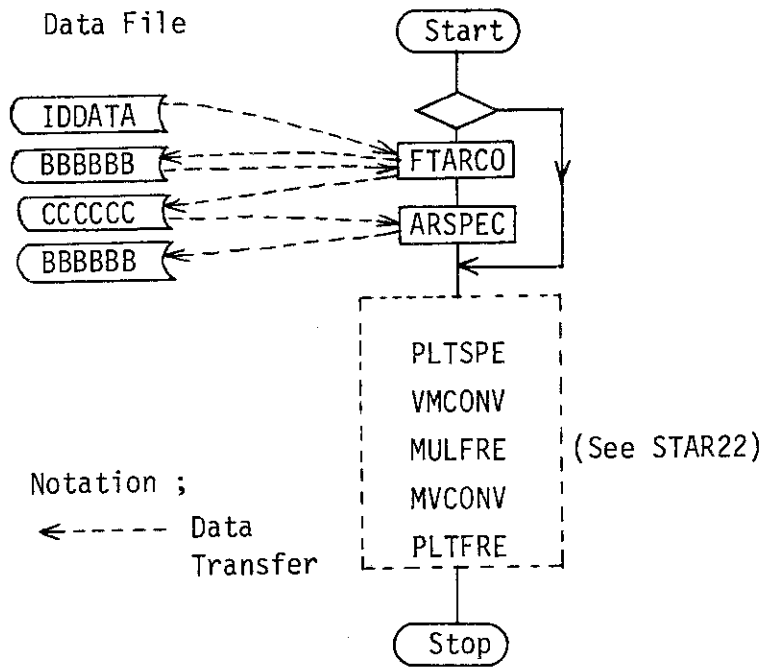


Figure 3.13 Flow diagram of STAR66

STAR66

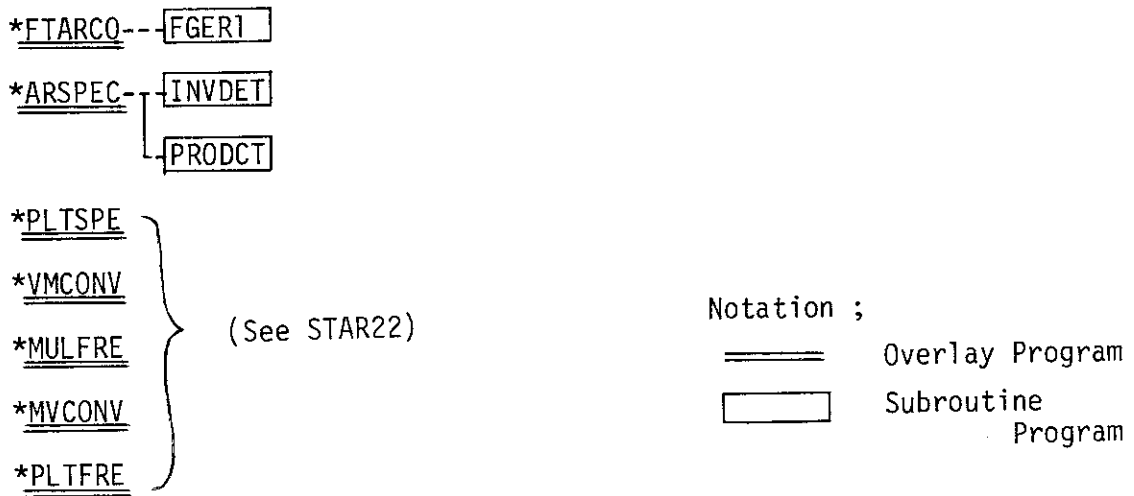


Figure 3.14 Structure of STAR66

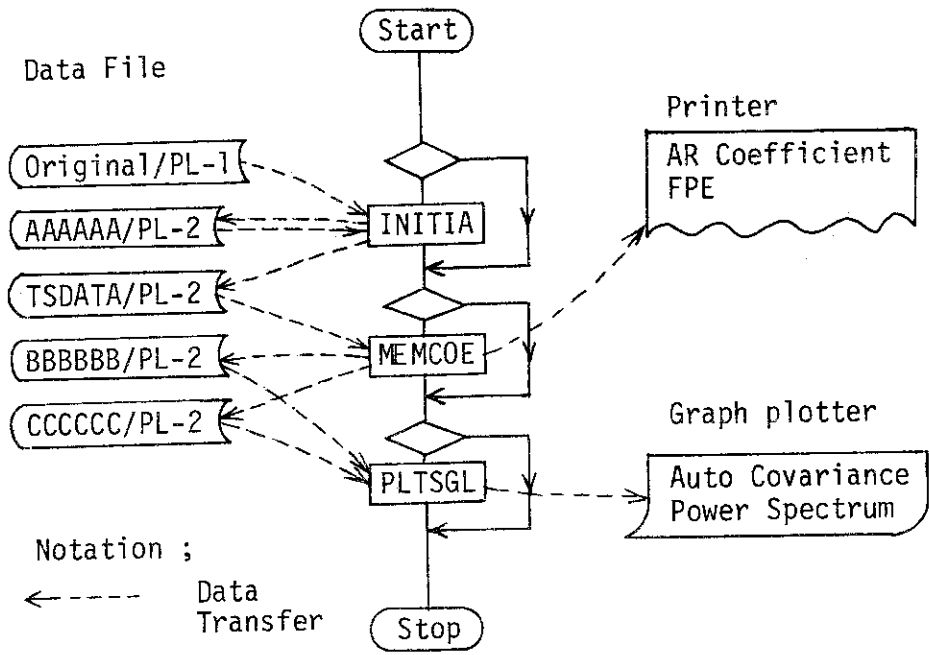


Figure 3.15 Flow diagram of STAR67

STAR67

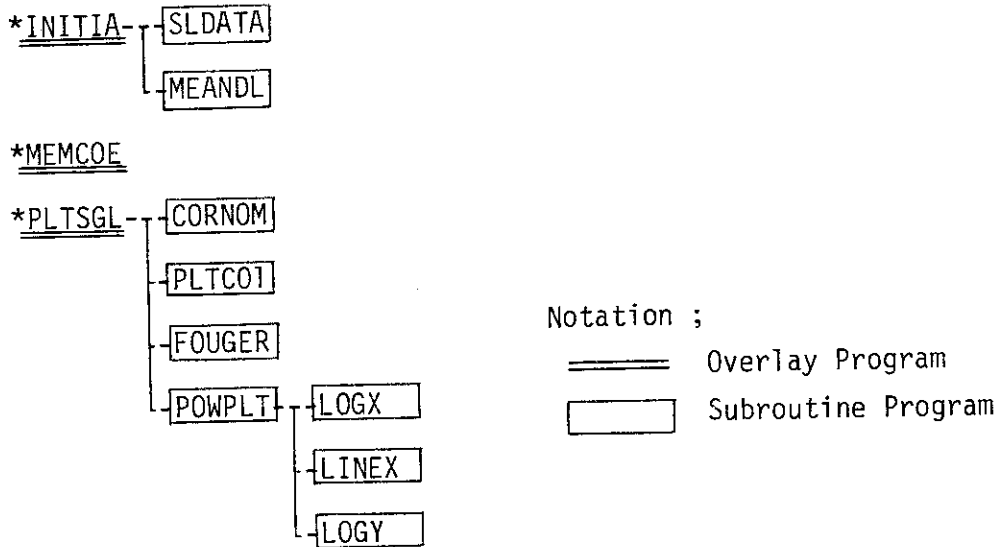


Figure 3.16 Structure of STAR67

4. 使用法

本計算コードは、先にも述べたようにハイブリッド計算機EAI-PACER-600用に作られている。したがって、通常の計算センターの計算処理の実行とは異なり、ユーザー自らが若干のハード上の準備をする必要がある。特に、原子炉雑音などのアナログ・データを処理する場合にはデジタル部の準備の他、リンケージ部およびアナログ部、ロジック部の準備は不可欠である。

4.1 コードの準備と実行

計算コードSTARはFORTRANコンパイラによって翻訳され、システムのライブラリーと結合編集された後、実行形式のプログラムとしてディスクNo.1のプラッター「STAR」にファイルされている。したがって、オペレータは上記のプラッターをディスク装置にセットし、以下の2つのコマンドをコンソール・キーボードから投入することにより実行が開始される。

計算機の応答	コマンド
M_	#L, STAR11, 21 RETURN
STAR11 CI P1	
LD	#G, 1000 RETURN

上記の例はSTAR11を実行する場合のもので、他のプログラムもプログラム名を置き代えるだけでそのまま実行できる。まず、コマンド「#L」によって指定したプログラムがディスクから呼び出されてコア・メモリーにロードされる。コマンド「#G」によってこのプログラムが実行開始される。

一旦実行開始されると、ディスプレイ画面上にコメントが表示され、以後は表示された指示やルーチン選択に関する設問に対し、適切なコマンドやパラメータを投入する事により計算処理を進めて行くことができる。このように、オペレータと計算機との会話形式による方式を採用しているので使用法はいたって簡単である。したがって、ここでは詳細な説明は省略する。

4.2 コード使用上の制約条件および実行の打ち切り

本コードを使用するにあたって、取り扱えるパラメータの最大値はハード上およびソフト上の理由からTable 4.1に示したような制限が課せられている。いかなる場合も、これを越えてはならない。

また、通常のコードとは異なり、本コードの場合ケース・スタディを目的としているため結果如何では処理の途中でも実行を打ち切りたい場合がある。この場合、コンソールのスイッチの操作により強制的に打ち切り、計算機の状態をモニター・モードとすれば良い。

誤ったコマンドや適切でないパラメータを投入してしまい、しかもプログラムにエラー処理ルーチンが用意されていない場合も同様である。

4.3 アナログ信号の前処理とサンプリング

通常のシステムで観測される流量、圧力、温度、中性子束といった物理量は電気的なアナログ信号として取り出されるのが普通である。本コードの場合はデジタル処理が基本であるからアナログ・デジタル変換器(ADC)を通してサンプリングを行なう必要がある。

Fig. 4.1はシステムで観測された信号がデジタル計算機で解析されるデジタル・データになるまでの処理の流れを大系的にまとめたものである。

まず、原子炉などの実システムに設置されている検出器の出力信号や実験室のシミュレータの出力信号はアンプによって適当なレベルまで増幅される。この信号は帯域通過フィルターを通した後、データ・レコーダやペン・レコーダによって記録される。

アナログ磁気テープ(MT)に記録されたデータの中から、必要に応じて解析に使用する部分を再生しデジタル化する。まず、ADコンバータの適正な入力レベルとなるまで増幅を行なった後、サンプリングの際のエリアジング(Aliasing)防止のためのフィルタ処理を行ないADコンバータに入力する。

また、原子炉などで起きた故障や事故の際に、各検出器の出力信号がペン・レコーダによってチャート・ペーパーに記録され、しかも信号の応答周波数が非常に低い(数10 Hz以下)ものであった場合には、これをデジタル・データに変換して解析する事ができる。ただし、このデジタル化は手作業の部分がはいるため容易ではない。

ここでは、STARコードに関連した部分、すなわち原子炉などで測定された信号はすでにアナログMTに記録されており、データ・レコーダによって信号を再生するところから、サンプリングに至るまでの処理手順について述べることにする。

4.3.1 信号の増幅

通常のデータ・レコーダの出力信号のレベルは最大値が1 V (rms) 前後に設定されているのに対して、ハイブリッド計算機のADコンバータの入力レベルは最大±10 V (p-p)である。入力された信号は10 Vを1.0としてデジタル化されるため、良いS/Nを得るためには信号のピーク値が10 V附近になるまで増幅されねばならない。このために使用されるアンプとしては数10 dBの増幅度を持ったものを用意すればよい。具体的にはハイブリッド計算機のアナログ部のアンプを使用することもできるし、後に述べるアクティブ・フィルターでゲインのあるものを使ってもよい。

4.3.2 アンチ・エリアジング・フィルター

アナログ信号をデジタル化するにあたって、サンプリング・タイム Δt によって定まる折点周波数を f_s とすれば、信号が f_s より高い周波数でも大きな成分を持つようなものの場合に、エリアジングの問題が生じる。すなわち、解析すべき周波数範囲 $(0, f_s)$ の中の任意の周波数 f_a の信号成分 $X(f_a)$ は f_s 以上の成分の影響を受け、結果的にサンプル信号 $X'(f_a)$ は下記のようになる。

$$X'(f_a) = X(f_a) + X(2f_s - f_a) + X(2f_s + f_a) + X(4f_s - f_a) + \dots \quad (4.1)$$

右辺第2項以降がエリアジング効果によって生じたものである。これに対し f_s 以上の信号成分をロー・パス・フィルタで低減することにより下式のように希望する $X(f_a)$ だけを取り出すことが可能である。

$$\begin{aligned} X'(f_a) &= G(f_a) \cdot X(f_a) + G(2f_s - f_a) \cdot X(2f_s - f_a) + G(2f_s + f_a) \cdot \\ &\quad X(2f_s + f_a) + G(4f_s - f_a) \cdot X(4f_s - f_a) + \dots \\ &\simeq X(f_a) \end{aligned} \quad \dots (4.2)$$

ここで $G(f)$ は周波数 f におけるフィルタのゲインを表わす。この式からフィルタの持つゲイン特性としては、 $(0, f_s)$ の範囲では1、 f_s 以上では0が理想であることがわかる。

現実のフィルタはある傾きを持った減衰特性を示す。Fig. 4.2の(a)は -12 dB/Oct の減衰率をもつフィルタ(アナログ計算機に組んだ2次フィルタなど)の場合である。フィルタのカット・オフ周波数 f_c より高い周波数の信号成分で特に f_c に近接した $(f_c, 2f_c)$ の範囲の成分の減衰率は $0 \sim 12 \text{ dB}$ であることがわかる。したがってこれをアンチ・エリアジング・フィルタとして用いた場合、サンプリング・タイム Δt で決まる折点周波数 f_s を、 $f_s = f_c$ と選んだ場合には $(\frac{1}{2}f_c, f_c)$ の範囲ではほとんど効果がみられず、最も良いところでも 10 dB 前後の抑圧比しか得ることができない。一方、Fig. 4.2 (b)は -48 dB/Oct の減衰特性をもつフィルタの例である。 $\frac{1}{2}f_c \sim \frac{1}{3}f_c$ 以下の周波数では 30 dB 以上の抑圧が得られている。

以上から、アンチ・エリアジング・フィルタにはできるだけ急峻な減衰特性をもつローパス・フィルタを使用することが望しい。これには f_c が任意に設定できる、急峻な減衰特性をもつ、安定に動作する、アンプとしても働く、取り扱いが簡単であるなどの点から専用のアクティブ・フィルタが優れている。現在、STARコードのサンプリング用に 115 dB/Oct のローパス・フィルタが6チャンネル分用意されている。

4.3.3 サンプリング・タイム Δt 、フィルタのカット・オフ周波数 f_c の選定

サンプリング・タイム Δt と折点周波数 f_s は以下の関係がある。

$$\Delta t \text{ (sec)} = \frac{1}{2 \cdot f_s \text{ (Hz)}} \quad \dots (4.3)$$

エリアジング効果をできるだけ避けるためには前節で述べたように、解析を希望する周波数範囲の上限は f_c の $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ 以下である必要がある。したがって上限の周波数を f_a とするとき、以下の様に選定すれば良い。

$$\left. \begin{aligned} f_c &= f_a \\ f_s &= 2 \cdot f_c \sim 3 \cdot f_c \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.4)$$

4.3.4 サンプリンクの準備

フィルタを通過した信号に対しADコンバータによりサンプリンクを行なう。ADコンバータは、ハイブリッド計算機のものを使用することにより、サンプル・データを直接デジタル部のコアメモリーに転送することができ、さらにディスクなどの外部メモリーに保存される。

ディスクのアクセス・タイムの制限のため Δt が短い場合には、データのディスク転送が間に合わないため、コア・メモリー容量分だけしかサンプリンクできない。この Δt のしきい値は 0.3 sec である。 Δt が 0.3 sec 以上の場合をノーマル・サンプル、以下の場合をファースト・サンプルと呼ぶことにする。ADコンバータを駆動するクロック・パルス発生回路は、ノーマル用とファースト用の2通りが使用され、これにともない、ADコンバータを制御するプログラムが2通り用意されている。

(1) ノーマル・サンプル

ノーマル・スピードでのサンプリンクは Fig. 4.3 (a) に示すような繰り返しパルスを利用した非常に簡単なクロック・パルス発生回路が使用できる。サンプリンクに際して、以下の3つのパラメータを設定する必要がある。

N ; チャネル当りのサンプル数

K ; サンプリンクを行なう信号のチャネル数

N, K とともに、STAR 11 のサンプリンク・ルーチン実行時にデジタル部のコンソール・キーボードから打ち込まれた値によって決まる。

Δt ; サンプリンク・タイム

ロジカル部のカウンターの値や配線をハード的に設定することにより決まる。

$$\Delta t = \frac{Ca + Cb}{Ncp} \quad (\text{sec}) \quad \dots\dots (4.5)$$

ここで Ca ; タイマーのカウンター A の設定値

Cb ; タイマーのカウンター B の設定値

Ncp ; タイマーに印加するクロック・パルス数 (sec^{-1})

この方法によるサンプル・データのチャネル i とチャネル j 間のサンプル時刻誤差 Δt_{ij} は ADC の実行時間を考慮して下式のようなになる。

$$\Delta t_{ij} = 80 (j - i) \quad (\mu \text{sec}) \quad \dots\dots (4.6)$$

(例 1)

$\Delta t = 0.5 \text{ sec}$ を得るためには、 $Ca = 499$, $Cb = 1$, $Ncp = 10^3$ (pulse/sec) とし、Fig. 4.3 (b) のようにセットする。アナログ信号はそのチャネル番号順に ADコンバータの入力端の 0 番から順々に配線する。N, K の最大数は Table 4.1 のように制限されている。

(2) ファースト・サンプル

Δt が0.3 sec 以下の場合, Fig. 4.4 (a)に示すようなパルス・トレインを利用したクロック・パルス発生回路が使用される。サンプリングに際して, 以下の3つのパラメータを設定する必要がある。

N; チャンネル当りのサンプル数

STAR11のサンプリング・ルーチン実行時にデジタル部のコンソール・キーボードから打ち込まれた値によって決まる。

K; サンプリングを行なう信号のチャンネル数

Δt ; サンプリング・タイム

K, Δt ともに, ロジカル部のカウンターの値あるいは配線をハード的に設定することにより決まる。

$$K = C_9 + 1 \quad \dots\dots (4.7)$$

$$\Delta t = \frac{C_1 + 1}{N_{cp}} \quad \dots\dots (4.8)$$

ここで C_1 ; BCDカウンターNo 1の設定値

C_9 ; BCDカウンターNo 3の設定値

N_{cp} ; BCDカウンターに印加するクロック・パルス数 (sec^{-1})

この方法によるサンプル・データのチャンネルiとチャンネルj間のサンプル時刻誤差 Δt_{ij} は下式のようなになる

$$\Delta t_{ij} = \frac{C_5 + 1}{N_{BC}} (j - i) \quad (\mu\text{sec}) \quad \dots\dots (4.9)$$

ここで C_5 ; BCDカウンターNo 5の設定値

N_{BC} ; 計算機のもつ基本クロック・サイクル数 = 10^6 (sec^{-1})

(例2)

$\Delta t = 0.01$ sec (10 msec)を得るためには, $C_1 = 99$, $N_{cp} = 10^8$ とし, $K = 4$ を得るためには, $C_9 = 3$ とする。ただし, C_5 は常に固定値9とする。Fig. 4.4 (b)のようにセットすれば良い。

Table 4.1 The maximum values of the input parameters

Program Name	Data Size N	Number of Variables K(=IR+IL)	Time Lag LAGC	Frequency Lag LAGS	Model Order M
STAR11 • normal sample • fast sample	4000 (N·K=20,000)	14	-	-	-
STAR22	4000	10	500	500	-
STAR33	4000	7 (IL≤2)	49	-	49
STAR44	-	7 (IL≤2)	Step Points 500 MCF Points 50	-	-
STAR55 • Noise Contribution	-	7 (IL≤2) 5 (IL=0)	-	500 350	- -
STAR66	-	7 (IL=0)	-	500	-
STAR67	2000	1	500	500	200

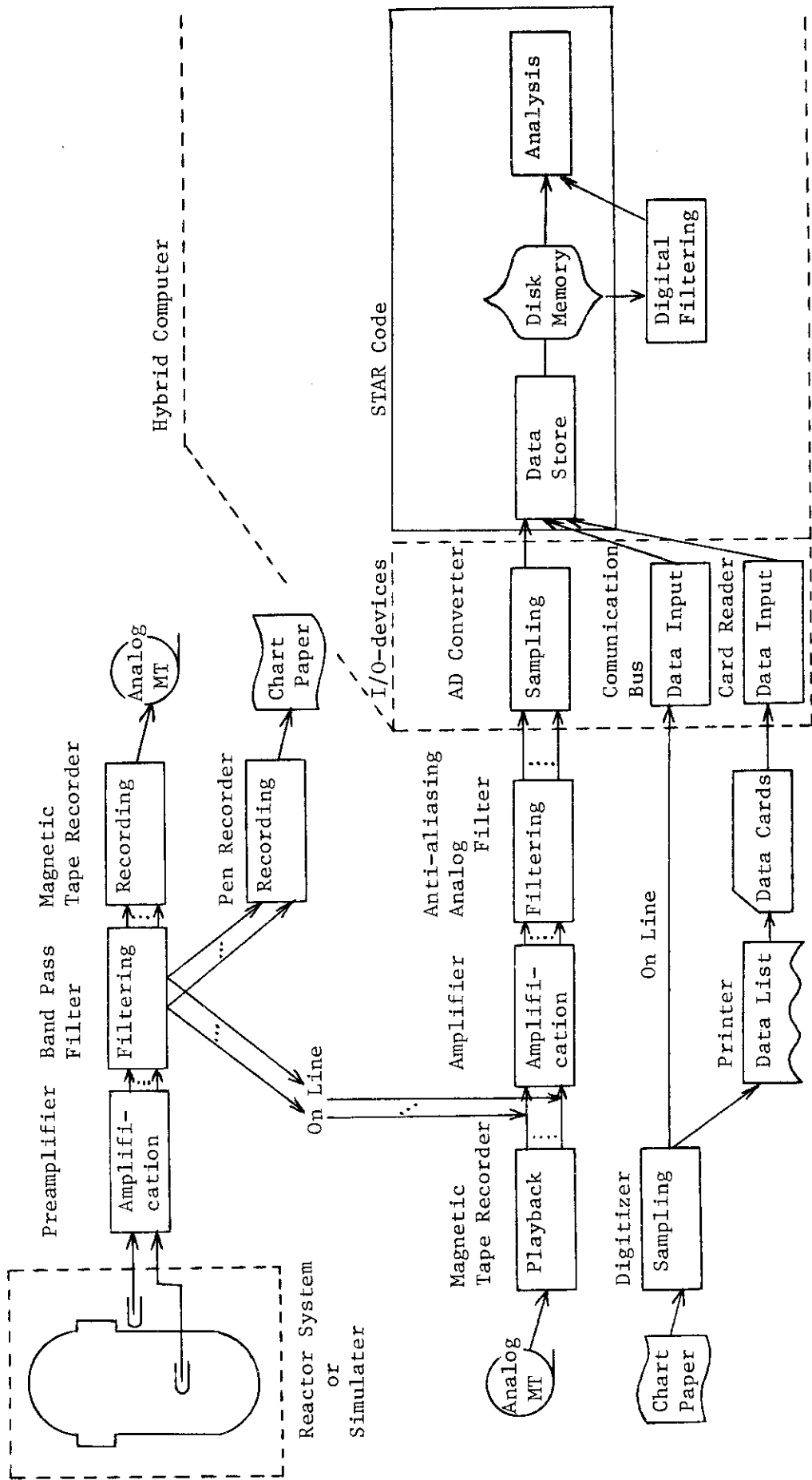


Figure 4.1 Data acquisition system for the STAR code

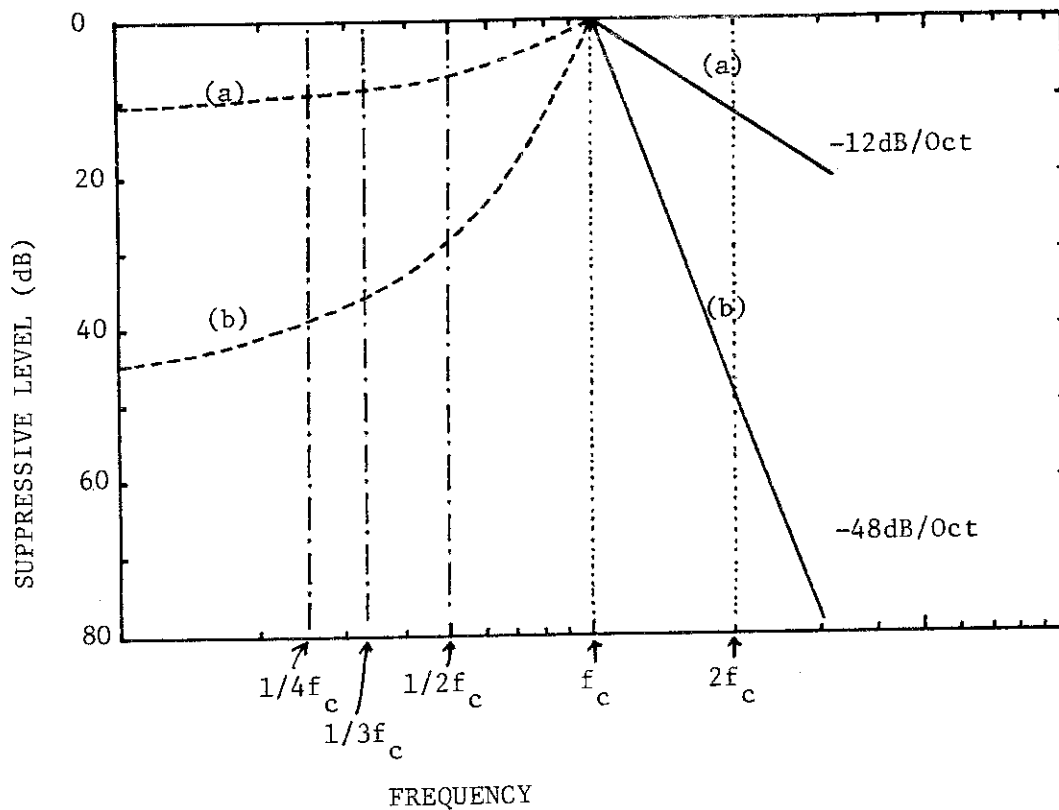


Figure 4.2 The characteristics of the anti-aliasing filter

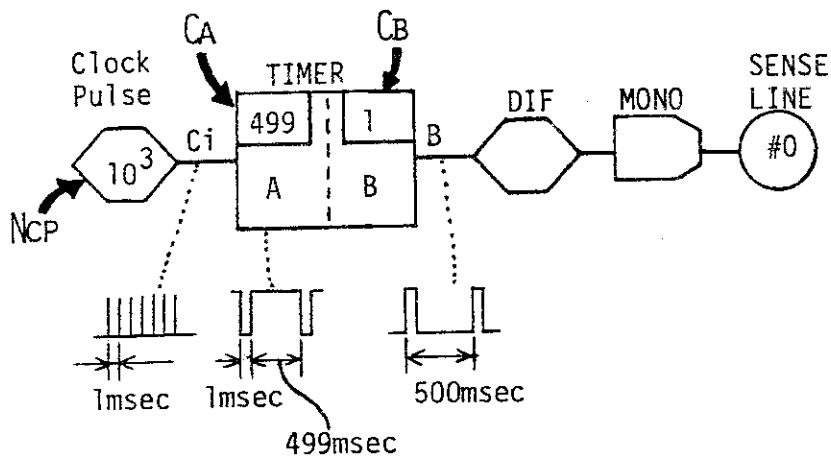


Figure 4.3(A) The clock pulse generation circuit for the normal sampling

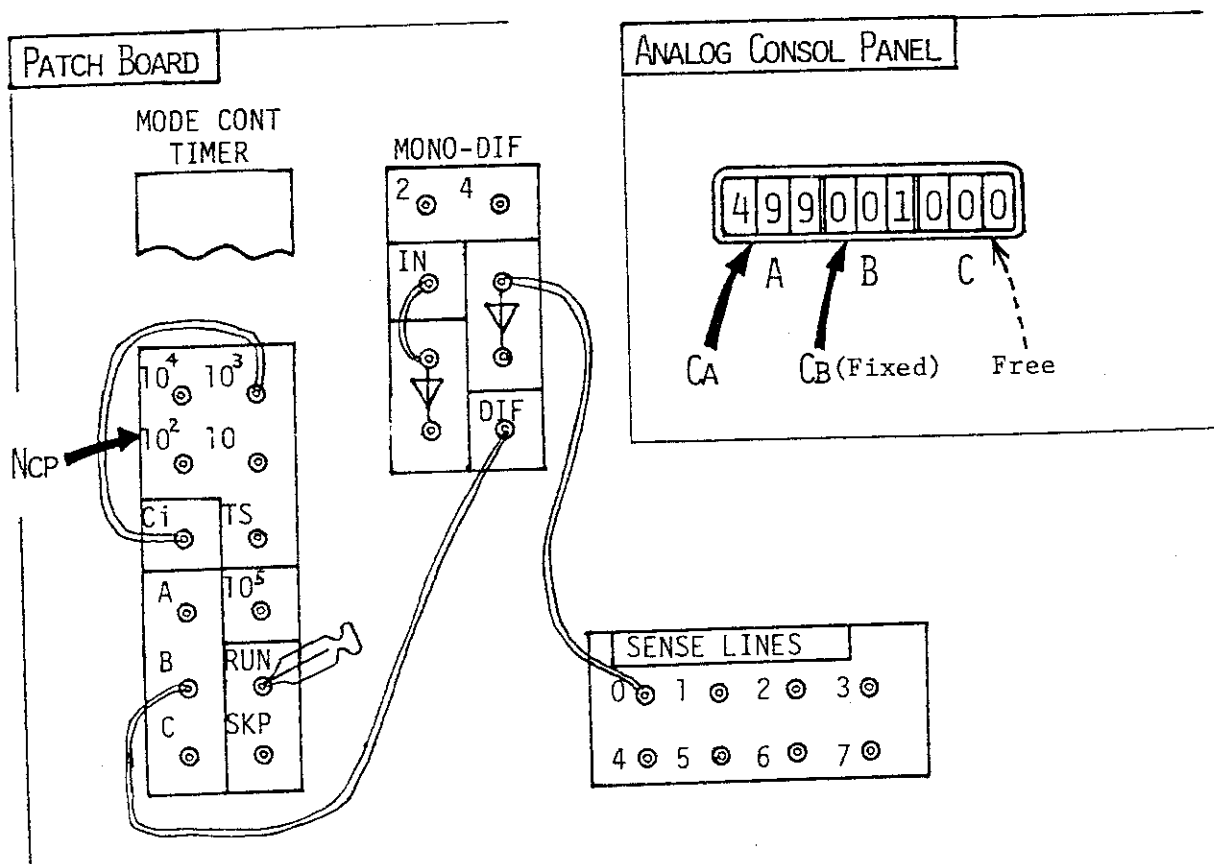


Figure 4.3(B) The example of the patch panel for the normal sampling

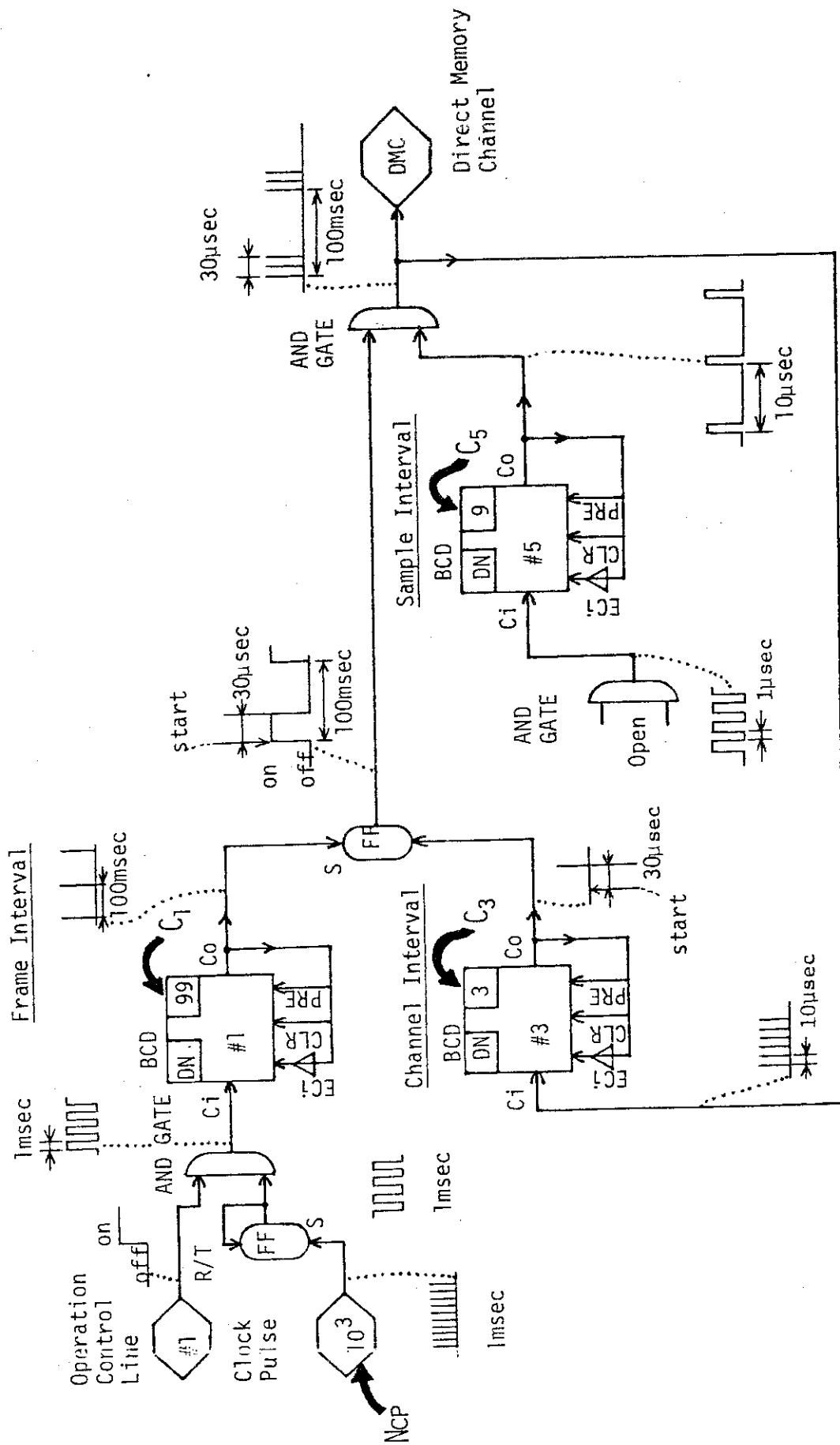


Figure 4.4(A) The clock pulse generation circuit for the fast sampling

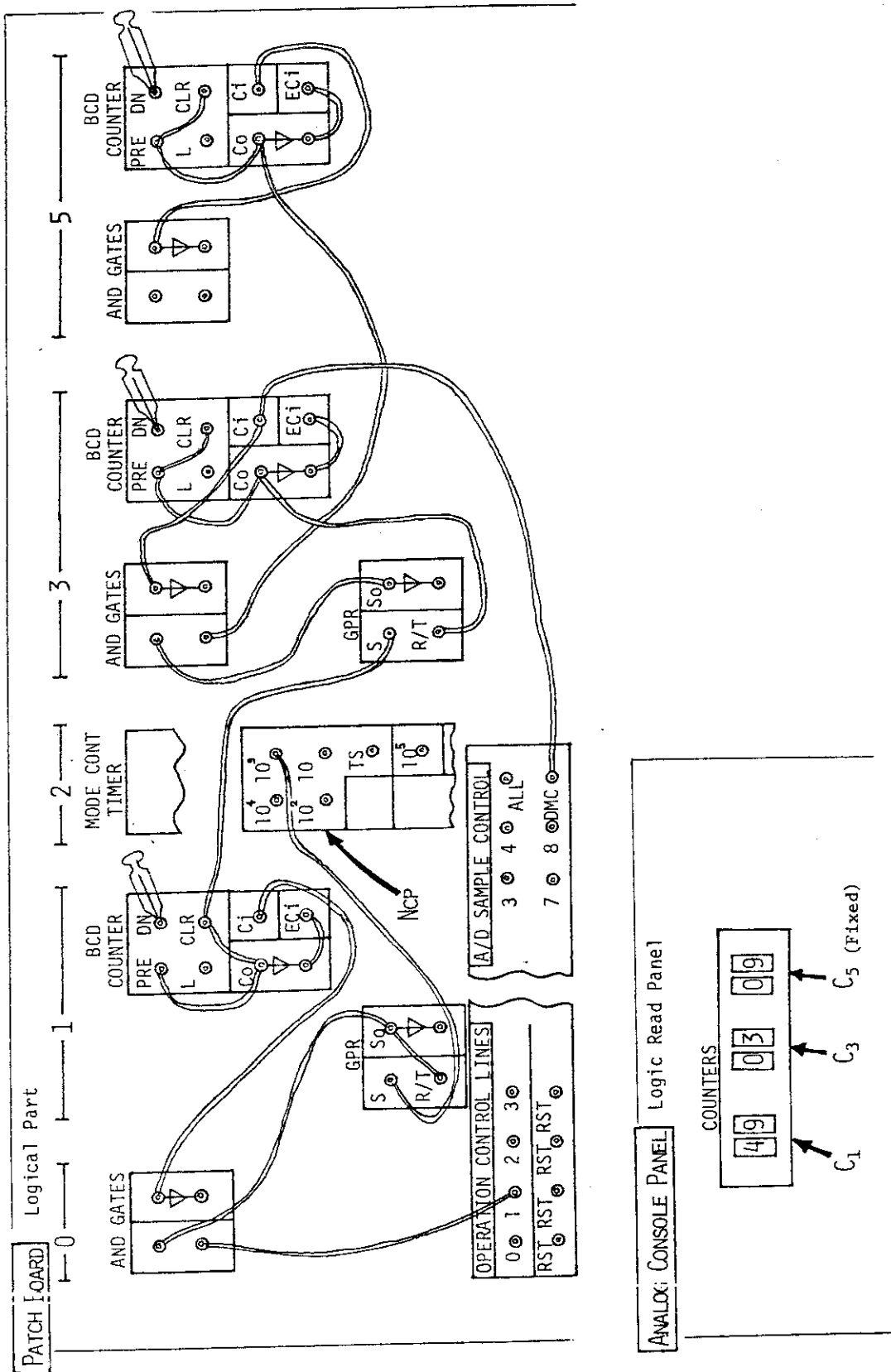


Figure 4.4(B) The example of the patch panel for the fast sampling

5. 適用例

ここでは、計算コードSTARを用いてシステムの動特性解析や診断を行なった幾つかの例を示し、さらに今後解析や診断を進めて行くうえでの注意点も述べることにする。

5.1 ARモデルの同定とノイズ寄与率解析

観測された雑音データに基づいて多変数ARモデルの同定が行なわれ、さらに同定されたモデルを用いてノイズ寄与率解析を行なおうとする場合に問題になるのは、各雑音源の独立性である。2.6.3で述べた様に、ノイズ寄与率は各システム雑音 $\{\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_k(s)\}$ が独立、すなわち

$$E(\varepsilon_i(s), \varepsilon_j(s)) = 0 \quad \dots\dots (5.1)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, k \\ j &= 1, \dots, k \\ i &\neq j \end{aligned}$$

を前提として定義された関数である。したがって、同定されたモデルの残差共分散行列の非対角項が少なくとも十分小さいと認められない限り、ノイズ寄与率の正しい評価はできない。

ここでは、JPDR-IIの炉心に挿入された計装燃料体(IFA)で測定された冷却材流量ゆらぎを取り扱った例を示す。Table 5.1に示すような3つの変数でARモデルの同定が行なわれた。特にIFA-4の入口(ch.2)と出口(ch.3)は強い相関を持つことが予想される。

Table 5.2は同定されたモデルの雑音源に関する情報を示している。特に2項目の雑音源共分散行列の規格化したものの中で σ_{32}^2 は0.6927という非常に大きい値を持っている事がわかる。したがって、ch.2と3はその雑音源の独立性が満足されてない事がわかる。このため、ノイズ寄与率の計算結果は親類のおけないものとなる。Fig. 5.1は雑音源1からch.1のIFA-6出口流量のパワー・スペクトルに対する寄与率を示したものである。この図の中で点線は雑音源共分散行列の非対角項を0と置いた通常の数算法によるもの、また実線は(2.6.28)式の分母にあたるパワー・スペクトルを計算する際に非対角項を0と置かず計算した実際のパワー・スペクトルを使用したものである。雑音源の独立性が満足できる場合は両者は一致するが、満足できぬ場合は異なった曲線となる。

実際の解析の目安として非対角項の上限は0.1程度であれば十分であろうと考えられる。

上記のように、雑音源の独立性が満足されない場合には、フィードバック・システムの解析(STAR 44 および 55)は意味の不明なものとなるので注意を要する。

5.2 位相解析

Fig. 5.2は前節で取りあげたデータのうちIFA-4の入口(ch.2)および出口(ch.3)流

量の coherence を、また Fig. 5.3 は位相を示している。実線は Blackman-Tukey (以下 BT) 法によって計算したもの、また点線は AR モデルを用いたスペクトル解析によって計算したものである。スペクトル解析の場合は、AR モデルが正しく同定されていれば前節で述べた雑音源共分散行列の非対角項の値は問題とならない。図では AR 法 BT 法とも、ほぼ一致した結果の得られていることがわかる。

ここでは、特に入口と出口の位相関係について述べる。同一の IFA の入口と出口の流量ゆらぎは非常に強い相関関係のあることは、その物理的機構を考えても当然であり、実験結果も Fig. 5.2 のように強い相関を示している。ところで、その位相は物理的に考察すれば冷却材は入口から出口へと流れているのであるから、流量ゆらぎの伝播メカニズムとしては入口流量ゆらぎに対して出口流量ゆらぎの位相は遅れるようなものが考えられる。しかしながら、Fig. 5.3 で示された解析結果はプラス側にシフトしている。すなわち位相は進んでいるという結果が得られている。

このことから直ちにこの計算結果が間違っているとか、実験データが不備であるといった判断を下すのは早計である。IFA に備えられた流量計はタービン流量計であるが、炉外実験装置を使った実験によって、時定数は流量に依存しており

- 入口流量計..... $\frac{2}{F_{in}}$
- 出口流量計..... $\frac{1.67}{F_{out}}$ (ここで F は流量率)

という実験式に従うことが明らかにされている。⁽¹⁴⁾ したがって出入口の流量の差がほとんど無い場合でも入口側の時定数は出口側に比べて大きくなり、さらに IFA 内部でボイドが発生している場合には $F_{in} < F_{out}$ となるため入口側時定数は相対的に大きくなる。このため Fig. 5.3 に示した解析結果は、位相が進んでいるという結果が得られているのである。

上記の例のように、一般に観測されたデータを基にしてシステムの動特性解析を行なう場合には、本来の物理的な機構の他にセンサーの特性も十分考慮して行なう事が必要である。

5.3 非定常データの取り扱い

取り扱うデータが非定常である場合には、一般に 2 章で述べたような種々の関数の推定法は正しい結果を得る事はできない。したがって、このようなデータを解析する場合、通常はトレンド成分の除去などの前処理をほどこすのが常識となっている。しかし、トレンド成分の除去が必ずしも良い結果を与えとは限らない。

Fig. 5.4 に示したデータは OWL-1 キュービクルの排気露点計の出力信号⁽¹³⁾である。この場合、一見して非定常な時系列であることがわかるが、このシステムの動特性を考えると、重要な情報は振動成分の部分ではなくトレンド成分に当る非常にゆっくりとした変動の部分にある。したがって、このようなデータから解析を行なう場合にトレンド成分を除去するのは適当でない。

逆に、前処理をほどこすことなく解析を進めた場合に適切な結果が得られるかどうか問題

となる。Fig. 5.5 は先に示した 1500 点余りからなる図の一部分 (100 点) を抜き出したものである。この場合、ほぼ定常なデータと考えて良い (局所定常)。この定常と見なせる区間 (100 点) に分割して、それぞれの区間毎に MEM によるパワー・スペクトル計算を行なった結果を Fig. 5.6 (B) に示す。各パワー・スペクトルはかなり異なる結果が得られていることがわかる。

しかしながら、全区間を一挙に処理して得られたパワー・スペクトル (Fig. 5.6 (A)) をみると、小区間のパワー・スペクトルを平均した様な形として表わされており、全体的な特徴は十分含まれていることがわかる。このことから、このようなデータに対して多次元 AR モデルの同定を行なった場合、同定されたモデルは完全なものではないとしてもシステムの特徴を十分に取らえたモデルであるといえる。

Table 5.1 Data conditions of the analysis

*** STATISTICAL ANALYSIS OF RANDOM DATA ***

* DATA FILE NAME : DATA00

* JP-2 NOISE EXPERIMENT WITH PRES PERTURBATION "JPC142"

** DATA CONDITION **

N = 2000
IP = 3
IR = 3
DT = .500(SEC)

I COMMENT

1 : OUTLET FLOW : IFA-6
2 : INLET FLOW : IFA-4
3 : OUTLET FLOW : IFA-4

CHANNEL NO.

CHK 6) IN DATA FILE 1
CHK 8) IN DATA FILE 1
CHK 9) IN DATA FILE 1

Table 5.2 Noise covariance matrix of the identified AR model

```

** CHECKING OF ESTIMATED NOISE SOURCE COVARIANCE **
* ELEMENTS OF NOISE COVARIANCE MATRIX
      1          2          3
1  .2329E-02
2  .7681E-04  .1539E-02
3  .1684E-03  .9320E-03  .1176E-02

* NORMALIZATION OF NOISE COVARIANCE MATRIX
1  .1000E+01
2  .4057E-01  .1000E+01
3  .1017E+00  .6927E+00  .1000E+01

* VARIANCE OF EACH NOISE SOURCE
.2329E-02  .1539E-02  .1176E-02

* RATIO OF EACH NOISE VARIANCE TO THE MAX. ONE
.1000E+01  .6610E+00  .5050E+00

* VARIANCE OF ORIGINAL SIGNAL
.1112E-01  .4599E-02  .8579E-02

* VARIANCE RATIO OF EACH NOISE SOURCE TO ASSOCIATED SIGNAL
.2094E+00  .3347E+00  .1371E+00
    
```

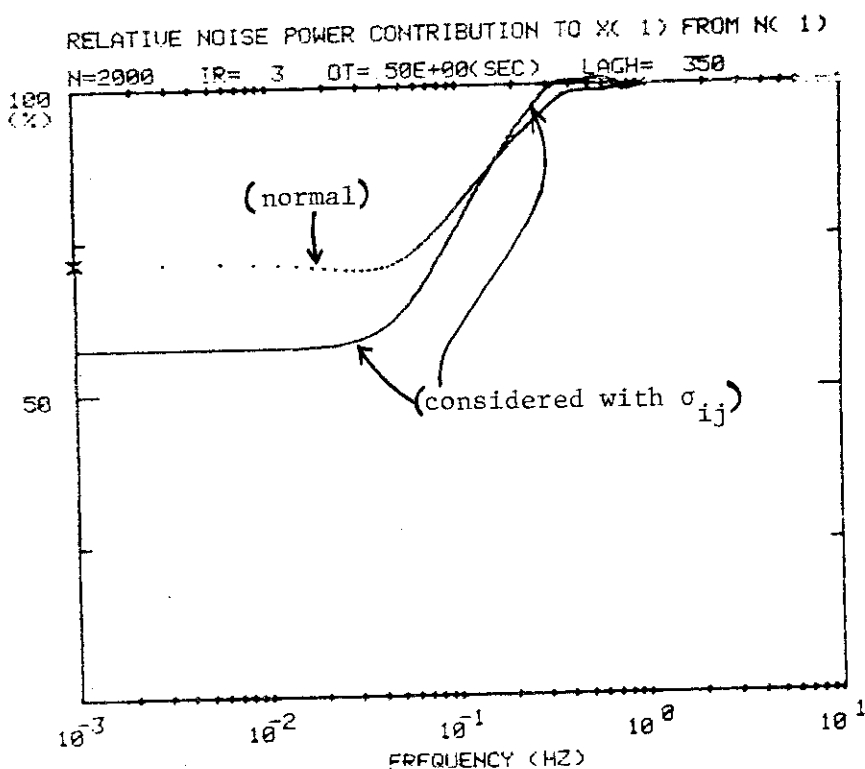


Figure 5.1 Noise power contribution to the power spectrum of IFA#6 outlet flow noise from the system noise source-1

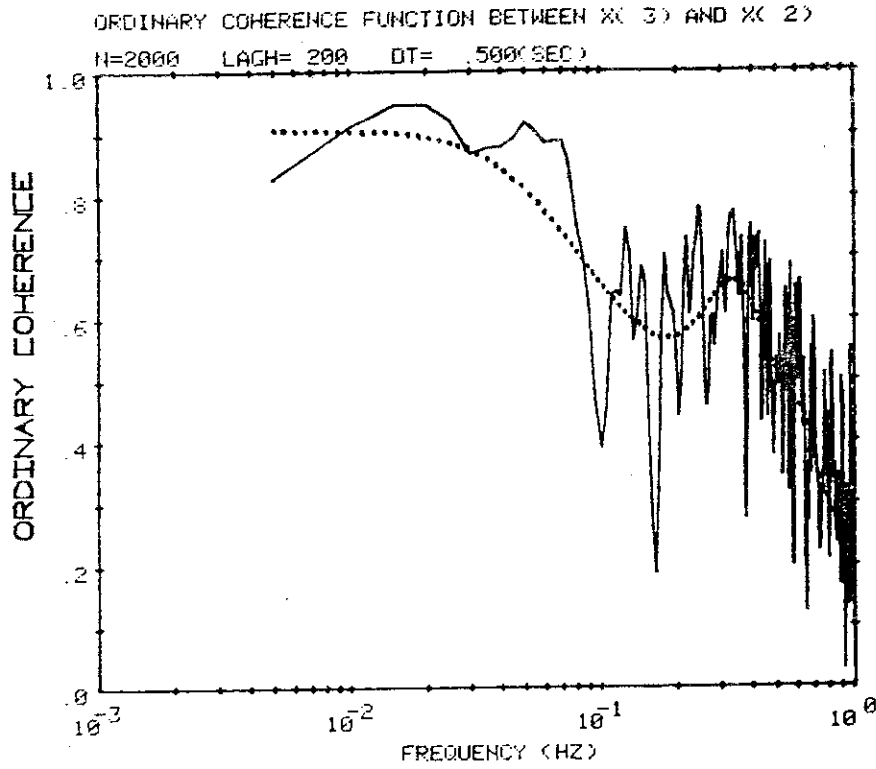


Figure 5.2 Ordinary coherence between the inlet flow noise (IFA#4) and the outlet flow noise (IFA#4)

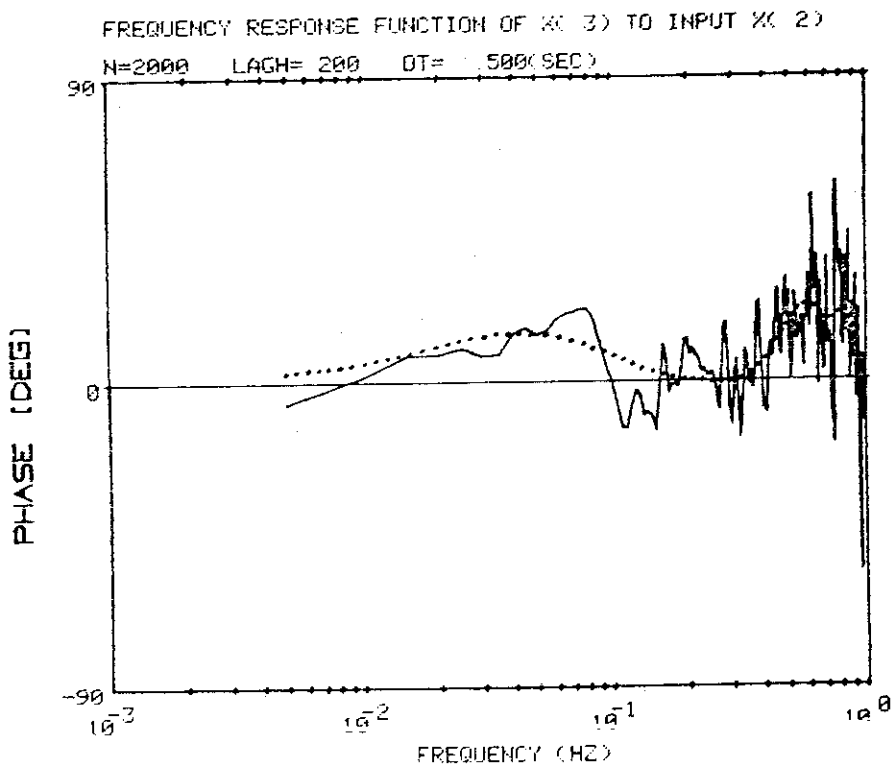
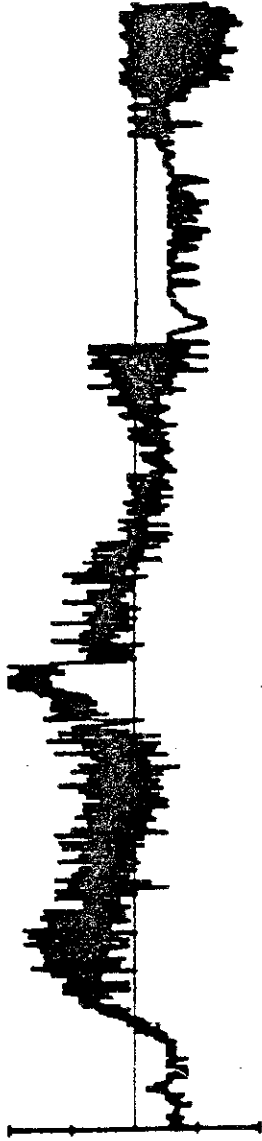


Figure 5.3 Frequency response function (phase) from the inlet flow noise (IFA#4) to the outlet flow noise (IFA#4)

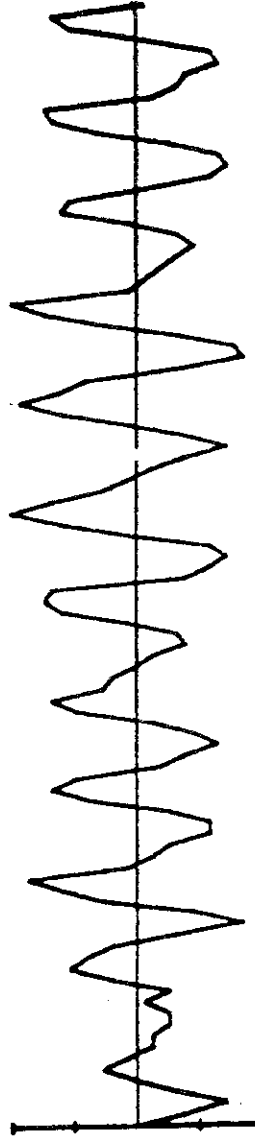
CHANNEL NO. = 2



DATA; MEAN= .278E+01 SCALE= .319E+00 VARIANCE= .113E-01
PLOT FROM XC 1) TO XC 1536)

Figure 5.4 The time series data of the OWL-1 cubicle exhaust dewpoint

CHANNEL NO. = 2



DATA; MEAN= .291E+01 SCALE= .152E+00 VARIANCE= .529E-02
PLOT FROM XC 201) TO XC 300)

Figure 5.5 The expanded figure of a part of Figure 5.4

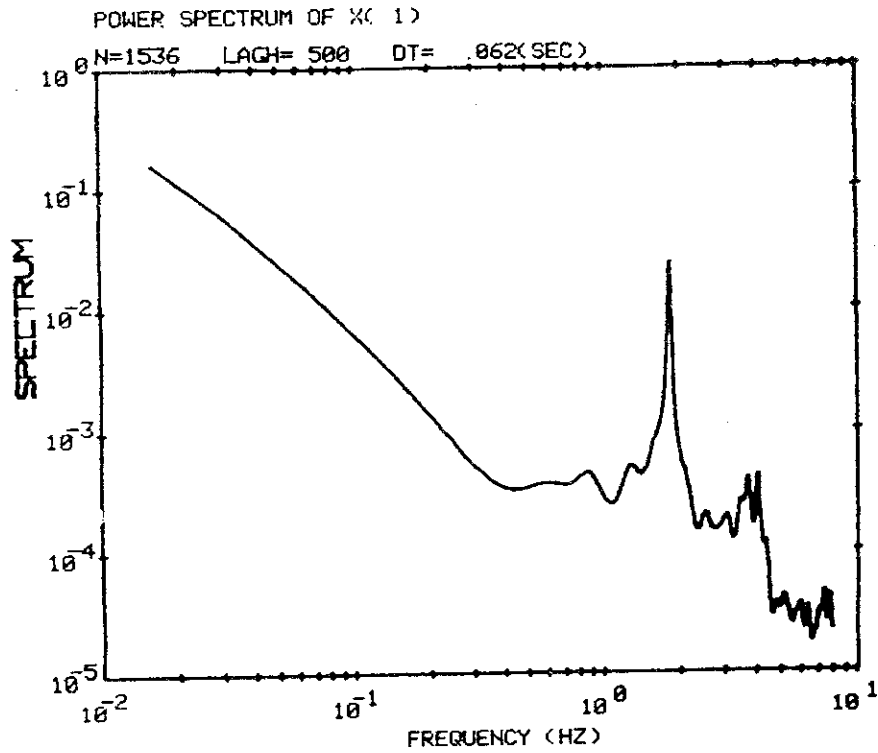


Figure 5.6(A) The power spectrum of the exhaust dewpoint using the whole data showed in Figure 5.4

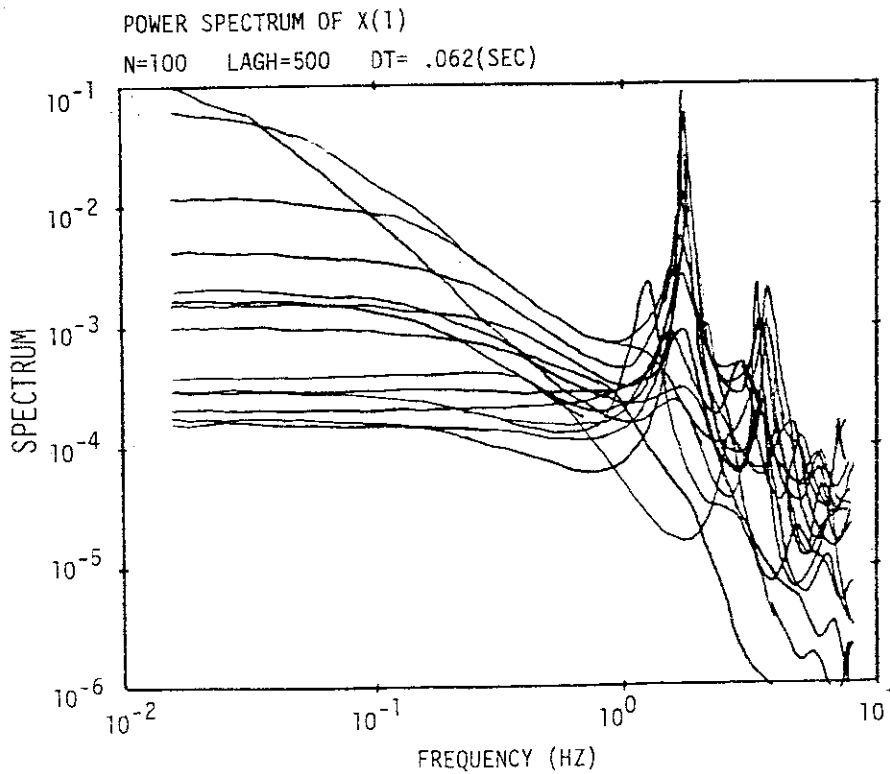


Figure 5.6(B) The power spectrums of the exhaust dewpoint using a part of data (Data points = 100)

6. おわりに

本計算コードは時系列データの統計的処理に基いた動特性解析および異常診断用コードである。したがって、おおよそ統計的ダイナミック・システムと見なせるもので、しかも各変数の測定データを得ることができるならば、どのようなシステムでも適用することができる。通常は原子炉プラントで得られる炉雑音データを主な対象としているが、OWL-1キュービクルでの適用例をみてもわかるように適用範囲は幅広く、大気圏中の放射能濃度の変化に関する動特性解析や再処理工場の各装置や配管等の異常診断などに適用する事も充分可能であろう。

本計算コードに使われた手法や大部分のサブルーチン・プログラムはそれほど新しいものではなく、いずれも今日では一般的になっているものばかりである。しかしながら、測定されたアナログ・データを出発点として多種多様な手法による解析を行ないグラフ表示するという、一貫した即応性のあるコードはあまり例をみない。この理由のうちハード上のものとしては、大型デジタル計算機の場合は汎用性を重視するために専用のアナログ信号の入力装置が無いこと、マイクロ・コンピュータなど超小型のデジタル計算機の場合は専用の入力装置が用意できたとしても逆に処理能力が低くなることがあげられる。さらにソフト上の理由としては、動特性解析の最終目標を「より良い制御の実現」に置いているため、解析に要する手間はそれほど極端に短縮しなくても良かったことなどがあげられる。

本計算コードでは、動特性解析の最終目標を「システムの異常診断」に置いている。この場合に用いられた手法は同じであっても期待される結果は微妙に異なってくる。例えば自己回帰モデルの次数決定には、通常の場合FPEやAICの最小値が用いられるが、本来これらの評価関数は「より良い制御実現」のために作られたものであり、これに従ってモデルを決定した場合、異常を特徴づけるスペクトル上のピークが表現できぬ場合もある。したがって、他の手法の結果と比較し妥当性を評価しながら解析を進めて行く必要がある。

謝 辞

本報告を書くに当たり、全体を通じ助言を与えて下さった篠原慶邦原子炉制御研究室長に謝意を表します。

6. お わ り に

本計算コードは時系列データの統計的処理に基いた動特性解析および異常診断用コードである。したがって、おおよそ統計的ダイナミック・システムと見なせるもので、しかも各変数の測定データを得ることができるならば、どのようなシステムでも適用することができる。通常は原子炉プラントで得られる炉雑音データを主な対象としているが、OWL-1キュービクルでの適用例をみてもわかるように適用範囲は幅広く、大気圏中の放射能濃度の変化に関する動特性解析や再処理工場の各装置や配管等の異常診断などに適用する事も充分可能であろう。

本計算コードに使われた手法や大部分のサブルーチン・プログラムはそれほど新しいものではなく、いずれも今日では一般的になっているものばかりである。しかしながら、測定されたアナログ・データを出発点として多種多様な手法による解析を行ないグラフ表示するという、一貫した即応性のあるコードはあまり例をみない。この理由のうちハード上のものとしては、大型デジタル計算機の場合は汎用性を重視するために専用のアナログ信号の入力装置が無いこと、マイクロ・コンピュータなど超小型のデジタル計算機の場合は専用の入力装置が用意できたとしても逆に処理能力が低くなることがあげられる。さらにソフト上の理由としては、動特性解析の最終目標を「より良い制御の実現」に置いているため、解析に要する手間はそれほど極端に短縮しなくても良かったことなどがあげられる。

本計算コードでは、動特性解析の最終目標を「システムの異常診断」に置いている。この場合に用いられた手法は同じであっても期待される結果は微妙に異なってくる。例えば自己回帰モデルの次数決定には、通常の場合FPEやAICの最小値が用いられるが、本来これらの評価関数は「より良い制御実現」のために作られたものであり、これに従ってモデルを決定した場合、異常を特徴づけるスペクトル上のピークが表現できぬ場合もある。したがって、他の手法の結果と比較し妥当性を評価しながら解析を進めて行く必要がある。

謝 辞

本報告を書くに当たり、全体を通じ助言を与えて下さった篠原慶邦原子炉制御研究室長に謝意を表します。

参 考 文 献

- (1) 黒田義輝, 他; 原子炉診断技術の現状, 日本原子力学会誌 Vol. 15 p. 793-808 (1973)
- (2) 赤池弘次, 中川東一郎; ダイナミック・システムの統計的解析と制御, サイエンス社 (1972)
- (3) 尾熊律雄, 藤井義雄, 臼井甫積, 渡辺光一; ハイブリッド計算機による多変数相関及びスペクトル解析コード (MLCOSP), JAERI-M 6252 (1975)
- (4) 尾熊律雄, 藤井義雄, 渡辺光一; 自己回帰モデリングに基く多変数システムの同定と動特性解析コード (DYSAC), JAERI-M 6897 (1977)
- (5) J. S. Bendat, A. G. Pirsol; Random Data - Analysis and Measurement Procedures, John Wiley (1971)
- (6) 日野幹雄; スペクトル解析, 朝倉書店 (1977)
- (7) P. G. Hoel; Elementary Statistics, John Wiley (1960)
- (8) 添田喬, 中溝高好, 大松繁; 信号処理の基礎と応用, 日新出版 (1979)
- (9) 山下勝比呂, 鈴木胖, 藤井克彦; 周波数応答測定値より伝達関数を求める方法, 制御工学 Vol. 14 p 667 (1970)
- (10) R. Oguma; A Method to Estimate Mechanical State inside Fuel Rod Based on Noise Analysis, J. Nucl. Sci. Technol. Vol. 17 p811 (1980)
- (11) 尾熊律雄, 藤井義雄, 坪長, 米川出; OWL- ϕ プラントの動特性同定と制御系の評価, JAERI-M 6801 (1976)
- (12) 北村正晴, 松原邦彦, 尾熊律雄; JPDR-II の動特性同定実験 - 自己回帰モデリングの適用 -, JAERI-M 7580 (1978)
- (13) 尾熊律雄, 林光二, 北島敏雄; OWL-1 キュービクルにおける露点計記録データの統計的解析と冷却水漏洩早期検出への応用, JAERI-M 9237 (1980)
- (14) 松原邦彦; 沸騰軽水炉における変量ゆらぎの源と伝達特性に関する研究, JAERI 1269 (1981)