

JAERI-M

9899

改訂版ERATO-JによるMHD安定性解析

1982年1月

徳田 伸二・常松 俊秀・安積 正史  
滝塚 知典・奈良岡賢逸\*・竹田 辰興

日本原子力研究所  
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-Mレポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Section, Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1982

編集兼発行 日本原子力研究所  
印刷 いばらき印刷(株)

改訂版ERATO-JによるMHD安定性解析

日本原子力研究所 東海研究所核融合研究部  
徳田伸二・常松俊秀・安積正史・滝塚知典  
奈良岡賢逸\*・竹田辰興

(1981年12月21日受理)

線型理想MHD安定性解析コード, ERATO-J, の4点の改良を行なった。(i) 高精度写像モジュールを開発した。この写像により, 固有値のメッシュ数に関する収束性を滑らかな2次にすることができた。(ii) 中間および高 $n$ モード安定性解析に不可欠な, 準モード表示法を追加した。(iii) 真空磁場エネルギー計算のグリーン関数法をベクトル・ポテンシャル法に改めた。グリーン関数法に現われる特異性の問題点が解決され, また軸対称モードの効果もとり入れられるようになった。(iv) 大次元疎行列の圧縮法を採用した。一般固有値問題の逆反復法による計算に必要なディスク・ファイル量, 入出力回数, およびCPU時間を大巾に減少できた。

この改良版ERATO-Jを用いて,  $n=1$ 内部キンク・モードおよびバルーニング・モードの安定性解析を行なった。 $n=1$ 内部キンク・モードに対する第2安定領域が見つかった。バルーニング・モードの成長率へのトロイダル・モード数およびシアの影響が明らかになった。

---

\* 外来研究員、富士通(株)

MHD Stability Analysis by Revised Version of ERATO-J

Shinji TOKUDA, Toshihide TSUNEMATSU, Masafumi AZUMI,  
Tomonori TAKIZUKA, Ken-itsu NARAOKA\* and Tatsuoki TAKEDA

Division of Thermonuclear Fusion Research,  
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received December 21, 1981)

The linear ideal MHD stability analysis code ERATO-J has been improved in the following four problems. (i) The high accuracy mapping module is developed, which guarantees the convergence of eigenvalues to be smooth and quadratic with respect to the mesh number. (ii) The quasi-mode representation is added, which is essential to analyses of middle and high  $n$  mode stabilities. (iii) The vector potential method in the calculation of the vacuum energy is applied in place of the Green function method (GFM), which removes the singularity in the GFM and also included the effect of the axisymmetric mode. (iv) The packing technique for the large scale sparse matrix is used to solve the generalized eigenvalue problem by the inverse iteration, which reduces the necessary disk files, I/O accesses, and CPU time. By using this revised version of ERATO-J code, the  $n=1$  internal kink mode and ballooning modes are studied. The second stability region against the  $n=1$  internal kink mode is found. The dependence of the growth rate of ballooning modes on the toroidal mode number  $n$  and shear is clarified.

Keywords: ERATO-J, MHD Stability, High Accuracy Mapping, Quasi-mode Representation, Vector Potential Method, Large Scale Sparse Matrix,  $n=1$  Internal Kink Mode, Ballooning Mode, Second Stability

---

\* On leave from Fujitsu Ltd.

## 目 次

1. はじめに.....	1
2. 写像法の改良 (ERATO 1) .....	3
3. 高nモード計算法の改良 (ERATO 1, ERATO 3) .....	13
4. 真空磁場計算法の改良 (ERATO 2) .....	17
5. 固有値問題解法の改良 (ERATO 4) .....	23
6. 内部キック・モードの解析.....	29
7. バルーン・モードの解析.....	35
8. まとめ.....	41
謝 辞.....	42
参考文献.....	43
付録1 メトリック量の導出.....	45
付録2 ユティリティ・プログラム.....	46
付録3 ロード・モジュールの作成.....	47
付録4 カタログド・プロセッサ.....	48
付録5 ジョブ・コントロール.....	48
付録6 ファイル.....	49
付録7 入力データ.....	49
付録8 資源量.....	50

## Contents

1. Introduction .....	1
2. High accuracy mapping module (ERAT01) .....	3
3. Quasi-mode representation (ERAT01 and ERAT03) .....	13
4. Vector potential method for vacuum energy (ERAT02) .....	17
5. Sparse matrix technique in inverse iteration method (ERAT04) ...	23
6. Stability analysis of n=1 internal kink mode .....	29
7. Stability analysis of ballooning mode .....	35
8. Summary .....	41
Acknowledgements .....	42
References .....	43
Appendix 1. Derivation of metric quantities .....	45
Appendix 2. Utility program AUTDIM .....	46
Appendix 3. Creation of load module .....	47
Appendix 4. Catalogued procedure library .....	48
Appendix 5. Job control for execution .....	48
Appendix 6. Files .....	49
Appendix 7. Input data .....	49
Appendix 8. System resources .....	50

## 1. はじめに

ERATOコードは、有限要素法を用いて、軸対称トーラス・プラズマの線形MHD安定性を解析する計算コードである<sup>1)</sup>。原研においては、JT-60の安定性解析<sup>2)</sup>、INTORの安定性解析<sup>3)</sup>、高ベータ・プラズマ平衡の安定性解析<sup>4)</sup>などに利用され、原研計算機システム用に書き換えられた原研版ERATO (ERATO-J)として、その利用手引書<sup>5)</sup>が公表されている。文献5)にも指摘されているように、これら一連の安定性解析を通して、ERATOコードには以下のような、解決すべき問題点が存在することがわかった。

第1の問題点は、固有値 $\gamma$ の収束曲線がメッシュ数 $N$ に対して、必ずしも、 $N^{-2}$ -依存性を示さず、小規模な不規則性や、さらには、特定のメッシュ数に対して固有値が収束曲線から大きくずれる共鳴的な現象が観測されることである。このため、成長率 $\gamma$ の低い内部モードについて信頼性のある安定性解析が困難であった。

ERATOコードで安定性解析を行なう場合、その対象となるプラズマ平衡はポロイダル磁束関数 $\psi(R, Z)$ で与えられる。一方、ERATOコードでは、座標系として、各磁気面上で磁力線が直線になる、いわゆる、自然座標系 $(\psi, \chi)$ を採用している。このため、 $(R, Z)$ 座標から $(\psi, \chi)$ 座標へ写像を行ない、安定性解析に必要なメトリック諸量を自然座標上で計算することが必要である。この写像はERATO 1で実行される。しかし、これまでのERATO 1では不正確な写像法を用いているため、精度の高いメトリック諸量を求めることができない。固有値の収束が2次からはずれるのは、この写像の誤差が固有値へ反映するためと考えられる。

また、第2の問題点は、トロイダル・モード数 $n$ の高い( $n \geq 5$ )バルーニング・モードの固有値がポロイダル方向のメッシュ数 $N_\chi$ に対して、 $N_\chi^{-2}$ より高次の依存性を示すことである。これは、 $n$ が高くなると、不安定なモードがポロイダル方向に短波長の振動をもつため、実行可能なメッシュ数の範囲では固有関数を正確に表現できないためである<sup>6,7)</sup>。そのため、今までのERATOコードでは、 $n \geq 5$ のモードの安定性解析は、事実上、不可能であった。

第3の問題点は、外部モードに対する安定性を解析する場合に必要な真空磁場のエネルギーの計算方法にある。旧版では、磁気ポテンシャルに対するグリーン関数を用いている。そのため、導体壁とプラズマ表面とが接近していると、真空磁場エネルギーの寄与を、精度よく評価できない。また、固有値の収束は2次の収束からずれている。さらに、グリーン関数法は、トロイダル・モード数 $n$ 、ポロイダル・モード数 $m$ がともに零である変位が表現されないという欠点をもっている。

第4の問題点は、ERATOコードで一連の安定性解析を行なう場合に遭遇する実際的な困難である。線形MHD安定性解析問題は、有限要素近似により、大型行列の一般固有値問題に帰着する。ERATOコードの中で、計算機資源を最も消費するのは、この一般固有値問題の最小固有値、および、それに属する固有ベクトルをベクトル逆反復法で求めるERATO 4である。行列が巨大であるため、ディスク・ファイルと主記憶との間のデータ転送が必要である。このため、CPU時間もさることながら、大容量のディスク・ファイルと膨大なI/O回数を必要とする<sup>5)</sup>。そのた

め、CPU時間と経過時間との差が大きく、ERATOコードは計算効率の著しく悪いコードであった。

我々は、上記に述べた種々の問題点を克服したERATOコード（改訂版ERATO-J）を開発した。そして、このコードを用いて、 $n=1$ 内部キンク・モードと高 $n$ バルーニング・モードの安定性解析を行い、数値計算上、著しい成果を挙げるとともに、これらのモードについて、物理的知見を得ることができた。

本報告書では、改訂版ERATOコードにおいて、改良された諸点について詳しく述べ、また、 $n=1$ 内部キンク・モードと高 $n$ バルーニング・モードの安定性解析結果を示す。

第2章では、ポロイダル磁束関数 $\psi(R, Z)$ の二次元スプライン補間を用いた写像法について述べる。この写像法によりメトリック諸量の精度が向上し、その結果、収束曲線に現われていた不規則性や共鳴的現象を除去することができる。また、成長率の低い内部モードの安定性解析が可能になる。

第3章では、ERATOコードで高 $n$ バルーニング・モードを解析する方法について述べる。ポロイダル方向の短波長の振動を、高 $n$ バルーニング理論で用いられる変換<sup>8)</sup>によって、プラズマの変位から除去し、ゆるやかに変動する振幅でラグランジュ関数を表わす。この方法によって、実行可能なメッシュ数の範囲で、 $n=5\sim 100$ までの高 $n$ モードの安定性解析が可能になる。

第4章では、磁気ポテンシャルに関するグリーン関数の代わりに、ベクトル・ポテンシャルを用いて、真空磁場のエネルギーを表示する方法について述べる。この方法により、導体壁とプラズマ表面が接近している場合の困難が取り除かれ、また $n=m=0$ のモードが自動的に表現される。そして、固有値の収束は二次になる。

第5章では、ベクトル逆反復法によって一般固有値問題を解く際に、CPU時間、ディスク容量、および、I/O回数を、旧版ERATOに較べて、大幅に減少させるScottの算法<sup>9)</sup>について述べる。

改訂版ERATOコードを用いた、 $n=1$ 内部キンク・モードと高 $n$ バルーニング・モードの解析を、それぞれ第6章と第7章において行う。そして、改訂版ERATO-Jの要約を第8章に示す。

ERATOコードは、いくつかの性質の異なる計算を、できるだけ少ない計算機資源で行なえるように、5つのモジュールに分割されている<sup>5)</sup>。この分割によって、解析対象となる不安定モードの性質に適合した、コードの部分的な変更が容易になるという利点も生じる。しかし、一方では、モジュール分割のため、データの受け渡し、ロード・モジュールやジョブ・コントロールの作成が繁雑になる。この欠点を補うため、今回の改訂では、種々のユーティリティ・プログラムやマクロ・ライブラリーを開発した。これらの支援プログラムは、付録にまとめられている。



## 2. 写像法の改良 (ERATO1)

本章では  $(R, Z)$  メッシュ上で与えられたポロイダル磁束関数から MHD 安定性解析に必要な、自然座標系  $(\psi, \chi)$  上でのメトリック諸量を、二次元スプライン補間を用いて計算する方法について述べる。この方法によれば、磁気軸近傍でもメトリック諸量が求まり、かつ、それらの値は  $(\psi, \chi)$  メッシュ数に依存せず、精度の高いものとなる。

### 2.1 旧版 ERATO-J で用いられている写像法

ERATO コードでは、各磁気面上で磁力線が直線になる自然座標系  $(\psi, \chi)$  を用いている。ポロイダル磁束関数  $\psi(R, Z)$  は、ERATO コードで安定性解析を行なう場合に対象となる MHD 平衡を与える平衡量であり、Grad-Shafranov 方程式

$$\Delta^* \psi = R j_\varphi, \quad \Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \quad (2.1)$$

$$j_\varphi = -R p'(\psi) - T T'(\psi) / R, \quad (2.2)$$

を満足する。ここで  $j_\varphi$  はトロイダル電流密度、 $p$  は圧力関数、 $T$  はトロイダル磁束関数であり、 $'$  は  $\psi$  に関する微分を表わす。また  $\chi$ -座標は、各磁気面上で磁力線が直線になる条件から決められ、 $\psi$  の等高線上における線積分

$$\chi = 2\pi \int \frac{d\ell}{R^2 B_p} / \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p}, \quad (2.3)$$

で与えられる ( $B_p = |\nabla \psi| / R$  はポロイダル磁場)。安定性解析に必要なメトリック諸量は  $(\psi, \chi)$  座標のメッシュ上で与えられ、それらの量としては、 $R(\psi, \chi)$ ,  $Z(\psi, \chi)$ ,  $\partial R / \partial \psi$ ,  $\partial R / \partial \chi$ , および、安定係数

$$q(\psi) = \frac{T}{2\pi} \oint \frac{d\ell}{R B_p^2}, \quad (2.4)$$

および  $dq/d\psi$  のほかに、さらに

$$\beta_\chi(\psi, \chi) = \frac{\nabla \psi \cdot \nabla \chi}{|\nabla \psi|^2}, \quad (2.5)$$

$$H(\psi, \chi) = 2\psi \left[ \frac{-j_\varphi}{q R B_p^2} + \frac{1}{T} \frac{d}{d\psi} \left( \frac{T}{q} \right) \right], \quad (2.6)$$

$$K(\psi, \chi) = \frac{2\psi}{q} \frac{1}{R^2 B_p^2} \left[ j_\varphi^2 - \frac{j_\varphi}{2R} \frac{\nabla(|\nabla\psi|^2) \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} - \frac{p'}{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} \right], \quad (2.7)$$

がある。 $\beta_\chi(\psi, \chi)$ は $(\psi, \chi)$ 座標の非直交度を表わす量であり、また $K(\psi, \chi)$ はプラズマを不安定にする作用をもつ項（いわゆる駆動項（driving term））である。

旧版 ERATO コードでは、次のような方法にもとづいてメトリック量をもとめている。

(i)  $(R, Z)$  グリッド上で与えられた $\psi$ の値をもとに線形補間によって $\psi$ の等高線を描き、この近似的な等高線をもとにして、線積分(2.2), (2.4)を線形近似で求める。

(ii) メトリック諸量に現われる各種の微分計算には差分近似と線形補間を用いる。たとえば、 $(\psi, \chi)$ メッシュ上で $\partial\psi/\partial R$ ,  $\partial\psi/\partial Z$ の値を求める場合、 $R(\psi, \chi)$ ,  $Z(\psi, \chi)$ が、一般には $(R, Z)$ メッシュ点に一致しないので、 $R(\psi, \chi)$ ,  $Z(\psi, \chi)$ に最も近いメッシュ点上での $\partial\psi/\partial R$ ,  $\partial\psi/\partial Z$ を差分近似で評価する。次に、それらの値をもとに線形補間によって $(R(\psi, \chi), Z(\psi, \chi))$ での値を評価する。また、 $\partial R/\partial\psi$ については、それを評価する等高線 $\psi = \psi_i$ に相前後する等高線 $\psi_{i\pm 1}$ 上での $R$ の値を用いて $\partial R/\partial\psi(\psi_i, \chi)$ を差分近似

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}} \frac{R(\psi_{i+1}, \chi) - R(\psi_i, \chi)}{\psi_{i+1} - \psi_i} + \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}} \frac{R(\psi_{i-1}, \chi) - R(\psi_i, \chi)}{\psi_{i-1} - \psi_i}$$

で評価する。

しかしながら、この方法には以下のような欠点がある。すなわち、

(i)の方法だと、磁気軸近傍では等高線を描くことができない。そのため、旧版 ERATO コードでは磁気軸近傍で最小自乗法による関数あてはめを行なって $\psi(R, Z)$ の関数形を与え、それを用いてメトリック諸量を計算するという便宜的な操作を使っている。この操作には、仮定する $\psi$ の関数形と、あてはめの領域に任意性が残り、したがって、それらを変えると当然、固有値 $\gamma^2$ も変化する。なによりも、あてはめられた $\psi(R, Z)$ は、Grad-Shafranov 方程式を満足しないので、これは、きわめて不満足な方法である。特に、トカマクにおいては、 $q = 1$ の磁気面が、あてはめ領域に入る場合が多く、 $n = 1$ モードの安定性解析には不適當である。

(ii)については、一般に $(R, Z)$ のメッシュ数より $(\psi, \chi)$ のメッシュ数が少ないので、 $\psi(R, Z)$ の精度はよくても差分近似の誤差が大きくなることが予想される。特に、 $\beta_\chi(\psi, \chi)$ は差分近似から求めた $\partial R/\partial\psi$ を使って、公式

$$\beta_\chi(\psi, \chi) = \left( \frac{\partial R}{\partial\psi} - \frac{1}{(RB_p)^2} \frac{\partial\psi}{\partial R} \right) / \left( \frac{qR}{T} \frac{\partial\psi}{\partial Z} \right), \quad (2.8)$$

から求めるので、 $\partial R/\partial\psi$ の精度が悪いと $\partial\psi/\partial Z = 0$ となる $Z = 0$ 軸近傍で $\beta_\chi$ の誤差が著しく増幅される危険がある。また、駆動項 $K(\psi, \chi)$ には $\psi$ の $R$ および $Z$ についての二階偏微分が含まれるので、それらの誤差が固有値へ敏感に反映される。

以上に述べた様に、旧版 ERATO コードでは、MHD 平衡解 $\psi(R, Z)$ の精度が高くても、計算されるメトリック量が不正確であり、そのため、 $(\psi, \chi)$ のメッシュ数を増加させても、固有値の精度が向上するとは限らず、固有値の滑らかな収束曲線が得られない。

## 2.2 スプライン補間を用いた写像法

前節で述べたことから明らかなように、ERATO1コードで用いる写像は

(a) 与えられた $(R, Z)$ のメッシュ数と、メッシュ上での $\psi$ の値だけで、メトリック諸量が一意的に、かつ正確にもとまり、それらの精度が $(\psi, \chi)$ のメッシュ数に依存しないこと、

(b)  $(R, Z)$ メッシュ上だけでなく、 $(\psi, \chi)$ メッシュ上でも、変換 $R=R(\psi, \chi)$ ,  $Z=Z(\psi, \chi)$ を通して、 $\psi$ の微分量が一意的に求まること、  
が望ましい。

$\psi(R, Z)$ に二次元スプライン補間を施すことによって、(a), (b)の条件を満足する写像法を作ることができる。スプライン補間された $\psi(R, Z)$ は、メッシュ上で、もとの $\psi$ に一致し、かつ、 $(R, Z)$ 座標の任意の領域で $\psi$ の二階微分まで連続であるので、 $\psi(R, Z)=\psi_i$ なる等高線を微分方程式

$$\frac{dR}{d\ell} = \frac{1}{|\nabla\psi|} \frac{\partial\psi}{\partial Z}, \quad \frac{dZ}{d\ell} = -\frac{1}{|\nabla\psi|} \frac{\partial\psi}{\partial R} \quad (2.9)$$

から求めることができる。ここで $d\ell$ は線素である。

ニュートン法で解いた $\psi(R, 0)=\psi_i$ の解 $R(\ell=0)$ と $Z(\ell=0)=0$ を初期値にして、微分方程式(2.9)を4次の最適ルンゲ・クッタ法で解けば、磁気軸近傍でも等高線を、きわめて正確に描くことができる。したがって磁気軸近傍で $\psi$ の最小自乗あてはめをする必要がなくなる。

次に、 $\psi$ に関する偏微分を避けるために、 $\beta_x(\psi, \chi)$ ,  $dq/d\psi$ を等高線に沿った線積分

$$\beta_x(\psi, \chi) = \frac{T}{q} \left( \int F(\ell) d\ell - \frac{\chi}{2\pi} \oint F(\ell) d\ell \right), \quad (2.10)$$

$$\frac{dq}{d\psi} = \frac{T'}{2\pi} \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p} + \frac{T}{2\pi} \oint F(\ell) d\ell \quad (2.11)$$

$$F = -\frac{B_p}{|\nabla\psi|^6} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial Z} \right)^2 - \left( \frac{\partial\psi}{\partial R} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial Z^2} \right] + 4 \frac{\partial\psi}{\partial R} \frac{\partial\psi}{\partial Z} \frac{\partial^2\psi}{\partial R \partial Z} \right\} - \frac{1}{R^5 B_p^3} \frac{\partial\psi}{\partial R} \quad (2.12)$$

で表わす(導出については付録1参照)。微分方程式(2.9)から、等高線上の $R, Z$ は、その長さ $\ell$ を独立変数として与えられる( $R=R(\ell)$ ,  $Z=Z(\ell)$ )ので、線積分(2.3), (2.4), (2.10) および(2.11)は、シンプソン公式によって容易に、かつ、正確に計算することができる。また $\partial R/\partial\psi$  および $\partial R/\partial\chi$ は座標変換の公式

$$\frac{\partial R}{\partial\psi} = \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{qR}{T} \beta_x \frac{\partial\psi}{\partial Z}, \quad \frac{\partial R}{\partial\chi} = -\frac{qR}{T} \frac{\partial\psi}{\partial Z}, \quad (2.13)$$

から求められる。メトリック諸量 (特に、駆動項  $K(\psi, \chi)$ ) に現われる  $\psi(R, Z)$  の一階および二階微分は、正確な座標変換  $R = R(\psi, \chi)$   $Z = Z(\psi, \chi)$  を通して、局所的に与えられるので、写像に際して誤差の入り込む余地を除くことができる。このように、スプライン補間を用いた写像法は、旧版 ERATO の写像法と比較して、

(1) 磁気軸近傍での最小自乗あてはめが不用であり、(2) メトリック諸量の精度が  $(\psi, \chi)$  のメッシュ数に依存しないので、 $(R, Z)$  のメッシュ数が十分にあって、 $\psi(R, Z)$  のスプライン補間の精度が保障されていれば、ERATO コードで計算された固有値から写像の誤差を除去することができ、固有値の 2 次収束を期待できる。

### 2.3 新写像法のテスト

新写像法のテストのため、直角座標系  $(R, Z)$  において等高線が楕円になる関数  $\psi(R, Z) = 2\pi(R^2 + Z^2/4)^2$  を与え、スプライン補間と微分方程式 (2.9) から描いた等高線の精度を検査した。次に、 $dq/d\psi$ 、 $\partial R/\partial\psi$  および  $\beta_\chi$  を差分近似、および、式 (2-10, 11, 12, 13) から求め、それらの解析形を比較した。今の場合、 $q$  に物理的意味はないが、幾何学的量、すなわち、ヤコビアンになっていて、

$$q = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi}} \quad (2.14)$$

で表わされる。また、 $\chi$  は円柱座標系を考えた時、 $R$ -座軸からの回転角に一致し、 $R(\psi, \chi)$ 、 $\beta_\chi(\psi, \chi)$  は

$$R = \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^{1/4} \cos \chi, \quad (2.15)$$

$$\beta_\chi = \frac{3}{8\pi} \frac{\sin 2\chi}{\psi(5 + 3 \cos 2\chi)} \quad (2.16)$$

で与えられる。

このテストにおいて、 $(R, Z)$  座標のメッシュ数を  $N_R = N_Z = 60$ 、メッシュ幅を  $\Delta_R = \Delta_Z = 2/55$  に選んだ。等高線の高さ  $\psi_i$  は  $\chi = 0$  における  $R$  の値  $R_i$  が等間隔になるように選び、 $R_i$ 、 $\psi_i$  は

$$R_i = \frac{1-3\Delta_R}{40} i, \quad \psi_i = 2\pi R_i^4, \quad (2.17)$$

で与えられる。また、微分方程式 (2.9) を最適ルンゲ・クッタ法で解く時の長さ  $l$  のきざみ幅は、 $i$  番目の等高線に対して  $i/160$  である。図 2.1 に、新写像法から得られた等高線および等  $\chi$  線 ( $i$  は等高線の番号) を示す。また、図 2.2 は磁気軸 (原点) に最も近い二本の等高線を示している。図 2.2 において、 $(R, Z)$  座標はメッシュ幅で規格化されている。これらの図に示された等高線

に対して、等高線上での $\psi$ のスプライン補間値と真の値との相対誤差は $10^{-4}$ 以下である。したがって、等高線が、2~3メッシュ以上離れて、磁気軸のまわりを廻る限り、微分方程式(2-9)は正確な等高線を描く。

図2.3に、新写像法で使われる線積分から求めた $dq/d\psi$ の誤差(破線)と差分近似から求めた $dq/d\psi$ の誤差(一点鎖線)を示す。横軸は等高線の番号を表わす。 $dq/d\psi$ は磁気軸で発散するが、その様子は実線で示されている。磁気軸に近い( $i \leq 8$ )等高線に対し、差分近似では $dq/d\psi$ は求まらない。一方、線積分から求めた $dq/d\psi$ は、 $i=2$ の等高線に対しても1%の誤差範囲で正確に計算されており、また $i=8$ については、差分近似と較べて約1000倍の精度をもっている。

図2.4は、 $i=2$ の等高線上における $\partial R/\partial\psi$ の誤差の $\chi$ -依存性を表わしている。実線は $\beta_\chi(\psi, \chi)$ を(2.10)式にもとづいて求め、変換公式(2.13)から $\partial R/\partial\psi$ を求めた場合の誤差を示しており、点線は、旧版ERATOコードで用いられている差分近似から $\partial R/\partial\psi$ を求めた場合の誤差を示している。たて軸には、 $\sinh^{-1} x$ 目盛が使用されている。差分近似では $\partial R/\partial\psi$ に40%から80%の誤差があり、したがって、この値をもとに、(2.8)式から $\beta_\chi(\psi, \chi)$ を求めても、全く意味のない値を得る。一方、新写像法から計算される $\partial R/\partial\psi$ は、 $\chi$ のすべての領域にわたって、2%の誤差範囲内で正確に求まっている。 $i=8$ の等高線上では、差分近似で求められた $\partial R/\partial\psi$ の誤差は5%である。しかし、それでも、(2.8)式から $\beta_\chi(\psi, \chi)$ を計算する際に、 $\chi=0$ の近傍および $\chi=\pi$ の近傍で、 $\partial R/\partial\psi$ のもつ誤差が著しく増幅されるために、 $\beta_\chi(\psi, \chi)$ の正確な値は求まらない。

線積分(2.10)式から求められた $\beta_\chi(\psi, \chi)$ の誤差を図2.5に示す。 $i=2$ と $i=8$ の等高線上における誤差の $\chi$ -依存性が図示されている。図2.3と同じく、たて軸は $\sinh^{-1} x$ 目盛である。差分近似から求めた $\beta_\chi$ の値は意味がない(その誤差が100%以上になっている)ので示していない。

メッシュ数 $N_R = N_Z = 60$ (●印)の場合、 $i=8$ で、 $\beta_\chi$ の誤差は1%であるが、磁気軸に近い $i=2$ に対しては20%程度である。 $N_R = N_Z = 120$ (○印)にすれば $i=2$ での $\beta_\chi$ の誤差を10%以下に抑えることができる。一般的に、磁気面が磁気軸に近いほど、その磁気面上でのメトリック諸量の精度が低下する。これは、磁気軸に近いと等高線の通過するメッシュ・セルの数が少ないため、線積分を行なう時に、真の値とスプライン補間値との差が打ち消されず、むしろ、累積されるためと考えられる。特に、等高線が、磁気軸の最近接のメッシュ・セル内のみ存在する場合、メトリック諸量の誤差が最大になる。これを避けるため、等高線を1セル内で描かないように、 $\psi$ -メッシュ(すなわち、 $\psi$ の等高線値)を構成することが望ましい。しかしながら、磁気面が磁気軸に近いほど、その面からのエネルギー積分への寄与は小さいので、磁気軸に極端に近い磁気面上のメトリック量の誤差の固有値へのはねかえりは無視できると考えられる。

図2.6は、INTORの平衡<sup>4)</sup>について、旧版ERATOおよび改訂版ERATOコードから計算された固有値 $\gamma^2$ の( $\psi, \chi$ )メッシュ数( $N_S = N_\chi = N$ )の依存性を示している(トロイダル・モード数 $n=1$ )。磁気軸( $\psi=0$ )およびプラズマ表面( $\psi=1$ )での安定係数は、それぞれ、 $q(\psi=0)=0.9$ 、および、 $q(\psi=1)=2.7$ である。

平衡メッシュ数 $N_R \times N_Z$ が $128 \times 64$ の場合(図2.6(a))、旧版ERATOコードでは、×印で

示されているように、明確な収束曲線を得ることができない。そのため、外挿によって、真の固有値を推定することは不可能である。一方、改訂版 ERATO コードでは、・印で示されているように、滑らかな収束曲線を得ることができる。しかも、 $N \geq 25$  の場合、固有値は二次の収束を示すので、外挿によって、真の固有値を推定できる。なお、旧版 ERATO コードでは、磁気軸の近傍で  $\psi(R, Z)$  の最小自乗あてはめが必要であるが、その領域は NAN を入力パラメータとして、長方形領域： $|R - R_a| \leq \text{NAN} \cdot \Delta$ 、 $0 \leq Z \leq \text{NAN} \cdot \Delta$ 、 $(R_a, 0)$ ：磁気軸に最近接のメッシュ点、 $\Delta$ ：メッシュ幅）で与えられる。図(2.6(a))では  $\text{NAN} = 6$  である。

平衡メッシュ数  $\text{NR} \times \text{NZ}$  を  $512 \times 256$  にして、旧版 ERATO コードで固有値を求めた場合を 図 2.6(a) に示す（○印： $\text{NAN} = 10$ ，×印： $\text{NAN} = 25$ ）。また、比較のため、 $\text{NR} \times \text{NZ} = 126 \times 64$  の場合に、改訂版 ERATO コードから得られた収束曲線（・印）も図示している。旧版 ERATO コードでは、平衡メッシュ数を 4 倍にしても、滑らかな収束曲線は得られない。さらに、旧版 ERATO コードのもつ、三点の欠点を指摘できる。1 つは、最小自乗あてはめの領域を決定するパラメータを変えると、固有値も変化し、したがって、異なる収束曲線が得られることである。次に、特定のメッシュ数（ $\text{NAN} = 10$  に対しては  $N = 27, 30$ 、 $\text{NAN} = 25$  については  $N = 30$ ）の時に、固有値が著しく大きくなる、いわゆる“共鳴的現象”が見られる。第 3 点は、メッシュ数  $N$  を増大していくと、固有値に小規模の変動が観測され、その精度が向上するとは言えないことである。改訂版 ERATO コードでは、これらの欠点は完全に取り除かれ、固有値の精度が大幅に改善された。そして、高  $\beta_p$  領域での  $n = 1$  内部キンク・モードの安定性解析が可能になった。その解析結果は第 6 章で述べられる。

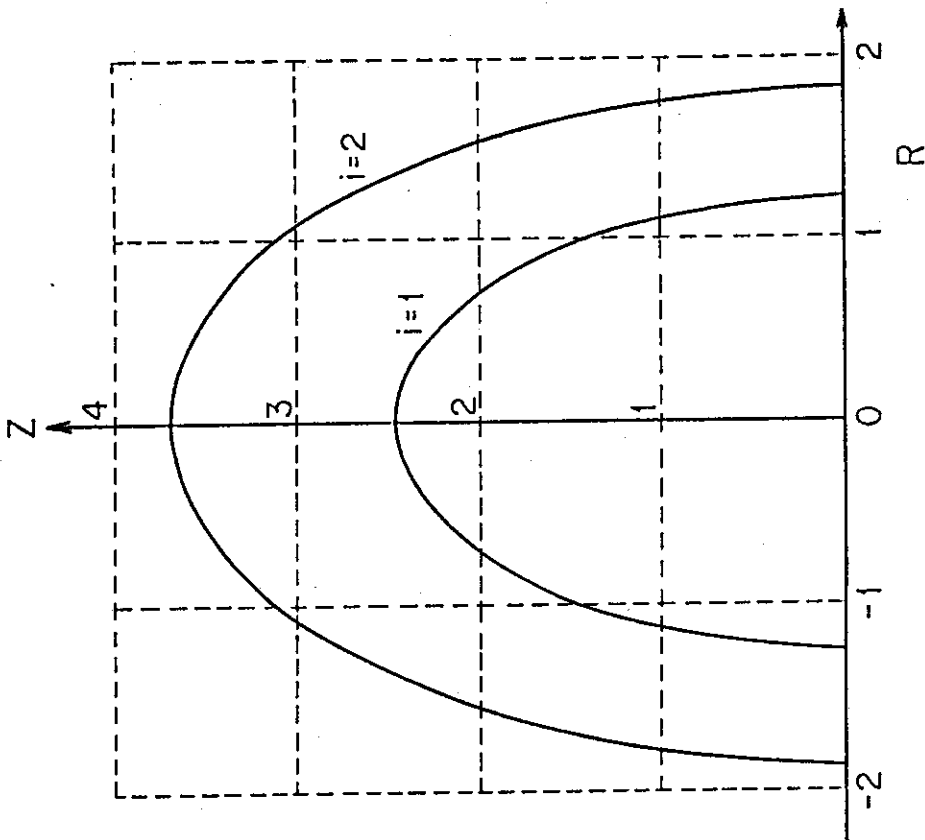


Fig. 2.2

Two equi- $\psi$  lines near the magnetic axis (the origin). (R,Z) meshes are also shown by dashed lines.

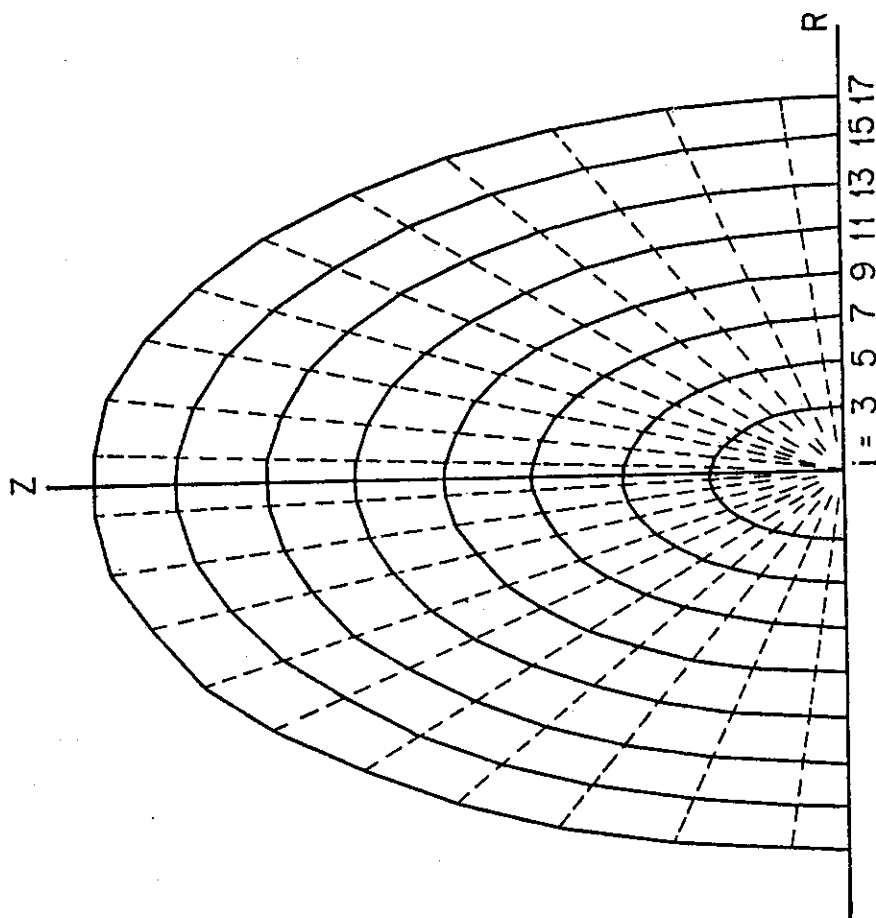


Fig. 2.1

Equi- $\psi$  lines (solid lines) and equi- $x$  lines (dashed lines) for  $\psi(R,Z) = 2\pi(R^2 + Z^2/4)^2$ . Number of (R,Z) meshes,  $NR \times NZ$ , is  $60 \times 60$ . The value of equi- $\psi$  lines,  $\psi_i$ , is chosen as  $\psi_i = 2\pi((1-3\Delta R)i/40)^4$  ( $i = 1, 2, \dots, 40$ ), where  $\Delta R = 2/55$ . The third order spline is used to approximate the function  $\psi(R,Z)$ .

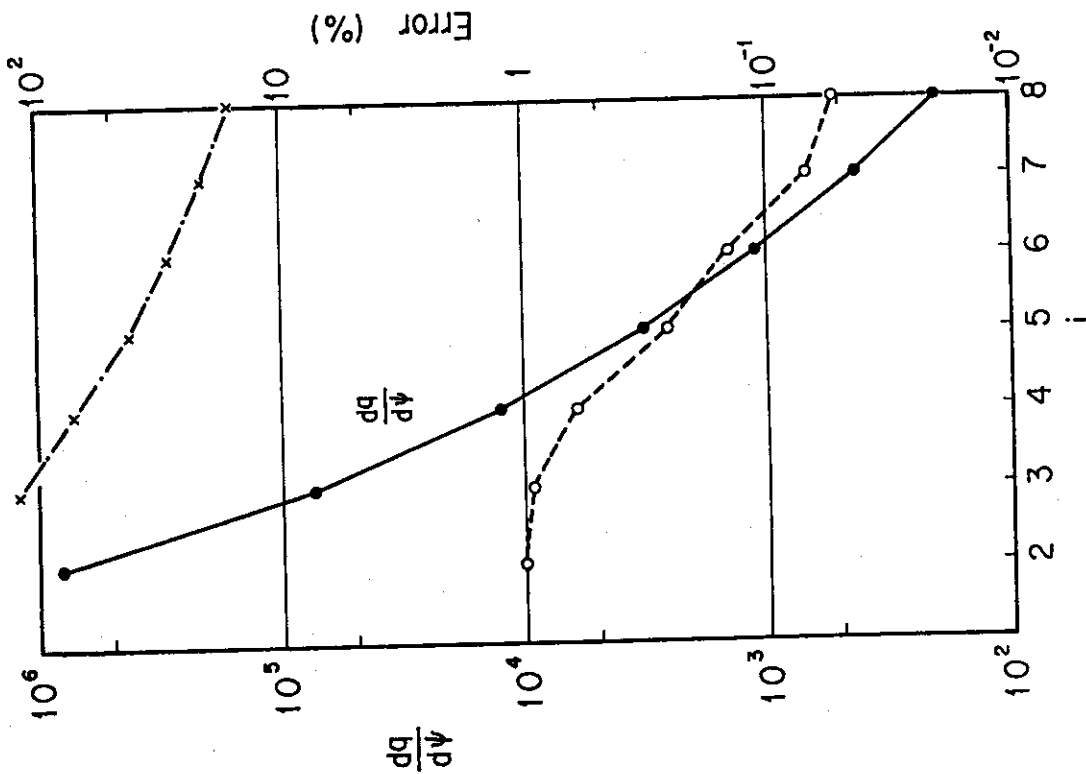


Fig. 2.3 Relative error of  $dq/d\psi$  calculated by the new method (dashed line) and by the difference method (dotted and dashed line) on the  $i$ -th equi- $\psi$  line ( $i = 2, \dots, 8$ ). Analytical values of  $dq/d\psi$  are also shown by solid line.

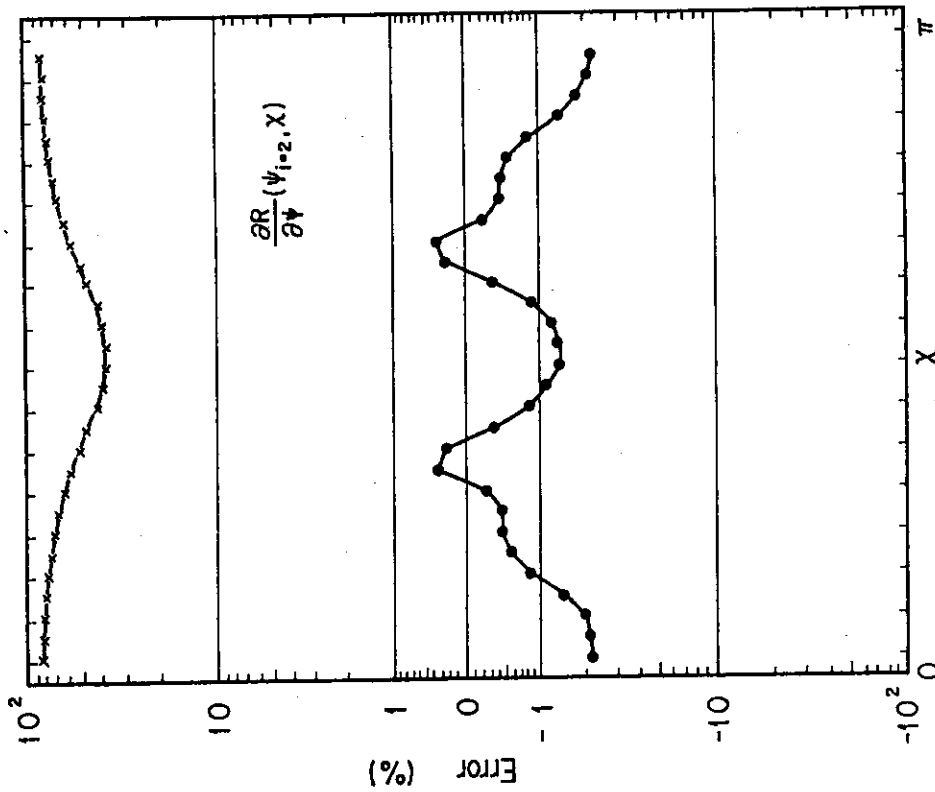


Fig. 2.4 Relative error of  $\partial R/\partial\psi(\psi_{i=2}, X)$  calculated by the new method (solid line) and by the difference method (dotted line). The error is shown by an inverse sine hyperbolic scale.



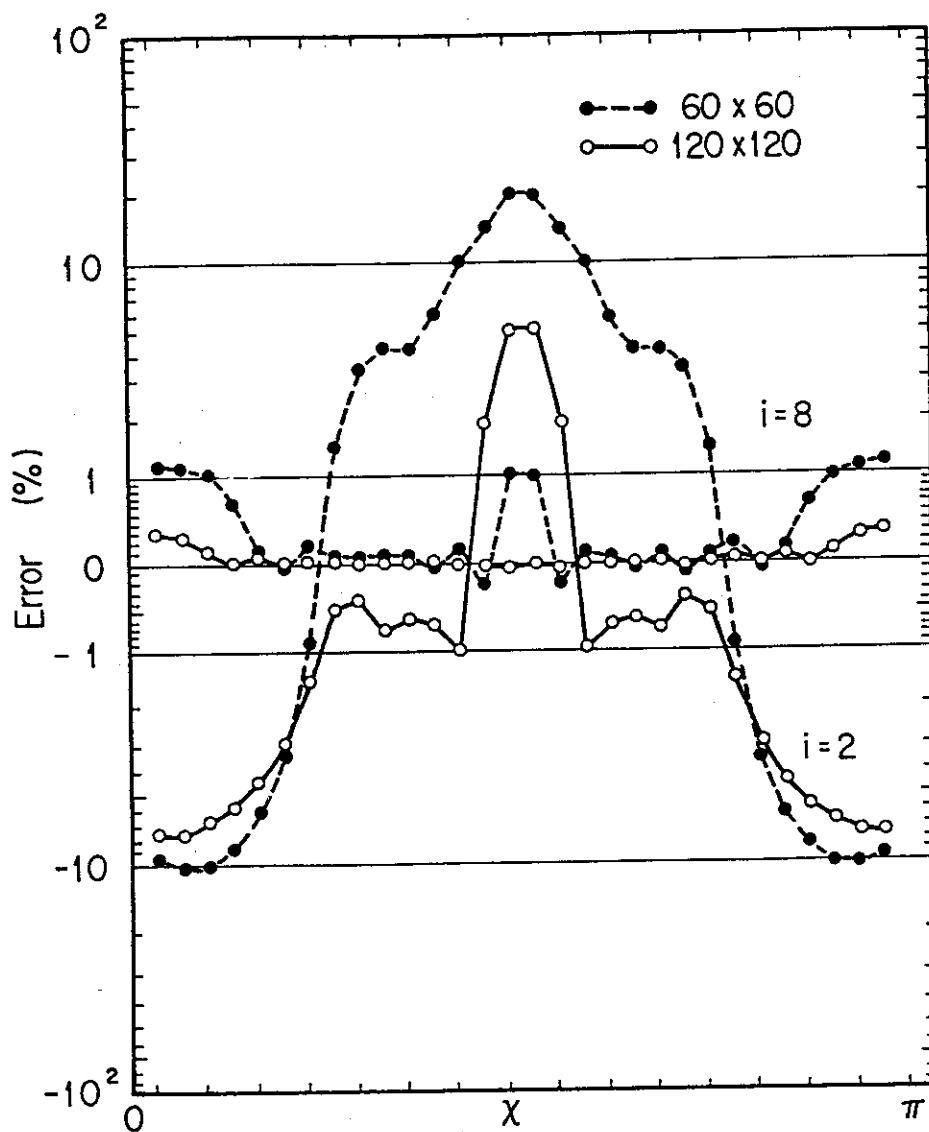


Fig. 2.5 Relative error of  $\beta_\chi(\psi_i, \chi)$  ( $i=2,8$ ) calculated by the new method for  $NR \times NZ = 60 \times 60$  (symbol  $\bullet$ ) and  $NR \times NZ = 120 \times 120$  (symbol  $\circ$ ). The inverse sine hyperbolic scale is used to show the error.

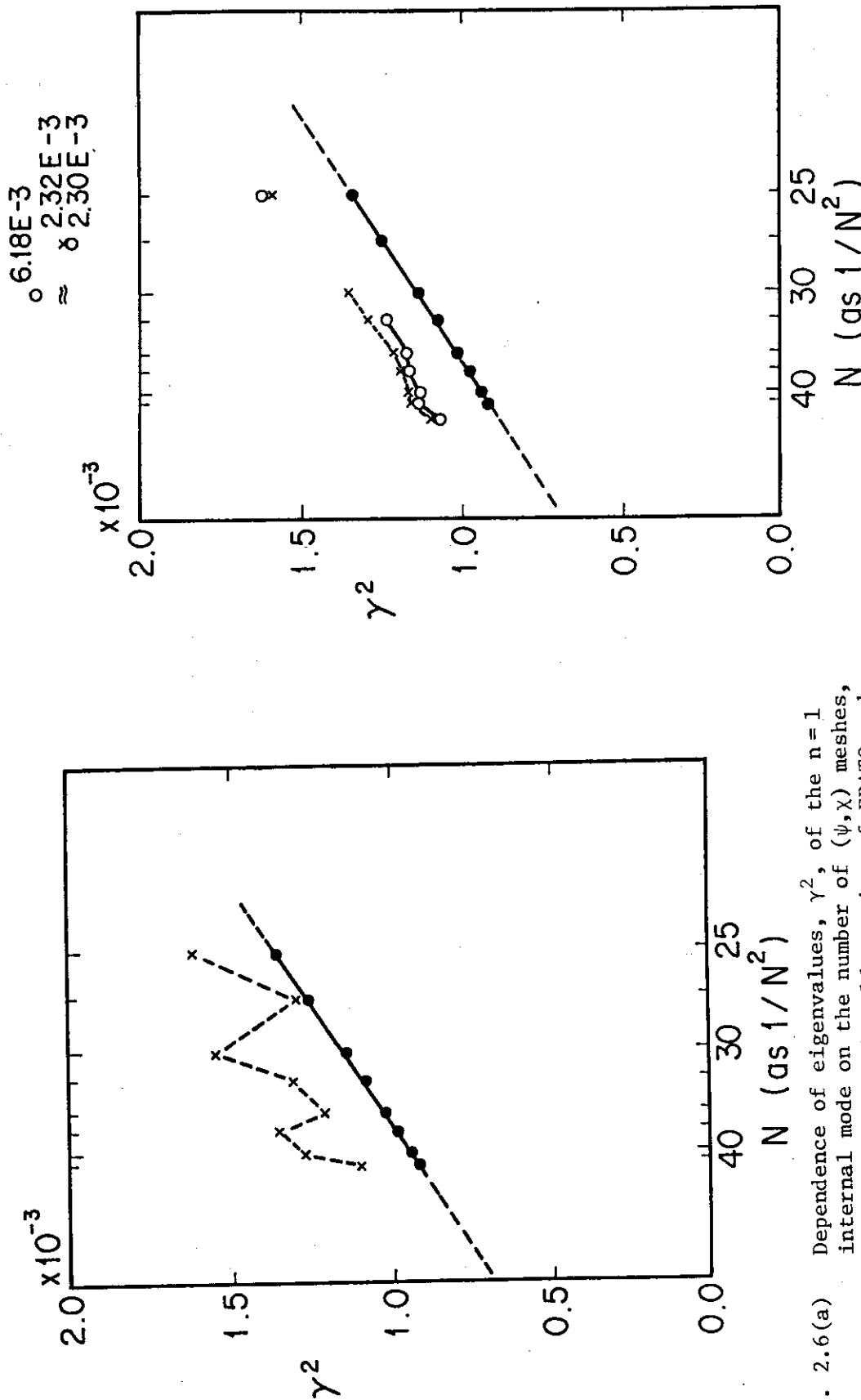


Fig. 2.6(a) Dependence of eigenvalues,  $\gamma^2$ , of the  $n=1$  internal mode on the number of  $(\psi, \chi)$  meshes,  $N$ , obtained by the old version of ERATO code (symbol  $\times$ ) and the revised version of it (symbol  $\circ$ ). The equilibrium used is one of INTOR plasmas: the safety factor is  $q(\psi=0) = 0.9$  at the magnetic axis and  $q(\psi=1) = 2.7$  at the plasma surface. The number of equilibrium meshes,  $NR \times NZ$ , is  $128 \times 64$ : the parameter of the least square fitting,  $NAN$ , is 6.

Fig. 2.6(b) The eigenvalue,  $\gamma^2$ , calculated by the old version of ERATO code vs.  $N$  for the case of  $NR \times NZ = 512 \times 256$  with  $NAN = 10$  (symbol  $\circ$ ) and  $NAN = 25$  (symbol  $\times$ ). The convergence curve obtained by the revised version of it for the case of  $NR \times NZ = 128 \times 64$  is also shown (symbol  $\bullet$ ).

### 3. 高 n モード計算法の改良 (ERATO1, ERATO3)

トカマクの閉じ込めで問題になる MHD 不安定性の 1 つにバルーニング不安定性がある。この不安定性は、トロイダル・モード数  $n$  が大きいもの程成長率が大きい。一方では、運動論的理論からは  $n$  が十分大きなモードは有限なラーマー半径の効果により安定化される事が知られている<sup>10)</sup>。このため、できるだけ広い領域の  $n$  の値について安定性解析を行う事が望ましい。しかし、ポロイダルモード数がほぼ  $m = nq$  であるため、ERATO や PEST コード<sup>11)</sup> では、 $nq = 10$  程度が計算の限界になっていた。最近になって  $n = 10 \sim 100$  のモードもこれらの 2 次元安定性解析コードを使って解析しようという試みがなされている。1 つは、安定・不安定のみを調べる目的で簡約方程式を解くための PEST-II<sup>12)</sup>、もう 1 つはこの章で述べる、ポロイダル方向の短波長の振動を除く方法<sup>13)</sup>である。

高  $n$  バルーニング理論で知られているように、ある磁気面におけるプラズマ変位のポロイダル方向の変化は、 $\exp(inq\chi)$  で記述される。ここで  $\chi$  は磁力線を直線に見る“自然座標系”の角度変数である。プラズマの変位  $\xi$  を、

$$\xi = \hat{\xi} \exp(-inq\chi) \quad (3.1)$$

とおくと、 $nq$  が大きい場合に生ずる  $\xi$  の短波長の振動が位相因子  $\exp(-inq\chi)$  に吸収され、振巾  $\hat{\xi}$  は平衡の変化程度のゆっくりした変化をする。このため、変位  $\xi$  の代わりに振巾  $\hat{\xi}$  を使うことによって、比較的少ないメッシュ数でも、 $n$  の大きなモードに対し精度の良い結果が期待される。

軸対称トーラス・プラズマの変位を

$$\xi = R^2 X(\nabla\chi \times \nabla\varphi) + R^2 V(\nabla\varphi \times \nabla\psi) + R^2 Y B$$

のように表わし、トロイダルモード数  $n$  についてフーリエ分解をすると、変位  $X, V, Y$  と振巾  $\hat{X}, \hat{V}, \hat{Y}$  との関係は、

$$\begin{pmatrix} X \\ V \\ Y \end{pmatrix} = R_e \left\{ \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{V} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} \exp i(n\varphi - nq\chi) \right\} \quad (3.2)$$

となる。(3.2) を通常のエネルギ-積分に代入すると、振巾に関する 2 次元関数が得られる。

$$W_p = \int_0^1 ds \int_0^{2\pi} d\chi \left\{ a_1 \left| \frac{\partial \hat{X}}{\partial \chi} \right|^2 + a_2 |D|^2 + a_3 \left| D - \frac{\partial \hat{V}}{\partial \chi} + 2\beta_\chi s \psi_s \frac{\partial \hat{X}}{\partial \chi} + H\hat{X} \right|^2 \right.$$

$$+a_4 \left| D + \frac{\partial \ell n R^2}{\partial s} \widehat{X} + \frac{\partial \ell n R^2}{\partial \chi} (\widehat{V} + \widehat{Y}) + \frac{\partial Y}{\partial \chi} \right|^2 - a_5 |\widehat{X}|^2 \} \quad (3.3)$$

$$a_1 = \frac{T^3 \psi}{s q^3 R^4 B_p^2}, \quad a_2 = \frac{s T^3}{4 q \psi}, \quad a_3 = \frac{s T R^2 B_p^2}{4 q \psi}$$

$$a_4 = \frac{\gamma p s R^2 T}{4 q \psi}, \quad D = \frac{\partial \widehat{X}}{\partial s} + \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \chi} - \ln \left( q \widehat{V} + \frac{d q}{d s} \chi \widehat{X} \right)$$

$$a_5 = \frac{2 R^2 T \psi}{q s} \left[ \frac{j_\varphi^2}{R^2 B_p^2} - \frac{j_\varphi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} (\ell n R B_p)_\nu - \frac{d p}{d \psi} (\ell n R)_\nu \right]$$

$$H = \frac{d}{d s} \left( \ell n \frac{T}{q} \right) - 2 \frac{j_\varphi s \psi_s}{R B_p^2}, \quad j_\varphi = -R \frac{d p}{d \psi} - \frac{1}{R} T \frac{d T}{d \psi},$$

$$\beta_\chi = \left( \frac{\partial \chi}{\partial s} \right)_\nu \quad (3.4)$$

$$K = \int_0^1 d s \int_0^{2\pi} d \chi \rho(s) \{ b_1 |\widehat{X}|^2 + b_2 |\widehat{V} + \widehat{Y} - \beta_\chi \widehat{X}|^2 + b_3 |\widehat{Y}|^2 \}, \quad (3.5)$$

$$b_1 = \frac{2 \psi T R^2}{s q |\psi \psi'|^2}, \quad b_2 = \frac{s q R^4 |\psi \psi'|^2}{2 \psi T}, \quad b_3 = \frac{s q R^4 T}{2 \psi} \quad (3.6)$$

ここで、動径方向の座標として $\psi$ の代わりに、一種の距離を表わす座標として $s = \sqrt{\psi/\psi_s}$  ( $\psi_s =$  全ポロイダルフラックス)を使う。また微分 $\frac{\partial}{\partial s}_\nu, \frac{\partial}{\partial \psi}_\nu$ は、磁気面に垂直な向きの微分を表わす。変位 $X, V, Y$ は、 $\chi$ に関して周期的であるが振巾は必ずしも周期的でなく $\widehat{X}, \widehat{V}, \widehat{Y}$ に対する周期的境界条件は、もとの変数 $X, V, Y$ の条件から次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \widehat{X}_R(s, \pi) \cos n q \pi &= \widehat{X}_I(s, \pi) \sin n q \pi \\ \widehat{V}_R(s, \pi) \sin n q \pi &= -\widehat{V}_I(s, \pi) \cos n q \pi \\ \widehat{Y}_R(s, \pi) \sin n q \pi &= -\widehat{Y}_I(s, \pi) \cos n q \pi \\ \frac{\partial \widehat{X}_R}{\partial \chi}(s, \pi) \sin n q \pi &= -\frac{\partial \widehat{X}_I}{\partial \chi}(s, \pi) \cos n q \pi \\ \frac{\partial \widehat{V}_R}{\partial \chi}(s, \pi) \cos n q \pi &= \frac{\partial \widehat{V}_I}{\partial \chi}(s, \pi) \sin n q \pi \\ \frac{\partial \widehat{Y}_R}{\partial \chi}(s, \pi) \cos n q \pi &= \frac{\partial \widehat{Y}_I}{\partial \chi}(s, \pi) \sin n q \pi \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここでR, I はそれぞれ実部, 虚部を意味する。

2次形式(3.3)において,  $W_p$  を  $\hat{Y}$  に関して最小にすると, 第4項が0になる。これは  $\nu \cdot \xi = 0$  が  $W_p$  を最小にすることを意味する。次いで  $n \gg 1$  の極限を考えると,  $D=0$  となる。 $D=0$  は  $\hat{V}$  と  $\hat{X}$  との関係を与え,  $n \gg 1$  の時,  $W_p$  は  $\hat{X}$  のみの汎関数となる。 $X$  を, バルニンク理論で行うように,

$$\hat{X} = \exp(-inq \chi_0) \sum_{\ell} A(s, \chi - 2\pi \ell) e^{-i2\pi \ell n q} \quad (3.8)$$

のように展開し,  $n(dq/ds)^2 \gg 1$  ( $A$  の半値巾の中に十分多くの有理面が含まれている条件) を使うと, バルニンク理論のエネルギー積分が得られる<sup>13)</sup>。

振巾  $\hat{\xi}$  は,  $s$  と  $\chi$  の関数であるが,  $\chi$  に関してはゆるやかに変化すると考えられるので, 計算可能な  $N_\chi$  で  $n$  の大きなモードも把握できることが期待される。図3.1にこの変換を使って得られた固有値の収束曲線の一例を示す。点線が従来の計算, 実線が振巾を使った計算である。変位そのものを使うと,  $n=5$  の時, ポロイダル方向の速い振動を十分把握できず,  $N_\chi \leq 50$  では, 収束曲線に  $1/N_\chi^2$  の高次の成分が表われている。これに対し, 振巾を使うと  $n=100$  迄収束曲線は  $1/N_\chi^2 (N_\chi = N_s + 1)$  に関して線形になっていることがわかる。このことは, 振巾を変数にすることによって  $n$  の大きなモードも精度良く計算できることを意味している。新しい計算法を使ったバルニンク・モードの解析については第7章で述べる。

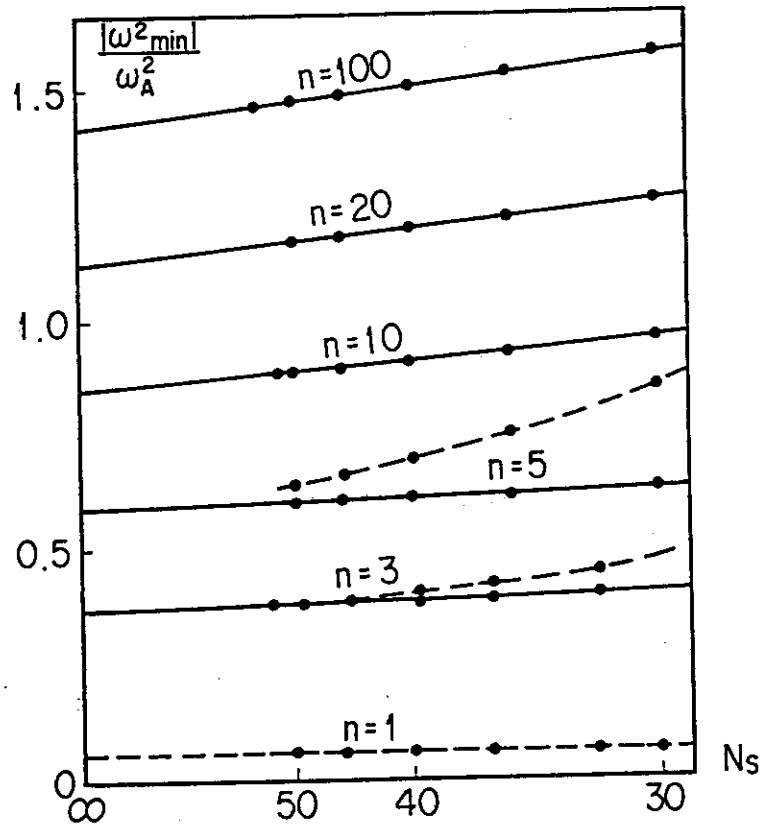


Fig. 3.1 Convergence curves of the squared growth rate vs.  $N_s$ . The solid lines and the broken lines denote the cases with and without  $\exp(inq\chi)$ , respectively. The calculations with  $\exp(inq\chi)$  give the quadratic convergence with respect to  $1/N_s$  upto  $n=100$ .

## 4. 真空磁場計算法の改良 (ERATO2)

旧版ERATOコードでは、真空領域における変動磁場エネルギーの計算を次のように行っていた<sup>1)</sup>。真空領域では電流が流れないから、低周波数の振動に関しては

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.1)$$

が成り立つ。場が渦なしの場合、スカラーポテンシャル $\Psi$ が存在し、磁場 $\mathbf{B}$ は、

$$\mathbf{B} = \nabla \Psi \quad (4.2)$$

のように表わすことができる。一方、発散方程式から $\Psi$ に対する微分方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \Delta \Psi = 0 \quad (4.3)$$

が得られる。 $\Psi$ に対する境界条件は、プラズマおよび導体壁が完全導体であると仮定すると、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = \mathbf{B}_p \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \xi_\nu \quad (\text{プラズマ表面: S}) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = 0 \quad (\text{導体壁: C})$$

で与えられる。ここで、 $\boldsymbol{\nu}$ は法線ベクトル、 $\mathbf{B}_0$ はプラズマ表面の平衡磁場、 $\xi_\nu$ はプラズマ表面の法線方向の変位である。

方程式(4.3)を境界条件(4.4)の下で解くことは、次の積分方程式を解く事と同値である。

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int_S \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial \nu} dS + \int_C \Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial \nu} dC + \int_S G \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \xi_\nu dS \quad (4.5)$$

ここで $G$ は方程式(4.3)のグリーン関数である。

この解法は、数学的には見通しが良く、一見美しく見えるが、数値解析上は次のような問題点を含んでいる。

- (i) グリーン関数 $G$ は $\mathbf{r} = 0$ で対数的特異性を持ち、その数値計算上の処理がやっかいである。また、メッシュ数 $N_\chi$ を大きくすると、近接した点からの $G$ への寄与に誤差が入り易くなる。
- (ii) (4.5)を解いて得られる $\Psi$ は、トロイダル、ポロイダル両方向に関して1価である。したがって $m = n = 0$ の等方的変位を表現できない。また、境界条件(4.4)にも問題が生ずる。 $m = n = 0$ モードでは $\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = 0$ であり、また、 $\mathbf{B}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}_\nu = 0$ となるから条件(4.4)は恒等的に成り立ち、境界条件とならない。
- (iii) (4.5)式に第3章で述べた変換 $\Psi = \hat{\Psi} \exp(-inq \chi)$ を導入すると、積分核に短波長の振動 $\exp inq(\chi - \chi')$ が含まれ、 $N_\chi$ を十分大きくとらなければならない。

(v) 方程式 (4.5) を離散化して行列形式に書くと,

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{d} \quad (4.6)$$

となる。この時  $\mathbf{H}$  は  $(4N_x + 4) \times (4N_x + 4)$  の密行列になり、 $N_x$  が増えるとメモリ資源が計への負担となる。

これらの問題点は、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を使って定式化することで解決される。そこで2次形式

$$W_V = \int dv |\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}|^2 \quad (4.7)$$

を考える。 $\mathbf{A}$  に関して  $W_V$  の変分をとり、停留条件を求めると、オイラー方程式は、

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = 0 \quad (4.7)$$

となり、 $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$  であるから、(4.7) は真空場の磁場の方程式を与える。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  に対する境界条件は、

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{A} = -\xi_{\nu} \mathbf{B}_0 \quad (\text{プラズマ表面}) \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{A} = 0 \quad (\text{導体壁})$$

で与えられる。この条件は、電場の接線成分の連続性を意味している。2次形式 (4.7) を有限要素近似をして体積積分を実行すると、真空領域内にも節点変数が表われるから、出き上がった行列の次元数はグリーン関数の場合より大きくなる。ただし、グリーン関数表示の時は密行列であるのに対し、2次形式表示では疎行列になるので、行列の圧縮をすれば記憶容量の節約になる。2次形式表示では、計算時間は、真空領域の動径方向の分割数  $N_V$  に比例するが、ベクトルポテンシャルは真空領域で単調な関数であるので、通常  $N_V = 5 \sim 10$  で十分であり、この程度の  $N_V$  では、両者の計算時間はほぼ同じである。

ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の3成分は独立ではなく、ゲージ条件が必要となる。ここでは、ゲージ条件を、適当なベクトル  $\mathbf{C}_V$  を使い

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_V = 0 \quad (4.9)$$

のように選ぶ。このゲージ条件の下では、 $\mathbf{A}$  は

$$\mathbf{A} = \xi_V \times \mathbf{C}_V \quad (4.10)$$

のように表わされる。 $\mathbf{C}_V$  は時間的に一定な任意のベクトルであるが、次のように選ぶと都合が良い。

$$\mathbf{C}_V = \boldsymbol{\nabla} \varphi \times \boldsymbol{\nabla} \psi_V + T_V \boldsymbol{\nabla} \varphi \quad (4.11)$$

ここで、 $\psi_V = \text{一定}$  の曲面は、真空中でプラズマを囲み、ポロイダル面を動径方向に分割する曲面である。 $\mathbf{C}_V$  を (4.11) のように選ぶと、境界条件 (4.8) は、



$$\begin{aligned} |\nabla\psi_v| \boldsymbol{\xi}_v \cdot \boldsymbol{\nu} &= |\nabla\psi_p| \boldsymbol{\xi}_p \quad (\text{プラズマ表面}) \\ \boldsymbol{\xi}_v \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0 \quad (\text{導体壁}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。ここで独立変数として  $\boldsymbol{\xi}_v \cdot \boldsymbol{\nu}$  の代わりに、 $X_v = |\nabla\psi_v| \boldsymbol{\xi}_v \cdot \boldsymbol{\nu}$  を使うと、プラズマ表面での境界条件は、 $X_v = X_p$  となる。また、 $T_v$  は、プラズマ表面で

$$T_v = T_s \frac{|\nabla\psi_v|}{|\nabla\psi_p|} \quad (4.13)$$

とならなければならない。

ベクトルポテンシャル (4.10) を使うと真空場のエネルギーの変動は、

$$W_v = \frac{1}{2} \int |\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\xi}_v \times \boldsymbol{C}_v)|^2 dv \quad (4.14)$$

となり、 $\psi_v$  と  $T_v$  の定義を除いてプラズマ中で圧力と電流を 0 にとった時の表式と全く同じになる。ただし、 $\boldsymbol{\xi}_v$  の独立な成分は  $\boldsymbol{C}_v$  に垂直な 2 成分である。

真空領域を要素に分割する時は、動径方向を  $\psi_v = \text{一定}$  の面で、角度方向はポロイダル方向の座標  $\chi = \text{一定}$  の面で分割する。この時  $\chi$  のとり方に任意性があるが、ここでは  $\chi$  を次のように決める。

$$\chi = \frac{1}{g(\psi_v)} \frac{T_s}{q_s} \int_0^\theta \frac{d\ell/d\theta}{r |\nabla\psi_p|} d\theta \quad (4.15)$$

ここで、関数  $g$  は

$$g(\psi_v) = \frac{T_s}{2\pi q_s} \int_0^{2\pi} \frac{d\ell/d\theta}{r |\nabla\psi_p|} d\theta \quad (4.16)$$

で与えられ、 $q_s$  はプラズマ表面の安定係数である。

また、この座標系でのヤコビアンは、

$$J = \frac{q_s R^2}{T_s} \frac{q(\psi_v) |\nabla\psi_p|}{|\nabla\psi_v|} \quad (4.17)$$

となる。

任意ベクトル  $\boldsymbol{C}_v$  のトロイダル成分は、プラズマ表面で (4.13) を満足しなければならないが、真空中の  $q_v = J T_v / R^2$  が一定となるように  $T_v$  を選ぶ。その理由は、変動磁場の動径成分

$$\tilde{B}_\psi = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial}{\partial \chi} + i n q_v \right) X_v \quad (4.18)$$

において、 $q_v$  が  $\psi_v$  に関して変化すると真空中に  $n q_v = \text{整数}$  の面 (有理面) が存在する可能性が生じる。 $X_v$  に発散関数も許せば真空中の有理面でも  $\tilde{B}_\psi$  は有限値をとるが、発散関数を含めることは数値計算上望ましくない。 $X_v$  が有限であると有理面では  $\tilde{B}_\psi = 0$  となり、有理面に導体壁があるのと等価になってしまい、導体壁の安定化効果が過大評価されることになる。真空中で

$q_v$  を一定にするには,  $T_v$  を

$$T_v = \frac{q_s R^2}{J} = \frac{T_s |\nabla \psi_v|}{g(\psi_v) |\nabla \psi_p|} \quad (4.19)$$

とすればよい。  $g(\psi_v)$  はプラズマ表面では 1 であるから, (4.19) は, プラズマ表面における  $T_v$  の条件 (4.13) を満足する。

プラズマ内部と同様に  $s = \sqrt{\psi / \psi_s}$  を使って  $W_v$  を書くと, 次のようになる。

$$\begin{aligned} W_v = \int \frac{1}{s} ds d\chi \left\{ \frac{T_s^2 \psi_s}{J |\nabla \psi_v|^2} \left| \frac{1}{q_s} \frac{\partial X_v}{\partial \chi} + in X_v \right|^2 \right. \\ + \frac{J |\nabla \psi_v|^2 T_s^2}{4 \psi_s R^2 q_s^2} \left| \frac{\partial X_s}{\partial s} + \beta_\chi \frac{\partial X_v}{\partial \chi} - in \beta_\chi q_s X_v + in q_s V_v \right|^2 \\ \left. + \frac{R^2 T_s^2}{4 J \psi_s} \left| \frac{\partial X_v}{\partial s} + \frac{\partial V_v}{\partial \chi} \right|^2 \right\} \quad (4.20) \end{aligned}$$

ここで,

$$X_v = \frac{q_s}{T_s} |\nabla \psi_v| \boldsymbol{\epsilon}_v \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (4.21)$$

$$V_v = \frac{2 s \psi_s (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{C}_v) \cdot \boldsymbol{\nu}}{T_s |\nabla \psi_v|} + \beta_\chi X_v \quad (4.22)$$

$$\beta_\chi = \frac{\nabla \chi \cdot \nabla \psi_v}{|\nabla \psi_v|^2} \frac{1}{2 s \psi_s} \quad (4.23)$$

である。この 2 次形式をプラズマ内部と同様に離散化すると, 出来上がった行列は図 4.1 のようになる。

2 次形式 (4.20) から明らかのように,

$$\begin{pmatrix} X_v \\ V_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_v \\ \hat{V}_v \end{pmatrix} \exp(-in q_s \chi) \quad (4.24)$$

なる変換をすると, 第 3 章で述べた手法が真空磁場計算にも自動的に適用できる。特に  $q_s/q_e$  が大きい場合は,  $n=1$  キンク・モードでもバルーニング的構造を持つから, 変換 (4.24) が有効であると思われる。

新しい計算法の精度を調べるために,  $n=1$  キンク・モードの成長率の収束曲線を描いたのが図 4.2 である。テストに使った平衡状態は, 第 6 章の解析に用いた平衡群の一つで, アスペクト比  $A=3$ , 円形断面で,  $q_0=1.0$ ,  $q_s=2.5$ ,  $\beta_p=1.02$  である。導体壁の位置は,  $R_{ext} = a_w/a_p = 2$  ( $a_w$ : 導体壁の半径,  $a_p$ : プラズマ半径) である。図 4.2 において, 実線がベクトル・ポテンシャル法 ( $\exp in q \chi$  なし), 点線がグリーン関数法, 一点鎖線が  $\exp(in q \chi)$  を入

れたベクトル・ポテンシャル法の収束曲線を表わしている。ベクトル・ポテンシャル法では $1/N^2$  ( $N=N_s=N_z$ ) で直線になるのに対し、グリーン関数法では $N$ が大きな所で曲率を持っている。これは、対数的特異性の影響であると思われる。

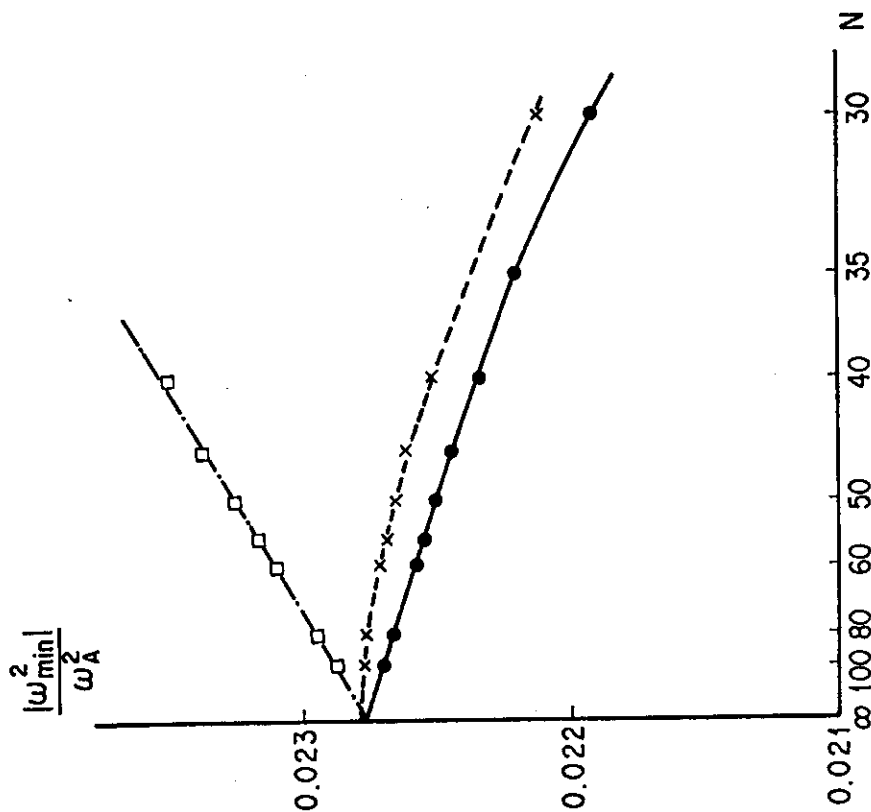


Fig. 4.2 Convergence curve of the squared growth rate of the  $n = 1$  external kink mode for  $R_{ext} = 2.0$ . The solid line, dotted solid line and broken line denote the case for new vacuum, the new vacuum with  $\exp(inq)$  and the old vacuum (the Green function method), respectively. The new vacuum calculations give the quadratic dependence with  $1/N_s$ , whereas the curve for Green function method deviates from the quadratic one for large  $N_s$ .

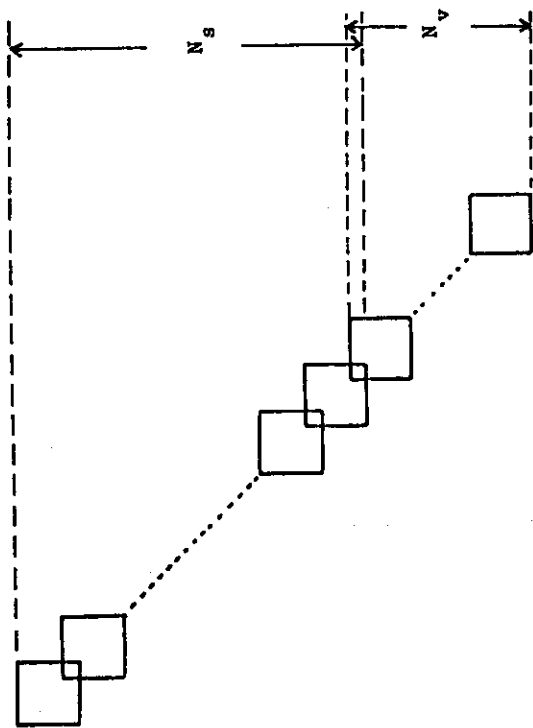


Fig. 4.1 Structure of the matrix produced by the new vacuum code. The  $N_v$  blocks are added after the plasma part.

## 5. 固有値問題解法の改良 (ERATO4)

この部分は、ERATOコードの中で最も計算資源が必要となる箇所である。旧版ERATOでは、メッシュ数が  $N_s = N_x = 100$  の時、主記憶容量が6 MB、ディスク容量40000トラック必要となり、これに伴う入出力回数、経過時間が計算の大きな障害になっていた。CPU時間と経過時間の差は、計算機システムがF 230/75からM 200に移行するとCPU速度が速くなった分だけ大きくなり、システムの効率的利用上望ましくない状態となった。この現象は原研のみならず、ORNL, GA, Garching, CRPP-Lausanneでも問題になった。

ERATOで取扱う行列を見ると、図5.1のように一部分が重なり合ったブロック構造をしている(図5.1(a))。各ブロックは、16個のサブブロックに分れ、上下のブロックと重なり合うのは変位Xに対応する部分である。(図5.1(b))これは、理想的流体モデルのエネルギー積分では、動径方向の微分はXのみに表われることと対応している。更にサブブロックの中は帯巾7の帯行列になっている。旧版ERATOでは、大きなブロックの中が全部つまっているとして解いていたため、莫大な資源量を必要としたのである。ORNLのScottは、もとの行列が疎である性質に目をつけ、純粋に数学的立場から行列の圧縮を行い、圧縮された形で固有値問題を解くプログラムを作成した<sup>9)</sup>。

ところで、ERATOのようなMHDの定常問題の数値解法では、スペクトラム分布の特殊性を考慮しなければならない。図5.2に示すように、MHDスペクトラムは、高速音波、アルフヴェン波、低速音波、それに不安定モードに分けられる。このうち安定性解析に重要なのは不安定モードであるが、固有値のオーダーは、トロイダル・アルフヴェン周波数 $\omega_A^2$ で測って、不安定モードが $\omega^2 \leq 10^{-2}$ であるのに対し、高速音波は $\omega^2 \geq 10$ である。また、固有値間の距離も高速音波の高い成分になる程開いてくる。一方、 $N_s = N_x = 100$ の場合、行列のサイズは、60000元、帯巾800の大次元になるから、帯構造をくずさないようにしなければならない。このような場合のほとんど唯一の解法は逆べき法である。

逆べき法では、まず、欲しい固有値に近い推定値を決め、固有値のシフトをする。この結果得られる固有方程式は、

$$\tilde{A} \mathbf{x} = (A - \omega_0^2 B) \mathbf{x} = (\omega - \omega_0^2) B \mathbf{x} \quad (5.1)$$

である。ここでAは対称、Bは対称正定値な行列である。逆べき法の手法は次のようになる。

Step 1: 初期ベクトル  $\mathbf{x}^0$  を設定。

Step 2:  $\tilde{A} \mathbf{x}^{k+1} = B \mathbf{x}^k$  を解く。

Step 3:  $\mathbf{x}^{k+1} B \mathbf{x}^{k+1} = 1$  に規格化。

Step 3:  $\max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| > \epsilon$  なら Step 2 へ。

Step 4:  $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\mathbf{x}^{k+1} A \mathbf{x}^{k+1}}{\mathbf{x}^{k+1} B \mathbf{x}^{k+1}}$ 。

この過程で最も負担がかかるのが Step 2である。この連立一次方程式を帯巾を保存しつつ解くには、通常、 $\tilde{A}$ を

$$\tilde{A} = LDL^T \quad (5.3)$$

のように分解し、

$$\begin{aligned} Ly &= b && \text{(前進代入)} \\ Dz &= y && \text{(割り算)} \\ L^T x &= z && \text{(後退代入)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

のように3段階に分けて解く。Scottの算法の特徴は、(5.3)の分解の際に帯構造のみならず、各サブブロックの疎構造まで考慮する点にある。この手法は、大次元連立一次方程式の解法の手法の中でブロック消去法と呼ばれるものの1つである。

行列圧縮の第1段階として、変数の再順序づけを行い、変数VとYとをひとまとめにしてブロックの始めの方に移す(図5.3(a))。この行列では $A_1$ の部分は帯巾が15、次元が $4N_x + 4$ の対称行列、 $A_2, A_3$ は帯巾7、次元 $4N_x + 4$ の行列になる。 $A_4$ と $A_6$ はXに対応する部分で、元行列では前後のブロックと重なっていた部分である。 $A_4$ と $A_6$ は以下に示す様に分解の過程で全部が埋めつくされる。第i番目のブロックに対応するベクトルを $x_i = (Z_1, Z_2, Z_3)$ とする。ここで $Z_1 = (Z_i, Y_i)$ 、 $Z_2 = X_i$ 、 $Z_3 = X_{i+1}$ である。また、右辺のベクトルを $u_i = (U_1, U_2, U_3)$ とおくと、連立一次方程式は、

$$\begin{aligned} (1) \quad & A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + A_3 Z_3 && = U_1 \\ (2) \quad & \dots\dots\dots + A_2^T Z_1 + A_4 Z_2 + A_5 Z_3 && = U_2 \\ & \text{〈前のブロック〉} && \\ (3) \quad & A_3^T Z_1 + A_5^T Z_2 + A_6 Z_3 + \dots\dots\dots && = U_3 \\ & \text{〈後のブロック〉} && \end{aligned} \quad (5.5)$$

のように書ける。Scott 算法ではこれを各ブロック毎に $3 \times 3$ の連立一次方程式に見立てて解くわけである。 $Z_1$ (即ち $V_i, Y_i$ )は前後のブロックと直接つながっていないから(MHD 演算子の特徴!)、(1)をまず $Z_1$ について解くことができる。

$$Z_1 = A_1^{-1} (U_1 - A_2 Z_2 - A_3 Z_3) \quad (5.6)$$

(5.6)を(2),(3)に代入すると、(5.5)は $2 \times 2$ の連立一次方程式になる。

$$\begin{aligned} (4) \quad & \dots\dots\dots + \hat{A}_4 Z_2 + \hat{A}_5 Z_3 && = \hat{U}_2 \\ (5) \quad & \hat{A}_5^T Z_2 + \hat{A}_6 Z_3 + \dots\dots\dots && = \hat{U}_3 \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \hat{A}_4 &= A_4 - A_2^T A_1^{-1} A_2 & , & \quad \hat{U}_2 = U_2 - A_2^T A_1^{-1} U_1 \\ \hat{A}_5 &= A_5 - A_2^T A_1^{-1} A_3 & , & \\ \hat{A}_6 &= A_6 - A_3^T A_1^{-1} A_3 & , & \quad \hat{U}_3 = U_3 - A_3^T A_1^{-1} U_1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

である。次に、同様にして (5.7) から  $Z_2$  を消去すると、

$$Z_2 = \hat{A}_4^{-1} (\hat{U}_2 - \hat{A}_5 Z_3) \tag{5.9}$$

$$\hat{A}_6 Z_3 + \dots = \hat{U}_3 \tag{5.10}$$

$$\hat{A}_6 = \hat{A}_6 - \hat{A}_5^T \hat{A}_4^{-1} \hat{A}_5 \tag{5.11}$$

$$\hat{U}_3 = \hat{U}_3 - \hat{A}_5^T \hat{A}_4^{-1} \hat{U}_2$$

となる。ここで次のブロックに進み、(5.5) の  $A_4$  を  $\hat{A}_6$  で置き換えればよい。(5.8)において  $A_1^{-1}$  は逆行列をつくらず  $A_1$  を分解して、 $A_1 = L_1 D_1 L_1^T$  の形にしておく。また (5.11) における  $\hat{A}_4^{-1}$  も同様である。ここで  $A_1$  は帯巾 15 の行列で、分解後も帯巾は変わらない。一方、 $\hat{A}_4$ 、 $\hat{A}_6$  は (5.8)、(5.11) の演算の後  $(2N_x + 2) \times (2N_x + 2)$  の密行列になる。分解後の行列は図 5.3 (b) のようになる。

今迄述べた手順から、前進代入、後退代入の手順が得られる。

前進代入：

$$\hat{U}_2 = U_2 - A_2^T A_1^{-1} U_1$$

$$\hat{U}_3 = U_3 - A_3^T A_1^{-1} U_1 \tag{5.12}$$

$$\hat{U}_3 = \hat{U}_3 - (A_5 - A_3^T A_1^{-1} A_2) \hat{A}_4^{-1} \hat{U}_2$$

$$U_2^{i+1} \leftarrow \hat{U}_3^i \text{ として後のブロックへ}$$

後退代入：

$$Z_3 = \hat{A}_6^{-1} \hat{U}_3$$

$$Z_2 = \hat{A}_4^{-1} (\hat{U}_2 - (A_5 - A_2^T A_1^{-1} A_3) Z_3) \tag{5.13}$$

$$Z_1 = A_1^{-1} (U_1 - A_2 Z_2 - A_3 Z_3)$$

$$Z_3^i \leftarrow Z_2^{i+1} \text{ として前のブロックへ}$$

手続き (5.12)、(5.13) を行うには、 $A_1$ 、 $\hat{A}_4$ 、 $\hat{A}_6$  の LDL<sup>T</sup> 分解を行っておけばよく、このうち密行列は  $\hat{A}_4$ 、 $\hat{A}_6$  のみで、 $A_1^{-1}$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 、 $A_5$  はもとの帯構造を保存するから、主記憶、ディスクの容量および演算時間の大幅な減少となる。行列およびベクトルのための主記憶容量、ディスク容量の  $N_s$ 、 $N_x$  依存性は次のようになる。

主記憶：

$$M_0 = 2(N_x + 1)(32N_x + 36 + 6N_s) \tag{5.14}$$

$$M_N = 2(N_x + 1)(4N_x + 69 + 3N_s)$$

ディスク：

$$D_O = 3(N_x + 1)(32N_x + 36)N_s \quad (5.15)$$

$$D_N = (N_x + 1)(2N_x + 343)N_s$$

ここでO, Nはそれぞれ旧(old), 新(New)版を意味する。 $N_s, N_x \gg 1$ の時,  $M_O/M_N \rightarrow 5.4$ ,  $D_O/D_N \rightarrow 48$ となり,  $N_s = N_x = 100$ の時は  $M_O/M_N = 5$ ,  $D_O/D_N = 17$ である。このように行列の圧縮により, 主記憶ディスク容量共に大巾に削減される。

Scottの算法は, 主記憶, ディスクの容量を大巾に節約し, 計算の効率を上げるが, CRAY-1のようなベクトル型計算機においては, 必ずしも最適とはいえない。その理由は, 行列の分解や前進・後退代入の手続きを見ればわかるように, 基本的には帯巾が7とか15の狭い行列を取り扱うのでベクトル化の効果が現われないからである。



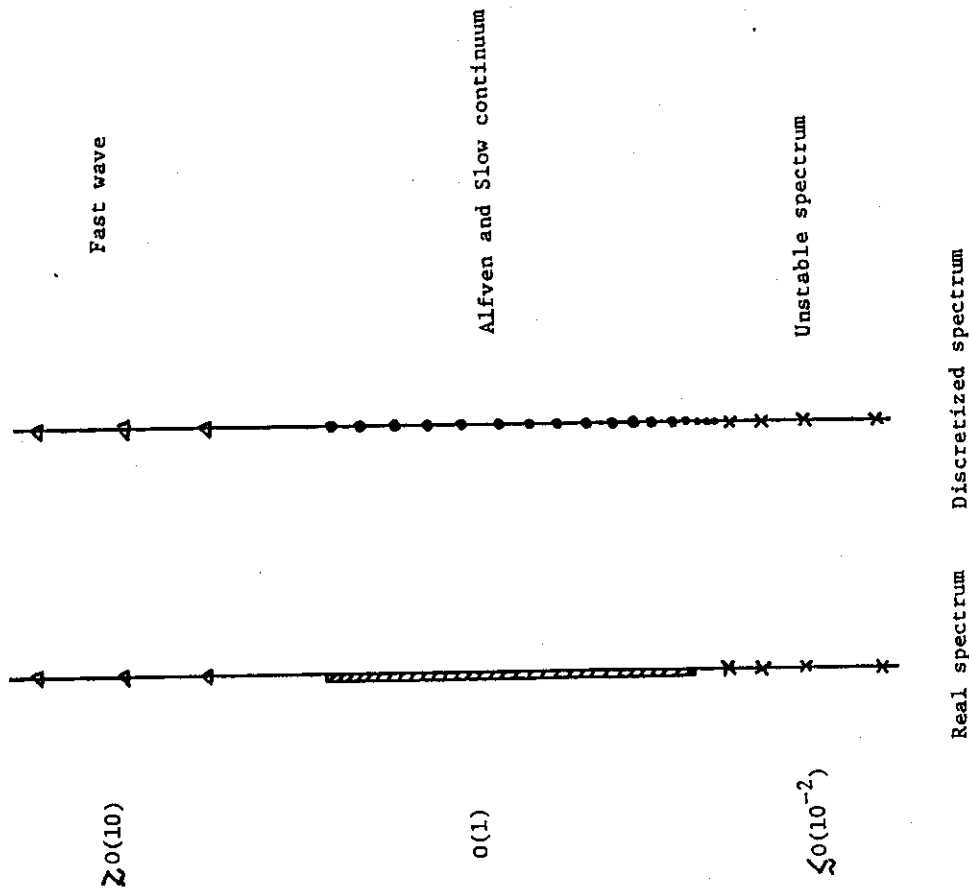


Fig. 5.2 Schematic diagram of the MHD spectrum and the discretized one. The spectrum is normalized by  $B_0 / (R_0 \sqrt{\mu_0 \rho_0})$ .

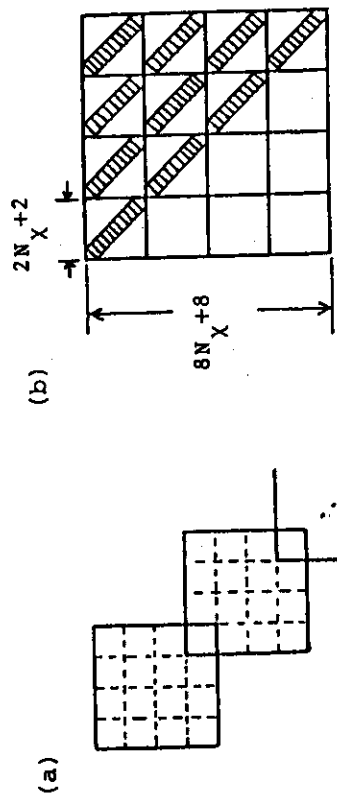


Fig. 5.1 Structures of (a) the matrix and (b) the block. The overlapping part in (a) corresponds to the variable  $X$ . Each subblock in (b) consists of the band matrices of width 7.

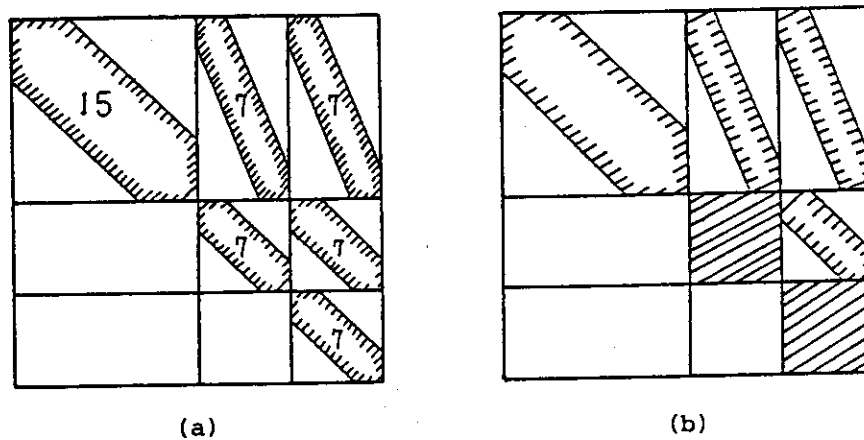


Fig. 5.3 Structure of the block used in Scott's algorithm  
 (a) before and (b) after the Cholesky decomposition.

## 6. 内部キンク・モードの解析

本章では、改訂版ERATOコードを用いて行った、高 $\beta_p$ 領域における $n=1$ 内部キンク・モードの安定性解析について述べる。このモードの、高 $\beta_p$ 領域での安定性はトカマク・プラズマの内部崩壊不安定との関連から重要な問題である。

$n=1$ 内部キンク・モードに対するトロイダル効果については、Bussac 達<sup>15)</sup>によって理論的に解析され、トロイダル効果は安定化に働き、 $\beta_p$ がある臨界値を越えないと、このモードは不安定にならないことが示された。Kerner 達<sup>16)</sup>はERATOコードで、この安定化効果を確認した。したがって、プラズマの加熱とともに $\beta_p$ が上昇して、 $n=1$ 内部キンク・モードが不安定になれば、内部崩壊不安定が抑制される可能性がある<sup>17,18)</sup>。しかしながら、さらに $\beta_p$ が高くなった場合の、 $n=1$ 内部キンク・モードの安定性は、まだ明らかにされていない。我々は改訂版ERATOコードを用い、 $\beta_p$ の値の広い範囲にわたり、 $n=1$ 内部キンク・モードの安定性解析を行った。

対象とするトカマク・プラズマは、アスペクト比3の円形断面プラズマである。平衡は一連のFCT (flux-conserving-tokamak) 過程で作成される。初期平衡の圧力 $p(\psi)$ とトロイダル磁束関数 $T(\psi)$ は

$$\frac{dp}{d\psi} = p_0 [1 - \alpha\psi - (1-\alpha)\psi^4], \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (6.1)$$

$$T \frac{dT}{d\psi} = 0 \quad (6.2)$$

で与えられる。ここで、トロイダル磁束関数 $\psi$ はプラズマ表面で1になるように規格化されている。パラメータ $p_0$ と $\alpha$ は $\beta_p = 1.0$ ,  $q(\psi=0) = 1.0$ ,  $q(\psi=1) = 2.5$  ( $q$ : 安定係数) であるように選定される。安定係数 $q(\psi)$ の分布を固定したFCT過程で $p_0$ を増大(あるいは、減少)させることにより、 $\beta_p$ の値の異なる平衡が作られる。図6.1に $q(\psi)$ と、 $\beta_p = 0.75, 1.0, 1.45$ に対する $p(\psi)$ の $s(=\sqrt{\psi})$ 依存性を示す。磁気軸での安定係数 $q_0(=q(\psi=0))$ が任意の値をもつ平衡は、 $q_0 = 1$ の平衡から、いわゆる $\sigma$ -スケーリング<sup>1,5)</sup>:  $q_0 = 1/\sigma$ ,  $\tilde{\psi} = \sigma\psi$ ,  $\tilde{T}(\tilde{\psi}=0) = T(\psi=0)$  から得ることができる。このスケーリングにおいて $\beta_p$ の値は不変である。このようにして作られた一連の平衡を用いると $(q_0 - \beta_p)$ 平面において $n=1$ 内部キンク・モードの安定性を解析できる。

モードの成長率 $\gamma$ はERATOコードで計算される固有値のメッシュ数に関する外挿から得られるので、 $\gamma=0$ となる安定性の限界点を決定するためには、外挿から求められた固有値が信頼できることが必要である。図6.2に $\gamma^2$ の収束曲線の例を示す。 $\gamma^2$ は $B_0^2 / (\mu_0 \rho R_0^2)$ で規格化されている<sup>1,5)</sup>。高精度の写像法を用いているため、いずれの場合( $\beta_p = 0.89, 1.25$  および 1.45)についても、実行可能なメッシュ数の範囲内で、固有値は2次の収束を示し、外挿から信

頼性のある成長率を得ることができる。

$n=1$  内部キック・モードの成長率  $\gamma$  の  $\beta_p$  依存性を、 $q_0$  をパラメータにして調べた。図 6.3 は  $q_0 = 0.80$  (破線) および  $q_0 = 0.85$  (実線) の場合を示している。これらの場合について、 $\beta_p < 1.7$  の時、モードは安定である。ある有限の  $\beta_p$  以下で安定であるのは、Bussac 達の理論と一致している。その上、このモードは、ある臨界値  $\beta_u$  ( $q_0 = 0.80$  の時  $\beta_u \simeq 1.35$ ,  $q_0 = 0.85$  の時  $\beta_u \simeq 1.5$ ) を越えると再び安定になる。この注目すべき特徴は、図 6.4 に示した  $(q_0 - \beta_p)$  平面での安定図をみると一層よく理解される。ハッチの描かれている領域が不安定領域であり、 $\bullet$  印は ERATO 計算から得られた安定の限界点である。ERATO コード特有の解法のため  $q_0 \simeq 1$  に対して安定性解析ができないので、 $q_0 = 1$  近くの安定限界線は引いてない。しかし  $q_0 = 1.1$  に対しては、 $\beta_p \leq 1.7$  まで安定である。図 6.4 から、プラズマが  $n=1$  内部キック・モードに対して不安定であっても、加熱していくと“第 2 安定領域”に入ることが分る。

図 6.5 に、 $q_0 = 0.85$  の時のポロイダル角  $\chi = 0$  での固有解  $X_I (\propto s \xi^s)$  と  $V_R (\propto \xi^X - \xi^{\varphi} q \simeq \xi^X)$  を示す。ここで  $\xi^s$ ,  $\xi^X$ ,  $\xi^{\varphi}$  は、それぞれ、プラズマ変位の法線、方位角、およびトロイダル方向の反変成分である。また、 $\beta_p$  の値は  $\beta_p = 0.75$  (図 6.5 a),  $\beta_p = 1.14$  (図 6.5 b) および  $\beta_p = 1.45$  (図 6.5 c) である。これらの図から、 $n=1$  内部キック・モードの特徴<sup>15,19)</sup> を見ることができる。すなわち、 $q=1$  面の内部で  $X_I$  は、ほぼ直線であり、 $q=1$  面の外部で急速に減少し、 $q=2$  面で、すみやかにゼロになる。 $\frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial \chi} \simeq 0$  であるため、 $X_I$  の変動に対応して  $V_R$  に 2 つのピークが現われている。ポロイダル方向のフーリエ成分の主要項は  $q=1$  面の内部で  $m=1$  であり、 $q=2$  面で  $m=2$  である (図 6.6)。 $\beta_p = 1.14$  の時、成長率が大きいため  $q=1$  での  $V_R$  のピーク幅は広く、 $\beta_p = 0.75$  および  $1.45$  の場合、逆に成長率が小さいのでピーク幅は狭い。 $n=1$  内部キック・モードの固有解の特徴から、抵抗性内部キック・モードの線形安定性について、見通すことができる。 $\beta_p$  が低い場合、抵抗性内部キック・モードは、抵抗モードそのものである。 $\beta_p$  が高くなって、内部キック・モードの成長率が大きくなると、内部キック・モードの局在幅が抵抗層の領域より広くなるため、抵抗は線形成長率へ影響しなくなる。さらに  $\beta_p$  が高くなって、内部キック・モードが再び安定になると、線形成長率は再び抵抗によって決定され、同時に成長率そのものは下がると予想される。

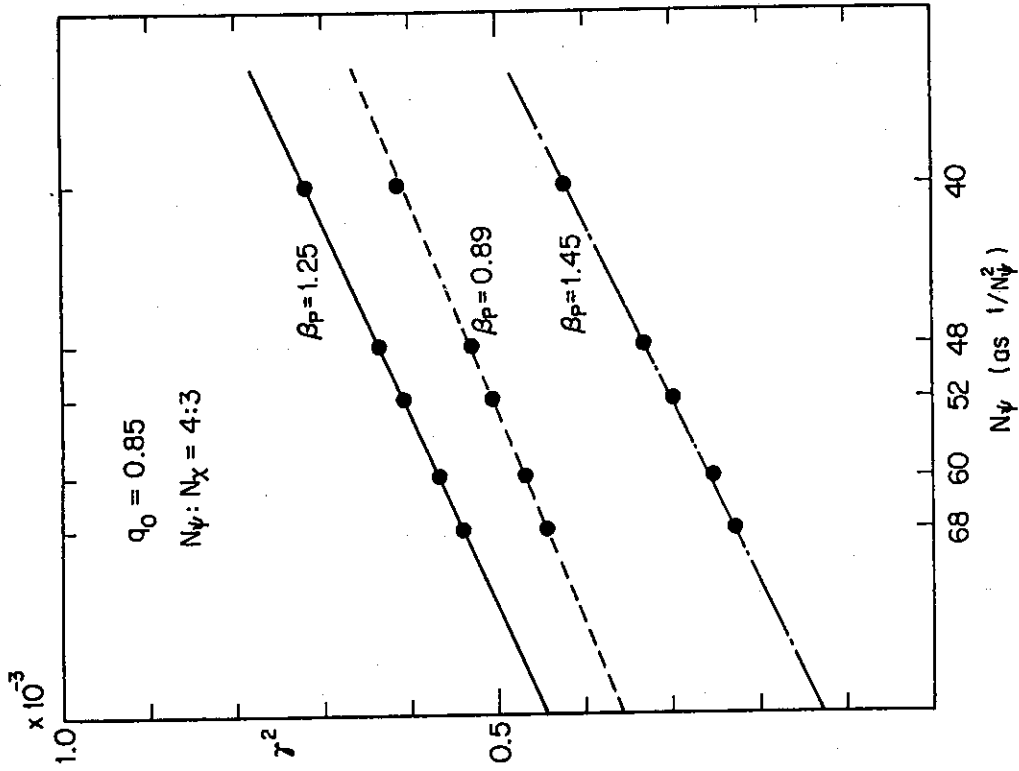


Fig. 6.2 Convergence curves of the normalized eigenvalue for  $q_0 = 0.85$  and three different values of  $\beta_p$ . The ratio  $N_\psi/N_\chi$  is chosen as  $4/3$ .

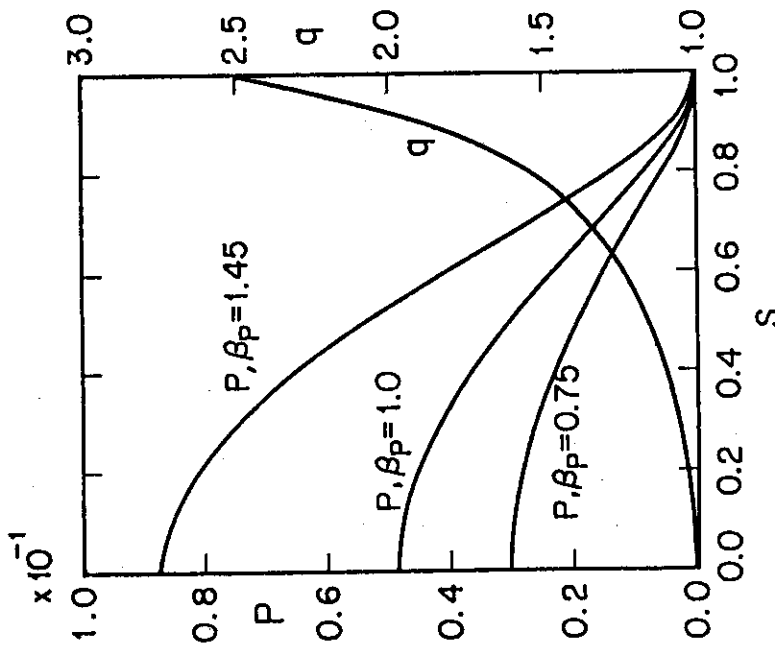


Fig. 6.1 Radial ( $s = \sqrt{\psi}$ ) dependence of the safety factor  $q$  and pressure  $P$  normalized by  $B_0^2/\mu_0$ . A series of ECT equilibria with a circular cross section and the aspect ratio of 3 is used in the analyses.

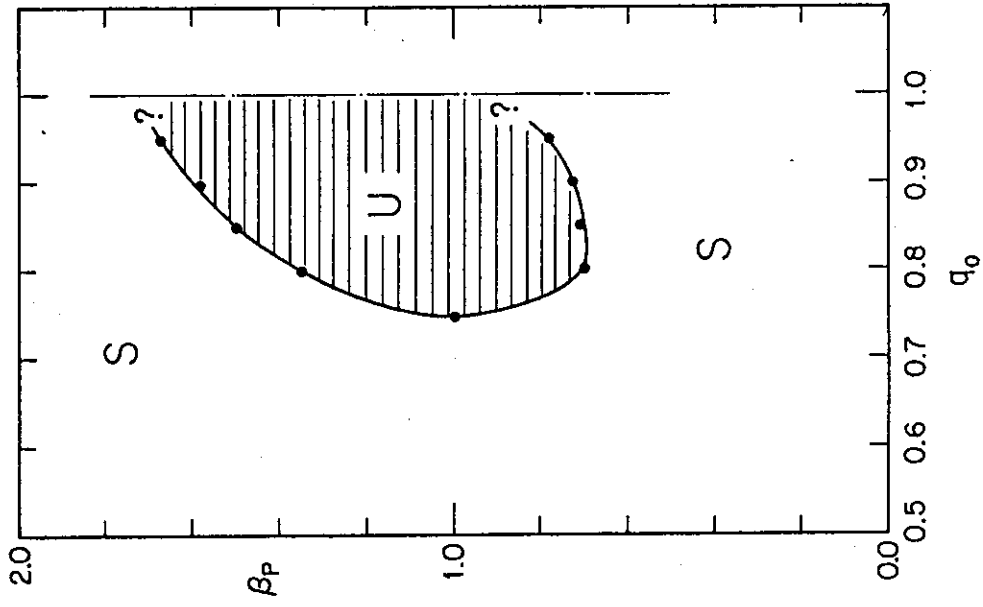


Fig. 6.4 Stability diagram in the  $q_0 - \beta_p$  plane for the  $n=1$  internal kink mode. The hatched area indicates the unstable region.

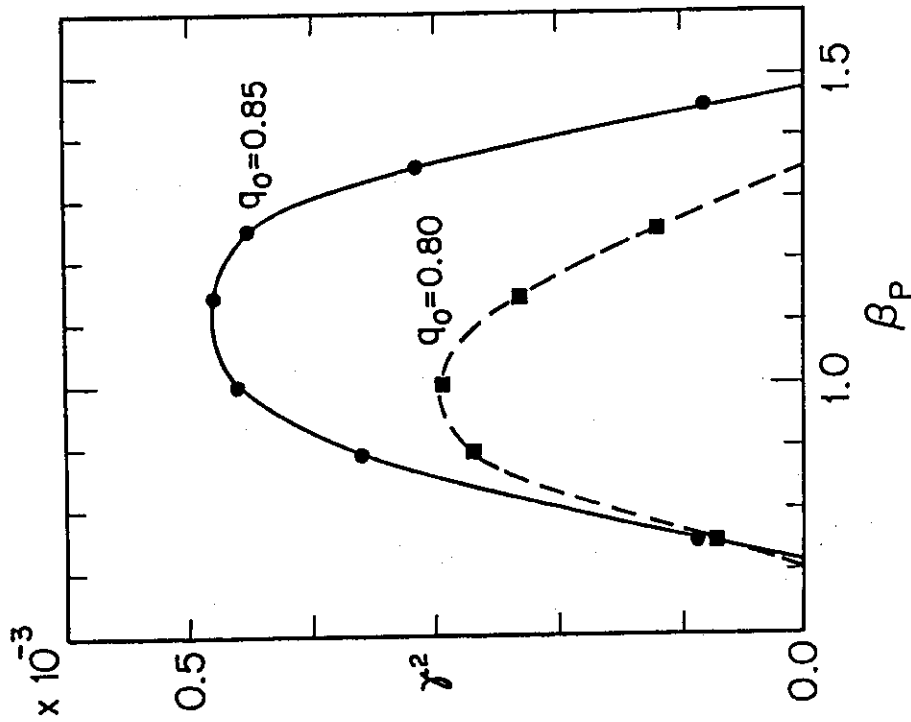


Fig. 6.3 Dependence of the squared growth rate on  $\beta_p$ . The solid line and dashed line correspond to the case of  $q_0 = 0.85$  and  $q_0 = 0.80$ , respectively.

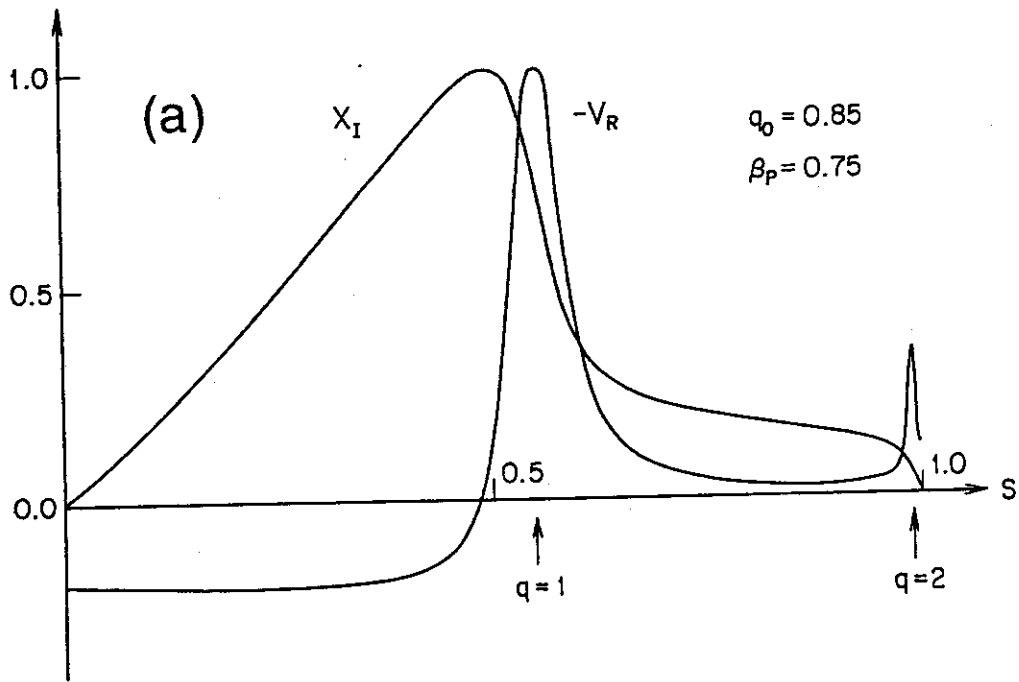


Fig. 6.5(a) Eigensolution  $X_I$  ( $\propto s\xi^S$ ) and  $V_R$  ( $\propto \xi^X - \xi^\phi/q$ ) at the midplane ( $\chi = 0$ ) for  $\beta_p = 0.85$  and  $q_0 = 0.85$ .

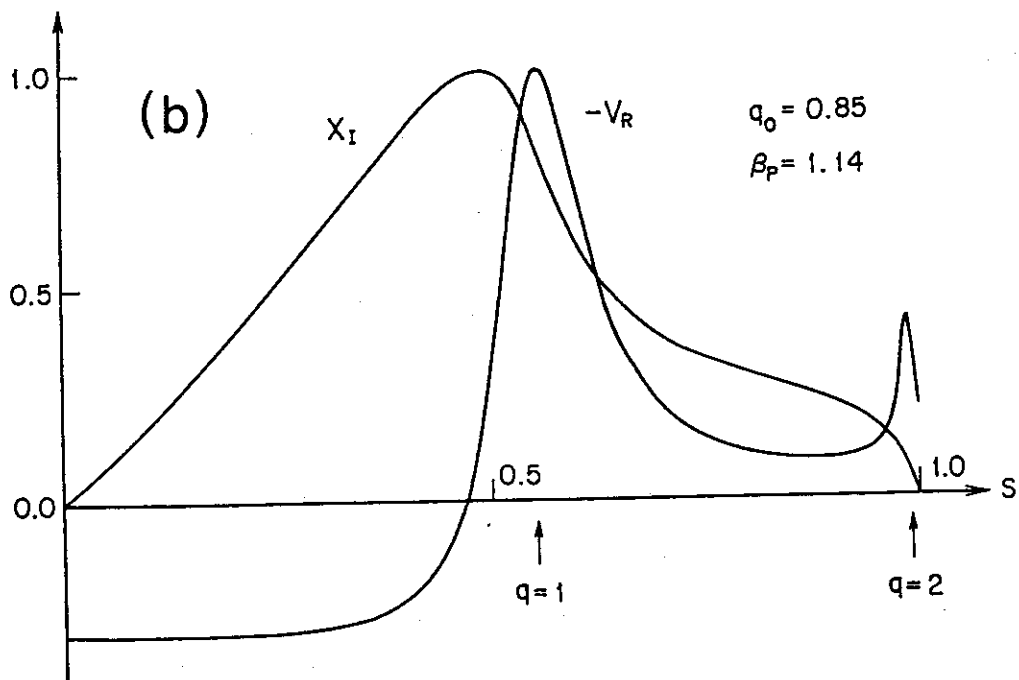


Fig. 6.5(b) Eigensolution  $X_I$  and  $V_R$  for  $\beta_p = 1.14$  and  $q_0 = 0.85$ .

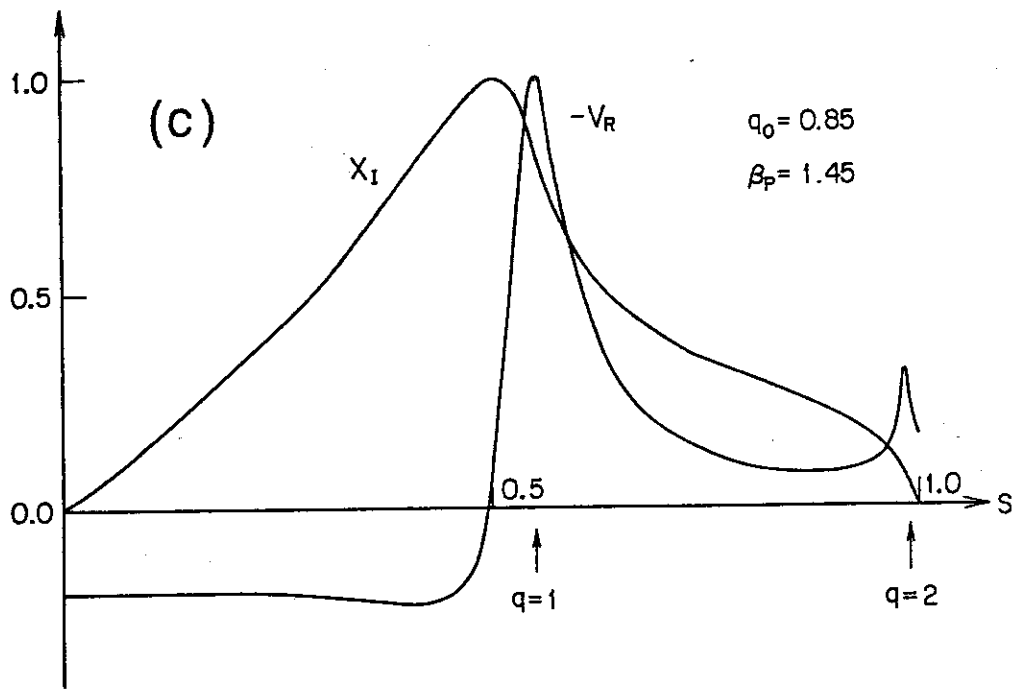


Fig. 6.5(c) Eigensolution  $X_I$  and  $V_R$  for  $\beta_p = 1.45$  and  $q_0 = 0.85$ .

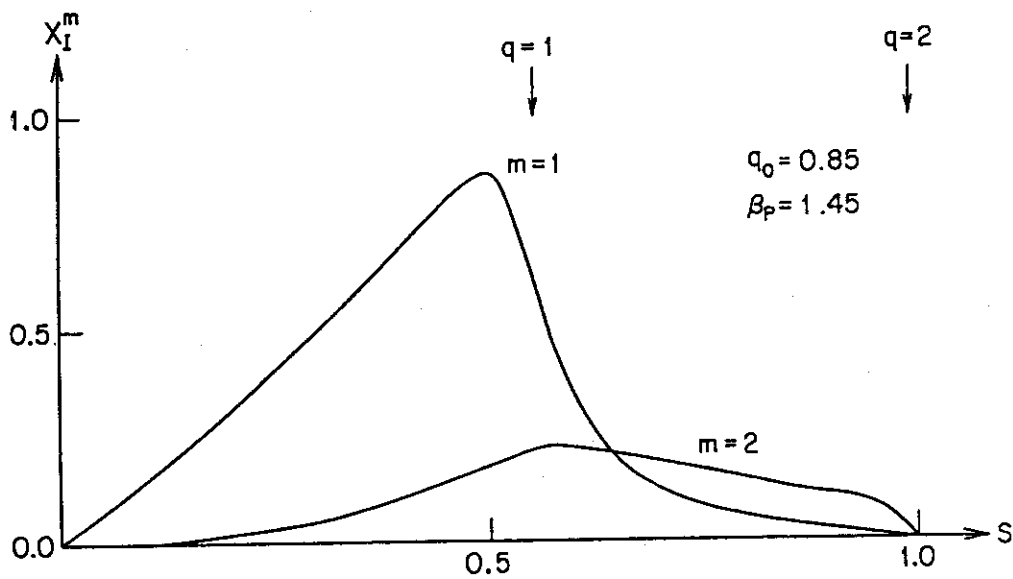


Fig. 6.6 Radial structure of the Fourier components of  $X_I$  in the azimuthal direction for  $q_0 = 0.85$  and  $\beta_p = 1.45$ .



## 7. バルーン・モードの解析

バルーン・モード不安定性は、トカマク装置においてプラズマを閉じ込める際の $\beta$ 値限界をもたらす1つの要因になっていると考えられている。このモードは、トロイダル・モード数 $n$ が大きい程不安定になり、 $n=\infty$ のモードの $\beta$ 値限界によってあるクラスの平衡状態が決められる。ところが、モードの波長がイオンのラーマー半径程度になると運動論的效果により短波長のMHDモードは安定化され<sup>10)</sup>、有限値の $n$ のモードが $\beta$ 値限界を決めることになる。この章では、有限の $n$ のバルーン・モードのふるまいを調べる。

バルーン・モードの特徴は、トーラスの外側にモードが局在する事であるが、この局在化を決める一つの要因は磁場のシア $dq/d\psi$ であることが $n=\infty$ のモードの解析から推察される<sup>8)</sup>。そこで、この章では、シアが大きい場合と小さい場合の2つの場合に、有限値の $n$ のモード構造を調べることにする。

圧力およびトロイダル磁場を次のように与える。

$$p = \alpha_1(\psi-1) + \alpha_2(\psi-1)^2 + \alpha_3(\psi-1)^3, \quad (7.1)$$

$$T^2 = T_0^2 + \beta_3(\psi-1)^3 + \beta_5(\psi-1)^5 \quad 0 \leq \psi \leq 1$$

シアの大小によって、 $\alpha_i, \beta_i$ を次のように選ぶ。

(i) シアが大きい場合 (W6) :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \sigma, \quad \alpha_3 = -2.05\sigma, \quad (7.2)$$

$$\beta_3 = 26.2\sigma, \quad \beta_5 = 45\sigma$$

(ii) シアが小さい場合 (S1) :

$$\alpha_1 = \sigma, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad (7.3)$$

$$\beta_3 = \beta_5 = 0$$

ここで $\sigma$ は磁気軸における安定係数 $q_0$ を決める因子で、 $\tilde{\psi} = \sigma\psi$ ,  $\tilde{q}_0^{-1} = \sigma q_0^{-1}$ なる関係がある。(7.2)のパラメータでは、楕円度 $E=1.65$ 、アスペクト比 $A=2.4$ のプラズマ断面の場合、プラズマ表面と磁気軸の安定係数の比は、 $q_a/q_0 \simeq 4.8$ 、トロイダルベータ値は $\beta_p \simeq 2.2$ となる。また、(7.3)では、 $E=2, A=3$ の時、 $q_a/q_0 \simeq 1.76$ 、 $\beta_p = 1$ なる。図7.1に $q_0 = 1.1$ の時の $q$ の分布を示す。横軸は $s = \sqrt{\psi}$ である。

上記の平衡を使い、モード構造および成長率の $n$ 依存性とシアの影響を調べる。

図7.2(a)および(b)は、それぞれ、シアが大きい場合の振巾の動径方向成分 $X_1$ のトロイダル方向、動径方向の空間変化を示している。トロイダル方向の変化は、ポテンシャル・エネルギーが最小の磁気面で、動径方向の変化はトーラスの外側の中心面( $\chi=0$ の面)で表わされている。

シアが大きい場合、モードはトーラスの外側に強く局在し、局在化は  $n$  が大きくなる程強くなっている。また、 $n$  が大きくなると動径方向にも局在する。

一方、図 7.3 (a), (b) は、シアが小さい時の  $\chi=0$  と  $\chi=\pi$  における  $X_1$  の動径方向の変化で、それぞれ、 $n=3$ ,  $n=10$  の場合である。シアが小さい時、 $X_1$  はトーラスの内側でも零にはならず  $nq = \text{整数}$  の面にピークを持っている。即ち、モードは、ある磁気面に沿って見た場合、トーラスの外側から内側まで全体に広がっている。しかし、シアが小さい時も  $n$  が大きくなると、トーラス内側の変位は小さくなり、バルーニング的な構造がはっきりしてくる。

次に、 $1 \leq n \leq 10 \sim 100$  程度の  $n$  の範囲で、成長率がどのように変化するかを調べる。バルーニング理論によると<sup>8)</sup>、 $n \gg 1$  では、成長率の  $n$  依存性は  $1/n$  に比例して大きくなる。図 7.4, 7.5 は、それぞれ、シアが大きい場合と小さい場合の成長率の  $n$  依存性である。これらの図では、 $n$  を単なるパラメータとして扱い、非整数値に対する成長率も求めている。シアが大きい時は、成長率が  $n$  に対して単調増大しているのに対し、シアが小さい場合は  $n$  の小さい所で振動が見られる。この振動は、 $nq = \text{整数}$  の面 (有理面) の数に関係しており、有理面の数が多くなると成長率は大きくなり、少なくなると小さくなる。 $n$  が十分大きくなり、振巾の半巾程度の領域に有理面が十分多く含まれると、バルーニング理論の適用範囲に入り、成長率は  $n$  に対して単調増大となる。

成長率の大小で見ると、シアが大きい場合は成長率が大きい。これは、非線形の領域まで考えると、速く成長するが、飽和の水準が小さいと考えられる。しかも  $n$  が大きくなると、動径方向にもポロイダル方向にも強く局在するので、このような“強い”バルーニング不安定性は、プラズマの閉じ込めには、あまり悪影響を与えないと予想される。これに対して、シアが小さい場合不安定モードが起きないための臨界ベータ値は高くなるが<sup>6)</sup>、モードが不安定になると、 $n$  が小さいモード程広い領域で成長して、輸送を大きくする危険がある。高ベータ・プラズマにおける  $n$  が小さい或は 10 程度のモードの解析は今後の課題である。

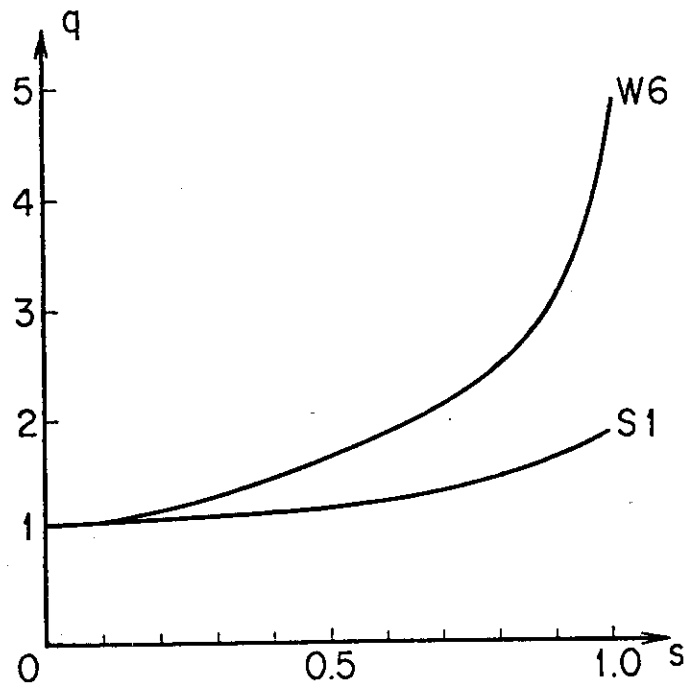


Fig. 7.1 Profiles of the safety factor for the case of strong shear (W6) and weak shear (S1).

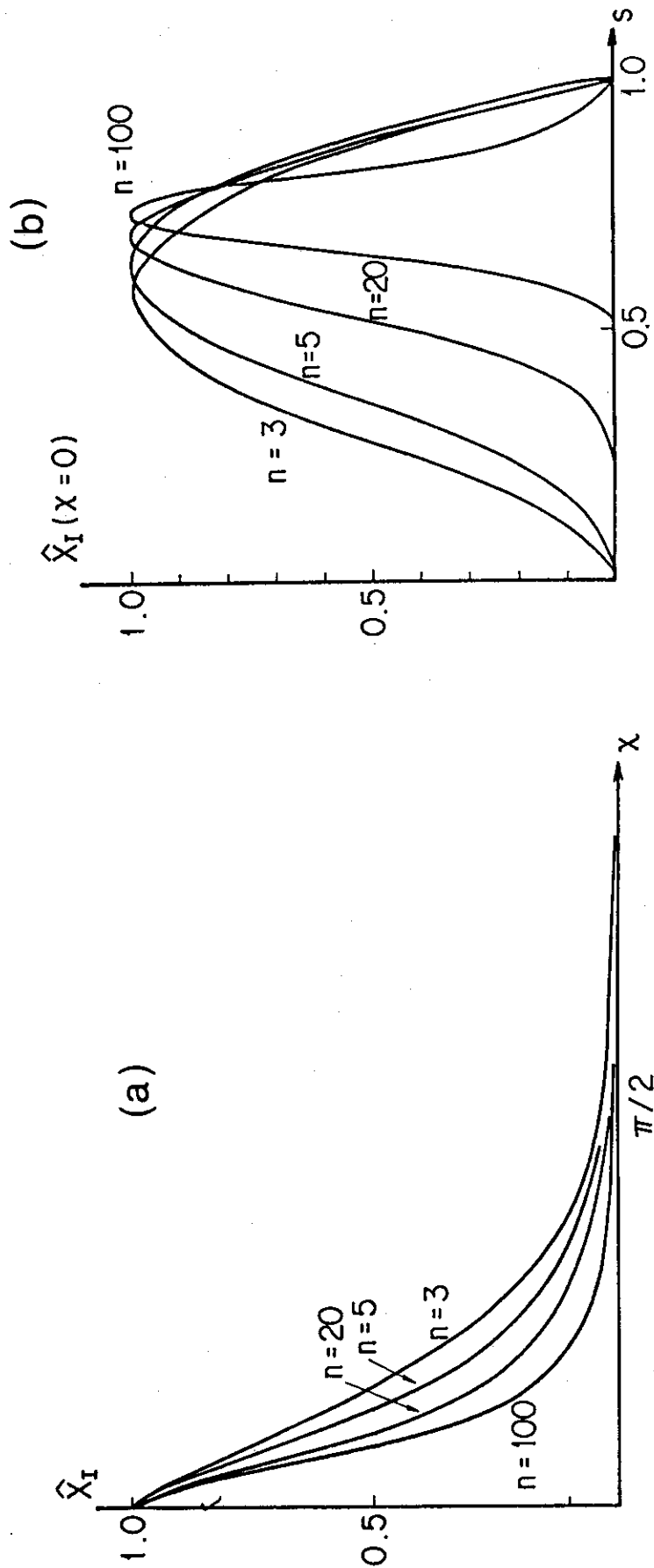


Fig. 7.2 Poloidal (a) and radial (b) structures of the amplitude  $\hat{X}_I$  for the case of strong shear. The poloidal structure is shown on the surface where the potential energy is minimum. The mode vanishes rapidly inside of the torus.

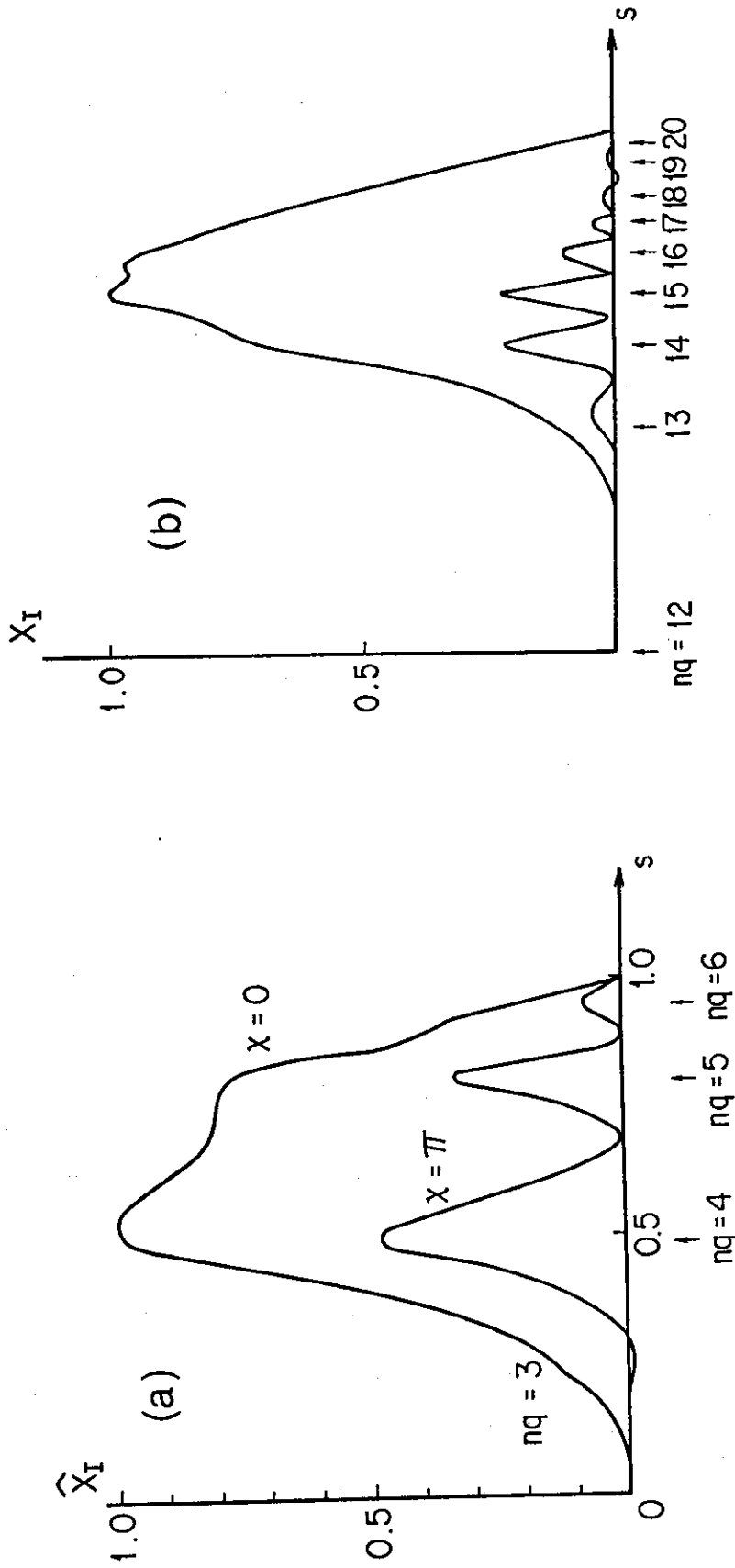


Fig. 7.3 Radial structures of the amplitude  $\hat{X}_I$  at  $\chi=0$  (outside of the torus) and  $\chi=\pi$  (inside of the torus) for (a)  $n=3$  and (b)  $n=10$  modes. The amplitude  $\hat{X}_I(\chi=\pi)$  has peaks at rational surfaces. It becomes smaller as  $n$  increases and the mode tends to the ballooning mode.

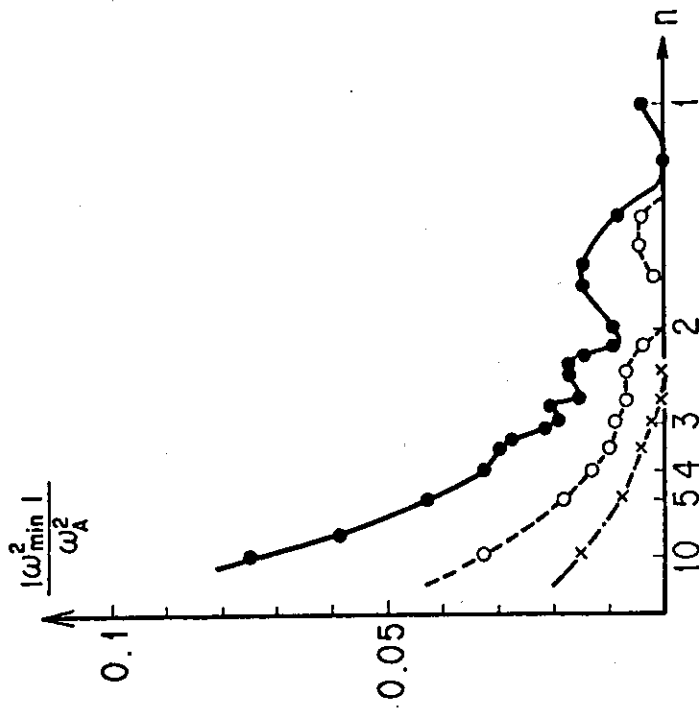


Fig. 7.5 Squared growth rate vs.  $n$  for the case of weak shear :  $q_0 = 1.05$  (solid line), 1.2 (broken line) and 1.3 (dotted solid line). In the small  $n$  region ( $n \leq 4$ ), the growth rate has a peak when the number of the rational surfaces increases.

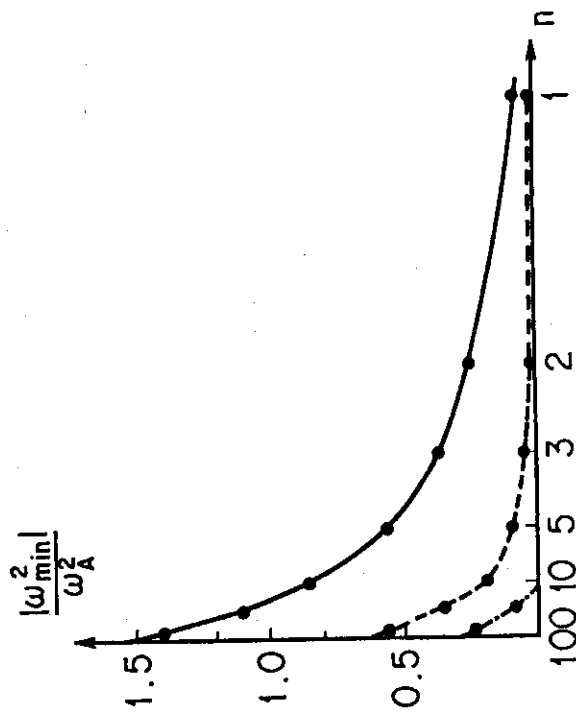


Fig. 7.4 Squared growth rate vs.  $n$  for the case of strong shear. The value of  $q_0$  is 1.09 (solid line), 1.5 (broken line) and 1.8 (dotted solid line). The growth rate increases monotonously as  $n$  increases.

## 8. ま と め

トーラス・プラズマの線形理想 MHD 安定性解析コード ERATO の改訂版を開発し、このコードを用いて  $n=1$  内部キック・モードと高  $n$  バルーン・モードの安定性を解析した。また、コードを効率よく利用するための支援ユーティリティ・プログラムも新たに開発した。今回の改訂において、多岐にわたるコードの改良が加えられ、ERATO コードは、低  $n$  から高  $n$  までの内部・外部モードを問わず種々の MHD 不安定モードを解析できるようになった。また、コードの計算効率も大幅に改善された。コードに加えられた改良点について整理すると以下の様になる：

- 写像法 (ERATO 1) : 平衡のスプライン補間による高精度写像により MHD 安定性解析に必要なメトリック量の精度を向上。
- アイコナル表示 (ERATO 1, ERATO 3) : ポロイダル方向の短波長振動をエネルギー積分から除去。この表示は中間  $n$  ・高  $n$  モードの解析に不可欠である。
- 真空磁場エネルギー (ERATO 2) : 真空磁場エネルギーのベクトル・ポテンシャル表示。この方法により、旧版 ERATO 2 のもっていた欠点を解消でき、低  $n$  から高  $n$  までの外部モードの正確な解析が可能になる。
- Scott 算法 (ERATO 4) : 行列の一般固有値問題を逆ベキ法で解く際に必要な記憶容量、I/O 回数、CPU 時間が大幅に減少する。

本報告書では、 $n=1$  内部キック・モードの第二安定領域が発見されたことを述べ、シアの大小によるバルーン・モードの構造および成長率の  $n$  依存性を明らかにした。今後、内部キック・モードの第二安定領域を、種々の平衡分布について調べ、その機構の詳細を明らかにすることが必要である。また、バルーン・モードについては、高  $\beta$  平衡での、有限の  $n$  ( $n=5\sim 100$ ) に対して、第二安定領域<sup>20)</sup>の問題も含めて、安定性解析を行うことが課題である。

ERATO コードの改訂作業を通じて、平衡の精度が本質的に重要であることが分った。ERATO コードで要求される平衡は、単に、その値が正確であるだけでなく、メトリック量の精度が高いことを保証するものでなければならない。 $\beta$  値の高い場合、 $(R, Z)$  座標を用いる通常の平衡コードでは、その様な要請を満たす平衡を作ることが困難である。この困難を解決する方法として、逆平衡解法<sup>21,22)</sup>を用いて平衡を作ることが考えられる。

ERATO コードでは、各磁気面上で磁力線が直線になる様にポロイダル角  $\chi$  を定義しているため、 $\beta$  値が高くなると、この座標系はトーラスの外側で等  $\chi$  線が開いた座標系になる。これは、高  $\beta$  平衡の安定性解析を行う上で不都合であり、 $\beta$  値の高い場合に適する座標系を選ぶことが重要である。

今回は、外部キック・モードは詳しく解析されなかった。また、位置不安定性 ( $n=0$ ) の解析については将来の課題である。

**謝 辞**

改訂版の開発と本報告書の安定性解析に関して有意義な討論をしていただいた理論解析研究室の津田孝，栗田源一，伊藤公孝研究員に感謝致します。また，絶えざる御激励をいただきました小幡行雄核融合研究部長と田中正俊核融合研究部次長に感謝致します。



References

- [1] R. Gruber, F. Troyon, D. Berger, L.C. Bernard, S. Rousset et al., *Comput. Phys. Commun.* 21(1981) 323.
- [2] T. Tsunematsu, T. Takeda, G. Kurita, M. Azumi, T. Matsuura, R. Gruber, and F. Troyon, "Beta-limit of a large tokamak with a circular cross section", JAERI-M 9890 (1981).
- [3] T. Takeda, G. Kurita, T. Matsuura, H. Nimomiya, T. Tsunematsu et al., "IAEA INTOR WORKSHOP REPORT, GROUP 11 — STABILITY CONTROL —", JAERI-M 8624(1980).
- [4] T. Takeda, K. Itoh, M. Azumi, G. Kurita, T. Takizuka et al., "STABILITY ANALYSIS OF INTOR", JAERI-M 9466(1980).
- [5] Y. Tanaka, T. Matsuura, T. Takeda, M. Azumi, S. Tokuda et al., "MHD Stability Analysis Code ERATO-J — User's Manual of JAERI-version ERATO —", JAERI-M 9040(1980).
- [6] T. Takizuka, T. Tsunematsu, S. Tokuda, M. Azumi, G. Kurita et al., "COMPUTATIONAL STUDIES OF TOKAMAK PLASMAS", JAERI-M 9345(1981).
- [7] T. Takizuka, S. Tokuda, M. Azumi and T. Takeda, *Comput. Phys. Commun.* 23 (1981) 19.
- [8] J.W. Connor, R.J. Hastie and J.B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* 40(1978) 396.
- [9] D.S. Scott and R. Gruber, "Implementing Sparse Matrix Technique in the ERATO Code", Lausanne Report LRP 181/81(1981).
- [10] S.I. Itoh and K. Itoh, *Nucl. Fusion* 21(1981) 3.
- [11] R.C. Grimm, J.M. Green and J.L. Johnson, in "Method of Computational Physics" edited by B. Alder, S. Fernbach and M. Rotenberg (Academic Press, New York) Vol.16, chapter 4.
- [12] R.L. Dewar, J. Manickam, R.C. Grimm and M.S. Chance, *Nucl. Fusion* 21 (1981) 493.
- [13] T. Tsunematsu, R. Gruber and F. Troyon, "The ideal MHD internal modes spectrum of a tokamak configuration using a quasi-mode representation", Lausanne Report LRP 189/81 (1981), submitted to *Plasma Physics*.
- [14] W.A. Newcomb, *Ann. Phys.* 10(1960) 232.
- [15] M.N. Bussac, R. Pellat, D. Edery and J.L. Soule, *Phys. Rev. Lett.* 35 (1975) 1638.
- [16] W. Kerner, R. Gruber and F. Troyon, *Phys. Rev. Lett.* 44(1980) 536.
- [17] S. Yamamoto, M. Maeno, N. Suzuki, M. Azumi, S. Tokuda et al., *Nucl. Fusion* 21(1981) 993.
- [18] M. Azumi, S. Tokuda, G. Kurita, T. Tsunematsu, T. Takizuka et al., "Internal Disruption in High  $\beta_p$  Tokamak", JAERI-M 9787(1981).

- [19] L.E.Zakharov, Fiz. Plazmy 4 (1978) 898 ; Sov. J. Plasma Phys. 4 (1978) 503.
- [20] T. Tuda, M. Azumi, G. Kurita, T. Takizuka and T. Takeda, "Ballooning stable high beta tokamak equilibria", JAERI-M 9472 (1981).
- [21] T. Takeda and T. Tsunematsu, "A numerical code SELENE to calculate axisymmetric toroidal equilibria", JAERI-M 8042 (1979).
- [22] J. DeLucia, S.C. Jardin and M.M. Todd, J. Comput. Phys. 37(1980) 183.

## 付録1. メトリック量の導出

ポロイダル座標 $\chi$ は、等 $\psi$ 線上の線積分

$$\chi = \frac{T}{q} \int_0 \frac{d\ell}{R^2 B_p} = 2\pi \int_0 \frac{d\ell}{R^2 B_p} / \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p} \quad (*1)$$

で与えられるので、 $\beta$ は

$$\beta_\chi = \frac{\nabla\psi \cdot \nabla\chi}{|\nabla\psi|^2} = \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \frac{T}{q} \left[ \nabla\psi \cdot \nabla \int \frac{d\ell}{R^2 B_p} - \frac{\chi}{2\pi} \nabla\psi \cdot \nabla \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p} \right] \quad (*2)$$

と表わすことができる。また、 $dq/d\psi$ については

$$\frac{dq}{d\psi} = \frac{T}{2\pi} \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p} + \frac{T}{2\pi} \frac{1}{|\nabla\psi|^2} \nabla\psi \cdot \nabla \oint \frac{d\ell}{R^2 B_p} \quad (*3)$$

が成り立つ。 $\nabla\psi \cdot \nabla \int \frac{d\ell}{R^2 B_p}$  を積分記号下の微分で表現するために、補助変数 $S$ を導入して( $\psi, S$ )を独立変数に選ぶ。この時、( $\psi, S$ )が直交座標系になるように $S$ を設定するのが便利である。すなわち、 $S$ の条件として

$$\nabla S \cdot \nabla\psi = 0 \quad (*4)$$

を課す。したがって、 $S$ はポロイダル磁場 $B_p$ に平行であるから

$$\nabla S = \alpha (\mathbf{e}_\varphi \times \nabla\psi) \quad (*5)$$

と書くことができる( $\mathbf{e}_\varphi$ :トロイダル方向の単位ベクトル)。ここで係数 $\alpha$ は一般には $R$ と $Z$ (したがって、 $\psi$ と $S$ )の関数である。 $\therefore \alpha = \alpha(R, Z) = \alpha(\psi, S)$ , (\*5)式を成分で表わすと

$$\frac{\partial S}{\partial R} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad \frac{\partial S}{\partial Z} = -\alpha \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (*6)$$

であるので、 $\frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial S}{\partial R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial S}{\partial Z} \right)$ より、 $\alpha$ を決定する方程式として、

$$\nabla\alpha \cdot \nabla\psi + \alpha \Delta\psi = 0 \quad (*7)$$

を得る。(\*7)式は、また

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \alpha(\psi, S) = -\frac{\alpha}{|\nabla\psi|^2} \Delta\psi \quad (*8)$$

と書き直すことができる。 $(R, Z)$ 座標から $(\psi, S)$ 座標への変数変換のヤコビアン $J$ は

$$J = \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial S}{\partial Z} - \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial S}{\partial R} = -\alpha |\nabla \psi|^2 = -\alpha R^2 B_p^2 \quad (*9)$$

であり、したがって、

$$\frac{\partial R}{\partial \psi} = \frac{1}{J} \frac{\partial S}{\partial Z} = \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (*10)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \psi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial S}{\partial R} = \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \frac{\partial \psi}{\partial Z}$$

を得る。また等 $\psi$ 線に沿った線素 $d\ell$ は

$$d\ell = \frac{dS}{|\nabla S|} = \frac{dS}{\alpha |\nabla \psi|} \quad (*11)$$

と表わせる。この様にして構成された直交座標系 $(\psi, S)$ を用いると、積分記号下で微分ができ、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \nabla \psi \cdot \nabla \int \frac{d\ell}{R^2 B_p} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \int \frac{d\ell}{R^2 B_p} = -\frac{\partial}{\partial \psi} \int \frac{dS}{\alpha R |\nabla \psi|^2} \\ &= \int \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{\alpha R |\nabla \psi|^2} \right) dS = \int \alpha |\nabla \psi| \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{\alpha R |\nabla \psi|^2} \right) d\ell \end{aligned} \quad (*12)$$

が成立する。ここで

$$F = \alpha |\nabla \psi| \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{\alpha R |\nabla \psi|^2} \right) \quad (*13)$$

とおくと、 $F$ は

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} \frac{1}{R |\nabla \psi|} - \frac{1}{R^2 |\nabla \psi|} \frac{\partial R}{\partial \psi} \\ &\quad - \frac{1}{R |\nabla \psi|^3} \left( \frac{\partial R}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial R} |\nabla \psi|^2 + \frac{\partial Z}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial Z} |\nabla \psi|^2 \right) \end{aligned} \quad (*14)$$

と表わせる。 $(*14)$ に $(*8)$ 、 $(*10)$ を用いると $(2.12)$ 式を得る。

## 付録2 ユティリティ・プログラム

このプログラムは、ソース・プログラムの書き換えやロード・モジュールの作成が容易にできるように開発されたERATOコードの支援プログラムである。ERATOのソース・プログラムは、EOS形式で書かれ、コモン領域は、大きさが変数になっていて、プリプロセッサで変数を定数に置き換えた後、FORTRAN 77のINCLUDE文でソース・プログラムに挿入される。EOS

システムは、高い汎用性を持っているがその分だけ処理時間がかかる。ERATOコードでは、置き換えの手順が単純であるから、プリプロセッサは単能のものの方が作業効率が良くなる。そこで、ERATOソースをコンパイルするための前処理プログラムAUTDIMが用意されている。

機能：

- (1) コモン領域に含まれる配列のサイズを決め、行き上がったコモン領域をERATOソースの中に挿入する。得られたソース・プログラムは、FORTRAN-HEまたはFORTRAN 77で翻訳可能である。
- (2) コモン領域に含まれた配列のサイズを決め、1つのコモンを1つのメンバとしてPOファイルを作成する。この時POファイルの作成のために、M 200のデータセット・ユーティリティ"JSEUPDTE"を使う。

機能(1), (2)のための入出力構成図は図A 2.1(1)および(2)に示されている。

入力データ：

入力はネームリスト名NEWRUNを使う。ネームリスト変数は次の通りである。

変数名	標準値	内 容
NPSI	14	$N_s$
NCHI	15	$N_x$
NV	10	$N_v$
OUT	'PS'	PSの時は機能(1) POの時は機能(2)
NR	140	平衡のR方向のメッシュ数
NZ	70	平衡のZ方向のメッシュ数

制限事項：

- (1) FORTRAN 77では、コモン領域を挿入すべき場所に
  - \* INCLUDE comdeck-name
 が入っていないなければならない。これに対応して各コモン領域の先頭に、第1カラムから
  - \* COMDECK comdeck-name
 を置かなければならない。
- (2) \*COMDECKカードを含めて、コモン領域の全枚数は500枚以内である。
- (3) コモン領域の総数は40個以内とする。

このうち(2), (3)の制限は、AUTDIMソース・プログラム中の配列の大きさを拡張すればよい。上記の制限内の時はAUTDIM実行時の主記憶容量は200KBである。

AUTDIMの使用例を図A 2.2に示す。

### 付録3. ロード・モジュールの作成

通常、ERATOコードを実行する時は、毎回プリプロセスを行うのではなく、あらかじめ最大メッシュ数を決めてロード・モジュールを作成しておく。ここでは、付録2で述べたAUTDIMの機能(2)を使ったロード・モジュールの作成法について述べる。即ち、最大メッシュ数に対応す

るコモン領域をファイルにつくり出しておく必要がある。

ロード・モジュール名は J××××. ERATO. LOAD とし、ERATO 1 から ERATO 5 までの各モジュールは、このファイルのメンバになる。このようにすると、付録4で述べるカタログド・プロセッサが使い易くなる。図A.3.1は、J 3190. ERATO 1. FORT 77 という PO 形式のソース・ファイルに、J 3190. CMER 40. FORT 77 に入っている PO 形式のコモン領域を挿入し、FORTRAN 77 で翻訳をし、更に J 3190. ERATO. LOAD に ERATO 1 というメンバ名で実行可能なモジュールを作成するためのジョブコントロールである。J 3190. ERATO. LOAD のブロック長を 13030 にとってあるのは、MSS に格納可能にするためである。

#### 付録4. カタログド・プロセッサ

ERATO コードでは、各モジュール間のデータの受け渡しや固有値計算の外部記憶としてディスク・ファイルを使っている。このため決りきった手続きをまとめて登録しておく、ジョブ・コントロールを作成する時に、ファイルの定義を毎回書く必要がない。バッチ処理用のカタログド・プロセッサは J××××. PROCLIB. CNTL という決められた名前のファイルに作成しておく。

図A.4.1-図A.4.5はそれぞれERATO 1からERATO 5および新真空場用ERATOVを実行するための手続きを登録したものである。これらの手続きは

```
// name EXEC ERATO1,parameters
```

のようにして実行できる。

#### 付録5. ジョブ・コントロール

ERATO コードの実行に伴うほとんどの手続きは、付録4で述べたカタログド・プロセッサとして登録してあるから、実行にあたっては、これらを組み合わせ、入力データを付け加えればよい。図A.5.1にERATOの全モジュールを実行するためのジョブ・コントロールの例を示す。

図A.5.2は、メッシュ数の多い場合に入出力の効率を上げるために一部に直接編成ファイルを使用した例である。

## 付録 6. ファイル

ERATOコードで使用されるディスク・ファイルは次の通りである。

機番	作成	参照	内容
4	ERATO 1	ERATO 1, 3, 5	メトリックおよび平衡量
4	ERATOV	ERATO 3, 5	新真空場計算のための追加
5	ERATO 1	ERATO 1	入力データ用
6	ERATO 1-5	ERATO 1-5	プリンタ出力用
7	ERATO 3	ERATO 4	行列 $A - \lambda_0 B$
8	ERATO 1	ERATO 2-5	ネームリスト変数の格納
9	ERATO 3	ERATO 4	行列 B
10	未使用		
11	平衡コード	ERATO 1	平衡計算の結果
14	ERATO 3	ERATO 3	作業用
14	ERATO 4	ERATO 5	固有ベクトル
16	ERATO 1	ERATO 5	図形出力データ
17	ERATO 1	ERATO 2	表面の $\partial\psi/\partial R$ , $\partial\psi/\partial Z$
17	ERATO 2	ERATO 3	旧真空場の行列
33	ERATO 4	ERATO 4	$A - \lambda_0 B$ の LDL <sup>T</sup> 分解

## 付録 7. 入力データ

改訂版 ERATO コードでは、全ての入力を ERATO 1で行っている。入力形式はネームリスト入力で、NEWRUNとERT1DAの2つである。

ネームリスト NEWRUN :

変数	型	デフォルト値	内容
AL0	R	-1.0	固有値の推定値
REXT	R	0.0	導体壁の位置
SCALE	R	1.0	$\sigma$ の値
WNTORE	R	-1.0	トロイダルモード数 n
WIDTH	R	1.0D 5	$\chi$ メッシュの中の調整
NPSI	I	20	$N_s$
NCHI	I	20	$N_\chi$
NTCASE	I	3	電流計算の選択
NV	I	10	新真空場のメッシュ数
NITMAX	I	10	固有値の逐次近次回数
NSHIFT	I	1	n の補正 (0 の時補正なし)

変数	型	デフォルト値	内容
NUMEQU	I	1	平衡の番号
NMESH	I	0	s 方向のメッシュ集積数
SDIST	RA	1.0	集積箇所
CDIST	RA	1.0	集積の重み
WDIST	RA	1.0 D 5	集積の中
NTURN	I	10	バルニング解析の積分中
NLGREN	L	T	真空場計算の選択 =T : グリーン関数法 =F : ベクトルポテンシャル法
NLEINQ	L	F	exp(inq $\chi$ ) の選択
ITEST	I	1	固有ベクトル表示の選択 = 1 : 固有ベクトル = 2 : 実変位

ネームリスト ERTIDA :

変数	型	デフォルト値	内容
MSPL	I	3	内挿の次数
SDIV	R	2.0	等高線追跡の分割数
IFC	I	0	写像情報の出力 = 0 : 写像結果の物理量 = 1 : 0 + 入力平衡情報 = 2 : 1 + 写像の詳細情報

付録 8. 資源量

改訂版 ERATO コードの実行に必要な計算機資源の概要を以下の表で示す。表 A 8.1 は行列  $A-\lambda_0 B$ ,  $B$ ,  $LDL^T$  を格納するファイルの容量を、表 A 8.2 は、CPU および経過時間と入出力回数を、表 A 8.3 はメモリ容量を示している。カッコの中の数値は旧版 ERATO コードのものである。

$N_s / N_\chi$	$D_7, D_9$	$D_{33}$	新/旧 ( $D_7 + D_9 + D_{33}$ )
30 / 30	46 (390)	65 (390)	0.134
60 / 60	180 (3000)	350 (3000)	0.079
100 / 100	600 (13700)	1600 (13700)	0.068



表A.8.1：ディスク容量

単位はトラック (ITRK = 19000 バイト) である。D<sub>7</sub>, D<sub>9</sub>, D<sub>33</sub> はそれぞれ A-λ<sub>0</sub>B, B, LDL<sup>T</sup> を意味する。一般式は次の通りである。

$$D_7, D_9 = 58 N_s (2N_x + 2) \times 8 / 19000 \text{ TRK.}$$

$$D_{33} = N_s (N_x + 1) (2N_x + 105) \times 8 / 19000 \text{ TRK.}$$

N <sub>s</sub> /N <sub>x</sub>	CPU [秒]	経過時間 [秒]	I/O 回数
30 / 30	31 (77)	(380)	2320 (6610)
	86	720	2720
60 / 60	350 (1090)	(3400)	6480 (51000)
		1530	7353
100 / 100	2050 (7940)	(18700)	16200 (240000)
	2240	6020	17900

表A.8.2：時間と入出力回数.

上段はERATO 4のみ, 下段はERATO 1-ERATO 5の合計である。ERATO 4の逐次近  
以は3回である。経過時間は混み具合によって違う。

N <sub>s</sub> /N <sub>x</sub>	ERATO 1	ERATO 2	ERATO 3	ERATO 4	ERATO 5
60 / 60	1056	136	564	828	752
100 / 100	1068	228	1012	1644	1396

表A.8.3：メモリ容量.

単位はKB. ERATO 2は新版である。

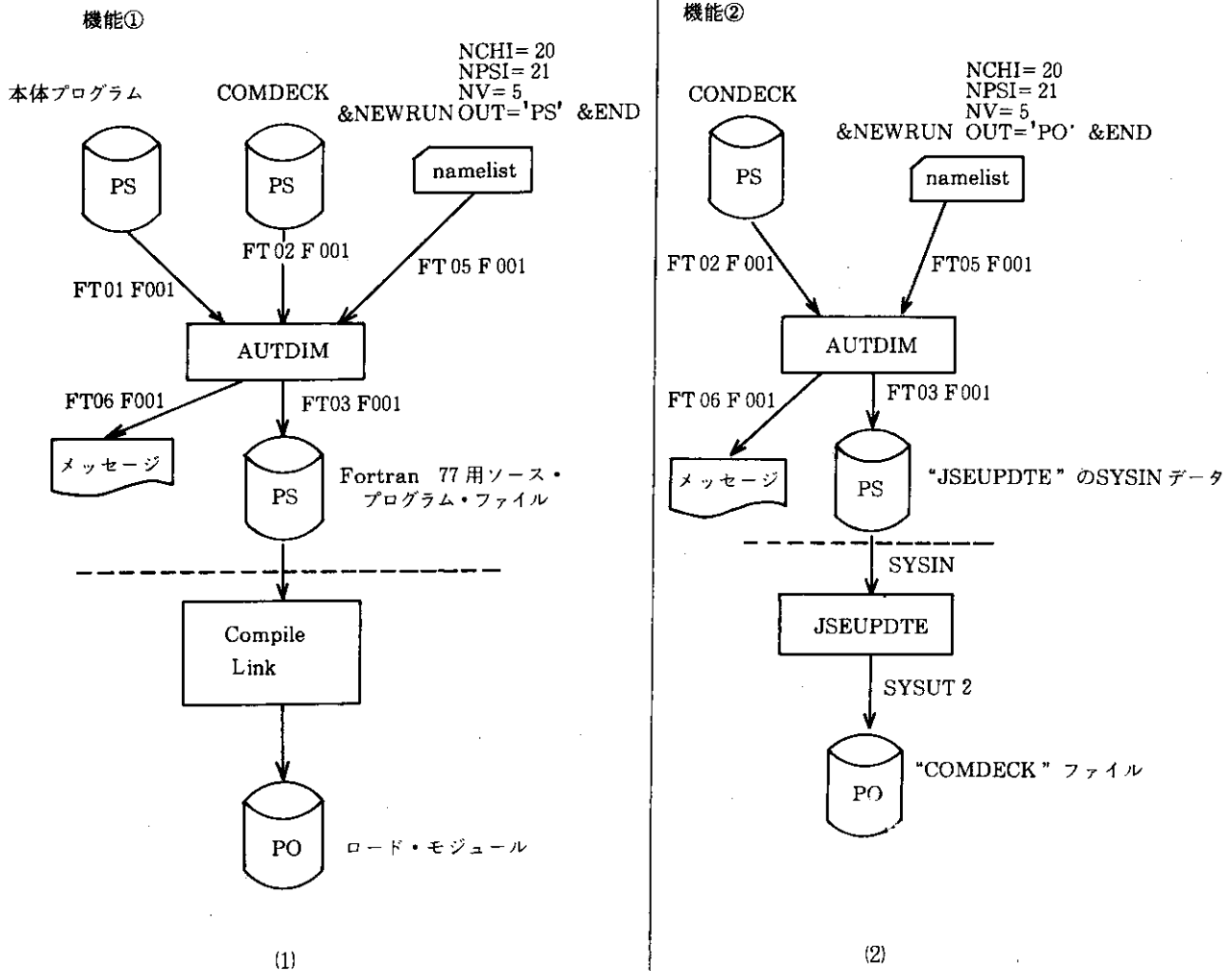


Fig. A2.1 Flow chart of the preprocessing by using AUTDIM. Figures (1) and (2) show the flows to create the compilable source program and the common blocks, respectively.

```

00100 //JCLG JOB
00200 // EXEC JCLG
00300 //SYSIN DD DATA,DLM='=='
00400 // JUSER ████████████████████████████████████████████████████,0021.120,TRITON08
00500   T.1 W.2 P.0 C.0 I.3 OPN
00600   OPTP MSGLEVEL=(1,1,1),NOTIFY=J3190
00700 //*-----
00800 //*                   E R A T O (( COMMON FILE ))
00900 //*-----
01000 //AUTDIM EXEC AUTDIM,CO='J3190.COMERT.FORT77(COMDECK)'
01100 //FT05F001 DD *
01200   &NEWRUN NPSI=80,NCHI=60,NR=257,NZ=131,OUT='PO',NV=0 SEND
01300 //JSEUPDTE EXEC PGM=JSEUPDTE,PARM='NEW,LINECNT=0'
01400 //SYSPRINT DD SYSOUT=*
01500 //SYSIN   DD DSN=&&ERATO,DISP=(OLD,DELETE)
01600 //SYSUT2  DD DSN=J3190.CMER80.FORT77,DISP=(NEW,CATLG,DELETE),
01700 //          SPACE=(TRK,(4,1,2),RLSE),UNIT=USER,
01800 //          DCB=(LRECL=80,BLKSIZE=3200,RECFM=FB)
01850 //POLIST EXEC POLIST,DSN='J3190.CMER80',Q='.FORT77'
01900 ==
02000 //
END OF DATA SET

```

Fig. A2.2 JCL for the preprocessing of the common blocks.

```

//JCLG JOB
// EXEC JCLG
//SYSIN DD DATA,DLM='=='
// JUSER ████████████████████████████████████████████████████,0021.120,TRITON08
   C.1 W.3 I.3 T.1 OPN
   OPTP MSGLEVEL=(1,1,1),NOTIFY=J3190
//FORT77 EXEC FORT77,OPT=2,A='INCLUDE,ELM(*)'
//SYSIN DD DSN=J3190.ERATO1T.FORT77,DISP=SHR
//SYSINC DD DSN=J3190.CMER40.FORT77,DISP=SHR
//LKED77 EXEC LKEDCT77,LM='J3190.ERATOT',Q='.LOAD(ERATO1)',UNIT=TDS,
//          GRLIB=COM,MODS='100,10,20'
//SYSLMOD DD DCB=(BLKSIZE=13030),DISP=SHR
==
//

```

Fig. A3.1 JCL to create the load module.

```

//ERAT01  PROC PNM=ERAT01,LM='J3190.ERATO',B=13700
//*-----
//ERAT01 EXEC PGM=&PNM,COND=(4,LT)
//STEPLIB DD DSN=&LM..LOAD,DISP=SHR
//FT04F001 DD DSN=&F04,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(20,20)),
//          DCB=(LRECL=18996,BLKSIZE=19000,RECFM=VBS)
//FT05F001 DD DDNAME=SYSIN
//FT06F001 DD SYSOUT=*,DCB=(LRECL=137,BLKSIZE=&B,RECFM=FBA)
//FT08F001 DD DSN=&F08,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(10,10))
//FT16F001 DD DSN=&F16,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(20,20)),
//          DCB=(LRECL=18996,BLKSIZE=19000,RECFM=VBS)
//FT17F001 DD DSN=&F17,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(20,20)),
//          DCB=(LRECL=18996,BLKSIZE=19000,RECFM=VBS)

```

Fig. A4.1 PROCLIB for ERAT01.

```

//ERAT02  PROC PNM=ERAT02,LM='J3190.ERATO'
//*-----
//ERAT02 EXEC PGM=&PNM,COND=(4,LT)
//STEPLIB DD DSN=&LM..LOAD,DISP=SHR
//FT06F001 DD SYSOUT=*,DCB=(LRECL=137,BLKSIZE=13700,RECFM=FBA)
//FT08F001 DD DSN=&F08,DISP=(OLD,PASS)
//FT17F001 DD DSN=&F17,DISP=(OLD,PASS)

```

Fig. A4.2 PROCLIB for ERAT02 (old vacuum code).

```

//ERAT03  PROC PNM=ERAT03,LM='J3190.ERATO'
//*-----
//ERAT03 EXEC PGM=&PNM,COND=(4,LT)
//STEPLIB DD DSN=&LM..LOAD,DISP=SHR
//FT04F001 DD DSN=&F04,DISP=(OLD,PASS)
//FT06F001 DD SYSOUT=*,DCB=(LRECL=137,BLKSIZE=1370,RECFM=FBA)
//FT07F001 DD DSN=&F07,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(60,60)),
//          DCB=(LRECL=18996,BLKSIZE=19000,RECFM=VBS)
//FT08F001 DD DSN=&F08,DISP=(OLD,PASS)
//FT09F001 DD DSN=&F09,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(60,60)),
//          DCB=(LRECL=18996,BLKSIZE=19000,RECFM=VBS)
//FT14F001 DD DSN=&F14,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(20,20)),
//          DCB=(LRECL=18996,BLKSIZE=19000,RECFM=VBS)
//FT17F001 DD DSN=&F17,DISP=(OLD,PASS)

```

Fig. A4.3 PROCLIB for ERAT03.

```

//ERAT04  PROC PNM=ERAT04,PNM='J3190.ERATO'
//*-----
//ERAT04 EXEC PGM=&PNM,COND=(4,LT)
//STEPLIB DD DSN=&LM..LOAD,DISP=SHR
//FT05F001 DD DDNAME=SYSIN
//FT06F001 DD SYSOUT=*,DCB=(LRECL=137,BLKSIZE=1370,RECFM=FBA)
//FT07F001 DD DSN=&F07,DISP=(OLD,DELETE)

//FT08F001 DD DSN=&F08,DISP=(OLD,PASS)
//FT09F001 DD DSN=&F09,DISP=(OLD,DELETE)
//FT10F001 DD DSN=&F10,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(30,30)),
//          DCB=(LRECL=18996,BLKSIZE=19000,RECFM=VBS)
//FT14F001 DD DSN=&F14,DISP=(OLD,PASS)
//FT33F001 DD DSN=&F33,UNIT=TSSWK,DISP=(NEW,PASS),
//          SPACE=(TRK,(120,120)),
//          DCB=(LRECL=18996,BLKSIZE=19000,RECFM=VBS)
//

```

Fig. A4.4 PROCLIB for ERAT04.

```

//ERAT05  PROC PNM=ERAT05,LM='J3190.ERATO'
//*-----
//ERAT05 EXEC PGM=&PNM,COND=(4,LT)
//STEPLIB DD DSN=&LM..LOAD,DISP=SHR
//FT04F001 DD DSN=&F04,DISP=(OLD,DELETE)
//FT05F001 DD DDNAME=SYSIN
//FT06F001 DD SYSOUT=*,DCB=(LRECL=137,BLKSIZE=13700,RECFM=FBA)
//FT08F001 DD DSN=&F08,DISP=(OLD,DELETE)
//FT10F001 DD DSN=&F10,DISP=(OLD,DELETE)
//FT14F001 DD DSN=&F14,DISP=(OLD,DELETE)
//FT16F001 DD DSN=&F16,DISP=(OLD,DELETE)
//FT17F001 DD DSN=&F17,DISP=(OLD,DELETE)

```

Fig. A4.5 PROCLIB for ERAT05.

```

//VACUUM  PROC PNM=ERATOV,LM='J3190.ERATO'
//*-----
//VACUUM EXEC PGM=&PNM,COND=(4,LT)
//STEPLIB DD DSN=&LM..LOAD,DISP=SHR
//FT04F001 DD DSN=&F04,DISP=(OLD,PASS)
//FT06F001 DD SYSOUT=*,DCB=(LRECL=137,BLKSIZE=13700,RECFM=FBA)
//FT08F001 DD DSN=&F08,DISP=(OLD,PASS)
//FT17F001 DD DSN=&F17,DISP=(OLD,PASS)

```

Fig. A4.6 PROCLIB for ERATOV (new vacuum code).

```

//JCLG JOB
// EXEC JCLG
//SYSIN DD DATA,DLM='=='
// JUSER ████████████████████████████████████████,0021.120,TRITON08
  T.5 C.3 W.2 P.0 I.4 OPN
  OPTP MSGLEVEL=(1,1,1),NOTIFY=J3190
//ERAT01 EXEC ERAT01,LM='J3190.ERATO'
//SYSIN DD *
&NEWRUN WNTORE=-1.000,
  REXT=0.000,
  NTCASE=4,
  NMESH=1,SDIST(1)=0.623,WDIST(1)=0.3,SDIST(2)=0.96,WDIST(2)=0.2,
  NPSI=52,
  NCHI=39,
  NV=0,
  NLEINQ=.FALSE.,
  ALO=-0.380D-3,
  NLGREN=.FALSE.,
  SCALE=1.2500,
  NITMAX=6,
  WIDTH=1.5,
&END
&ERT1DA NCHECK=50,IFC=0,SDIV=1.200,EPSR=1.D-5,EPSEQ=2.0D-4 &END
//FT11FO01 DD DSN=J3331.APLEQ1.DATA,DISP=SHR,LABEL=(,,,IN)
//ERAT0V EXEC ERAT0V,LM='J3190.ERATO'
//ERAT03 EXEC ERAT03,LM='J3190.ERATO'
//ERAT04 EXEC ERAT04,LM='J3190.ERATO'
//ERAT05 EXEC ERAT05,LM='J3190.ERATO'
==
//

```

Fig. A5.1 JCL for the execution of ERATO code. Sequential access method is used in ERAT04.

```

//JCLG JOB
// EXEC JCLG
//SYSIN DD DATA,DLM='=='
// JUSER ████████████████████████████████████████,0021.120,TRITON08
  T.5 C.3 W.2 P.0 I.4 OPN
  OPTP MSGLEVEL=(1,1,1),NOTIFY=J3190
//ERAT01 EXEC ERAT01,LM='J3190.ERATO'
//SYSIN DD *
&NEWRUN WNTORE=-1.000,
  NUMEQU=3,
  REXT=0.000,
  NTCASE=3,
  NMESH=0,SDIST(1)=1.000,WDIST(1)=0.1,
  NPSI=50,
  NCHI=50,
  NV=20,
  NLEINQ=.FALSE.,
  ALO=-0.184D-3,
  NLGREN=.FALSE.,
  SCALE=1.1111100,
  ITEST=0,
  NITMAX=6,
  WIDTH=1.5,
&END
&ERT1DA NCHECK=50,IFC=0,SDIV=1.200,EPSR=1.D-5,EPSEQ=2.0D-4 &END
//FT11FO01 DD DSN=J3331.APLEQ2.DATA,DISP=SHR,LABEL=(,,,IN)
//ERAT0V EXEC ERAT0V,LM='J3190.ERATO'
//ERAT03 EXEC ERAT03,LM='J3190.ERATO'
//ERAT04 EXEC ERAT04,LM='J3190.ERATO',PNM=ERAT04D
//FT33FO01 DD DSN=J3331.APLEQ3.DATA,DISP=(NEW,DELETE),DCB=(RECFM=F),
// UNIT=TSSWK,SPACE=(19000,(500))
//ERAT05 EXEC ERAT05,LM='J3190.ERATO'
==
//

```

Fig. A5.2 JCL for the execution of ERATO code. Direct access method is used in ERAT04.