

JAERI-Research

JP0350002

2002-030



最尤法を用いた反応度と中性子源強度の決定

2002年12月

西原 健司・岩永 宏平*・山根 剛・岡嶋 成晃

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合せは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-1195 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越し下さい。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-1195 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布を行っております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 〒319-1195, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 2002

編集兼発行 日本原子力研究所

最尤法を用いた反応度と中性子源強度の決定

日本原子力研究所東海研究所大強度陽子加速器施設開発センター

西原 健司・岩永 宏平*・山根 剛・岡嶋 成晃

(2002年10月9日受理)

未臨界状態で中性子源の存在する臨界実験装置において、定常状態から反応度を加える、あるいは中性子源強度を変化させるなどして、他の定常状態に移行するような実験では、反応度と中性子源の変化が終息した後に中性子束が過渡変化している。この状態を解析して、その区間における反応度や中性子源強度、あるいはその両方を得る手法として、一般に逆動特性法(IK法)を用いることが出来る。しかし、従来の解法では測定された出力の誤差を考慮した、最も尤度の高い解を求めることや、得られた測定値の誤差を評価することができなかった。本研究では、最尤法を適応して、もっとも尤度の高い反応度と中性子源強度を決定し、その誤差を得る手法を開発した。また、FCA のロッドドロップ実験に対して本手法を適用し、手法の妥当性を確認した。

Determination of Reactivity and Source Intensity
Based on the Maximum Likelihood Method

Kenji NISHIHARA, Kohei IWANAGA*,
Tsuyoshi YAMANE and Shigeaki OKAJIMA

Center for Proton Accelerator Facilities
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received October 9, 2002)

During the experiments using a critical assembly at subcritical state with a neutron source such that reactivity or source intensity of a stationary state is varied and the core shifts to another stationary state, the neutron flux transitionally changes after some change of the reactivity or source intensity. The inverse kinetics method (IK method) can generally adopted as a technique to obtain the reactivity and/or source intensity by analyzing the neutron flux profile. However, the conventional analysis methods were not able to obtain the solution with the maximum likelihood considering the error of the measured neutron flux and to estimate the error of the solution. In the present research, by adopting the maximum likelihood methodology to the problem, a new technique has been developed to obtain the reactivity and source intensity with maximum likelihood and the errors of them. Moreover, the technique was applied to the rod drop experiment at FCA, and the validity of the technique was checked.

Keywords: IK Method, Maximum Likelihood, Rod Drop, Source Jerk, Reactivity Measurement, FCA

* Tokyo Institute of Technology

目次

1 緒言	1
2 従来の解析手法	2
2.1 積分法	3
2.2 板垣の方法	3
2.3 田村の方法	4
2.4 グルーピング法	4
3 最尤法に基づく手法	5
3.1 各測定点の確率密度	6
3.2 先行核密度の計算	7
3.3 反復の初期値	8
3.4 動特性方程式を解く	8
3.5 Newton 法による収束	9
3.5.1 残差の定義	9
3.5.2 次候補 (Newton 法)	9
3.5.3 残差の偏微分	10
3.5.4 $\log f$ の偏微分	10
3.5.5 $\frac{\partial P^c}{\partial \rho}$ の解法	11
3.5.6 $\frac{\partial P^c}{\partial S}$ の解法	11
3.5.7 $\frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho^2}$ の解法	12
3.5.8 $\frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho \partial S}$ の解法	13
3.5.9 $\frac{\partial^2 P^c}{\partial S^2}$ の解法	14
3.6 信頼区間	14
3.7 カイ二乗検定	18

4 数値実験	19
4.1 基準ケース	20
4.2 網羅的な比較	22
4.3 解析区間の変化	22
4.4 測定間隔の変化	23
4.5 検出器の計数統計の影響	23
4.6 落下のタイミングの影響	23
5 FCA 実験への適用	43
5.1 ロッドドロップ実験	44
5.2 反応度下降・中性子源ありの実験	47
5.3 反応度上昇・中性子源ありの実験	49
5.4 反応度下降・中性子源なしの実験	51
5.5 反応度上昇・中性子源なしの実験	53
6 結言	55
謝辞	56
参考文献	56
付録	57
A IK-ML コードの説明	57
A.1 入力	57
A.2 測定値が瞬間値である場合と、積分値である場合	60
B KINETICS コードの説明	62

Contents

1. Introduction	1
2. Conventional Technique	2
2.1 Integration Method	3
2.2 Method of Itagaki	3
2.3 Method of Tamura	4
2.4 Grouping Method	4
3. Technique Based on the Maximum Likelihood Methodology	5
3.1 Probability Density of the Measured Data	6
3.2 Calculation of Precursor Density	7
3.3 The Initial Value of Iteration	8
3.4 Solution of the Kinetics Equation	8
3.5 Convergence using Newton Method	9
3.5.1 Definition of Residual	9
3.5.2 Next Candidate (Newton Method)	9
3.5.3 Partial Differentiation of Residual	10
3.5.4 Partial Differentiation of Log f	10
3.5.5 Solution of $\frac{\partial P^c}{\partial \rho}$	11
3.5.6 Solution of $\frac{\partial P^c}{\partial S}$	11
3.5.7 Solution of $\frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho^2}$	12
3.5.8 Solution of $\frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho \partial S}$	13
3.5.9 Solution of $\frac{\partial^2 P^c}{\partial S^2}$	14
3.6 Confidence Interval	14
3.7 χ^2 Test	18

4. Computing Experiments	19
4.1 Standard Case	20
4.2 Comprehensive Comparison	22
4.3 Influence of the Analysis Section	22
4.4 Influence of the Time Bin of the Measurement	23
4.5 Influence of the Sensitivity of the Detector	23
4.6 Influence of the Timing of Rod Drop	23
5. Application to the Experiment in FCA	43
5.1 Rod Drop Experiment	44
5.2 Reactivity Drop Experiment with Source	47
5.3 Reactivity Rise Experiment with Source	49
5.4 Reactivity Drop Experiment without Source	51
5.5 Reactivity Rise Experiment without Source	53
6. Conclusion	55
Acknowledgment	56
Reference	56
Appendices	57
A. Description of IK-ML Code	57
A.1 Input Manual	57
A.2 Cases that the Measurement Data is Integrated or Instant Value	60
B. Description of Kinetics Code	62

1 緒言

中性子源を持ち込んだ臨界実験装置において行われる未臨界度測定実験には、様々な手法があるが、大きく三つの種類に分けることが出来る。静的手法、動的手法及び統計的手法である。静的手法とは中性子源増倍法などのように、定常状態における中性子束測定結果から、反応度を知る方法である。動的手法は、反応度もしくは中性子源強度を変化させて、中性子束の時間変化を測定し、反応度と中性子源強度の測定値を得るものである。統計的手法は、炉内の中性子には相関がある事を利用して、定常状態での中性子束測定データの揺らぎ（分散）から反応度を得る手法であり、ロッシ α 、ファイマン α などがある。

動的手法は時間スケールを区切ることで、更に二つに分けることが出来る。即発中性子寿命程度の時間と遅発中性子寿命程度の時間である。前者としてはパルス中性子法がその代表であり、外挿法のような即発跳躍を見積もる測定法もこれに分類できる。後者は、ペリオド法、ロッドドロップ法、あるいはソースジャーカ法を行い、数百秒間の中性子束変化を解析する手法である。今回の研究は、この動的手法の後者に対して行われたものである。

この後者の実験に共通する状態は、(1)中性子束が変化していることと、(2)反応度と中性子源強度が不变であること、この二点がある時間区間ににおいて成立していることである。また、(3)その時間区間以前の測定データが存在する事、が反応度などを得る為に必要となる。実験にとって好ましい条件としては、(4)一点炉近似が成立していること、(5)中性子束の変化が大きいこと、が挙げられる。このような条件が成立している区間を解析して、反応度と中性子源強度を得るために、従来から様々な手法が提案してきた。後に細かく手法を述べるが、ここでは、概要のみを触れておく。

最も一般的に行われているのは積分法¹である。この手法では、反応度あるいは中性子源強度の変化によって体系が変化した後に、中性子束が変化している区間と、その後の中性子束が一定の区間で中性子束を積分し、それから反応度と中性子源強度を得る。この手法の短所は必ず長時間の測定が必要である事である。すなわち、中性子束が一定になるまで待つ必要がある。

最近研究がなされた板垣²や田村³の方法、あるいはHogenboomが提案したGrouping法⁴は、もっと短い測定データに対しても適用できる。これらの三つの方法は全て同じカテゴリに分類できるが、測定精度や実験条件の悪化に伴って、それぞれに異なった結果を与え、また、誤差の評価がなされないため、取り扱いが困難である。その他として、Yang-Albrechtが提案した方法⁵は、中性子源強度と反応度を交互に得るものであったが、解法が複雑でありほとんど用いられていない。

今回開発した手法は、上述のどの手法にも分類されない。本手法では、まず、中性子束の各測定データに対して確率密度を与える。続いて、ある反応度と中性子源強度の組に対して一点炉動特性方程式を解き、中性子束を得る。この計算された中性子束と、各測定データの確率密度関数から、この反応度と中性子源強度の組の尤度が求まるので、この尤度を最大にする組を見つける。これが最尤解であり、同時に、得られた解の信頼区間も求めることが出来る。この方法は、一般に、最尤法に基づいた回帰分析と呼ばれる。最尤=Maximum Likelihoodから、最尤逆動特性法、あるいは、IK-ML法と呼ぶ事にする。

IK-ML法の利点は、測定精度や実験条件が悪化したり、測定時間が極めて短くなったりしても破綻することが少なく、また、同時に信頼区間を求められる点である。短所としては、最尤解の探索は、数値計算に頼らざるを得ない事である。

本論文では、まず、二章で従来法の整理を行い、三章でIK-ML法の数式的な導出を行う。四章では、様々な体系に対する数値実験に従来法とIK-ML法を適用し、評価する。五章では、FCAで行われた実験⁶を解析する。なお、本研究では、空間依存性、すなわち一点炉近似の限界については議論していない。

付録として、IK-ML法を実装したIK-MLコードと、一点炉の動特性を解く為のKineticsコードの使用法を載せる。これらのコードはMicrosoft Excel上で稼動し、簡便に使用可能である。

2 従来の解析手法

本章では、動的手法の解析において用いられてきた従来法を説明する。従来法とは、積分法、板垣の方法、田村の方法、そしてグルーピング法である。

これらの解析法は、すべて、一点炉動特性方程式から出発する。

$$\Lambda \frac{d}{dt} P(t) = (\rho - \beta)P(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) + S \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} C_i(t) = \beta_i P(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (2)$$

Λ は即発中性子世代時間、 ρ は反応度、 β は実効遅発中性子割合、 $P(t)$ は毎秒発生する核分裂中性子数、 λ_i は*i*群遅発先行核崩壊定数、 $C_i(t)$ は*i*群の遅発中性子先行核密度、 S は中性子源強度、 β_i は*i*群実効遅発中性子割合である。なお、先行核は6群に分けるものとする。

$P(t)$ 、 S 、及び $C_i(t)$ を適當倍する事によって、核分裂中性子数 $P(t)$ を炉心の出力や、中性子束の測定結果などに読み替える事が出来る。

(2)式から、時刻 t_0 における初期条件、 $C_i(t_0) = C_{i0}$ を使って、次の式を得る。

$$C_i(t) = C_{i0} e^{-\lambda_i(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \beta_i e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt' \quad (3)$$

$t_0 \ll t$ であるなら、右辺第一項は無視できる。また、 $t < t_0$ において十分に長い平衡状態が実現されているなら、その出力を $P(t < t_0) = P_0$ として、

$$C_{i0} = \frac{\beta_i}{\lambda_i} P_0 \quad (4)$$

となる。

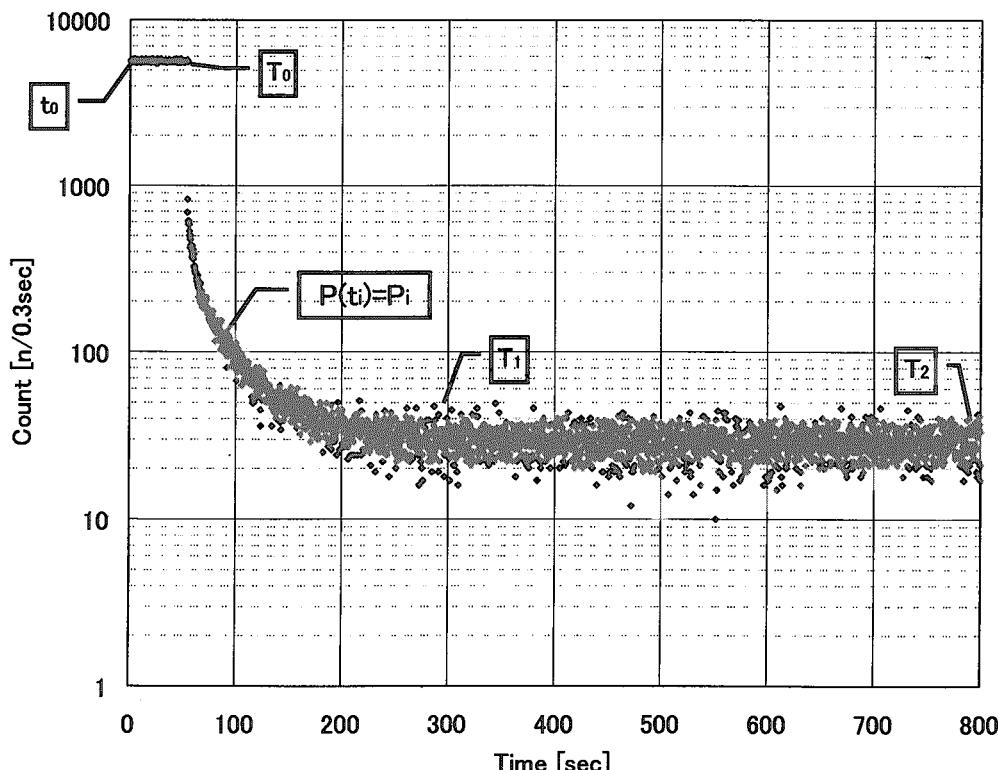


図 1 測定例

今、図 1 のように、 $t_0 \leq t$ における測定データ $P^m(t_j) = P_j^m$ ($j = 1, 2, \dots, N$) が得られたとする。すると、(3)式から、全ての測定点に対して、 $C_i^m(t_j) = C_{ij}^m$ を計算することが出来る。以降、右肩の m は、実際に測定された中性子束と、それから導かれた遅発先行核である事を意味する。ここまででは、全ての従来法で共通な過程である。

また、(3)式を(1)式に代入して次式を得る。

$$\rho = \beta - \frac{1}{P(t)} \left[-\Lambda \frac{dP(t)}{dt} + \sum_i \lambda_i C_{i0} e^{-\lambda_i(t-t_0)} + \int_{t_0}^t dt' \sum_i \lambda_i \beta_i e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') + S \right] \quad (5)$$

この式は、一般に用いられる IK 法の式であり、中性子源 S が既知、あるいは 0 である場合には、反応度 ρ を全ての測定点に対して与える事が出来る。

2. 1 積分法

(1)式及び(2)式を ρ と S はが不変であるような $t_a \leq t \leq t_b$ の区間で積分する。

$$\Lambda [P(t)]_{t_a}^{t_b} = (\rho - \beta) \int_{t_a}^{t_b} P(t) dt + \sum_i \lambda_i \int_{t_a}^{t_b} C_i(t) dt + (t_b - t_a) S \quad (6)$$

$$[C_i(t)]_{t_a}^{t_b} = \beta_i \int_{t_a}^{t_b} P(t) dt - \lambda_i \int_{t_a}^{t_b} C_i(t) dt \quad (7)$$

これら 7 つの式を足し合わせて、次式を得る。

$$\Lambda(P(t_b) - P(t_a)) + \sum_i (C_i(t_b) - C_i(t_a)) = \rho \int_{t_a}^{t_b} P(t) dt + (t_b - t_a) S \quad (8)$$

実際の離散的な測定データ列 $P^m(t_j) = P_j^m$ に対しては、各データの測定間隔を Δt_j として、

$$\Lambda(P_b^m - P_a^m) + \sum_i (C_{ib}^m - C_{ia}^m) = \rho \sum_{j=a}^b P_j^m \Delta t_j + (t_b - t_a) S \quad (9)$$

等となろう。(9)式において、未知なパラメータは ρ と S だけなので、二つの区間について(9)式を計算することで、 ρ と S を求めることが出来ることがわかる。

積分法では、この二つの区間を図 1 の $T_0 \leq t \leq T_1$ と $T_1 \leq t \leq T_2$ にとる。 T_0 は制御棒落下などによって、炉心に変化が加わった直後の時間、 T_1 は中性子束が十分に一定値になった時間、 T_2 は実験の終了時間である。このように区間を取ると、後者の区間では、(9)式の左辺は 0 となる。この平衡状態での測定値を P_∞^m とすると、結局、

$$\rho = \frac{\Lambda(P^m(T_1) - P^m(T_0)) + \sum_i (C_i^m(T_1) - C_i^m(T_0))}{\sum_{j=T_0}^{T_1} (P_j^m - P_\infty^m) \Delta t_j} \quad (10)$$

$$S = -P_\infty^m \rho \quad (11)$$

となる。

2. 2 板垣の方法

(1)式を測定データ列に置き換えて適当に変形すると、次式のようになる。

$$P_j^m = \frac{1}{\beta - \rho} \left[\sum_i \lambda_i C_{ij}^m - \Lambda (P_j^m - P_{j-1}^m) / \Delta t_j \right] + \frac{S}{\beta - \rho} \quad (12)$$

板垣は微分項を影響小として除いたが、 Λ が大きい体系では無視することは出来ないので、ここでは残しておく。左辺 P_j^m を y 軸、右辺の [] の中身を x 軸にプロットすると、 ρ と S が一

定の領域では、直線となる。そして、この直線の傾きと切片から、 ρ と S を求めることが出来る。傾きと切片を求める時には最小二乗法によるフィッティングを行う。

2.3 田村の方法

田村の方法と板垣の方法は殆ど同様である。(12)式を、

$$P_j^m = -\frac{1}{\rho} \left[-\beta P_j^m + \sum_i \lambda_i C_{ij}^m - \Lambda (P_j^m - P_{j-1}^m) / \Delta t_j \right] - \frac{S}{\rho} \quad (13)$$

と変形して、左辺 P_j^m を y 軸、右辺の [] の中身を x 軸にプロットすると、 ρ と S が一定の領域では、直線となるので、板垣の方法と同様に最小二乗法で ρ と S を求める。

2.4 グルーピング法

(12)式を、変形して次式を得る。

$$\sum_i \lambda_i C_{ij}^m - \Lambda (P_j^m - P_{j-1}^m) / \Delta t_j = (\beta - \rho) P_j^m - S \quad (14)$$

左辺を y 軸、右辺の P_j^m を x 軸にプロットすると、 ρ と S が一定の領域では、直線となるので、その傾きと切片から ρ と S を求める。ただし、板垣の方法と異なり、グルーピング法では、傾きと切片の決定に最小二乗法を用いない。まず、直線の要素を同じ個数で 3 分割して、それぞれの平均をとる。この平均値が、時系列の順番に (X_1, Y_1) 、 (X_2, Y_2) 、 (X_3, Y_3) であったとすると、 (X_1, Y_1) と (X_3, Y_3) から、傾きを求め、全体の平均値から切片を求める。すなわち、次式の如くに ρ と S が求まる。

$$\rho = \beta - \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1} \quad (15)$$

$$S = -\frac{1}{3} \left(Y_1 + Y_2 + Y_3 - \frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1} (X_1 + X_2 + X_3) \right) \quad (16)$$

3 最尤法に基づく手法

本研究で開発した IK-ML 法を説明する。前章で一点炉動特性方程式から出発して、いくつかの解析手法によって ρ と S を得る方法を示したが、まず、どうすれば、これらの優劣を決定できるかを考えよう。

図 2 に示すような、区間 $t_1 \sim t_N$ の N 個の測定値から、ある ρ と S の組が得られたとする。これらを(17)(18)式の一点炉動特性方程式に代入して、計算された中性子束の時間履歴を $P^c(\rho, S; t)$ とする。境界（初期）条件は時刻 t_0 での測定値である $P_0^m = P^m(t_0)$ と、時刻 t_0 以前の測定値から計算された $C_{i0}^m = C_i^m(t_0)$ である。なお、 P_0^m のばらつきは $P^c(\rho, S; t)$ の計算に殆ど影響を与える、専ら C_{i0}^m が影響する。

$$\Lambda \frac{d}{dt} P^c(\rho, S; t) = (\rho - \beta) P^c(\rho, S; t) + \sum_i \lambda_i C_i^c(\rho, S; t) + S \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} C_i^c(\rho, S; t) = \beta_i P^c(\rho, S; t) - \lambda_i C_i^c(\rho, S; t) \quad (18)$$

$$\text{境界条件: } P^c(\rho, S; t_0) = P_0^m, \quad C_i^c(\rho, S; t_0) = C_{i0}^m \quad (19)$$

このように求めた $P^c(\rho, S; t)$ は測定値 P_i^m と出来る限り一致しているべきである。例えば、間違った ρ と S に対しては、図 3 の破線に示すように、 $P^c(\rho, S; t)$ は測定値と違った値となる。それに対し、適切に見積もられた ρ と S では、 $P^c(\rho, S; t)$ は実線で示すように測定データ列の中央を通るであろう。

“中央を通る”とは、もっと数学的に言えば、測定値が真値の周りにどのような確率で分布しているかを知った上で、 $P^c(\rho, S; t_i)$ が P_i^m という測定値として現れてくる確率の、全測定点についての積が最も大きい、ということである。この確率の積を“尤度”、尤度が最も高いことを“最尤である”と言い、そのような ρ と S を“最尤値”、あるいは“最尤解”と呼ぶ。最尤解を最も優れた解であるとするのが、本稿の出発点である。

IK-ML 法では、最尤である ρ と S を図 4 に示したフローチャートに沿って求める。まず、各測定点がどのような確率密度で真値からばらついているかを知る必要がある。これには実験体系毎の検出系に応じた知識が必要となる。続いて、 C_{ij}^m を計算する。これは、反復の初期値を

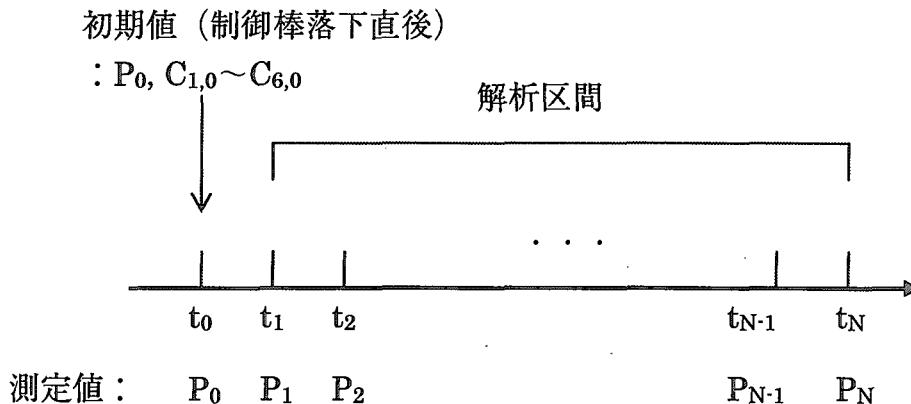


図 2 測定データ概念

知る時、および、 $P^c(\rho, S; t)$ 境界条件に必要となる。続いて、反復の初期値を得るが、ここでは、板垣の方法を用いた。

反復が開始されると、まず、動特性方程式が解かれて $P^c(\rho, S; t)$ が求まる。その後と、尤度と、 $P^c(\rho, S; t_i)$ の ρ と S による偏微分が計算され、次の候補値が求められる。十分に収束した後は、その ρ と S 周辺の尤度分布から、信頼区間を見積もることが出来る。

以上が本手法の基本的な考え方であるが、これは一般に回帰分析と呼ばれる手順そのものである。この手順については、文献⁷に詳しい。以下、具体的な手法の説明に移る。

3.1 各測定点の確率密度

まず、各測定点が真の値（検出器位置での中性子束）の周囲にどのような確率密度で分布しているかを知る必要がある。中性子束の測定においては、次のようなケースが考えられよう。ただし、測定時刻 t_j において、真の値が $P^c(t_j)$ であるとしたとき、測定値が P_j^m をとる確率を $f(P_j^m, P^c(t_j))$ と表す。

- (1) 標準偏差が既知である正規分布

$$f(P_j^m, P^c(t_j)) = (2\pi\sigma_j^2)^{-1/2} \exp(-(P_j^m - P^c)^2 / 2\sigma_j^2) \quad (20)$$

- (2) 標準偏差が、真の値の関数（例えば次式は平方根）になっている正規分布

$$f(P_j^m, P^c(t_j)) = (2\pi P^c)^{-1/2} \exp(-(P_j^m - P^c)^2 / 2P^c) \quad (21)$$

- (3) ポアソン分布

$$f(P_j^m, P^c(t_j)) = P^c e^{-P^c} / P_j^m! \quad (22)$$

典型的な計数管の場合(3)が適用できる。ただし、50 以上の高カウント時は、計算上、(2)を

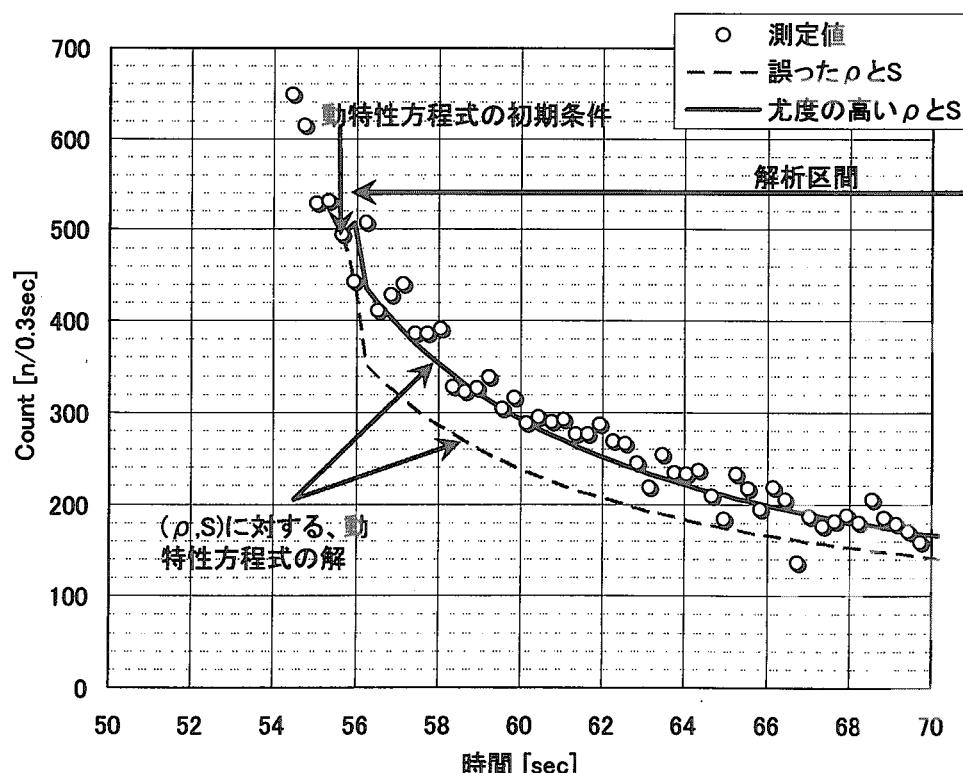


図 3 最尤法の概念図

用いた方が簡便である。

(1)と(2)は似た形の式となっているが、各測定点の標準偏差が既知か否かで違っている。注意するべき点は、(1)において、 $\sigma_j = \sqrt{P_j^m}$ などとして、既知であるとしてはいけない事である。このような事をした場合、絶対値の小さな方に揺らいだ測定値の誤差が小さく、大きな方に揺らいだ測定値の誤差が大きいとされてしまうため、全体に $P^c(\rho, S; t)$ が小さい方向に見積もられてしまう。

3.2 先行核密度の計算

(3)式を用いて、 $P^m(t_j) = P_j^m$ から $C_i^m(t_j) = C_{ij}^m$ を計算する。

$$C_i(t) = C_{i0} e^{-\lambda_i(t-t_0)} + \int_{t_0}^t \beta_i e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt' \quad (3)$$

今、図 5 のように等間隔な測定点があるとする。求めたい測定点の一つ前の点における先行核密度 $C_{i,j-1}^m$ ($j \geq 1$) が既知ならば、求めたい測定点の先行核密度は次式で決まる。

$$C_{i,j}^m = C_{i,j-1}^m e^{-\lambda_i(t_j - t_{j-1})} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \beta_i e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt' \quad (23)$$

例えば、図 5 のように P を矩形として考えるならば、次式のように積分する。

$$C_{i,j}^m = C_{i,j-1}^m e^{-\lambda_i(t_j - t_{j-1})} + \frac{\beta_i}{\lambda_i} \left\{ P_{j-1}^m \left(e^{-\lambda_i(t_j - s_j)} - e^{-\lambda_i(t_j - t_{j-1})} \right) + P_j^m \left(1 - e^{-\lambda_i(t_j - s_j)} \right) \right\} \quad (24)$$

$$\text{ただし、 } s_j = (t_{j-1} + t_j)/2$$

そのほか、 P を台形として考えることも出来よう。この繰り返しで、全ての $C_{i,j}^m$ を求めること

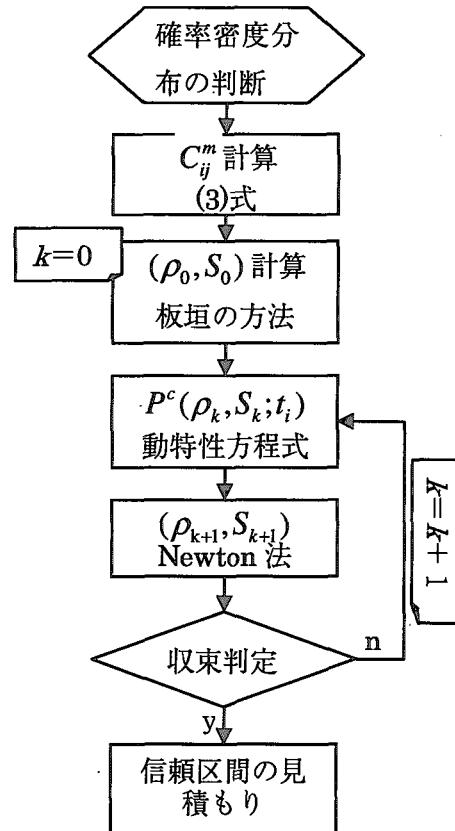


図 4 フローチャート

が出来る。

3.3 反復の初期値

最初の (ρ_0, S_0) の組を求める。ここでは、板垣の方法による解を初期値とする。

具体的には、区間 $t_1 \sim t_N$ の N 個の測定値から (ρ_0, S_0) を決定する場合、式(11)の右辺[]の中身を D_j として最小二乗法を施すと、以下のように求まる。

$$P_j^m = \frac{1}{(\beta - \rho_0)} D_j + \frac{S_0}{(\beta - \rho_0)} \quad (25)$$

$$\frac{1}{\beta - \rho_0} = \frac{N \sum P_j^m \cdot D_j - \sum P_j^m \sum D_j}{N \sum D_j^2 - (\sum D_j)^2} \quad (26)$$

$$\frac{S_0}{\beta - \rho_0} = \frac{\sum P_j^m - \sum D_j / (\beta_0 - \rho_0)}{N} \quad (27)$$

3.4 動特性方程式を解く

(17)(18)式の解法を示すが、一般的なものなので解のみを載せる。得られる解は次式である。

$$P(t) = \sum_{l=1}^7 a_l e^{\omega_l t} - \frac{S}{\rho} \quad (28)$$

$$C_i(t) = \sum_{l=1}^7 a_{il} e^{\omega_l t} - \frac{\beta_i}{\lambda_i} \frac{S}{\rho} \quad (29)$$

ω_l は(30)式の根であり、7個存在する。(30)式は、数値的に解く。

$$\rho = \Lambda \omega + \sum_{i=1}^7 \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i} \quad (30)$$

また、各指指数モードの係数は、初期条件により次の一次連立方程式で決定される。

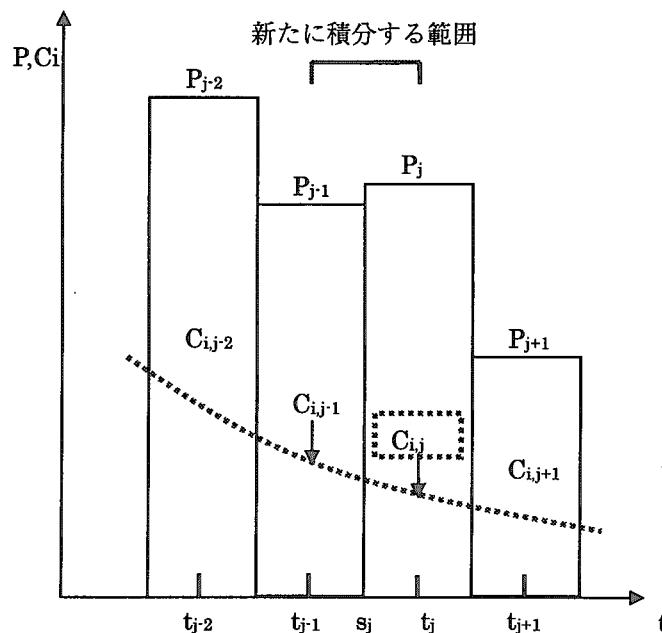


図 5 C_{ij}^m の計算方法

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^7 a_l = P_0^m + \frac{S}{\rho} \\ \sum_{l=1}^7 \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_l} a_l = C_{i,0}^m + \frac{S}{\rho} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \end{cases} \quad (31)$$

$$a_{il} = \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_l} a_l \quad (32)$$

3.5 Newton 法による収束

Newton 法を用いて、尤度を最大にする為の、次の候補 (ρ_{k+1}, S_{k+1}) を探索する。まず、尤度に関連する残差 $V(\rho, S)$ を定義する。残差が最小である時、尤度は最大となるように定義される。次に、残差の (ρ, S) による偏微分を求める必要がある。この偏微分から、次候補を得ることが出来る。

3.5.1 残差の定義

まず、尤度 $L(\rho, S)$ を定義する。尤度は全測定点の確率密度の積として定義され、次式で表される。

$$L(\rho, S) = \prod_{j=1}^N f(P_j^m, P^c(\rho, S; t_j)) \quad (33)$$

残差 V は次式で定義される。

$$\begin{aligned} V(\rho, S) &= -2 \log(L(\rho, S)) \\ &= -2 \sum_{j=1}^N \log \{f(P_j^m, P^c(\rho, S; t_j))\} \end{aligned} \quad (34)$$

すなわち、尤度の対数をとり、-2 を乗じて導かれる。マイナスを乗じているので、尤度が最大になるとき残差は最小となる。2 は本来乗じる必要は無いが、正規分布を最小二乗法で解析する時の残差の定義に倣った。正規分布に従うデータに対する残差とは、各データの揺らぎを二乗して標準偏差で規格化した量の総和である。ここで定義された残差 V は、この正規分布に対する残差とは異なるが、同じような性質を持つ量である。

残差が最小である時、停留しているので、次式が成立する。すなわち、最も尤度の高い (ρ, S) の組が満たすべき条件は次式である。

$$\left. \frac{\partial V(\rho, S)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_k} = 0, \quad \left. \frac{\partial V(\rho, S)}{\partial S} \right|_{S=S_k} = 0 \quad (35)$$

3.5.2 次候補 (Newton 法)

(35)式への収束の為の次候補への変化は、次式で求められる。

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=\rho_k, S=S_k} & \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial S} \right|_{\rho=\rho_k, S=S_k} \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial S} \right|_{\rho=\rho_k, S=S_k} & \left. \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|_{\rho=\rho_k, S=S_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta S \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial V}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_k, S=S_k} \\ \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_{\rho=\rho_k, S=S_k} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \Delta \rho, \quad S_{k+1} = S_k + \Delta S \quad (37)$$

3. 5. 3 残差の偏微分

(36)式に一階および二階の偏微分が現れるが、これは、以下に示すように、 $P^c(\rho, S; t)$ の偏微分に分解でき、最終的には、動特性方程式と同様に解ける。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\rho, S)}{\partial \rho} &= -2 \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \rho} \log \{f(P_j^m, P^c(\rho, S; t_j))\} \\ &= -2 \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \log f(P_j^m, P^c)}{\partial P^c} \cdot \frac{\partial P^c(\rho, S; t_j)}{\partial \rho} \right]\end{aligned}\quad (38)$$

$$\frac{\partial V(\rho, S)}{\partial S} = -2 \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \log f}{\partial P^c} \cdot \frac{\partial P^c}{\partial S} \right] \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 V(\rho, S)}{\partial \rho^2} = -2 \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \log f}{\partial P^c} \cdot \frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \log f}{\partial P^{c2}} \cdot \left(\frac{\partial P^c}{\partial \rho} \right)^2 \right] \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 V(\rho, S)}{\partial \rho \partial S} = -2 \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \log f}{\partial P^c} \cdot \frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho \partial S} + \frac{\partial^2 \log f}{\partial P^{c2}} \cdot \frac{\partial P^c}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial P^c}{\partial S} \right] \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 V(\rho, S)}{\partial S^2} = -2 \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial \log f}{\partial P^c} \cdot \frac{\partial^2 P^c}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \log f}{\partial P^{c2}} \cdot \left(\frac{\partial P^c}{\partial S} \right)^2 \right] \quad (42)$$

3. 5. 4 $\log f$ の偏微分

前節には $\frac{\partial \log f}{\partial P^c}$ と $\frac{\partial^2 \log f}{\partial P^{c2}}$ の項が現れる。3.1 で示したそれぞれの確率分布について、この偏微分を示す。

(1) 標準偏差の絶対値が既知である正規分布

$$\frac{\partial \log f}{\partial P^c} = \frac{P_j^m - P^c}{\sigma_j^2} \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial P^{c2}} = -\frac{1}{\sigma_j^2} \quad (44)$$

(2) 標準偏差が、真の値の関数（例えば次式は平方根）になっている正規分布

$$\frac{\partial \log f}{\partial P^c} = -\frac{1}{2P^{c2}} \left(P^{c2} + P^c - P_j^m \right) \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial P^{c2}} = -\frac{1}{2P^{c3}} \left(-P^c + 2P_j^m \right) \quad (46)$$

(3) ポアソン分布

$$\frac{\partial \log f}{\partial P^c} = \frac{P_j^m}{P^c} - 1 \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial P^{c2}} = -\frac{P_j^m}{P^{c2}} \quad (48)$$

3.5.5 $\frac{\partial P^c}{\partial \rho}$ の解法

3.5.3 節に現れる $\frac{\partial P^c}{\partial \rho}$ の解法を示す。まず、式(17)～(19)を ρ で偏微分する。

$$\Lambda \frac{d}{dt} \frac{\partial P^c}{\partial \rho} = (\rho - \beta) \frac{\partial P^c}{\partial \rho} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial C_i^c}{\partial \rho} + P^c \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial C_i^c}{\partial \rho} = \beta_i \frac{\partial P^c}{\partial \rho} - \lambda_i \frac{\partial C_i^c}{\partial \rho} \quad (50)$$

$$\text{境界条件: } \frac{\partial P^c(\rho, S; t_0)}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial C_i^c(\rho, S; t_0)}{\partial \rho} = 0 \quad (51)$$

この式から、 $P^c(\rho, S; t)$ を中性子源とする、動特性方程式を解けばよいことが分かる。この解は、次式のようになっている。

$$\frac{\partial P^c(\rho, S; t)}{\partial \rho} = \sum_{l=1}^7 a_l^\rho e^{\omega_l t} + \sum_{l=1}^7 b_l^\rho t e^{\omega_l t} + \frac{S}{\rho^2} \quad (52)$$

$$\frac{\partial C_i^c(\rho, S; t)}{\partial \rho} = \sum_{l=1}^7 a_{i,l}^\rho e^{\omega_l t} + \sum_{l=1}^7 b_{i,l}^\rho t e^{\omega_l t} + \frac{S}{\rho^2} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \quad (53)$$

ω_l は(29)式と同じ次式の根であり、7 個存在する。

$$\rho = \Lambda \omega + \sum_{i=1}^7 \frac{\beta_i \omega}{\omega + \lambda_i} \quad (54)$$

b_l^ρ 、 $a_{i,l}^\rho$ 及び $b_{i,l}^\rho$ は次式である。 a_l は(30)式の解に現れる数値と同一である。

$$b_l^\rho = \frac{a_l}{\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{(\omega_i + \lambda_i)^2}} \quad (55)$$

$$a_{i,l}^\rho = \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} a_l^\rho - \frac{\beta_i}{(\omega_l + \lambda_i)^2} b_l^\rho \quad (56)$$

$$b_{i,l}^\rho = \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} b_l^\rho \quad (57)$$

係数 a_l^ρ は、初期条件により次の一次連立方程式で決定される。

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^7 a_l^\rho = -\frac{S}{\rho^2} \\ \sum_{l=1}^7 \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} a_l^\rho = \sum_{l=1}^7 \frac{1}{\omega_l + \lambda_i} b_{i,l}^\rho - \frac{S}{\rho^2} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \end{cases} \quad (58)$$

3.5.6 $\frac{\partial P^c}{\partial S}$ の解法

前節と同様に式(17)～(19)を S で偏微分する。

$$\Lambda \frac{d}{dt} \frac{\partial P^c}{\partial S} = (\rho - \beta) \frac{\partial P^c}{\partial S} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial C_i^c}{\partial S} + 1 \quad (59)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial C_i^c}{\partial S} = \beta_i \frac{\partial P^c}{\partial S} - \lambda_i \frac{\partial C_i^c}{\partial S} \quad (60)$$

$$\text{境界条件: } \frac{\partial P^c(\rho, S; t_0)}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial C_i^c(\rho, S; t_0)}{\partial S} = 0 \quad (61)$$

一定値1を中性子源とする、動特性方程式を解けばよいことが分かる。この解は、次式のようになっている。

$$\frac{\partial P^c(\rho, S; t)}{\partial S} = \sum_{l=1}^7 a_l^s e^{\omega_l t} - \frac{1}{\rho} \quad (62)$$

$$\frac{\partial C_i^c(\rho, S; t)}{\partial S} = \sum_{l=1}^7 a_{i,l}^s e^{\omega_l t} - \frac{1}{\rho} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \quad (63)$$

$$a_{i,l}^s = \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} a_l^s \quad (64)$$

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^7 a_l^s = \frac{1}{\rho} \\ \sum_{l=1}^7 \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} a_l^s = \frac{1}{\rho} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \end{cases} \quad (65)$$

3.5.7 $\frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho^2}$ の解法

3.5.3 節に現れる $\frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho^2}$ の解法を示す。(49)~(51) 式を ρ で偏微分する。

$$\Lambda \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho^2} = (\rho - \beta) \frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho^2} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial P^c}{\partial \rho} \quad (66)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial \rho^2} = \beta_i \frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho^2} - \lambda_i \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial \rho^2} \quad (67)$$

$$\text{境界条件: } \frac{\partial^2 P^c(\rho, S; t_0)}{\partial \rho^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 C_i^c(\rho, S; t_0)}{\partial \rho^2} = 0 \quad (68)$$

よって、 $2 \frac{\partial P^c}{\partial \rho}$ を中性子源とする、動特性方程式を解けばよいことが分かる。この解は、次式のようになっている。

$$\frac{\partial^2 P^c(\rho, S; t)}{\partial \rho^2} = \sum_{l=1}^7 a_l^{\rho\rho} e^{\omega_l t} + \sum_{l=1}^7 (b_l^{\rho\rho} t + c_l^{\rho\rho} t^2) e^{\omega_l t} - \frac{2S}{\rho^3} \quad (69)$$

$$\frac{\partial^2 C_i^c(\rho, S; t)}{\partial \rho^2} = \sum_{l=1}^7 a_{i,l}^{\rho\rho} e^{\omega_l t} + \sum_{l=1}^7 (b_{i,l}^{\rho\rho} t + c_{i,l}^{\rho\rho} t^2) e^{\omega_l t} - \frac{2S}{\rho^3} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \quad (70)$$

また、 $b_l^{\rho\rho}$ 及び $c_l^{\rho\rho}$ は次式である。 a_l^ρ 及び b_l^ρ は、(52)式及び(53)式に現れる。

$$b_l^{\rho\rho} = \left\{ a_l^\rho + \sum_{i=1}^6 \frac{2\lambda_i\beta_i}{(\omega_i + \lambda_i)^2} c_i^{\rho\rho} \right\} \Bigg/ \left\{ \Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i\beta_i}{(\omega_i + \lambda_i)^2} \right\} \quad (71)$$

$$c_l^{\rho\rho} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i\beta_i}{(\omega_i + \lambda_i)^2}} b_l^\rho \quad (72)$$

$$a_{i,l}^{\rho\rho} = (\beta_i a_l^{\rho\rho} - b_{i,l}^{\rho\rho}) / (\omega_l + \lambda_i) \quad (73)$$

$$b_{i,l}^{\rho\rho} = (\beta_i b_l^{\rho\rho} - 2c_{i,l}^{\rho\rho}) / (\omega_l + \lambda_i) \quad (74)$$

$$c_{i,l}^{\rho\rho} = \beta_i c_l^{\rho\rho} / (\omega_l + \lambda_i) \quad (75)$$

係数 $a_l^{\rho\rho}$ は、初期条件により次の一次連立方程式で決定される。

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^7 a_l^{\rho\rho} = \frac{2S}{\rho^3} \\ \sum_{l=1}^7 \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} a_l^{\rho\rho} = \sum_{l=1}^7 \frac{1}{\omega_l + \lambda_i} b_{i,l}^{\rho\rho} + \frac{2S}{\rho^3} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \end{cases} \quad (76)$$

3.5.8 $\frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho \partial S}$ の解法

3.5.3 節に現れる $\frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho \partial S}$ の解法を示す。(59)～(61)式を ρ で偏微分する。

$$\Lambda \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho \partial S} = (\rho - \beta) \frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho \partial S} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial \rho \partial S} + \frac{\partial P^c}{\partial S} \quad (77)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial \rho \partial S} = \beta_i \frac{\partial^2 P^c}{\partial \rho \partial S} - \lambda_i \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial \rho \partial S} \quad (78)$$

$$\text{境界条件: } \frac{\partial^2 P^c(\rho, S; t_0)}{\partial \rho \partial S} = 0, \quad \frac{\partial^2 C_i^c(\rho, S; t_0)}{\partial \rho \partial S} = 0 \quad (79)$$

よって、 $\frac{\partial P^c}{\partial S}$ を中性子源とする、動特性方程式を解けばよいことが分かる。この解は、次式のようになっている。

$$\frac{\partial^2 P^c(\rho, S; t)}{\partial \rho \partial S} = \sum_{l=1}^7 a_l^{\rho s} e^{\omega_l t} + \sum_{l=1}^7 b_l^{\rho s} t e^{\omega_l t} + \frac{1}{\rho^2} \quad (80)$$

$$\frac{\partial^2 C_i^c(\rho, S; t)}{\partial \rho \partial S} = \sum_{l=1}^7 a_{i,l}^{\rho s} e^{\omega_l t} + \sum_{l=1}^7 b_{i,l}^{\rho s} t e^{\omega_l t} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \quad (81)$$

$b_l^{\rho s}$ 、 $a_{i,l}^{\rho s}$ 及び $b_{i,l}^{\rho s}$ は次式である。 a_l^s 及び b_l^s は、(62)式及び(63)式に現れる。

$$b_l^{\rho s} = \frac{a_l^s}{\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{(\omega_l + \lambda_i)^2}} \quad (82)$$

$$a_{i,l}^{\rho s} = \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} a_l^{\rho s} - \frac{\beta_i}{(\omega_l + \lambda_i)^2} b_l^{\rho s} \quad (83)$$

$$b_{i,l}^{\rho s} = \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} b_l^{\rho s} \quad (84)$$

係数 $a_l^{\rho s}$ は、初期条件により次の一次連立方程式で決定される。

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^7 a_l^{\rho s} = -\frac{1}{\rho^2} \\ \sum_{l=1}^7 \frac{\beta_i}{\omega_l + \lambda_i} a_l^{\rho s} = \sum_{l=1}^7 \frac{1}{\omega_l + \lambda_i} b_{i,l}^{\rho s} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \end{cases} \quad (85)$$

3.5.9 $\frac{\partial^2 P^c}{\partial S^2}$ の解法

3.5.3 節に現れる $\frac{\partial^2 P^c}{\partial S^2}$ の解法を示す。(59)~(61)式を S で偏微分する。

$$\Lambda \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 P^c}{\partial S^2} = (\rho - \beta) \frac{\partial^2 P^c}{\partial S^2} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial S^2} \quad (86)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial S^2} = \beta_i \frac{\partial^2 P^c}{\partial S^2} - \lambda_i \frac{\partial^2 C_i^c}{\partial S^2} \quad (87)$$

$$\text{境界条件: } \frac{\partial^2 P^c(\rho, S; t_0)}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 C_i^c(\rho, S; t_0)}{\partial S^2} = 0 \quad (88)$$

これは、中性子源なしの動特性方程式であり、境界条件が 0 であるので、次式のように 0 となる。

$$\frac{\partial^2 P^c(\rho, S; t)}{\partial S^2} = 0 \quad (89)$$

$$\frac{\partial^2 C_i^c(\rho, S; t)}{\partial S^2} = 0 \quad (90)$$

3.6 信頼区間

3.5 節で示した手順で K 回の反復の後、残差が最小となるような (ρ_K, S_K) が求まったとしよう。この値を最尤値と呼び、 $(\tilde{\rho}, \tilde{S})$ と記述する。この最尤値のまわりで、(33)式で定義した尤度を、(34)式を用いて V で表し、この V を二次の項まで泰ラー展開する。停留しているので、一次の項は消えて、次式を得る。

$$\begin{aligned} L(\tilde{\rho} + \Delta\rho, \tilde{S} + \Delta S) &= \exp\left[-\frac{1}{2}V(\tilde{\rho} + \Delta\rho, \tilde{S} + \Delta S)\right] \\ &\approx \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\tilde{V} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\Delta\rho^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial S}\Delta\rho\Delta S + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta S^2\right)\right\}\right] \\ &= \tilde{L} \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta V\right) \end{aligned} \quad (91)$$

ただし、以下のように置く。

$$\Delta V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\Delta\rho^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial S}\Delta\rho\Delta S + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta S^2\right) \quad (92)$$

$$\tilde{L} = L(\tilde{\rho}, \tilde{S}), \quad \tilde{V} = V(\tilde{\rho}, \tilde{S})$$

$L(\rho, S)$ の分布を (ρ, S) 平面に図示すると、図 6 のように、 $(\tilde{\rho}, \tilde{S})$ に最高点を持つ分布となる。また、尤度は確率であるので、次式が満たされなければならない。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(\rho, S) d\rho dS = 1 \quad (93)$$

図 6 に示すように $L(\rho, S) = L_1$ をとる (ρ, S) を結ぶと、橢円を形成する。その橢円は、(91) 式から直ぐに得られる次式に従う。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} (\rho - \tilde{\rho})^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial S} (\rho - \tilde{\rho})(S - \tilde{S}) + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (S - \tilde{S})^2 \right) \\ & = V_1 - \tilde{V} = -2 \log \left(\frac{L_1}{\tilde{L}} \right) \end{aligned} \quad (94)$$

ここで、この楕円の内側において、 $L(\rho, S)$ の積分を考える。この積分値が、 (ρ, S) が楕円内に入っている確率である。逆に、その確率での信頼区間を楕円が表しているとも言える。この積分値を L_1 あるいは、 V_1 の関数として表し、次式で定義する。

$$P_L(L_1) = \iint_{\text{領域 } A_1} L(\rho, S) d\rho dS = \int_{\text{領域 } A_1} L(\rho, S) dA \quad (95)$$

$$P_V(V_1) = \iint_{\text{領域 } A_1} \exp \left(-\frac{1}{2} V(\rho, S) \right) d\rho dS = \int_{\text{領域 } A_1} \exp \left(-\frac{1}{2} V(\rho, S) \right) dA \quad (96)$$

ここに、 A を $L(\rho, S) \leq L$ あるいは、 $V(\rho, S) \leq V$ を満たす領域の面積とし、その領域を“領域 A ”と呼ぶ。図7に図示したように、領域 dA に於いて $L(\rho, S)$ は一定とみなせるから、 $d\rho dS = dA$ と出来る。領域 dA の面積を考える為に、領域 A の面積を V で表すことを考える。楕円の形状を知る為に、以下のような量を定義して、(94)式を変形する。

$$\sigma_\rho = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}{\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial S}}}, \quad \sigma_s = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}}{\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial S}}}, \quad \phi = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial S}}{\sqrt{\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}} \quad (97)$$

$$\frac{1}{2(1+\phi)} \left(\frac{\Delta \rho}{\sigma_\rho} + \frac{\Delta S}{\sigma_s} \right)^2 + \frac{1}{2(1-\phi)} \left(\frac{\Delta \rho}{\sigma_\rho} - \frac{\Delta S}{\sigma_s} \right)^2 = (V - \tilde{V}) \quad (98)$$

ただし、 $\Delta \rho = \rho - \tilde{\rho}$, $\Delta S = S - \tilde{S}$ とした。この式から、楕円の形状は図8のようになっていることが分かる。ただし、図8では、 $(V - \tilde{V}) = 1$ としている。この楕円の面積は次式のように求まる。

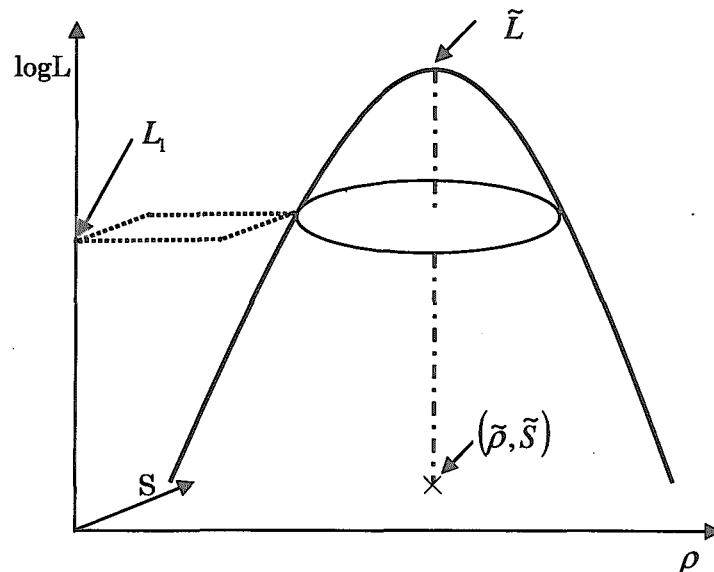


図 6 (ρ, S) 平面における L の分布

$$A = \pi \sqrt{1-\phi^2} \sigma_\rho \sigma_s (V - \tilde{V}) \quad (99)$$

従って、

$$dA = \pi \sqrt{1-\phi^2} \sigma_\rho \sigma_s dV \quad (100)$$

である。(95)式に代入して、以下のように P_V を求める。

$$P_V(V_1) = \pi \sqrt{1-\phi^2} \sigma_\rho \sigma_s \int_{V_1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(V - \tilde{V})\right\} dV = 2\pi \sqrt{1-\phi^2} \sigma_\rho \sigma_s \left(1 - e^{-\frac{V_1 - \tilde{V}}{2}}\right) \quad (101)$$

$$P_L(L_1) = 2\pi \sqrt{1-\phi^2} \sigma_\rho \sigma_s \left(1 - \frac{L_1}{\tilde{L}}\right)$$

$V_1 \rightarrow \infty$ あるいは、 $L_1 \rightarrow 0$ の時 $P \rightarrow 1$ が要求されるので、結局、

$$P_V(V_1) = 1 - \exp\left(-\frac{V_1 - \tilde{V}}{2}\right), \quad P_L(L_1) = 1 - \frac{L_1}{\tilde{L}} \quad (102)$$

である。もう一度この導出の意味を述べておくと、真の (ρ, S) が P の確率で存在する範囲は、次式で表される。(次式は(102)式を V_1 について解いて、(98)式に代入して得る。)

$$\frac{1}{2(1+\phi)} \left(\frac{\Delta\rho}{\sigma_\rho} + \frac{\Delta S}{\sigma_s} \right)^2 + \frac{1}{2(1+\phi)} \left(\frac{\Delta\rho}{\sigma_\rho} + \frac{\Delta S}{\sigma_s} \right)^2 \leq -2 \log(1-P) \quad (103)$$

また、(97)式に現れた ϕ は ρ と S の相関係数になっている。この相関係数は今回取り上げた動特性問題では、一般に $-1 < \phi < 0$ となっていて、負の相関が強い $\phi \rightarrow -1$ ほど、橢円は細長くなる。一方、 ϕ は橢円の形状を現すのに対し、 σ_ρ と σ_s は橢円の大きさを表す。表 1 にそれぞれの信頼区間に応する橢円の ρ 方向の幅、あるいは S 方向の高さの $1/2$ を示した。

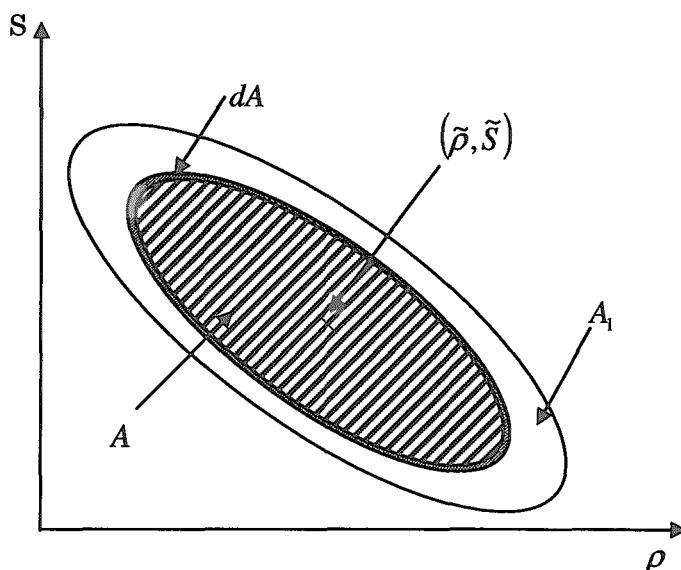


図 7 (ρ, S) 平面における L の積分方法

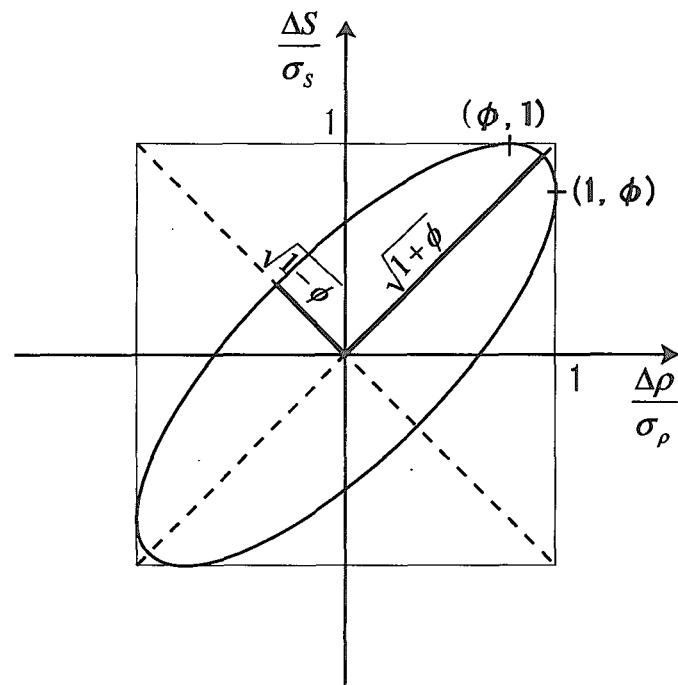


図 8 楕円の形状

表 1 σ と信頼区間の大きさの関係

信頼区間	幅/2(高さ/2)
5%	$0.320\sigma^*$
10%	0.459σ
20%	0.668σ
50%	1.177σ
70%	1.552σ
90%	2.146σ
95%	2.448σ
99%	3.035σ
99.9%	3.717σ
P	$\sqrt{-2\log(1-P)}\sigma$

* σ_ρ あるいは σ_s 。

本節では、ここまで反応度と中性子源強度の組がどのような確率密度で分布しているかを調べてきた。ここで、反応度の確率密度を求めておく。すなわち、次式の積分を調べる。

$$p_\rho(\rho) = \int_{S\text{全体}} L(\rho, S) dS = \tilde{L} \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\Delta V} e^{-\frac{1}{2}\Delta V} dS \quad (104)$$

計算は省略するが、積分を実行すると、次式を得る

$$p_\rho(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\rho^2}} e^{-(\rho-\bar{\rho})^2/2\sigma_\rho^2} \quad (105)$$

つまり、 ρ は標準偏差 σ_ρ の正規分布をなす。また、同様に S は標準偏差 σ_s の正規分布をなす。

3.7 カイ二乗検定

これまで説明してきたような手順は、一般に回帰分析と呼ばれる。回帰分析とは、ある測定データに対して、理論（回帰モデル）から求められる推定値（計算値）を近づけ、理論に現れるパラメータを決定する事（理論への回帰）である。正規分布をしている測定データに対する回帰分析、すなわち最小二乗法では、測定データあるいは回帰モデルの良し悪しを調べる為に、カイ二乗検定を行う事が出来る。カイ二乗検定の結果が異常である場合は、一連の解析のどこかに誤りがある場合が多い。

いま、測定データが標準偏差のわかっている正規分布、あるいは、十分に計数の高いポアソン分布をしているとしよう。 χ^2 はそれぞれ、次式で定義される。

(1) 標準偏差が既知である正規分布

$$\chi^2 = \sum_j^N (P_j^m - P^c(t_j))^2 / \sigma_j^2 \quad (106)$$

(2) 標準偏差が、真の値の関数（例えば次式は平方根）になっている正規分布、あるいは計数の十分高いポアソン分布

$$\chi^2 = \sum_j^N (P_j^m - P^c(t_j))^2 / P^c \quad (107)$$

この χ^2 は j の個数 N が十分に大きくなると、 N から自由度の数（この場合は反応度と中性子源強度で 2）を引いた、 $N - 2$ に近づく。すなわち、

$$\chi^2 / (N - 2) \approx 1 \quad (108)$$

である。この式が大きく異なる場合、確認を要する。

4 数値実験

2章で、従来手法として、板垣の方法、田村の方法、グルーピング法および積分法を、3章で今回開発されたIK-ML法を説明した。本章では、幾つかの実験を想定して、測定データを生成し、これらの手法によって解析を行う。

この数値実験では、検出器として計数管を想定し、真値の周りのポアソン分布を仮定して、測定データを乱数によって生成する。従って、試行の度に解析結果は異なってくる。このような状況において、一回あるいは少數回の試行で、手法の成立性や優劣を判断する事は出来ない。手法が正しい結果を示している事を確認するには、多数回の試行を行い、その結果の分布を調べなければならない。すなわち、多数回の結果得られるそれぞれの反応度と中性子源の組み合わせの内、 $x\%$ 信頼区間に真値を含む組み合わせの数が、全体の $x\%$ であったとするならば、その手法は正しい事が言える。つまり、解析点のばらつきの仕方から、手法の優劣を判断する。これが、本章の数値計算における基本的な考え方である。

本章では、上述の考え方沿って、IK-ML法の確認と、従来手法との比較を行い、それぞれの適用限界などについて考察する。また、測定条件の変化がIK-ML法に及ぼす影響について検討する。

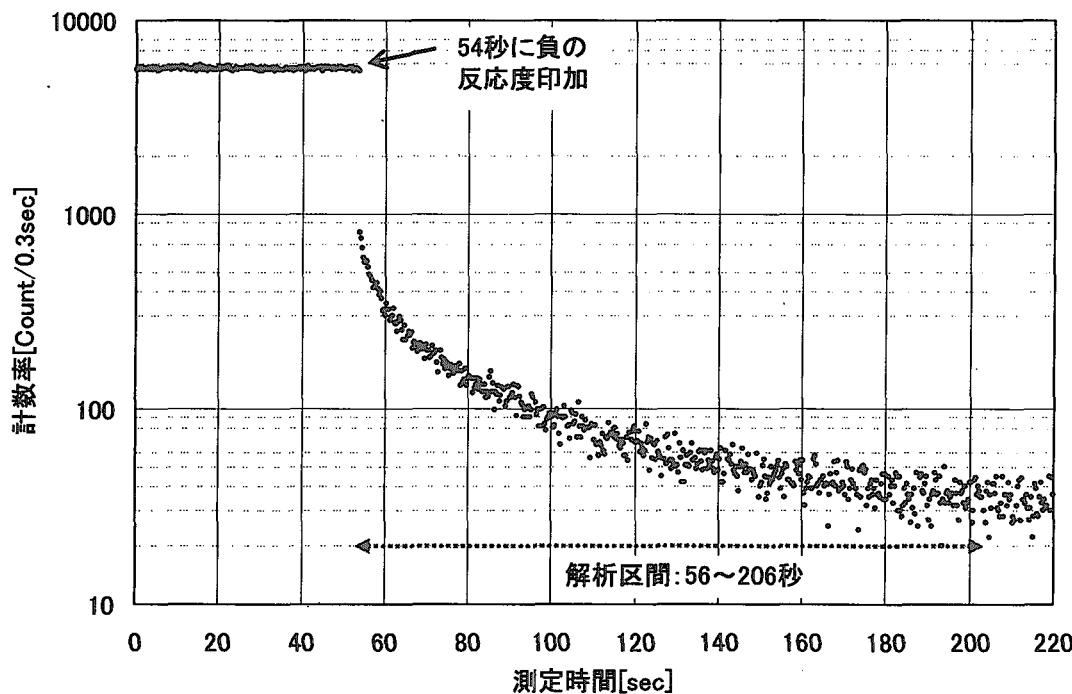


図 9 基準ケースの数値実験例

4.1 基準ケース

数値実験の基準ケースとして、高速臨界実験装置における制御棒落下実験を想定する。基本的な条件を列挙する。また、この条件で生成された数値実験測定データを図 9に示す。

- ・ $\beta = 0.71\%$
- ・ $\Lambda = 1.0 \times 10^{-7}$ [sec]
- ・ 反応度変化： $-0.03 \rightarrow -6.0$ [\\$]
- ・ 中性子源強度：4.0 [n/sec]
- ・ 検出器の計数： $20,000 \rightarrow 100$ [CPS]
- ・ 計数の統計はポアソン分布に従う。
- ・ 測定間隔：0.3 [sec]
- ・ 解析区間：落下後 2～152 [sec]

以上の条件下で、時系列の計数をランダムに生成し、その結果を IK-ML 法、板垣の方法、田村の方法、Grouping 法でそれぞれ解析する。ここで、積分法は中性子束が一定になるまで測定する必要があるため、基準ケースでは積分法による解析は実施しなかった。また、解析区間が落下 2 秒後(56 秒)からとなっているのは、現実の原子炉においては発生する、落下直後における高次モードの影響や、あるいは、4. 6で調べる反応度変化と測定時刻のタイミングのずれを考慮しての事である。

数値実験においては、図 9のような数値実験測定データを多数回生成して解析を行い、その真値の周りのばらつきをもって、それぞれの手法の妥当性を判断する。本基準ケースについては、1000 回の試行を行った。図 10は、そのうち 100 回の分布を (ρ, S) 平面にプロットした図である。図中の楕円は本手法によって得られた 70%、90% および 99% の信頼区間を真値を中心にして描いたものである。本来、信頼区間は解析結果である最尤解を中心とした楕円となるが、「解析結果から見て、ある確率密度の点に真値が位置している」事と、「真値がある確率密度で解析結果として現れる」事は同義であり、真値を中心として信頼区間を引くと、その確率で解析結果がその内側に現れる事になる。目安のために他の手法に対しても同様の楕円を引いた。

幾つかの確率の信頼区間の中に入っている個数を数えた結果が図 11である。IK-ML 法が最も理論的に満たされるべき個数に近い。次いでグルーピング法、そして板垣の方法と田村の方法は図 10からも分かるように、少しばらついている。また、表 2に 1000 回の平均値を示した。この平均値の標準偏差は $\sigma / \sqrt{1000}$ となっていることから、田村の方法以外は真値を示していることがわかる。

以上のように、基準ケースに対して、田村の方法では若干精度が落ちるが、どの手法でも概ね解析結果のばらつきは理論的な個数を再現し、中心値は真値を示している。従って、どの方法も妥当であるといえる。

表 2 1000 回の平均値

	ρ [\\$]	S
IK-ML	-6.0007	4.0004
板垣	-6.0003	3.9998
田村	-6.0046	4.0091
グルーピング	-6.0004	4.0000
$\sigma \rho$	0.0489	(0.0015)*
σS	0.0849	(0.0027)*
相関係数 ϕ	-0.8167	

* $\sigma / \sqrt{1000}$

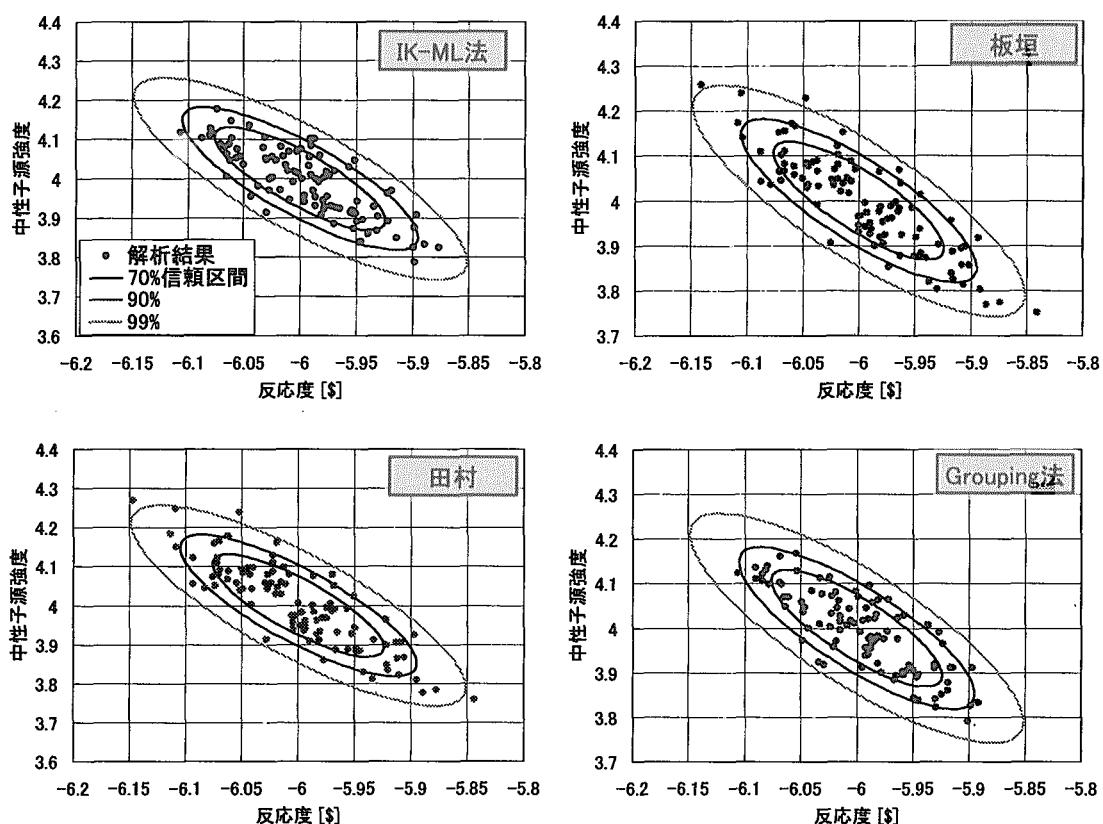


図 10 基準ケースに対する計算結果

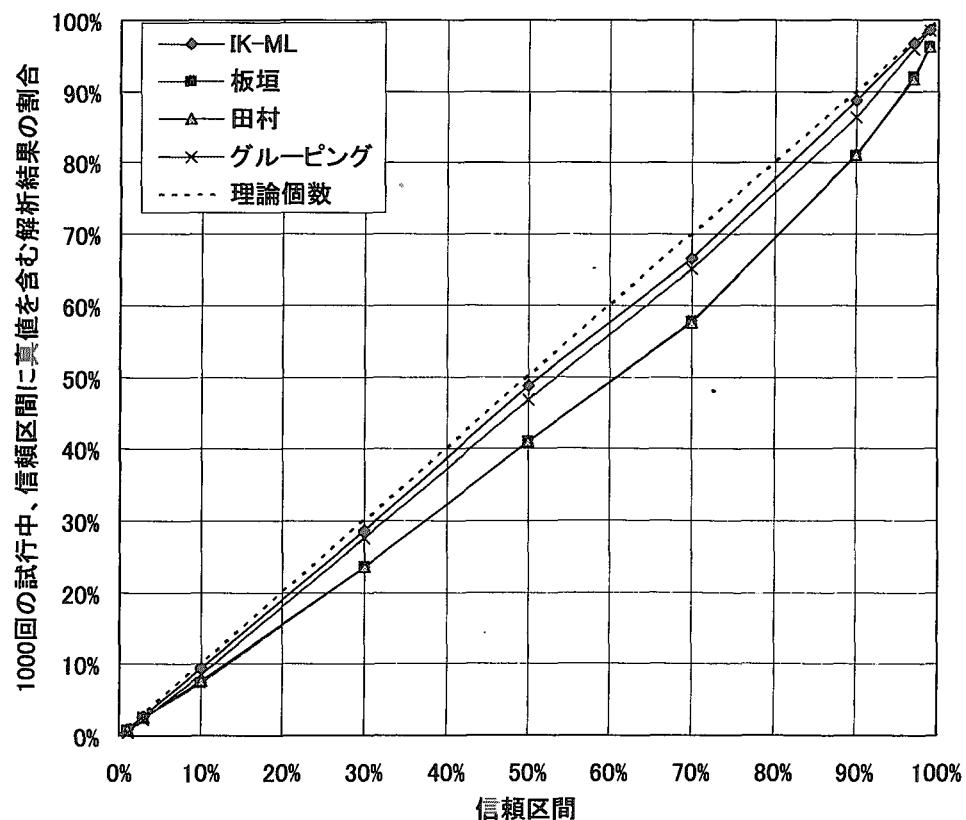


図 11 信頼区間と、信頼区間に真値を含む解析結果の割合

4.2 網羅的な比較

続いて、基準ケースの内のひとつだけのパラメータを表3のように変化させて、本手法と従来手法が機能しているか調べる。ケース0は基準ケースで、前節の数値実験である。ケース1は検出器の感度に関わる変化、ケース2・4は炉の変化、ケース5・9は与えた反応度変化の変化、ケース10は逆に反応度を印加した場合、ケース11・12は中性子源によって炉心に変化を与えた場合、ケース13・17は測定データの測定間隔と解析区間に係る変化、である。ケース18・20は積分法との比較を行う為に用意した。

前節と同様に100回の試行を行い、それぞれ表4のように結果を得た。表4には90%信頼区間にしている試行の個数を示したが、この個数が80未満のケースは“精度が良くない”と判断した。また、個数が非常に小さいケースは“破綻している”と判断した。それぞれのケースの (ρ, S) 平面における分布を図16～図36に示したが、これらの図でも破綻しているケースは判断できる。

これらの分布の中央値（平均）とばらつき（標準偏差）からも、それぞれの手法の精度を調べ事が出来よう。100回の試行の平均値と真値の差を、反応度と中性子源強度について、それぞれ図12と図13に示す。この差は、 $\sigma_\rho/\sqrt{100}$ あるいは $\sigma_s/\sqrt{100}$ のエラーを持っているはずであるので、差を $\sigma_\rho/\sqrt{100}$ あるいは $\sigma_s/\sqrt{100}$ で割った値を示した。この2つの図から、IK-ML法はケース9以外において 2σ の範囲に入っており、精度が良い事が分かる。次に精度が良いのはグルーピング法である。

図14と図15に、100回の試行の反応度と中性子源強度の標準偏差を示す。標準偏差は、 σ_ρ あるいは σ_s にほぼ一致しているはずであるので、標準偏差を σ_ρ あるいは σ_s で割った値を示した。ここでも、IK-ML法はケース9以外では、ほぼ1の値を取っており、理論どおりのばらつきを持っている事が分かる。次いで1に近い値を持っているのは、グルーピング法と板垣の方法である。

全体を概観すると、IK-MLは中性子束の落差(変化割合)が極端に小さなケース9以外においては、全て良好な結果を与えていた。また、信頼区間にしている個数から、IK-ML法に次いでグルーピング法と板垣の方法が優れており、田村の方法は精度が良くない事が分かる。積分法では、図34と図36に見られるように、概ね真値を中心に分布しているが、信頼区間よりも広範囲にばらついており、中性子源が完全に無くなるケース19以外では精度が良くなかった。

また、板垣の方法と田村の方法において、解析点の分布は同様の傾向を示した。2つの方法で共通して精度が悪くなるのは、中性子寿命が黒鉛炉並みの長さである場合(ケース4)、浅い反応度に向かって落下した場合(ケース5)、そして中性子源が消失した場合(ケース12,19,20)である。 β が小さいケース2においても、やや精度が悪化する。

グルーピング法の分布はIK-MLと似た形状を持つが、解析時間が長くなるケースで、精度が悪化する。グルーピング法では、測定点を個数で三等分する為、平衡状態になってからの測定点が多い場合、グルーピングの方法がアンバランスになるためと考えられる。

4.3 解析区間の変化

前節で幾つかパラメータを振ったが、このうち、解析区間の変化、測定間隔の変化および計数統計の変化について、IK-ML法の解析結果にどのように影響するか検討する。まず、解析区間の変化が、得られる信頼区間にどのような影響を及ぼすか数値実験によって調べる。これは、ケース15～17に相当する。これらのケースから、当然の事ながら、解析区間が長いほど信頼区間を示す楕円は小さくなる事が分かる。

この数値実験では、54秒の時点で制御棒が落下され、そこから0.3秒刻みで中性子束の積分値が測定される。まず、解析区間として、54.6～x秒をとると考える。解析区間の開始点を固

定して終端を大きくしていくと、図 37 のように信頼区間が狭まっていく。解析区間が短い領域では反応度、中性子源強度ともに信頼区間は小さくなるが、ドロップ後 300 秒程度を経過して、中性子束が一定値に近づいた後は中性子源強度のみが向上し、反応度の精度は向上しないことが分かる。

一方、開始点を変化させて、解析区間として、 $x \sim 1000$ 秒とした場合の結果を図 38 に示す。開始点を変化させると、楕円の短軸の長さは一定で、長軸の長さのみが変化する。

このような変化は、反応度をどのように変化させるかによって異なるため、必要な解析区間の長さは場合によって異なるが、事前にこのような検討を行う事で、実験に必要な測定時間を知る事が出来る。

4.4 測定間隔の変化

中性子束測定データ列の時間間隔が、解析結果に与える影響を調べる。4.2 節におけるケース 13、14 に相当する。図 39 は測定間隔を 0.03、0.1、0.3、1.0、3.0 秒に変化させた時の信頼区間の変化を表す。このように、測定間隔を細かくしても殆ど信頼区間に変化は無い事が分かる。

しかし、4.6 で調べるように、ロッドドロップの時間と、測定の区切りを一致させられない場合には、解析区間が短いほど、一致させられることによる悪影響を小さくする事が出来る。

4.5 検出器の計数統計の影響

つづいて、検出器の計数 (CPS) が精度に与える影響を確認する。図 40 は計数を上げた時の信頼区間の狭まりを示している。検出器の統計的な誤差は CPS の平方根で概算できるので、

$$(信頼区間の大きさ) \propto 1/\sqrt{(CPS)} \quad (109)$$

が成立していると推測される。実際、信頼区間の大きさをあらわす σ_p と σ_s に CPS の平方根を乗じた値をグラフに示すと、図 41 のように、ほぼ一定値となる。また、相関係数もほぼ一定であるので、信頼区間の形状も不変である事が分かる。

4.6 落下のタイミングの影響

ここまで数値実験では、全て落下のタイミングと、測定区間の区切りが 54 秒の点で一致していた。これは、理想的な状態であるが、実際の測定ではめったに期待する事は出来ない。このタイミングが異なった場合、落下した時間を含んだ測定点は、計数管ならば、落下前後の中性子束の積分値となろう。その場合、落下直後の数点の精度が、どの程度悪化するのかを調べる。

タイミングの変化の影響を大きくする為に、測定間隔を長く取り (1 秒)、0、0.25、0.5、0.75 秒の 4 つのタイミングで、それぞれ制御棒が落下したと仮定する(図 42)。想定した反応度変化と中性子源強度は基準ケースと同様である。ここでは、タイミングの影響のみを調べる為に、測定値には乱数ではなく、厳密解を用いる。解析区間は落下後 $x \sim 150$ 秒間とする。

図 43 と図 44 はそれぞれ、IK-ML 法と板垣の方法において、落下のタイミングが解析結果の反応度に与える影響である。落下のタイミングと測定点が一致している場合は、反応度が真の解の -6% 程度となり、正しい精度を保っている。落下のタイミングが測定間隔の中心に来てしまふ場合に、最も精度が悪くなり、解析の開始点を遅くするほど正しい値に近づく。また、板垣の方法に比べ IK-ML 法の方が良い精度となっている。田村の方法は板垣の方法、グルーピング法は IK-ML 法と、それぞれ同傾向であった。

表 3 網羅的な数値実験

Case No.	特徴	初期反応度[\$]	反応度[\$]	中性子源強度	計数率[CPS]	中性子束比[変化前/後]	測定間隔[sec]	解析区間[sec]	β	Δ [sec]
0	基準	-0.03	-6	4	100	200	0.3	150	0.0071	1E-07 ¹
1	低計数	-0.03	-6	0.4	10	200	0.3	150	0.0071	1E-07
2	β 小	-0.03	-6	1.2	100	200	0.3	150	0.0021	1E-07
3	Δ =軽水炉	-0.03	-6	4	100	200	0.3	150	0.0071	0.0002
4	Δ =黒鉛炉	-0.03	-6	4	100	200	0.3	150	0.0071	0.02
5	浅い ρ	-0.0025	-0.5	0.35	100	200	0.3	150	0.0071	1E-07
6	深い ρ	-0.25	-50	35	100	200	0.3	150	0.0071	1E-07
7	落差 20 倍	-0.3	-6	4	100	20	0.3	150	0.0071	1E-07
8	落差 6 倍	-1	-6	4	100	6	0.3	150	0.0071	1E-07
9	落差 2 倍	-3	-6	4	100	2	0.3	150	0.0071	1E-07
10	反応度印加	-6	-0.3	4	100	1/20	0.3	150	0.0071	1E-07
11	中性子源 on	-6	-6	1000	20000	∞	0.3	150	0.0071	1E-07
12	中性子源 off	-6	-6	0 ^{*2}	20000	∞	0.3	150	0.0071	1E-07
13	間隔小	-0.03	-6	4	100	200	0.1	150	0.0071	1E-07
14	間隔大	-0.03	-6	4	100	200	1	150	0.0071	1E-07
15	区間極短	-0.03	-6	4	100	200	0.3	5	0.0071	1E-07
16	区間短	-0.03	-6	4	100	200	0.3	20	0.0071	1E-07
17	区間長	-0.03	-6	4	100	200	0.3	500	0.0071	1E-07
18 ³	区間長 2	-0.03	-6	4	100	200	1	1500	0.0071	1E-07
19 ³	中性子源 off 2	-0.03	-6	0 ^{*2}	100	200	1	800	0.0071	1E-07
20 ³	中性子源 off 3	-0.03	-6	4 ^{*2}	100	200	1	1500	0.0071	1E-07

¹ 1×10^{-7} と読む。
² 変化後の中性子源強度。変化前は 1000。
³ 積分法による解析が可能

表 4 網羅的な数値実験の結果

Case No	特徴	90%信頼区間に入っている個数(/100 個)			成立性(○:精度良い、△:精度悪い、×:破綻)					
		IK-ML	板垣	田村	GM ^{*1}	積分法	IK-ML	板垣	田村	GM
0	基準	92	82	80	91		○	○	○	○
1	低計数	92	80	64	89		○	○	△	○
2	β 小	89	73	74	89		○	△	△	○
3	Λ=軽水炉	87	87	87	83		○	○	○	○
4	Λ=黒鉛炉	88	82	72	88		○	△	○	○
5	深いρ	81	65	11	80		△	△	×	○
6	深いρ	86	86	87	85		○	○	×	○
7	落差 20 倍	92	89	28	85		○	○	×	○
8	落差 6 倍	91	97	0	80		○	○	×	○
9	落差 2 倍	86	94	0	77		△	△	×	△ ^{*2}
10	反応度印加	90	87	0	79		○	○	×	△ ^{*3}
11	中性子源 On	95	92	52	0		○	○	△	△ ^{*3}
12	中性子源 Off	92	64	64	90		○	○	△	△ ^{*3}
13	間隔小	91	80	66	85		○	○	○	○
14	間隔大	87	80	82	80		○	○	○	○
15	区間極短	92	93	92	88		○	○	○	○
16	区間短	88	89	87	86		○	○	○	○
17	区間長	90	87	83	82		○	○	○	○
18	区間長 2	92	82	84	70		○	○	△	△
19	中性子源 off 2	93	7	8	54		○	○	△	○
20	中性子源 off 3	90	79	77	67		○	○	△	△
			80 未満		破綻					

^{*1} GM:グルーピング法^{*2} 100 回の平均値が真値から 7 の程度離れているので、精度が悪いとする。^{*3} このケースは、信頼区間の範囲が非常に広く、どの方法でも事実上破綻している。^{*4} GM は中性子源をわずかに過小評価するため、信頼区間からは出るが、破綻はない。

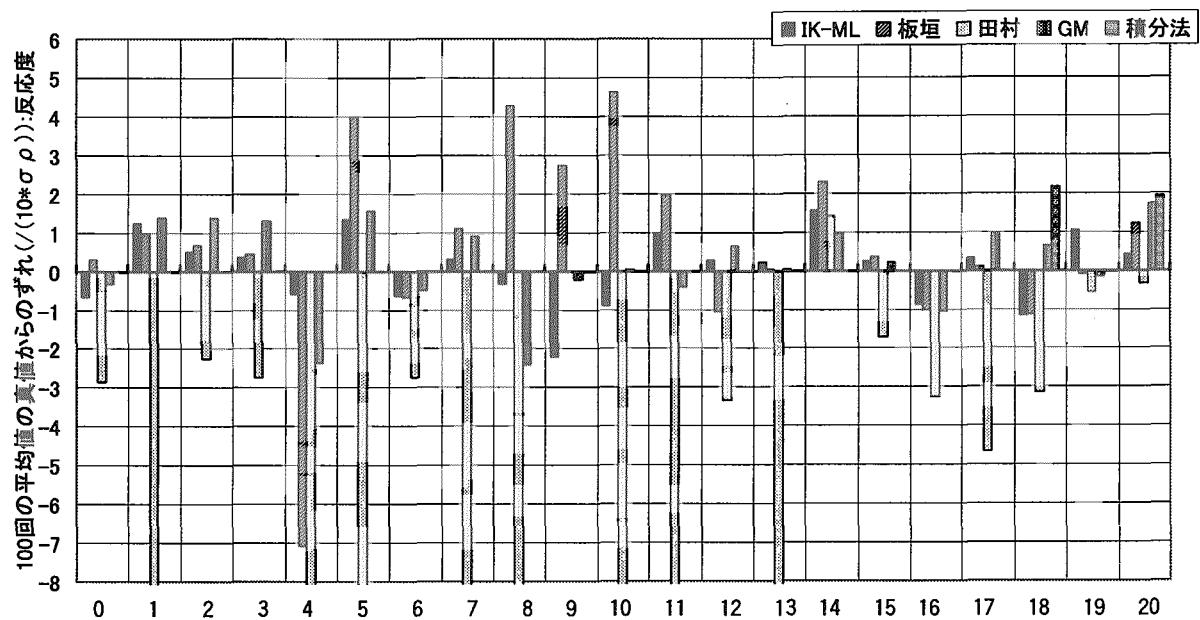


図 12 100 回の平均値の真値からのはずれ（反応度）

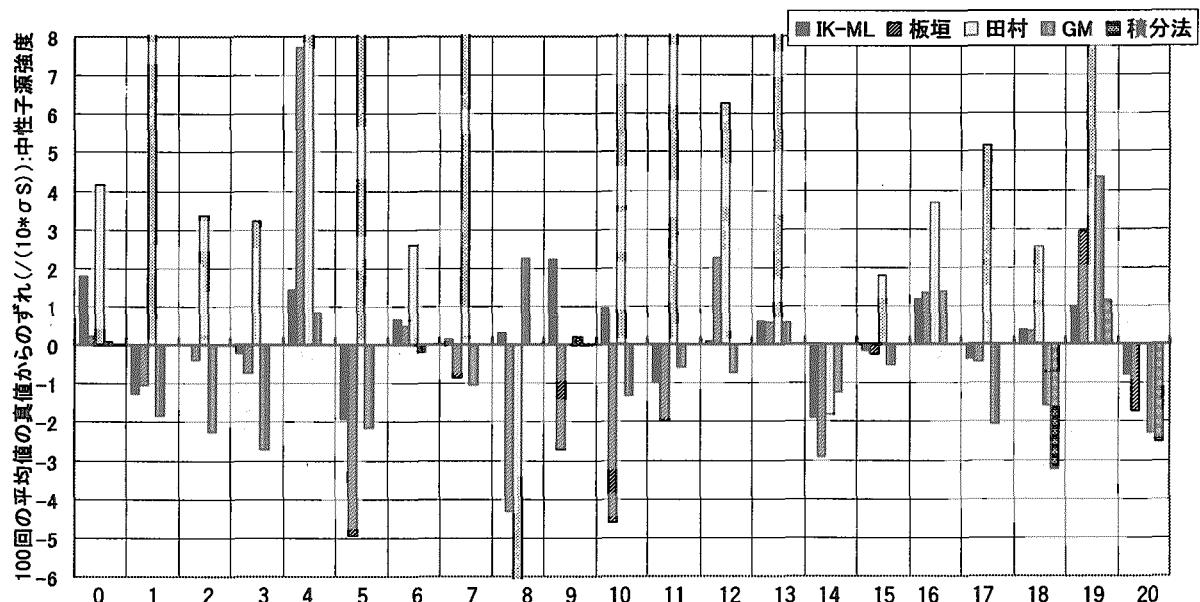


図 13 100 回の平均値の真値からのはずれ（中性子源強度）

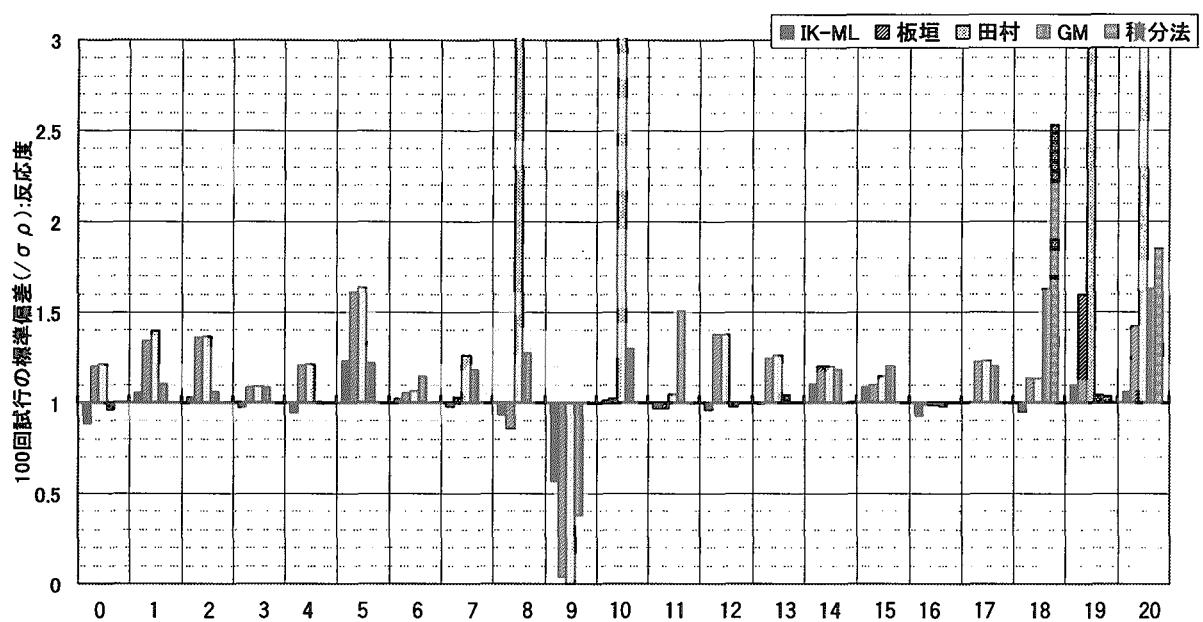


図 14 100 回の試行のばらつき（反応度）

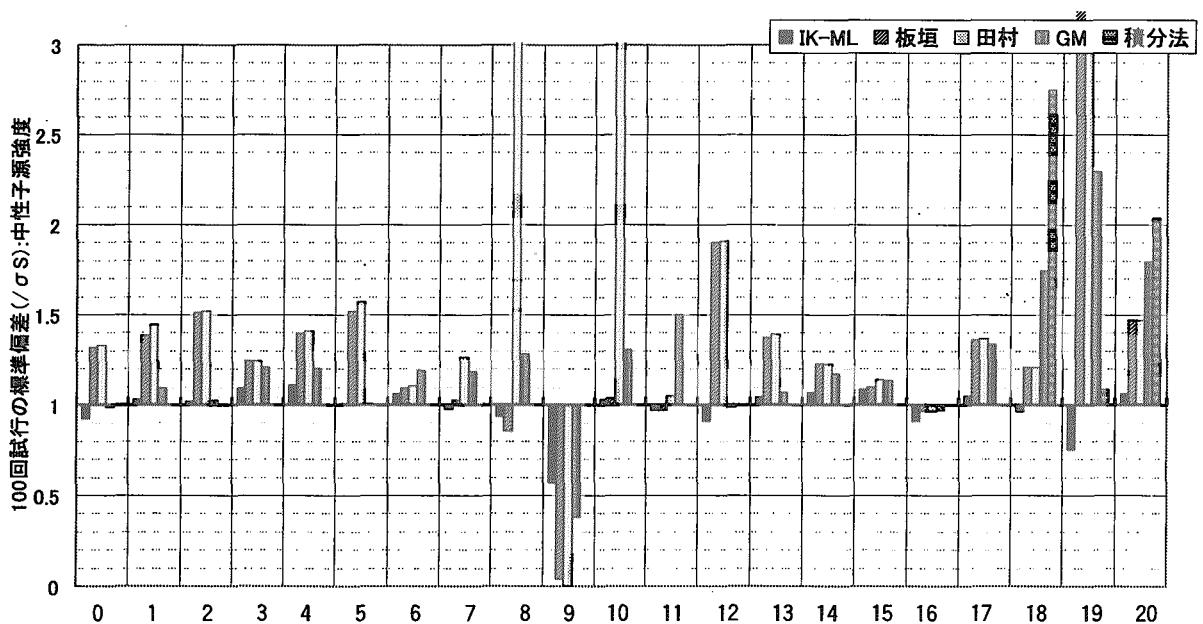


図 15 100 回の試行のばらつき（中性子源強度）

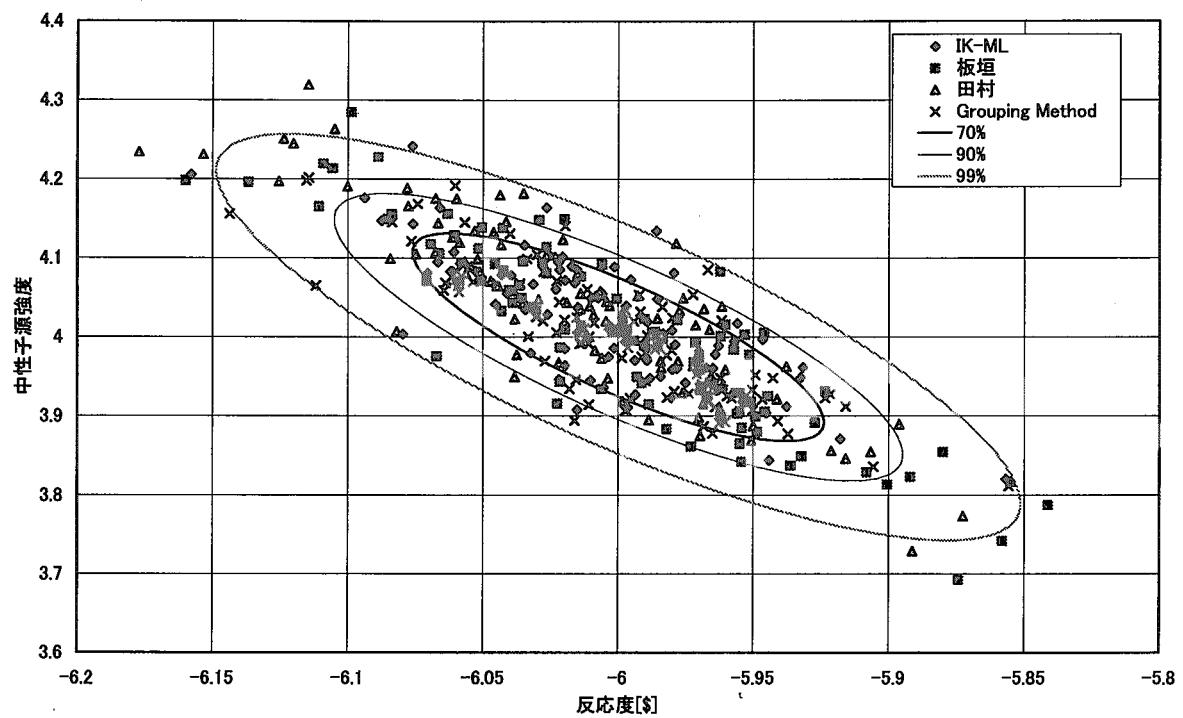


図 16 ケース 0（基準）に対する計算結果

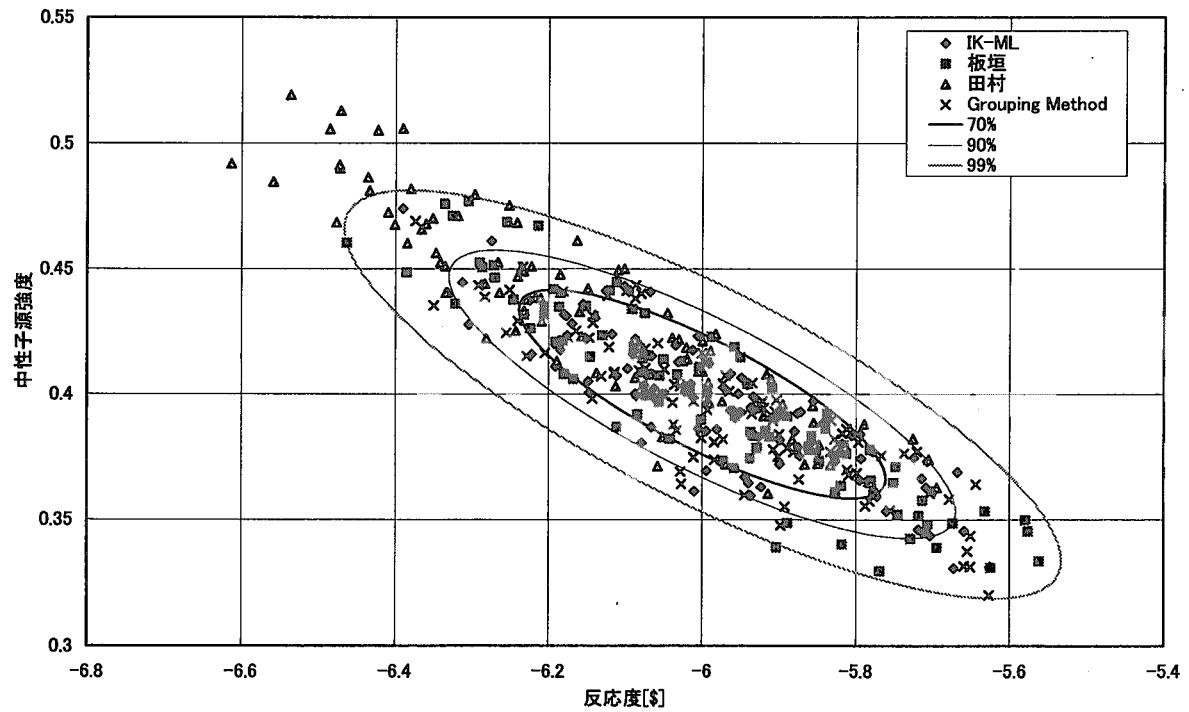


図 17 ケース 1（低計数）に対する計算結果

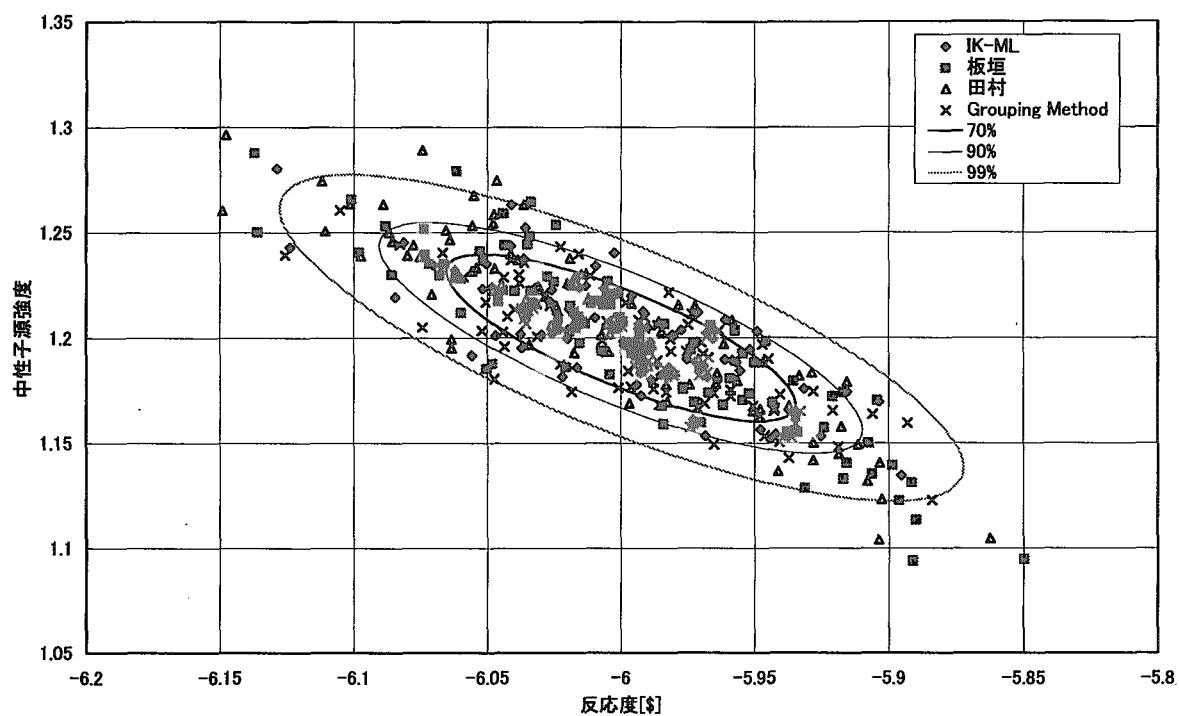


図 18 ケース 2 (小 β) に対する計算結果

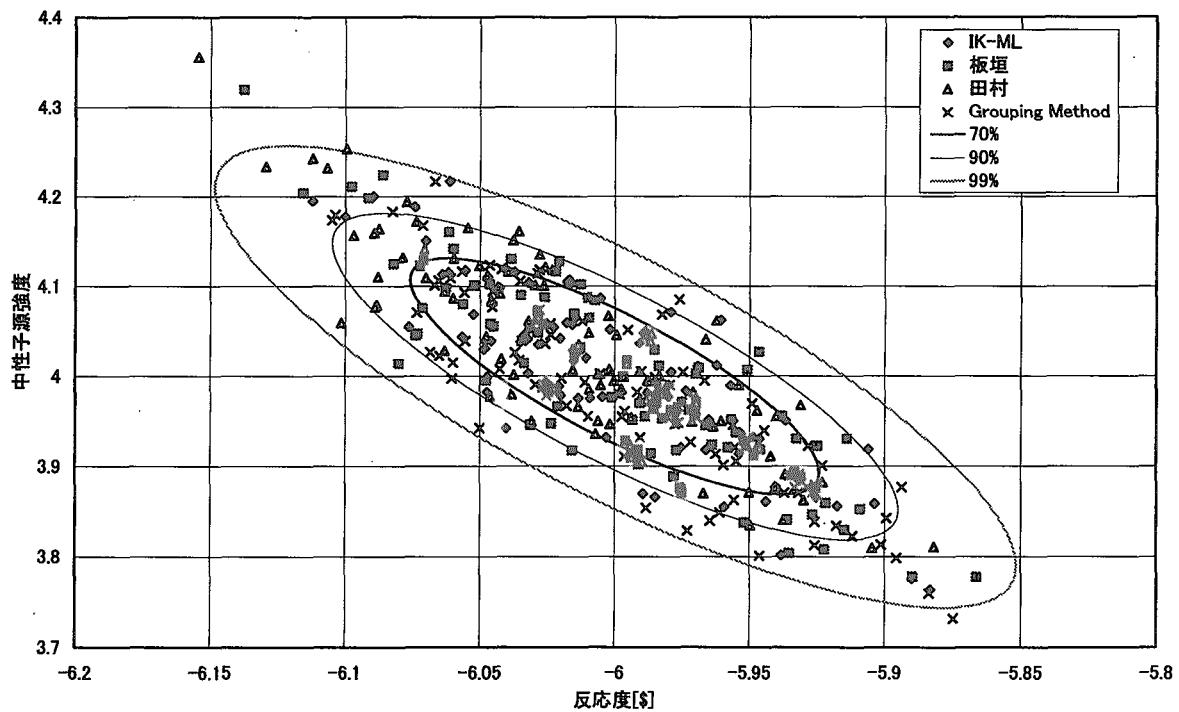


図 19 ケース 3 ($\Lambda=LWR$) に対する計算結果

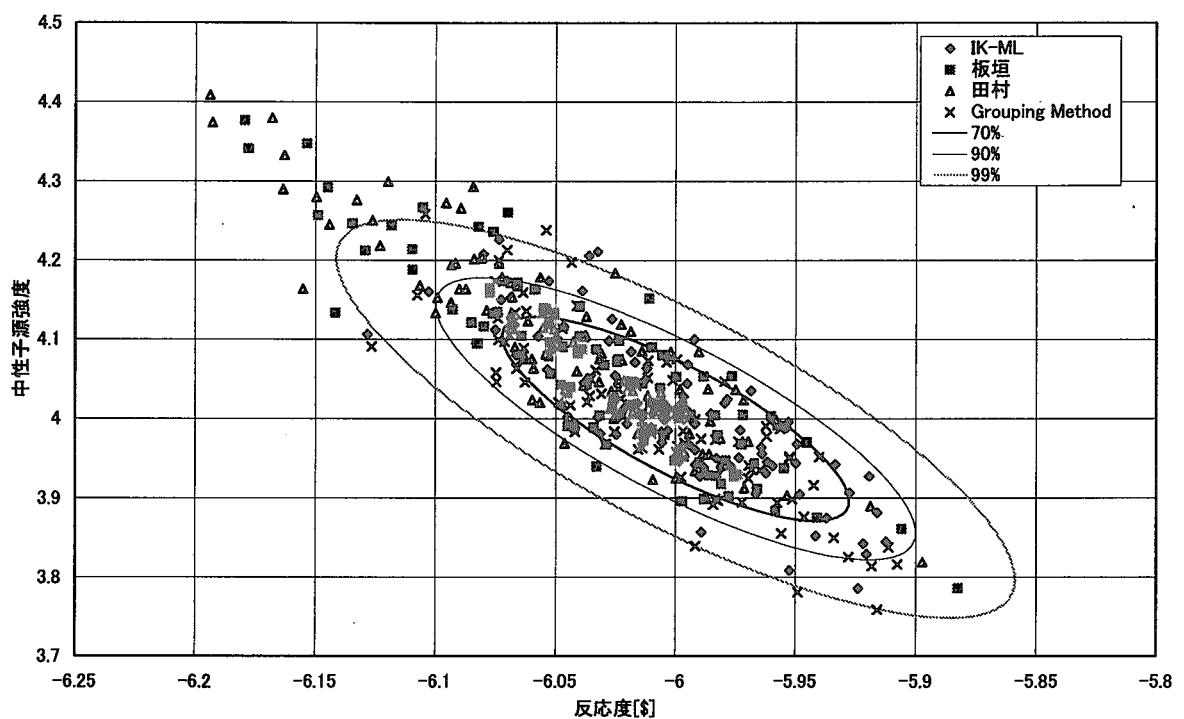


図 20 ケース 4 (Δ =黒鉛炉) に対する計算結果

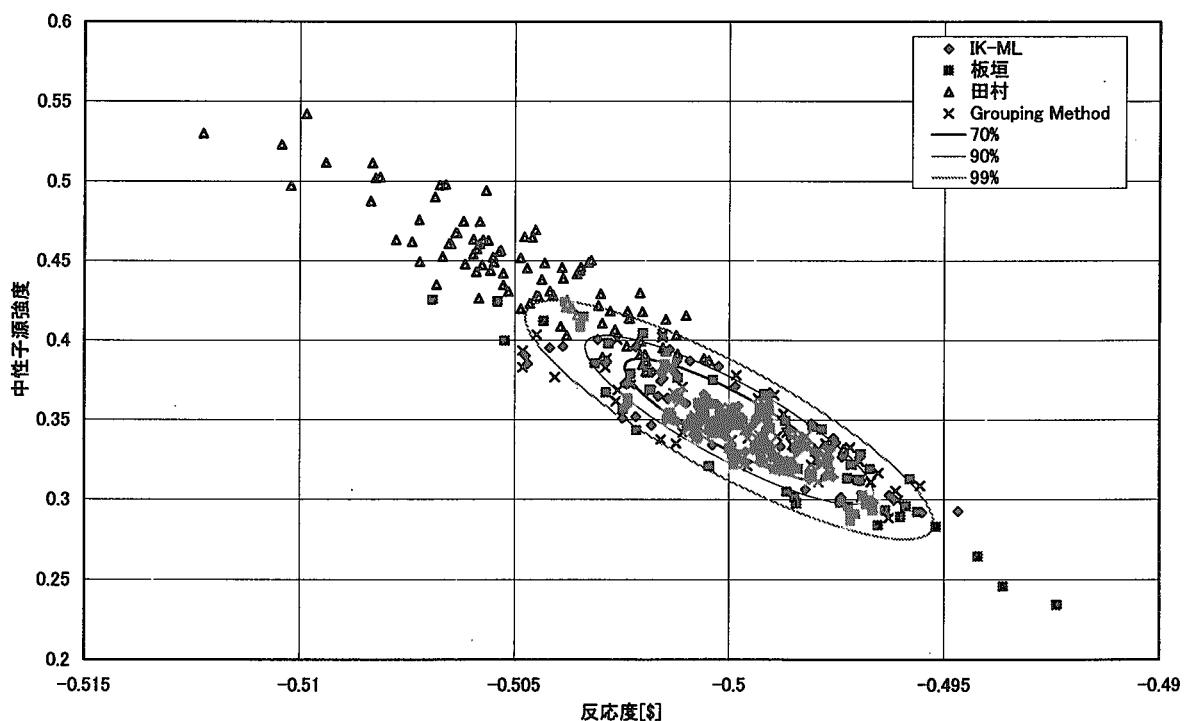


図 21 ケース 5 (ρ 浅い) に対する計算結果

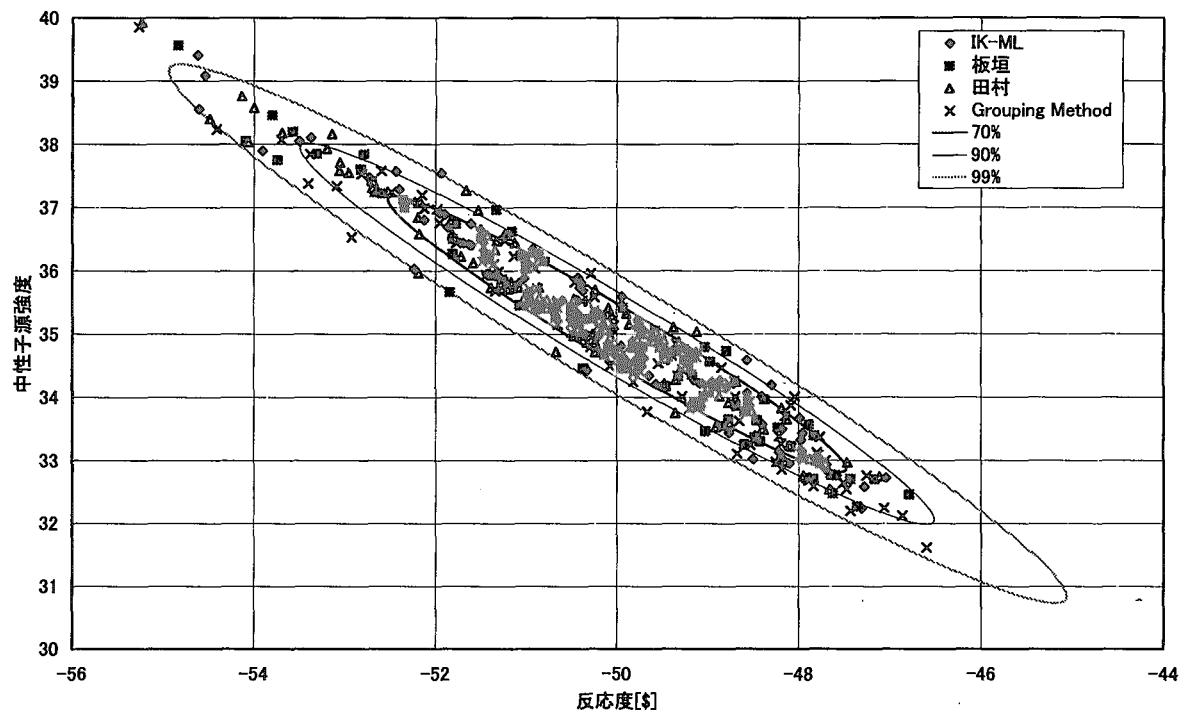


図 22 ケース 6 (深い ρ) に対する計算結果

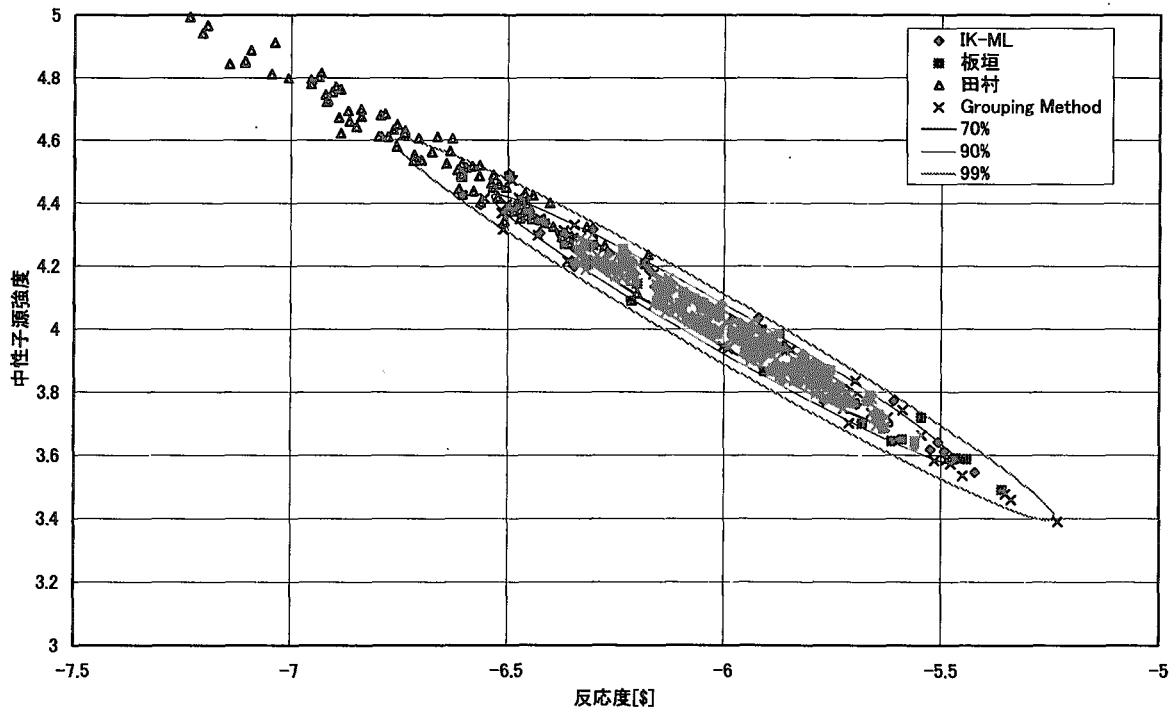


図 23 ケース 7 (落差 20 倍) に対する計算結果

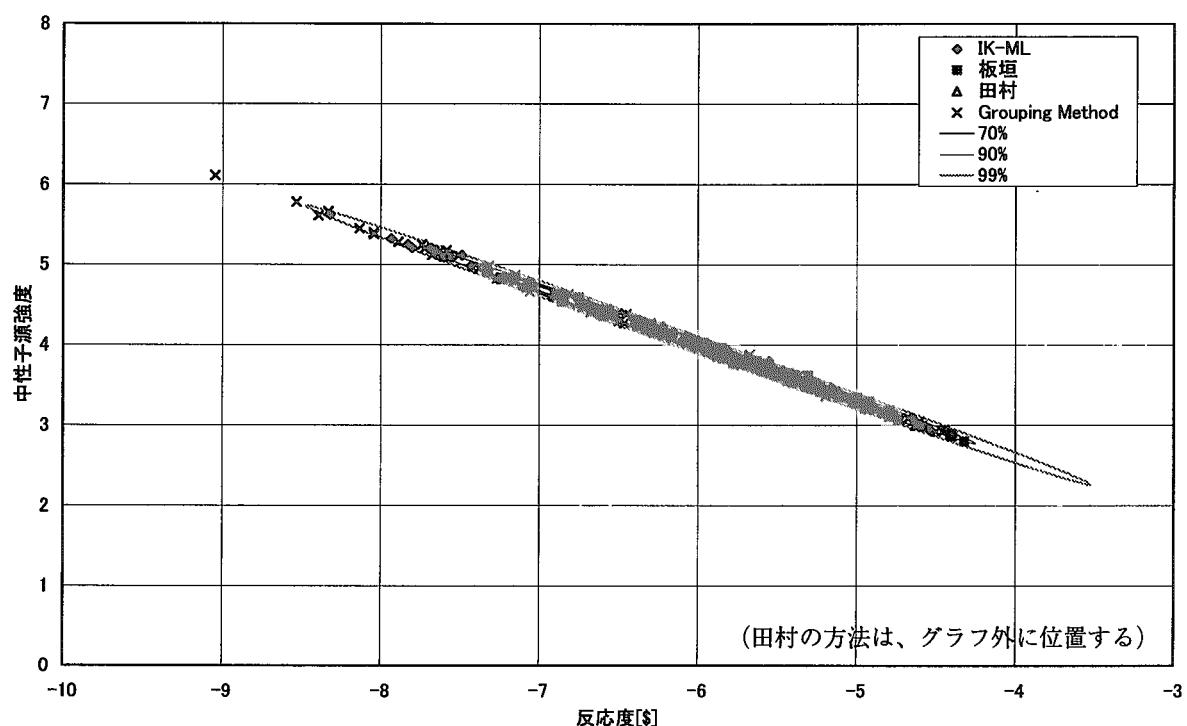


図 24 ケース 8 (落差 6 倍) に対する計算結果

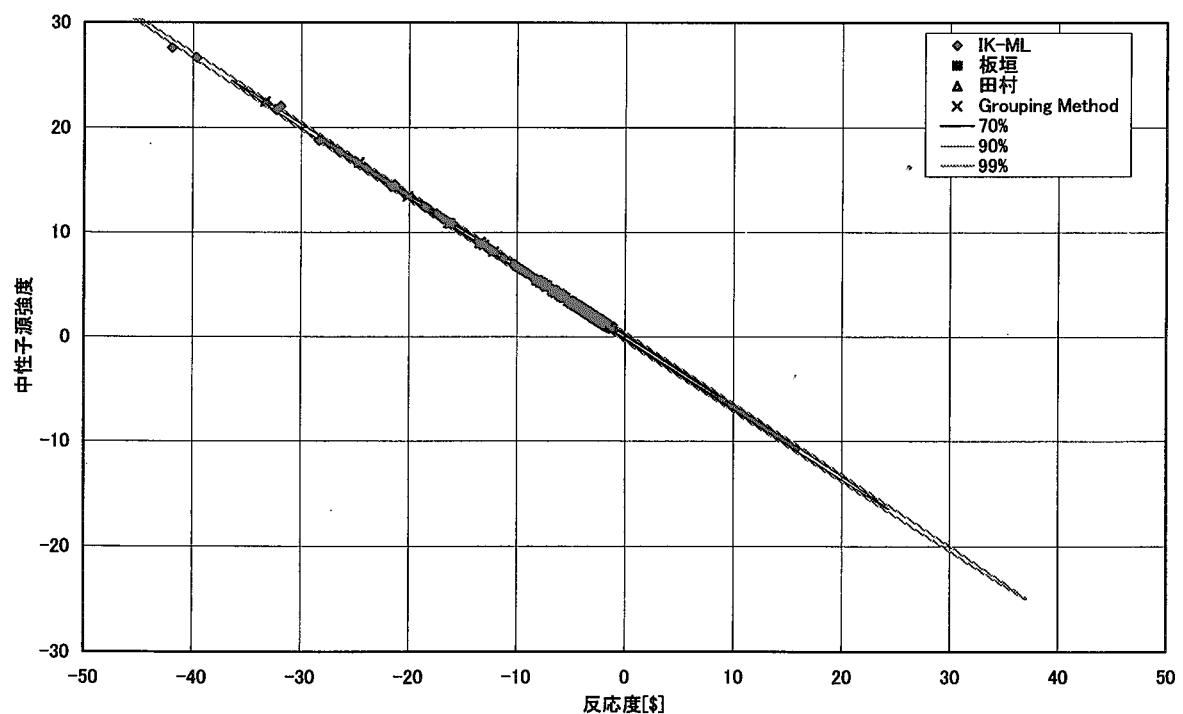


図 25 ケース 9 (落差 2 倍) に対する計算結果

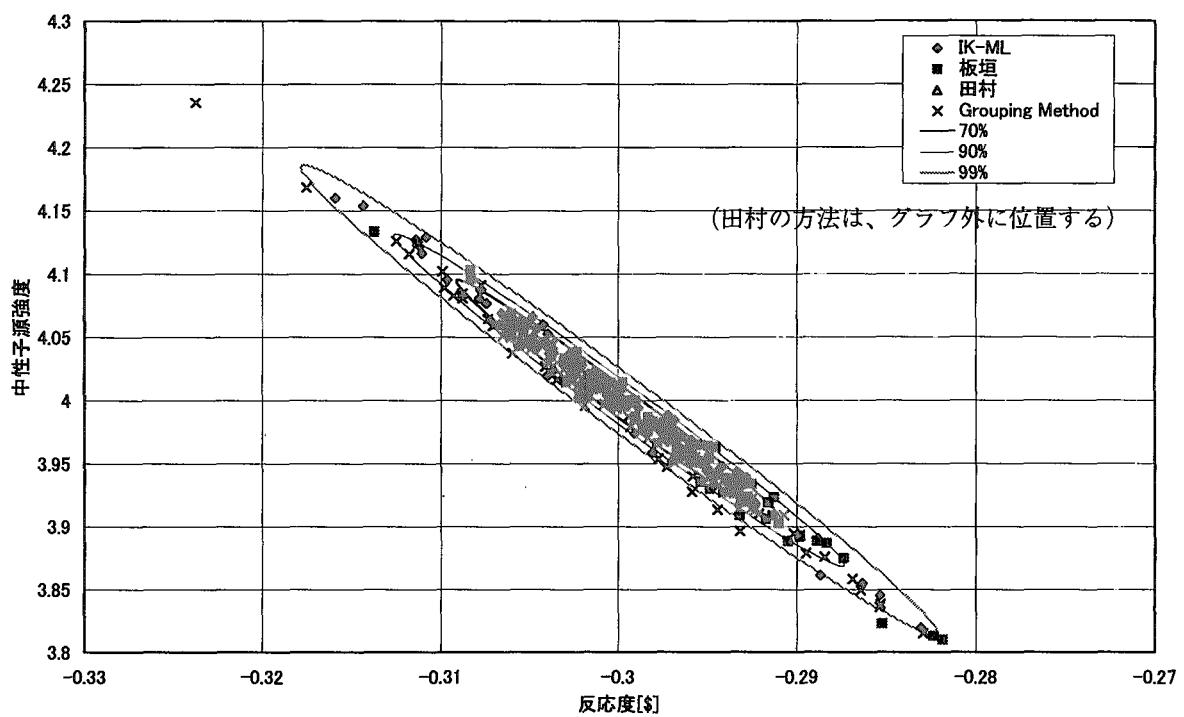


図 26 ケース 10 (反応度印加) に対する計算結果

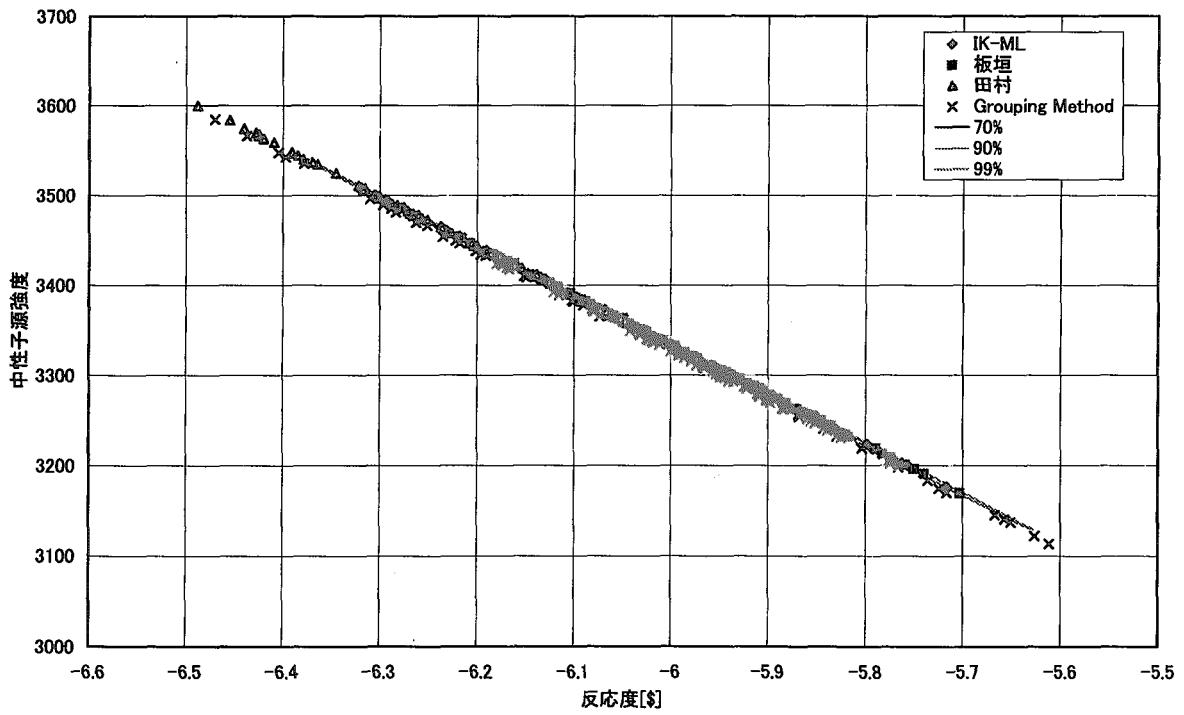


図 27 ケース 11 (中性子源 On) に対する計算結果

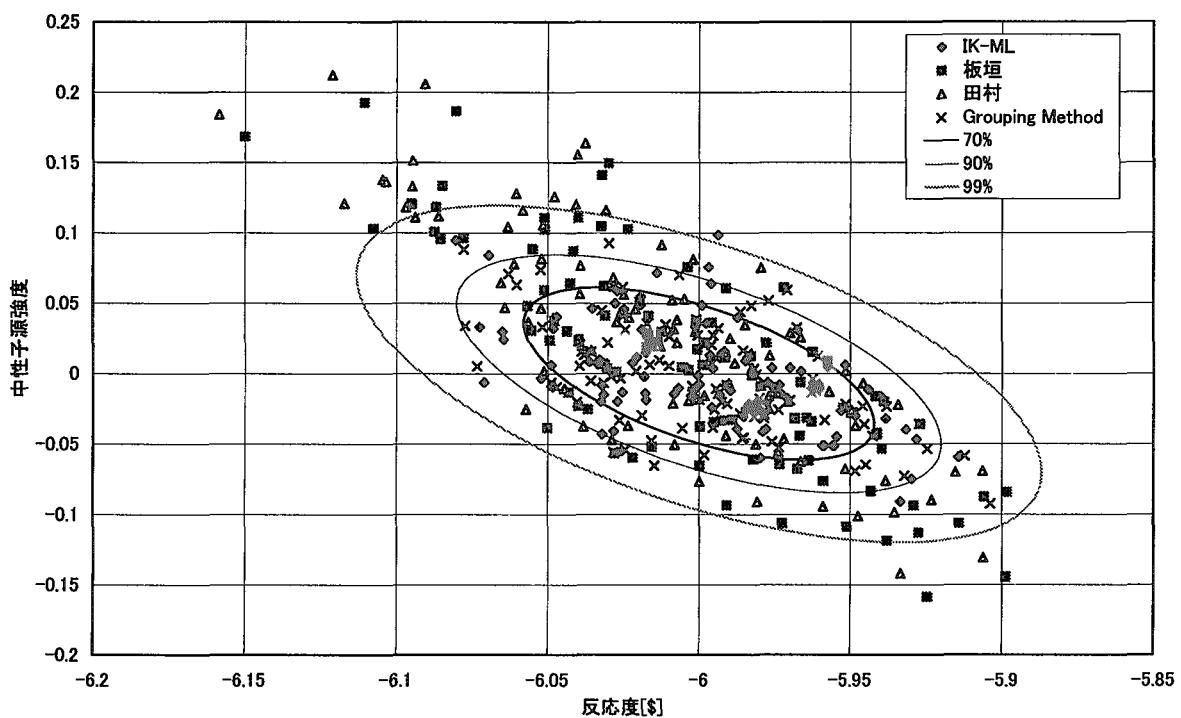


図 28 ケース 12（中性子源 Off）に対する計算結果

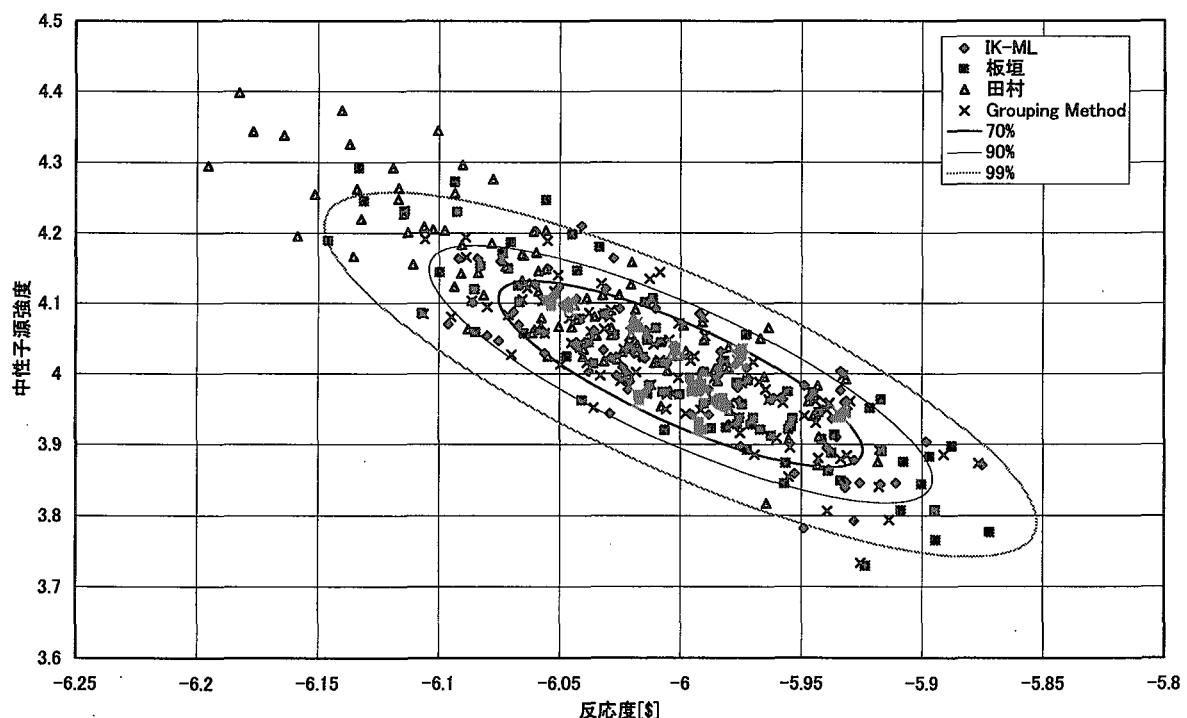


図 29 ケース 13（測定間隔小）に対する計算結果

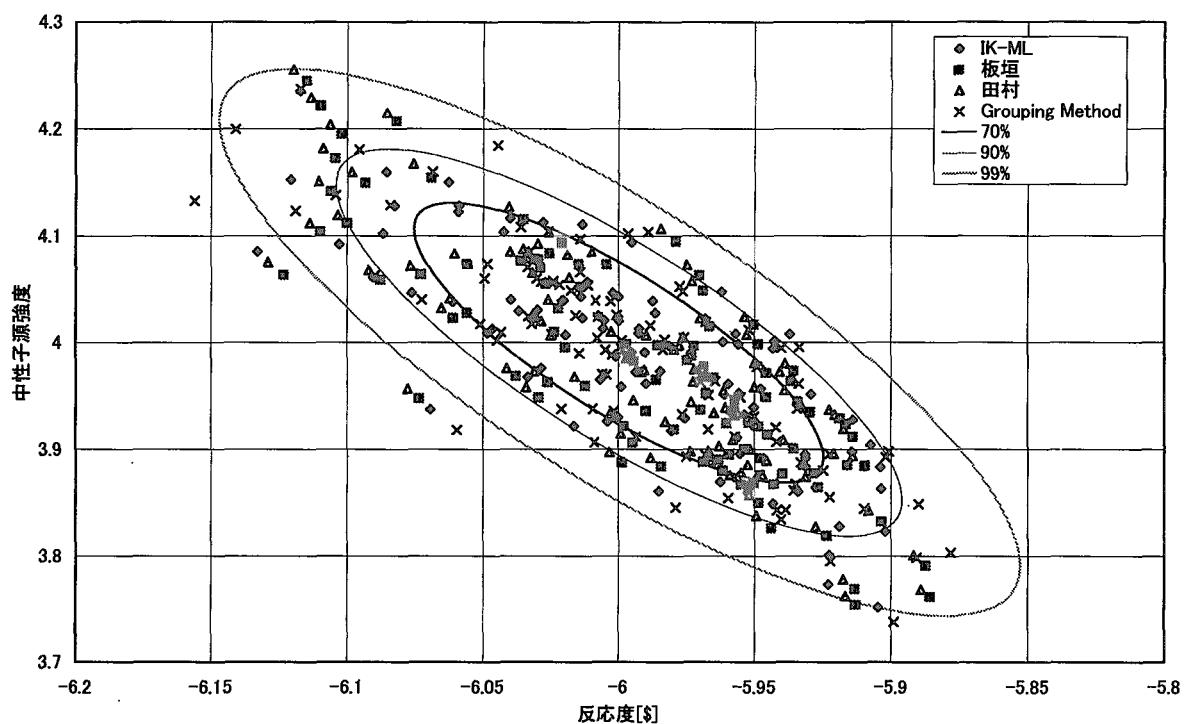


図 30 ケース 14（測定間隔大）に対する計算結果

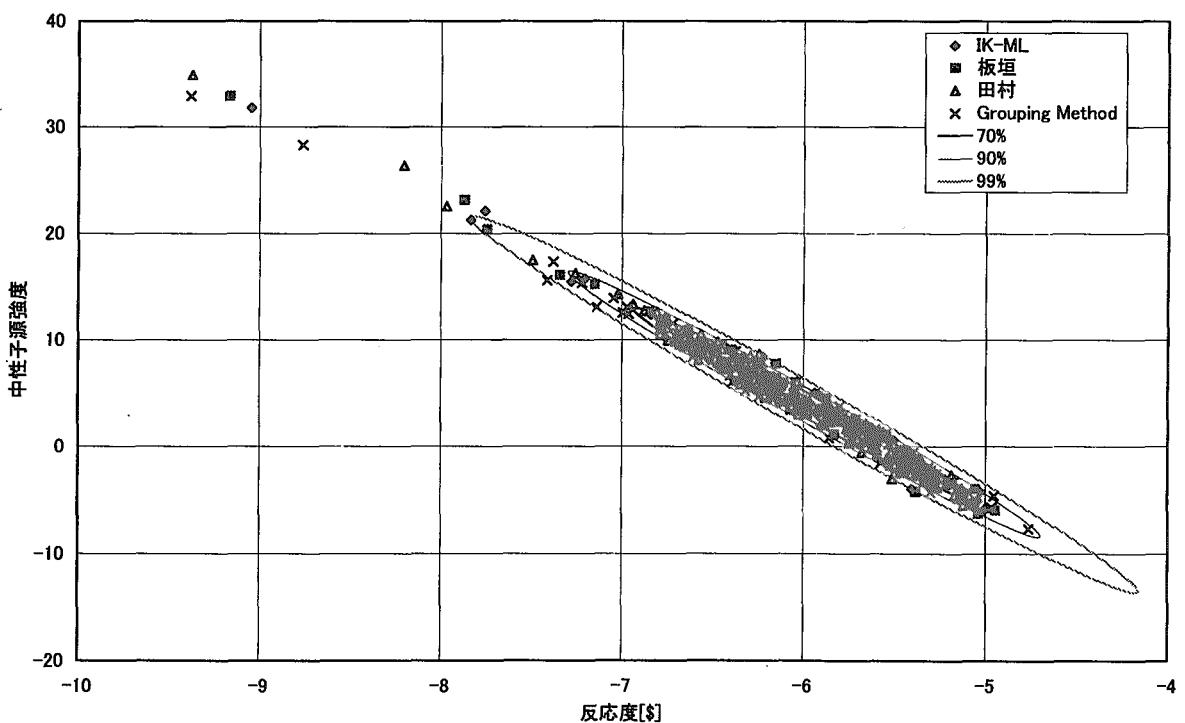


図 31 ケース 15（解析区間極短）に対する計算結果

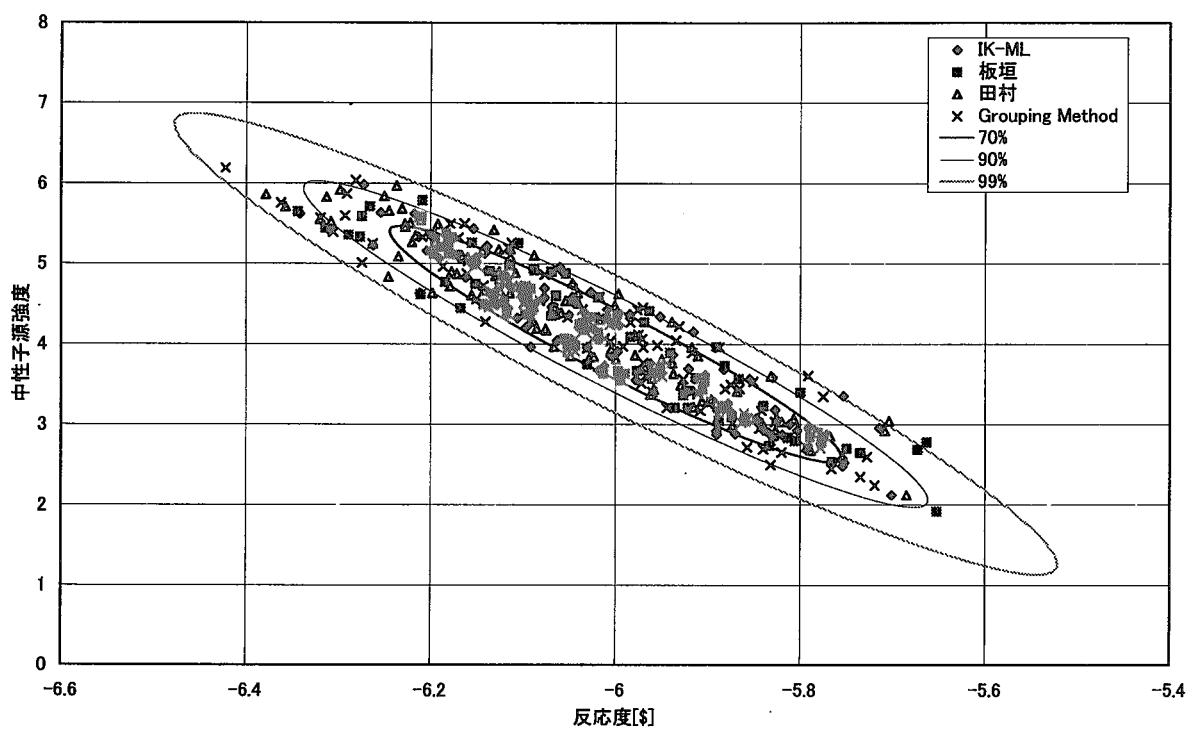


図 32 ケース 16（解析区間短）に対する計算結果

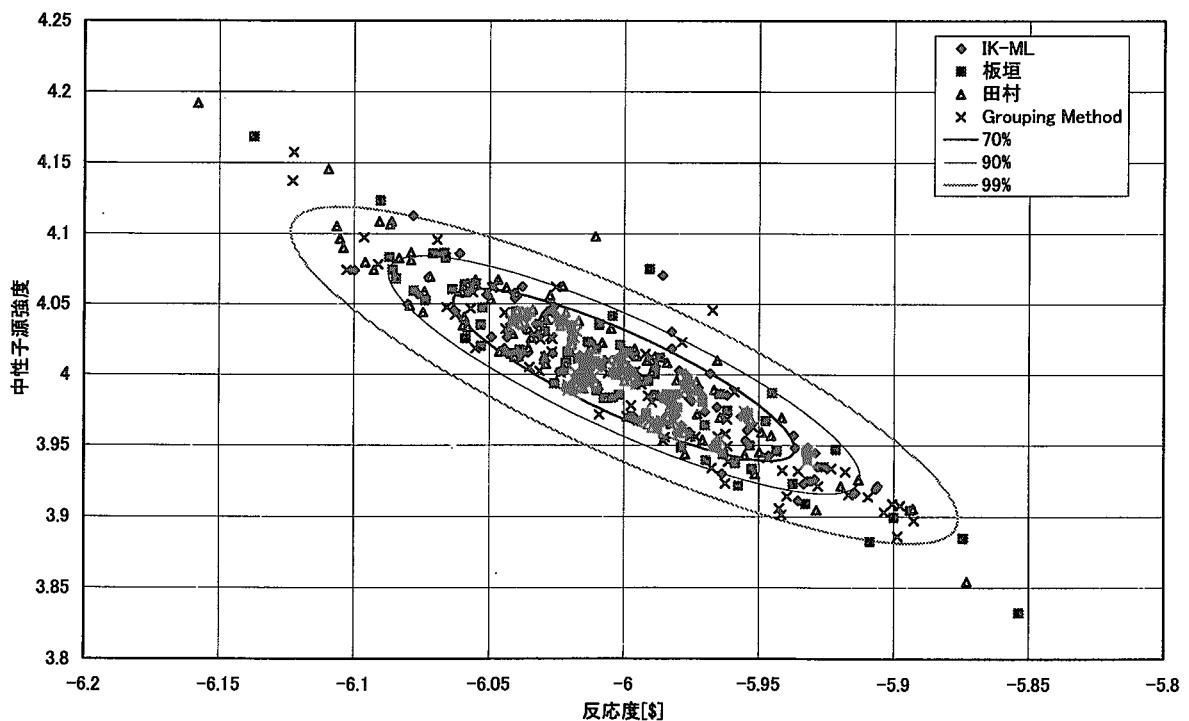


図 33 ケース 17（解析区間長）に対する計算結果

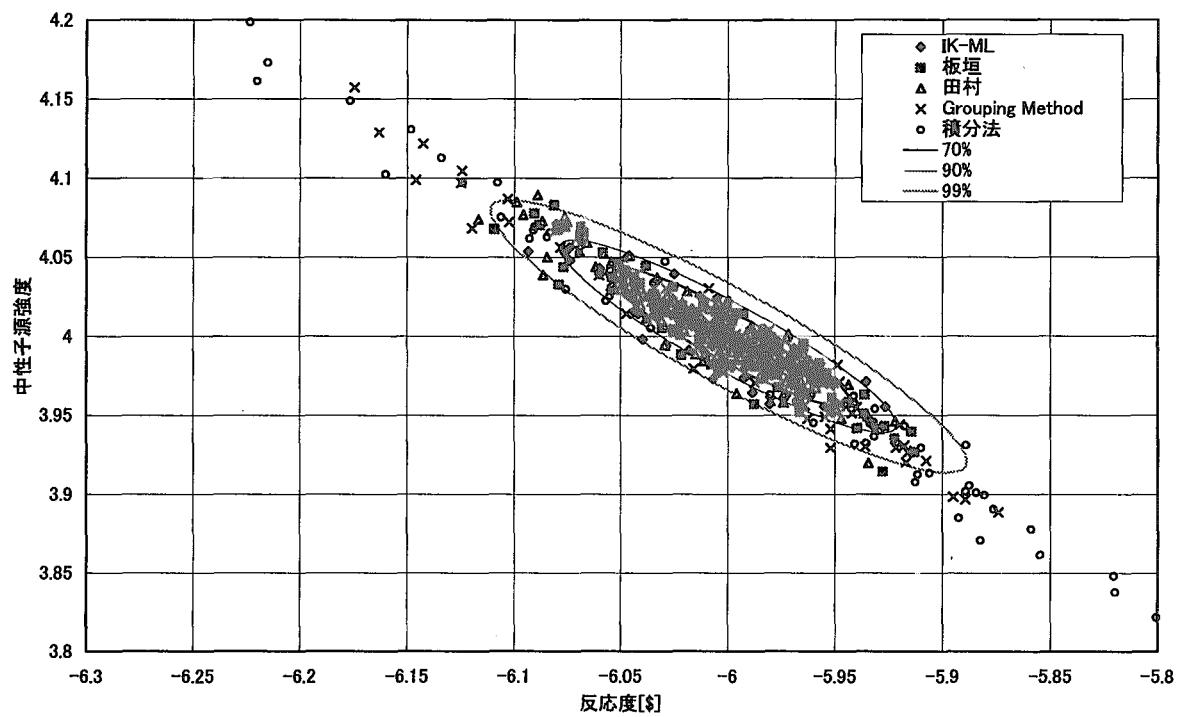


図 34 ケース 18（解析区間長 2）に対する計算結果

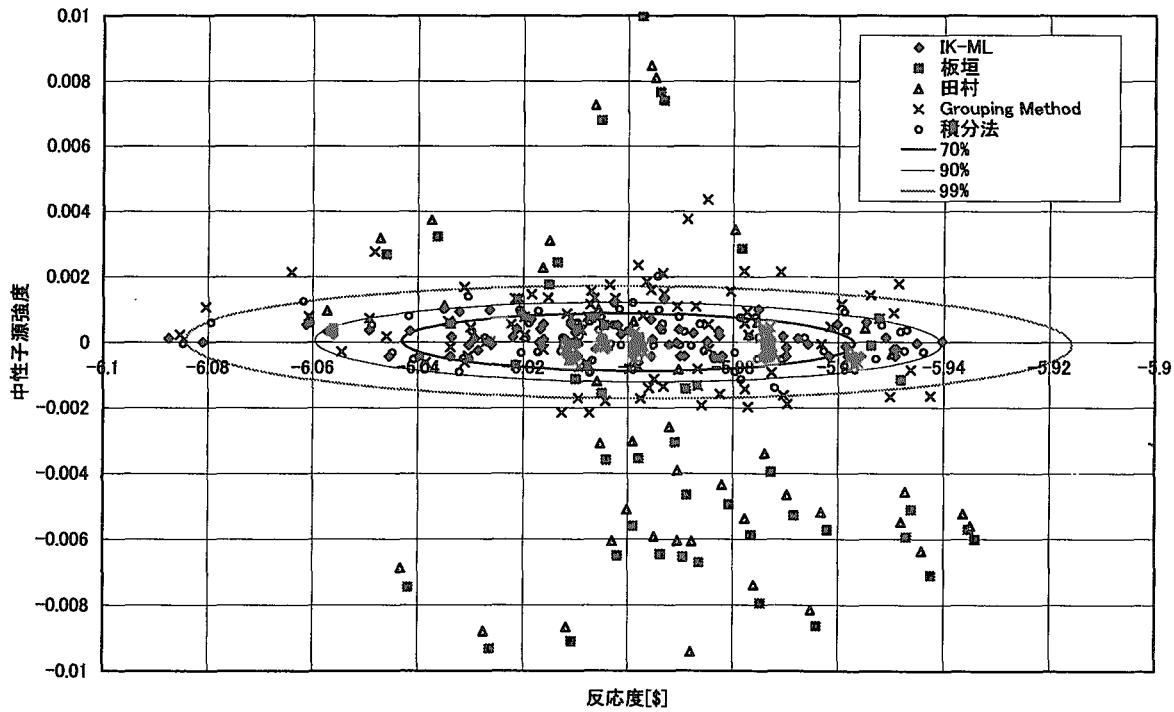


図 35 ケース 19（中性子源 Off 2）に対する計算結果

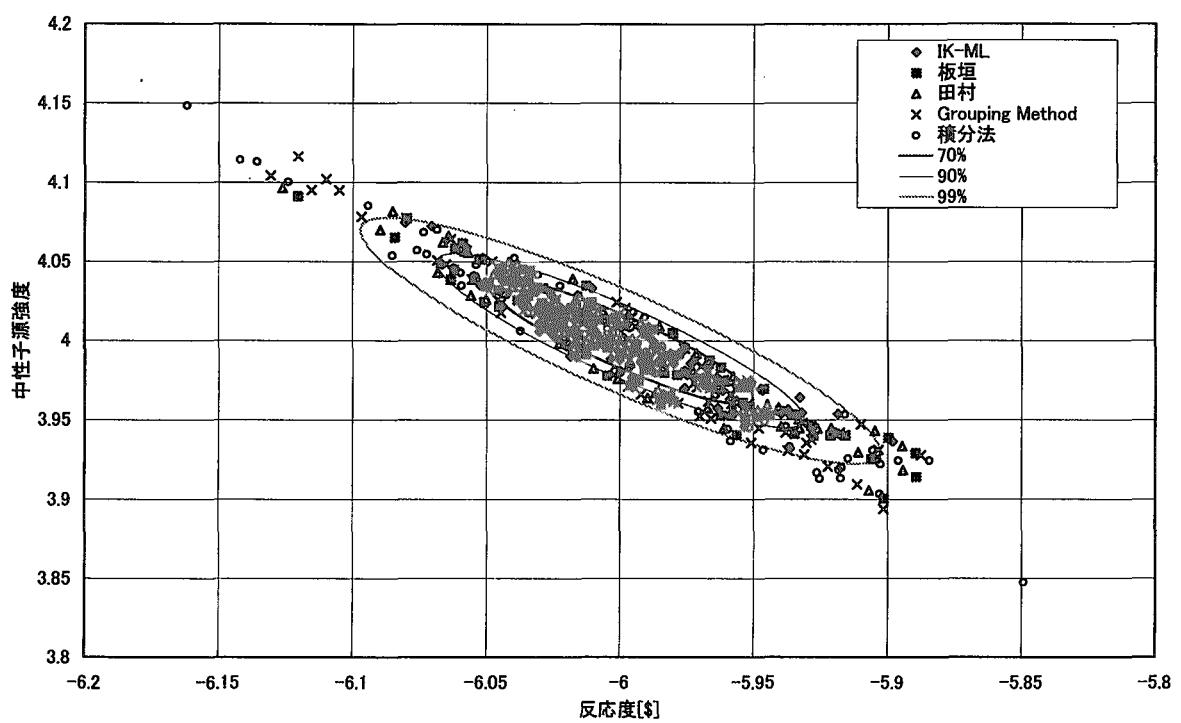


図 36 ケース 20 (中性子源 Off 3) に対する計算結果

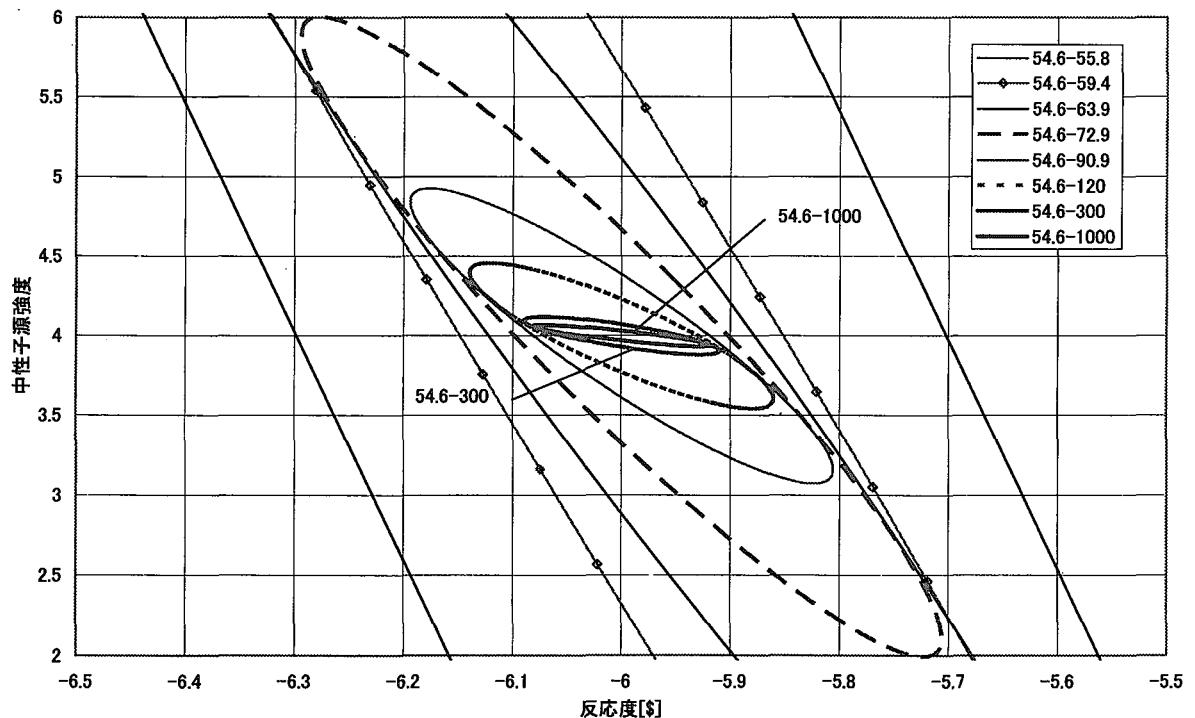


図 37 解析区間の終端を変化させたときの 90%信頼区間の変化

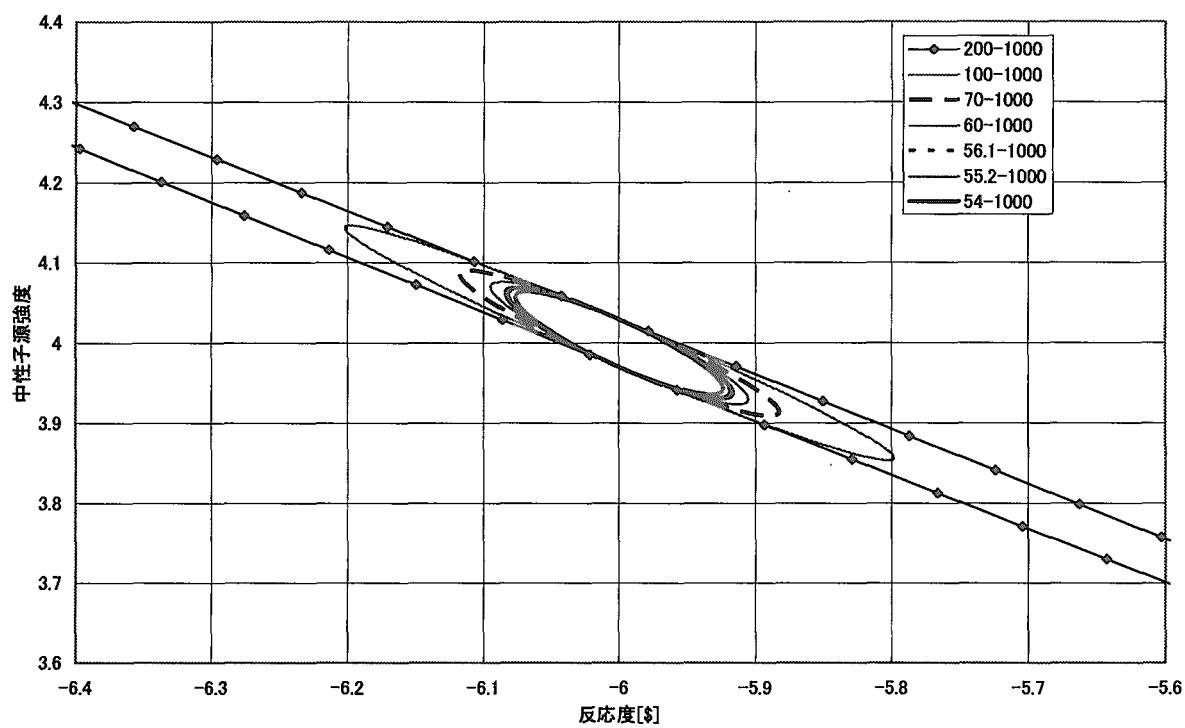


図 38 解析区間の開始点を変化させたときの 90%信頼区間の変化

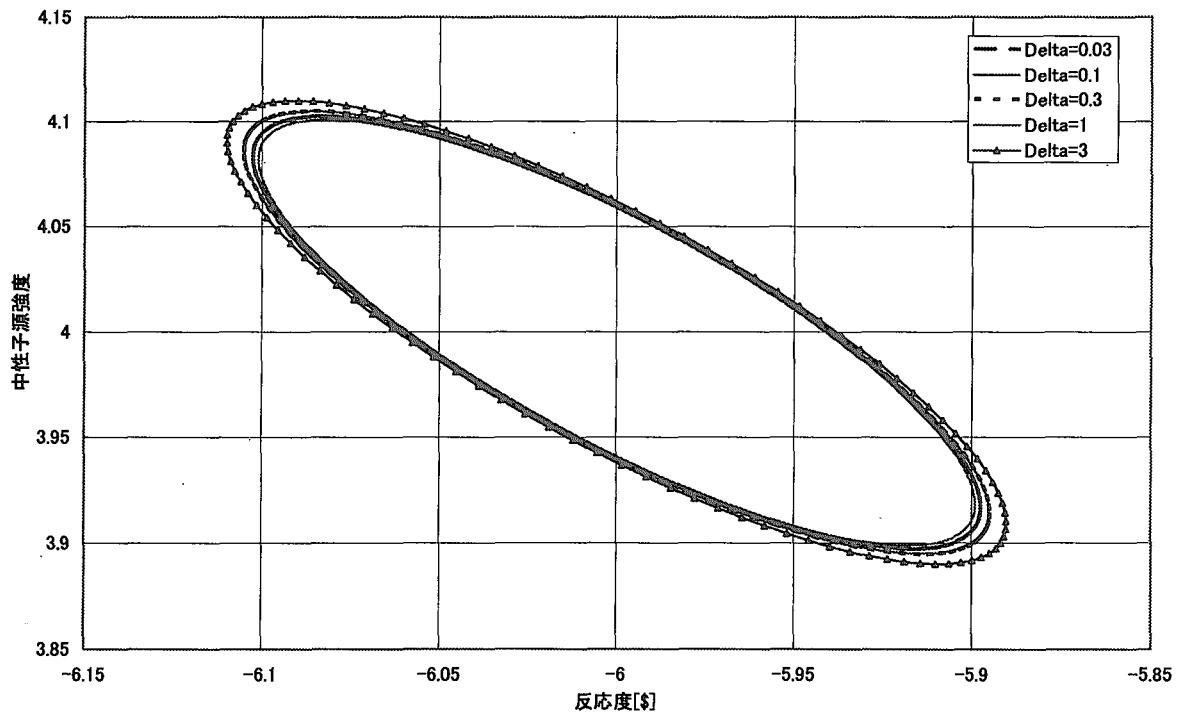


図 39 測定間隔を変化させたときの 90%信頼区間の変化

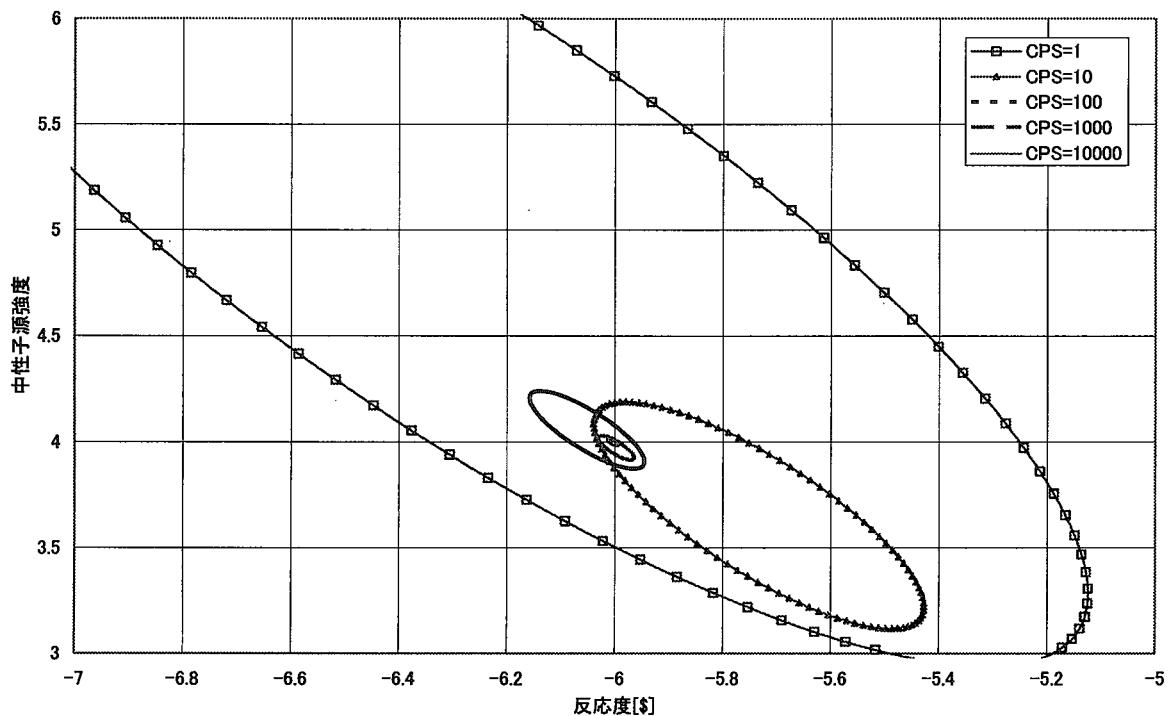


図 40 検出器感度を変化させたときの 90%信頼区間の変化

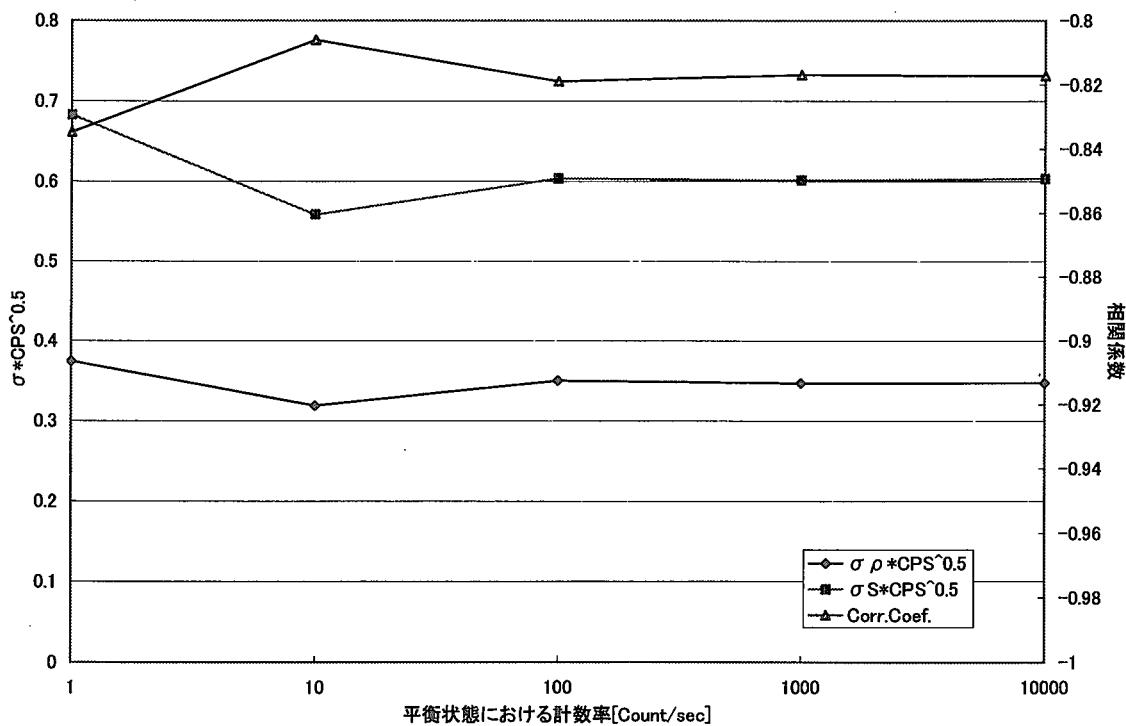


図 41 検出器感度と信頼区間の大きさの関係

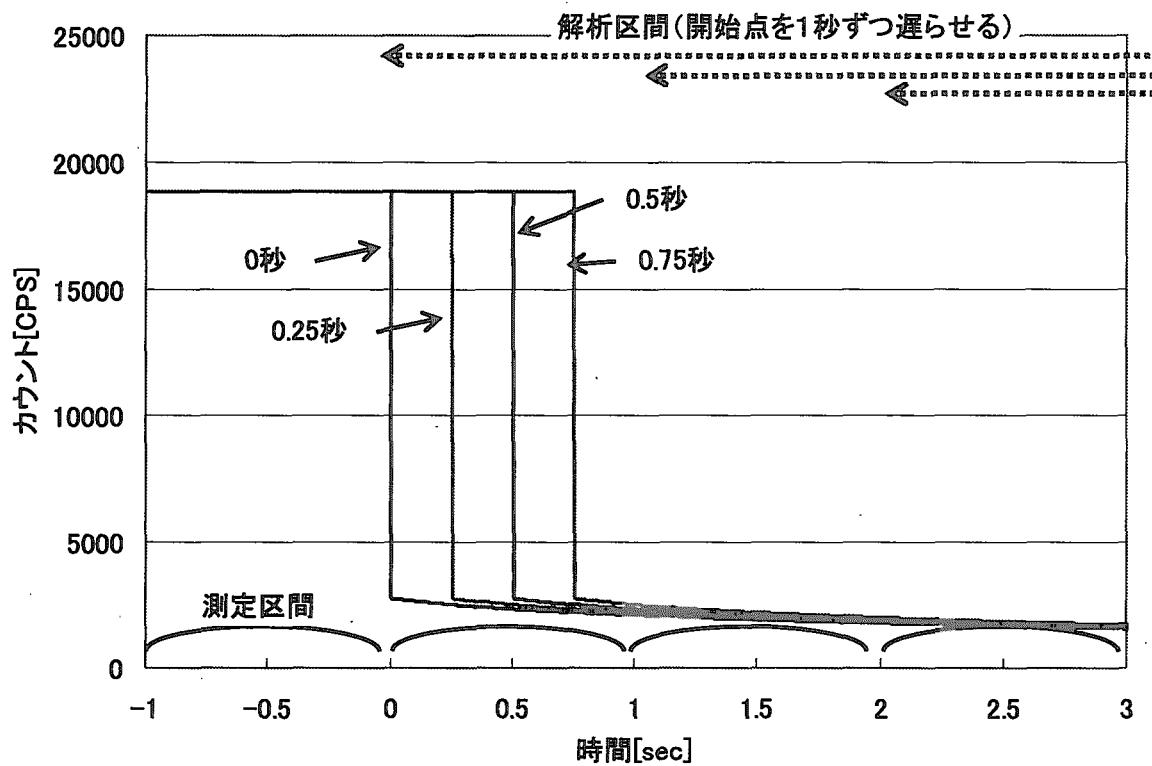


図 42 ロッドドロップのタイミングと測定間隔のずれ

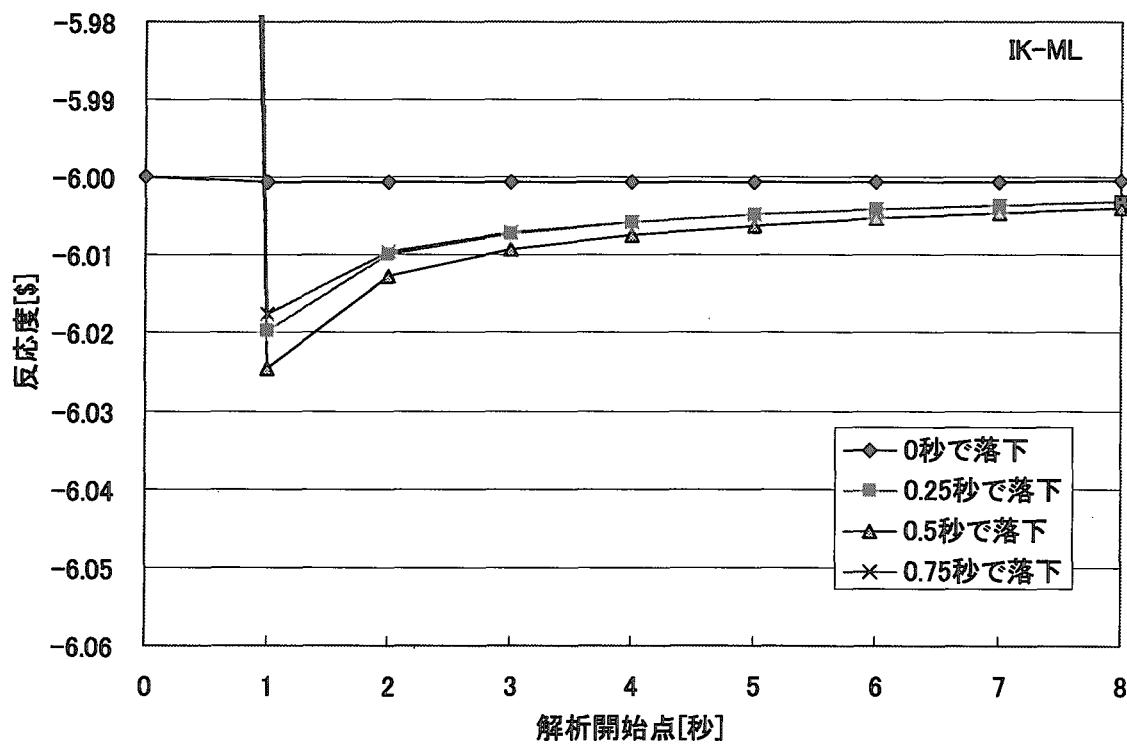


図 43 落下のタイミングと解析精度 (IK-ML 法)

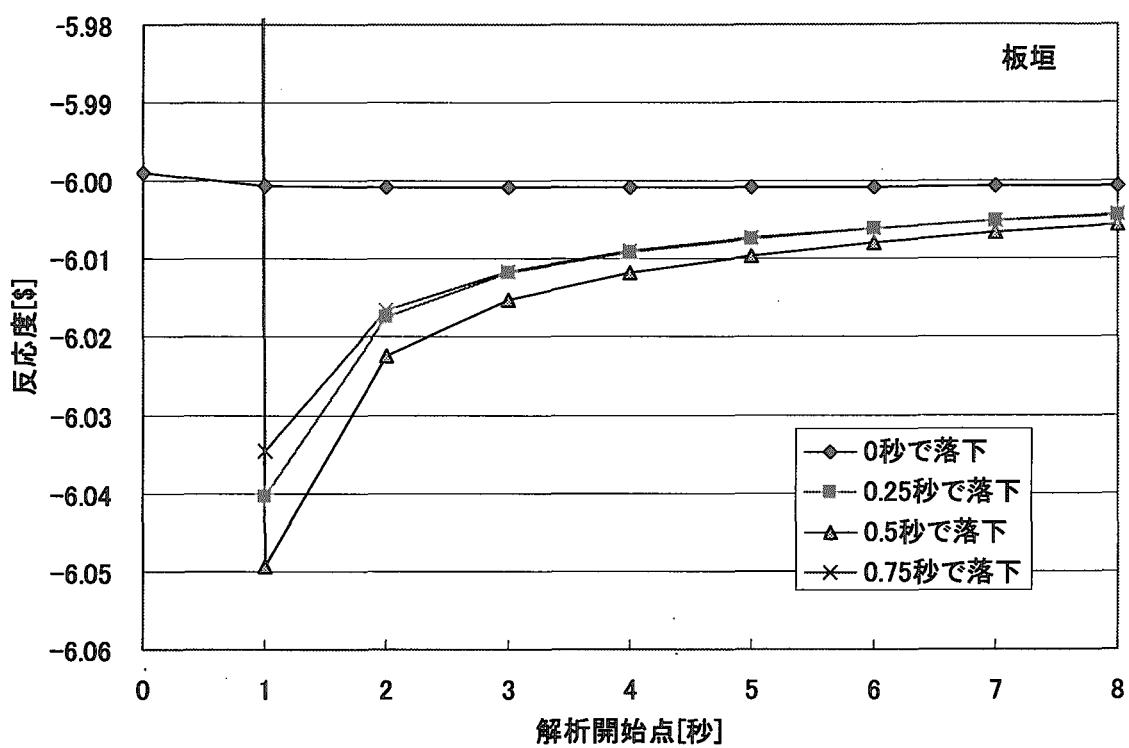


図 44 落下のタイミングと解析精度（板垣の方法）

5 FCA 実験への適用

FCAにおいて行われたロッドドロップ実験を解析して、実際の解析例とする。実験が行われた集合体構成や検出器位置などは文献6に詳しいので、ここでは概要にとどめる。実験が行われたのは FCA-XXI 炉心である。FCA-XXI 炉心は濃縮ウラン燃料を中心とした高速体系である。

この実験では、炉心中央に置かれた小型の核分裂計数管 1 個(P1)、ブランケット部におかれ核分裂計数管 3 個(M4,M5,M8)、及び、運転制御用の核分裂電離箱 2 個(Ch5,Ch6)を用いて中性子束が測定されており、これらの 6 つの検出器からのデータに対して解析を行った。核分裂電離箱では電流増幅を行っている為、回路図から最低でも、260msec 程度の遅れが生じていると推定される。このことはロッドドロップ直後においては、ドロップ後数秒の測定点に悪影響を及ぼす。そこで、次式で表される一次の遅れ補正を行った。

$$(P_j^m \text{補正後}) = (P_j^m - P_{j-1}^m e^{-\Delta t/\tau}) / (1 - e^{-\Delta t/\tau}) \quad (110)$$

ただし、 τ は遅れ時間であり、260msec を用いた。この補正を行う事によってロッドドロップ直後の数点を、理論値に近づける事が出来た。

また、出力モニタ（核分裂電離箱）の確率密度分布は、計数管と同様に出力の平方根に比例した標準偏差を持つ正規分布であると仮定した。比例係数は出力値のばらつきから決定し、結果、Ch5 及び 6 の確率密度分布は、次の二式で表される。

$$f(P_j^m, P_j^c) = (2\pi \cdot 4.66 \cdot 10^{-6} \cdot P_j^c)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(P_j^m - P_j^c)^2}{2(4.66 \cdot 10^{-6} \cdot P_j^c)}\right) \quad (111)$$

$$f(P_j^m, P_j^c) = (2\pi \cdot 4.64 \cdot 10^{-6} \cdot P_j^c)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(P_j^m - P_j^c)^2}{2(4.64 \cdot 10^{-6} \cdot P_j^c)}\right) \quad (112)$$

この実験シリーズでは、ロッドドロップなど IK 法を適用する為の実験の他に、中性子源増倍法やペリオド法など XXI 炉心の特性試験も含んでいる。これら、IK 法を目的としない実験データの中にも、IK 法を適用可能な測定領域を多数見出すことが出来る。例えば、ロッドドロップのように瞬時ではないが、制御棒を動かして反応度を変化させ、その後制御棒を一定位置に保っているため、IK-ML 法を適用可能な領域が存在する。今回はこれらのうち、表 5 に示した特徴的な 5 つについて解析を行う。この 5 つには反応度上昇/下降、中性子源あり/無しの 4 つの組み合わせの実験が含まれている。ただし、中性子源なしの場合、本来ならば、中性子源=0 と固定できるが、ここでは中性子源も未知であるとして、IK-ML 法を適用した。動特性パラメータは代表的な XXI 炉心についての計算値を用いた。(表 6 参照)

表 5 解析対象とした FCA 実験

実験 ID	特徴	開始出力 [W]	終了出力 [W]	開始反応度 [\$]	終了反応度 [\$]	中性子源 [W]
8-1	ロッドドロップ・中性子源あり	6	0.03	-0.03	-6	0.0013
7-2	反応度下降 中性子源あり	6	0.3	-0.025	-0.5	0.0011
4-1	反応度上昇 中性子源あり	0.03	0.6	-1.2	-0.06	0.00025
4-4	反応度下降 中性子源なし	0.6	0.0003	0	-1.2	0
1-1	反応度上昇 中性子源なし	0.2	8	0	0.1	0

反応度及び中性子源強度は目安値

表 6 用いた動特性パラメータ

[Decay Parameter]	1	2	3	4	5	6
Group	1	2	3	4	5	6
Lambda [s]	0.0127	0.0317	0.115	0.311	1.4	3.87
Beta	0.000215324	0.0014401	0.0013422	0.0027868	0.0009493	0.00034
Total beta	0.007073724			Prompt $\Lambda = 1E-7$ [sec]		

5.1 ロッドドロップ実験

制御棒落下を行って、ほぼ瞬時に反応度を印加できているため、今回解析した実験のなかで、もっとも精度良く深い反応度が求まっている実験である。

中性子源として炉心中心に Cf 中性子源が装荷され、図 45 に示すように、測定は 0.3 秒間隔で行われた。測定で得られた中性子束の時系列を調べると、制御棒は 54 秒から 54.3 秒の間に落下していることがわかる。4.6 で調べたように、このような実験では落下と測定間隔のタイミングのずれに注意する必要がある。つまり、この実験では、54 秒から 54.3 秒の測定データが異常となっている事が想像される。図 46 は解析区間を 54 秒から、遅らせた場合の反応度解析結果の変化を示している。この図から、54 秒の点を解析に含んではいけないことが明らかである。また、検出器 M8 と検出器 P1 の結果から、最初の測定点のみを除いて 54.3 秒から解析を始める事が妥当であると判断できる。一方、Ch5 及び Ch6 では解析区間によって、解が変化しまうことがわかる。

今回、解析区間はロッドドロップ後 1 点を除いて、54.3~600 秒の 1819 点とした。その解析結果を表 7 と図 47 に示す。

結果として、Ch5 および Ch6 において χ^2 検定の結果が 1.7~1.8 と大きな値を示している。この原因を考察する。図 48 に示したのは、出力の計算値に対する、中性子束測定値のばらつきである。この図により、M8 では落下直後から正規分布をしているのに対し、Ch5 では落下直後において計算値は過小評価であり、その後過大評価している事が分かる。

Ch5,6 では、炉心の出力レベルによって、出力レンジを変える事で、電流増幅度を 10 倍単位で調整するが、57.6 秒と 143 秒において、この出力レンジの切り替えが行われている。図 48 には、57.6 秒の前後でマイナスからプラスへの断絶が存在しており、前後の出力レンジの間での線形性が、このような実験に耐えるほど厳密には保たれておらず、それが大きな χ^2 の原因であると推測される。

従って、図 47 からは、Ch5 と Ch6 の精度が高いように見えるが、測定値のばらつきは小さくとも値そのものの精度が高くない為、実際は計数管の方が信頼できる結果である事が分かる。この現象はロッドドロップ実験以外でも見られる。

表 7 実験 8-1 (ロッドドロップ) の解析結果

		Ch5	Ch6	M4	M5	M8	P1
最尤法	反応度[\$]	-5.5262	-5.5332	-6.0451	-6.1674	-6.0823	-6.3370
	源強度[W]	1.260E-3	1.269E-3	1.278E-3	1.326E-3	1.326E-3	1.412E-3
	σ_p	0.0022	0.0022	0.0453	0.0438	0.0313	0.1226
	σ_s	7.287E-7	7.346E-7	1.380E-5	1.343E-5	9.611E-6	3.834E-5
	相関係数.	-0.8438	-0.8449	-0.8460	-0.8507	-0.8533	-0.8569
	$\chi^2/(N-2)$	3.180	2.470	0.951	1.022	0.998	0.999
板垣の方法	反応度[\$]	-5.4991	-5.5313	-6.0928	-6.2248	-6.0926	-6.3592
	源強度[W]	1.248E-3	1.266E-3	1.295E-3	1.345E-3	1.327E-3	1.420E-3
田村の方法	反応度[\$]	-5.5006	-5.5322	-6.1140	-6.2434	-6.1021	-6.5007
	源強度[W]	1.249E-3	1.266E-3	1.302E-3	1.352E-3	1.331E-3	1.472E-3
Grouping 法	反応度[\$]	-5.5158	-5.5159	-5.9935	-6.1198	-6.0344	-6.3388
	源強度[W]	1.254E-3	1.259E-3	1.258E-3	1.307E-3	1.305E-3	1.412E-3

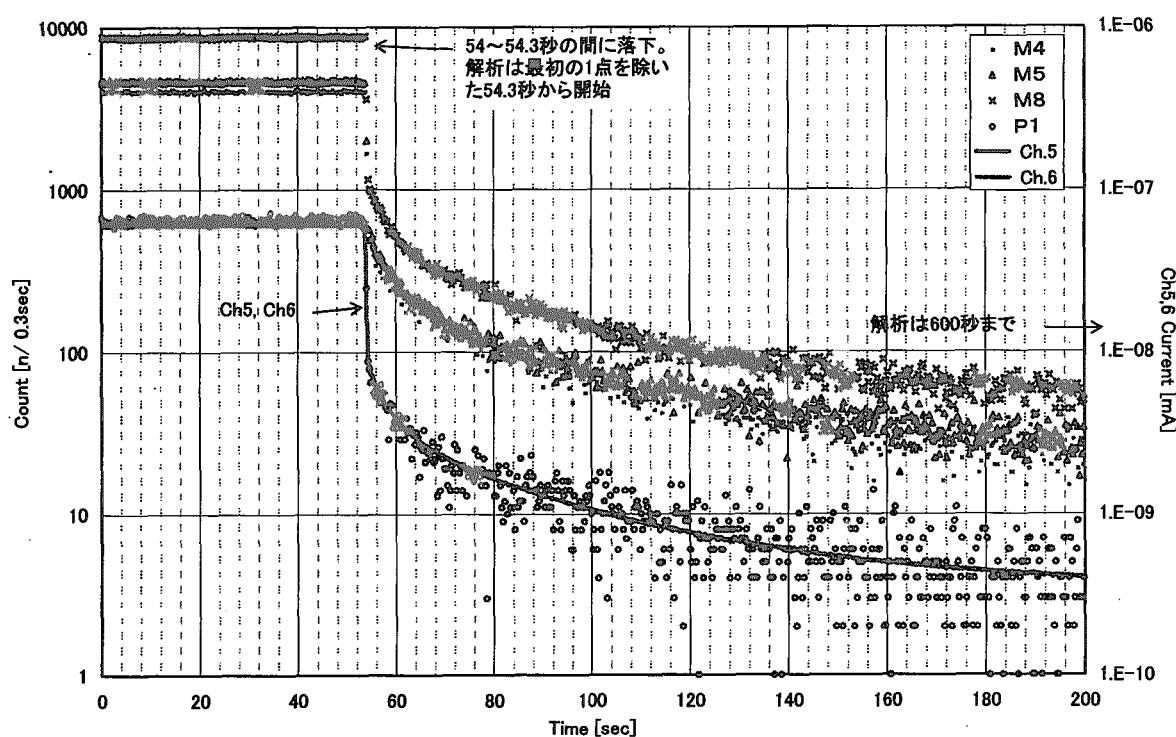
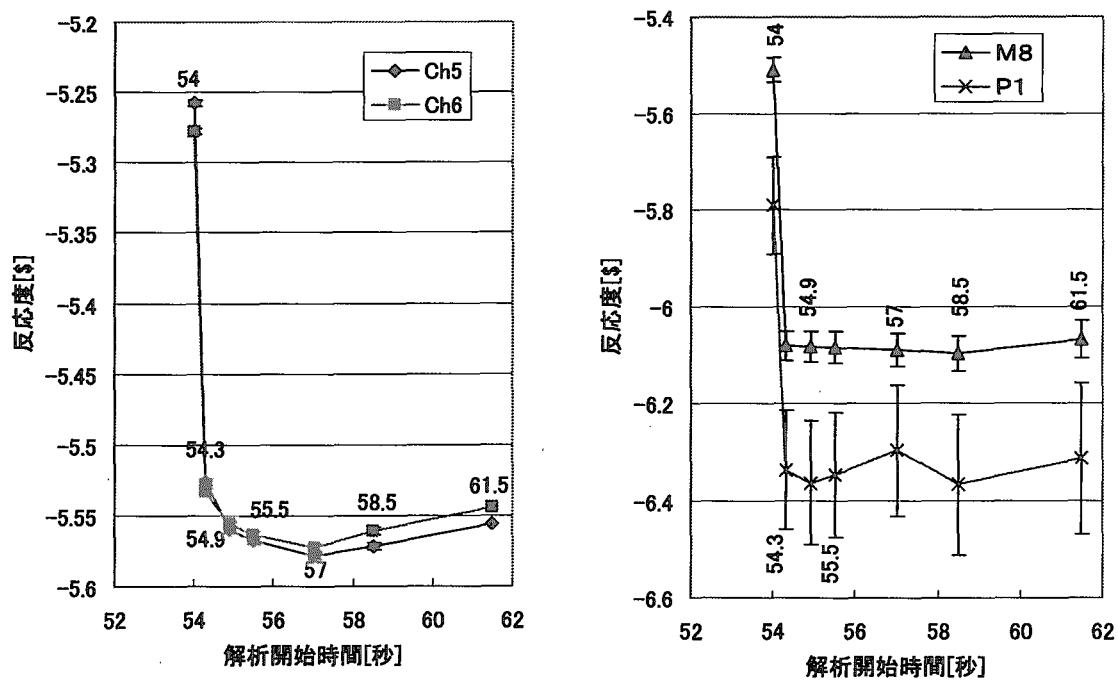


図 45 実験 8-1 (ロッドドロップ) の測定データ

図 46 解析の開始時間と反応度の解析結果（誤差棒は 1σ を示す。）

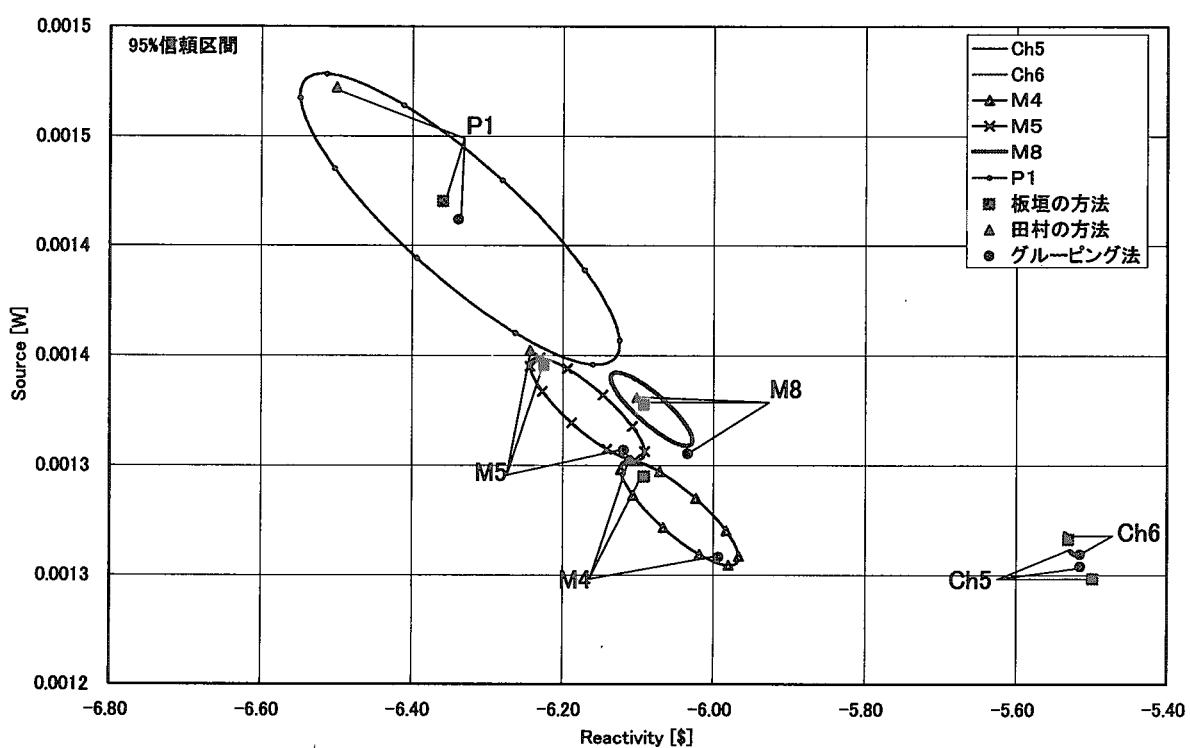


図 47 実験 8-1 (ロッドドロップ) の解析結果

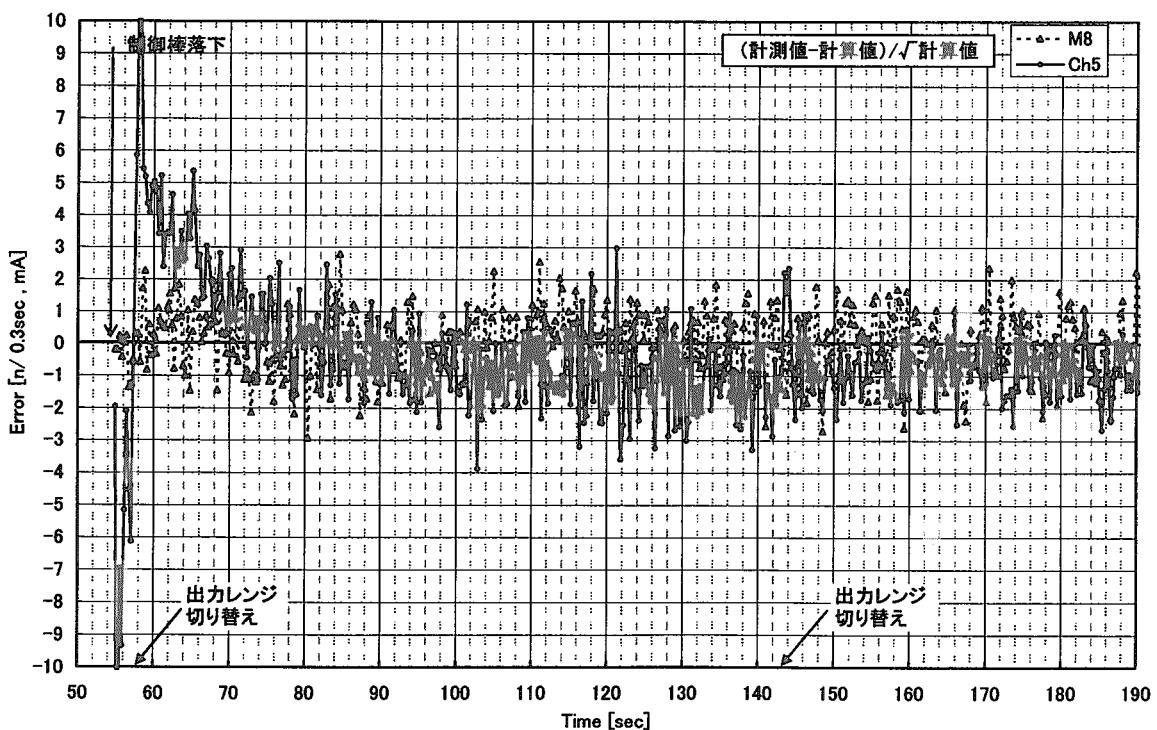


図 48 実験 8-1 (ロッドドロップ) における、計算値に対する測定値のばらつき

5.2 反応度下降・中性子源ありの実験

この実験ではロッドドロップ実験と同様に、負の反応度を加えているが、ロッドドロップ実験と異なり、図 49 のように緩やかに複数の制御棒を変化させる事で反応度を与える。従って、制御棒が動いている 474~504 秒の間、中性子束は変化しているが、この部分を解析区間に含める事は出来ない。この解析では、505~950 秒の 445 点に対して最尤法を適用した。測定結果を図 50 に、解析の結果を表 8 と図 51 に示した。

実験 8-1 のロッドドロップ実験と同様であるが、中性子束の変化が緩やかであるため、実験条件としては厳しい。8-1 と比較して、田村の方法が誤差椭円の大きく外に位置するのは、その為であろう。

表 8 実験 7-1 (反応度下降・中性子源ありの実験) の解析結果

		Ch5	Ch6	M4	M5	M8	P1
最尤法	反応度[\$]	-0.4635	-0.4687	-0.4711	-0.4702	-0.4774	-0.4660
	源強度[W]	1.064E-03	1.083E-03	1.058E-03	1.062E-03	1.063E-03	1.116E-03
	σ_p	1.591E-04	1.629E-04	1.566E-03	1.456E-03	1.072E-03	3.949E-03
	σ_s	5.556E-07	5.686E-07	5.367E-06	5.023E-06	3.640E-06	1.423E-05
	相関係数.	-0.9130	-0.9150	-0.9117	-0.9115	-0.9115	-0.9169
	$\chi^2/(N-2)$	17.682	4.582	0.911	1.001	1.062	1.138
板垣の方法	反応度[\$]	-0.4652	-0.4714	-0.4755	-0.4718	-0.4817	-0.4679
	源強度[W]	1.070E-03	1.092E-03	1.072E-03	1.068E-03	1.077E-03	1.122E-03
田村の方法	反応度[\$]	-0.4659	-0.4716	-0.4796	-0.4754	-0.4837	-0.5022
	源強度[W]	1.073E-03	1.093E-03	1.088E-03	1.082E-03	1.084E-03	1.259E-03
Grouping 法	反応度[\$]	-0.4634	-0.4675	-0.4704	-0.4690	-0.4767	-0.4619
	源強度[W]	1.058E-03	1.072E-03	1.051E-03	1.055E-03	1.056E-03	1.094E-03

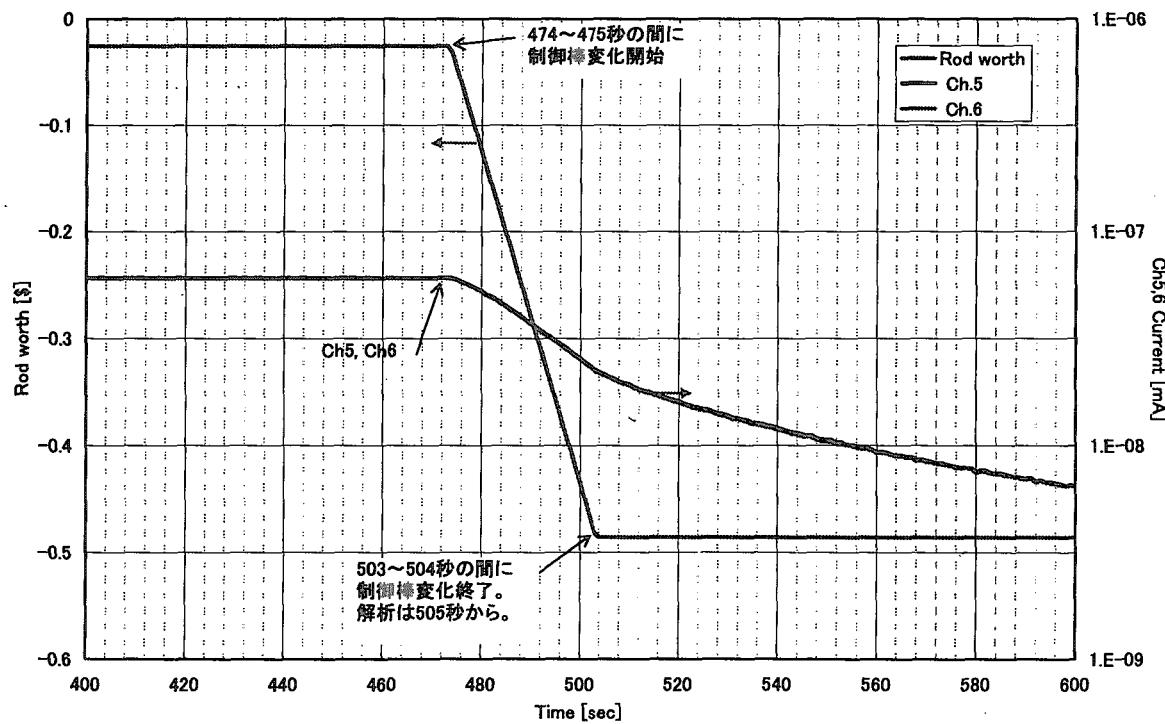


図 49 実験 7-1 (反応度降下、中性子源あり) の制御棒価値から算出した反応度

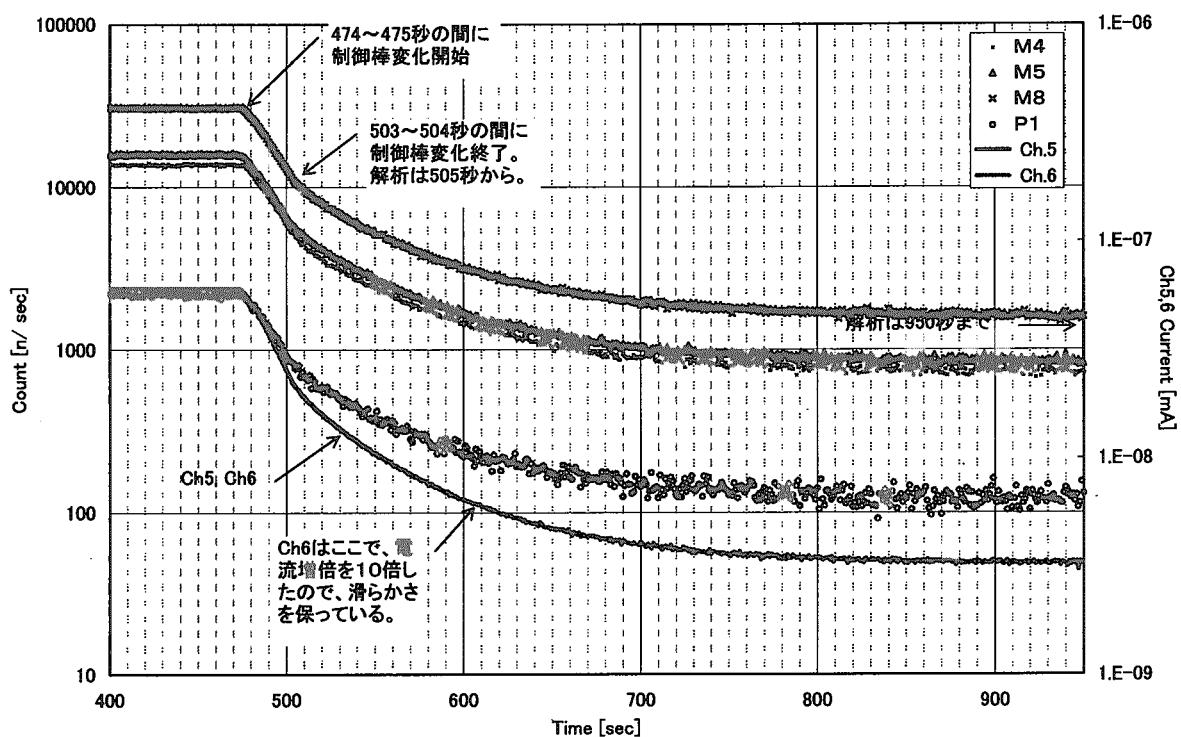


図 50 実験 7-1（反応度降下、中性子源あり）の測定値

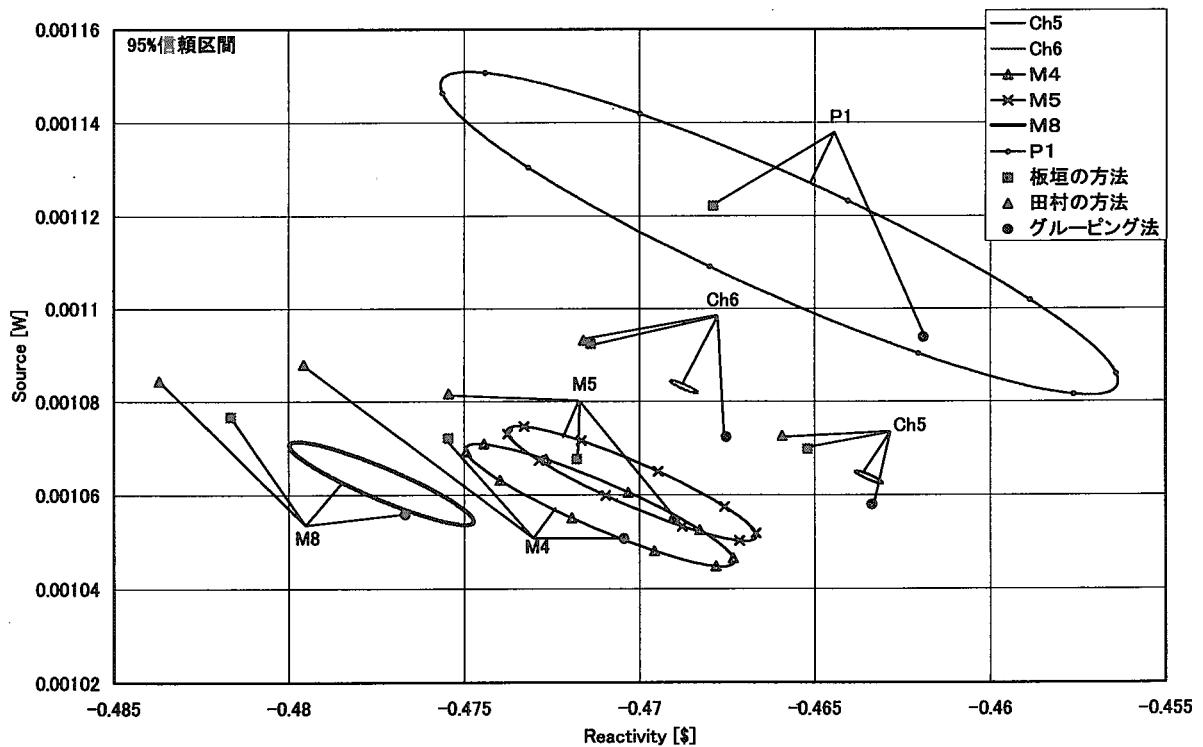


図 51 実験 7-1（反応度降下、中性子源あり）の解析結果

5.3 反応度上昇・中性子源ありの実験

この実験では中性子源が存在するときに、図 52 のように反応度を与えた。この実験では炉外の出力モニタの結果のみしか得られていない。1187~2235 秒の 1673 点に対して最尤法を適用した解析の結果を、表 9 と図 53 に示す。

なお、この実験では Cf 中性子源ではなく Am-Be を用いた為、中性子源強度が前述の実験 8-1 などに比べ、1/4 程度となっている。

この実験では、相関係数が -1 に近い、すなわち、反応度と中性子源強度が強い負の相関を持っている為、信頼橿円は細長い形状となる。

表 9 実験 4-1 (反応度上昇・中性子源ありの実験) の解析結果

		Ch5	Ch6
最尤法	反応度[\$]	-0.0582	-0.0583
	源強度[W]	2.448E-04	2.451E-04
	σ_p	0.00008	0.00008
	σ_s	2.204E-07	2.212E-07
	相関係数.	-0.9935	-0.9935
	$\chi^2/(N-2)$	2.127	1.841
板垣の方法	反応度[\$]	-0.0582	-0.0583
	源強度[W]	2.447E-04	2.450E-04
田村の方法	反応度[\$]	-0.0704	-0.0689
	源強度[W]	2.806E-04	2.761E-04
Grouping 法	反応度[\$]	-0.0584	-0.0584
	源強度[W]	2.449E-04	2.449E-04

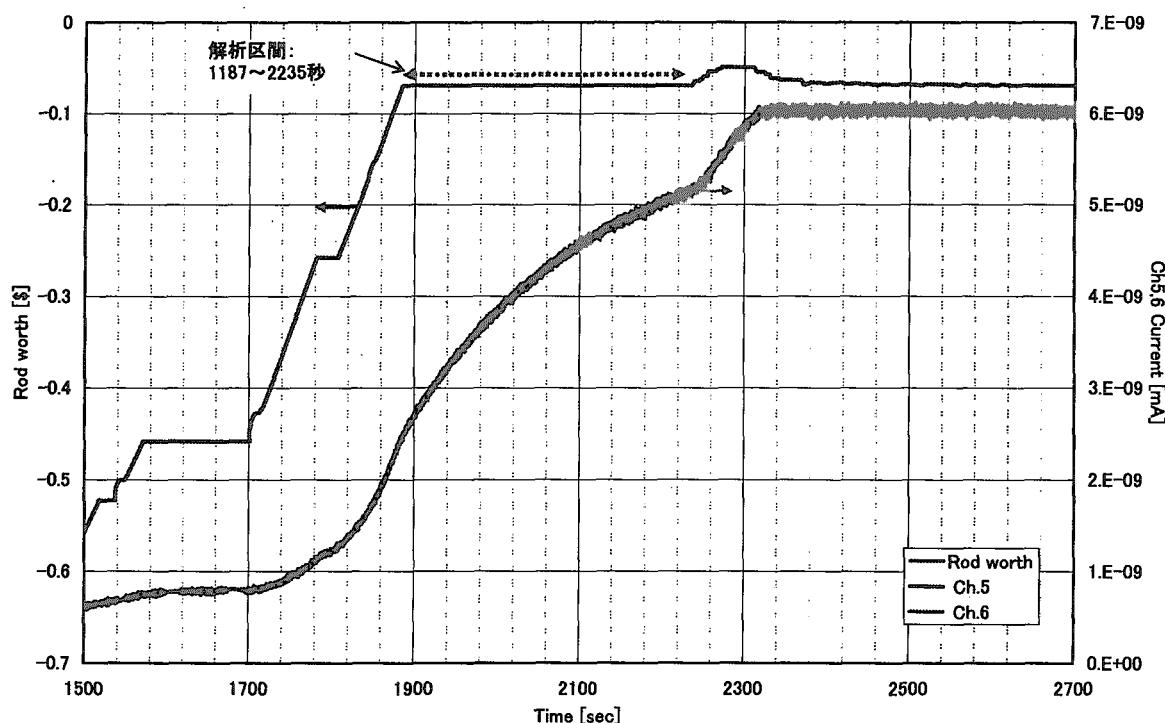


図 52 実験 4-1 (反応度上昇、中性子源あり) の制御棒価値から算出した反応度と出力

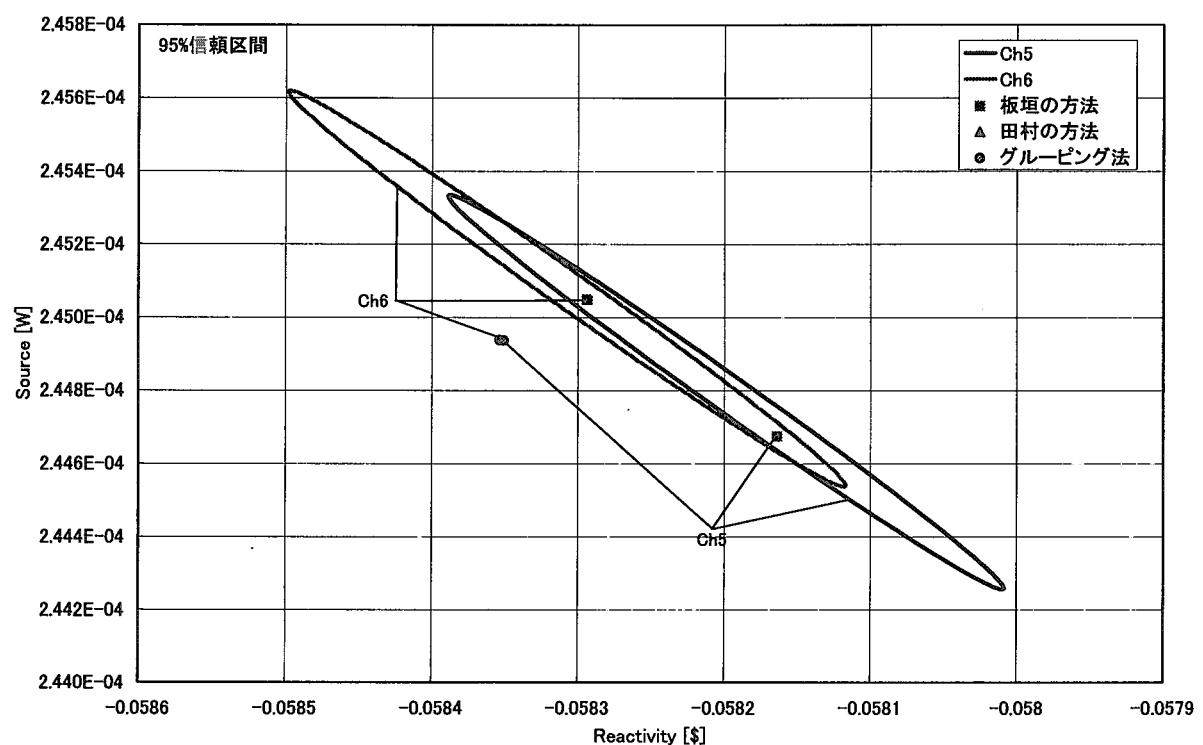


図 53 実験 4-1（反応度上昇、中性子源あり）の解析結果

5.4 反応度下降・中性子源なしの実験

この実験では中性子源が殆ど存在しないときに、図 54のように段階的に負の反応度を与えた。この実験の中には、反応度が一定で中性子束が変化している領域が 3つあるので、それらの区間に對して解析を行う。これらの領域を図 54に示すように、a、b 及び c と呼ぶ。cにおいて、区間を 510 秒で終えているが、これは、510 秒で出力レンジの切り替えが行われており、移行したレンジにおける正確な校正がなされていない為である。この実験でも、出力モニタの結果しかえられていない。

表 10、図 55および図 56に解析結果を示す。結果として、反応度が深くなるほど、中性子源の影響が大きくなり、中性子源は精度よく求まっていく。c 区間の結果から、このような低出力の領域では、炉内の中性子源の存在は無視できず、また、このような実験で測定可能である事が分かる。

なお、 ^{238}U の自発核分裂による出力は、炉心内で $8.1 \times 10^{-8}[\text{W}]$ 、プランケット領域で $9.1 \times 10^{-7}[\text{W}]$ である。c 区間からの見積もりは、 $3 \times 10^{-7} \sim 2 \times 10^{-6}[\text{W}]$ 程度であり、この中性子源は ^{238}U の自発核分裂によるものである可能性がある。

表 10 実験 4-4 (反応度下降・中性子源なしの実験) の解析結果

		Ch5-a	Ch6-a	Ch5-b	Ch6-b	Ch5-c	Ch6-c
最尤法	反応度[\$]	-0.0655	-0.0660	-0.1231	-0.1215	-0.4255	-0.4392
	源強度[W]	2.802E-07	2.312E-06	2.802E-07	2.312E-06	8.085E-07	1.694E-06
	σ_p	0.00040	0.00041	0.00028	0.00028	0.00343	0.00359
	σ_s	1.101E-06	1.108E-06	2.681E-07	2.675E-07	2.013E-07	2.111E-07
	相関係数.	-0.9971	-0.9971	-0.9858	-0.9858	-0.9771	-0.9779
	$\chi^2/(N-2)$	2.270	2.014	4.428	3.397	1.710	1.388
板垣の方法	反応度[\$]	-0.0657	-0.0660	-0.1234	-0.1223	-0.4253	-0.4393
	源強度[W]	9.700E-07	2.310E-06	-7.814E-08	-9.552E-07	7.937E-07	1.689E-06
田村の方法	反応度[\$]	-0.0848	-0.0829	-0.1368	-0.1321	-0.4584	-0.4668
	源強度[W]	5.213E-05	4.769E-05	1.252E-05	8.332E-06	2.777E-06	3.343E-06
Grouping 法	反応度[\$]	-0.0660	-0.0665	-0.1225	-0.1206	-0.4250	-0.4393
	源強度[W]	1.793E-06	3.681E-06	-9.165E-07	-2.477E-06	7.727E-07	1.690E-06

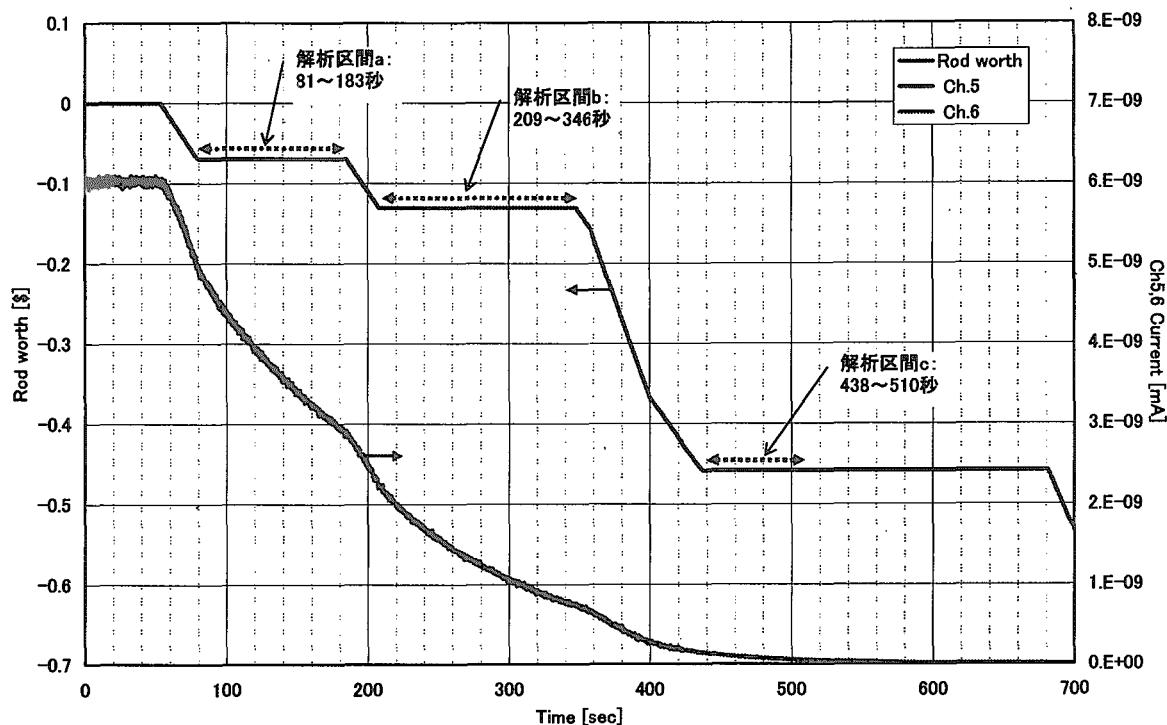


図 54 実験 4-4 (反応度下降・中性子源なし) の制御棒価値から算出した反応度と出力

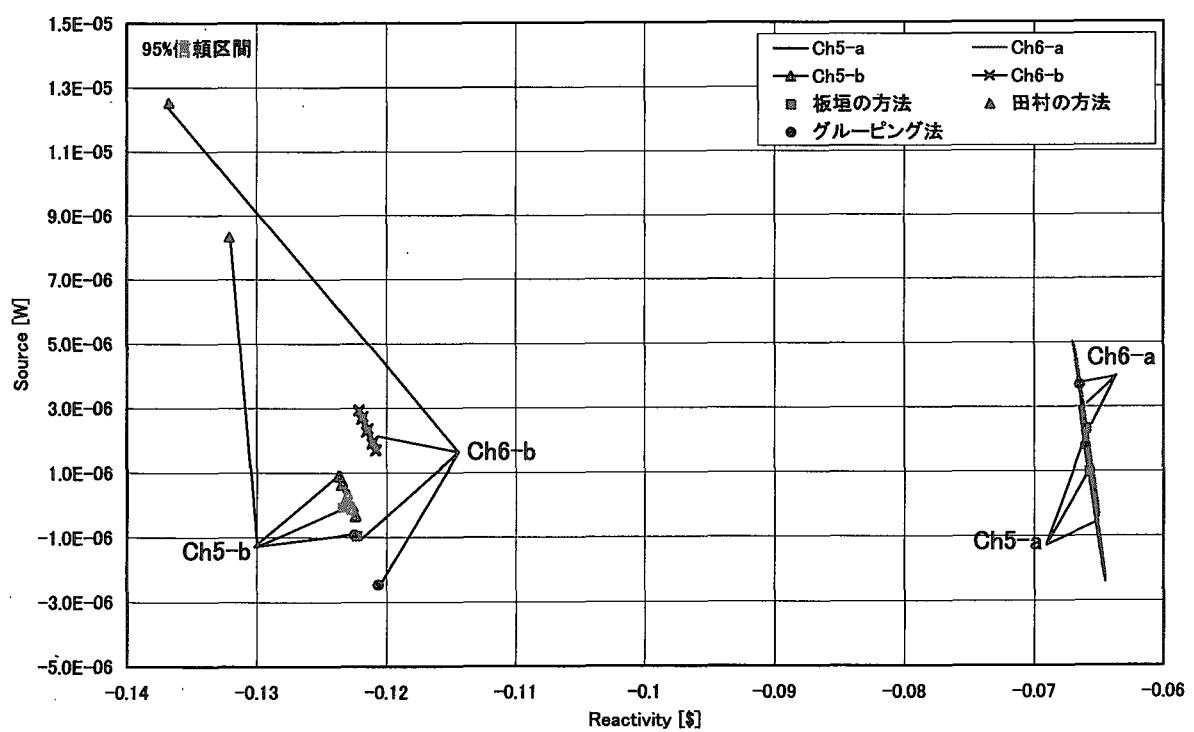


図 55 実験 4-4 (反応度下降・中性子源なし) の解析結果 (区間 a,b)

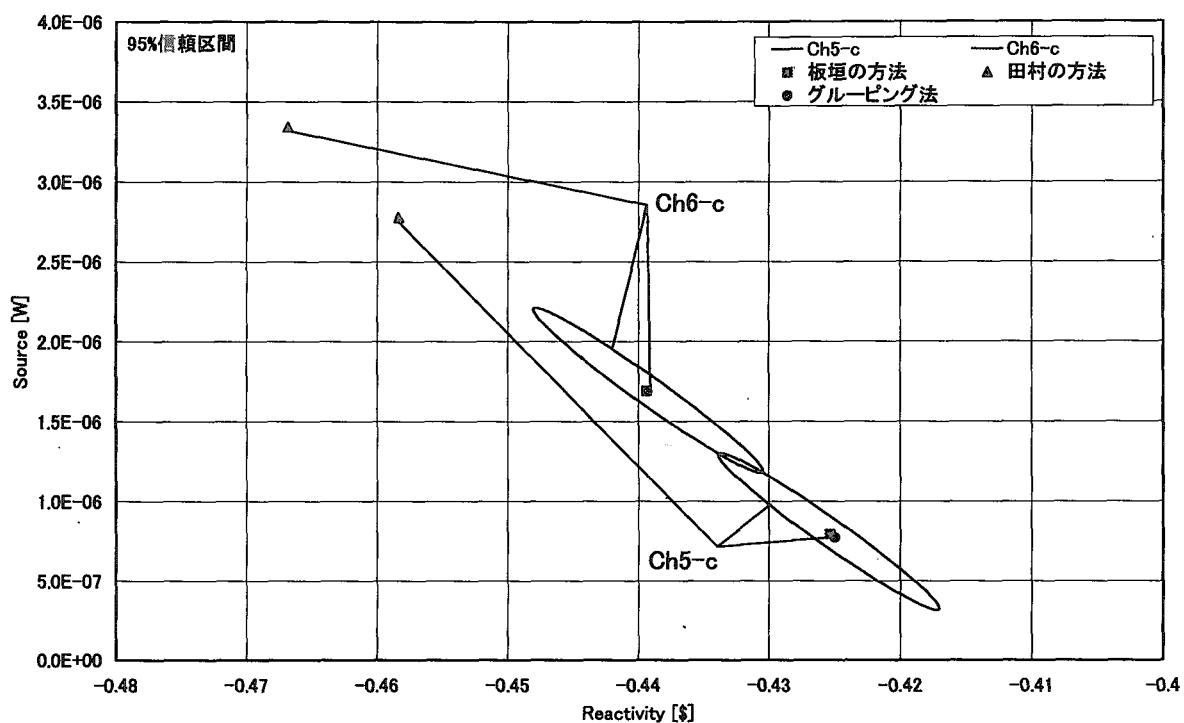


図 56 実験 4-4 (反応度下降・中性子源なし) の解析結果 2 (区間 c)

5.5 反応度上昇・中性子源なしの実験

この実験は正ペリオド法そのものである。正ペリオド法では中性子源を 0 とし、また、反応度印加後十分な時間を取りことで、正ペリオドに沿って上昇する以外の成分を減衰させているが、この方法では、中性子源が存在するとし、また、反応度印加後の全てのデータを用いる事が出来る。

測定結果を図 57 に、解析結果を表 11 及び図 58 に示す。実験 4-4 と同様に中性子源はわずかに存在しているはずであるが、この実験では有意に見る事は出来ない。これは、実験 4-4 と異なり出力が非常に大きい為である。

表 11 実験 1-1 (反応度上昇・中性子源なしの実験) の解析結果

		Ch5	Ch6	M4	M5	M8	P1
最尤法	反応度[\\$]	0.0959	0.0963	0.0971	0.0972	0.0975	0.0963
	源強度[W]	1.743E-06	-1.356E-06	-1.766E-07	-4.490E-06	-4.068E-06	-1.288E-06
	σ_p	0.000013	0.000013	0.000126	0.000118	0.000085	0.000291
	σ_s	8.586E-08	8.505E-08	7.962E-07	8.353E-07	5.685E-07	1.950E-06
	相関係数.	-0.9847	-0.9848	-0.9848	-0.9850	-0.9850	-0.9849
	$\chi^2/(N-2)$	4.777	3.859	0.913	0.990	1.124	1.032
板垣の方法	反応度[\\$]	0.0959	0.0964	0.0976	0.0975	0.0983	0.0971
	源強度[W]	1.025E-06	-1.682E-06	-7.707E-06	-8.394E-06	-1.373E-05	-1.155E-05
田村の方法	反応度[\\$]	0.0960	0.0964	0.0990	0.0989	0.0991	0.1061
	源強度[W]	-1.380E-07	-2.712E-06	-2.996E-05	-3.573E-05	-2.752E-05	-1.660E-04
Grouping 法	反応度[\\$]	0.0958	0.0963	0.0975	0.0975	0.0981	0.0968
	源強度[W]	2.499E-06	-6.049E-07	-5.647E-06	-8.366E-06	-1.124E-05	-5.643E-06

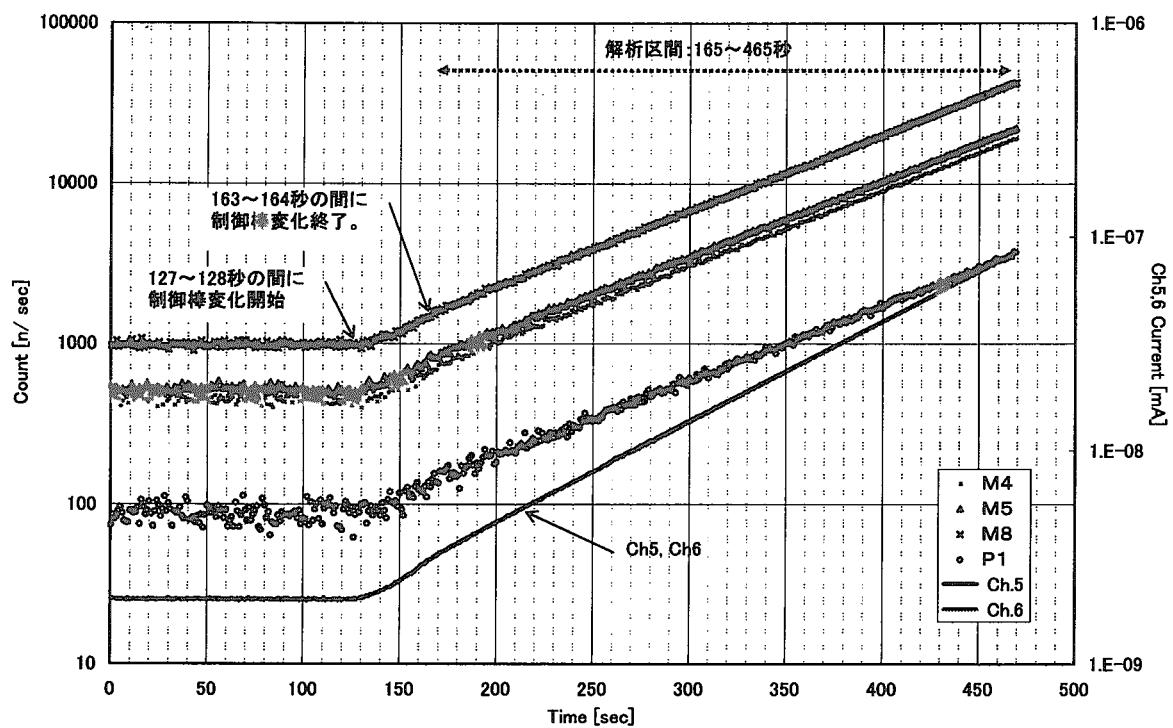


図 57 実験 1-1（反応度上昇・中性子源なし）の測定結果

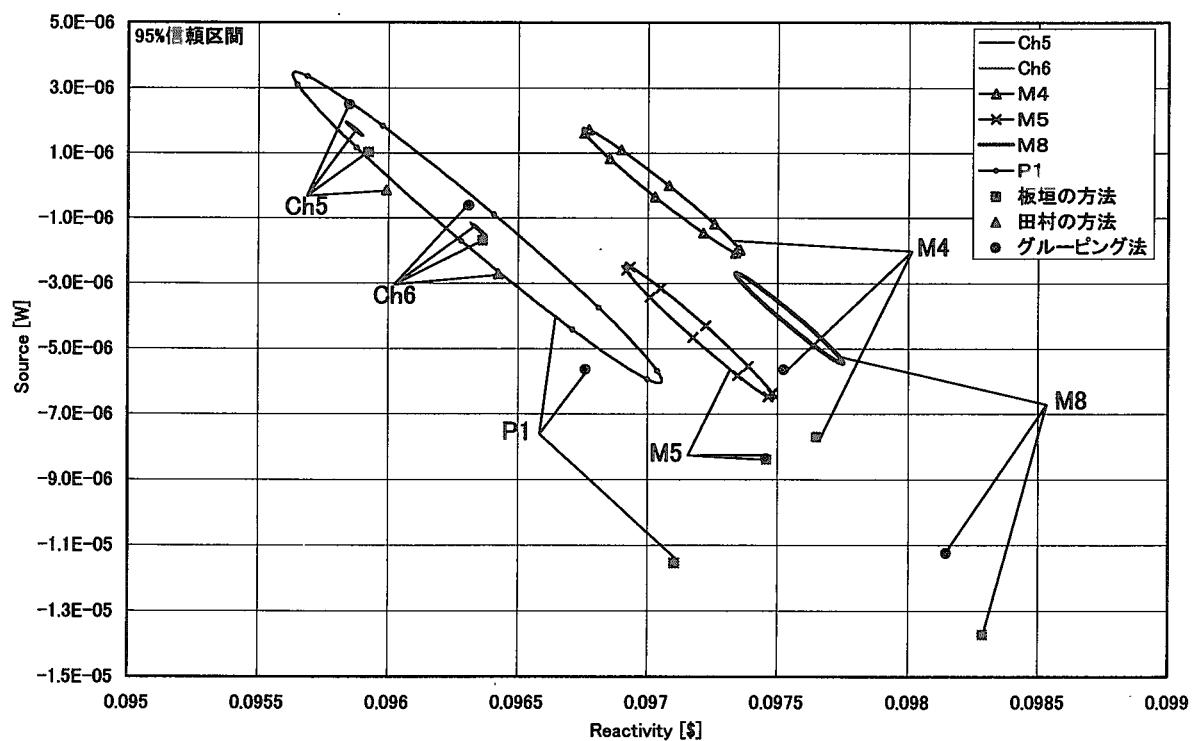


図 58 実験 1-1（反応度上昇・中性子源なし）の解析結果

6 結言

本稿では、最尤法に基づく反応度と中性子源強度の決定手法（IK-ML 法と呼ぶ）について述べたが、まず、その適用範囲と特長についてまとめる。

諸言でも述べたように、問題の条件は、(1)中性子束が変化していること、(2)反応度と中性子源強度が不变であること、及び(3)その時間区間以前の測定値が存在していること、これらがある時間区間ににおいて達成されていることである。つまり、反応度と中性子源が一定値であり、中性子束が平衡値に向かって過渡変化している状態を観測できれば、その時の反応度と中性子源を求める事が出来る。本稿では主にロッドドロップ実験を取り上げて議論をしたが、逆に、反応度が印加された場合や、中性子源が消失したり、中性子源の強度が変化したりする時も適用可能である。

この問題には従来から幾つかの解法が存在する。しかし、これらの方法は測定値の誤差を全く考慮していなかった。そのため、得られた反応度と中性子源の誤差を知る事が出来ず、その手法間の違いが有意であるのかどうかを判断できなかった。IK-ML 法の特長は、測定値の誤差を考慮に入れられる点である。その事によって、もっとも尤度の高い反応度と中性子源を得る事が出来、また、それらの誤差を評価できるようになった。しかし、IK-ML 法では解析を数値計算に頼らざるを得ない為、簡便さに欠ける点が欠点となる。

続いて、IK-ML 法の有効性の確認と、従来法、すなわち、板垣の方法、田村の方法、グルーピング法、及び、積分法の精度について検討した。

4章における数値実験で、実際にポアソン分布をなした中性子束測定の時系列データを多数回作成し、IK-ML 法で解析した。幾つかの体系や実験パターンに対して解析した結果、全てのケースで反応度と中性子源が、真値の周りに期待されるとおりの確率を持って分布している事を確認した。すなわち、例えば真値を 90% の信頼区間の中に含む解析結果の数は、試行回数のおよそ 90% の個数であった。

同時に、他の 4 つの従来法でも同じ問題を解いて、それぞれの方法の精度を調べた。その結果、板垣の方法と田村の方法は似た傾向を持っているが、実験の条件が悪くなる場合には、田村の方法は精度が悪かった。また、グルーピング法は IK-ML 法と似た傾向を持っていた。板垣の方法とグルーピング法は、信頼区間よりもわずかにばらつくものの、概ね良い精度であった。これらの方法は、簡易に取り扱える為、中性子束測定の誤差からくる解析結果の誤差が、他の要因に比べて評価する必要が無いほど小さい事が分かっている場合には、優れていると考える。

積分法については、ロッドドロップとソースジャークのケースを取り上げて IK-ML 法と比較した結果、中央値は IK-ML 法と同様であったが、信頼区間よりも大きなばらつきを持っており、精度が悪い事が明らかになった。ただし、積分法では文献⁸に示されたような一点炉近似の補正法が適用できるという利点がある。

この数値実験では、従来法との比較とともに解析区間、測定間隔、検出器感度などの実験条件の変化が、どのように解析結果の精度に影響するかを評価した。実験者がこのように予め実験精度の見積もりを行う事が出来るのも、IK-ML 法の特長である。

最後に、FCA 実験への IK-ML 法の適用について述べる。FCA で行われたロッドドロップ実験と、そのほかの運転の際に得られた 4 つの測定履歴に対して IK-ML 法で解析を行い、最尤値とその誤差を得た。4 つの測定履歴はペリオド法の他に、起動運転時の出力上昇、シャットダウン時の出力下降など、複雑な履歴を持つ測定データであるが、そのようなデータに対しても解析を行い、妥当な結果を導く事が出来た。また、計数管による測定に対しては、数値実験と差異無く取り扱うことが出来、数値実験による検討が実際の測定に対応していることが確認された。

付録として、本手法を実装した IK-ML コードと、一点炉の動特性を解く為の Kinetics コードの使用法を載せる。これらのコードは Microsoft Excel 上で稼動し、簡便に使用可能である。

謝辞

本研究を行うに当たり、有益な助言を頂いた田村誠司氏に謝意を表する。

参考文献

1. E. F. Bennett, "Methods and Errors in Subcriticality Measurements by Rod Drop Flux Profile Analysis," ANL-7966, Argonne National Laboratory (1976).
2. 板垣 正文 他, "中性子逆動特性における中性子源強度推定法の見直し," 日本原子力学会「1999年春の年会」要旨集, pp.371(1999).
3. 田村 誠司, "逆動特性法における反応度解析、雑音の影響," 日本原子力学会「2001年秋の大会」要旨集, p.491(2001).
4. J. E. Hoogenboom, *et al.*, "Neutron Source Strength Determination for On-Line Reactivity Measurement", *Ann. Nucl. Eng.*, 15[12], pp.553 (1998).
5. C. Y. Yang, *et al.*, "Subcriticality Determination by a Novel Inverse Kinetics Technique", *Trans. Am. Nucl. Soc.*, 16, pp.297 (1973).
6. 岩永 宏平 他, "FCA-XXI 実験," JAERI-Data/Code, 準備中
7. 中川 徹, "最小二乗法による実験データ解析," 東京大学出版 (1982)
8. 溝尾 宣辰, "大きな負の反応度の測定に関する研究," JAERI-M 7753, 日本原子力研究所 (1978).

付録

A IK-ML コードの説明

本レポートの理論に基づいて開発した IK-ML コードについて、使用法と概要を説明する。本プログラムは Microsoft 社の Visual Basic で記述され、Microsoft Excel 上で動作する。計算条件及び測定データは Excel Worksheet 上に入力され、"IK_Calculation_Start"と名づけられたマクロプログラムを実行する事で、計算結果が Worksheet に出力される。計算結果は [Output1] 及び [Output2] と入力されたセルを検索し、そこから下方に向かって上書きプリントされる。

実際の測定データは Section 8-3 に入力されるが、その際に、その測定データが瞬間の値か、ある区間の積分値かを明確に区別し、Section 8-1 で指定する必要がある。

A. 1 入力

マクロプログラム「IK_Calculation_Start」は実行された時に Active である（選択されている） Worksheet から入力を読み取る。従って、本プログラムが格納された IKMaxLikelihood.xls の input シートに入力データを書き込む必要は無く、任意の入力シートに対してプログラムを実行できる。入力は、「[Decay Parameter]」の様に括弧[]でくくられたキーワードを検索して読み取られるため、これらセルを削除してはならない。入力例を図 A-1 に示した。

Section 1: [Decay Parameter]

動特性パラメータの指定を行う。入力するのは、遅発中性子先行核の崩壊定数と遅発中性子割合である。また、群は 6 群であるが、プログラム中の定数 DG 変更する事で、変更できる。

Section 2: [Prompt A]

即発中性子世代時間を入力する。

Section 3: [Time parameter]

計算対象となる時間を指定する。後述する解析区間の時間が、このセクションの指定範囲外となった場合は、解析区間の時間が優先される。

Section 4: [Solver]

解析条件の指定を行う。

4-1: Solver Epsilon:

収束の ϵ を指定する。 ρ と S の相対変化率が ϵ 以下になると、反復を終了する。デフォルト = 1E-4。

4-2: Solver Probability density:

確率密度の指定。

=Normal

標準偏差が既知の正規分布であるとする。[Neutron Population] の項目において Sigma に標準偏差のデータを必要とする。Sigma が入力されて居ない場合は、標準偏差 = 1 として扱われる。

=Poisson

ポアソン分布とする。ただし、[Neutron Population] における測定値が 50 を超えた場合、正規分布の式で計算される。このオプションでは、[Neutron Population] における Sigma の入力は無視される。

4-3: Solver Poisson Multiplier:

Solver Probability density:= Poisson のときのみ有効。[Neutron Population]における測定値データが、ポアソン分布しているデータから、何倍されているかを入力する。
デフォルト=1.0

4-4: Integration Method:

=True

積分法を用いる。

=False

積分法を用いない。

4-5: Dividing point:

Integration Method:= True のときのみ有効。解析区間のうち、平衡状態に達したみなし時間を指定する。

Section 5: [SolverTimeBin]

解析区間を指定する。複数の区間が指定可能である。空白のセルで入力を終了する。解析区間の個数の上限は、プログラムの MaxSolverTimeBin に指定されている。(デフォルト=100)

Section 6: [Rho]

反応度が既知であるような体系にたいして、中性子源強度を計算する時にのみ有効である。

6-1: Rho given?:

=yes

反応度に定数が代入され、全てのタイムステップにおける中性子源強度が結果として得られる。反応度の定数は次の行で指定する。[Solver]の指定は意味を持たず、最尤法は用いられない。

=no

反応度を計算対象とする。6.2 の入力は意味を持たない。

6-2: Start time/End time/rho

6.1 が yes の時のみ有効。各時間の反応度を矩形であたえる。

Section 7: [Source]

中性子源強度が既知であるような体系にたいして、反応度を計算する時にのみ有効である。

7-1: S given?:

yes=中性子源強度に定数が代入され、全てのタイムステップにおける反応度が結果として得られる。中性子源強度の定数は次の行で指定する。[Solver]の指定は意味を持たず、最尤法は用いられない。

no=中性子源強度を計算対象とする。7.2 の入力は意味を持たない。

7-2: Start time/End time/rho

7.1 が yes の時のみ有効。各時間の中性子源強度を矩形であたえる。

Section 8: [Neutron Population]

中性子束などの測定データを入力する。また、データの積分値であるか瞬間値であるかを指定する。(A.2 に詳しい)

8-1: Integration:

=TRUE

[Neutron Population]の入力データが、ある範囲の積分値である。

=FALSE

[Neutron Population]の入力データが、ある点での微分値である。すなわち、単位は/sec となる。この場合 Start Time における瞬間値とみなされるので、End time の入力は無効となる。

8-2: t=-infinity

計算開始以前には、測定値は一定であると仮定するが、その値を指定する。単位は、[秒]である。

8-3: Start time/End time/Measured/Sigma

測定された時間幅の開始時間・終了時間・測定値・標準偏差を入力する。終了時間は、8.1 の Integration=True に対して有効である。標準偏差は 4-2 の Solver Probability density=Normal に対して有効である。

[Decay Parameter]							
group	1	2	3	4	5		
lambda[s]	0.0127	0.0317	0.115	0.311	1.4		
beta	0.0002153	0.0014401	0.0013422	0.0027868	0.0009493		
[Prompt A]							
	1.00E-07	Section2: 即発中性子寿命[sec]		Section 1: 遅発中性子パラメータ			
[Time parameter]							
Calc Start time:	0	Section3: 計算対象の時間					
Calc End time:	200						
[Solver]							
Solver Epsilon:	0.0001	Section4: 解析のパラメータ指定					
Solver Probability der Poisson		確率密度関数の指定					
Solver Poisson Multip	1						
Integration Method:	FALSE	積分法の指定					
Dividing point:							
[SolverTimeBin]							
Start Time	End Time	Section5: 解析区間指定					
56	86						
86	116						
116	146						
[Rho]							
Rho given?:	no	Section6: 反応度が既知の場合					
Start Time	End Time	Rho					
0	20	-0.1					
20	100	-0.05					
[Source]							
Source given?:	no	Section7: 中性子源強度が既知の場合					
Start Time	End Time	Source Population					
0	200	1.00E-07					
[Neutron Population]							
Integration:	TRUE	測定データは積分値/瞬間値		Section8: 測定データ入力			
		IK-ML Start	マクロ実行ボタン				
[Past Neutron Population]							
Start Time	End Time	Mesured	Sigma	過去の中性子束			
t=-infinity		18815		測定値			
0	0.3	5619	1.00				
0.3	0.6	5700	1.00				
0.6	0.9	5708	1.00	標準偏差(確率密度が標準偏差既知の場合必要)			
0.9	1.2	5668	1.00				

図 A-1 IK-ML コード入力例

A. 2 測定値が瞬間値である場合と、積分値である場合

測定値が瞬間値である場合と、積分値である場合をそれぞれ図示すると、図 A-2 と図 A-3 のようになっている。それぞれ、中性子束は破線のように時間推移しているとして扱われる。この二つの違いによって、本手法の解法にもたらされる違いは、以下の三点であり、本コードでは Section8 の入力で指定する。それぞれ、簡単に説明をする。

i. 先行核密度 $C_i^m(t_j)$ の計算(3.2 節)

先行核密度の計算は、(3)式を用いて行うが、この式からわかるように、計算時点以前の炉出力値履歴に影響される。瞬間値である場合は、炉出力は図 A-2 の破線のような台形であるとし、積分値の場合は図 A-3 の破線のような矩形であるとして、(3)式の積分を行う。

ii. 中性子束数値解 $P^c(t)$ の初期条件(3.4 節)

$P^c(t)$ を得る際には、式(31)の初期条件に関する連立方程式を解く事になる。式(31)は瞬間値の場合の式になっている。積分値の場合に対する初期条件は図 A-2 に示したように時刻 u_0 における P_0^m と $C_{i,0}^m$ から a_i を決定する。

iii. 各測定点の確率密度(3.1 節)

式(20)(21)(22)は、瞬間値の場合の式である。積分値の場合は、 P_j^c をそれぞれの測定区間ににおいて積分しなくてはならない。例えば(19)式に対しては次式のようになる。

$$f\left(P_j^m, \int_j^{u_j} P^c(\rho, S; t) dt\right) = (2\pi\sigma_j^2)^{-1/2} \exp\left(-\left(P_j^m - \int_j^{u_j} P^c(\rho, S; t) dt\right)^2 / 2\sigma_j^2\right) \quad (113)$$

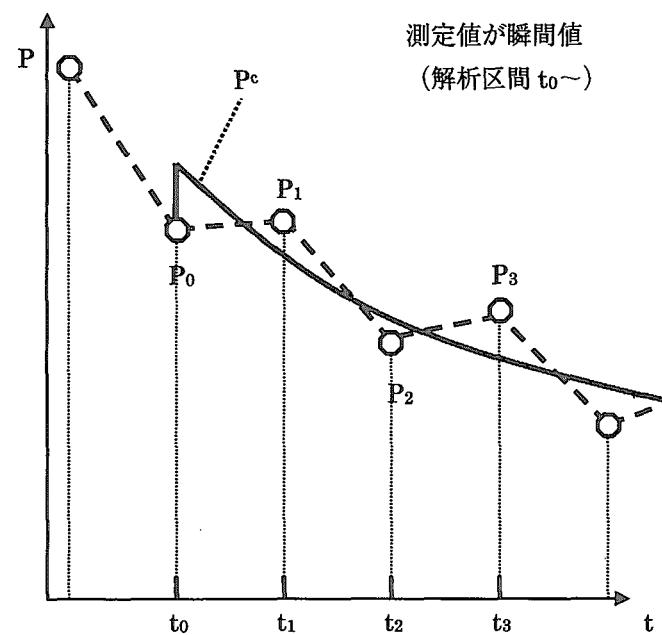


図 A-2 測定値が瞬間値である場合

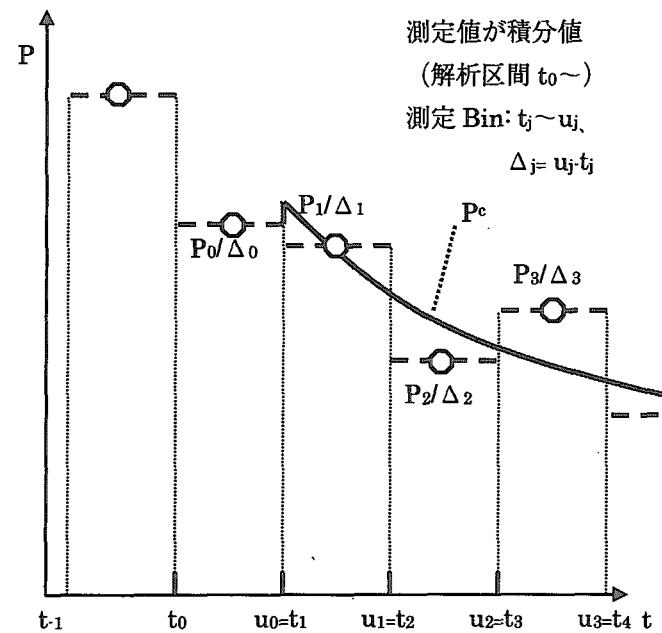


図 A-3 測定値が積分値である場合

B Kinetics コードの説明

前節の IK-ML と対を成すコードとして、Kinetics コードを作成した。Kinetics を用いて、与えられた初期条件、反応度時間変化及び中性子束時間変化から、一点炉動特性方程式を解いて一点炉の出力変化を得る事が出来る。(今回の数値実験では、Kinetics を用いて、厳密解を得、ポアソン分布の乱数を通した後、IK-ML で反応度などを求めた。)

Kinetics は IK-ML と同様に Microsoft 社の Visual Basic で記述され、Microsoft Excel 上で動作する。計算条件及び入力データは Excel の Worksheet 上に記述され、"SolveKinetics"と名づけられたマクロプログラムを実行する事で、計算結果を Worksheet に出力する。計算結果は [Output] と入力されたセルを検索し、そこから下方に向かって上書きプリントされる。

マクロ "SolveKinetics" は実行された時に Active である(選択されている) Worksheet から入力を読み取る。従って、本プログラムが格納された Kinetics.xls の Kinput シートに書き込む必要は無く、任意の入力シートに対してプログラムを実行できる。

入力は、「[Decay Parameter]」の様に括弧[]でくくられたキーワードを検索して読み取られるため、これらセルを削除してはならない。入力例を図 B-1 に示した。

なお、反応度の時間変化は 2 次関数として入力できるが、1 次以上の時間変化を指定した場合は、厳密解を得る事が出来ない(解析的に解くことが出来ない)。厳密に解けるのは 0 次で矩形に変化している場合のみである。1 次以上の場合、0.1 秒ごとの矩形の組み合わせとして解く。0.1 秒はプログラム上の定数 RhoBin に指定されており変更可能である。

Section 1: [Decay Parameter]

動特性パラメータの指定を行う。入力するのは、遅発中性子先行核の崩壊定数と遅発中性子割合である。また、群は 6 群であるが、プログラム中の定数 DG 変更する事で、変化させる事が出来る。

Section 2: [Prompt A]

即発中性子世代時間を入力する。

Section 3: [Time parameter]

計算対象となる時間を指定する。後述する出力区間の時間が、このセクションの指定範囲外となった場合、このセクションの時間が優先される。

Section 4: [P0]

計算時間以前の出力レベルを指定する。

Section 5: [Rho]

反応度の時間変化を指定する。2 次関数として与える事が出来る。

Section 6: [S]

中性子源強度の時間変化を指定する。2 次関数として与える事が出来る。

Section 7: [Output time mesh]

7-1: Integration:

=True

出力は、ある区間の積分値となる。

=False

出力は、ある区間の瞬間値となる。

7-2: Start time/End time/Delta

出力の開始時間と終了時間、出力点の間隔を指定する。複数指定可。

[Decay Parameter]								
group	1	2	3	4	5	6		
lambda[s]	0.0127	0.0317	0.115	0.311	1.4	3.87		
beta	0.00029566	0.00159729	0.00144174	0.0031229	0.00103398	0.00022189		
[Prompt A]								
	1.00E-07	Section2: 即発中性子 寿命		Section 1: 遅発中性子パラメーター				
[Time parameter]								
Calc Start time:	0	Section3: 計算対象の時間		Section 4: 計算時間以前の出力				
Calc End time:	400	Section5: 反応度時間変化		Section 6: 中性子源強度時間変化				
[rho]								
Start Time	End Time	Rho(0)	Rho(1)	Rho(2)				
0	10	-0.1	-0.1	0				
10	20	-1.1	0.1	0				
20	1000	-0.1	0	0				
[Source]								
Start Time	End Time	Source(0)	Source(1)	Source(2)	Section 7: 出力に関する指定			
0	100	10	0	0	Section 6: 中性子源強度時間変化			
100	200	10	-0.1	0	Section 5: 反応度時間変化			
200	1000	0			Section 4: 計算時間以前の出力			
[Output time mesh]								
Integration:	TRUE	積分値/瞬間値		Kinetics Start	マクロ実行ボタン			
Start Time	End Time	Delta	Section 3: 計算対象の時間					
0	400	0.3	Section 2: 即発中性子寿命					

図 B-1 Kinetics コード入力例

This is a blank page.

国際単位系(SI)と換算表

表1 SI基本単位および補助単位

量	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質量	モル	mol
光度	カンデラ	cd
平面角	ラジアン	rad
立体角	ステラジアン	sr

表3 固有の名称をもつSI組立単位

量	名称	記号	他のSI単位による表現
周波数	ヘルツ	Hz	s ⁻¹
力	ニュートン	N	m·kg/s ²
圧力、応力	パスカル	Pa	N/m ²
エネルギー、仕事、熱量	ジュール	J	N·m
工率、放射束	ワット	W	J/s
電気量、電荷	クーロン	C	A·s
電位、電圧、起電力	ボルト	V	W/A
静電容量	ファラード	F	C/V
電気抵抗	オーム	Ω	V/A
コンダクタンス	ジーメンス	S	A/V
磁束	ウェーバ	Wb	V·s
磁束密度	テスラ	T	Wb/m ²
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A
セルシウス温度	セルシウス度	°C	
光束度	ルーメン	lm	cd·sr
照度	ルクス	lx	lm/m ²
放射能	ベクレル	Bq	s ⁻¹
吸収線量	グレイ	Gy	J/kg
線量当量	シーベルト	Sv	J/kg

表2 SIと併用される単位

名称	記号
分、時、日	min, h, d
度、分、秒	°, ', "
リットル	l, L
トン	t
電子ボルト	eV
原子質量単位	u

$$1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ u} = 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

表5 SI接頭語

倍数	接頭語	記号
10^{18}	エクサ	E
10^{15}	ペタ	P
10^{12}	テラ	T
10^9	ギガ	G
10^6	メガ	M
10^3	キロ	k
10^2	ヘクト	h
10^1	デカ	da
10^{-1}	デシ	d
10^{-2}	センチ	c
10^{-3}	ミリ	m
10^{-6}	マイクロ	μ
10^{-9}	ナノ	n
10^{-12}	ピコ	p
10^{-15}	フェムト	f
10^{-18}	アト	a

表4 SIと共に暫定的に維持される単位

名称	記号
オングストローム	Å
バーン	b
バール	bar
ガル	Gal
キュリ	Ci
レントゲン	R
ラド	rad
レム	rem

$$1 \text{ Å} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ bar} = 0.1 \text{ MPa} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2 = 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

$$1 \text{ R} = 2.58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$$

$$1 \text{ rad} = 1 \text{ cGy} = 10^{-2} \text{ Gy}$$

$$1 \text{ rem} = 1 \text{ cSv} = 10^{-2} \text{ Sv}$$

(注)

- 表1~5は「国際単位系」第5版、国際度量衡局1985年刊行による。ただし、1eVおよび1uの値はCODATAの1986年推奨値によった。
- 表4には海里、ノット、アール、ヘクタールも含まれているが日常の単位なのでここで省略した。
- barは、JISでは流体の圧力を表わす場合に限り表2のカテゴリーに分類されている。
- EC閣僚理事会指令ではbar、barnおよび「血圧の単位」mmHgを表2のカテゴリーに入れている。

換算表

力	N(=10 ⁵ dyn)	kgf	lbf
	1	0.101972	0.224809
	9.80665	1	2.20462
	4.44822	0.453592	1

粘度 1 Pa·s(N·s/m²) = 10 P(ポアズ)(g/(cm·s))

動粘度 1 m²/s = 10⁴ St(ストークス)(cm²/s)

圧力	MPa(=10 bar)	kgf/cm ²	atm	mmHg(Torr)	lbf/in ² (psi)
力	1	10.1972	9.86923	7.50062 × 10 ³	145.038
	0.0980665	1	0.967841	735.559	14.2233
	0.101325	1.03323	1	760	14.6959
	1.33322 × 10 ⁻⁴	1.35951 × 10 ⁻³	1.31579 × 10 ⁻³	1	1.93368 × 10 ⁻²
	6.89476 × 10 ⁻³	7.03070 × 10 ⁻²	6.80460 × 10 ⁻²	51.7149	1

エネルギー・仕事・熱量	J(=10 ⁷ erg)	kgf·m	kW·h	cal(計量法)	Btu	ft · lbf	eV	1 cal = 4.18605 J(計量法)
	1	0.101972	2.77778 × 10 ⁻⁷	0.238889	9.47813 × 10 ⁻⁴	0.737562	6.24150 × 10 ¹⁸	= 4.184 J(熱化学)
	9.80665	1	2.72407 × 10 ⁻⁶	2.34270	9.29487 × 10 ⁻³	7.23301	6.12082 × 10 ¹⁹	= 4.1855 J(15 °C)
	3.6 × 10 ⁶	3.67098 × 10 ⁵	1	8.59999 × 10 ⁵	3412.13	2.65522 × 10 ⁶	2.24694 × 10 ²⁵	= 4.1868 J(国際蒸気表)
	4.18605	0.426858	1.16279 × 10 ⁻⁶	1	3.96759 × 10 ⁻³	3.08747	2.61272 × 10 ¹⁹	仕事率 1 PS(仏馬力)
	1055.06	107.586	2.93072 × 10 ⁻⁴	252.042	1	778.172	6.58515 × 10 ²¹	= 75 kgf·m/s
	1.35582	0.138255	3.76616 × 10 ⁻⁷	0.323890	1.28506 × 10 ⁻³	1	8.46233 × 10 ¹⁸	= 735.499 W
	1.60218 × 10 ⁻¹⁹	1.63377 × 10 ⁻²⁰	4.45050 × 10 ⁻²⁶	3.82743 × 10 ⁻²⁶	1.51857 × 10 ⁻²²	1.18171 × 10 ⁻¹⁹	1	

放射能	Bq	Ci	吸収線量	Gy	rad
	1	2.70270 × 10 ⁻¹¹		1	100
	3.7 × 10 ¹⁰	1		0.01	1

照射線量	C/kg	R
	1	3876
	2.58 × 10 ⁻⁴	1

線量当量	Sv	rem
	1	100
	0.01	1

(86年12月26日現在)

最尤法を用いた反応度と中性子源強度の決定

