

JAERI-M

9944

円環状プラズマの二流体二次元MHD
モデルと数値計算

1982年2月

藤沢 武夫

JAERI-M レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Section, Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

©Japan Atomic Energy Research Institute, 1982

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 榎高野高速印刷

円環状プラズマの二流体二次元MHDモデルと数値計算

日本原子力研究所 東海研究所 原子炉工学部

藤 沢 武 夫

(1982年1月14日受理)

円環状プラズマの二流体二次元非線型MHDモデルを作成し、時間変化の数値計算を試みた。このモデルではプラズマ粒子電荷による電界を、また自己および相己電磁誘導効果を考慮している。数値計算の安定化を図るため、この電界を計算する場合には1より小さい安定化係数 C_p を導入し、輸送項等の数値計算では簡単のためupstream-downstream差分法を用いている。数値計算例によると、プラズマ粒子の径方向平均輸送速度（または閉じ込め時間）はトカマク実験例に近い値を示す。しかし粒子のドリフト運動には報告されているような高次モードの明確な螺旋流は見られず、また磁気島も見られない。プラズマ密度や温度の高い領域で計算するためには、モデルの安定性、精度をさらに改善し、計算時間も短縮する必要がある。

Numerical simulation of two-fluid, two-dimensional
MHD equations of a toroidal plasma

Takeo FUJISAWA

Division of Reactor Engineering,
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received January 14, 1982)

A numerical simulation of two-fluid, two-dimensional, nonlinear MHD equations of a toroidal plasma has been performed in an attempt to incorporate the effect of the electric field due to the space charge of plasma constituents and the effect of the electromagnetic self- and mutual-induction due to a plasma current. To avoid numerical instability, a stabilizing coefficient smaller than unity is introduced for the numerical calculation of the electric field, and the upstream-downstream difference scheme is used, for simplicity, for the calculation of spatial derivatives such as transport terms. A numerical calculation shows that the average radial transport velocity (or confinement time) agrees well with tokamak experiments. But the clear helical structures of higher modes in velocity as reported are not seen; nor are the magnetic islands. In calculating plasma dynamics especially at higher density and temperature it is necessary to further improve the numerical stability and accuracy of the simulation, and to reduce computing time.

Keywords: Plasma, MHD Model, Simulation, Electric Field, Mutual-induction

目 次

1. まえがき	1
2. 基礎方程式	2
3. 基礎方程式の変形と近似	4
4. 差分近似	9
5. 数値計算	11
6. まとめ	16
参考文献	17

Contents

1. Introduction	1
2. Basic equations	2
3. Reduction and approximation of basic equations	4
4. Finite difference approximation	9
5. Numerical calculation	11
6. Summary	16
References	17

1. ま え が き

定常運転が困難なトカマク型核融合炉を考える場合、起動・停止サイクルのうちの運転時間の割合を伸ばすこと、プラズマの β を高めることはその運転効率向上のため重要な課題と考えられている。しかるに現在のトカマク型実験装置から予想されるこれらの性能はなお低い水準にある。例えばプラズマ電流の保持時間を制限する原因の一つに破壊型不安定のようなMHD不安定性がある。安定状態にあると見られるプラズマが突然不安定状態を呈し消滅してしまう。また高 β 運転を制限する原因もMHD不安定性とかかわっている。このようなMHD不安定性の特徴は電流分布や磁束密度分布等と関連して激しく起ることである。

この不安定問題を数値的に検討するためのMHDモデルについては、目的と状況に応じて次元から三次元モデルまで難易種々にわたって作成されている。RobertsとPotter [1], Brackbill [2], Killeen [3]等はMHDモデルに関する解説と共に数多くの例を整理し、紹介している。まず線型モデルの例としては、DibiaseとKilleen [4]は一流体、線型MHDをモデルを使って逆磁場ピンチにおけるティアリング・モードの不安定性計算をおこなっている。このモデルは円柱座標における θ および z 方向に関して線型化されたMHD方程式をFourier交換し、 r 方向次元モデルとなるように空間座標の数を低減している。Bateman, Schneider, Grossmann [5, 6]は z 方向のみについてFourier変換し、線型二次元MHDモデルを使ってプラズマ動特性を数値計算している。つぎに非線型モデルの例としてSchnackとKilleen [7, 8]は一流体、非線型二次元MHDモデルを使って逆磁場ピンチにおける磁気島の不安定性計算をおこなっている。このモデルでは空間微分は有限差分で近似し、時間積分にはADI法 (Alternating-Direction Implicit) を用いている。Finan [9]は矩形断面トロイダル・プラズマの一流体、非線型、三次元MHDモデルを使って内部キック不安定性の数値計算をしている。このモデルではADI法を三次元計算に拡張したDouglas-Gunn法を使って時間積分しており、計算時間は条件により異なるが、CDC-7600で1~25時間ということである。SykesとWesson [10]は一流体、非線型、直角座標二次元MHDモデルを変形Lax-Wendroff法によって数値計算し、トカマク・プラズマにおける主破壊型不安定の原因を調べている。これらと異なる計算法を用いた例として、Hicks, Carreras, Holmes, Waddell, Lee [11, 12]のORNLのグループはMHD方程式を変形して、 \mathbf{B} はポロイダル・フラックス関数から、 \mathbf{v}_\perp は流れ関数からADI法を用いて数値計算している。そして円柱座標三次元モデルを使ってトカマク・プラズマにおける二つの磁気島の非線型相互干渉と主破壊型不安定性との関係を調べている。

こゝに掲げた例に見られるように、MHDモデルはティアリング・モードと破壊型不安定性との関係を調べるために用いられる場合が比較的多いようである。そしてMHD基礎方程式にほぼ共通している点は運動量方程式とは別にオームの法則を加えていること、磁束密度はFaradayの電磁誘導の式から逆算していること、電流の定義式 $\mathbf{i} = \sum qn\mathbf{v}$ の扱い方が明確でないこと等である。そこでこの報告書で用いる基礎方程式ではオームの法則は運動量方程式の中に含ませて扱い、磁束密度はAmpèreの式にベクトル・ポテンシャルを導入して計算し、電流の定義式はそれらの一部として明確な形で扱い、空間電荷効果の導入を試みる。そして小型トカマク実験装置を想定し、トラス・プラズマ

を二流体、非線型、 $r-\theta$ 二次元MHDモデルによって表わす。そしてこの計算結果を他の報告やS
Tトカマクの実験値⁽¹⁾と若干の比較検討をおこなう。

2. 基礎方程式

トーラス・プラズマの動特性を二流体、非線型、二次元モデルによって表わすためのMHD方程式は密度、運動量および温度の三保存則にMaxwellの電磁方程式、およびその他の補助方程式を加えたもので記述される。ただし温度の冷却効果を与えるため中性粒子の空間分布を考慮するが、これは時間変化がないものとして扱う。そして粒子発生率 S は損失率 L と等しく相殺するものと仮定する。不純物の効果は実効イオン電荷の形で衝突頻度の中に含めて扱う。さてMHD方程式は、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot n\mathbf{v} + S - L \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{\partial n\mathbf{v}}{\partial t} = & -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{1}{mn} \nabla p + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_{ex} + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_\rho + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ & + \nu_{tf} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_t) - \frac{\mathbf{v}}{n} (\nabla \cdot n\mathbf{v} + L) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial kT}{\partial t} = & -\mathbf{v} \cdot \nabla kT - \frac{2}{3} kT \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{2}{3} m \nu_{tf} \left\{ \frac{3}{m_t + m_f} (kT_f - kT_t) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \alpha_f} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_t)^2 \right\} + \left(\frac{m}{3} v^2 - kT \right) \frac{S}{n} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_b = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad (7)$$

ここで、

$$\nu_{tf} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3m_t\mu} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\bar{Z} n_f}{(\alpha_t + \alpha_f)^{3/2}} \ln \Lambda \quad (8)$$

$$\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f} \quad (9)$$

を二流体、非線型、 $r-\theta$ 二次元MHDモデルによって表わす。そしてこの計算結果を他の報告やS
Tトカマクの実験値 (1) と若干の比較検討をおこなう。

2. 基礎方程式

トーラス・プラズマの動特性を二流体、非線型、二次元モデルによって表わすためのMHD方程式は密度、運動量および温度の三保存則にMaxwellの電磁方程式、およびその他の補助方程式を加えたもので記述される。ただし温度の冷却効果を与えるため中性粒子の空間分布を考慮するが、これは時間変化がないものとして扱う。そして粒子発生率 S は損失率 L と等しく相殺するものと仮定する。不純物の効果は実効イオン電荷の形で衝突頻度の中に含めて扱う。さてMHD方程式は、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot n\mathbf{v} + S - L \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{\partial n\mathbf{v}}{\partial t} = & -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{1}{mn} \nabla p + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_{ex} + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_\rho + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ & + \nu_{tf} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_t) - \frac{\mathbf{v}}{n} (\nabla \cdot n\mathbf{v} + L) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial kT}{\partial t} = & -\mathbf{v} \cdot \nabla kT - \frac{2}{3} kT \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{2}{3} m \nu_{tf} \left\{ \frac{3}{m_t + m_f} (kT_f - kT_t) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \alpha_f} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_t)^2 \right\} + \left(\frac{m}{3} v^2 - kT \right) \frac{S}{n} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_b = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad (7)$$

ここで、

$$\nu_{tf} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3m_t\mu} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\bar{Z} n_f}{(\alpha_t + \alpha_f)^{3/2}} \ln \Lambda \quad (8)$$

$$\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f} \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{k T}{m} \quad (10)$$

$$v = |v| \quad (11)$$

各記号は通常の用法に従うものとする。添字 t および f はそれぞれテスト粒子およびフィールド粒子を表わす。ただし混同のおそれのない場合は添字 t を省略している。 $\nu_{t f}$ はフィールド粒子中における 1 ケのテスト粒子の単位時間あたりの衝突頻度、 μ は換算質量、 e は陽子電荷、 \bar{Z} は実効イオン電荷数、 $\ln A$ はクーロン対数、 E_b は電磁誘導による電界、 E_ρ は空間電荷による電界である。 E_{ex} は外部からプラズマに印加した電界で、トロイダル方向だけの成分を持つものとする。ベクトル・ポテンシャル A およびスカラー・ポテンシャル V を導入すると次の関係式を得る。

$$B = \nabla \times A \quad (12)$$

$$E_b = - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (13)$$

$$\nabla^2 A = - \mu_0 i \quad (14)$$

$$E_\rho = - \nabla V \quad (15)$$

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad (16)$$

こゝで注意すべき点は(7)式および(16)式において用いる ρ_c は後に述べるようにプログラムの不安定性を避けるため空間電荷密度 ρ に 1 より小さい安定化係数 c_ρ を掛けた量になっていることである。

3. 基礎方程式の変形と近似

疑トロイダル座標における座標軸は図1に示すようにとるものとし、プラズマは $r-\theta$ 平面の二次元空間で表現する。ただし $r=0$ における点は特異点となるから矩形断面疑トロイダル座標として扱う。

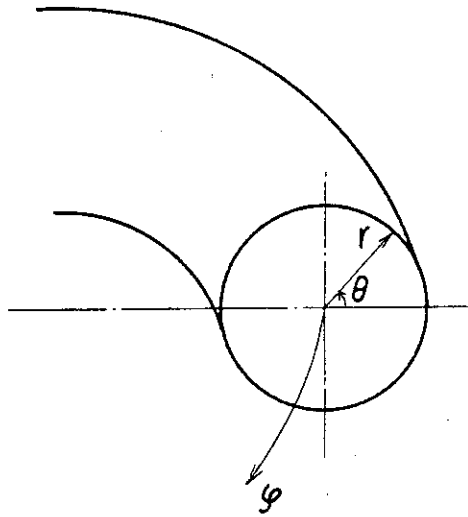


Fig.1 Toroidal coordinates

まず(2)式で与えられる運動量は磁界に対して並行方向の成分と直角方向の成分とに分けて扱う。その理由は運動量の動特性がこれらの方向によって著しく異なることによる。磁束密度のトロイダル方向成分 B_φ が時間に対して変化せず、かつ他の二方向成分 B_r, B_θ より充分大きい場合、ドリフト速度の並行方向成分のうちのトロイダル方向成分は電子およびイオンについてそれぞれ次のように近似される。

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{q_e^2}{m_e} \sum_{r'} \sum_{\theta'} G_a(r, \theta, r', \theta') \frac{\partial}{\partial t} n_e(r', \theta', t) v_{e\parallel\varphi}(r', \theta', t) \\ \simeq - \left\{ (v_e \cdot \nabla) v_e \right\}_{\parallel\varphi} - \frac{1}{m_e n_e} (\nabla p_e)_{\parallel\varphi} + \frac{q_e}{m_e} (E_{ex\parallel\varphi} + E_{r\parallel\varphi}) \\ + \nu_{ei} (v_{i\parallel\varphi} - v_{e\parallel\varphi}) - \frac{1}{n_e} v_{e\parallel\varphi} (\nabla \cdot n_e v_e + L_e) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_i} \frac{\partial}{\partial t} n_i v_{i\parallel\varphi} \simeq - \left\{ (v_i \cdot \nabla) v_i \right\}_{\parallel\varphi} - \frac{1}{m_i n_i} (\nabla p_i)_{\parallel\varphi} + \frac{q_i}{m_i} (E_{ex\parallel\varphi} + E_{r\parallel\varphi}) \\ + \nu_{ie} (v_{e\parallel\varphi} - v_{i\parallel\varphi}) - \frac{1}{n_i} v_{i\parallel\varphi} (\nabla \cdot n_i v_i + L_i) \end{aligned} \quad (18)$$

こゝで(17)式における $G_a(r, \theta, r', \theta')$ はベクトル・ポテンシャルを計算するための Green 関数であって、座標 (r', θ') の点を流れる電流が座標 (r, θ) における電子の流れに与える電磁誘導の効果を表わす。具体的には(14)式のトロイダル方向成分について次の式を数値計算して Green 関数を得る。

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left(rR \frac{\partial G_a}{\partial r} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(R \frac{\partial G_a}{\partial \theta} \right) = -\delta(r-r', \theta-\theta') \quad (19)$$

こゝで $\delta(r-r', \theta-\theta')$ は座標 (r', θ') のみにおいて 1 であり、他の座標においては 0 である。境界条件としては副半径上または副半径の外側の円周上における G_a の値を解析的に計算しておく。またトロイダル方向成分の電流を

$$i_\varphi \simeq i_{\parallel\varphi} \simeq q_e n_e v_{e\parallel\varphi} \quad (20)$$

と近似すれば(13)式から電磁誘導により誘起される電界は

$$\begin{aligned} E_{b\parallel\varphi} &\simeq -\frac{\partial A_{\parallel\varphi}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \sum_{r'} \sum_{\theta'} G_a \mu_0 i_{\parallel\varphi} \\ &\simeq -\mu_0 q_e \sum_{r'} \sum_{\theta'} G_a \frac{\partial}{\partial t} n_e v_{e\parallel\varphi} \end{aligned} \quad (21)$$

である。

電子については慣性項を無視し、 $\frac{\partial}{\partial t} n_e v_{e\parallel\varphi}$ について(17)式を解くことにすればこれは定数係数行列を持つ連立一次方程式であるから、変係数行列の場合に比較して大巾な計算時間の短縮が図られる。(18)式のイオンについては電磁誘導の効果は慣性項に比べて小さいのでこれを無視している。輸送項、圧力勾配項、その他についてはそれぞれ次の式で計算する。

$$\begin{aligned} \left\{ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\}_{\parallel\varphi} &\simeq \frac{B_\varphi}{B^2} \left[B_r \left(-\frac{1}{r} v_\theta^2 - \frac{\cos\theta}{R} v_\varphi^2 \right) + B_\theta \left(\frac{1}{r} v_r v_\theta + \frac{\sin\theta}{R} v_\varphi^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + B_\varphi \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \theta} + v_r v_\theta \frac{\cos\theta}{R} - v_\theta v_\varphi \frac{\sin\theta}{R} \right) \right] \\ &\simeq \frac{B_\varphi}{B^2} \left[v_{\perp r} \cos\theta - v_{\perp \theta} \sin\theta \right] \frac{v_\varphi B_\varphi}{R} \\ &\quad + \frac{1}{r} (v_{\perp r} B_\theta - v_{\perp \theta} B_r) v_\theta + B_\varphi \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

こゝで主半径を R_0 として

$$R = R_0 + r \cos\theta \quad (23)$$

また

$$\frac{v_{\parallel r}}{B_r} = \frac{v_{\parallel \theta}}{B_\theta} = \frac{v_{\parallel \varphi}}{B_\varphi} \quad (24)$$

$$v_\varphi = v_{\parallel \varphi} + v_{\perp \varphi} \simeq v_{\parallel \varphi} \quad (25)$$

の関係を利用している。さらに

$$(\nabla p)_{\parallel \varphi} = \frac{B_\varphi}{B^2} \left(B_r \frac{\partial p}{\partial r} + B_\theta \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right) \quad (26)$$

$$(E_{ex} + E_\rho)_{\parallel \varphi} = \frac{B_\varphi}{B^2} (B_r E_{\rho r} + B_\theta E_{\rho \theta} + B_\varphi E_{ex}) \quad (27)$$

他方ドリフト速度の直角方向成分は過渡的なサイクロトロン周波数の高周波減衰振動を含んでいる。このような速い振動現象はこのMHDモデルの対象外としているから(27)式の定常状態を考えることによりこの高周波振動を除外する。そして輸送項を無視するとよく知られているように速度の直角方向成分は次の式によって表わされる。

$$v_{\perp} \simeq \frac{(E_{ex} + E_\rho) \times B}{B^2} + \frac{1}{qnB^2} B \times \nabla p \quad (28)$$

(1)式の密度保存則における発散項はこのまゝの形で計算するとプログラムの安定性に悪影響を与えるので(28)式を利用して次のように変形する。

$$\nabla \cdot n v = \nabla \cdot n v_{\parallel} + \nabla \cdot n v_{\perp E} + \nabla \cdot n v_{\perp p} \quad (29)$$

ここで

$$\begin{aligned} \nabla \cdot n v_{\perp E} &= \nabla \cdot \frac{n}{B^2} (E_{ex} + E_\rho) \times B \\ &= - \frac{n}{B^2} \left\{ B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + \mu_0 (E_{ex} + E_\rho) \cdot i \right\} \\ &\quad + \frac{(E_{ex} + E_\rho) \times B}{B^2} \cdot \left(\nabla n - \frac{2n}{B} \nabla B \right) \\ &\simeq - \mu_0 \frac{n}{B^2} (E_{\rho r} i_r + E_{\rho \theta} i_\theta + E_{ex} i_\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{B^2} (E_{\rho \theta} B_\varphi - E_{ex} B_\theta) \left(\frac{\partial n}{\partial r} - \frac{2n}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{B^2} (E_{ex} B_r - E_{\theta r} B_\varphi) \left(\frac{\partial n}{r \partial \theta} - \frac{2n}{B} \frac{\partial \theta}{r \partial \theta} \right) \quad (30)$$

また

$$\begin{aligned} \nabla \cdot n \mathbf{v}_{\perp p} &= \frac{1}{q} \nabla \cdot \left(\frac{1}{B^2} \mathbf{B} \times \nabla p \right) \\ &= \frac{\mu_0}{q B^2} \mathbf{i} \cdot \nabla p - \frac{1}{q} (\mathbf{B} \times \nabla p) \cdot \frac{2}{B^3} \nabla B \\ &= \frac{1}{q B^2} \left\{ \left(\mu_0 \mathbf{i}_r - 2 \frac{B_\varphi}{B} \frac{\partial B}{r \partial \theta} \right) \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\mu_0 \mathbf{i}_\theta + 2 \frac{B_\varphi}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \right) \frac{\partial p}{r \partial \theta} \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

なお $r = 0$ におけるトロイダル方向の磁束密度を B_{φ_0} とすると

$$B_\varphi = \frac{R_0}{R_0 + r \cos \theta} B_{\varphi_0} \quad (32)$$

$$\nabla B \simeq \nabla B_\varphi \quad (33)$$

であるから

$$\frac{\partial B}{\partial r} \simeq -B_\varphi \frac{\cos \theta}{R} \quad (34)$$

$$\frac{\partial B}{r \partial \theta} \simeq B_\varphi \frac{\sin \theta}{R} \quad (35)$$

と近似される。29式右辺第1項の発散は次の式により計算する。

$$\nabla \cdot n \mathbf{v}_{\parallel} = \frac{1}{r R} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r R n v_{\parallel r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R n v_{\parallel \theta}) \right] \quad (36)$$

このようにして計算する発散項は17式および18式における発散項にも用いる。(3)式の温度保存則における発散項については

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{n} (\nabla \cdot n \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla n) \quad (37)$$

により計算する。

(15)式および(16)式から空間電荷による電界 E_ρ を計算する場合、 ϵ_0 が非常に小さな値であるから僅かの電荷により E_ρ は極めて大きな値となる。そして数値計算上の精度から電子およびイオンの密度にある程度の差が発生するのは避けられない。したがって異常に大きな電界が発生することになり、このことがプラズマの数値計算を困難にする一つの理由になっている。この難点を避けるために通常用いられる方法は $n_e = n_i$ とおいて $E_\rho = 0$ と仮定することであるが、この方法によると密度計算においてどのようなドリフト速度を用いるかが問題となる。このモデルでは空間電荷密度を次の式により

与えることとする。

$$\rho = q_e n_e + q_i n_i \quad (38)$$

$$\rho_c = c_\rho \rho \quad (39)$$

ここで c_ρ はプログラムの安定性を改善するために導入する人為的な安定化係数であって1より小さい正の数である。そして数値計算が安定な範囲で大きく選ぶ。スカラ・ポテンシャル V は Green 関数 G_p から計算する。この Green 関数を求めるときの境界条件は副半径 a において

$$G_p(a, \theta) = 0 \quad (40)$$

と仮定する。

プラズマ粒子は水素原子に電子が衝突して発生するものとし、粒子発生率は次の式によって近似する。

$$S = 2.5 \times 10^{-14} \exp\left(-\frac{16.95 e_n}{kT_e}\right) n_e n_n \quad (41)$$

なお使用単位はMKS 有理系とし、(41)式における kT_e の単位はjoule である。 e_n は電子電荷の絶対値を表わすものとし、単位を除いた 1.602×10^{-19} である。

4. 差分近似

輸送方程式の偏微係数を単純に中央有限差分法で置き換えて数値計算すると不安定になることはよく知られている。そこでこれを安定化するための各種の方法〔4〕が開発されてきており、Sod〔5〕はこれらの方法の性能を比較計算した結果について報告している。しかしここで扱うMHDモデルではプラズマ内部の自己および相互電磁誘導の効果を考慮しているので、電子に関する運動量方程式を計算する場合、連立一次方程式を解かなければならない。したがって偏微係数は比較的簡単な陽公式の差分近似法で表わすことが望ましい。ここで用いる偏微係数の近似は以下に述べるように upstream-downstream 差分法〔6〕を变形して精度を改善したものである。偏微分方程式を

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial r} \quad (42)$$

とすれば、有限差分近似式は $v(j) > 0$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}_{r=j \Delta r} &\simeq -v(j) \left\{ (1-c) \frac{f(j+1) - f(j-1)}{2 \Delta r} + c \frac{f(j) - f(j-1)}{\Delta r} \right\} \\ &= -\frac{v(j)}{2 \Delta r} \left\{ (1-c)f(j+1) + 2cf(j) - (1+c)f(j-1) \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

$v(j) < 0$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}_{r=j \Delta r} &\simeq -v(j) \left\{ (1-c) \frac{f(j+1) - f(j-1)}{2 \Delta r} + c \frac{f(j+1) - f(j)}{\Delta r} \right\} \\ &= -\frac{v(j)}{2 \Delta r} \left\{ (1+c)f(j+1) - 2cf(j) - (1-c)f(j-1) \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

ここで

$$0 \leq c \leq 1$$

である。あとで示す計算例では $c = 0.01$ としている。〔43〕式、〔44〕式のいずれにおいても分割区における時定数が正になるように選ぶ。 θ 方向についても同様である。このようにして差分近似式における局所的安定性と共に計算精度もある程度改善することができる。この方法は〔1〕式～〔3〕式における発散および輸送項の計算に用いる。

時間積分については Lax〔7〕が用いた簡単な安定性改善法に上と同様の重み係数を導入して、プラズマ変数の空間分布の平滑化によりプログラムの安定化を図る。偏微分方程式を

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F \quad (45)$$

とすれば

$$f_{\theta=k} \Delta \theta \Big|_{t=(\ell+1)\Delta t} \simeq (1-2c_{\theta})f_{k,\ell} + c_{\theta}(f_{k-1,\ell} + f_{k+1,\ell}) + \Delta t F_{k,\ell} \quad (46)$$

$$0 \leq c_{\theta} \leq \frac{1}{2}$$

数値計算例の場合には、 $c_{\theta} = 3 \times 10^{-2}$ または $c_{\theta} = 0$ とし、分割区分ごとに二つの値を交互に用いる。そして時間ステップごとに上の値を入れ換える。ただし中心点においては常に $c_{\theta} = 0$ とする。なおこの方法は人為的な拡散項を挿入したもので θ 方向の平滑化のみに用いる。

5. 数 値 計 算

このMHDモデルが想定するトカマク型プラズマ実験装置は表1に示すような比較的小型の装置である。計算点の数は副半径上の数を除外して101点である。(1)式~(3)式の偏微分方程式を数値計算するための境界条件としては $r = a$ における値を次のように設定する。

$$\left. \begin{aligned} n(a, \theta, t) &= 0 \\ v(a, \theta, t) &= 0 \\ kT(a, \theta, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

初期条件としては次の分布を任意に設定する。

$$n = n_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (48)$$

$$v_{11\varphi} = v_\varphi = v_{\varphi_0} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (49)$$

$$kT = kT_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (50)$$

ここで n_0, v_{φ_0}, kT_0 はいずれも $r = 0$ における値でイオンおよび電子それぞれについて表2のように設定する。中性粒子密度は時間変化しないものとし、次の分布を仮定する。

$$n_n = n_{n_0} \left\{ 1 - (1 - c_n) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (51)$$

ここで n_{n_0} は $r = 0$ における値、 c_n は $r = a$ における値を設定するための定数である。なお便宜上プラズマ粒子損失率は $L = S$ としている。

Table 1 Constants of MHD model

major radius	R_0 (m)	1
minor radius	a (m)	0.1
number of meshes in r	j_m	6
number of meshes in θ	k_m	20
time step	Δt (s)	10^{-7}

Table 2 Initial values, coefficients and constants

electron density	n_{e0} (rec/m ³) ¹	1
electron velocity	$v_{e\phi 0}$ (m/s)	-3×10^5
electron temperature	kT_{e0} (eV)	200
ion density ²	n_{i0} (rec/m ³) ¹	1
ion velocity	$v_{i\phi 0}$ (m/s)	500
ion temperature	kT_{i0} (eV)	40
neutral particle density	n_{n0} (rec/m ³) ¹	10^{-4}
applied electric field	$E_{\phi 0}$ (V/m)	0.5
toroidal magnetic field density	$B_{\phi 0}$ (T)	4.4
vertical magnetic field density	B_V (T)	3.2×10^{-3}
horizontal magnetic field density	B_H (T)	0
coulomb logarithm	$\ln A$	17
effective ionic charge	\bar{Z}	3
profile coefficient of neutral particle density	c_n	30
stabilizing coefficient of space charge density	c_ρ	5×10^{-4}
stabilizing coefficient of spatial derivative	c	10^{-2}
smoothing coefficient	c_θ	3×10^{-2}

note 1 : n is shown by the reciprocal electron charge number unit

(1 rec = 6.2422×10^{18}).

note 2 : The H⁺ ion is assumed.

(a) 粒子密度

図2は電子密度について、図3はイオン密度について中心点を通る横断面上の空間分布の時間変化を示したものである。時間変化の間隔は0.36msにとり、大きさは逆電子電荷量の単位で示してある。これは $6.2422 \times 10^{18} = 1 \text{rec}$ としたものである。これらの変化の様子を比べると両者はほぼ一致していることから、空間電界の効果が利いて中性プラズマを作ろうとする作用の働いていることが見てとれる。また時間の経過と共に粒子は中心部から周辺部へ移動して行き、粒子密度は中心部で減少するのに伴って周辺部で増大している。この数値計算の精度を知る一つの目安としてプラズマ粒子総量の時間変化の様子を電子およびイオンそれぞれについて図5に示す。計算条件として前記のように $L=S$ としているから粒子密度をトラス全体にわたり体積積分した総量は不変でなければ

ならない。しかるに図5で見ると電子については初期値 $9.87 \times 10^{-2} \text{ rec}$ から最終値 $8.77 \times 10^{-2} \text{ rec}$ まで時間 5.04 ms の間に 11.1% の減少が見られる。イオンについてもほぼ同様である。

これらの値から指数減衰率（時定数）を単純に計算すると $\tau = 4.26 \text{ ms}$ で、粒子閉じ込め時間より数倍大きい程度であるからこの精度は決して充分なものではなく、数値計算法と共に改善の余地が大きいことを示している。このプラズマ粒子総量の減衰はB0式、B1式およびB6式に示す発散項の数値計算においてr方向偏微係数の境界点に対する補正処理をおこなっていないために生ずる誤差が最も大きな原因である。他方電子およびイオン粒子それぞれの総量の乗離の誤差は小さく見えるが、空間電荷による電界はB9式の安定化係数 c_ρ を導入してもなお非常に大きな値になる。 c_ρ を表2の 5×10^{-4} よりさらに大きくとるとこの乗離巾は短縮されるがプログラムの安定性が悪くなる。 c_ρ は1より非常に小さい数であるから粒子密度の速い変化に対してはプラズマ中性化の機能が充分作用せず、この面からの誤差も大きくなる。図4は空間電荷密度 ρ の変化の様態を示したもので、ゆるやかな時間振動の様子が見てとれる。 n_e と n_i は近い値であるからこれらの差から計算される ρ は変化分が際立って現われる。

(b) ドリフト速度

図7は電子の、図11はイオンの半径方向速度について時間・空間変化を示したものである。 $r > 0$ では $\theta = 0$ の半径上の値を、また便宜上 $r < 0$ では $\theta = \pi$ の半径上の値を示し、後者の値は正負を逆に描いている。言い換えれば図1のトラス断面を直角座標で考え、外向き（右向き）の値を正、内向き（左向き）の値を負としている。さて終端時刻における v_r の局所最大値は約 100 m/s にも達している。 v_r はプラズマ位置調整用磁束密度 B_v によって影響されるし、また $v_{\perp E r}$ 、 $v_{\perp p r}$ および $v_{\parallel r}$ の間の微妙な平衡関係の結果として得られる値である。したがって $v_{\perp E r}$ に大きな計算誤差があれば v_r も相応の影響を受けよう。空間電荷による電界をさらに小さくできれば精度改善が図れるが、しかし $v_{\perp E r}$ は電子の $v_{\perp p r}$ と同じ程度の大きさであって、極めて大きな誤差というほどではない。

トカマク実験データから推定される粒子の半径方向輸送速度は $\tau_p = 10 \text{ ms}$ を仮定し、 $r = a/2$ の位置で次の式

$$D = \frac{a^2}{5.8 \tau_p}, \quad v_r = -\frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial r}, \quad n = n_0 \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (51)$$

を使って計算すると $v_r = 2.7 \text{ m/s}$ となる。この推定値をモデル計算の値と比較するためには、任意の一点における v_r の計算値よりもプラズマ内部の任意の曲面を通過する粒子束から計算される平均の輸送速度を用いる方が適切である。そこでr方向の平均輸送速度 \bar{v}_r を次の式

$$\begin{aligned} \bar{v}_r &\equiv \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} n v_r r d\theta R d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} n r d\theta R d\varphi} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} (R_0 + r \cos \theta) n v_r d\theta}{\int_0^{2\pi} (R_0 + r \cos \theta) n d\theta} \quad (52) \end{aligned}$$

によって定義し、r座標の関数として描いた結果を図6に示す。電子およびイオンの \bar{v}_r はrによって多少の上下変動はあるものゝ両粒子共ほぼ近い速度で中心部から周辺部へ移動して行くことが分る。

また $r = \frac{a}{2}$ における \bar{v}_r は先に述べた実験値からの推定輸送速度 $v_r = 2.7 \text{ m/s}$ に極めて近い値であることが分る。なお図6で $r = a$ のとき $\bar{v}_r = 0$ となっているのは $v_r(a=0)$ と仮定していることによるもので、このため図2および図3に見るように中心部から移動して来た粒子は逃げ場がなくて周辺部に蓄積していく。

θ 方向のドリフト速度は図8および図12に示すように変化する。こゝで前と同様 $r < 0$ では $\theta = \pi$ の半径上の値を正負逆にして表示している。すなわち直角座標で考え上向きの値を正、下向きの値を負としている。 $v_{e\theta}$ は計算の始めの段階で流れの方向を逆転させながら振動するが、図8に見るようにおゝむねトロイダル軸を中心として正方向に、他方図12の $v_{i\theta}$ は負方向に回転する流れを示している。この流れは位置により異なるが主として $v_{\perp p\theta}$ のドリフトに基づくものである。比較のため $r - \theta$ 平面における電子の流れの変化の様子を図9に示す。これは計算の前半における状態を示すもので、(d)~(f)はそれぞれ図7、図8の $LT = 1, 3, 6$ に対応している。(a)~(c)では流れの方向が急激に変わる様子を見せるが、 $t = 0.24 \text{ ms}$ 以後はおゝむね同じ模様の流れ方である。Bateman等[5]や Hicks等[1]は速度の流れ図において m の高次モードが発生することを示しているが、この計算においては明確な形の複数の螺旋流は見られない。この理由は v_{\perp} を計算するとき時間微分を無視していること、高次モードの減衰の速いこと、平滑化係数 c_{θ} の導入等が原因しているものと思われる。

図10に示す $v_{e\varphi}$ は初期過渡状態のあと時間の経過と共に中心部で増大して行く一方図13の $v_{i\varphi}$ は中心部で負の向きに、周辺部で正の向きに流れている。この理由は(18式)に見るように電子・イオン間衝突の運動量伝達における $v_{ie} v_{ell\varphi}$ の効果によるものと思われる。電流密度 i_{φ} は図14に示すように中心部で増大するが、それでもプラズマ電流全体としては終端時刻で約 4 kA に過ぎない。実験データでは 40 kA 程度は流されているから、この差は主として電子密度が小さいことによるものである。

(c) 温度

電子の中心温度も図15のように時間と共に上昇するが、電子密度は減衰するので圧力としてはその分相殺されて十分な大きさにならない。中心部の終端時刻で $n_{e0} = 0.734 \text{ rec/m}^3$, $kT_{e0} = 45 \text{ eV}$ である。一方実験データでは $n_{e0} = 6 \text{ rec/m}^3$, $kT_{e0} = 1000 \text{ eV}$ 程度が達成されているから、圧力で比較して10倍以上の開きがある。このモデルにはなお改善すべき点が多いが、その一つは中心部の電子温度が 500 eV を越えた所でプログラム上の不安定を起すこと、また電子密度を大きくとると平衡がとりにくくなり、やはり不安定になることである。しかしプラズマ粒子密度が時間変化しないものとするればこれを大きく設定することは可能である。

(d) 電磁界

磁束密度は図17および図18に見るように B_r, B_{θ} 共時間的、空間的に安定した形で緩やかに変化する。 B_r に比べると B_{θ} はおゝよそ一桁以上大きいから B_{θ} はほぼ同心円状に分布する様子が図18から推定されよう。この報告書では示していないが、磁束密度の $r - \theta$ 平面ベクトル図で計算の過程を通じて見られるのは主としてプラズマ位置の偏心によるわずかの $m = 1$ モードのみで、磁気島は見られない。

すでに述べたようにこの計算例では電子密度、したがって電流密度が小さいのでプラズマ位置調整用磁束密度 B_v も通常トカマク実験で用いられる値の約 $1/10$ と小さく設定されている。 B_H は B_r に比べさらに小さい値で充分なのでこの計算では $B_H = 0$ と設定している。電流分布の緩やかな時間変化に対応して B_v および B_H をフィードバック制御する方式の検討は興味ある課題とされている。

プログラムの精度、安定性、計算時間等をさらに改善すればこのMHDモデルの応用としてこのような制御方式のシミュレーション研究も可能になる。

モデル計算における E_r は図19に見られるように数千V/mにも達する大きな電界となっている。これは主として $E \times B$ ドリフトを通して v_θ に影響している。図20の E_θ は E_r より大略1桁小さい値ではあるが、それでもやはり異常に大きな値である。トカマク実験ではプラズマ内部にこのような大きな電界は測定されていないから、このMHDモデルにおける n_e および n_i の中和作用がなお不十分であることを示している。表2に示す c_ρ の値を大きくすれば中和作用が一層強く働いてこれらの電界は小さくなる傾向を示すが、一方プログラムの不安定化の原因となる。この点を改善するには時間ステップ Δt をさらに小さくするのも一つの方法であるが、これは計算の所要時間を長くするので好ましくない。

6. ま と め

(1) 粒子密度減衰に見られるようにこのMHDモデルにおける計算精度を悪化させている最も大きな原因は質量保存則が保持されていない点にある。この計算精度を改善するためには発散項における r 方向偏微係数の計算に対して境界点の補正処理を行う必要がある。また精度を試験するためこのモデルではプラズマ粒子の発生および損失の割合を等しいと仮定しているが、実験データと合わせるにはプラズマ断面周辺部または壁面における粒子損失を考慮することが必要である。

(2) 空間電荷による電界は実験装置と異なり非常に大きな値となる。しかしこのためモデルの精度が極端に悪化するほどでもない。電界を小さくするには安定化係数 c_ϕ を1に近づければよいがプログラムの安定上限界がある。

(3) 半径方向の局所的輸送速度は比較的大きな値にもかかわらず、平均輸送速度はトカマク実験装置の閉じ込め時間から推定される輸送速度に極めて近い値を示す。

(4) 他のMHDモデルと異なり速度ベクトルに $m=2$ 以上の明確な螺旋流は見られない。また磁束密度ベクトルに磁気島も見られない。

(5) 数値計算例では $n_{e0} = 1 \text{ rec}/\text{m}^3$ と初期値を設定しているが、この値を大きくすると位置平衡がとりにくくなり、粒子密度の減衰が大きくなる。またプログラム上の不安定原因ともなる。電子温度については 500 eV を越すとやはりプログラム上の不安定性が現われる。この不安定性は数値計算上における時間ステップや空間分割区分の大きさに関係していて、プラズマ断面中心部で起り易い。実験データと比較して考えるとモデルのプラズマ圧力はなお数十倍の向上が必要である。

(6) この数値計算にはFACOM-M200を用い、時間ステップ数45600回でCPU時間59分を要している。特に $v_{e\parallel\phi}$ の計算に相互インダクタンス効果を考慮したので、101行101列の定係数連立一次方程式を解くのに多くの時間を費やしている。プログラムの精度向上、安定性改善と共に計算時間短縮も重要な課題である。

参 考 文 献

- ① K.V. Roberts, D.E. Potter : "Methods in Computational Physics", (Eds, B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg), Academic Press, New York, 9, 339 (1970)
- ② J.U. Brackbill : *ibid.*, 16, 1 (1976)
- ③ J. Killeen : "Physics of Hot Plasmas", (Eds, B.J. Rye, J.C. Taylor), Oliver & Boyd, Edinburgh 202 (1970) ; UCRL-73038 (Feb. 1971) ; Nuclear Fusion 16, 841 (1976) ; UCRL-85033 (Oct. 1980)
- ④ J.A. Dibiase, J. Killeen : J. Comput. Phys. 24, 158 (1977)
- ⑤ G. Bateman, W. Schneider, W. Grossmann : Nuclear Fusion 14, 669 (1974)
- ⑥ W. Schneider, G. Bateman : "5th Conf. Proc. on PP & CNFR 1974, Tokyo", IAEA-CN-33/A12-1, 1, 429 (1975)
- ⑦ D. Schnack, J. Killeen : Nuclear Fusion, 19, 877 (1979)
- ⑧ D. Schnack, J. Killeen : J. Comput. Phys. 35, 110 (1980)
- ⑨ C.H. Finan III : UCRL-53086 (Dec. 1980)
- ⑩ A. Sykes, J.A. Wesson : Phys. Rev. Lett., 44, 1215 (1980)
- ⑪ H.R. Hicks, B. Carreras, J.A. Holmes, B.V. Waddell : ORNL/TM-6096 (Dec. 1977)
- ⑫ D. Dimock, D. Eckhardt, H. Eubank et al. : "4th Conf. Proc. on PP & CNFR 1971, Madison", IAEA-CN-28/C-9, 1, 451 (1971) ; MATT-852 (July 1971)
- ⑬ B.V. Waddell, B. Carreras, H.R. Hicks, J.A. Holmes, D.K. Lee : Phys. Rev. Lett. 41, 1386 (1978)
- ⑭ R.D. Richtmyer, K.W. Morton : "Difference Methods for Initial-Value Problems", Interscience Publishers, New York, (1967)
- ⑮ G.A. Sod : J. Comput. Phys., 27, 1 (1978)
- ⑯ K. Hain, G. Hain, K.V. Roberts, S.J. Roberts, W. Köppendörfer : Z. Naturf., 15a, 1039 (1960)
- ⑰ P.D. Lax : Commun. Pure Appl. Math., 7, 159 (1954)

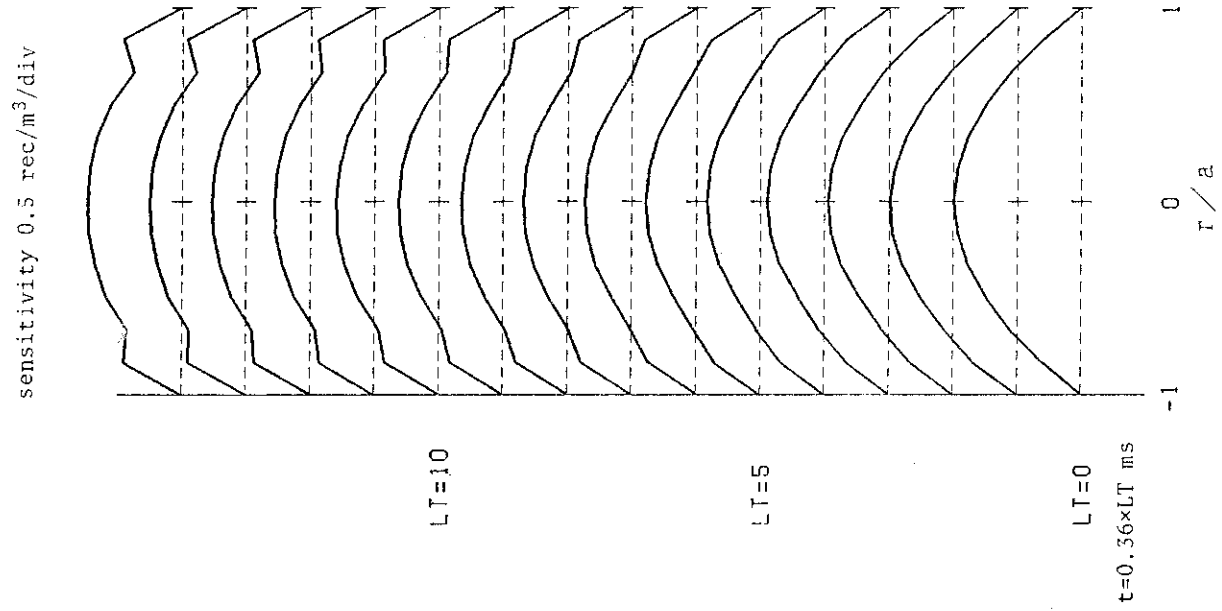


Fig. 3 Time evolution of n_i profile

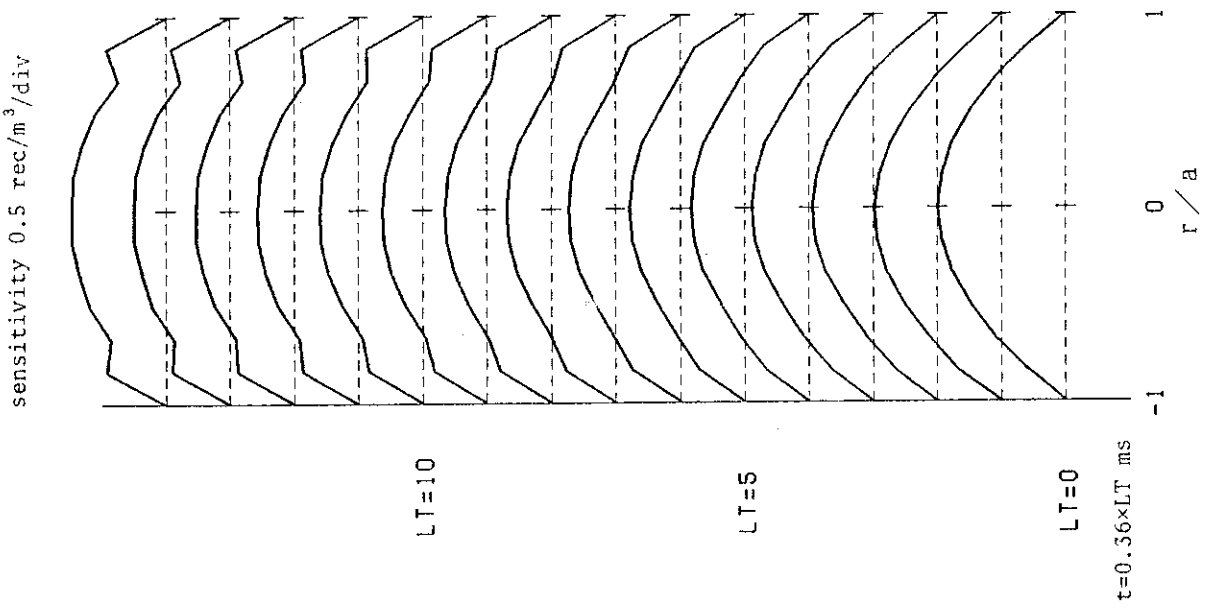


Fig. 2 Time evolution of n_e profile

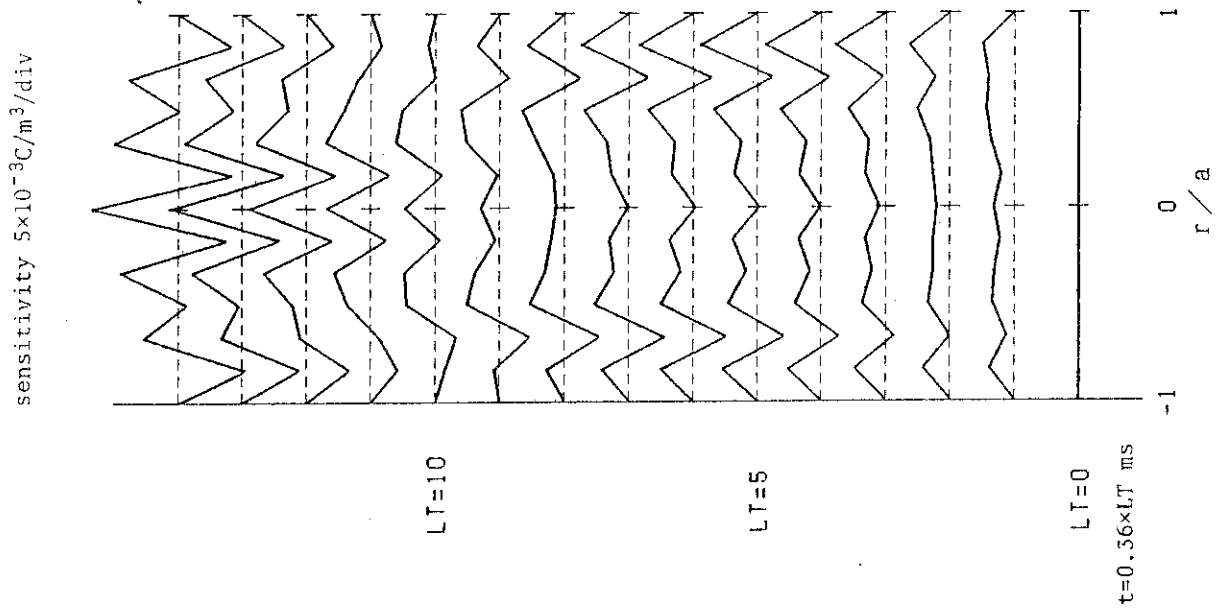


Fig. 4 Time evolution of ρ profile

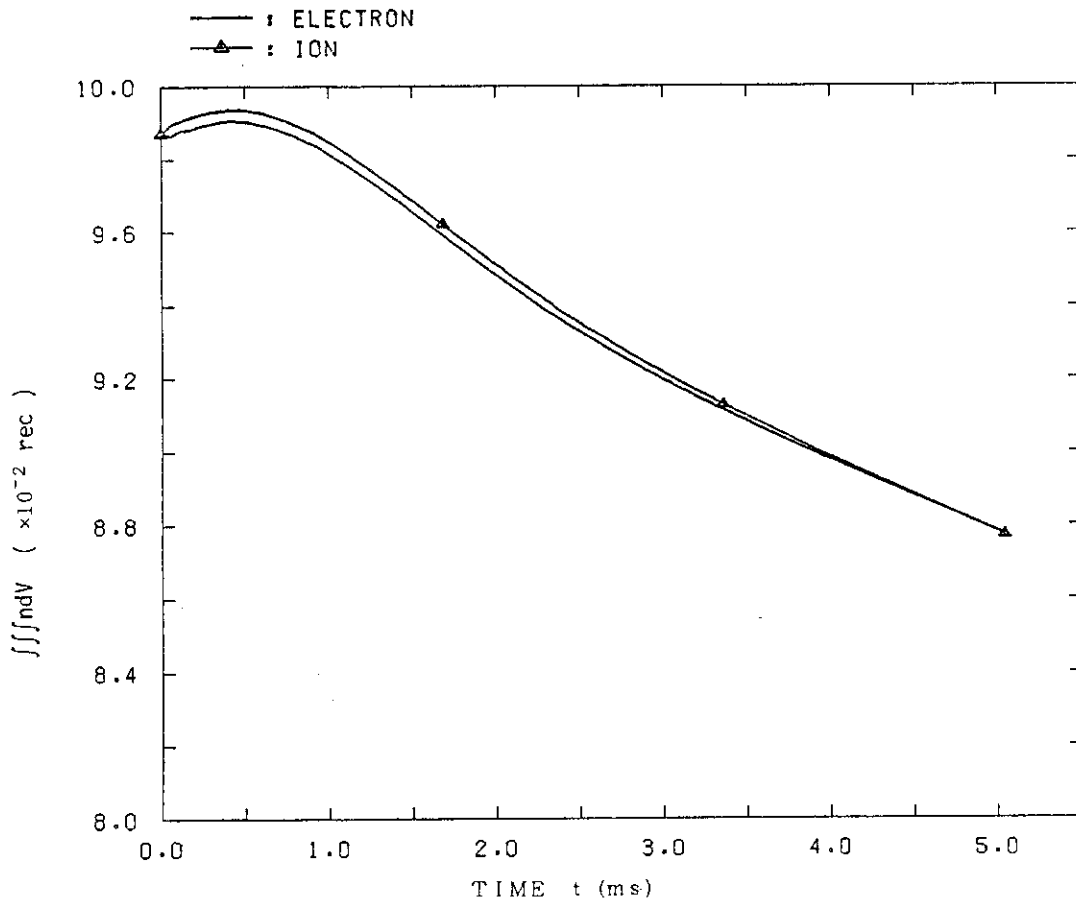


Fig.5 Time evolutions of the total number of plasma constituents

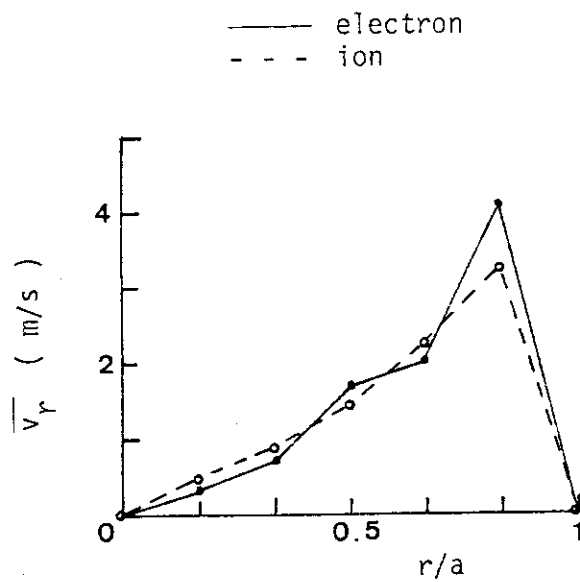


Fig.6 Average radial transport velocities of plasma constituents

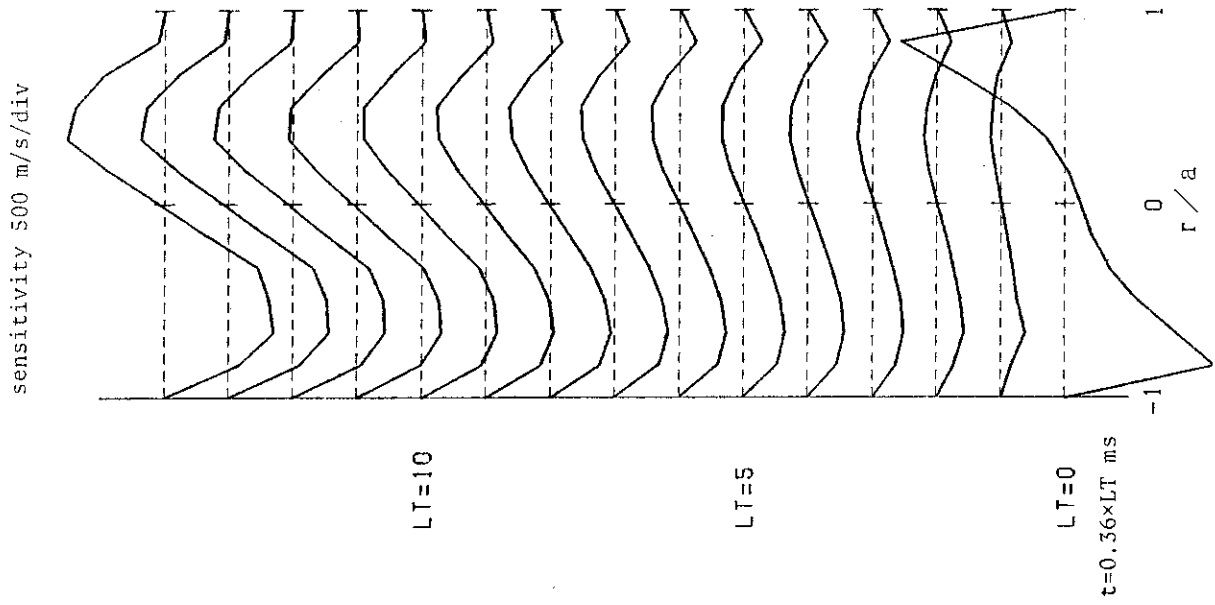


Fig. 8 Time evolution of $v_{e\theta}$ profile

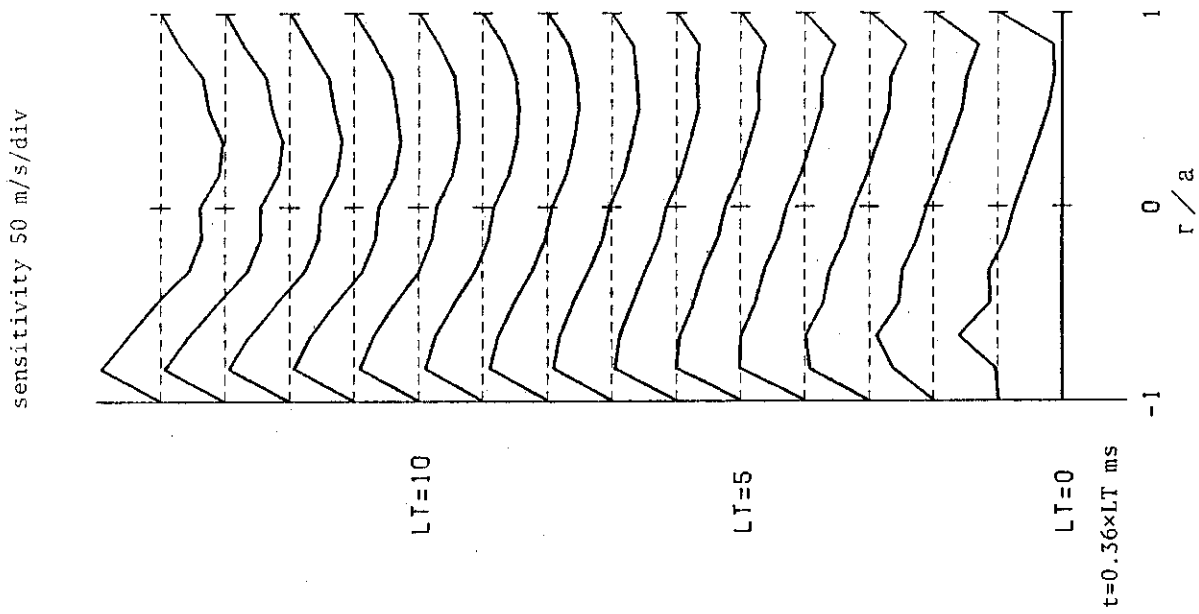
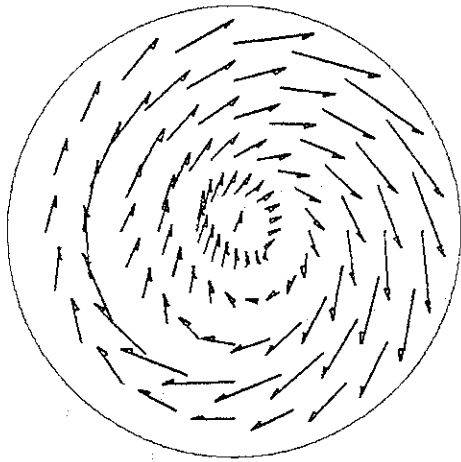
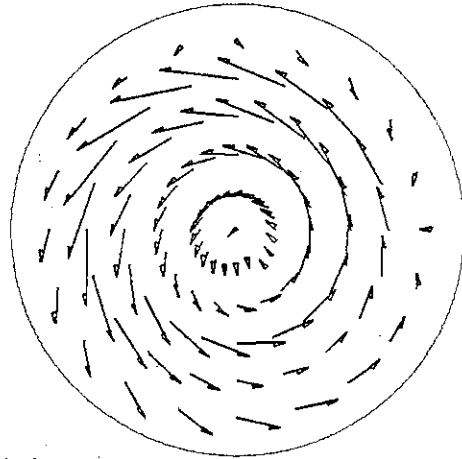


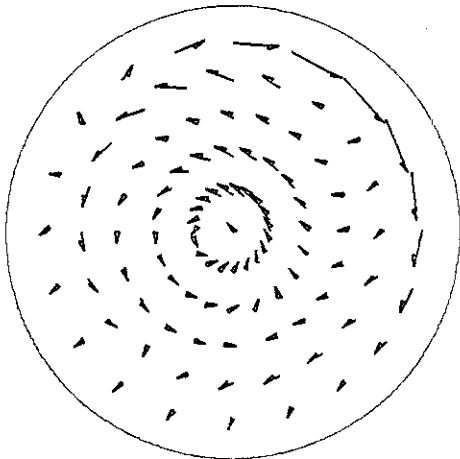
Fig. 7 Time evolution of v_{er} profile



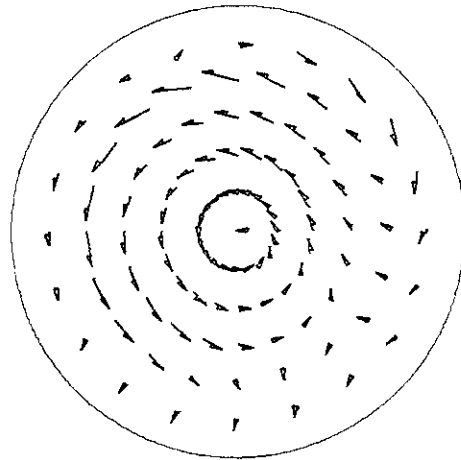
(a) $t=0.06\text{ms}$



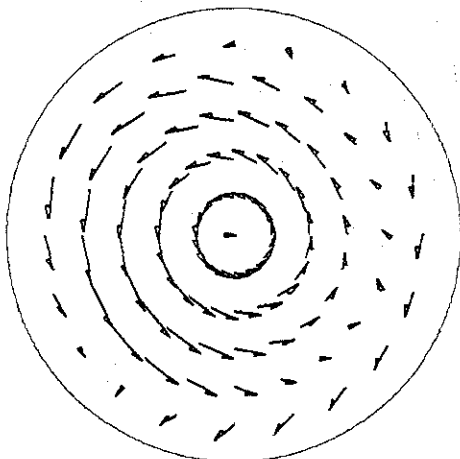
(b) $t=0.12\text{ms}$



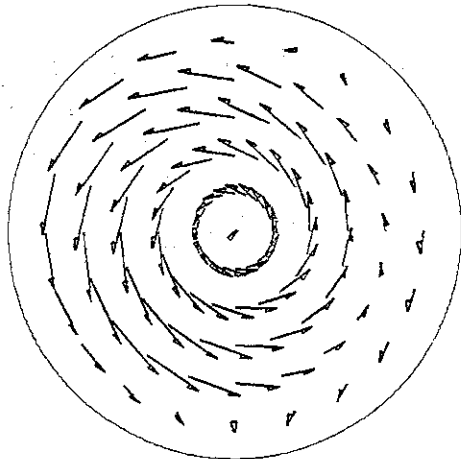
(c) $t=0.18\text{ms}$



(d) $t=0.36\text{ms}$



(e) $t=1.08\text{ms}$



(f) $t=2.16\text{ms}$

Fig. 9 Vector plots of v_{er} and $v_{e\theta}$ (40m/s/mm of arrow length)

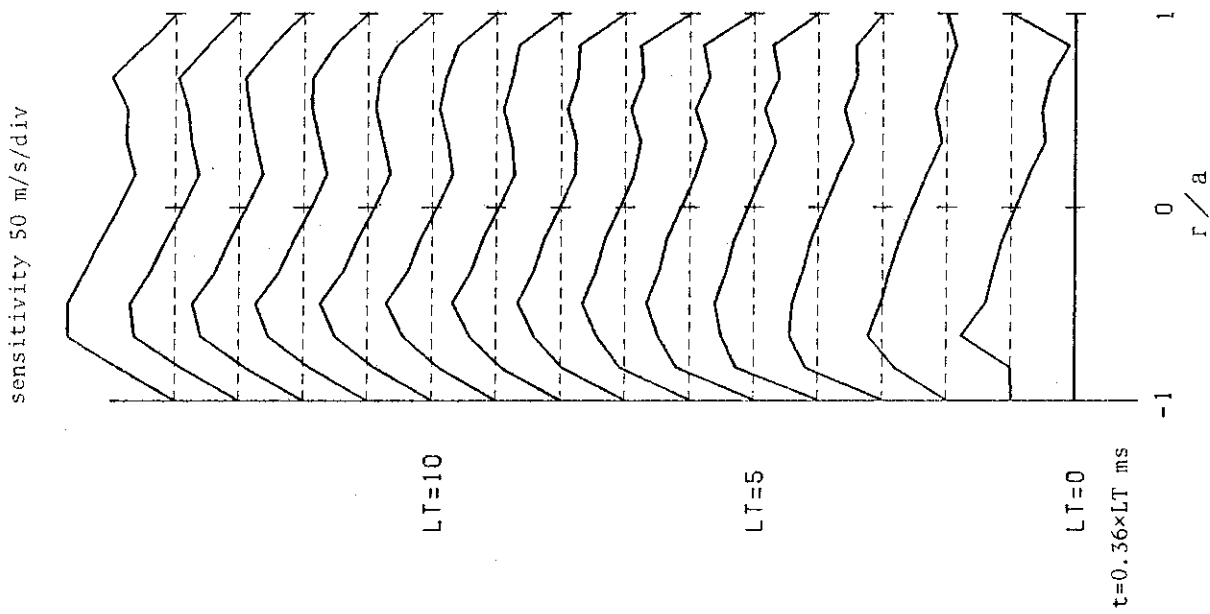


Fig. 11 Time evolution of v_{Ir} profile

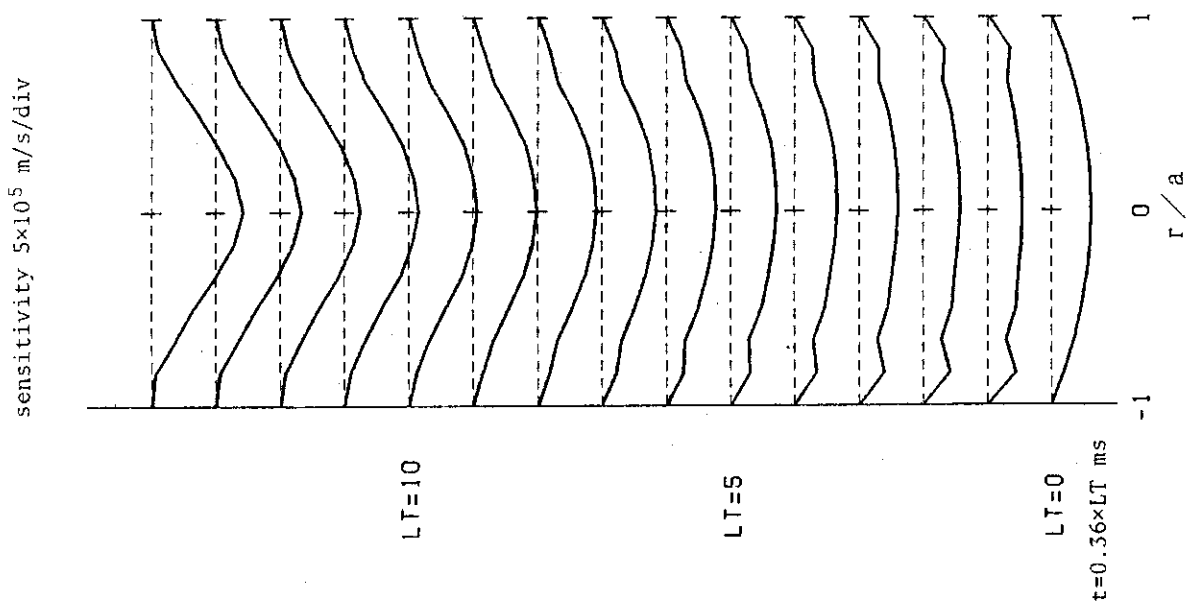


Fig. 10 Time evolution of $v_{e\phi}$ profile

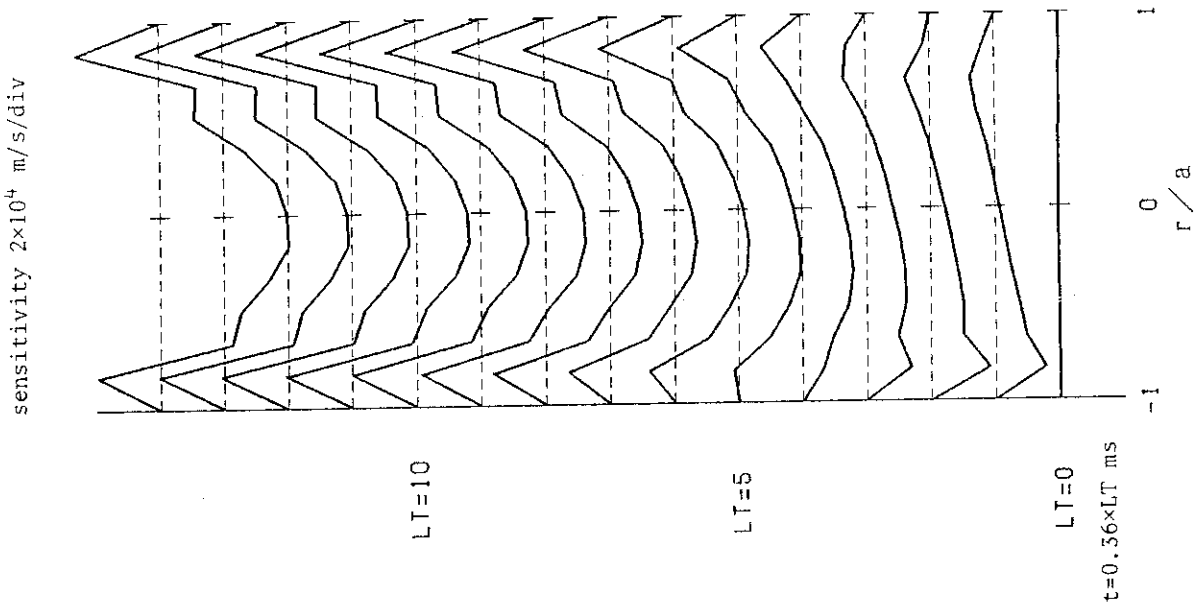


Fig. 13 Time evolution of $v_{i\phi}$ profile

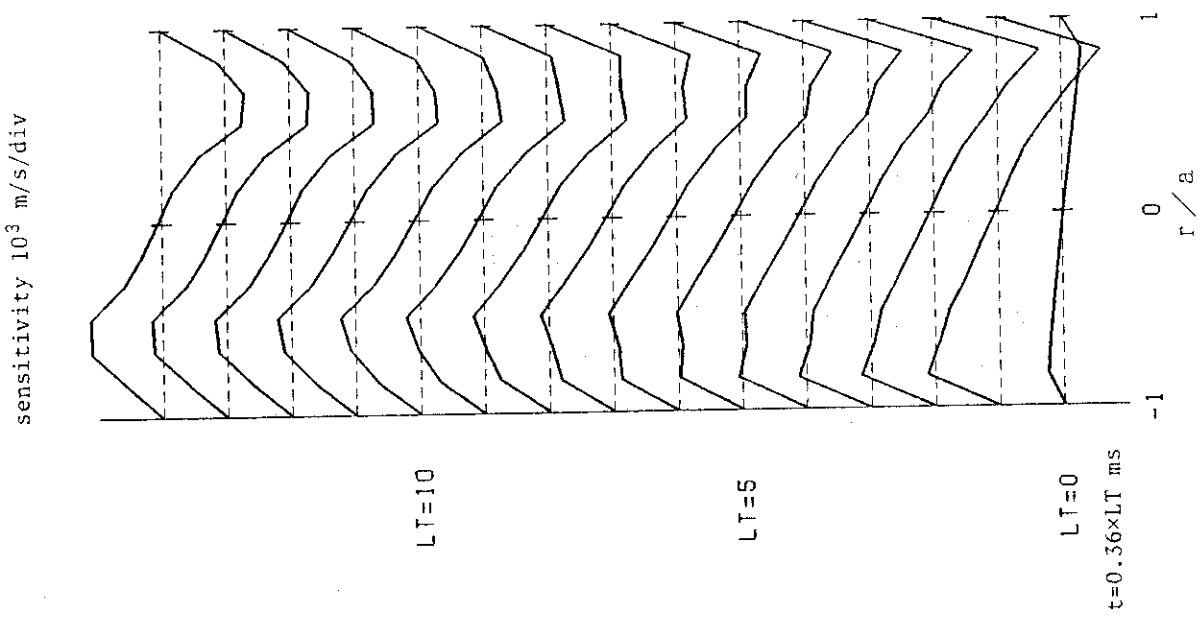


Fig. 12 Time evolution of $v_{i\theta}$ profile

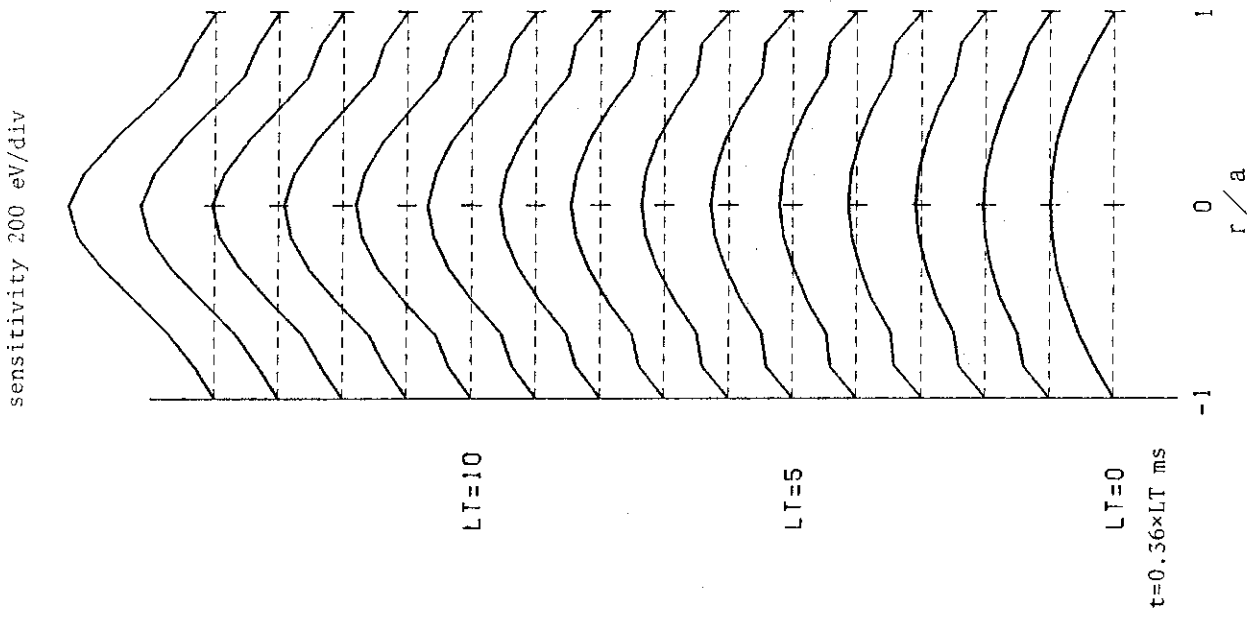


Fig. 15 Time evolution of kT_e profile

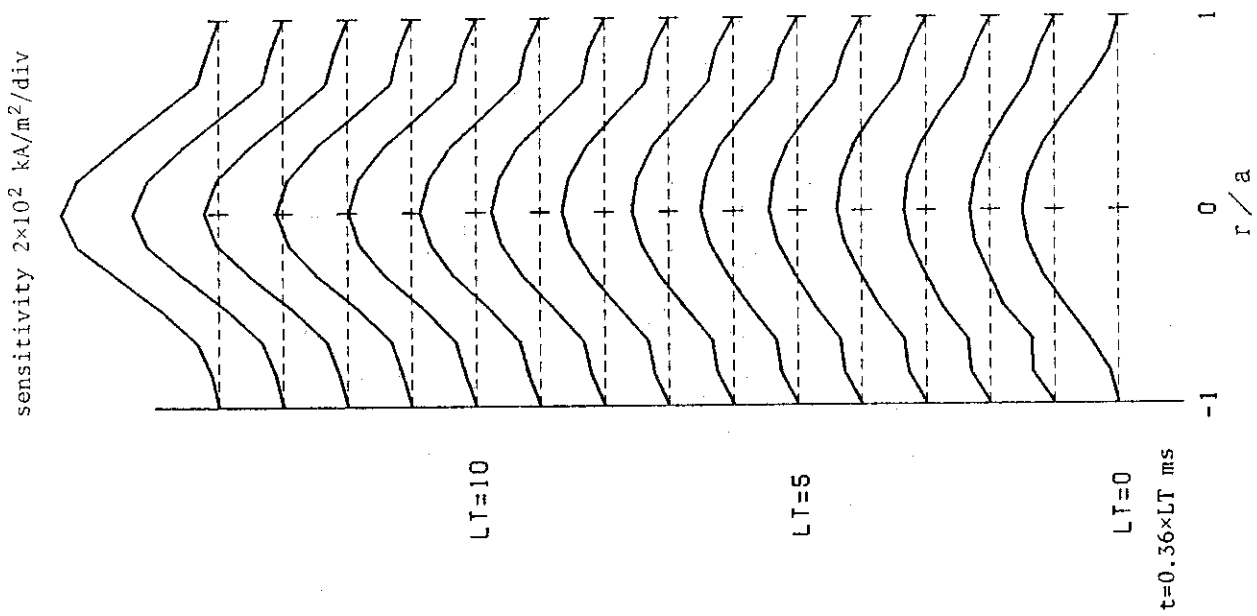


Fig. 14 Time evolution of i_ϕ profile

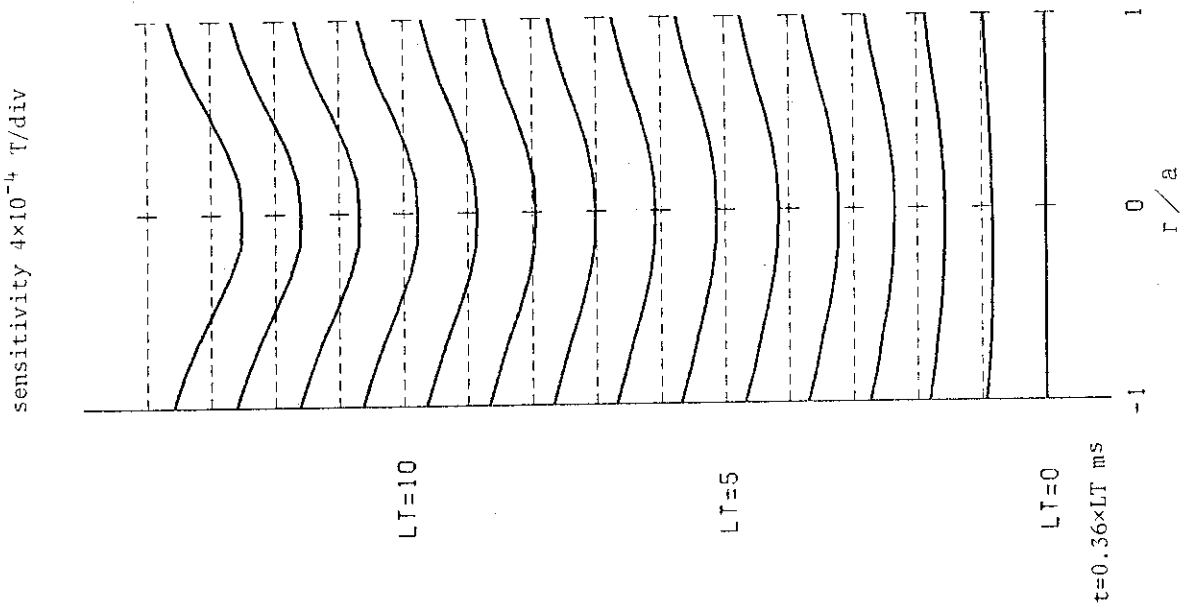


Fig. 17 Time evolution of B_r profile

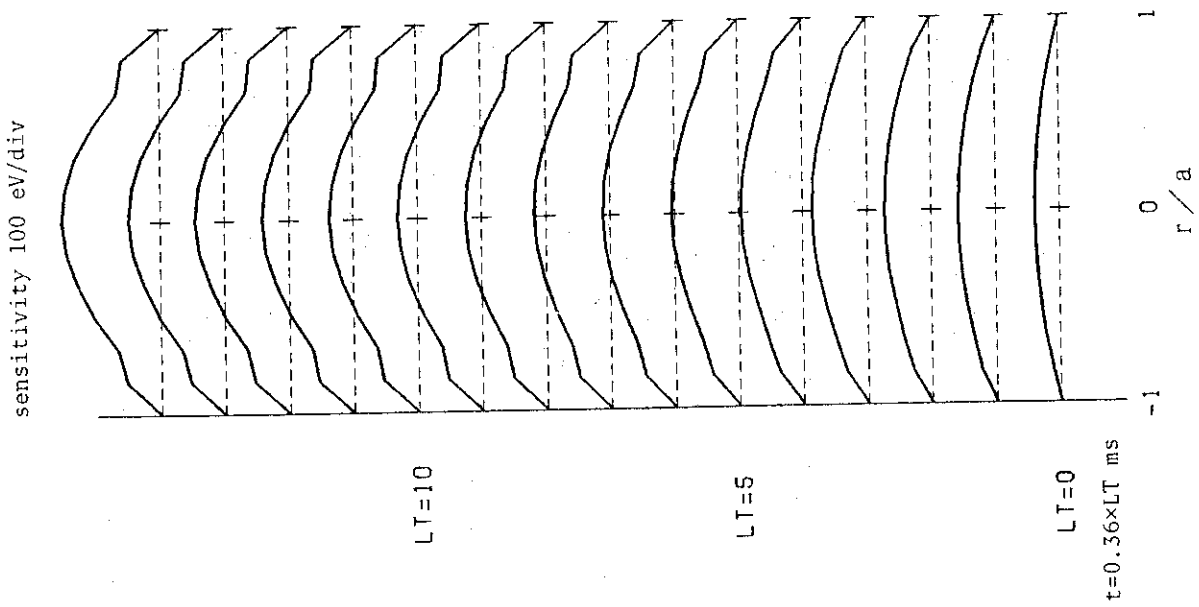


Fig. 16 Time evolution of kT_i profile

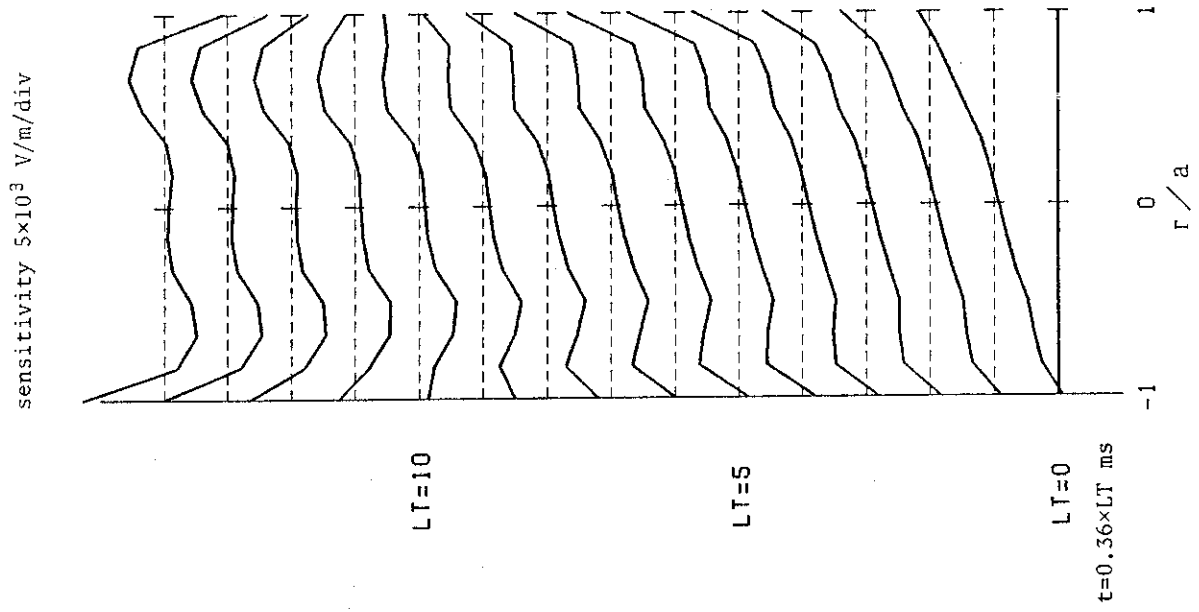


Fig. 19 Time evolution of E_r profile

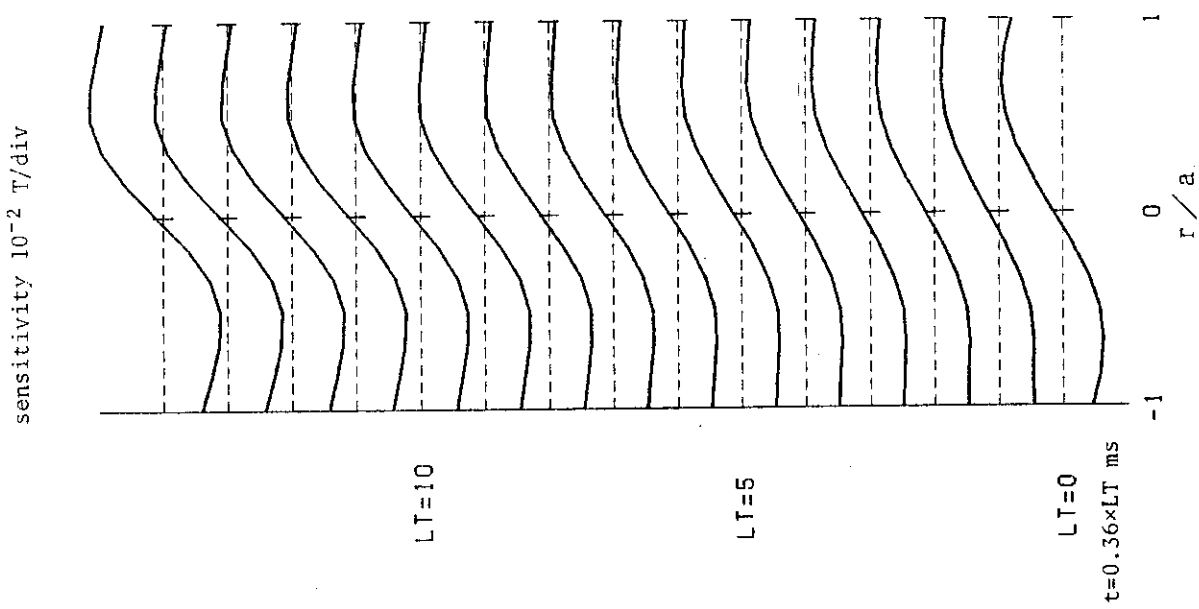


Fig. 18 Time evolution of B_θ profile

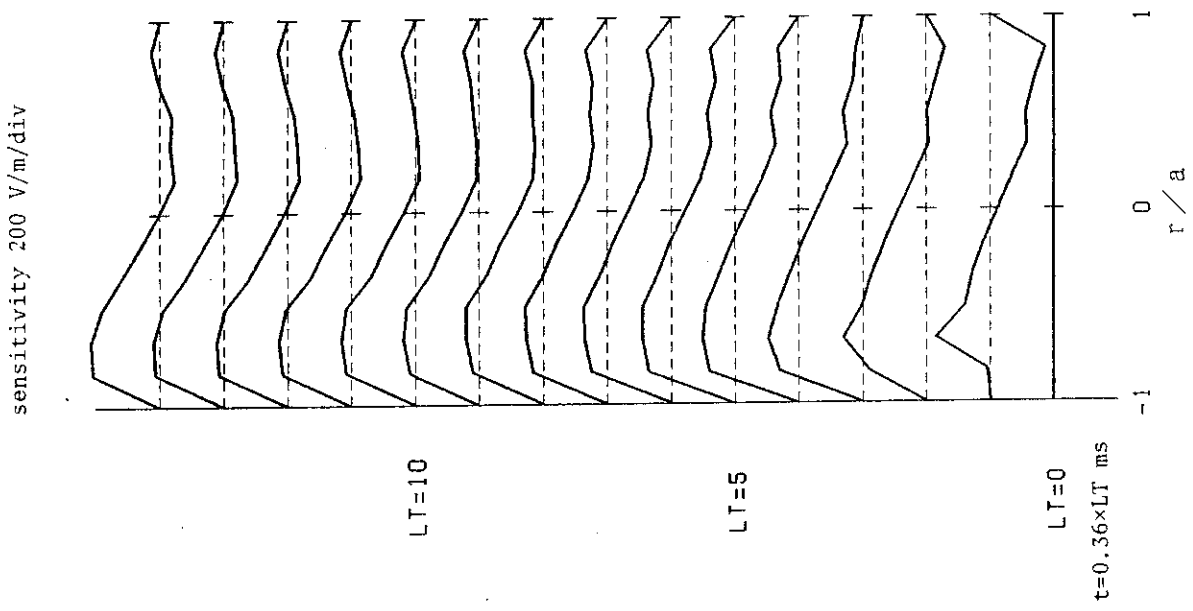


Fig. 20 Time evolution of E_θ profile