

JAERI-Research

2002-024



JP0250559



三角柱形状拡散ノード法コードにおける
収束加速法の適用性の検討

2002年11月

藤村 統一郎・奥村 啓介

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合せは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-1195 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越しください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-1195 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 2002

編集兼発行 日本原子力研究所

三角柱形状拡散ノード法コードにおける収束加速法の適用性の検討

日本原子力研究所東海研究所エネルギー・システム研究部
藤村 統一郎※・奥村 啓介

(2002年10月1日受理)

低減速スペクトル炉等の 6 角形状の炉心を解析する拡散コードの原型版を開発し、その反復解法を高速化するため、様々な収束加速法の適用性について検討した。

本 3 次元コード MOSRA-Prism は、6 角形状の炉心を正 3 角柱に分割し、その中の中性子束分布を 3 次の多項式で近似する多項式展開ノード法に基づいている。多群拡散コードとしての反復解法は、通常の内側反復法と外側反復法を採用するが、内側反復に適応的加速法、外側反復に中性子源外挿法を適用し、その有効性を確認した。

本報告書では、コードの数値解法の元となる多項式展開ノード法の定式化の概要を説明するとともに、様々なサンプル計算で得られた、収束加速法の局所的な効率および全体的な効率について検討する。また、コード開発過程で新たに導出した真空境界条件の一般的な記述法についても述べる。

Analysis of the Applicability of Acceleration Methods for a Triangular Prism Geometry Nodal Diffusion Code

Toichiro FUJIMURA * and Keisuke OKUMURA

Department of Nuclear Energy System

Tokai Research Establishment

Japan Atomic Energy Research Institute

Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received October 1, 2002)

A prototype version of a diffusion code has been developed to analyze the hexagonal core as reduced moderation reactor and the applicability of some acceleration methods have been investigated to accelerate the convergence of the iterative solution method.

The hexagonal core is divided into regular triangular prisms in the three-dimensional code MOSRA-Prism and a polynomial expansion nodal method is applied to approximate the neutron flux distribution by a cubic polynomial. The multi-group diffusion equation is solved iteratively with ordinal inner and outer iterations and the effectiveness of acceleration methods is ascertained by applying an adaptive acceleration method and a neutron source extrapolation method, respectively.

The formulation of the polynomial expansion nodal method is outlined in the report and the local and global effectiveness of the acceleration methods is discussed with various sample calculations. A new general expression of vacuum boundary condition, derived in the formulation is also described.

Keywords : Diffusion Code, Hexagonal Core, Convergence Acceleration, Polynomial Expansion Nodal Method, Inner and Outer Iterations, Sample Calculations, Vacuum Boundary Condition

* Department of Nuclear Energy System (~March, 2002)

目 次

1.はじめに	1
2.三角柱形状ノード法による拡散方程式の定式化	3
2.1 中性子束分布の展開	5
2.2 体系方程式の導出	5
2.3 境界条件の記述法	6
3.反復解法における加速法の適用	9
3.1 適応的加速法の適用	9
3.2 中性子源外挿法の適用	10
4.検証計算と検討	13
5.おわりに	20
参考文献	21
付録 A 内挿多項式の係数と中性子束パラメータの関係	22
付録 B ノードの行列方程式の要素	24

Contents

1. Introduction	1
2. Formulation of Diffusion Equation by the Triangular Prism Geometry	
Nodal Method	3
2.1 Expansion of Flux Distribution	5
2.2 Derivation of System Equation	5
2.3 Description of Boundary Conditions	6
3. Application of Acceleration Methods to the Iterative Solution Method	9
3.1 Application of Adaptive Acceleration Method	9
3.2 Application of Neutron Source Extrapolation Method	10
4. Sample Calculation and Discussions	13
5. Concluding Remarks	20
References	21
Appendix A. Relation Between the Coefficients of Interpolation Polynomial and Flux Parameters	22
Appendix B. Elements of Matrix Equation for a Node	24

1. はじめに

複雑な形状をもつ原子炉の設計や安全性の解析のためには、炉内中性子の挙動を正しく把握する必要がある。このため、従来から有限差分法による3次元コードのCITATION¹⁾ やその改良版であるVENTURE²⁾が汎用的に用いられてきた。この解法では、軽水炉のように中性子の平均自由行程が短い体系を精度良く計算するには、詳細な空間メッシュが必要となる。従って、標準的なPWRの解析や大型炉の炉心燃焼管理等の場合、現在の高速計算機をもつても、計算コストが大きくなりすぎ、得策とは言えない。

また、径方向と軸方向の中性子束分布の分離性が良いPWRの炉心計算では、詳細メッシュによる、径方向2次元計算と軸方向1次元計算をそれぞれ組み合わせて解析することもできる³⁾が、BWRのように分離性が良くない場合、3次元体系を粗メッシュ空間（ノード）に分けて高精度に計算する工夫が必要になる。このノード法の概要は、「ノード内の中性子束分布を多項式等で近似し、粗メッシュ計算による計算精度の低下を補うとともに、空間変数を大幅に減らして計算の高速化を図る」ものであるが、「多次元方程式を方向積分して、得られた1次元方程式に関数近似を適用するもの（nodal expansion method, NEM）⁴⁾」と、本コードのように、「多次元方程式における中性子束分布を直接関数近似するもの（直接展開ノード法）⁵⁾」とに大別される。前者には、適用する近似関数により、解析的ノード法、多項式展開ノード法等^{4) 6)}があるが、6角柱形状に適用すると解析精度が悪くなる問題がある。後者はこの問題を克服することが可能であり、特に任意の3角柱形状を用いればメッシュサイズを自由に変更できる利点がある。これらのノード法のそれぞれの特徴はLawrenceやTakedaのレビュー論文にまとめられている。

原研では、スーパーコンピュータ機能を活かした(x,y,z)体系高速・高精度拡散コードMOSRA-Light⁷⁾が開発されているが、これは6角集合体体系には直接適用することができない。このため、高速炉や低減速スペクトル炉等の6角形状の炉心解析には、主にCITATIONが用いられている。原研独自の高速3角柱メッシュ拡散ノード法コードを開発する手始めとして、スカラー版コードのMOSRA-Prismを開発した。本コードでは、高精度解法とされた解析的ノード法よりも収束が速く、かつ多群計算への拡張が容易である^{5) 7)}点を考慮して、3次元多項式直接展開ノード法⁵⁾を採用している。この直接展開ノード法の反復解法に対し、逐次過剰緩和（SOR）法、チェビシェフ加速法等様々な加速法^{7) 8)}の適用が考えられるが、MOSRA-Prismでは、内側反復に適応的加速法⁹⁾、外側反復に中性子源外挿法^{7) 10)}を適用した。その理由は、

- (1)多くのコードで経験したように、有効性が充分期待できること^{7)~9)}、
- (2)スーパーコンピュータ上でのベクトル化の障害にならないこと⁷⁾、
- (3)アルゴリズムが簡単でコーディングし易いこと^{7)~9)}

等である。これらの加速法の有効性を確認するため、IAEA ベンチマーク問題¹¹⁾を含む様々なサンプルについて検証計算を実施した。これらの効率は、局所的効率（着目する群の単色方程式を解くときの内側反復加速の効率）と全体的効率（多群方程式全体が収束するまでの効率）の二つの観点で評価する。

本報告書では、まずコードの数値解法の元となる 3 角柱形状を対象とした多項式展開ノード法の定式化の概要を説明するとともに、コード開発過程で新たに導出した真空境界条件の一般的な記述法について述べる。第 3 章では、適用する収束加速法のアルゴリズムについて詳述する。第 4 章では、サンプル計算を通して、加速法の局所的効率および全体的な効率について検討し、最後にまとめを行う。

2. 三角柱形状ノード法による拡散方程式の定式化

基礎方程式として、定常の多群拡散方程式を

$$- D^g(r) \nabla^2 \phi^g(r) + \sigma^g(r) \phi^g(r) = S^g(r) \quad (1)$$

と表すこととする。ここに、

D : 拡散係数

r : 位置ベクトル

σ : 除去断面積

ϕ : 中性子束

S : 中性子源

g : 着目群のインデックス

である。境界条件は、体系境界面に対し、外向きの法線ベクトルを n とするとき、

$$c^g \phi^g + d^g \frac{\partial \phi^g}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

で与えられ、

(i) 真空条件のとき $d^g = 0$

(ii) 外挿条件のとき $d^g/c^g = \text{外挿距離}$

(iii) 反射条件のとき $c^g = 0$

である¹⁾。周期条件は(2)式で表せないため、別途後述する。

正三角柱形状多群拡散方程式を扱う本コード MOSRA-Prism では、典型的な原子炉体系として、Fig. 1 の様な形状を考える。図では、x, y, z 方向にそれぞれ 5, 4, 3 層取られているが、これらの層の数は任意である。この図から明らかなように、全てのノードは全体的座標系に対する向きによって、2 つのタイプに分けられる。以下、Fig. 2 に示すように、それぞれ独自の局所座標系を用い、それに則って図のように角点や表面に名前を付け、底 (bottom) の角点の中性子束、蓋 (top) の角点の中性子束、表面平均の中性子束、ノード平均の中性子束、モーメント中性子束をそれぞれ、

$$\phi_u^b, \phi_v^b, \phi_w^b, \quad \phi_u^t, \phi_v^t, \phi_w^t, \quad \bar{\phi}_u, \bar{\phi}_v, \bar{\phi}_w, \bar{\phi}_b, \bar{\phi}_t, \quad \bar{\phi}, \tilde{\phi}_x, \tilde{\phi}_y, \tilde{\phi}_z$$

で表すことにする。ここに、モーメント中性子束は、

$$\tilde{\Phi}_x = \frac{1}{m_x} \frac{1}{V_m} \int_m x\phi dr, \quad \tilde{\Phi}_y = \frac{1}{m_y} \frac{1}{V_m} \int_m y\phi dr, \quad \tilde{\Phi}_z = \frac{1}{m_z} \frac{1}{V_m} \int_m z\phi dr,$$

$$m_x = \frac{\sqrt{3}p}{2}, \quad m_y = \frac{p}{2}, \quad m_z = q$$

で定義され、 p, q はそれぞれ正 3 角柱の辺の長さ、および高さである。

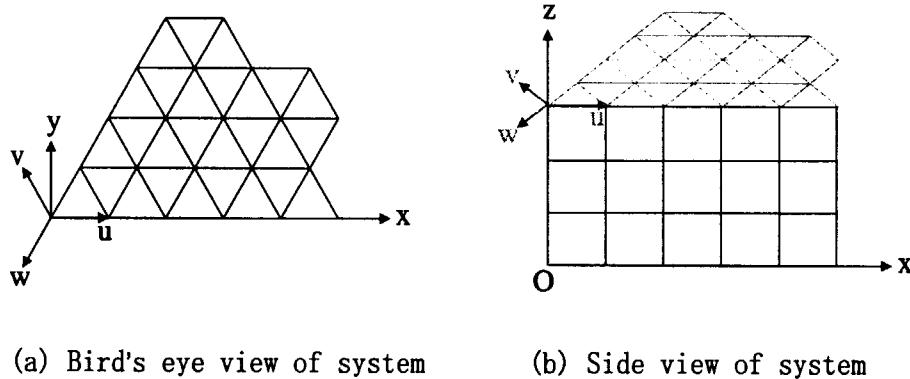


Fig. 1 Typical reactor system treated in MOSRA-Prism code

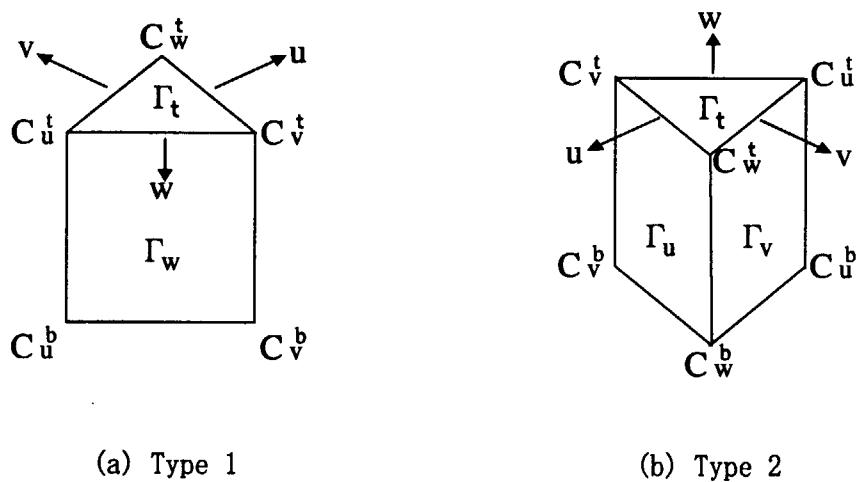


Fig. 2 Naming of local co-ordinate system, corner points and node surfaces for both types of nodes

2.1 中性子束分布の展開

三次元多項式展開ノード法では、体系を粗メッシュのノードに分割し、その中の 3 次元中性子束分布を多項式で近似する。ここでは、正 3 角柱ノードの特徴を活かして高速高精度な計算が期待できる 3 次の多項式

$$\begin{aligned}\Phi^{gm}(r) = & c_1^{gm} + c_u^{gm} u + c_v^{gm} v + c_w^{gm} w + c_z^{gm} z + c_{2u}^{gm} u^2 + c_{2v}^{gm} v^2 \\ & + c_{2w}^{gm} w^2 + c_{2z}^{gm} z^2 + c_{uz}^{gm} uz + c_{vz}^{gm} vz + c_{wz}^{gm} wz \\ & + c_{sz}^{gm} (u^2 + v^2 + w^2) z + c_{3u}^{gm} u^3 + c_{3v}^{gm} v^3 + c_{3w}^{gm} w^3 + c_{3z}^{gm} z^3\end{aligned}\quad (3)$$

を用いる⁵⁾。ここに、 u, v, w, z は Fig. 1 で与えられる、点 r の位置を示す座標であり、 m は着目するノードのインデックスである。これらのインデックスは数式の表記を簡潔にするため、自明な範囲で適宜省略される。

(3) 式より、ノード内中性子束を決定するには 17 個の係数 c を決める必要があるが、 u, v, w の間の従属関係

$$u + v + w = 0$$

により、独立な 15 個を決めればよい。これらの係数と 15 個の中性子束パラメータはノードのタイプによらず一律に関係付ける事ができるが、その導出には複雑な計算を伴うため、結果のみ付録 A に掲げておく。

2.2 体系方程式の導出

前節で述べたように、ノード内中性子束を確定するには、係数 c を決める 15 の条件を用意する必要がある。

このため、先ずあるノード境界面 Γ における平均の中性子流を

$$J_\Gamma = - \frac{1}{\Gamma} D \int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

で定義しよう。同様に、ノードの角点 C におけるノードからの漏れは、 C で交わる 3 つのノード境界面の法線ベクトル n_1, n_2, n_3 に対し、

$$L(C) = - D \left(\frac{\partial \phi}{\partial n_1} + \frac{\partial \phi}{\partial n_2} + \frac{\partial \phi}{\partial n_3} \right) |_{(C)}$$

で定義される。漏れの式は、体系内部の任意のノードの任意の角点 C を取り囲む 12 のノードに対し、

$$\sum_{m=1}^{12} L_m(C) = 0$$

を満たすので、これを漏れバランス条件 (leakage balance condition または source free condition) と呼ぶ⁵⁾。また、モーメント条件は

$$\int_m t (-D\nabla^2\phi + \sigma\phi - S) dr = 0 \quad (t=x, y, z)$$

で与えられる。以上により、15 個の条件は、6 つの角点における漏れバランス条件 (6 個)、5 つの表面における平均中性子流の連続条件 (5 個)、ノード内の中性子バランス式 (1 個)、3 方向におけるモーメント条件 (3 個) から用意できる。即ち、体系内部の任意のノード m に対し、各群ごとに 15 次の体系方程式

$$A_m^g \phi_m^g = b_m^g \quad (4)$$

を得る。この行列方程式の各要素は付録 B で与えられる。

2.3 境界条件の記述法

原子炉体系における核計算では、対称条件等を適用して、計算領域を縮小し、計算コストの削減を図ることが多い。いま、計算領域 (computational region) が Fig. 1 のようになると仮定しよう。このとき、境界条件を本文で表現したり、コード上で記述したりする便のため、Fig. 3 で示されるように、外側に延長領域 (prolonged region) や拡大領域 (extended region) を設ける。図には示されていないが、軸 (z) 方向にも拡大領域が取られている。計算領域と延長領域を併せたものは、底 (bottom) 面、蓋 (top) 面、左 (left) 面、右 (right) 面、前 (front) 面、後 (back) 面で囲まれる。これらの面に対し、本コードでは以下の境界条件を考慮する。

- (i) 底面 : 真空、外挿、反射条件
- (ii) 蓋面 : 真空、外挿、反射条件
- (iii) 左面 : 真空、外挿、反射、周期条件
- (iv) 右面 : 真空、外挿条件
- (v) 前面 : 真空、外挿、反射、周期条件
- (vi) 後面 : 真空、外挿条件

ここに、周期条件は、前面と左面の交線を軸に 60° 回転しても中性子束が不変な状態に適用する。。また、境界条件適用の複合的制約として

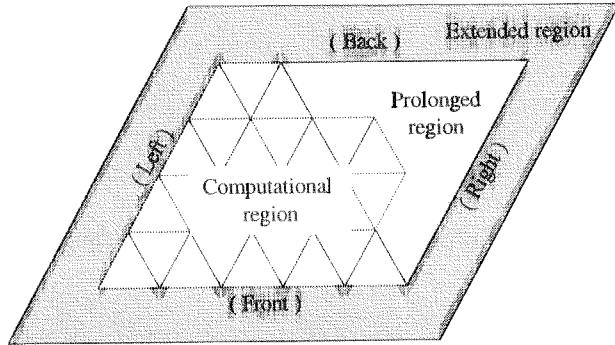


Fig. 3 Regions for describing the boundary conditions

- (i) 同一問題中、真空条件と外挿条件はどちらかに統一する
- (ii) 周期条件は前面と左面に同時に適用し、 x , y 方向の層数を等しくする
- (iii) 前面が真空または外挿条件、左面が反射条件のとき、逆に指定する
- (iv) 底面が真空または外挿条件、蓋面が反射条件のとき、逆に指定する

ことにする。

境界条件の記述法を簡潔に説明するため、Fig. 3 の体系で、底面、蓋面、右面、後面が外挿条件で、前面と左面が反射条件の場合を取り上げよう。Fig. 4 はその、底面、前面、右面の角の部分を拡大し

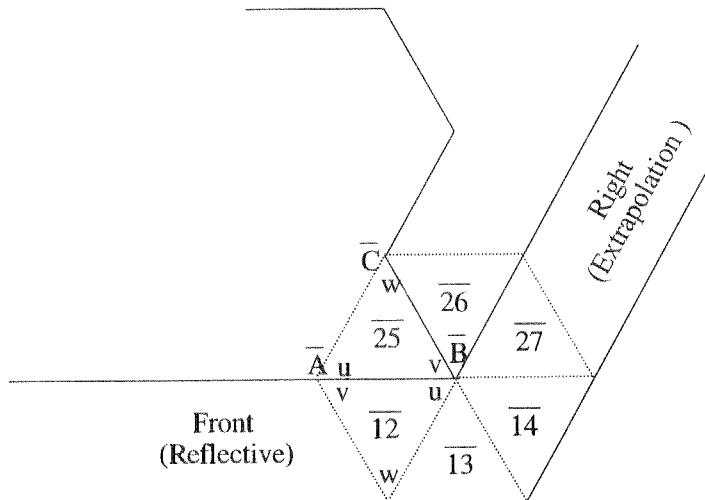


Fig. 4 Node numbering at the corner of bottom, front and right surfaces of computational region

たものである。ノード番号は、軸方向も含めた拡大領域において、底面から蓋面へ、前面から後面へ、左面から右面への順で付けられる。図で、ノード $\bar{25}$ は拡大領域の最底部にあるノード 25 の上に位置することを示し、計算領域内にあることが分かる。同様に、ノード $\bar{12}$ はノード 12 の上にあり、原子炉体系内にあるが、計算領域ではなく、拡大領域にある。ノード $\bar{26}$ は延長領域、ノード $\bar{13}$ 、

$\bar{14}$ 、 $\bar{27}$ は拡大領域にあるが、それぞれ原子炉体系内にない空なノードである。また、 \bar{A} 、 \bar{B} は、ノード $\bar{25}$ の底部にある角点で、それらの下にある点 A 、 B とともに反射面である前面を構成している。

反射条件により、ノード $\bar{12}$ の中性子束パラメーターは、ノード $\bar{25}$ のそれを用いて

$$\begin{aligned}\phi_u^b(12) &= \phi_v^b(25), & \phi_v^b(12) &= \phi_u^b(25), & \phi_w^b(12) &= \phi_w^b(25), \\ \phi_u^t(12) &= \phi_v^t(25), & \phi_v^t(12) &= \phi_u^t(25), & \phi_w^t(12) &= \phi_w^t(25), \\ \bar{\phi}_u(12) &= \bar{\phi}_v(25), & \bar{\phi}_v(12) &= \bar{\phi}_u(25), & \bar{\phi}_w(12) &= \bar{\phi}_w(25), \\ \bar{\phi}_b(12) &= \bar{\phi}_b(25), & \bar{\phi}_t(12) &= \bar{\phi}_t(25), & \bar{\phi}(12) &= \bar{\phi}(25), \\ \tilde{\phi}_x(12) &= -\frac{1}{2}\tilde{\phi}_x(25) + \frac{1}{2}\tilde{\phi}_y(25), & \tilde{\phi}_y(12) &= \frac{3}{2}\tilde{\phi}_x(25) + \frac{1}{2}\tilde{\phi}_y(25), & \tilde{\phi}_z(12) &= \tilde{\phi}_z(25)\end{aligned}$$

で表せる。拡大領域にある空でないノードの中性子束パラメーターは、周期条件の場合でも、計算領域内の該当するノードのそれを用いて同様に表せることが分かる。

次に、ノード $\bar{25}$ について考察しよう。ノード面 Γ_u (面 B, C, \bar{B}, \bar{C})は空なノード $\bar{26}$ に接しており、右面が外挿条件であることから(2)式を適用して

$$\begin{aligned}-4\sqrt{3}D(\phi_u^b + \phi_u^t) - (4\sqrt{3}D + pc)(\phi_v^b + \phi_v^t + \phi_w^b + \phi_w^t) + 12(6\sqrt{3}D + pc)\bar{\phi}_u + 16\sqrt{3}D(\bar{\phi}_v + \bar{\phi}_w) \\ + 12\sqrt{3}D(\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t) - 104\sqrt{3}D\bar{\phi} - 240\sqrt{3}D\tilde{\phi}_x = 0\end{aligned}\quad (5)$$

を得る。この式は、Fig. 2 の座標系の取り方により、両タイプのノードに対して成り立つ。以後、ノードに関する式は、断りの無い限り、両タイプに対して成り立つものとする。もし、右面が真空条件であれば $\bar{\phi}_u = 0$ となり、これらはノード $\bar{25}$ の Γ_u における中性子流の連続の式と置き換えられる。

一方、点 \bar{B} には 12 個のノード

$$27, 26, 25, 12, 13, 14, \bar{27}, \bar{26}, \bar{25}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}$$

が接しており、 $\bar{25}, \bar{12}$ 以外は空である。いま、空である 10 個のノードの重心は容易に計算できるので、これを R としよう。ノード $\bar{25}$ の中性子束を点 \bar{B} から R に沿って(2)式により外挿すれば、(5)式と同様にノード $\bar{25}$ の中性子束パラメータに関する式が得られるが、少し複雑になるのでここでは省略する。もし、右面が真空条件であれば $\phi_v^b = 0$ となり、これらは \bar{B} における漏れバランス条件の式と置き換えればよい。

3. 反復解法における加速法の適用

境界条件を適用した後のノードの体系方程式(4)を着目エネルギー群全体に拡張した式を

$$A^g \phi^g = b^g \quad (6)$$

で表すことにしよう。このとき、Mを計算領域の全ノード数とすれば ϕ^g は $M \times 15$ 次のベクトルとなる。更にこれを全エネルギー群に拡張すれば、全体系の方程式

$$A \phi = b$$

を得る。ここに、 ϕ は $G \times M \times 15$ 次のベクトルであり、Gはエネルギー群数である。着目群の中性子束を反復法で求めることを内側反復、全エネルギー群の中性子束を反復法で求めることを外側反復と呼ぶ。本稿では、内側反復に適応的加速法、外側反復に中性子源外挿法を適用する。

3.1 適応的加速法の適用

いま、 ϕ_k^g を着目群においてノード番号順に k 回走査した後の中性子束とする。SOR(逐次的過剰緩和)法^{8) 9)}では、(k+1)回目の値として、もう1回走査した値 ϕ' をそのまま用いるのではなく、これを外挿した式

$$\phi_{k+1}^g = (1-\omega) \phi_k^g + \omega \phi' \quad (7)$$

を用いる。ここに、 ω は 加速因子で、通常 $0 < \omega < 2$ の範囲で選ばれる。一般に、(6)式を解く反復法

$$\phi_{k+1}^g = \Psi(\phi_k^g, b^g) = B\phi_k^g + Cb^g$$

は行列 B, C が反復ごとに不变で、 ϕ_{k+1}^g が 1 回前の値 ϕ_k^g のみから得られ、 ϕ_k^g に関して線形なので定常一階線形反復法と呼ばれ、特に B を反復行列という。ここで更に別の外挿式

$$\Psi_\alpha(\phi_k^g, b^g) = (1-\alpha) \phi_k^g + \alpha \{\Psi(\phi_k^g, b^g)\} = B_\alpha \phi_k^g + C_\alpha b^g \quad (8)$$

を適用すれば、 $\phi_{i,1}^g = \phi_i^g$ を元の反復式とする 2 重反復列

$$\phi_{i+1,j}^g = \Psi(\phi_{i,j}^g, b^g)$$

$$\phi_{i,j+1}^g = \Psi_{\alpha_j}(\phi_{i,j}^g, b^g)$$

とともに、残差 $e_{i,j} = \phi_{i+1,j}^g - \phi_{i,j}^g$ が定義できる。このとき、元の反復式は

$$\begin{aligned}
\phi_{i+1, i}^g &= \Psi(\phi_{i, i}^g, b^g), \\
e_{i, i} &= \phi_{i+1, i}^g - \phi_{i, i}^g, \\
e_{i+1, i} &= \Psi(e_{i, i}^g, 0), \\
\alpha_i &= (e_{i, i}, e_{i, i} - e_{i+1, i}) / \| (e_{i, i} - e_{i+1, i}) \|^2, \\
\phi_{i+1, i+1}^g &= \phi_{i+1, i}^g + \alpha_i e_{i+1, i}
\end{aligned} \tag{9}$$

によって収束が加速されることが知られている⁹⁾。加速因子 α_i は中性子束の残差

$$\|e_{i, i+1}\|^2 = \{1 - 2(1 - \beta_i)\alpha + (1 - 2\beta_i + \gamma_i)\alpha^2\} \|e_{i, i}\|^2$$

が最小になるよう選ばれる。ここに、

$$\beta_i = (e_{i, i}, e_{i+1, i}) / \|e_{i, i}\|^2, \quad \gamma_i = \|e_{i+1, i}\|^2 / \|e_{i, i}\|^2$$

である。この場合、加速因子が反復ごとに変更されるため適応的加速法という。この加速法は、元の反復法に比べ、 α_i , $e_{i, i}$, $e_{i+1, i}$ の計算の他、 $e_{i, i}$, $e_{i+1, i}$ を保存するため $M \times 15 \times 2$ 語の余分な記憶領域を必要とするが、それらの計算コストは僅かである。

(6) 式の行列 A^g を対角行列 D 、左下行列 E 、右上行列 F に分解したとき、反復法

$$\Psi(\phi_k^g, b^g) = -(D+E)^{-1} F \phi_k^g + (D+E)^{-1} b^g \tag{10}$$

は Gauss-Seidel 法⁹⁾と呼ばれ、(7) 式で SOR 法を適用する前の ϕ に相当する。(10) 式から明らかのように、Gauss-Seidel 法も定常一階線形反復法の一つであり、これに適応的加速法を適用することと、これを SOR 法で加速することは同値な操作であることが、(7) 式と (8) 式を比較することにより分かる。SOR 法では、反復行列 $(I + \omega D^{-1} E)^{-1} \{(1-\omega)I - \omega D^{-1} F\}$ のスペクトル半径を最小にするよう加速因子が選ぶ事が望まれる。低次元や規則形状の拡散計算では、SOR 法の最適因子が Fourier 解析により得られることもあるが¹²⁾、3 角柱形状への適用は難しい。一方、適応的加速法では反復ごとに加速因子が変わるが、これらの加速因子の平均が SOR 法の最適因子の良い推定値を与えるものと考えられる。

3.2 中性子源外挿法の適用

基本方程式を固有値問題として捉え易くするため、(1) 式を

$$L^g \phi^g(r) = \sum_{g' \neq g} H^{g'g} \phi^{g'}(r) + \frac{\chi^g}{\lambda} \sum_{g'=1}^G F^{g'} \phi^{g'}(r) \tag{11}$$

と書き換える。ここに、 L , H はそれぞれ中性子の損失、散乱を表す G 次の行列作用素、 F , χ はそれぞれ核分裂およびそのスペクトル分布を表す G 次のベクトル作用素である。この式を行列表示を

用いて変形すれば、関数型の固有値問題

$$f(r) \equiv F^t \phi(r) = \frac{1}{\lambda} T f(r)$$

を得る。ここに、 $T = F^t (L - H)^{-1} \chi$ であり、その固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ 、固有関数を

$\varphi_1(r), \varphi_2(r), \varphi_3(r), \dots$ とする。

次に、(11) 式に対する外側反復を $\lambda_\ell = \int_D f_\ell(r) dr$ と正規化し、

$$L^g \phi_{\ell+1}^{g'}(r) - \sum_{g' < g} H^{g'g} \phi_{\ell+1}^{g'}(r) = \sum_{g' > g} H^{g'g} \phi_\ell^{g'}(r) + \frac{\chi^g}{\lambda_\ell} \sum_{g'=1}^G F^{g'} \phi_\ell^{g'}(r)$$

とする。ここに、 D は計算領域である。 ℓ が充分大きいとき

$$\sum_{g' > g} H^{g'g} \phi_\ell^{g'}(r) \sim \sum_{g' > g} H^{g'g} \phi_{\ell+1}^{g'}(r), \quad \frac{\chi^g}{\lambda_\ell} \sum_{g'=1}^G F^{g'} \phi_\ell^{g'}(r) \sim \frac{\chi^g}{\lambda_1} \sum_{g'=1}^G F^{g'} \phi_\ell^{g'}(r)$$

を仮定すれば、

$$(L - H) \phi_{\ell+1}(r) \sim \frac{1}{\lambda_1} \chi F^t \phi_\ell(r)$$

即ち

$$f_{\ell+1}(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{\ell+1}^{(s)} \varphi_s(r) \sim \frac{1}{\lambda_1} T f_\ell(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_\ell^{(s)} T \varphi_s(r)$$

を得る。これは、 $\lambda_1 > \lambda_2 \gg \lambda_3$ を仮定すれば

$$f_{\ell+n}(r) \sim f_\infty(r) + a_\ell^{(2)} \varphi_2(r) \sigma^n$$

を示しており、 $\sigma = \lambda_2 / \lambda_1$ である。中性子源外挿法は

$$f_{\ell+1}(r) = (1-\theta) f_\ell(r) + \theta f'(r)$$

により得られる。ここに、 f' は外挿直前の中性子源であり、 $\theta = 1/(1-\sigma)$ である。

外挿法の形式的適用による不安定さを避けるため、以下に適用条件を整理しよう。いま、ノ一

$$\text{ド } n \text{ における第 } \ell \text{ 回目の外側反復における中性子源に関して } F_{\ell}^n = \int_n f_{\ell}(r) dr, \quad \lambda_{\ell} = \sum_{n=1}^N F_{\ell}^n$$

とし、

$$\begin{aligned}\epsilon_{\ell+1}^n &= (F'^n - F_{\ell}^n) / F_{\ell}^n, \\ E_{\ell+1}^i &= \min_n |\epsilon_{\ell+1}^n|, \quad E_{\ell+1}^e = \sum_n |\epsilon_{\ell+1}^n| / N, \quad E_{\ell+1}^a = \max_n |\epsilon_{\ell+1}^n|, \\ \eta_{\ell+1}^e &= E_{\ell+1}^e (1+E_{\ell}^e) / E_{\ell}^e, \quad \eta_{\ell+1}^a = E_{\ell+1}^a (1+E_{\ell}^a) / E_{\ell}^a, \\ \mu_{\ell+1}^i &= \min(\eta_{\ell+1}^e, \eta_{\ell+1}^a), \quad \mu_{\ell+1}^a = \max(\eta_{\ell+1}^e, \eta_{\ell+1}^a), \\ \tau_{\ell+1} &= \mu_{\ell+1}^i / (1-\mu_{\ell+1}^i), \quad \delta_{\ell+1} = |\tau_{\ell+1} - \tau_{\ell}| / \tau_{\ell}, \quad \nu_{\ell+1} = (E_{\ell+1}^a - E_{\ell+1}^i) / \lambda'\end{aligned}$$

とすれば、適用条件は

(i) 漸近性を達成する最小限の反復回数

$$\ell+1 \geq 4$$

(ii) 外挿の有意性

$$0.5 < \mu_{\ell+1}^i$$

(iii) 最大固有値の分離性

$$\mu_{\ell+1}^a < 1.0$$

(iv) 外挿係数の安定性

$$\max(\delta_{\ell}, \delta_{\ell+1}) < 0.1$$

(v) 固有値の収束性

$$\nu_{\ell+1} \leq \nu_{\ell}$$

で与えられる⁷⁾。ここに、 N は計算領域において核分裂性物質の存在するノードの数である。離散型の外挿式は

$$F_{\ell+1}^n = (1-\theta) F_{\ell}^n + \theta F'^n$$

となり、 $\theta = \tau_{\ell+1} + 1$ である。外挿しないときは $\theta = 1$ とする。

4. 検証計算と検討

六角形状の炉心を解析するコード MOSRA-Prism を開発し、コードを改良するためのサンプル計算を実施するとともに、本コードに見合った反復解法の収束加速法の検討を行ってきた。ここでは、内側反復の収束を加速する適応的加速法が有効な問題、外側反復の収束を加速する中性子源外挿法が有効な問題、それに現実規模の問題として、IAEA ベンチマーク問題を探り上げ、これらの収束加速法の特徴を明らかにする。

i) FCA 炉心

収束加速法のテストを実施するため、FCA-V-2 ベンチマーク計算¹³⁾で用いた体系を Fig. 5 のように簡単化し、均質な 2 群計算を行う。計算領域は、各辺の長さが 48 cm の菱形柱として、 $(2 \times 3) \times 3 \times 3$ 個のノードに分割し、境界条件としては、底面、前面、左面が反射条件、その他の面に外挿条件を適用する。各群の核定数は Table 1 で与えられる。

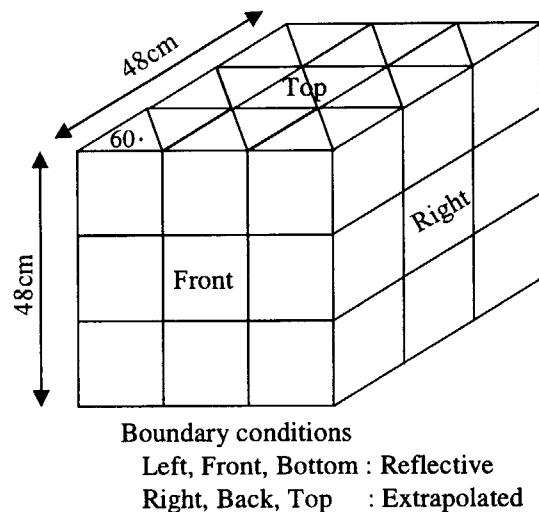


Fig. 5 Core geometry and boundary conditions used for FCA core calculation

一般に、内側反復（中性子束）と外側反復（固有値）の収束判定はそれぞれ

$$|(\phi_{k+1}^{\alpha g} - \phi_k^{\alpha g}) / \phi_{k+1}^{\alpha g}| < \epsilon_\phi, \quad |(\lambda_{\ell+1}^g - \lambda_\ell^g) / \lambda_{\ell+1}^g| < \epsilon_\lambda \quad (12)$$

で行われる。ここに、 $\phi_k^{\alpha g}$ は第 g 群において、 k 回内側反復した後の各ノードにおける 15 個の中性子束パラメータである。本計算では、最大内側反復回数を 100 とし、 $\epsilon_\phi = 10^{-4}$ 、 $\epsilon_\lambda = 10^{-5}$ とした。また、外側加速の内側反復への影響を排除するため、中性子源外挿法を除外した。

Table 2 は、本来の反復法 (Gauss-Seidel 法) と適応的加速法の反復回数を比較したものであり、Fig. 6 は固有値の収束状況を全内側反復回数に対する相対誤差で図示したものである。

Table 1 Nuclear constants used for FCA core calculation

g	D	σ_a	$v \sigma_f$	$\sigma_s^{g' \rightarrow g}$ ($g' = 1 \sim G$)	χ
1	1.540	5.63E-3	1.18E-2		0.0
2	0.961	1.04E-2	1.41E-2	5.65E-3	0.01123

Table 2 Iteration counts for FCA core calculation

Outer iteration	G-S method		Adaptive acceleration	
	Gr. 1	Gr. 2	Gr. 1	Gr. 2
1	100	96	64	50
2	100	82	62	42
3	88	70	56	38
4	76	62	48	36
5	74	56	44	32
6	62	50	38	32
7	52	46	36	26
8	46	40	32	26
9	38	36	28	20
10	34	28	26	18
11	30	28	22	16
12	24	24	18	14
13	20	18	18	14
14	14	14	14	12
15	12	14	12	10
16	12	8	12	8
17	8	4	10	8
18	6	4	6	2
19	4	4		
20	4	4		
Subt.	804	688	546	404
Total	1492		950	

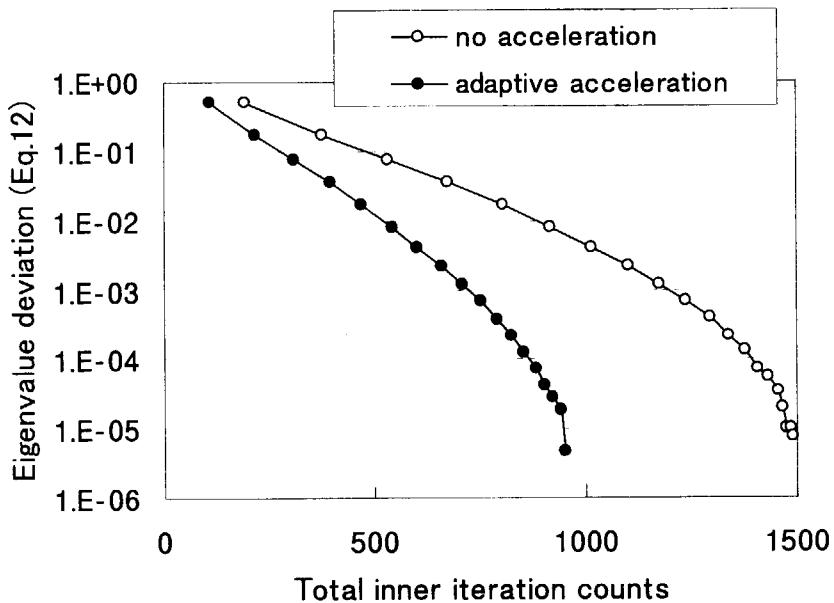


Fig. 6 Convergence of eigenvalue for FCA core calculation

適応的加速法では、加速因子（(9)式の α ）が1より大のときのみ適用した。この例では、全内側反復回数の比は $1492 / 950 = 1.57$ であり、1.57倍の加速率が達成された。一方、全反復計算時間の比を見ると、1.55であり、ほぼ全内側反復回数の比に等しいことから、加速因子の計算に費やされる時間はごく僅か（2%弱）であることが分かる。

ii) 厳密問題

デカルト座標における2群均質問題は解析解を有し、数値解の検証に便利であるが、本コードのように、3角柱形状を対象とする場合、解析解を求めるることは不可能である。 (x, y, z) 形状有限要素法拡散コード FEM-BABEL で採り上げた厳密問題¹⁴⁾に対し、中性子源外挿法が有効であったため、Fig. 7. に示すようにこれを菱形柱形状に修正して採用した。辺の長さが 90 cm、高さが 120 cm の裸の均質炉を $(2 \times 3) \times 3 \times 3$ 個のノードに分割し、表面に外挿条件を適用する。2群の核定数は Table 3 で与えられる。

Table 3 Nuclear constants used for an exact problem

g	D	σ_a	$v \sigma_f$	$\sigma_s^{g' \rightarrow g}$ ($g' = 1 \sim G$)	χ
1	2.6800	1.3785E-2	3.0834E-2		0.0
2	1.5788	1.4496E-2	2.5200E-2	4.0792E-2	0.425

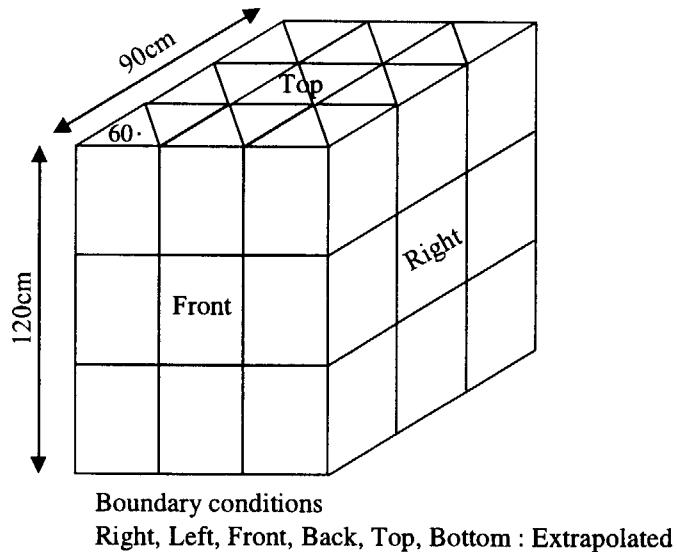


Fig. 7 Core geometry and boundary conditions used for an exact problem

この問題は内側反復の収束が良いため、最大内側反復回数を 20 、 $\epsilon_\phi = 5 \times 10^{-5}$ 、 $\epsilon_\lambda = 10^{-5}$ とした。ここでも、内側加速の外側反復への影響を排除するため、適応的加速法を除外した。Fig. 8 は

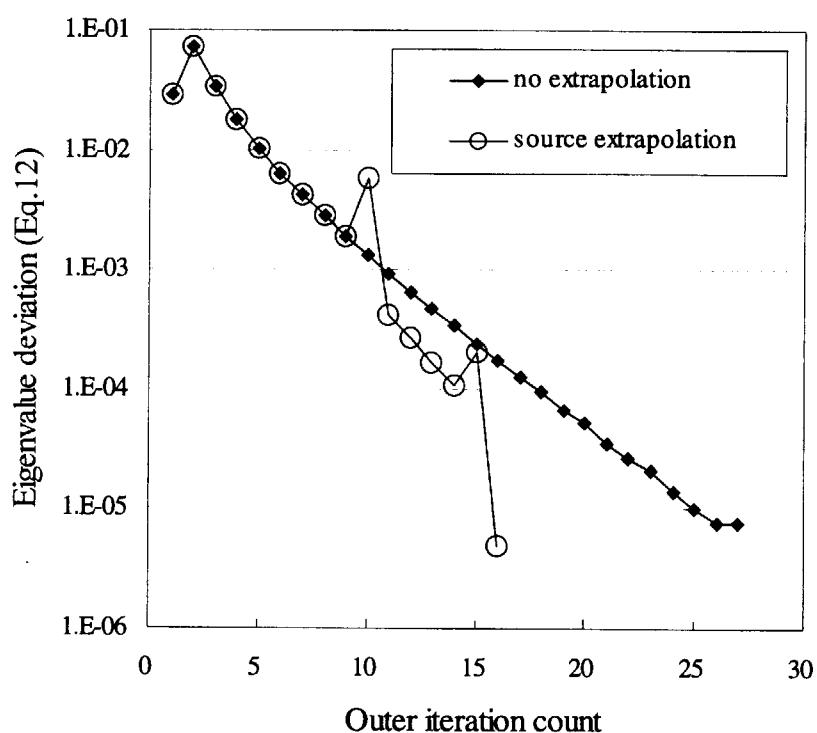


Fig. 8 Acceleration by neutron source extrapolation for an exact problem

この問題における中性子源外挿法の効果を図示したものである。中性子源外挿法を適用しない場合、固有値の判定規準 10^{-5} を過ぎても外側反復が行われたのは、内側反復が収束しなかつたためである。一方、加速法を適用した場合、外側反復の 9 回と 14 回の後に中性子源の外挿が行われたことが分かる。これにより、外側反復回数で $27 / 16 = 1.69$ 倍、計算時間で 1.65 倍の加速率が達成された。

iii) IAEA ベンチマーク問題

ここでは、一般的な複雑形状をもつ、2 群、4 物質の問題を探り上げ、汎用差分法拡散コード CITATION¹⁾ により解の検証を行うと同時に、内側反復の加速法と外側反復の加速法の関連についても調べる。この問題は元来 2 次元 (x, y) 形状の問題として与えられている^{7) 11)}ため、Fig. 9 に示すように 6 角形状に修正し、軸方向の底面と蓋面に反射条件を適用する。6 角柱の 1 辺の長さと高さはそれぞれ 14 cm で、6 個のノードに分割する。これらの核定数は Table 4 で与えられるが、核分裂スペクトルは $\chi^1 = 1.0$, $\chi^2 = 0.0$ である。

この問題は 1 群の内側反復の収束が悪いため、打ち切り回数を 60, $\epsilon_\phi = 10^{-4}$, $\epsilon_\lambda = 10^{-5}$ とした。適応的加速法を適用しない場合、最初の外側反復における 1 群の 60 回内側反復した後の中性子束の相対偏差が 5.62×10^{-3} であるのに比べ、加速法を適用した場合は、23 回の内側反復でこの相対偏差を達成している。しかし、各外側反復において、適応的加速法は中性子束の相対偏差が 10^{-3} くらいまでは有効に働くが、それを過ぎると加速係数が 1 より小となり、加速の効果が期待できなくなる。従って、この加速法を適用しない場合と適用した場合の全反復時間の比（加速比）は 1.67 倍に留まった。

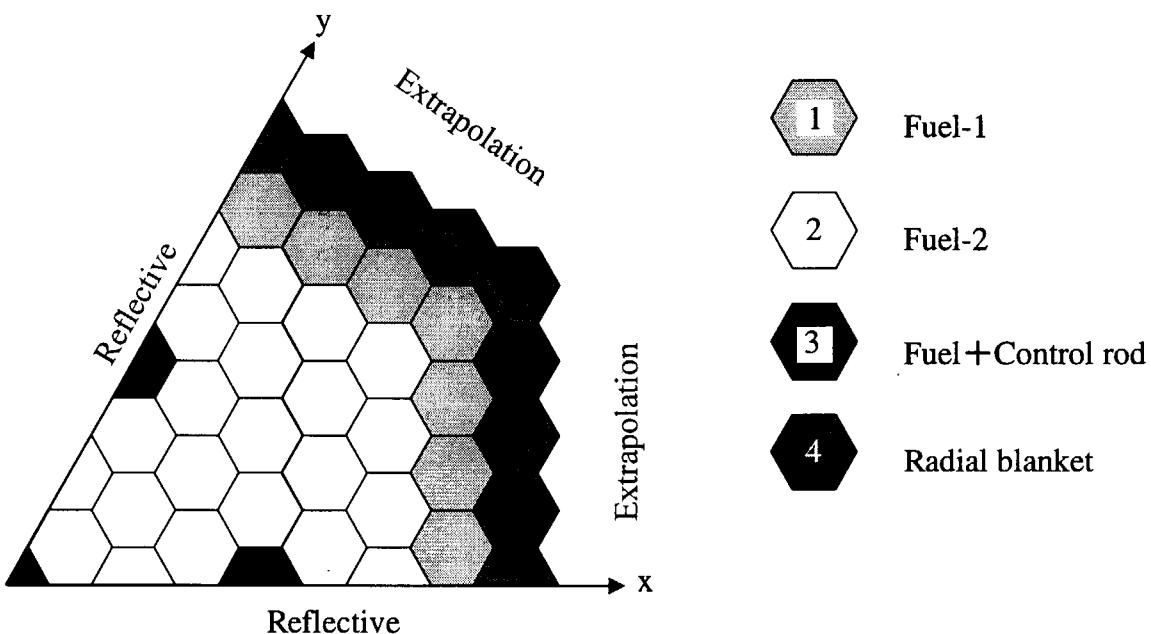


Fig. 9 Core geometry of IAEA 2-dimensional benchmark problem

次に、加速法を全く適用しない場合と中性子源外挿法のみを適用した場合を比較した。後者の場合、外挿は 17 回と 26 回の外側反復で適用され、加速率は、外側反復回数で 1.78 倍、反復時間で 1.76 倍であった。最後に、両加速法を同時に適用した結果、外挿法は 2 回適用され、全反復時間による加速率は 2.59 倍であった。Fig. 10 はこれら 4 ケースの加速法における固有値の収束状況をまとめて図示したものである。両加速法は理論上独立な事象であると考えられるが、この結果はこれを数値実験的に示していると言えよう。

なお、同一の境界条件、メッシュ分割、収束判定基準を用いて CITATION と体系の固有値を比較した結果、0.05 % の範囲での一致が得られた。

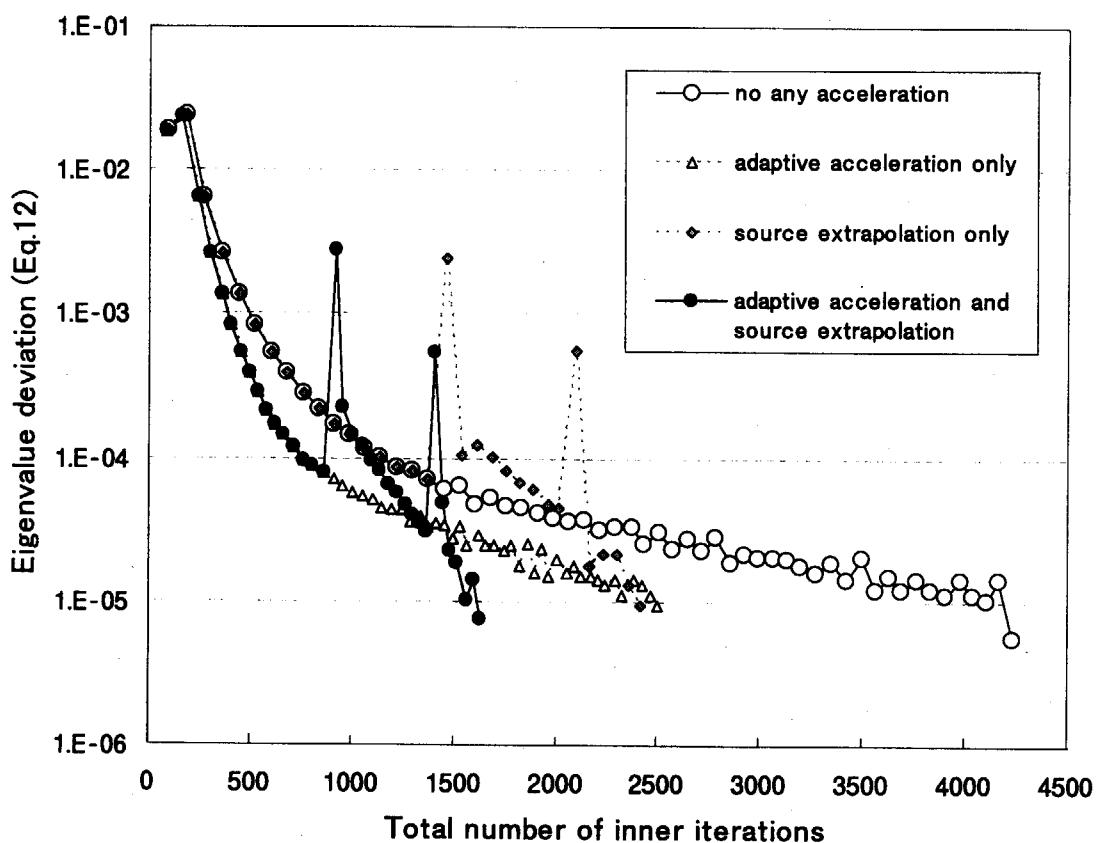


Fig. 10 Convergence of eigenvalue in cases of four acceleration methods for IAEA benchmark problem

Table 4 Nuclear constants used for IAEA benchmark problem

Mat.	Gr.	D	σ_a	$v \sigma_f$	$\sigma_s^{g' \rightarrow g}$	($g' = 1 \sim G$)
1	1	1.5	1.0 E-2	0.0		0.0
	2	4.0 E-1	8.0 E-2	1.35 E-1	2.0 E-2	
2	1	1.5	1.0 E-2	0.0		0.0
	2	4.0 E-1	.8.5 E-2	1.35 E-1	2.0 E-2	
3	1	1.5	1.0 E-1	0.0		0.0
	2	4.0 E-1	1.3 E-1	1.35 E-1	2.0 E-2	
4	1	2.0	0.0	0.0		0.0
	2	3.0 E-1	1.0 E-2	0.0	4.0 E-2	

5. おわりに

三角柱形状の原子炉を多項式展開ノード法で解析する 3 次元拡散コード MOSRA-Prism を開発し、その反復解法の収束加速法を中心に改良の検討を重ねた。

第 2 章で提案した、外挿条件の新しい記述法をコードに組み込み、厳密解を持つ問題を用いて境界付近の中性子束分布の精度の確認を試みた。しかし、(x, y, z) 形状のように厳密解が求まらなかったため、適当なサンプルが見つかるまでこの確認は持ち越しとなつた。

適応的加速法は、元来元の反復行列が正定値のとき有効性が保障され、加速因子が常に 1 以上になることで知られている。今回の多項式展開ノード法による定式化では、反復行列が正定値である保障が無いためか、加速率が 2 倍弱に留まり、問題によっては効果の薄いものもある。反復行列を正定値に近づけるため、前進走査と後退走査を 1 回の反復として扱うことも今後の課題と言える。

SOR 法の最適因子を求める方法の一つにフーリエ解析がある。今回もこれについて検討したが、幾何形状が複雑でノード内の内挿式の次数も高く、一般的な導出は困難なことが分かった。また、SOR 法と適応的加速法の類似性を利用して、各サンプル問題ごとに SOR 法の最適因子をある程度推定できたが、安定して全問題に適用できる最適因子の推定則の導出には至らなかつた。

一方、中性子源外挿法については、体系最大固有値の分離性が大のとき、3 倍の加速率を達成した報告がある。今回のテストでは、ほぼ全ての問題に対し、安定した効果が得られた。また、二つの加速法の独立性も数値実験的に確認できた。

本コードはスカラー計算の原型版として開発したが、今後は、コードの実用化に向けた、ベクトル・パラレル計算機上でのこれらの加速法による高速化、また、これらの計算機に適した固有の加速法との比較・検討が新しい研究課題となろう。

参 考 文 献

- 1) Fowler T. B., Vondy D. R. and Cunningham G. W. : "Nuclear Reactor Core Analysis Code: CITATION", ORNL-TM-2496 (1969).
- 2) Vondy D. R. Fowler T. B. and Cunningham G. W. : "VENTURE: A Code Block for Solving Multigroup Neutronics Problems Applying the Finite-Difference Diffusion-Theory Approximation to Neutron Transport, Version III", ORNL-5062/R1 (1977).
- 3) 森正明、竹田敏一: "核計算法の研究成果と炉心設計法の進歩(II-1 ピンパワー回復法)", 日本原子力学会誌、39, 6 (1997).
- 4) Lawrence R. D. : "Progress in Nodal Methods for Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equations", Prog. Nucl. Energy, 17, 271 (1986).
- 5) Cho J. Y. and Kim C. H.: "Higher Order Polynomial Expansion Nodal Method for Hexagonal Core Neutronics Analysis", An. Nucl. Energy, 25, 1021 (1998).
- 6) 竹田敏一、牛尾直史: "核計算法の研究成果と炉心設計法の進歩(II-1 ノード法・CCCP 法)", 日本原子力学会誌、39, 4 (1997).
- 7) 奥村啓介: "MOSRA-Light; ベクトル計算機のための高速 3 次元中性子拡散ノード法コード", JAERI-Data/Code 98-025 (1998).
- 8) 中原康明、藤村統一郎: "原子炉核計算法コードにおける反復解法の収束加速アルゴリズム", JAERI-M 5590 (1974).
- 9) Fujimura T. and Matsui Y.: "Effectiveness of an Adaptive Acceleration Method for Inner Iterations in Some Diffusion Codes", Nucl. Sci. Eng., 77, 360 (1981).
- 10) Wagner M. R. : "GUAGE: A Two-Dimensional Few Group Neutron Diffusion-Depletion Program for a Uniform Triangular Mesh", GA-8307, Gulf General Atomic (1968).
- 11) Argonne Code Center: "Benchmark Problem Book", ANL-7416, Suppl. 2, Argonne National Laboratory (1977).
- 12) Azmy Y. Y. and Kirk B. L. : "Convergence Properties of Iterative Algorithms for Solving the Nodal Diffusion Equations", Proc. Int. Conf. on the Physics of Reactors: Operation, Design and Computation, Apr. 23~27, MarseilleVIII-35 (1990).
- 13) 藤村統一郎: "二重有限要素法による 3 次元中性子輸送コード DFEM の開発", JAERI-Data/Code 95-019 (1996).
- 14) Ise T., Yamazaki T. and Nakahara Y. : "FEM-BABEL A Computer Program for Solving Three-Dimensional Neutron Diffusion Equation by the Finite Element Method ", JAERI-1256 (1977).

付録 A 内挿多項式の係数と中性子束パラメータの関係

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{108} \{ 2(\phi_u^b + \phi_v^b + \phi_w^b + \phi_u^t + \phi_v^t + \phi_w^t) - 48(\bar{\phi}_u + \bar{\phi}_v + \bar{\phi}_w) - 33(\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t) + 306\bar{\phi} \}, \\
c_u - c_v &= \frac{2\sqrt{3}}{9p} (\phi_u^b + \phi_u^t - \phi_v^b - \phi_v^t + 90\tilde{\phi}_x - 30\tilde{\phi}_y), \\
c_v - c_w &= \frac{2\sqrt{3}}{9p} (\phi_v^b + \phi_v^t - \phi_w^b - \phi_w^t - 60\tilde{\phi}_y), \\
c_w - c_u &= \frac{2\sqrt{3}}{9p} (\phi_w^b + \phi_w^t - \phi_u^b - \phi_u^t - 90\tilde{\phi}_x - 30\tilde{\phi}_y), \\
c_z &= -\frac{1}{18q} \{ 2(\phi_u^t + \phi_v^t + \phi_w^t - \phi_u^b - \phi_v^b - \phi_w^b) + 21(\bar{\phi}_t - \bar{\phi}_b) - 540\tilde{\phi}_z \}, \\
c_{2u} &= -\frac{2}{3p^2} \{ \phi_v^b + \phi_v^t + \phi_w^b + \phi_w^t - 24\bar{\phi}_u - 2(\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t) + 24\bar{\phi} + 120\tilde{\phi}_x \}, \\
c_{2v} &= -\frac{2}{3p^2} \{ \phi_w^b + \phi_w^t + \phi_u^b + \phi_u^t - 24\bar{\phi}_v - 2(\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t) + 24\bar{\phi} - 60\tilde{\phi}_x + 60\tilde{\phi}_y \}, \\
c_{2w} &= -\frac{2}{3p^2} \{ \phi_u^b + \phi_u^t + \phi_v^b + \phi_v^t - 24\bar{\phi}_w - 2(\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t) + 24\bar{\phi} - 60\tilde{\phi}_x - 60\tilde{\phi}_y \}, \\
c_{2z} &= \frac{3}{q^2} (\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t - 2\bar{\phi}), \\
c_{uz} - c_{vz} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3pq} \{ \phi_u^t - \phi_u^b - (\phi_v^t - \phi_v^b) \}, \\
c_{vz} - c_{wz} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3pq} \{ \phi_v^t - \phi_v^b - (\phi_w^t - \phi_w^b) \}, \\
c_{wz} - c_{uz} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3pq} \{ \phi_w^t - \phi_w^b - (\phi_u^t - \phi_u^b) \}, \\
c_{sz} &= \frac{8}{9p^2q} \{ \phi_u^t + \phi_v^t + \phi_w^t - \phi_u^b - \phi_v^b - \phi_w^b - 3(\bar{\phi}_t - \bar{\phi}_b) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{3u} &= -\frac{8\sqrt{3}}{9p^3} \left\{ -3(\phi_u^b + \phi_u^t) + \phi_v^b + \phi_v^t + \phi_w^b + \phi_w^t - 18\bar{\phi}_u - 6(\bar{\phi}_v + \bar{\phi}_w) - 5(\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t) \right. \\
&\quad \left. + 30\bar{\phi} + 120\tilde{\phi}_x \right\}, \\
c_{3v} &= -\frac{8\sqrt{3}}{9p^3} \left\{ -3(\phi_v^b + \phi_v^t) + \phi_w^b + \phi_w^t + \phi_u^b + \phi_u^t - 18\bar{\phi}_v - 6(\bar{\phi}_w + \bar{\phi}_u) - 5(\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t) \right. \\
&\quad \left. + 30\bar{\phi} - 60\tilde{\phi}_x + 60\tilde{\phi}_y \right\}, \\
c_{3w} &= -\frac{8\sqrt{3}}{9p^3} \left\{ -3(\phi_w^b + \phi_w^t) + \phi_u^b + \phi_u^t + \phi_v^b + \phi_v^t - 18\bar{\phi}_w - 6(\bar{\phi}_u + \bar{\phi}_v) - 5(\bar{\phi}_b + \bar{\phi}_t) \right. \\
&\quad \left. + 30\bar{\phi} - 60\tilde{\phi}_x - 60\tilde{\phi}_y \right\}, \\
c_{3z} &= \frac{10}{q^3} (\bar{\phi}_t - \bar{\phi}_b - 12\tilde{\phi}_z).
\end{aligned}$$

付録 B ノードの行列方程式の要素

(係数行列 A の第 1 ~ 6 列)

(ϕ_u^b)	(ϕ_v^b)	(ϕ_w^b)	(ϕ_u^t)	(ϕ_v^t)	(ϕ_w^t)
$2(9\frac{P}{q} + 25\sqrt{3})$	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$-2(9\frac{P}{q} - 11\sqrt{3})$	$-5\sqrt{3}$	$-5\sqrt{3}$
$5\sqrt{3}$	$2(9\frac{P}{q} + 25\sqrt{3})$	$5\sqrt{3}$	$-5\sqrt{3}$	$-2(9\frac{P}{q} - 11\sqrt{3})$	$-5\sqrt{3}$
$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$2(9\frac{P}{q} + 25\sqrt{3})$	$-5\sqrt{3}$	$-5\sqrt{3}$	$-2(9\frac{P}{q} - 11\sqrt{3})$
$-2(9\frac{P}{q} - 11\sqrt{3})$	$-5\sqrt{3}$	$-5\sqrt{3}$	$2(9\frac{P}{q} + 25\sqrt{3})$	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$
$-5\sqrt{3}$	$-2(9\frac{P}{q} - 11\sqrt{3})$	$-5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$2(9\frac{P}{q} + 25\sqrt{3})$	$5\sqrt{3}$
$-5\sqrt{3}$	$-5\sqrt{3}$	$-2(9\frac{P}{q} - 11\sqrt{3})$	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$2(9\frac{P}{q} + 25\sqrt{3})$
-6	$-3(1 + \frac{D_u}{D})$	$-3(1 + \frac{D_u}{D})$	-6	$-3(1 + \frac{D_u}{D})$	$-3(1 + \frac{D_u}{D})$
$-3(1 + \frac{D_v}{D})$	-6	$-3(1 + \frac{D_v}{D})$	$-3(1 + \frac{D_v}{D})$	-6	$-3(1 + \frac{D_v}{D})$
$-3(1 + \frac{D_w}{D})$	$-3(1 + \frac{D_w}{D})$	-6	$-3(1 + \frac{D_w}{D})$	$-3(1 + \frac{D_w}{D})$	-6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
8	8	8	8	8	8
8	-4	-4	8	-4	-4
0	4	-4	0	4	-4
4	4	4	-4	-4	-4

(係数行列 A の第 7 ~ 11 列)

$(\bar{\phi}_u)$	$(\bar{\phi}_v)$	$(\bar{\phi}_w)$	$(\bar{\phi}_b)$	$(\bar{\phi}_t)$
$-72\sqrt{3}$	0	0	$12(12\frac{p}{q} - 5\sqrt{3})$	$-12(3\frac{p}{q} + \sqrt{3})$
0	$-72\sqrt{3}$	0	$12(12\frac{p}{q} - 5\sqrt{3})$	$-12(3\frac{p}{q} + \sqrt{3})$
0	0	$-72\sqrt{3}$	$12(12\frac{p}{q} - 5\sqrt{3})$	$-12(3\frac{p}{q} + \sqrt{3})$
$-72\sqrt{3}$	0	0	$-12(3\frac{p}{q} + \sqrt{3})$	$12(12\frac{p}{q} - 5\sqrt{3})$
0	$-72\sqrt{3}$	0	$-12(3\frac{p}{q} + \sqrt{3})$	$12(12\frac{p}{q} - 5\sqrt{3})$
0	0	$-72\sqrt{3}$	$-12(3\frac{p}{q} + \sqrt{3})$	$12(12\frac{p}{q} - 5\sqrt{3})$
$144(1 + \frac{D_u}{D})$	0	0	12	12
0	$144(1 + \frac{D_v}{D})$	0	12	12
0	0	$144(1 + \frac{D_w}{D})$	12	12
0	0	0	$3(\frac{q_b}{q} + \frac{D_b}{D})$	$-\frac{q_b}{q}$
0	0	0	$-\frac{q_t}{q}$	$3(\frac{q_t}{q} + \frac{D_t}{D})$
-96	-96	-96	$-6(3\frac{p^2}{q^2} + 4)$	$-6(3\frac{p^2}{q^2} + 4)$
-48	24	24	0	0
0	-24	24	0	0
0	0	0	$3(15\frac{p^2}{q^2} - 4)$	$-3(15\frac{p^2}{q^2} - 4)$

(係数行列 A の第 12 ~ 15 列)

$(\bar{\phi})$	$(\tilde{\phi}_x)$	$(\tilde{\phi}_y)$	$(\tilde{\phi}_z)$
$-36(3\frac{p}{q}-2\sqrt{3})$	$1080\sqrt{3}$	0	$1080\frac{p}{q}$
$-36(3\frac{p}{q}-2\sqrt{3})$	$-540\sqrt{3}$	$540\sqrt{3}$	$1080\frac{p}{q}$
$-36(3\frac{p}{q}-2\sqrt{3})$	$-540\sqrt{3}$	$-540\sqrt{3}$	$1080\frac{p}{q}$
$-36(3\frac{p}{q}-2\sqrt{3})$	$1080\sqrt{3}$	0	$-1080\frac{p}{q}$
$-36(3\frac{p}{q}-2\sqrt{3})$	$-540\sqrt{3}$	$540\sqrt{3}$	$-1080\frac{p}{q}$
$-36(3\frac{p}{q}-2\sqrt{3})$	$-540\sqrt{3}$	$-540\sqrt{3}$	$-1080\frac{p}{q}$
-144	-720	0	0
-144	360	-360	0
-144	360	360	0
$-2\frac{q_b}{q}$	0	0	$-20\frac{q_b}{q}$
$-2\frac{q_t}{q}$	0	0	$20\frac{q_t}{q}$
$3(12\frac{p^2}{q^2}+96+\frac{p^2\sigma_r}{D})$	0	0	0
0	$9(80+\frac{p^2\sigma_r}{D})$	0	0
0	0	$3(80+\frac{p^2\sigma_r}{D})$	0
0	0	0	$9\frac{p^2}{q^2}(60+\frac{q^2\sigma_r}{D})$

(定数ベクトル b)

$$18 \frac{p}{D} L_{other}(C_u^b)$$

$$18 \frac{p}{D} L_{other}(C_v^b)$$

$$18 \frac{p}{D} L_{other}(C_w^b)$$

$$18 \frac{p}{D} L_{other}(C_u^t)$$

$$18 \frac{p}{D} L_{other}(C_v^t)$$

$$18 \frac{p}{D} L_{other}(C_w^t)$$

$$-\frac{D_u}{D} [-6\{\phi_u^b(u) + \phi_u^t(u)\} + 12\{\bar{\phi}_b(u) + \bar{\phi}_t(u)\} - 144\bar{\phi}(u) - 720\tilde{\phi}_x(u)]$$

$$-\frac{D_v}{D} [-6\{\phi_v^b(v) + \phi_v^t(v)\} + 12\{\bar{\phi}_b(v) + \bar{\phi}_t(v)\} - 144\bar{\phi}(v) + 360\tilde{\phi}_x(v) - 360\tilde{\phi}_y(v)]$$

$$-\frac{D_w}{D} [-6\{\phi_w^b(w) + \phi_w^t(w)\} + 12\{\bar{\phi}_b(w) + \bar{\phi}_t(w)\} - 144\bar{\phi}(w) + 360\tilde{\phi}_x(w) + 360\tilde{\phi}_y(w)]$$

$$3 \frac{p^2}{D} \sum_{g \neq g'} \left(\frac{\chi^g}{\lambda} v \sigma_f^{g'} + \sigma_s^{g' \rightarrow g} \right) \bar{\phi}^{g'}$$

$$9 \frac{p^2}{D} \sum_{g \neq g'} \left(\frac{\chi^g}{\lambda} v \sigma_f^{g'} + \sigma_s^{g' \rightarrow g} \right) \tilde{\phi}_x^{g'}$$

$$3 \frac{p^2}{D} \sum_{g \neq g'} \left(\frac{\chi^g}{\lambda} v \sigma_f^{g'} + \sigma_s^{g' \rightarrow g} \right) \tilde{\phi}_y^{g'}$$

$$9 \frac{p^2}{D} \sum_{g \neq g'} \left(\frac{\chi^g}{\lambda} v \sigma_f^{g'} + \sigma_s^{g' \rightarrow g} \right) \tilde{\phi}_z^{g'}$$

[注]

1. $\phi(u)$ は Γ_u 面に隣接するノードにおける ϕ の値を示す。
他の面 ($\Gamma_v, \Gamma_w, \Gamma_b, \Gamma_t$) についても同様である。
2. $L_{other}(C)$ は点 C における、着目ノードを除く 11 の隣接ノードからの漏れの和である。

This is a blank page.

国際単位系(SI)と換算表

表1 SI基本単位および補助単位

量	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質量	モル	mol
光度	カンデラ	cd
平面角	ラジアン	rad
立体角	ステラジアン	sr

表3 固有の名称をもつSI組立単位

量	名称	記号	他のSI単位による表現
周波数	ヘルツ	Hz	s^{-1}
力	ニュートン	N	$m \cdot kg/s^2$
圧力、応力	パスカル	Pa	N/m^2
エネルギー、仕事、熱量	ジュール	J	$N \cdot m$
功率、放射束	ワット	W	J/s
電気量、電荷	クーロン	C	$A \cdot s$
電位、電圧、起電力	ボルト	V	W/A
静電容量	ファラード	F	C/V
電気抵抗	オーム	Ω	V/A
コンダクタンス	ジーメンス	S	A/V
磁束	ウェーバ	Wb	$V \cdot s$
磁束密度	テスラ	T	Wb/m^2
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A
セルシウス温度	セルシウス度	$^{\circ}C$	
光束度	ルーメン	lm	$cd \cdot sr$
照度	ルクス	lx	lm/m^2
放射能	ベクレル	Bq	s^{-1}
吸収線量	グレイ	Gy	J/kg
線量当量	シーベルト	Sv	J/kg

表2 SIと併用される単位

名称	記号
分、時、日	min, h, d
度、分、秒	°, ', "
リットル	l, L
トン	t
電子ボルト	eV
原子質量単位	u

$$1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ u} = 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

表5 SI接頭語

倍数	接頭語	記号
10^{18}	エクサ	E
10^{15}	ペタ	P
10^{12}	テラ	T
10^9	ギガ	G
10^6	メガ	M
10^3	キロ	k
10^2	ヘクト	h
10^1	デカ	da
10^{-1}	デシ	d
10^{-2}	センチ	c
10^{-3}	ミリ	m
10^{-6}	マイクロ	μ
10^{-9}	ナノ	n
10^{-12}	ピコ	p
10^{-15}	フェムト	f
10^{-18}	アト	a

(注)

- 表1～5は「国際単位系」第5版、国際度量衡局1985年刊行による。ただし、1eVおよび1uの値はCODATAの1986年推奨値によった。
- 表4には海里、ノット、アール、ヘクトルも含まれているが日常の単位なのでここでは省略した。
- barは、JISでは流体の圧力を表わす場合に限り表2のカテゴリーに分類されている。
- EC関係理事会指令ではbar、barnおよび「血圧の単位」mmHgを表2のカテゴリーに入れている。

換算表

力	$N (=10^5 \text{ dyn})$	kgf	lbf
	1	0.101972	0.224809
	9.80665	1	2.20462
	4.44822	0.453592	1

$$\text{粘度 } 1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ P(ポアズ)} (\text{g}/(\text{cm} \cdot \text{s}))$$

$$\text{動粘度 } 1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ St(ストークス)} (\text{cm}^2/\text{s})$$

圧力	$\text{MPa} (=10 \text{ bar})$	kgf/cm^2	atm	mmHg(Torr)	$\text{lbf/in}^2(\text{psi})$
	1	10.1972	9.86923	7.50062×10^3	145.038
力	0.0980665	1	0.967841	735.559	14.2233
	0.101325	1.03323	1	760	14.6959
	1.33322×10^{-4}	1.35951×10^{-3}	1.31579×10^{-3}	1	1.93368×10^{-2}
	6.89476×10^{-3}	7.03070×10^{-2}	6.80460×10^{-2}	51.7149	1

エネルギー・仕事・熱量	$J (=10^7 \text{ erg})$	$\text{kgf} \cdot \text{m}$	$\text{kW} \cdot \text{h}$	cal(計量法)	Btu	ft · lbf	eV
	1	0.101972	2.77778×10^{-7}	0.238889	9.47813×10^{-4}	0.737562	6.24150×10^{18}
	9.80665	1	2.72407×10^{-6}	2.34270	9.29487×10^{-3}	7.23301	6.12082×10^{19}
	3.6×10^6	3.67098×10^5	1	8.59999×10^5	3412.13	2.65522×10^6	2.24694×10^{25}
	4.18605	0.426858	1.16279×10^{-6}	1	3.96759×10^{-3}	3.08747	2.61272×10^{19}
	1055.06	107.586	2.93072×10^{-4}	252.042	1	778.172	6.58515×10^{21}
	1.35582	0.138255	3.76616×10^{-7}	0.323890	1.28506×10^{-3}	1	8.46233×10^{18}
	1.60218×10^{19}	1.63377×10^{20}	4.45050×10^{-26}	3.82743×10^{-20}	1.51857×10^{-22}	1.18171×10^{-19}	1

放射能	Bq	Ci
	1	2.70270×10^{-11}
	3.7×10^{10}	1

照射線量	C/kg	R
	1	3876
	2.58×10^{-4}	1

線量当量	Sv	rem
	1	100
	0.01	1

(86年12月26日現在)

三角柱形状拡散ノード法コードにおける収束加速法の適用性の検討

R100

古紙配合率100%
白色度70%再生紙を使用しています