

JAERI-Research

94-003



非線形動力学理論に基づく
原子炉出力振動の解析

1994年7月

鈴木知明

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1994

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 いばらき印刷㈱

非線形動力学理論に基づく原子炉出力振動の解析

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

鈴木 知明

(1994年5月19日受理)

沸騰水型原子炉（BWR）の安定性との関連において、原子炉出力振動を非線形動力学理論に基づき議論した。まず、実炉から得られた炉雑音データを元来カオス現象を解析するための手法を用いて解析した。その結果、この手法は従来手法に比べて優れた振動現象の動特性指標を与え、新しい実時間炉心監視システムに応用できることがわかった。また、モデルを用いた解析では、非線形動力学理論の中の特に分岐理論を用いてBWRの低次元の現象論的動特性モデルを解析的に取り扱った。これにより数値解析からは得られないBWRの定常状態の線形安定性や振動運動の安定性に関連している弱安定条件の陽表現が導出され、出力振動の定性的理解が深まった。

Analysis of Reactor Power Oscillation Based on Nonlinear Dynamic Theory

Tomoaki SUZUDO

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received May 19, 1994)

Reactor power oscillations are discussed based on nonlinear dynamic theory with reference to stability problem of boiling water reactors (BWRs). The reactor noise from an actual plant is, firstly, analyzed by a method originally used for the analysis of chaotic phenomenon. The results show that this method gives better dynamic descriptor of oscillatory motion than those from previous methods, and that it is applicable to real-time monitoring system of the reactor core. Next, the low-dimensional phenomenological model of BWR power oscillation is analytically studied using bifurcation theory, a branch of nonlinear dynamic theory. From this analysis are derived explicit expressions for the steady state's linear stability and weak stability not given by numerical analyses, and the qualitative properties of the power oscillation can be better understood.

Keywords: Reactor Power Oscillation, Nonlinear Dynamic Theory, Reactor Noise, BWR Stability, Real-time Monitoring, Phenomenological Model, Analytical Study, Bifurcation Theory, Linear Stability Condition, Weak Stability Condition

目 次

1. 序 論	1
1.1 原子炉出力振動小史	1
1.2 非線形動力学における理論と応用の関係	3
1.3 本研究の目的と内容	5
2. 数学的準備	8
2.1 非線形動力学系の線形化とその限界	8
2.2 分岐と非線形振動	10
2.3 非線形動力学系の低次元化	12
2.4 非線形動力学系の一般化次元	14
2.5 時系列データの処理	16
2.6 まとめ	17
3. NSRRの出力振動の解析	24
3.1 はじめに	24
3.2 NSRRの概要とその異常出力振動に関する予備知識	24
3.3 NSRRの出力振動の決定論的運動の同定	26
3.4 出力振動と制御棒自励振動の周波数ロッキング現象	29
3.5 位相遅れを用いた振動解析	30
3.6 まとめ	31
4. 情報次元の安定性監視への応用	40
4.1 はじめに	40
4.2 BWR出力振動モデル	41
4.3 従来型の監視方法の機能試験	43
4.4 線形安定しきい値におけるSOCCIの変化	44
4.5 実データへの適用例	47
4.6 まとめ	49
5. 原子炉出力振動の解析的取り扱い	59
5.1 はじめに	59
5.2 簡略化された原子炉出力振動モデル	60
5.2.1 中性子動特性部分の簡略化	60
5.2.2 反応度フィードバックのモデリング	61
5.3 定常状態の線形安定性	63
5.4 非線形項の評価	67

5.5	定常状態の弱安定性	70
5.6	まとめ	72
6.	結 論	76
	謝 辞	78
付録1	フラクタルと炉雑音解析	79
付録2	リアプノフ指数について	83
付録3	ホップ分岐点における normal formの簡単な説明	88

Contents

1. Introduction	1
1.1 A Brief History of Reactor Power Oscillation	1
1.2 Relationship between Theory and Application of Nonlinear Dynamics	3
1.3 Purpose and Outline of the Study	5
2. Essential Mathematics	8
2.1 Linearization of Nonlinear Dynamical System and its Effectiveness	8
2.2 Bifurcation and Nonlinear Oscillations	10
2.3 Reducing the Order of Nonlinear Dynamical System	12
2.4 Generalized Dimension of Nonlinear Dynamical System	14
2.5 Time-series Data Processing	16
2.6 Summary	17
3. Power Oscillation Analyses of NSRR	24
3.1 Introduction	24
3.2 Overview of NSRR and Background Information of its Anomalous Power Oscillation	24
3.3 Identifying Deterministic Motion of the NSRR Power Oscillation	26
3.4 Frequency Locking between the Power Oscillation and Control-rod's Self-excited Oscillation	29
3.5 Oscillation Analyses with Phase Shift	30
3.6 Summary	31
4. Application of Information Dimension to Stability Monitoring	40
4.1 Introduction	40
4.2 BWR Power Oscillation Model	41
4.3 How the Conventional Monitoring Methods Work	43
4.4 The Change of SOCI at the Linear Stability Threshold	44
4.5 Typical Applications to Actual Data	47
4.6 Summary	49
5. Analytical Study of Reactor Power Oscillation	59
5.1 Introduction	59
5.2 Simplified Model of Reactor Power Oscillation	60
5.2.1 Simplification of Neutron Field Dynamics	60
5.2.2 Modeling of Reactivity Feedback	61

5.3	Linear Stability of the Steady State	63
5.4	Evaluation of Nonlinear Terms	67
5.5	Weak Stability of the Steady State	70
5.6	Summary	72
6.	Conclusion	76
	Acknowledgements	78
Appendix 1	Fractal and Reactor Noise Analysis	79
Appendix 2	The Lyapunov Exponent	83
Appendix 3	Brief Illustration of Normal Form at Hopf Bifurcation Point	88

1. 序 論

1.1 原子炉出力振動小史

原子炉出力振動を一言で説明すれば、過剰な負の反応度フィードバックによって引き起こされる炉出力の非線形振動現象である。沸騰水型原子炉（BWR）では、炉心の反応度の、冷却材（軽水）のボイド率に対する感度、すなわちボイド反応度係数が大きい。BWRを高出力低流量状態で運転した場合、比較的小さな出力の振動によってボイド率が大きく変化しやすいため、この現象を観測することができる。そのため原子炉出力振動はBWRの安定性との関連で、その理論、解析手法および制御手法等が議論されている¹⁾。

BWRの出力振動は開発当初から懸念されており、すでに1950年代には米国アルゴンヌ国立研究所(ANL)の数機種の研究炉を用いて安定性に関する様々な実験が行なわれている。Thai²⁾はそれらの実験から得られたデータから振動の減衰係数、運転パラメータによる振幅の変化、振動周波数等をまとめる作業を行なっている。また彼は伝達関数による方法を解析に取り入れたり、熱水力機構をモデル化して理論解析を行なっている。このようなThaiの研究は後年のBWR安定性の研究に多大な影響を及ぼした。特に本論文との関連では、彼はすでに「“発散的”な振動は最終的には非線形性のためリミットサイクルになるであろう。」と予測しているのが注目される。

一方、同じくANLのAkcasu³⁾は上記実験で得られた出力振動の特徴を定性的に理解することを試みた。彼は観測例のいくつかは、原子炉を一定の減衰係数を持つ狭帯域フィルターとみなし、これが不規則な入力によって励起されると考えることにより説明できるとした。しかし他の観測例において、大きな振動的波束が自発的に起きていて、このモデルではそれらの現象を説明できない。そこでAkcasuは減衰係数も確率的に揺らいでいると仮定することにより、この問題を解決した。

幸運なことに実際の炉では、熱伝導率の低い酸化物燃料を使い、また太径の燃料棒を使用することにより中性子束と熱流動の相互作用を小さくすることができ、初期のBWRの出力は極めて安定であった。しかし近年になって経済効率をあげるためBWRが大型化、高出力化されるにつれ燃料の熱的余裕度を向上させる必要が生じた。そのため燃料棒は細径化され、その結果中性子束と熱流動の相互作用が大きくなり、高出力低流量状態において炉の安定性が再び懸念されることになった。特に、原子炉の起動および停止時に高出力低流量状態になるため、それらの運転状態における安定限界を知ることが重要な課題となった。

米国においてはPeach Bottom 2号炉⁴⁾およびVermont Yankee炉⁵⁾、フィンランドにおいてはTVO-II炉⁶⁾、スウェ

ーデンにおいてはForsmark-1(Ref. 7)、2号炉⁸⁾およびRinghals1号炉⁹⁾、イタリアではCaorso炉¹⁰⁾、旧西ドイツではKRB-B炉、およびC炉¹¹⁾でそれぞれ安定性に関する試験が行なわれた。これらの実験においては、共通して意図的に高出力低流量状態をつくりだし振動の連続したピーク値の比すなわち減幅比 (Decay Ratio: DR) を安定性の指標として測定している。これらの実験から、高出力で冷却水が自然循環状態にある場合には (すなわち再循環ポンプが停止した状態では) 出力が持続的に振動することがわかった。またCaorso炉およびKRB-B、C炉で炉心の片側と反対側で位相の反転した振動いわゆる逆位相振動が発生した。日本においては、このような安定性の実験は行なわれなかったが、原研の燃料研究用の小型炉であるNSRRにおいて、制御棒によるフィードバックの感度を強くすることにより持続的出力振動を得ている¹²⁾。

それとは別に、米国のLa Salle2号炉¹³⁾では運転員の不注意から再循環ポンプが停止してしまい、炉が不安定振動からスクラムに至るような事象があった。このことを重く見た米国原子力規制委員会(NRC)は運転規則の修正をおこなった。またこの不安定事象はこの分野の研究の重要性を再認識させることになった。

このような出力振動は、安定な平衡点のまわりでの減衰的な振動が確率的雑音によって連続的に励起されているのか、リミットサイクルなのか、またはより複雑な準周期運動やカオス運動なのかという問題は、これらの不安定現象を理解する上で重要である。しかしながら、様々な実験や事象から出力振動データが得られたにもかかわらず、持続振動が非線形動力学上どのような運動に分類されるのか明らかにされていないし、その具体的手法もあまり議論されていない。

さて、実炉による実験では様々な制約があり、そこから得られるデータの量や質には必ず限界がある。そこで、数値解析も盛んに行なわれるようになった。初期の解析プログラムはJones¹⁴⁾の開発したFABLEに見られるように周波数領域での解析が支配的であった。この手法は系を線形化することにより伝達関数を求めそこから安定性を調べる方法である。ただし、不安定事象開始後は系を線形化できずにこの手法が適用できないという不便さがあった。その後、計算機技術の発達により、従来計算時間が長すぎて実用的でなかった時間領域での数値解析も様々な研究機関において盛んに行なわれるようになった。日本においては、例えば横溝らによって数値解析が行なわれている¹⁵⁾。計算機技術の発達はなおも続き詳細な物理モデルの構築が可能になり解析コードはさらに巨大化してきている。現在でもこの研究手法はBWRの安定性に関する研究分野のなかで大きな位置を占めている。しかし解析コードが巨大化するにつれて、それらはいわゆるブラックボックス化し、入力すべき多くの物理パラメータの誤差が解析結果に及ぼす影響が評価できなくなってきた。またデジタル計算機における解析では、空間および時間を離散化しなければならないが、これらの刻み幅によっても結果が大きく左右される。また、結果を解釈するには様々なパラメータを変化させて得られた数値を集約しなければならず、非常に困難な作業を必要とし重要な結果を見逃す可能性もある。

このような状況下、Akcasuの研究以来あまり注目されなかったBWR出力振動の定性的動特性を簡略化されたモデルによって解析しようという研究もMarch-Leubaによって再開された¹⁶⁾。彼はPeach Bottom炉の低流量実験に対して大規模コードから得られた一巡伝達関数が低次元の線形伝達関数でフィッティングできることを示した。このことはBWRの出力振動の物理的構造は複雑であるが、その数学的構造は単純であることを意味した。このフィッティングによって得られた簡略化モデルを時間発展させると、ボイド反応度係数を大きい値に設定すればリミットサイクル運動が得られることが示された¹⁷⁾。また非現実的ではあるが、ボイド反応度係数をさらに大きくしていくと周期倍分岐ルートからカオス的な挙動に至ることがわかった¹⁸⁾。

簡略化されたモデルは、解析的に扱われて初めて系の持つ一般的な性質が明らかにされ、その本来の長所が生かされるものであると考えられる。しかし上記の簡略化モデルの研究はすべて数値解析に留まっている。その後も、再び道が開かれたはずの簡略化モデルの解析的研究はほとんど行なわれてはいない。

さて、Peach Bottom炉を皮切りに様々な安定性に関する実験が行なわれたのと同時に、炉心監視および診断の分野では、減幅比の正確な測定法が議論されるようになった¹⁹⁾。しかし最近では、減幅比の測定法は線形動力学理論に基づいており、より不安定な（より非線形的な）振動に対してこの指標の有効性が疑問視されるようになってきた。NRCでは安定性の基準として「減幅比が0.75～0.8以上で不安定と考える。」としてあいまいな表現を使っている。また「振動のパワースペクトル密度関数に高調波成分が存在すれば不安定と考える。」とするというアイデアもあるが、振幅が大きくなれば振動波形が非正弦波になることはBWRの開発当初の実験からすでに知られており、高調波成分は振幅と関係しているが安定性とは直接の関連はない。以上のことから現在、安定性の基準を明確にする新しい指標が望まれている。

1.2 非線形動力学における理論と応用の関係^{20),21),22)}

非線形動力学理論（または非線形振動論）はもともとニュートン力学から出発している。その理論はよく知られているように微分方程式を求積法によって解こうとするものであった。求積法は線形の微分方程式を容易に解くことを可能にしたが、非線形のものには線形からの摂動として扱えるもの以外には解けなかった。典型的な例として、2体問題は線形であるためニュートン力学を用いて容易にとくことができるが、非線形の3体問題は解決できない難問として残された。19世紀の終わりにPoincaréによって3体問題が原理的に解けないことが証明され、位相幾何学による定性的な解析法が導入された。Poincaréは系の漸近解として定常状態やリミットサイクルの存在、またはそれらの個数を求める研究を行なった。

Poincaré以降、非線形力学は一般に系の位相空間上の定性的な振る舞いを研究する力学系理論の分野となった。一方、van der Polはネオン管を用いた電子回路で周期的な外力を入れなくてもPoincaréのリミットサイクル振動が発生することを発見した。

その後、力学系理論ではエルゴード理論、構造安定性などが活発に議論された。しかしこの研究に携わったのは主に数学者たちであり、彼らが得た結果や用いた手法は応用研究をしている工学者たちには、一部の研究、例えば制御理論に応用したLyapunovやPontriagin等の研究を除けばあまり使われることがなかった。この原因の1つは、数学者と工学者を橋渡しすべき物理学者のあいだで、量子力学に代表されるような微視的な対象に興味が集まり、巨視的なものを興味の対象とする非線形力学に興味を持つ者が少なかったことによるであろう。参考文献21)では、この原因として数学者たちの閉鎖性、自己充足性を指摘している。また参考文献22)では、数学者たちが天体力学などの非日常的な保存系に注目したためであるとしている。応用分野では日常的に散逸系を扱うが、散逸系では位相空間の体積が時間と共に減少していくため、無限次元の系でもその漸近解は低自由度の振る舞いに還元される。この事実が応用分野へ波及するの多くの年月を要した。本来理論を創る者とそれを応用する者、この両者の歯車がうまくかみ合っていることが科学技術の進歩の理想的な状態であるが、非線形力学においては両者の差がひらき過ぎてしまった。

この危機的状況はカオス理論の登場によって一変する。気象学者であるLorenzは対流のモデルとして3次の非線形力学系（Lorenz系）を導いた²³⁾。Lorenz系は現実の対流現象とは異なっていたが、その漸近解が定常でもなくリミットサイクルでもない一見確率的にみえる決定論的運動であることが示された。当時の力学系理論は定常状態とリミットサイクル状態のみを漸近解と規定しており、この現象を説明することができなかった。このモデル自体はそれほど注目されなかったが、Feigenbaum²⁴⁾が簡単な1次元の離散写像の周期倍分岐に系に依存しない規則性を発見してからはカオス理論の重要性が認識されるようになった。彼はまたその規則性をくり込み群の方法で説明した。一方、Lipshitz²⁵⁾は簡単な対流セルを使った実験よりFeigenbaumの周期倍分岐の規則性を再発見し、無限次元系が1次元の離散写像と同等であることが示され、カオス理論は現実の系と結びついた。またHakenはレーザー光の発生装置の動特性がLorenz系で表すことができることを示した²⁶⁾。これら一連の研究によって様々な無限次元の非線形の物理現象がカオス理論を用いて低次元自由度系に帰着できるのではないかと期待が一気に高まった。流体力学は言うまでもなく、生物学、固体物理学、量子力学の分野でもカオス理論が議論されている。また、応用分野では電気および電子工学、神経回路網などの人工知能の分野でもカオス理論の応用が叫ばれるようになった²⁷⁾。このようにして、現在では非線形力学は様々な分野を橋渡しする重要な分野になった。

カオスの存在が明らかになるにつれ、カオス現象を定量的に表すための特徴量の研究も進んだ。一般化

次元、リアプノフ指数等がその特徴量として提唱され、それらはカオス現象だけでなく従来までの研究対象である非カオス現象にも適用された。すなわち、これらの特徴量は非線形力学系の漸近的振る舞いを分類することができ、未知の現象の同定に用いることができることが明らかになった。

1.3 本研究の目的と内容

1.2節で述べたようにカオス理論の出現は非線形力学にとってある意味では革命的な出来事であった。そして非線形力学は近年、理論においても応用においても非常な速さで発展している。しかし原子炉動特性解析へ応用した例はまだあまりなく、その手法はカオス理論以前の力学系理論から派生した制御理論やシステム同定論の範囲に留まっている。筆者は、1.1節で述べた現在滞っている問題はこの新理論の応用によって解決できるのではないかという考えに至った。本論文はこのような動機から始められた研究をまとめたものである。

まず、原子炉出力振動を非線形力学の観点から見直すという作業がある。これについては必要な基礎理論を明確にしたあと（第2章）、それを用いて実際の出力振動のデータを解析する（第3章）。そして最後に簡略化モデルを解析する（第5章）。解析においては現在盛んに行なわれている数値的手法ではなく、非線形力学に基づく理論的手法をとる。これにより炉の安定条件等の系が持つ性質を一般的な形で示すことができる。

また、カオス現象の解析で用いられる特徴量（特に一般化次元）が原子炉出力振動の監視診断にどの程度応用できるかを検討する。提案された手法は線形的な手法から得られる特徴量であるパワースペクトル密度関数やARモデルから得られるDRと比較される。これについては、実データ解析（第3章）から得た知識をもとに、オンライン安定監視システム（第4章）までに発展させる。

最後に以上の内容をまとめ、結論と将来展望を述べる（第6章）。

また、付録1および2では将来の研究課題であると思われるフラクタルやリアプノフ指数の原子炉動特性解析への応用の可能性について述べる。付録3では第5章で振動現象の安定性解析において用いられた数学的手法、normal formについて概説する。

第1章の参考文献

- 1) OECD, Proc. of International Workshop on Boiling Water Reactor Stability, Holtsville (New York), 17-19 October, 1990.
- 2) Thai J. A.: Dynamic Behavior of Boiling Reactors, ANL-5849(1959).
- 3) Akcasu A. Z.: Mean Square Instability in Boiling Reactors, Nucl. Sci. Eng., 10, 337(1961).
- 4) Carmichael L. A. and Niemi R. O.: Transient and Stability Tests at Peach Bottom Atomic Power Station Unit 2 at End of Cycle 2, EPRI, NP-564(1978).
- 5) Sandoz S. A. and Chen S. F.: Vermont Yankee Stability Tests During Cycle 8, Trans. Am. Nucl. Soc., 45, 754(1983).
- 6) Waaranpera Y. and Andersson S.: BWR Stability Testing : Reaching the Limit Cycle Threshold at Natural Circulation, Trans. Am. Nucl. Soc., 39, 868(1983).
- 7) Bergdahl B. G., Reisch F., Oguma R., Lorenzen J. and Aakerhiern F.: BWR Stability Investigation at Forsmark 1, Ann. nucl. Energy, 16, 10, 509(1989).
- 8) Oguma R., Reisch F., Bergdahl B. G., Lorenzen J., Aakerhiern F. and Kellner S.: Investigation of BWR Stability in Forsmark 2 Based on Multivariable Noise Analysis, Studsvik/NI-88/3(1988).
- 9) Bergdahl B. G. and Oguma R.: BWR Stability Investigation in Ringhals 1 Measurement Data from October 26, 1989, Studsvik/NI-90/17(1990).
- 10) Gialdi E., Grifoni S., Parmeggiani C. and Tricoli C.: Core Stability in Operating BWR: Operational Experience, Prog. Nucl. Energy, 15, 447(1985).
- 11) Dyal D. et. al.: Stability Tests at KWU Nuclear Power Plants, Proc. Anticipated and Abnormal Transients in Nuclear Power Plants, VII-48(1987).
- 12) 林 光二: 非線形原子炉雑音および非定常原子炉雑音の統計的解析に関する研究、JAERI-M、93-041(1993).
- 13) Compiled by Murphy G. A.: Selected Safety-Related Events, Nucl. Safety, 29, 3, 356(1988)
- 14) Jones A. B.: Reactivity Stability of a Boiling Reactor, Part 2, KAPL-3093(1965).
- 15) Yokomizo O., Sakurai M., Yoshimoto Y., Kitayama K., Enomoto T., Fukuda N. and Chuman K.: Analysis of BWR Core Nuclear Thermal Hydraulic Oscillation with Three Dimensional Transient Program, Nucl. Eng. Des., 99, 41(1987).
- 16) March-Leuba J.: A Reduced-Order Model of Boiling Water Reactor Linear Dynamics, Nucl. Technol., 75,

15(1986).

1 7) March-Leuba J. and Cacuci D. G. and Perez R. B.: Nonlinear Dynamics and Stability of Boiling Water Reactors: Part 1 -Qualitative Analysis, Nucl. Sci. Eng., 93, 111(1986).

1 8) March-Leuba J., Cacuci D. G. and Perez R. B.: Universality and Aperiodic Behavior of Nuclear Reactors, Nucl. Sci. Eng., 86, 401(1984).

1 9) Upadhyaya. B. R. and Kitamura M.: Stability Monitoring of Boiling Water Reactors by Time Series Analysis of Neutron Noise, Nucl. Sci. Eng., 77, 480(1981).

2 0) 青木統夫、白岩謙一：力学系とエントロピー、共立出版(1985).

2 1) Gleick J. (上田かん亮監修、大貫昌子訳) : Chaos -Making a New Science (カオス -新しい科学をつくる) ,新潮社(1991).

2 2) Thompson J. M. T., Stewart H. B., (武者利光監訳、橋口住久訳) : Nonlinear Dynamics and Chaos (非線形力学とカオス) 、オーム社(1988).

2 3) Lorenz E. N.: Deterministic Nonperiodic Flow, J. Atmos. Sci., 20, 130(1963).

2 4) Feigenbaum M. J.: Qualitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, J. Stat. Phys., 19, 25(1978).

2 5) Libchaber A. and Maurer J.: Une Expérience de Rayleigh-Bénard de Géométrie Réduite; Multiplication, Accrochage, et démultiplication de fréquences, J. Phys. (Paris) Coloq., 41, C3-51(1979).

2 6) Haken H., (牧島邦夫、小森尚志訳) : Synergetics -An Introduction (協同現象の数理) 、東海大学出版会(1980).

2 7) 合原一幸編著：カオスーカオス理論の基礎と応用、サイエンス社(1990).

2. 数学的準備

2.1 非線形動力学系の線形化とその限界

一般に非線形動力学系は

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}_\mu(\mathbf{X}(t)) \quad (2.1)$$

のような時間発展方程式の形にかける。ここにベクトル $\mathbf{X}(t)$ は系を記述するための状態変数、ベクトル関数 \mathbf{F}_μ は系の時間発展を決定し、パラメータ μ は経年変化のような比較的長時間変化しない変数、または制御用アンプのゲインのような調節可能な変数である。 μ は一般には多次元である。(2.1)式のような非線形動力学系を解析する場合、状態空間の大域的な解析は非常に困難である場合が多い。しかしながら、実在する多くの非線形動力学系において、状態変数 $\mathbf{X}(t)$ は状態空間のある部分空間すなわち局所的な領域に留まっている。すなわち実用的には状態空間の局所的な領域の動特性解析で十分事足りることが多い。さて、そのような局所的領域には(2.1)式のベクトル場が0ベクトルになる点が含まれており、それは固定点または平衡点と呼ばれる。すなわち、(2.1)式の固定点は $\mathbf{F}_\mu(\mathbf{X}(t))=0$ をみたすような \mathbf{X} を探すことによって得られる。ここで仮にその固定点を \mathbf{X}_0 とおくと(2.1)式は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}_\mu(\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}) \quad (2.2)$$

のように変形される。ここに \mathbf{x} は \mathbf{X} の \mathbf{X}_0 からの変位であり、 \mathbf{X} が固定点まわりの局所化された領域に留まる場合にはあまり大きな成分を持たない。 \mathbf{X}_0 を原点に置いても何ら一般性は失われないのでそのように座標変換された非線形動力学系を改めて \mathbf{F}_μ とおけば(2.2)式は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}_\mu(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 \text{ at } \mathbf{x} = 0$$

と簡略化される。本論文で対象とする非線形動力学系は原子炉であり、そこでは少なくとも原子炉の運転停止状態、および通常の定常運転状態に対応する2つの固定点が存在する。原子炉出力振動は后者の固定

点のまわりで誘発されるものであり、この固定点のまわりでの局所化された領域が以下の動特性解析が対象とする領域である。さて x が十分小さい場合には以下のようにTaylor級数展開することができる。

$$\frac{dx}{dt} = F_{\mu}(0) + DF_{\mu}(0)x + \frac{1}{2}D(DF_{\mu}(0))x^2 + \dots \quad (2.4)$$

ここで DF_{μ} は F_{μ} のJacobianを表す。原点は固定点であることから(2.4)式の右辺第1項は0とおくことができる。今時刻 $t=0$ において $x(t)$ を原点の近傍におき、 F_{μ} によって時間発展させたとする。初期の時刻において、 $x(t)$ はまだ原点の近傍にいることから動特性を表す(2.4)式の2次以上の項が無視できる。すなわち $x(t)$ の運動は線形化された動特性方程式

$$\frac{dx}{dt} = DF_{\mu}(0)x \quad (2.5)$$

によって表現できる。原点における線形動学的意味での安定性は、 DF_{μ} のすべての固有値の実数部分が負であることにより保証される。これを線形安定条件と呼ぶことにする。この条件が満たされれば原点の近傍の点はすべて $t \rightarrow \infty$ で原点に引き込まれる。従って、 $0 < t < \infty$ で $|x|$ が十分に小さいという条件が満足され、(2.5)式の線形化は時間発展の初期段階だけでなく常に有効である。現実の系には小振幅の確率的雑音が存在していて、この場合には原点の近傍の点から出発した x は原点の近傍にゆらぐことになる。よって、より現実的な線形安定な系の時間発展方程式は

$$\frac{dx}{dt} = DF_{\mu}(0)x + (\text{確率的雑音}) \quad (2.6)$$

となる。

線形安定な原子炉系の典型例は第1章で述べたAkcasuの解析したモデルである。彼は原子炉を狭帯域フィルターとみなし、その出力振動を説明しようとした。その動特性モデルは確率的な要素を除けば

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{\rho}(t) + 2\beta \frac{1}{\omega_0} \dot{\rho}(t) + \rho(t) = 0 \quad (2.7)$$

と表される。ここに $\rho(t)$ は反応度、 ω_0 は共鳴周波数、 β は減衰係数である。この式は $0 < \beta < 1$ においては次式のように簡単に解ける。

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\beta \omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} t \quad (2.8)$$

ここに ρ_0 は $\rho(t)$ の初期値である。この減衰振動の周期は $2\pi / (\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2})$ であり、減衰振動の連続したピーク

値の比すなわち減幅比DRは

$$DR = e^{-\frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} \quad (2.9)$$

と求まる。減幅比は現在最もよく使われている原子炉の安定性の指標である。

離散時間系において、(2.6)式と同値な方程式は

$$x_i = L_\mu x_{i-1} + (\text{確率的雑音}) \quad (2.10)$$

である。ここに*i*は離散時間、 L_μ は時間に依存しない正方行列とする。このような系から測定された時系列信号 u_i は1変数の線形の自己回帰モデル (ARモデル)

$$u_i = \sum_k a_k u_{i-k} + (\text{白色雑音}) \quad (2.11)$$

を用いてフィッティングすることができ、システムを同定することができる。また上記の減幅比は同定したモデルのインパルス応答より即座に求めることができる¹⁾。ARモデルによる解析手法は原子炉雑音の分野で広く用いられている。

2.2 分岐と非線形振動^{2),3),4)}

前節の線形化は固定点の線形安定条件がみたされる場合に限りその適用が保証される。本節ではその条件が満たされない場合について考える。何らかの原因で (2.1)式において μ が変化すると DF_μ が変化し、そしてその固有値も変化する。よって固定点の線形安定性は μ に依存している。線形安定な固定点が不安定化するためには、 DF_μ の固有値のうち少なくとも1つの固有値の実数部分が正にならなければならない。線形動力学系ではこのような変化が生じた場合、系は発散してしまう。一方、非線形動力学系では他の漸近解へ収束することもありうる。このように系の漸近的な振る舞いが変化する現象を分岐現象と呼び、このとき μ は分岐変数と呼ばれる。また、系の漸近的な振る舞いが変化するような μ の値を分岐点と呼ぶ。いまここで(2.3)式が

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 \quad (2.12)$$

のような1次元の時間発展方程式であると考え。この場合、Jacobianの固有値はただ一つ存在し、原点においてそれは μ である。よって原点は $\mu < 0$ で安定な固定点になる。また、 $\mu > 0$ においては原点が不安定な固

定点になり、新たに2つの安定な固定点

$$x = \pm \sqrt{\mu}$$

が出現する(図2.1(a))。このような分岐は熊手分岐と呼ばれ、分岐の典型的な例である。無論、実際には系はどちらか一方の固定点に引き寄せられる。

分岐現象の中で非線形振動の発生に深く関わっているのがホップ分岐である。今ここで、ホップ分岐を生じさせる非線形動力学系の簡単な例

$$\dot{x} = -\omega y + \mu x - x(x^2 + y^2) \quad (2.13)$$

$$\dot{y} = \omega x + \mu y - y(x^2 + y^2) \quad (2.14)$$

を考える。(2.13)~(2.14)式に定数項がないため原点 $(x,y)=(0,0)$ はこの系の固定点になっている。原点におけるJacobianの固有値は $\lambda_1, \lambda_2 = \mu \pm i\omega$ となる。 $\mu < 0$ であれば、系に雑音が存在しない限り固定点のまわりでの運動は減衰振動になる。すなわち固定点は線形安定である。ここで μ が徐々に増加していく場合を考える。 μ が0に近づくに従って減衰のしかたは緩やかになっていき、 $\mu > 0$ では減衰しなくなり逆に振動は拡大してしまう。さて(2.13)および(2.14)式において $r^2 = x^2 + y^2$ 、 $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ なる変数変換を行えば

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \quad (2.15)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2.16)$$

と変数分離できる。(2.15)式は原点から (x,y) までの距離の支配する方程式で、(2.16)式は振動の位相を支配している。(2.15)式は(2.12)式と全く一致しており、 $\mu > 0$ においても r の値は発散せず、分岐後現われた正の安定固定点に収束する。すなわち振動の拡大は、非線形項のため、ある振幅のところで抑えられ角周波数 ω の周期的運動が現われる。このように安定な固定点が不安定化し、漸近的な振る舞いが周期的運動(リミットサイクル)に置き変わるような分岐(図2.1(b))はホップ分岐と呼ばれている。原子炉の出力振動の発生は μ がホップ分岐点に非常に近づいたとき、またはホップ分岐点を越えたときに起きる現象と深く関わっている。

さて周期的な運動を解析するのに便利な幾何学的方法がある。 n 次元系の場合、 n 次元空間内に描かれた系の解軌道とある $n-1$ 次元の超平面 Σ との交点の時間的な動きを1つの写像 P とみなすことができる(図2.2)。このとき面 Σ はポアンカレ・セクション、写像 P はポアンカレ写像と呼ばれる。図2.3の上図のように、ポアンカレ写像が固定点を持ちそれが線形安定であれば周期的な軌道はリミットサイクルである。

この固定点不安定化しホップ分岐すれば、全体として図2.3の左下に示したようにトーラス上の運動が現われる。すなわち系には2つの減衰しない振動のモードが存在することになり、2つの振動モードの間

に相互作用がないかぎり系の時間発展はそれらの振動の重ね合わせになる。2つのモードの周波数の比が無理数であればトーラス上の軌道は交わらず、周期的にはならない。このような運動は準周期運動または擬周期運動と呼ばれている。また有理比であれば運動は有限時間後にトーラス上の同じ場所にもどり、リミットサイクルになる。しかしながら、2つの振動モードの間に相互作用がないとした仮定は多くの場合あてはまらない。通常2つの振動モードは完全に独立ではないので、もともとの周波数比が無理数であっても2つの周波数が有理比になってしまい1つのモードに纏まってしまい、またリミットサイクルに戻ってしまうことがある(図2.4)。この現象は周波数ロッキング(位相ロッキング)と呼ばれている。(この現象は日常的にも見られる。たとえばカーラジオ等で放送局の周波数に自動的に調節する機能を有しているものがあるが、これは放送局の周波数と受信の周波数の周波数ロッキング現象を利用している。)2つの振動モードの間に周波数ロッキングが起きるかどうかは系の種類やパラメータに依存していて、一般に2つの振動の周波数が近く相互作用が強いときに周波数ロッキングがおきやすい。また周波数ロッキング状態から一見ランダムな振動に遷移することがある。このような、決定論的な運動であるにもかかわらず予測不可能な運動はカオスと呼ばれている。また、このようなカオスの発生ルートは準周期崩壊ルートと呼ばれている。

この他にポアンカレ写像が熊手分岐する場合もある(図2.3)。この場合には系の運動はポアンカレ・セクション上の2つの安定な固定点を交互に通過し、結果として周期が倍になることから周期倍分岐と呼ばれている。この周期倍分岐後にパラメータ μ をさらに徐々に変化させていくと再度周期倍化し4倍周期運動を生じる。同様に8倍周期運動、16倍周期運動等が生じ、最終的には非周期的な振動すなわちカオスが生じる(図2.5)。この現象はFeigenbaumのシナリオと呼ばれている。周期倍化が起きる μ の値には系に依存しない規則性があり⁵⁾、このことはカオス理論の一般性を認識させることになった。Feigenbaumのシナリオは簡略化された原子炉出力振動のモデルにおいても、非現実的な条件下においては確認されている。⁶⁾

2.3 非線形動力学系の低次元化

原子炉は非常に多くの構成要素からなっており、その動特性の物理モデルは非常に複雑である。このため、上記の簡単な分岐の例はあまり工学的意味が薄いように思える。しかしながら、物理的に複雑なモデルから必ずしも複雑な運動が生じるわけではなく、より低次元の運動として表現される場合が多い。この低次元化の数学的方法として、中心多様体定理³⁾と隷従原理⁷⁾が存在する。隷従原理はより一般的で中心多

多様体定理を原理的に含んでいるが、中心多様体定理の方がホップ分岐に関する限り、よりシステマティックでかつ簡易に計算が行えるという利点がある。実際、第5章では、原子炉出力振動モデルの解析のため中心多様体定理を用いる。以下では中心多様体定理をホップ分岐を例に取り説明する。

原点に固定点が存在する n 次元の非線形動力学系を考える。原点でのJacobianの固有値をそれらの実数部分の大きい順に $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とおく。ただし、固有値が縮退しているものも数えるものとする。今ここで、これらの固有値のうち λ_1 および λ_2 が複素共役であり、実数 μ および ω によって $\lambda_1, \lambda_2 = \mu \pm i\omega$ と表されるとする。このとき、 $\mu < 0$ であれば系に雑音が存在しない限り固定点まわりでの運動は減衰振動になる。また、 $\mu > 0$ では固定点は不安定になり発散しなければリミットサイクルが生じる。ここで系を λ_1, λ_2 に関する振動運動のモードとその他の固有値に関する減衰運動のモードに分けて考えるため、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\end{aligned}\tag{2.17}$$

のように表現する。ここで \mathbf{x} および \mathbf{y} はそれぞれ2次元および $n-2$ 次元のベクトルである。 \mathbf{B} および \mathbf{C} はそれぞれ2次元および $n-2$ 次元の正方行列であり、それら固有値はそれぞれ λ_1, λ_2 および $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$ である。また \mathbf{f}_1 および \mathbf{f}_2 は原点において \mathbf{x} および \mathbf{y} に関して定数項と1次の項を含まず

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{y}} = 0\tag{2.18}$$

であるような関数であるとする。明らかに固有値 $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$ に関連する運動のモードはすみやかに減衰してしまう。ただし dy/dt は \mathbf{x} の関数であるため、 \mathbf{y} は原点に収束せず状態空間のある多様体

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})\tag{2.19}$$

近傍に"収束"する。残された λ_1, λ_2 に関する振動運動のモードによって(2.19)式上の点は収束も発散もしない。

状態空間内の、ある多様体上の任意の2点間の距離が系の時間発展によって収縮する場合にはその多様体を安定多様体と呼び、それが拡大する場合には不安定多様体と呼ぶ。よって(2.19)式が作る図形は安定多様体と不安定多様体の中間的性質を有し中心多様体と呼ばれる。中心多様体定理によれば、分岐点において原点で \mathbf{x} 軸に接する中心多様体が必ず存在する。(隷従原理においては同様なことを、 \mathbf{y} が同時刻の \mathbf{x} によって表現されるため、 \mathbf{y} は \mathbf{x} によって隷従化される、または支配されると表現されている。) 何らかの方法を用いて $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ が求まれば、それを(2.17)式の \mathbf{x} の式に代入できて、もともと n 次元の系は

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{f}_1[\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (2.20)$$

の2次元の非線形発展方程式に低次元化される。すなわちどのような複雑な系でもホップ分岐点付近においては(2.20)式の2次元の非線形動力学系と同型になる。この結果は一般性があり、原子炉出力振動を低次元自由度の運動として解析しようとしている本研究において非常に重要な意味をもつ。

残された問題はいかに中心多様体 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ を求めるかということになる。(2.19)式を時間微分したものは(2.17)式の dy/dt の式と等しいので

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\mathbf{h}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{h}(\mathbf{x})[\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{f}_1[\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})]] = \mathbf{C}\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_2[\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (2.21)$$

が成り立ち、同時に原点において $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} 軸に接するので

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{D}\mathbf{h}(0) = 0 \quad (2.22)$$

が成り立つ。よって(2.21)および(2.22)式を満たすような $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ を探せばよい。具体的な計算方法については第5章の例を参照されたい。

2.4 非線形動力学系の一般化次元^{8),9)}

前節で説明したような非線形動力学系の低次元化が起きた時、その漸近解の集合は n 次元状態空間のある低次元の部分空間のみに存在している。この部分空間の作る時間不変な図形はアトラクターと呼ばれ、周囲の点から出発した時間発展による軌道をその中に引込む。固定点が線形安定である場合にはその近傍の軌道はすべてその固定点に引き込まれていくので、この場合アトラクターは点である。このようなアトラクターはポイント・アトラクターと呼ばれる。ホップ分岐がおきてリミットサイクルが生じた場合、アトラクターは閉軌道になる。このようなアトラクターは周期的アトラクターと呼ばれる。さらに周期的アトラクターが前記のように不安定化した場合、それぞれの場合についてアトラクターが定義できる。アトラクターはそれぞれの非線形運動固有のものであり、その漸近的性質が集約されたものである。アトラクターは低次元化された高次元の非線形動力学系の実体であり、それによって非線形現象を分類することができる。よってアトラクターの分類は非線形現象を理解する上で非常に本質的である。

アトラクターは幾何学的な表現であり、その分類は場合によっては視覚的に行なうことも可能であるが、確率的雑音やカオスが存在する場合には困難になる。そこでアトラクターの解析学的表現を得ることにする。ある n 次元非線形動力学系をアナログ回路等で実現し時間発展させたとする。過渡的な運動が終わっ

た後、一定の時間間隔ですべての変数をサンプリングし、それを n 次元位相空間上にプロットしていったとする。プロットされた点が形成していく図形は言うまでもなくアトラクターである。もし統計的に十分に多くの点をサンプリングしたとすると、プロットされた点はある不変集合を作る。上記の不変集合より状態空間上の不変確率測度 $\rho(x)$ を定義できる。これは不変集合上の様々な部分がどのくらい頻りにサンプリングによってプロットされていくかを表している。これがアトラクターの解析学的表現である。

さてアトラクターすなわち非線形動力学系を分類するために、不変確率測度が有するある特徴量を考える。ここで中心が x で半径 r の n 次元球に含まれる確率測度の積分を

$$\rho[B_x(r)] = \int_{|x-x'| < r} \rho(x') dx' \quad (2.23)$$

とする。このとき情報次元は

$$D_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \rho[B_x(r)]}{\log r} \quad (2.24)$$

のように定義される。情報次元は定義から想像されるように、場合によっては非整数をとることも考えられる。すなわち情報次元は整数の次元の概念をより一般化した次元の概念、一般化次元の1つである。集合が n 次元空間の d 次元部分空間に一様に分布している場合には情報次元の値は d になることは容易に理解される。すなわち情報次元は従来の整数次元をその特殊なケースとして含んでいる。アトラクターに関して言えば、ポイント・アトラクターの場合次元は0、周期的アトラクターでは次元は1、準周期アトラクターでは2になる。このように情報次元は非線形動力学系を定性的に分類することができ、原子炉出力振動の定性的な解析への応用が期待される。

雲のような特徴的な長さが存在しない図形はフラクタル図形と呼ばれ、自己相似的である性質を持っている¹⁰⁾。この図形上の点の集合は実際に非整数の次元をとる。そのため一般化次元はフラクタル次元と呼ばれることもある。ローレンツ系¹¹⁾など、連続時間系のカオス運動の漸近解が作る不変集合（アトラクター）の多くは特徴的な長さが存在せず、一般化次元が2より大きい非整数であるフラクタル集合（フラクタル図形）になることが確認されている。このようなアトラクターはストレンジ・アトラクターと呼ばれている。以上のように情報次元はフラクタルと深くかかわっている。フラクタルについての詳しい内容をここで紹介することはこの論文の範囲を越えてしまうが、この数学的体系は原子炉動特性解析への応用として今後期待されるため付録1に簡単に紹介しておく。

2.5 時系列データの処理^{(4),(8)}

非線形動力学系を時間発展させた場合、その漸近的な位相空間内の軌道は不変集合（不変図形）を形成することはすでに述べた。また情報次元は集合の点を表すために必要な情報量であり、系の性質を表すのに必要な独立変数の数に関係している。すなわちこれらの次元を求めることは問題となっている現象を理解する上での重要な手掛かりになる。同じく一般化次元である容量次元やハウスドルフ次元¹⁰⁾を求め際には集合を小球で被覆しなければならず、計算機による処理に適していない。これに対して情報次元の測定は確率測度を基礎としているのでそれがエルゴード的であれば時系列データの解析に置き換えることができる。以下では情報次元の測定法について述べる。

n 次元の非線形動力学系から不変確率測度を得るためには、系を長時間時間発展させ n 次元の時系列データ $\{x_i\}$ を測定すればよい。計算機内に実現された系では $\{x_i\}$ を容易に得ることができるが、実際の系から得られるのは通常1次元の時系列データ $\{u_i\}$ である。実際の系の不変確率測度を得るためには多少の工夫が必要である。ここに1つの周期 T の調和振動子 $x(t)=\sin(2\pi t/T)$ を考えよう。ここで $y(t)=x(t+T/4)$ を第2の状態変数とすれば、 (x, y) は単位円上を運動する。この単位円は明らかに調和振動子の動特性を表している。この方法を埋め込みといい、上の例は1次元時系列データを2次元に埋め込んだ場合である。一般には、適当な遅れ時間 σ と埋め込み次元 d をとれば

$$x^d(t)=[u(t), u(t+\sigma), \dots, u(t+(d-1)\sigma)] \quad (2.25)$$

によって元の多次元空間の軌道を再構成することができる¹²⁾。時系列データの場合には(2.25)式は

$$x_i^d=[u_i, u_{i+m}, \dots, u_{i+(d-1)m}] \quad (2.26)$$

となる。ただし m は離散時間で表した遅れ時間である。図2.6に簡単な例をあげた。統計的に十分に長い $\{x_i^d\}$ によって我々は不変確率測度の近似的な表現を得ることができる。

上記の埋め込みによって得られた不変確率測度を使って情報次元を推定することができる。ここで x_i^d 、 x_j^d を d 次元空間で再構成されたアトラクター上の点とする。このとき(2.23)式の $\rho[B_x(r)]$ はアトラクター上の点の距離相関関数の積分（相関積分）

$$C_d(r)=\frac{1}{N}(\text{number of pairs } (i,j) \text{ whose distance } |x_j^d-x_i^d| \text{ is less than } r) \quad (2.27)$$

によって近似される¹³⁾。ここに N は x_i^d 、 x_j^d 対の数である。また $|x_i^d-x_j^d|$ の計算は計算時間の節約のため最大ノルムをとることにする。すなわち情報次元は

$$D_1 = \lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C_d(r)}{\log r} \quad (2.28)$$

と表すことができる。 $\log C_d(r)/\log r$ は $C_d(r)$ を両対数グラフにプロットしたときのグラフの傾きであり、実際に測定する場合には十分大きな d に対して数値微分

$$v(r) = \frac{d(\log C_d(r))}{d(\log r)} \quad (2.29)$$

を求めればよい。この $v(r)$ を相関積分の傾き(Slope of Correlation Integral: SOCI)と呼ぶことにする。ただしこの方法には実用上、少々注意すべき点がある。それは r が無限小において D_1 は確率的雑音の影響を大きく受けてしまう。例えば、不変確率測度が直線上に一様に分布している場合 $D_1=1$ であるが、確率的雑音が存在する場合、確率測度はある幅を持った直線になり、 $r \rightarrow 0$ では D_1 は1より大きな値になってしまう。一方、アトラクターが無限に広がっている図形ならばその特徴は r によらず、雑音の影響のなくなるような大きな r で $v(r)$ を測定すればよい。しかし実際のアトラクターの大きさは有限であり、あまり r を大きく取れない。よって我々は雑音の影響が小さくかつアトラクターの大きさによる影響も小さな r を選択して、その時の $v(r)$ を測定しなくてはならない。次章ではSOCIを使って実際に原子炉出力振動の情報次元を求め

2.6 まとめ

本章では、非線形動力学系の基礎理論を原子炉出力振動を意識しながら、後章で必要となる範囲内で簡単に説明した。ここでの基本的な考え方は、一般に動力学系は非線形であり、それを線形化によって簡略化できるのは線形安定の条件が満たされている場合に限られる。ただし、高次元の状態変数を持つ非線形現象でもその漸近運動は低次元である場合があり、特に非線形振動現象の場合は中心多様体定理により低次元性が保証される。この漸近運動の一般化次元(情報次元)は非線形動力学系の最も重要な物理量であり時系列データから測定可能である。

第2章の参考文献

- 1) Upadhyaya. B. R. and Kitamura M.: Stability Monitoring of Boiling Water Reactors by Time Series Analysis of Neutron Noise, Nucl. Sci. Eng., 77, 480(1981).
- 2) 合原一幸編著：カオスーカオス理論の基礎と応用、サイエンス社(1990).
- 3) Guckenheimer J. and Holmes P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag(1985).
- 4) 高安秀樹編著：フラクタル科学、朝倉書店(1987).
- 5) Feigenbaum M. J.: Qualitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, J. Stat. Phys., 19, 25(1978).
- 6) March-Leuba J., Cacuci D. G. and Perez R. B.: Universality and Aperiodic Behavior of Nuclear Reactors, Nucl. Sci. Eng., 86, 401(1984).
- 7) Haken H., (齊藤信彦、小森尚志、長島知正訳) : Advanced Synergetics (シナジェティクスの基礎)、東海大学出版会(1986).
- 8) Eckmann J.-P. and Ruelle D.: Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, Rev. Mod. Phys., 57, 3, Part-1, 617(1985).
- 9) 高安秀樹：フラクタル、朝倉書店(1986).
- 10) Mandelbrot B.: The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco(1982).
- 11) Lorenz E. N.: Deterministic Nonperiodic Flow, J. of Atmos. Sci., 20, 130(1963).
- 12) Takens F.: Detecting Strange Attractors in Turbulence, Lect. Note in Mathematics, 898, 366(1981).
- 13) Grassberger P. and Procaccia I.: Measuring the Strangeness of Strange Attractors, Physica, 9D, 189(1983).

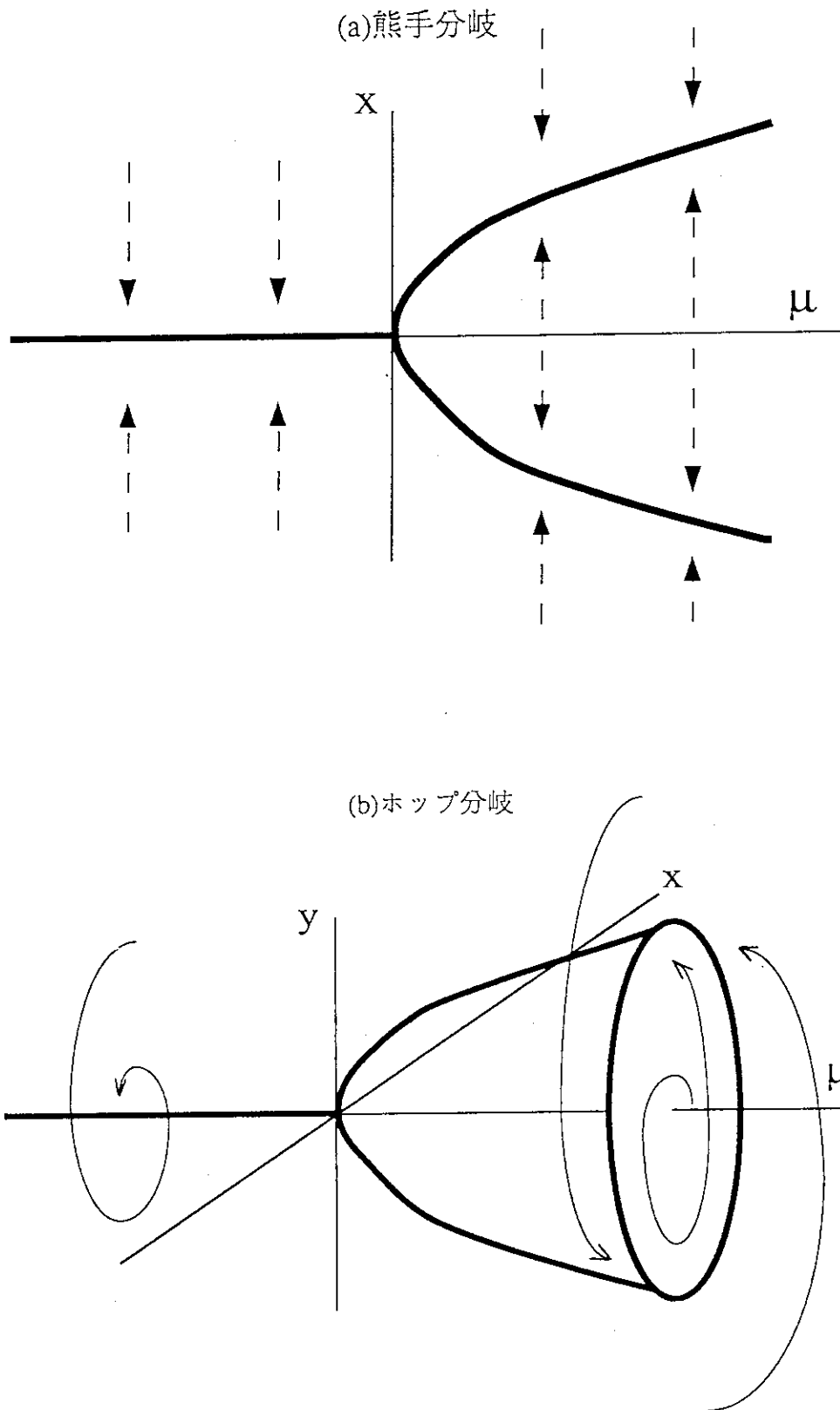


図2.1 基本的な分岐現象

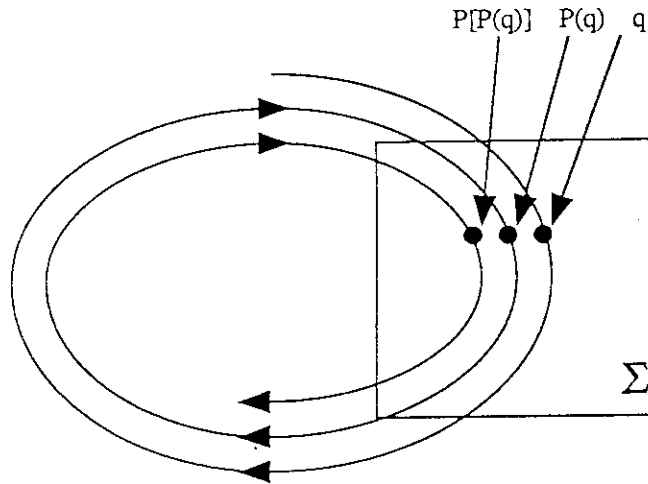


図2.2 ポアンカレ・セクション Σ とポアンカレ写像 P

リミットサイクル運動

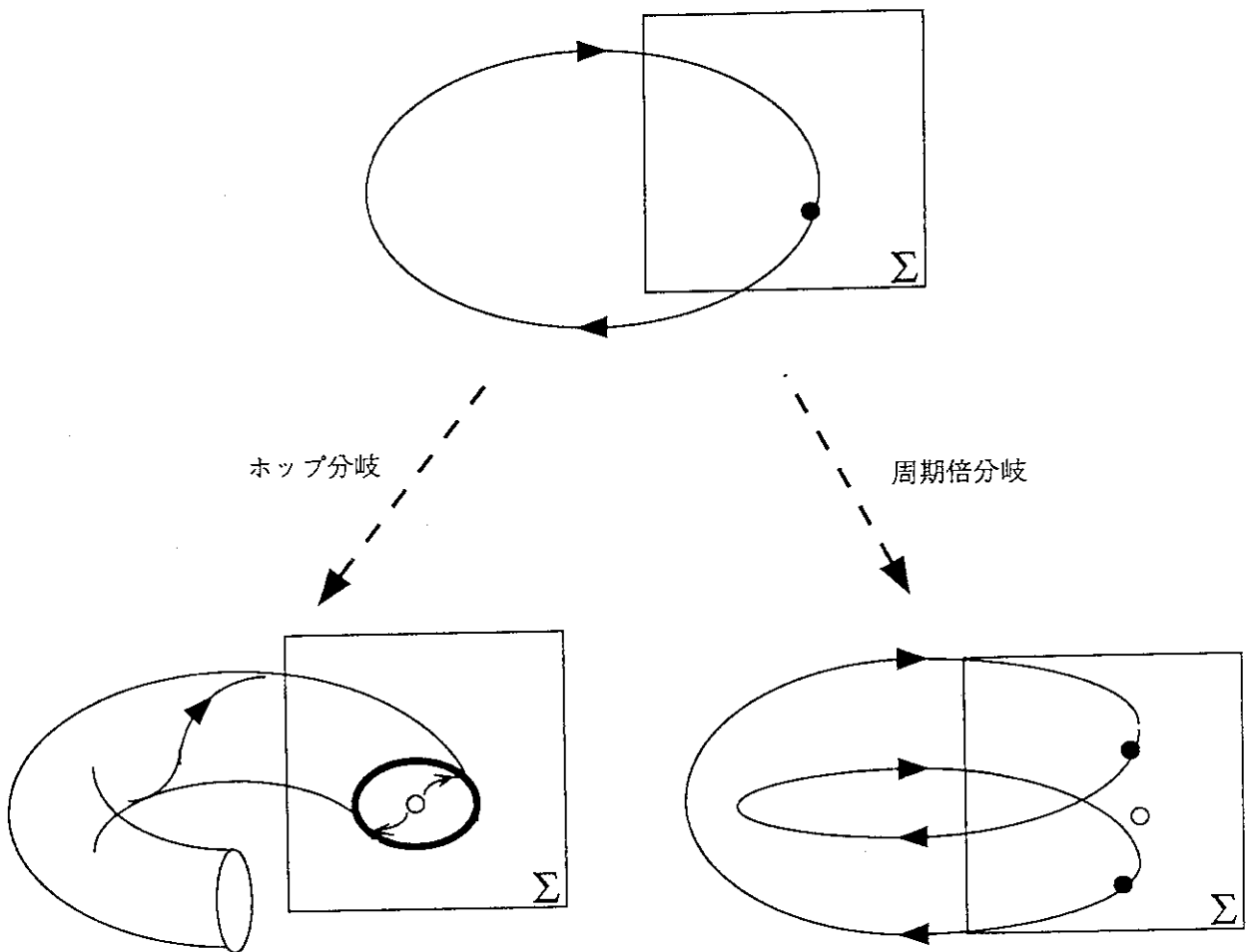


図2.3 リミットサイクルからの分岐：
ポアンカレセクション Σ 上の黒円は安定な固定点、
白円は不安定な固定点を示す。

準周期運動のパワースペクトル密度関数

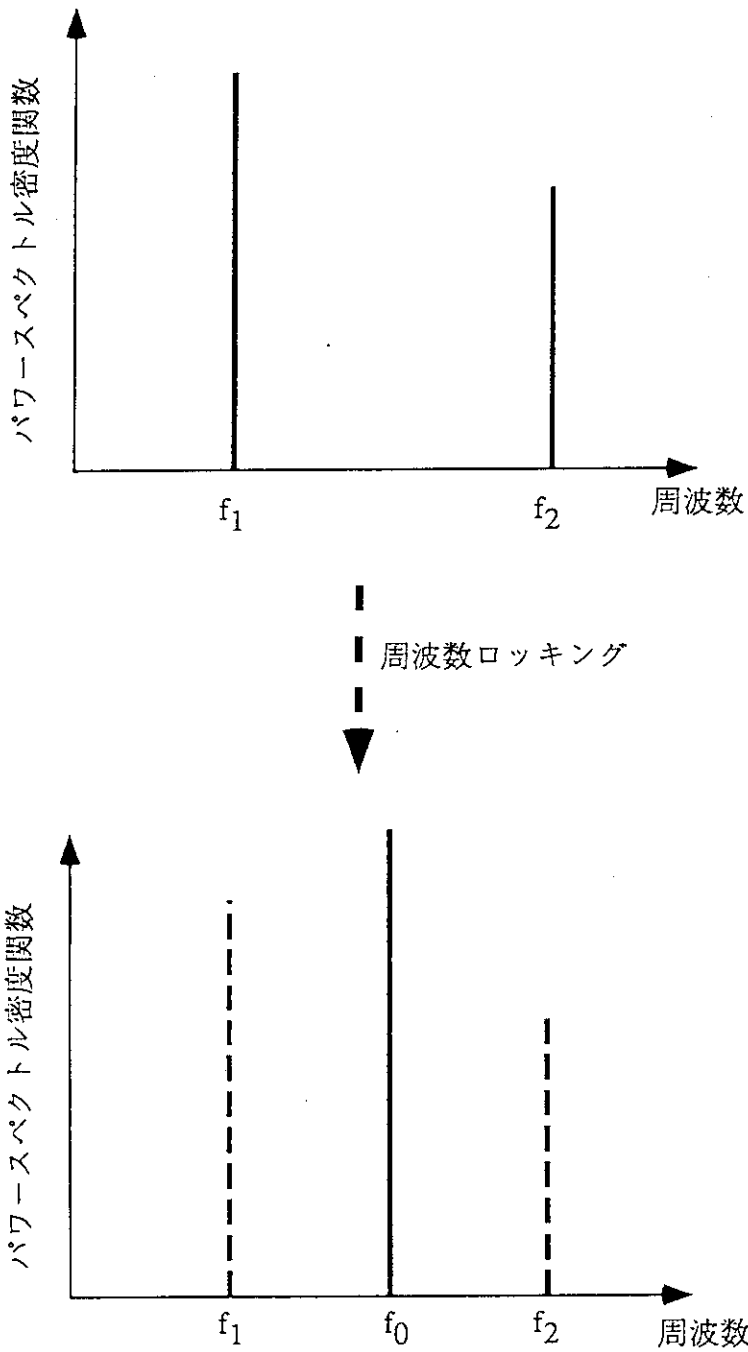


図2.4 周波数ロックイング：
準周期運動では独立な周波数 f_1 と f_2 が存在するが（上図）、
周波数ロックイング状態では f_1 と f_2 が消えて1つの新しい
周波数 f_0 が現れる（下図）。

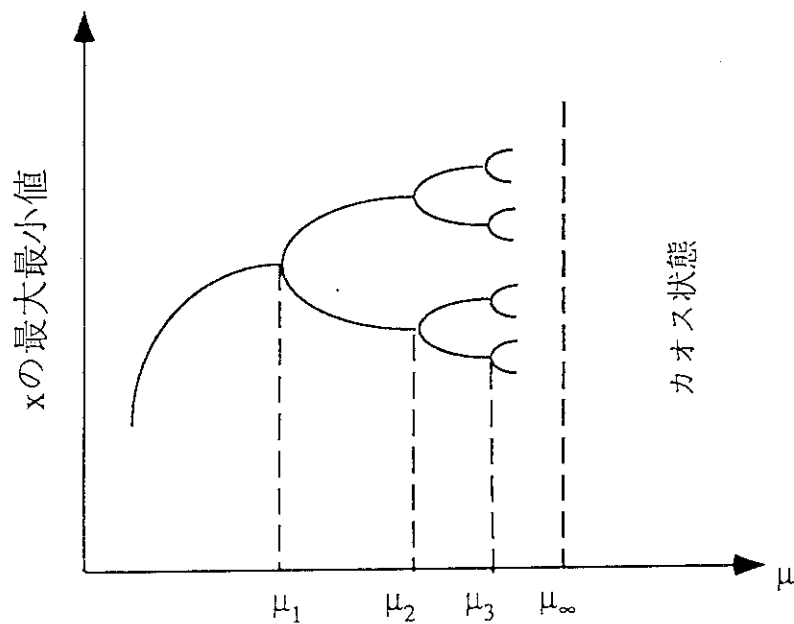


図2.5 周期倍分岐：
 n回目の周期倍分岐を起こすパラメータμをμ_nとすると系によらず
 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(\mu_n - \mu_{n-1}) / (\mu_{n+1} - \mu_n)] = 4.6692016$ という規則性が存在する。

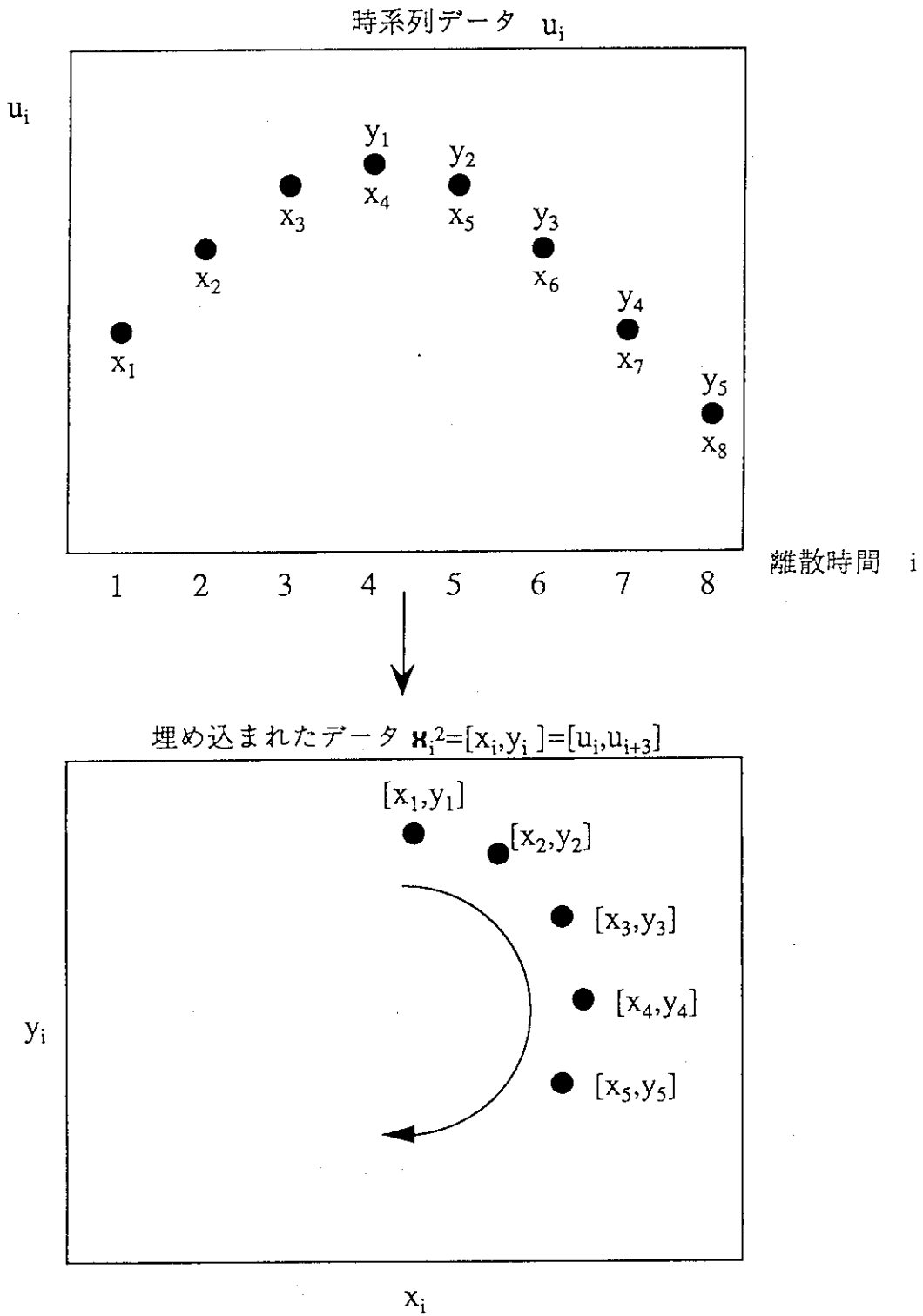


図2.6 $d = 2$ 、 $m = 3$ における埋め込み法の例

3. NSRRの出力振動の解析

3.1 はじめに

炉雑音解析の分野ではARモデルやパワースペクトル密度関数に代表されるような線形的かつ確率的手法が支配的である。線形的な手法を使うかぎり、系の挙動は安定な固定点周りでの確率的な運動であると仮定され、決定論的な運動を表現できないことは前章ですでに述べた。同様に、振動のパワーの確率分布すなわちパワースペクトル密度関数は、そこに現われたピークの大小によってその周波数の振動が起こる確率（頻度）を示すに留まり、決定論的な情報は与えない。

しかしながら、原子炉の出力振動の発生には非線形的な効果が重要な役割を果たしている。また、原子炉内の機械的振動等の異常振動と出力振動との間には非線形的な振動モード間の結合が存在する。これらの現象は確率的ではなく決定論的である。現在、非線形的および決定論的な運動に対しても、線形的および確率的解析法が用いられており、それらの結果を拡大解釈して決定論的な非線形動特性を推論している。よって、これらの現象をより正確に解析するための手法を探ることがが急務であると考えられる。

カオス理論に象徴されるように、最近の非線形動力学理論から様々な新しい概念（物理量）が生まれている。そしてその新しい理論や概念に基づくデータ処理法は、時系列データの解析に新しい分野を開拓しつつある。しかしながら、原子炉の動特性解析の分野にそれらの理論が応用された例は世界的に見てもあまりない。本章ではそのような試みの第一段階として、第2章で説明した非線形動力学の諸概念に基づいて、NSRRの出力振動の解析を試みた。

3.2 NSRRの概要とその異常出力振動に関する予備知識

NSRR (Nuclear Safety Research Reactor) は、燃料安全工学上の実験を行う目的で日本原子力研究所東海研究所に導入されたTRIGAタイプの研究用原子炉である。この原子炉の大きな特徴の1つに、パルス出力運転が可能であることがあげられる。1975年に運転が開始されて以来、パルス出力による様々な燃料破損実験が行なわれてきた。

NSRRの定常出力モードでの最大出力は300kW、パルス出力モードでのピーク時の最大出力は23GWで

ある。燃料成分は平均約20%に濃縮されたウランと水素化ジルコニウムの合金であり、炉心に実装されている燃料要素の数は157本である。

原子炉を横から見た断面を簡略化して図 3.1に示した。炉心はオーブンプールの中に設置してある。炉心冷却はプール水（軽水）の自然循環によって行われる。炉心上部には2つのチューブがあり、鉛直に置かれているのが制御棒操作管である。制御棒はすべてプール水面上の制御棒駆動装置機構から電磁石による結合を経て炉心部に宙づりになっている。斜め上方より炉心上部に入ってきているチューブは実験用燃料挿入管である。またプール内にディフューザー・ポンプが組み込まれている。運転中の炉心内では ^{16}N が生成され、本来ならば冷却水の自然循環によってプール上面に上昇しプール上方の放射能レベルを上げてしまう。この現象を抑えるため、図3.1に示すようにプール上部から冷却水を汲みあげて炉心上部にある3つのノズルから噴出されるような構造になっていて、結果として ^{16}N がプール上部にあがってくる前に自然崩壊させることができる。

炉心周辺を上から見た図を図 3.2に示した。炉心は環状型になっており、炉心中心部には実験用燃料挿入管の延長上に鉛直方向の実験孔が貫通しており、実験用燃料挿入管からこの実験孔に試験カプセルを装填できるようになっている。また制御棒は炉心内に11本同心円上に配置されている。このうち6本が調整棒(Regulating Rods)、2本が粗調整棒(Safety Rods)そして残り3本がバルス運転用のトランジェント棒(Transient Rods)である。調整棒は他の制御棒と異なり、案内管なしの裸の連結棒がプール上面から炉心部の制御棒に結ばれる構造になっている。炉心外周には補償型電離箱が1つ、核分裂型電離箱が3方向に1つずつ設置されている。

定常出力モードの出力調整のための自動制御系はおおまかに図3.3のように構成されている。まず、出力レベルは中性子検出器（補償型電離箱）で測定され、出力目標（設定値）と比較される。検出された出力レベルと設定された出力レベルの差（誤差信号）はマスター・サーボ・システムに入力される。マスター・サーボ・システム内では、ポテンショ・メータに連結されたマスター・サーボ・モータが誤差信号に比例したぶんだけ駆動される。このポテンショ・メータの位置の変化はそれぞれの調整棒に付随したスレーブ・サーボ・システムの入力信号となる。それぞれのスレーブ・サーボ・システムでは入力信号に比例したぶんだけモータがまわされ、ラック・アンド・ピニオン機構を経て最終的に出力レベルが設定値に近づくように6本の調整棒が同時に駆動される。

最近の改造前のNSRRの炉心では定常出力モードにおいて出力が周期約0.3Hzで異常振動したことが確認されている。この異常振動の原因を探るための実験がPhase-I、Phase-IIと2度にわたって行なわれた。これらの実験においては、運転パラメータを変化させ様々な角度から炉雑音が収録された^{1),2)}。その結果以下の知見が得られている。

- 1) 異常振動は比較的高出力運転時に起こる。
- 2) 異常振動は自動制御系を切断するとおさまる。
- 3) 上記のディフューザー・ポンプを起動すると振動が発生しやすい。
- 4) 出力振動を上記の3方向の中性子検出器で測定したところ、それぞれの中性子束信号の振動に位相差はない。

1) の知見はBWRのそれと一致する。2) より、異常振動は自動制御系に深く関わっていることは明らかである。また3) から、温度ゆらぎがディフューザー・ポンプによって引き起こされ、それが異常振動を促す外乱となっていると考えられる。4) の結果は空間的な振動のモードは存在しないこと意味している。

異常振動の詳細な原因はまだ明らかにされていないが、1984年に行われたPhase-IIIの実験³⁾において収録されたデータのなかにBWRの炉心振動とのアナロジーにおいて興味ある結果が得られている。その実験においては、最適なフィードバックゲインを探るためにマスター・サーボ・システムのゲイン段階を替えて中性子束その他の炉雑音が測定されている。この時の運転状態は、出力270kWで比較的高出力、また上記のディフューザー・ポンプは作動していた。ゲイン段階を4段階、即ちゲイン段階1からゲイン段階4まで変化したときの中性子束振動の変化を図3.4に示す。このデータは測定されたアナログ・データを適当に規格化したあと直流成分を除き0.0625sの周期でサンプリングして得られた時系列データである。実験より、ゲイン段階があるしきい値を越えたとき、約4sの周期で連続的な振動が得られることが解かった。この振動の原因は炉出力への過剰なフィードバックによるものと解釈することができる。BWRの出力振動は高出力、低流量時に発生する。低流量によってボイド・フィードバック効果が大きくなり、振動にいたっていることは周知の事実である。すなわち、NSRRの出力振動はBWRの出力振動の場合のボイドフィードバックが制御棒によるフィードバックに置き変わったものにすぎない。商業炉のデータが豊富でない現状から考えれば、NSRRのデータは出力振動の理論的な研究にとって貴重なデータといえる。

3.3 NSRRの出力振動の決定論的運動の同定

図3.4のゲイン段階4の時系列データを(2.26)式に従って2次元空間に埋め込んでみる。周期は約4sであるので、埋め込まれたデータの軌道が円形に近くなるように埋め込みの遅れ時間を振動周期の約1/4の1sに選んだ。埋め込まれた軌道(図3.5)より、振動は単純な閉軌道ではなくかなり揺らいていることがわかる。この揺らぎが確率論的な(すなわち無限自由度の)運動なのか決定論的な(すなわち有限自由度の)運動

なののは、この2次元軌道からでは判断できない。

この判断には、2章で紹介した情報次元を測定することが有効である。埋め込まれたデータは不変確率測度の射影の近似になるので、埋め込まれたデータのSOC_Iを測定することにより出力振動の情報次元を求めることができる。ただし、(2.28)式で示したように埋め込み次元 d はSOC_Iがある有限値に収束するように十分大きくとらなくてはならない。図3.5の埋め込み例では、系の運動の特徴的な時間を既知と考えて埋め込みの遅れ時間 $\sigma=mt$ を1sに取ったが、今回は特徴的な時間が未知として一般的に取り扱うことにする。そのためにはまず遅れ時間を十分に小さくとり、時系列データを d 次元に埋め込む。このとき d の値は最低次の2から十分大きい値まで変化させる。このような方法をとることにより、注目する特徴的時間の範囲を広く取ることができる⁴⁾。得られたそれぞれの多次元時系列データより、(2.29)式を計算してSOC_Iを求めることができる。

実際には、遅れ時間をサンプリング周期 $\tau=0.0625s$ にとり、埋め込み次元は特に上限を設定せず、SOC_Iの収束値が現われるまで徐々に大きくした。 $d=2\sim 20$ でのSOC_Iの計算結果を図3.6に示す。ここで、 r は埋め込まれた軌道のなかで最も大きい直径で規格化されている。この規格化によって、どのような大きさの振幅をもった時系列データもプログラムの変更なしに扱える。グラフの特徴をあげれば、まず r が比較的小さい所では、 $v(r)$ は d を増やしていったとき発散傾向にある。この傾向は r が小さくなればなるほど顕著である。また r が比較的大きい所では、 $v(r)$ は d を増やしていったとき収束傾向にある。この部分でのグラフは平坦になっている。この平坦部をプラトーと呼ぶことにする。またグラフの右端にピークが観測される。

さて、この結果を解釈するために情報次元の定義に使われた(2.24)式に戻ることにする。 $\rho[B_x(r)]$ によって確率測度は半径 r の球の内側と外側に分離される。すなわち、これは半径 r 内に存在する全ての点は空間内で同じ場所に存在していると思えるような粗視化の処理であり、 r は空間に散らばった点の位置を計測するさいの解像度である。我々が一般生活において物体を詳細に観察したいとき、すなわち解像度を上げたい場合には物体を目に近付けて見ればよい。よって、 r が小さい場合は埋め込まれた軌道上の点を至近距離から見た場合、そして r が大きい場合は遠くから眺めた場合と考えても差しつかえない。埋め込まれた軌道上の点の集合(例えば図3.5)を至近距離から見た場合には確率的雑音のためそれらはただの無秩序な軌道としか見えない。SOC_Iは運動の自由度であるので、このことがSOC_Iが発散している原因である。我々の視点を徐々に図から遠ざけていくと、軌道にある秩序が見えてくる。すなわち、運動の自由度が低次元になりSOC_Iは有限値になる。さらに r を大きくしていくと、すなわち我々の視点をより遠くへ移動させると、今度は軌道が周期的であることがわかってくる。軌道が周期的である場合、その軌道の直径だけ離れた点の組が非常に多くなるので、 $C_d(r)$ の定義(2.27)式よりSOC_Iのグラフにピークがあらわれる。この

ピークは軌道上の点の集合がつくる図形が単純な1次元すなわち直線ではなく、閉軌道になっていることに原因がある。このピークについて次章で詳しく説明する。最後に我々の視点を図から非常に遠くに置くと、それは単に点として認識されるので次元は0になってしまう。以上のようにによって図形の次元は違って見え、それが図3.6の曲線群に集約されている。

ここで、我々の欲しい物理量は決定論的運動の次元であるので、確率論的雑音の影響を排除しなくてはならない。また、同時にアトラクターは有限の大きさをもつため、なるべく小さな r において次元を測定しなくてはならない。すなわち、プラトー付近でのSOCIを測ればそれが出力振動の決定論的運動の次元に最も近い値が得られる。この例の場合、その値は約1.3になっている。決定論的な連続系の運動では1次元と2次元の間には非整数次元は許されない。ところがプラトー付近で測定される次元は確率的雑音によって実際よりも少々大きくなることがわかっている⁹⁾。よってこの確率論的な運動に隠された決定論的な運動の次元は1であり、NSRRの出力振動はカオス的でも準周期的でもなく単に雑音で汚れた周期運動である考えられる。ただしカオスの性質が全く存在しないとは断言できない。というのは高次元のカオスに対するプラトーを検出するためにはかなり長時間の時系列データが必要であるからである。現在手元にそのような長いデータがないためこのような解析は不可能であるが、経験的には、仮にここで用いたデータの10倍以上長いデータがあったとしても、原子炉は非常に雑音の多い系であるためカオスの性質の同定は非常に困難であると予想される。また、雑音が無視できるくらい大きな振幅の振動であれば短時間のデータでもカオス運動の同定の可能性は高くなるが、そのような危険な状態で原子炉を運転し続けることは安全性の観点から許されない。このように見てくると原子炉の出力振動からカオスの性質を、仮に存在しても、同定するのは非常に困難であると言わざるを得ない。

”揺らいだ”周期運動に規則性があるかどうかを見るのに別の方法がある。まず、振動のピーク時の値を時系列データから順番にピックアップすることにより新しい時系列データを作る。この操作はもとの時系列データを1周期ごとのブロックに分割し、その中から位相が等しいデータを集めることに相当するので、ポアンカレ写像をとることと原理的に等価である。図3.7はこのようにして得られた時系列データのポアンカレ写像である。仮にこの振動の揺らぎが決定論的であるとすればポアンカレ写像に規則性が見えるはずである。図3.7に描かれた点はランダムに散乱しておりこの揺らぎは確率的雑音によるものと考えられる。しかしながら、これらの点は $(q_n, q_{n+1})=(0.02, 0.02)$ 近辺を中心とする近傍に位置しており確率的雑音が存在しなければこれらの点はして1点に集中する、すなわち運動はリミット・サイクル的であると考えるのが自然であり、SOCIによる解析結果が支持されている。類似の方法を用いていくつかのポアンカレ写像を作ることができるが、すべてのポアンカレ写像において規則性がないことが確認された。

その他、最大リアプノフ指数⁹⁾を求める方法もあるが、雑音レベルが高い場合、正確な結果を得るのは

非常に困難であることが確認されている⁴⁾。ただし、最大リアプノフ指数は非線形力学系の動特性と密接に関連しており、今後何らかの形で原子炉動特性解析への応用が可能かも知れない。そのため、その数学的概念や測定法に関する知見を付録2に記すことにする。

3.4 出力振動と制御棒自動振動の周波数ロッキング現象

Phase-IIIの実験において、中性子束のみならず自動制御系（図3.3）の各所、例えばマスター・サーボ・システムおよび各スレーブ・サーボ・システムからの出力信号も同時に収録した。前節では、非線形力学の結果を応用した解析によりNSRRの出力振動の決定論的な性質をつかむことができたが、本節では、より局所的信号に非線形現象特有の解析をほどこし、その有効性を示したい。

図3.8はゲイン段階を2に設定した時に得られたスレーブ・サーボ・システム2（図3.8a）およびスレーブ・サーボ・システム3（図3.8b）からの出力信号と同時に測定された中性子束信号（図3.8c）である。スレーブ・サーボ・システムからの出力は制御棒位置信号と考えることができる。図3.8aの制御棒位置信号においては、図3.8cの中性子束信号に見られない断続的な振動が見られる。また図3.8bの制御棒位置信号でもパルス的な変動が見られるが、矢印で示したように、この変動は中性子束信号においても確認できる。すなわち、矢印で示した振動は制御棒駆動システム内部の欠陥ではなく、前節で議論した制御系全体の不安定性に起因した変動であることがわかる。このパルス的な変動は自動振動しているスレーブ・サーボ・システムからの出力にも、自動振動との重ね合わせとして確認できる。よって明らかに異なる原因による2つの振動モードが存在する。また、図3.8aで観測される制御棒自動振動は中性子束信号には直接的には影響を及ぼしておらず局所的な現象である。

さて次に、ゲイン段階4の時に計測された制御棒位置信号と中性子束信号（図3.9）を比較することにする。異常なスレーブ・サーボ・システム2からは非常にランダムな振動が得られている（図3.9a）。それに対して、正常なスレーブ・サーボ・システム3からの制御棒位置信号（図3.9b）は中性子束の振動（図3.9c）とはほぼ同様な振動をしており、位相が反転している。我々の興味は図3.9aのランダムな振動の解析にある。ゲイン段階2の時の解析から推察すれば、異常なスレーブ・サーボ・システムからの制御棒位置信号（図3.9a）は中性子束振動（図3.9c）と自動振動（図3.8a）の2種類の異なった振動の影響を受けているはずである。パワースペクトル密度関数（図3.10）によってゲイン段階が変わったことによる振動の変化を見てみる。図3.10のゲイン段階2に対応する曲線では1つの鋭いピークが0.15Hz付近に見える。これは明らかに自動振動に対するピークである。我々はすでにゲイン段階4の時の信号には2つの振動モードが存在している

ことを知っているが、そのパワースペクトル密度関数においては、0.24Hzのみにピークが確認でき、これは出力振動のモードである。残りのピークは一見したところ基本振動に対する高調波のようである。よってこの時系列データには1つの振動モードのみ現われており周波数ロック現象が起きていると推察される。

さて、このような推察を確信するためには以下の様なデータ処理をするとよい。図3.11は、出力振動が極大値になるような時刻の点を制御棒位置信号の中から選んでアスタリスクで示したものである。また、実線は制御棒位置信号であり、図を見やすくするためロー・パス・フィルターを通してある。すなわち、このグラフによって2つの振動データの位相を比べることができる。一見ランダムにみえる制御棒振動は出力振動の位相に強く依存してことがわかる。かつ、自励振動していないスレーブ・サーボ・システムと異なり、中性子束振動と順相であることがわかる。制御棒自励振動による振動モードが出力振動モードと独立に存在する場合には、それらの位相変数は独立でなければならず、アスタリスクの位置が振動の頂点に留まることは許されない。図3.11で示された現象は位相ロック現象とよばれている。ただしアスタリスクの位置のずれが間欠的に観測され、低調波が現われていることが確認できる。2つの振動の位相がロックされれば、結果として周波数もロックされる。以上ような制御棒振動の解析結果から、制御棒の自励振動は全体的な出力振動時には独立には存在しえず、全体的な出力振動に引き込まれてしまう現象すなわち周波数ロック現象が確認できた。このように2つの振動の非線形的干渉を解析するには、上記のような振動解析法が有効である。

その他スレーブ・サーボ・システム5で類似した自励振動が見られるが、同様な解析法により周波数ロック現象が確認された。その詳細は上記の繰り返しになるため本稿では割愛する。

3.5 位相遅れを用いた振動解析

出力自動調整のためのフィードバック・ループにおける持続的な振動の発生には、位相遅れが重要な役割を果たしている。すなわちある周波数の外乱に起因した負のフィードバックが π rad遅れれば（すなわち位相が反転すれば）元の外乱と位相が一致し、持続振動が発生する必要条件が満たされる。あとは負のフィードバックのゲインが十分に大きければホップ分岐現象が起きて持続振動が発生する。すなわち、位相反転を生じさせるような要素が持続振動の一因であるということが出来る。

持続振動時（ゲイン段階4）の各時刻点における位相の関係を調べると、図3.12に示したように、中性子信号の位相を基準として順相のものと逆相のものに区別できる。まず、マスター・サーボ・システムの

出力において位相がほぼ反転している。また2個のスレーブ・サーボ・システム2、5において順相であり、マスター・サーボ・システムからみれば位相が反転している。これらは3.4節で述べた自励振動している要素である。残りの4個のスレーブ・サーボ・システムは逆相、すなわちマスター・サーボ・システムからみれば位相が反転していない。

スレーブ・サーボ・システムの出力信号の値が増加すれば制御棒が引き下げられそれに伴い反応度が低下し中性子束は抑えられる。本章で問題となっている出力振動の周波数は約0.2Hzであり、この程度の周波数では、制御棒の動作やそれに伴う反応度変化に対する中性子束への位相遅れは無視できる。炉全体の反応度を代表しているのは、位相を反転させていないスレーブ・サーボ・システム1、3、4、6である。よって、出力振動はマスター・サーボ・システム、スレーブ・サーボ・システム1、3、4、6、中性子動特性のループにおいて生じている。より明確に表現すれば、出力振動はマスター・サーボ・システムにおける位相反転によって引き起こされていると考えることができる。

現在マスター・サーボ・システムにおける位相反転のメカニズムを解析中であるが、ある種の不感帯（デッドバンド）による位相遅れであることがわかってきている⁸⁾。BWRにおいては、温度フィードバック・ループにおける燃料内の熱伝達や冷却材のボイド発生過程の位相遅れが振動の発生に関与している。すなわちNSRRの出力振動はフィードバック・ループ内の位相遅れがその発生に関与している点でBWRのそれと類似のものである。

3.6 まとめ

本章では第2章で説明した非線形動力学の諸概念に基づいて、NSRRの出力振動の解析を試みた。その結果、

- 1) NSRR出力振動の決定論的な性質は、非常に長くかつ雑音の少ないデータを得ることができればカオスの性質が見えるかもしれないが、与えられたデータの範囲ではリミット・サイクル的であると結論された。
- 2) また出力振動と制御棒の自励振動は物理的には異なる現象であるが、それらが同時に起こった場合独立に存在できず振動が干渉し周波数ロック現象が起きていることがわかった。
- 3) 出力振動発生の一因となる位相反転はマスター・サーボ・システムに起因していることが明らかになった。

このような解析を通してNSRRの出力振動の性質がわかっただけでなく、非線形振動現象に適した解析

方法をとることにより、線形的な解析では得られない有意義な結果が得られることがわかった。以上のよ
うな解析手法は、BWRの出力振動を含め一般的に非線形振動現象に適用可能である。

第3章の参考文献

- 1) 林 光二、他：炉雑音解析法を用いたNSRRの異常診断 (I)、JEARI-M、84-056、(1984).
- 2) 林 光二、他：炉雑音解析法を用いたNSRRの異常診断 (II)、JEARI-M、84-137、(1984).
- 3) 林 光二：非線形原子炉雑音および非定常原子炉雑音の統計的解析に関する研究、JAERI-M、93-041、(1993).
- 4) Suzudo T.: Reactor Noise Analysis Based on Nonlinear Dynamic Theory - Application to Power Oscillation, Nucl. Sci. Eng., 113, 145(1993).
- 5) Abraham N. B., et al. : Calculating the Dimension of Attractors from Small Data Sets, Phys. Lett., 114A, 5, 217(1986).
- 6) Sato S., Sano M. and Sawada Y.: Practical Methods of Measuring the Generalized Dimension and the Largest Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic Systems, Prog. Theor. Phys, 77, 1, 1(1987).
- 7) Kapitaniak T.: Chaos in Systems with Noise, World Scientific, Singapore(1988).
- 8) Suzudo T. and Shinohara Y. : Qualitative Analysis of Nonlinear Power Oscillation in NSRR, to appear in Ann. nucl. Energy.

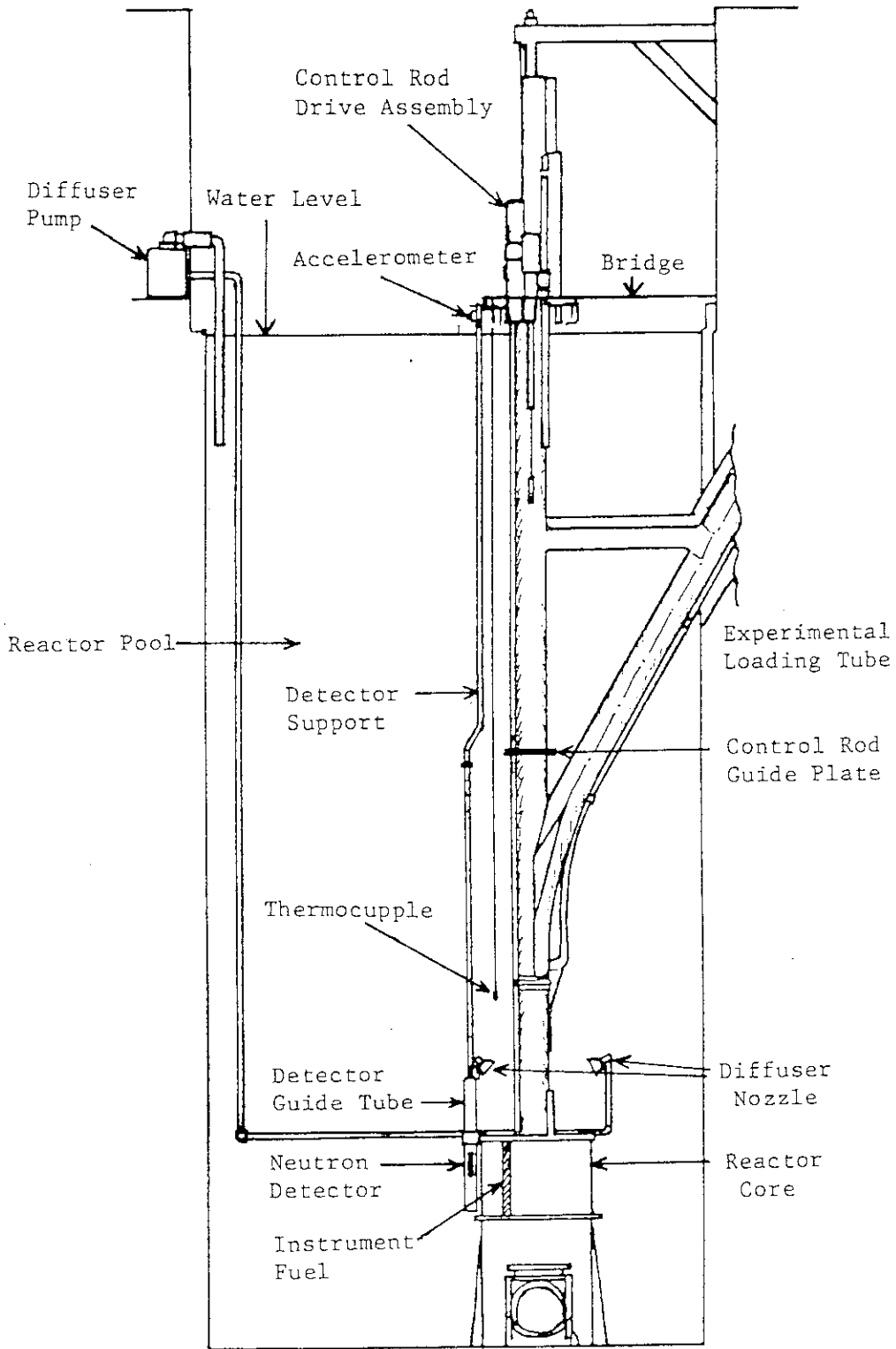


図3.1 NSRRを横から見たときの断面

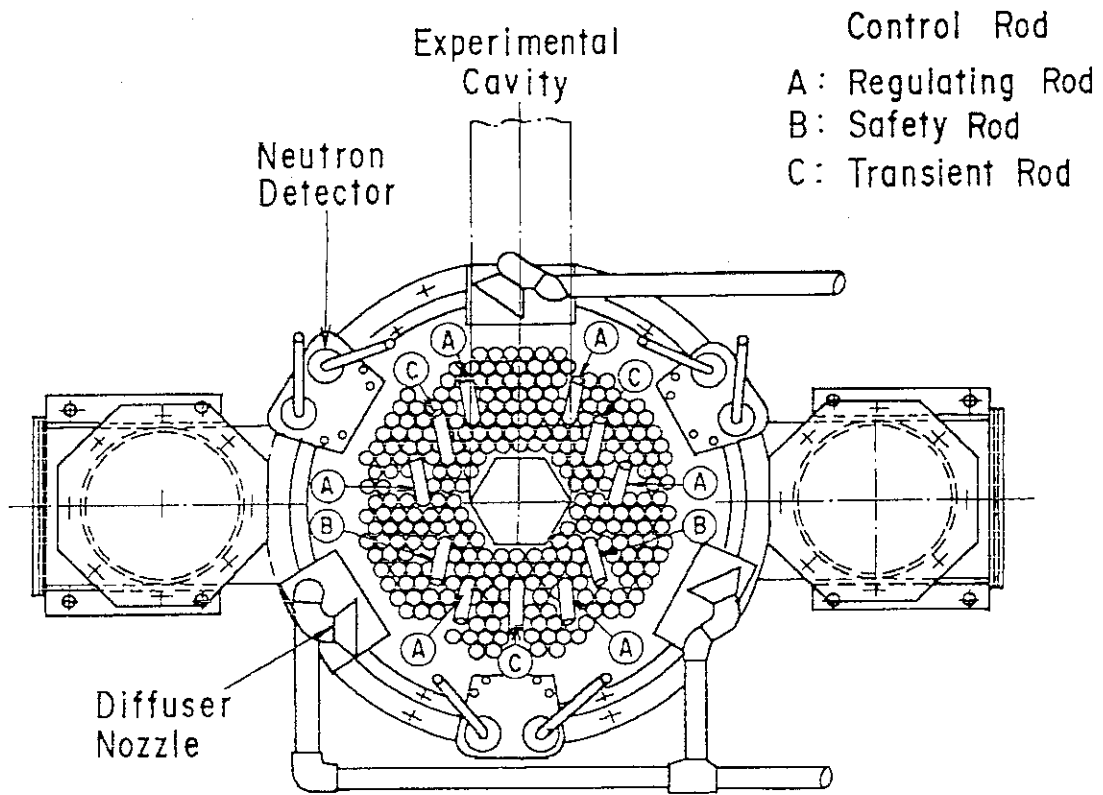


図3.2 NSRRの炉心周辺を上から見た図

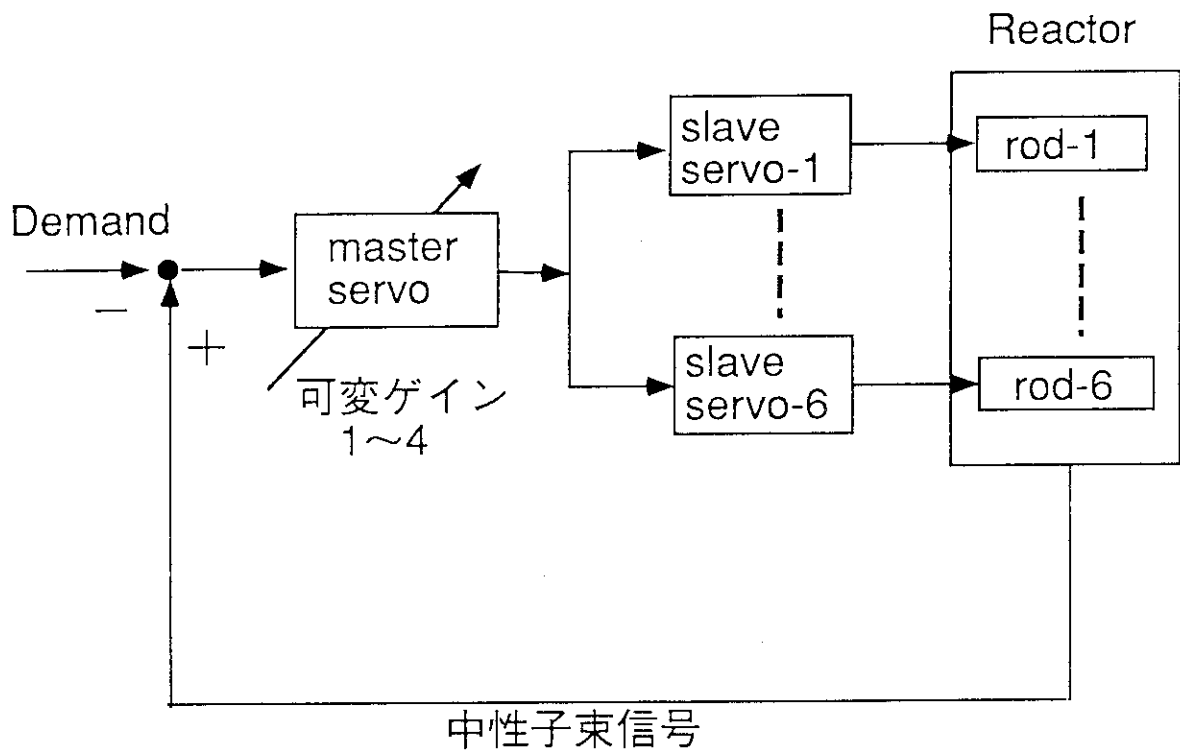


図3.3 NSRRの制御系の概念図

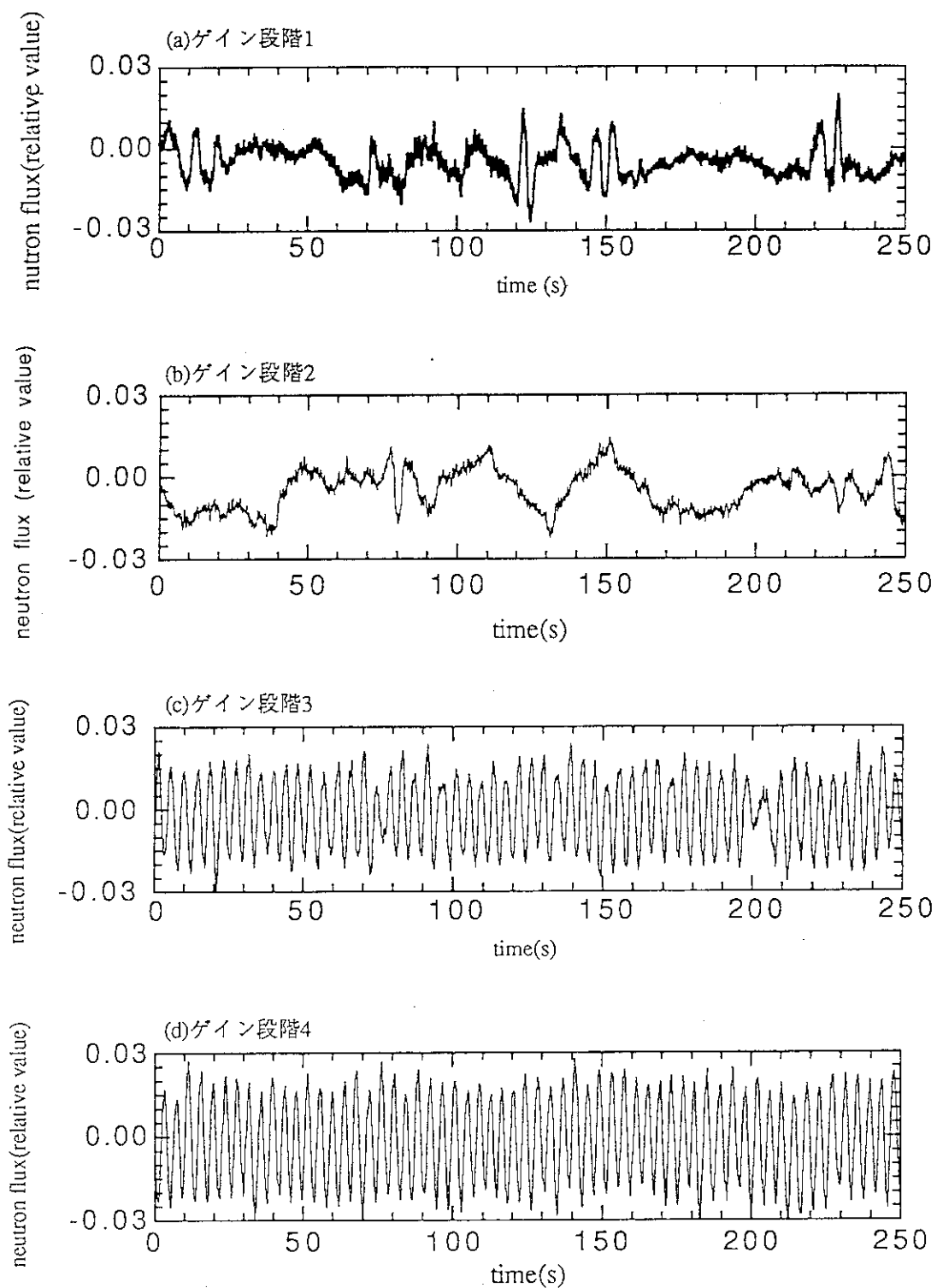


図3.4 NSRRにおける制御棒駆動機構のパラメータ変化による出力振動の発生

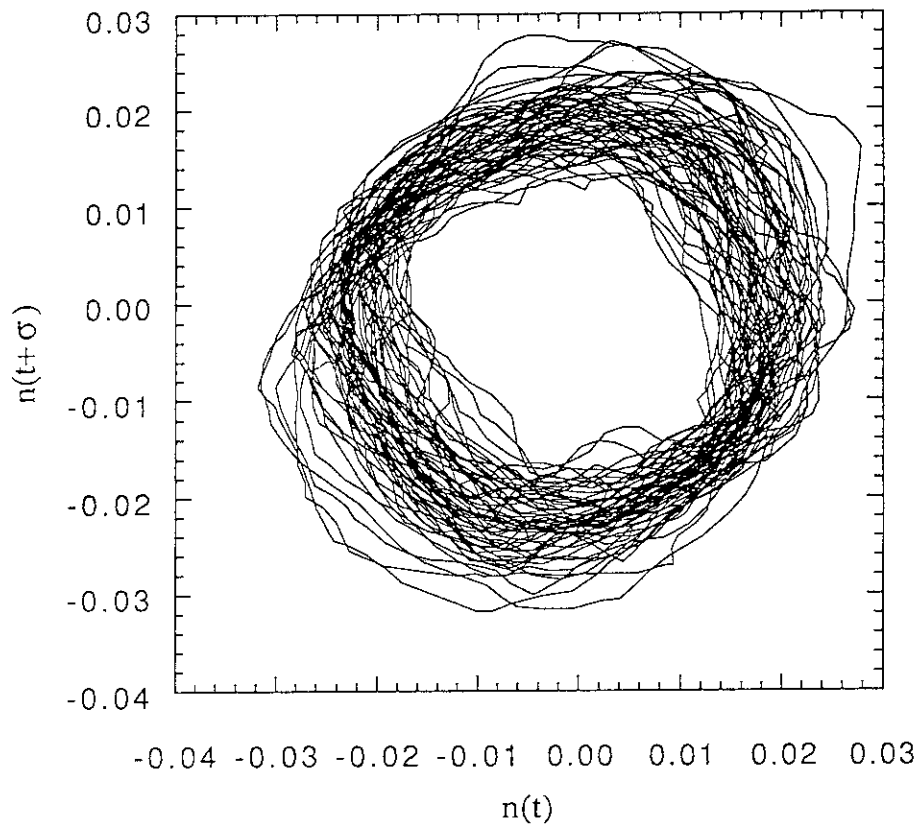


図3.5 NSRRの出力振動データ（ゲイン段階4）の2次元空間への埋め込み：
遅れ時間 $\sigma = 1$ s

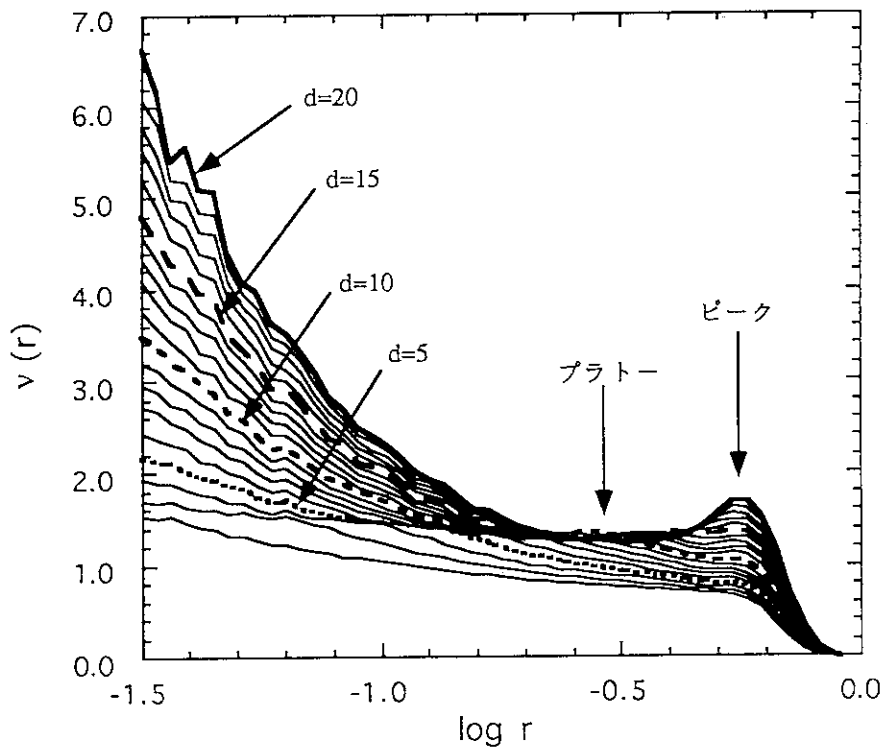


図3.6 NSRRの出力振動の相関積分の傾き（SOCI）： $d = 2 \sim 20$

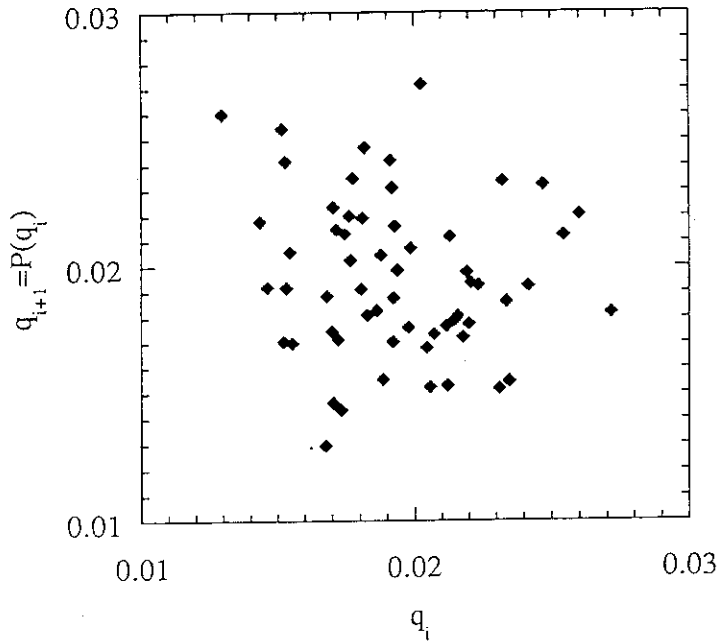


図3.7 NSRRの出力振動から得られたポアンカレ写像P：
 q_i はi番目のピーク値

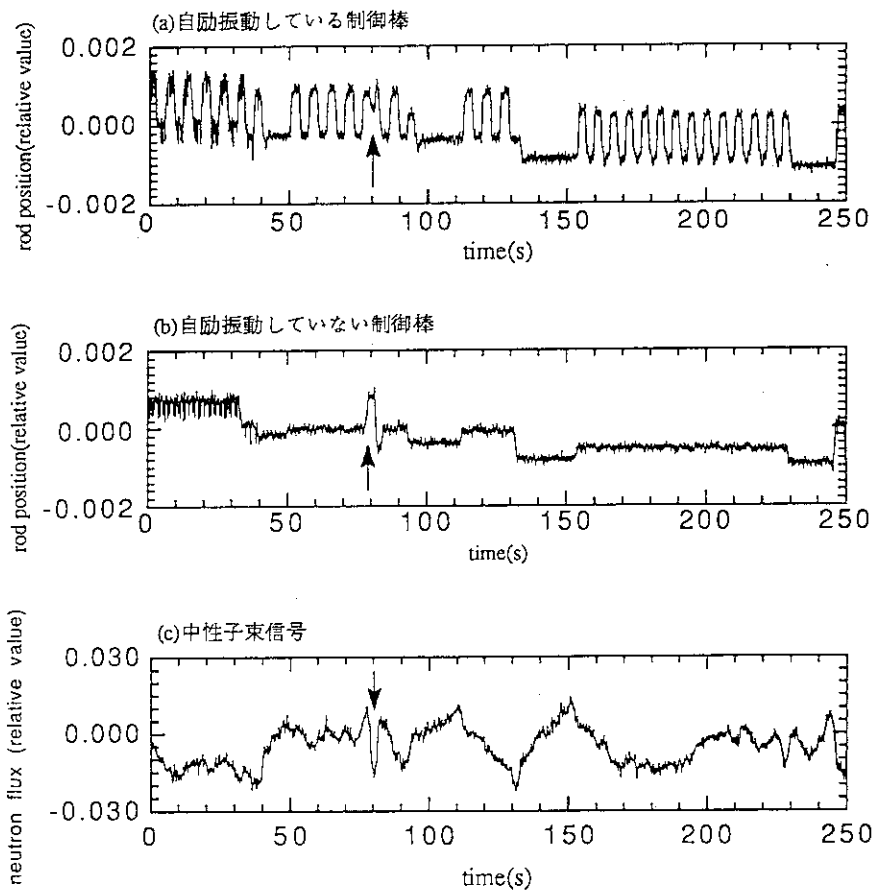


図3.8 スレーブ・サーボ・システムからの出力信号と中性子束信号（ゲイン段階2）

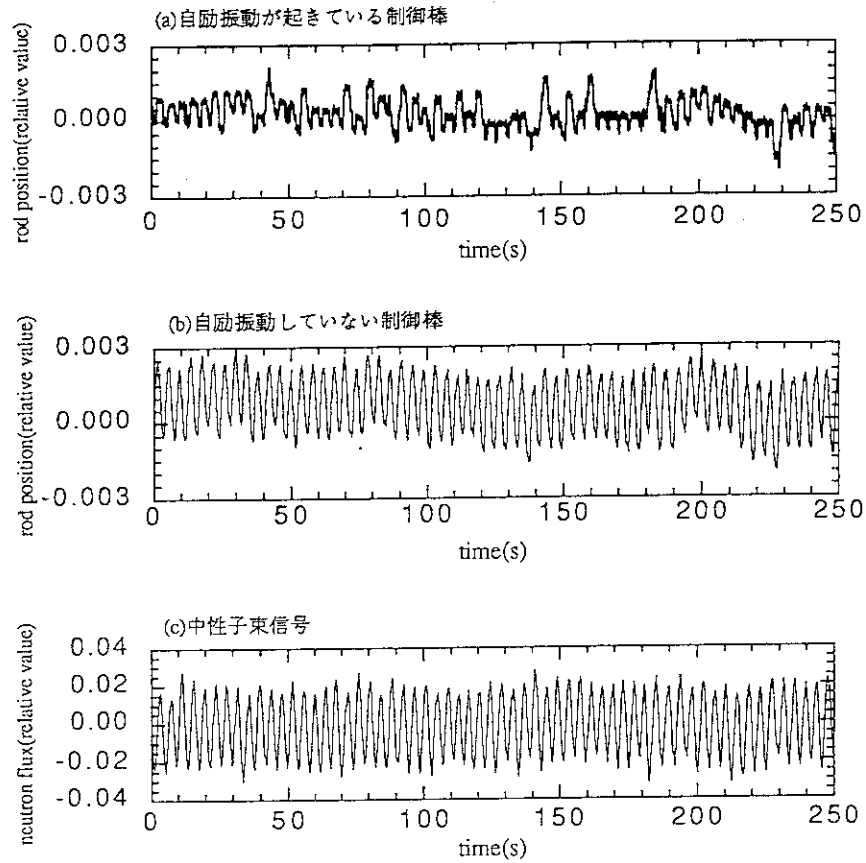


図3.9 スレーブ・サーボ・システムからの出力信号と中性子束信号（ゲイン段階4）

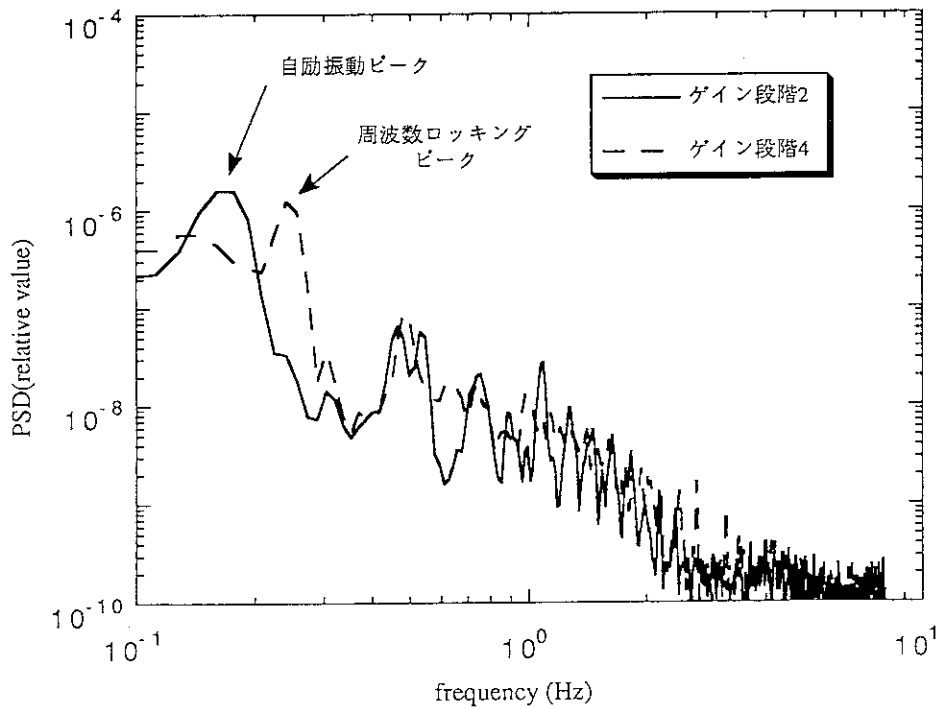


図3.10 自励振動している制御棒のパワースペクトル密度関数：
出力振動との周波数ロッキングによってピーク位置が変化している。

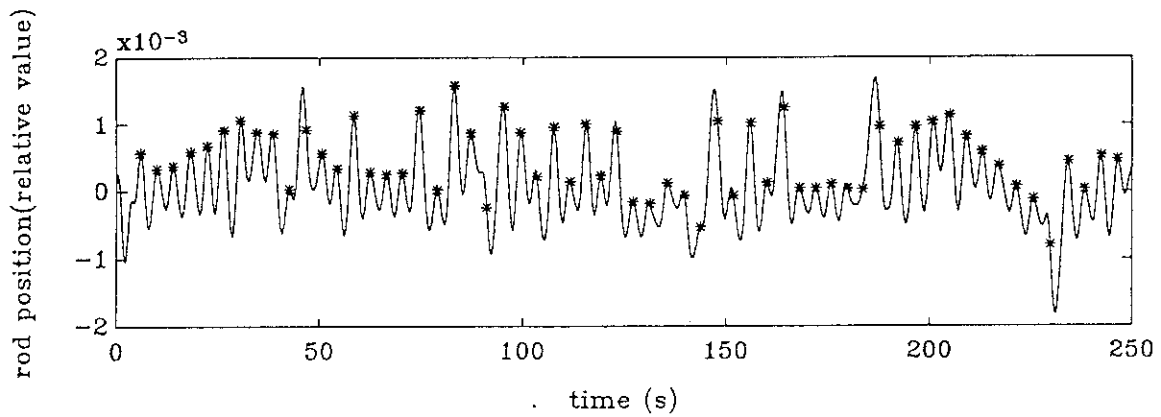


図3.11 制御棒位置振動と出力振動の位相の比較:
 実線は制御棒位置信号、アスタリスクは出力振動がピークになる時刻点における制御棒位置信号である。

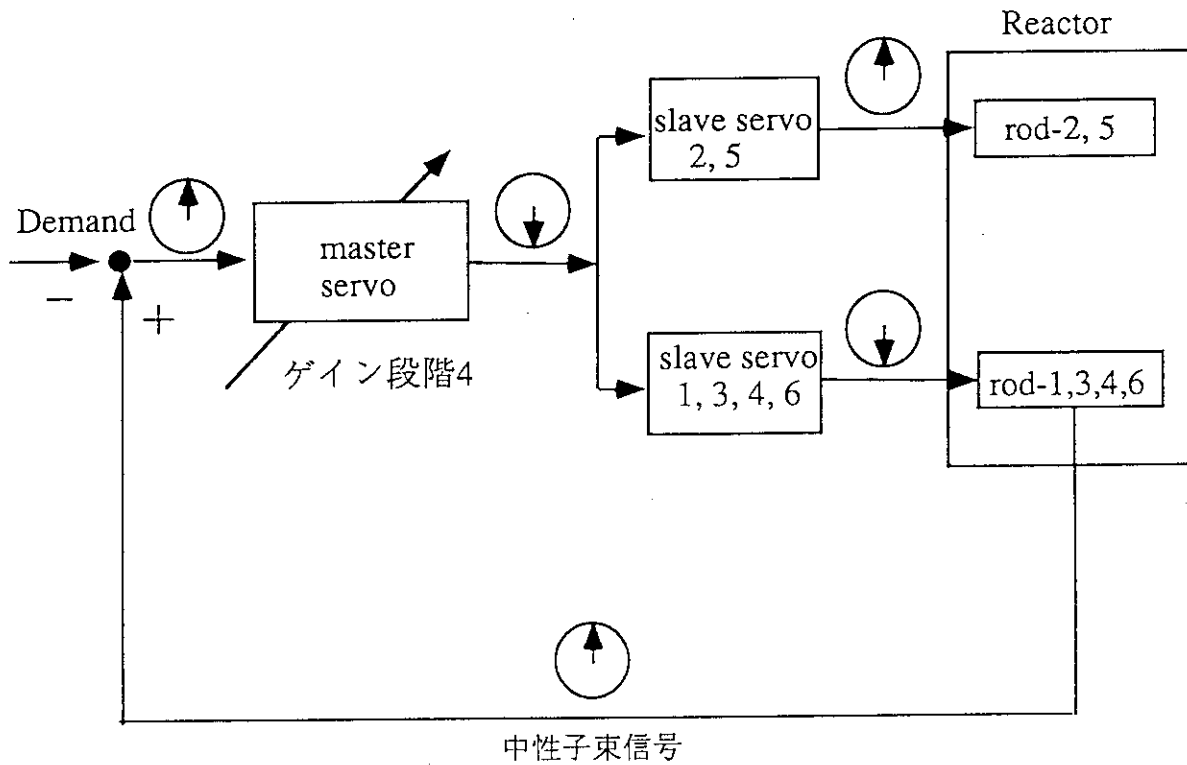


図3.12 NSRRの出力制御系における位相の変化(出力振動時)

4. 情報次元の安定性監視への応用

4.1 はじめに

前章では原子炉出力振動のオフライン解析を行なった。本章では、前章で紹介した手法のオンライン出力振動監視への応用について述べる。

従来、出力振動監視には、出力を示す時系列信号よりARモデルに代表される線形の動特性モデルを同定しそこから振動の減幅比を計算し監視の指標とするものなどが支配的である²⁾³⁾。しかしながら、多くの研究者や技術者がそこから得られる指標の有効性に疑問を持ち始めている。例えば、振動が発達するにつれてその減幅比は1に収束してしまい、振動データを弁別することが原理的に不可能になってしまうこと。また、実際に出力振動がリミットサイクル的に見えるにもかかわらず、確率的な雑音の影響で、そこから計算される減幅比は1をかなり下回ってしまうこと。また減幅比が比較的高いとき、その時間的変動の傾向はもとの出力振動信号の傾向を必ずしも表していないこと。これらの原因は2.1節で述べたように、線形動力学に基づいた指標は線形安定条件が満たされていないときには適用不可能であることに原因がある。

この対応策として、「線形安定性の条件が満たされているかどうか」を監視し、それが満たされている場合には減幅比を詳細な監視指標として用い、それが満たされない場合には、出力振動は不安定領域に属していると解釈するという方法が考えられる。

さて、NSRRから得られた4つの時系列データ（図3.4）のなかで、連続的な振動が現われているもののSOC1をすでに図3.6に示した。すでに、前章での解析結果から、これはリミットサイクル的振動であると見なされることがわかっている。そこで明らかにリミットサイクル的な振動が現われていないゲイン段階1のものSOC1を計算し、図3.6のSOC1と比較してみる（図4.1）。図4.1(a)はゲイン段階1の中性子束信号（図3.4(a)）に対するSOC1で、図4.1(b)は図3.6を再度示したものである。明らかに図4.1(a)では、(b)で見られるようなプラトーやピークは見当たらず、単調減少関数になっている。この結果は、ゲイン段階1での系の挙動には決定論的な性質が存在していないことを意味する。（より正確に言うならば、安定な固定点での静止がこの系の決定論的な性質であり、それは r がグラフが描かれている範囲よりも大きいところに存在する値0のプラトーに対応している。）すなわちSOC1を観察することにより線形安定性を監視できる可能性がある⁴⁾。

以下ではSOC1の性質をより詳しく検討し、オンラインで実現できるような線形安定性の監視法を構築

し、シミュレーション・データおよび実データを用いてその有効性を検討する。

4.2 BWR出力振動モデル

オフライン解析は未知の現象を測定データを用いて詳細に検討することであるのに対して、監視はオンラインで測定データを処理することにより現象の成り行きを即座に判断することである。そのため、監視においては現象を詳細に検討する時間的余裕はなく、予め解析結果に基づいて仮説を用意しておくことが不可欠である。よって、ある解析法を監視法に応用する場合には、様々なデータに関して解析例が豊富にあることが望ましい。しかしながら、原子炉の出力振動に関するデータは決して豊富であるとは言いがたい。このような状況においては、モデルを使ってSOC1に関する知見を増やすしか方法が残されていない。以下では、SOC1の監視指標としての機能を詳細に検討するためにマーチ・ルーバらによって考案されたBWRの出力振動モデル^{5),6)}を導入する。

まず、1点炉動特性方程式は

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N + \lambda C \quad (4.1)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} N - \lambda C \quad (4.2)$$

と表される。ここに

$N(t)$ =中性子束

$\rho(t)$ =反応度

β =遅発中性子生成の割合

Λ =平均中性子世代時間

λ =先行核崩壊定数

$C(t)$ =先行核濃度

である。ここで規格化された中性子束と先行核濃度を以下のように定義する。

$$n(t) = [N(t) - N_0] / N_0$$

$$c(t) = [C(t) - C_0] / N_0$$

ただし N_0 および C_0 はそれぞれ定常状態での中性子束と先行核濃度である。これらを用いて一点炉動特性方程式を書き直せば

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \lambda c + \frac{\rho}{\Lambda} \quad (4.3)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n - \lambda c \quad (4.4)$$

が得られる。これら2つの式がモデルの中性子動特性部分である。

また、マーチ・ルーバはLAPURと呼ばれる詳細なBWR動特性モデル・コードの温度フィードバックの伝達関数を低次元の伝達関数による精度の良いフィッティングに成功した。このとき、詳細モデルの物理的条件を変化させた時に生じる低次元の伝達関数の極や零点の変化から、燃料温度Tの動特性は1次遅れの式

$$\frac{dT}{dt} = a_1 n - a_2 T \quad (4.5)$$

によって支配されること (a_1 および a_2 はフィッティングによって求まるパラメータ)、ボイド反応度 ρ_α の動特性は2次遅れの式

$$\ddot{\rho}_\alpha + \frac{6}{\tau} \dot{\rho}_\alpha + \frac{12}{\tau^2} \rho_\alpha = C \frac{H^2}{\tau} \left(\dot{T} + \frac{6}{\tau} T \right)$$

によって支配されることを明らかにした。ここに τ はボイド残留時間、Hはチャンネルの高さ、Cはフィッティングによって求まるパラメータである。上式をもとにしマーチ・ルーバらはより簡便な

$$\ddot{\rho}_\alpha + a_3 \dot{\rho}_\alpha + a_4 \rho_\alpha = \kappa T \quad (4.6)$$

という式を提案した。ここに a_3 、 a_4 および κ はフィッティングによって求まるパラメータである。また、全反応度 ρ はボイド反応度とドップラー反応度の和

$$\rho = \rho_\alpha + DT \quad (4.7)$$

によって表されると仮定された。ここにDはドップラー反応度係数である。まとめるとBWRの出力振動モデルは(4.3)～(4.7)式の5次元の非線形系時間発展方程式で与えられる。

この非線形動力学系は5次元の状態空間上で表されるが、2.1節で述べたように実際に系の状態が存在する領域は5次元状態空間内のある固定点まわりの局所的な領域である。(4.3)～(4.7)式の中の微分をすべて0とおけば5次元の代数方程式が得られ、それを解けば固定点を得られる。明らかに

$$n(t) = c(t) = T(t) = \rho_\alpha(t) = \dot{\rho}_\alpha(t) = 0$$

は固定点であり、それは原子炉の定常運転状態に対応している。すなわち原子炉の出力振動の議論はこの固定点まわりの局所化された領域のみで行なえばよい。

さてこのモデルで、Vermont Yankee炉で得られた出力振動⁷⁾を模擬するために表4.1のようなパラメータ値が与えられている。ただし、 κ は可変パラメータとして扱われている。これらのパラメータを用いてこのモデルの時間発展を実現することができる。この場合、上記のように初期値は固定点の近くに選んでおく。この計算機による解析で、上記の固定点は $\kappa > -0.0037$ で線形安定であるが、 $\kappa < -0.0037$ で不安定化することが確かめられている。すなわち κ は分岐変数であり、 $\kappa_0 = -0.0037$ が分岐点である。この分岐は第2章で説明されたホップ分岐であることを理論的に示すことができる⁸⁾。すなわち分岐後に漸近解としてリミット・サイクルが得られる。(4.6)式からわかるように、燃料温度からボイド反応度を通じて中性子束への負のフィードバックが大きくなったときに振動が起きていることがわかる。これは炉心流量が低下しボイド反応度が増加するときの効果と同等であり、このモデルはBWRの出力振動の発生機構を良く表していることがわかる。

実際の原子炉の挙動には決定論的挙動に加えて必ず熱水力学的ゆらぎ等の確率論的挙動が含まれる。SOCCIを含めた様々な炉心監視法を試験するために、このモデルより試験用の時系列データを用意しておかなくてはならないが、このとき試験の条件を現実のそれと近づけるために、モデルに確率論的雑音源を加える必要がある。そこで確率論的雑音は主に温度揺らぎから生じるため、ガウス型の白色雑音を(4.5)~(4.7)式の右辺のTに加えることにする。また、デジタル計算機上でモデルの時間発展を実現するため、固定積分刻み幅0.005sの5次のルンゲ・クッタ法を用いた。

4.3 従来型の監視方法の機能試験

線形安定性の監視指標としてSOCCIがうまく機能するかどうかを試験する前に、従来用いられてきた方法がどの程度機能するかを知っておく必要がある。

図4.2に示されている2つ時系列データは一見した限りでは振幅の違うデータとしか認識できないが、前述のBWR出力振動モデルで $\kappa/\kappa_0 = 0.99$ (図4.2(a)) および $\kappa/\kappa_0 = 1.01$ (図4.2(b)) に設定して4.2節に述べた方法で確率的に発展させて得られた中性子束振動 $n(t)$ である。すなわち、両方とも分岐変数 κ が分岐点 κ_0 に非常に近いが、確率論的雑音を入れない場合には(a)では系が固定点に収束するように、また同じ場合に(b)では系が周期的運動に収束するようになっている。またモデルに付加された確率論的雑音はこれら2つのケースにおいて同じレベルのものである。ここで、これら2つの時系列データの決定論的挙動の相違を明

確に識別できるかどうかを問題とする。すなわち、(a)は線形安定で(b)ではリミットサイクル的であると断言できるような証拠を探すことにする。ただし、過渡的成分の影響が入らないように $n(t)$ の最初の2500sの計算結果は破棄し、その後10時刻点毎に（すなわち0.05s毎に）中性子束 $n(t)$ を50,000点(2500s)サンプリングし、それを解析用のデータとした。

さて、振動の監視に一般的に利用されているのが前にも述べたように減幅比である。ここではARモデルを用いて減幅比を求めてみる。AR係数のフィッティングのためのアルゴリズムとしてYule-Walker法⁹⁾を用いた。また、同定されたARモデルのインパルス応答関数の連続した振動のピークの比をとり、その比が収束した値を減幅比とした。このような方法を経て、図4.2(a)および図4.2(b)の時系列データに対する減幅比はそれぞれ0.984および0.998と求まった。この結果より、2つの場合を相対的に比較してどちらがより不安定かを論ずることは可能であるが、決定論的な性質の相違を識別するのは不可能であることがわかる。

もう1つの代表的な振動の監視方法にパワースペクトル密度関数がある。2つの時系列データについて、パワースペクトル密度関数をブラックマン・ターキー法⁹⁾によって求め比較してみた（図4.3）。2つの曲線の違いは、 $\kappa/\kappa_0=1.01$ の場合のグラフが $\kappa/\kappa_0=0.99$ の場合より高調波のピークがはっきりしていることである。これは、振幅が大きくなるにつれモデルの非線形項の影響が大きくなり、振動が正弦波から変形した振動に変化していくことに原因がある。これは出力が不安定化するとき起きる副次的な効果であり、線形安定性の判別と直接関連づけることはできない。

これらの方法の他に、時系列データの値の度数分布関数を比較する方法が考えられる。時系列データが十分長ければ、この分布関数は不変確率測度 $p(x)$ （2.4節参照）の1次元空間への射影に等しい。この射影が単峰ならば線形安定で、双峰ならばリミットサイクル的と考えることができる。この方法は理論的には正しいが大きな欠点が存在する。それは、仮に度数分布関数において単峰が観測された場合、度数分布をとるときの刻み幅を小さくしていけば、単峰が双峰に見えるのではないかという疑問が生じる。しかし刻み幅を小さくしていけば、オン・ライン監視のような有限の比較的短い時系列データをあつかっている場合には、統計的な信頼性が失われてしまう。よってこの方法はあまり有効ではない。

以上のように従来型の監視方法では線形安定性の監視をすることは困難である。

4.4 線形安定しきい値におけるSOCIの変化

リミットサイクルの軌道を表現するには最低2次元の状態空間があればよい。よって、2つの時系列デー

タを2次元に埋め込むことによって比較すれば、2つの時系列データの相違点がより明確になると期待される。図4.4は上記2つの50,000点の時系列データの一部を2次元空間に埋め込むことによって得られた軌道である。この時、(2.25)式における遅れ時間 σ は0.5sで周期の1/4程度に設定されている。2.5節の調和振動子の例でわかるように、このように遅れ時間をとれば軌道が円形に近くなり見やすい。これらの図形は近似的にアトラクターと考えることができる。2つのアトラクターにおいて軌道の中心が中空になっている。この中空はその中心付近に存在する固定点が不安定化したことを示している。ただし、(a)では時系列データを長くしていけばその中空は軌道によって塗りつぶされてしまうが、(b)では時系列データを長くしても中空のままである。また、アトラクターの大きさの違いは振幅の違いに起因している。このように、決定論的な性質が違えばアトラクターも違ってくるので、この性質を利用して未知のデータを判別できそうである。しかし、実際のオン・ライン監視においては、有限の比較的短い時系列データを解析しなくてはならないので、埋め込まれた軌道を視覚的に監視して稠密型か、中空型かを見分けることは図4.4で示されたように困難である。

次に、2つの時系列データから得られたSOCIを図4.5に示す。これらのグラフより、 $\kappa/\kappa_0=0.99$ ではプラトーとピークはなく単調減少関数になっており、全体的に埋め込み次元 d が増えていっても収束しないことがわかる。すなわち、図4.1(a)のグラフが再現されている。 $\kappa/\kappa_0=1.01$ の場合には、図4.1(b)のグラフが再現されている。以上のことにより、図4.1で観察されたホップ分岐によるSOCIの変化には再現性があることがわかる。

図4.5(b)の右端のピークは図4.5(a)と図4.5(b)の2つのグラフの明確な相違を表す点である。このピークがどのようにしてグラフ上に形成されるかを説明したのが図4.6である。いま、線形安定しきい値をこえた運動に対応する中空型のアトラクターのSOCIを考える。ただし、埋め込み次元 d は十分に大きいとして考慮の対象から外す。(2.27)式における x_i^d を図4.6(a)のように固定し r を r_1 から徐々に大きくしていく。 $r_1 < r < r_2$ では、 $Bx(r)$ にはいる軌道上の点の数が r に比例して増えるので、SOCIはほぼ1になりプラトーを形成する。しかし $r_2 < r < r_3$ では、 r がアトラクターの径に達してしまい、 $Bx(r)$ にはいる点の数が急激に増える。そして $r < r_3$ では、 $Bx(r)$ にはいる点の数はもはや増えないのでSOCIの値は0になる。よって $r_1 < r < r_2$ でピークが形成される。一方、稠密型のアトラクターには、上記の理由からピークは現われない。すなわち、ピークはアトラクターが線形安定な稠密型か線形安定でない中空型かを見分けるための指標になっている。よって、時系列データからSOCIを計算することにより線形安定性の監視を行なえる。

実際に、SOCIをオンライン監視に応用する場合には、図4.5からわかるように収束性を確認しなくてもピークを確認することで充分であり、それを表すのに十分に大きい埋め込み次元 d での一本のSOCIのグラフを示せばよい。幸いなことに、我々は出力振動についてBWRで0.3~0.5Hz、NSRRにおいて約0.2Hzとい

うように起こりうる周波数のおおよその値を知っている。それ以下の周波数（すなわちそれ以上の周期）をもつ運動の決定論性質を論じる必要はない。よって、最大の遅れ時間は期待される周期 T の1/4程度にしておけばよい。すなわち(2.25)式における d を

$$(d-1)\tau \equiv \frac{T}{4} \quad (4.8)$$

にしておく。ただし、 τ は時系列データのサンプリング周期である。ここで注意しなければいけないことは、最大の遅れ時間を σ でなく d によって設定することである。SOC1は軌道のフラクタル次元なので空間の次元すなわち埋め込み次元以上には大きくなる。例えば、図4.4の軌道をつくる時は2次元の埋め込みで σ を長くしたが、この場合 r が小さい領域でSOC1の値は高々2であり、 r が大きい領域のSOC1と明確に区別できるほど大きくなる。一方、(4.8)式のように σ を小さくして d を大きく設定すれば、出力振動による決定論性と、雑音による確率論性を同時に観察できる。図4.7(a)は、図4.5(a)、(b)から $d=20$ の曲線のみを取り出し比較したものである。1つの曲線を比べるだけでピークの出現が観察され、 r が小さい領域で値が十分1より大きくなっていることがわかる。

ここまで、SOC1のグラフの横軸 r を、アトラクターの最大直径が1になるように規格化して表してきた。これは情報次元が時系列データの振幅のスケールの絶対値ではなく相対値によって議論されるためである。また、データ処理のアルゴリズムも時系列データの振幅の大きさによって変える必要がなく、この規格化は情報次元を求める際に一般的に採用されている。しかし、図4.7(a)のように異なった時系列データを1つの図で比べる場合には少々問題がある。1つはアトラクターの大きさの絶対値がわからないことである。また、SOC1のグラフで r の小さい領域での値は確率的雑音によって引き起こされていることはすでに述べたが、同じ雑音を入れたにもかかわらず、図4.7(a)の r の小さい領域において、SOC1の値が互いに異なっていることである。この理由は簡単で、最大直径が大きい例えば $\kappa/\kappa_0=1.01$ の場合には、規格化のため雑音レベルが相対的に小さく見えてしまうせいである。直感的判断が求められる監視システムへの応用においては、この性質は都合が悪い。このような理由から、通常行われているように個々に規格化するのではなく、規格化定数を固定したほうが監視システムとして利用しやすい。定常状態から100%の出力変位を1とするように共通の規格化定数を決定し、得られたSOC1を図4.7(b)に示す。このようにすると、グラフの左半面は共通の確率論的領域になり、雑音レベルが同じであることの実と良く対応する。右半面は κ の値によって変化することから決定論的性質を表す領域であることがわかる。以下では、図4.7(b)の表現を標準的なSOC1の表現方法とする。

SOC1の表現方法が最適化されたので、ここでSOC1について改めて物理的説明を加える。(2.27)式より、SOC1はアトラクター上の任意の2点の距離相関の強さを測っていることが理解できる。 $\kappa/\kappa_0=0.99$ のときは

固定点が安定なので $r=0$ において相関が最も強く、 r が大きくなるにしたがって相関が弱くなっていく。このことが図4.7(b)の $\kappa/\kappa_0=0.99$ の場合のグラフが単調減少であることに対応している。 $\kappa/\kappa_0=1.01$ の場合のグラフにはピークが現われるが、このピークの位置はアトラクターの相関長であり、時系列データにおいては振動の振幅に対応している。このことは図4.6のピークの説明からもうなずける。よって、SOCIは線形安定性の監視を行なうと同時に、不安定化してリミットサイクルが生じている場合にはその場合の動特性指標である振幅の大きさも表すことができる。このようにSOCIは単にデータ処理のテクニックではなく物理的背景に支えられており、その結果は一般性があり解釈は容易である。

以上、線形安定しきい値におけるSOCIの変化について説明したが、以下では補足的な確認を行なう。図4.8は雑音レベルによってSOCIが如何に変化するかを示したグラフである。雑音レベルの変化によっても、決定論的性質の変化によっても振幅は変化するが、両者の変化はSOCIを用いれば互いに明確に区別できる。また、図4.9はSOCIのグラフの時間不変性を確認している。時間的に連続した150000点の時系列データを作り、最初の50000点を過渡的データとして廃棄し、残りの2つの50000点のデータから得られたSOCIを $\kappa/\kappa_0=0.99$ および $\kappa/\kappa_0=1.01$ の場合のそれぞれについて比較している。図から、グラフの変化は微小であり、上で議論したSOCIの性質は時間不変であることが確認される。

4.5 実データへの適用例

厳密に言えば、時系列解析によって時間不変な結果を得るためには、無限に長い定常な時系列データが必要である。しかしながら、現実に出力振動がおきている原子炉から得られる信号は時々刻々変化しており、上記のような無限に長い定常な時系列データを利用することは不可能である。また我々は、経験上限られた長さの時系列データからでも、パワースペクトル密度関数やARモデルの同定によって実用的に意味のある情報が得られることを知っている。この考え方をSOCIにも適用することにより、4.4節で得た結果をオンライン炉心監視へそのまま応用する。

オンライン監視に時系列データ解析を応用するためには、測定されたデータを区分分割しなくてはならないが、分割するデータ長をいくつにするかが問題になる。あまりデータが長すぎると結果の速報性が失われ、あまり短すぎると結果の統計的信頼性が失われる。このような場合には経験的にそれを決定するしかない。トライ・アンド・エラー形式の試験の結果、周期が5回程度データに入るように設定すれば、あまり信頼性を失わずに速報性も維持できることが確認された。起こりうる出力振動の周期は予測でき、例えばBWRではそれは2秒程度であり、データ長は少なくとも10秒程度、NSRRでは周期は約4秒であるので

積分時間は最短でも20秒程度必要である。以下では、NSRRで生じた出力振動を例にとり、SOC1のオンライン監視への応用を議論する。

図4.10(a)はNSRRから得られた中性子束信号の一例である。サンプリング周期は0.0625sで、全体の長さは4096点(256秒)である。これを8個の32秒の時系列データに区分分割し、それぞれについてデータ処理をすることにする。この場合のデータ長は上の経験上の最短データ長より十分長い。図4.11はそれぞれのブロックに対してSOC1を求めたものである。第3ブロックではピークが明瞭に見えているが、その他のブロックではピークは見えていない。この結果をそのまま解釈すると、第3ブロックで定常状態が一時的に不安定化したことになるが、データ長を考えれば、「不安定化の傾向にあった」という程度の解釈にとどめるのが自然である。よって、この例においてはほぼ全体的に線形安定性が満たされており、これまでの考察の結果に従えば、減幅比(DR)を監視指標に選ぶことが可能である。各ブロックの時系列データからARモデルを同定し、同定されたモデルのインパルス応答関数から減幅比を求めた結果を図4.10(b)に示した。これからわかるように、ブロック3を中心として信号の前半部で減幅比が上昇しているのが見て取れ、減幅比は安定性の指標としてよくその役割を果たしていることがわかる。

しかしながら、減幅比からはわからない特徴の変化もある。例えば、図4.10(a)における確率的な揺らぎ成分がブロック8においてブロック7よりも大きくなっている。しかし、減幅比ではその変化をとらえることができない。一方SOC1(図4.11)においては、ブロック8の値が全体的にブロック7のそれより明らかに大きくなっている。これは図4.8において示したように、揺らぎ成分がブロック8においてブロック7よりも大きいことを示している。

次にもう少し出力振動が発達した状態を例にとる。図4.12(a)は、NSRRにおいて図4.10(a)に比べてマスターサーボシステムのゲインをやや高めに設定した時に得られた出力振動である。時系列データを一見すると連続的な振動になっている。前の例と同様に、8ブロックにわけてデータ処理をする。図4.13は図4.12(a)に対応したSOC1のグラフである。ほぼ全体的にピークが観測されるが、ピークの存在しないブロックやあまりピークのはっきりしないブロックもあり、このデータは全体的に線形安定しきい値前後の状態のものと考えることができる。この様な場合にはSOC1のピークの明瞭さや位置を監視するのが、観測される現象に適した方法である。まず、図4.13のブロック7におけるグラフではピークが観測されていない。すなわち、このブロックの信号に限って言えばリミットサイクルとは見なせないという結果である。図4.12(a)の時系列データを見れば、確かにブロック7でその前のブロックまで続いてきた出力振動のモードが1度消えて別の振動モードが発生しているように見える。このモードはすぐ消えてまたもとの振動モードが現われている。また図4.13において、ブロック3のグラフのピークはあまり明瞭ではないが、これはブロック3の信号において振幅の揺らぎが大きく、明確なりミットサイクルとみなせないことが原因であ

る。

図4.12(b)はそれぞれのブロックに対する減幅比である。減幅比は約0.7前後の値で時間とともに変化しているが、その変化を振動の時間的変化と直接関係付けることは困難である。特にブロック8では減幅比が低下しているが、このような結果を生む必然性は時系列データの中には見いだせない。結果としてこの例は減幅比が0.7程度であっても線形的な方法が破綻してしまうことを示している。

上記のSOCIの計算には約14MIPS(Mega Instructions Per Second)の計算能力を有するワークステーションを利用している。上記データ長の場合、1つのブロックのSOCIの計算時間は5秒以下である。この計算時間は十分オンラインで使用できる範囲に入っている。

4.6 まとめ

出力振動時、徐々に安定性が失われていくにつれて、従来から主に使われてきた安定性監視指標である減幅比の機能が低下していくことが知られている。この原因は、出力振動が非線形であるのにもかかわらず、減幅比が線形的な解析方法に基づいて計算されることにある。本章では、時系列データから埋め込み法によって近似的に不変確率測度を計算し、その距離相関関数の積分の傾き(SOCI)を出力振動監視に応用する方法を開発した。この手法は非線形動力学を基礎にしており、線形動力学的方法では診断できない線形安定性を監視できるだけでなく出力振動の振幅や確率的揺らぎ成分も監視できることが確認された。またこの手法による結果の物理的解釈は容易であり、技術者や研究者が監視方法として習得しやすい。今後、減幅比等の従来方法と本手法を併用することにより、出力振動の強力な監視システムを構築することができると期待される。

第4章の参考文献

- 1) Suzudo T., Hayashi K. and Shinohara Y.: A Methodology of Nuclear Reactor Monitoring and Diagnostics Using Information Dimension – Application to Power Oscillation, J. Nucl. Sci. Technol., 30[8], 727(1993).
- 2) Upadhyaya. B. R. and Kitamura M.: Stability Monitoring of Boiling Water Reactors by Time Series Analysis of Neutron Noise, Nucl. Sci. Eng., 77, 480(1981).
- 3) March-Leuba J. and Smith C. M.: Development of an Automated Diagnostic System for Boiling Water Reactor

Stability Measurements, Prog. Nucl. Energy, 15, 27(1985).

4) Suzudo T.: Reactor Noise Analysis Based on Nonlinear Dynamic Theory - Application to Power Oscillation, Nucl. Sci. Eng., 113, 145(1993).

5) March-Leuba J.: A Reduced-Order Model of Boiling Water Reactor Linear Dynamics, Nucl. Technol., 75, 15(1986).

6) March-Leuba J. and Cacuci D. G. and Perez R. B.: Nonlinear Dynamics and Stability of Boiling Water Reactors: Part 1 -Qualitative Analysis, Nucl. Sci. Eng., 93, 111(1986).

7) Sandoz S. A. and Chen S. F.: Vermont Yankee Stability Tests During Cycle 8, Trans. Am. Nucl. Soc., 45, 754(1983).

8) Muñoz-Cobo J. L. and Verdú G.: Application of Hopf bifurcation Theory and Variational Methods to the Study of Limit Cycle in Boiling Water Reactors, Ann. nucl. Energy, 18, 5, 269(1991).

9) 中溝高好、信号解析とシステム同定、コロナ社(1988).

表4.1 BWR出力振動モデルのパラメータ値*

パラメータ	値	単位
a_1	25.04	$K \cdot s^{-1}$
a_2	0.23	s^{-1}
a_3	2.25	s^{-1}
a_4	6.82	s^{-2}
D	-2.52×10^{-5}	K
λ	0.08	s^{-1}
β	0.0056	---
Λ	4.00×10^{-6}	s

*参考文献5)より引用

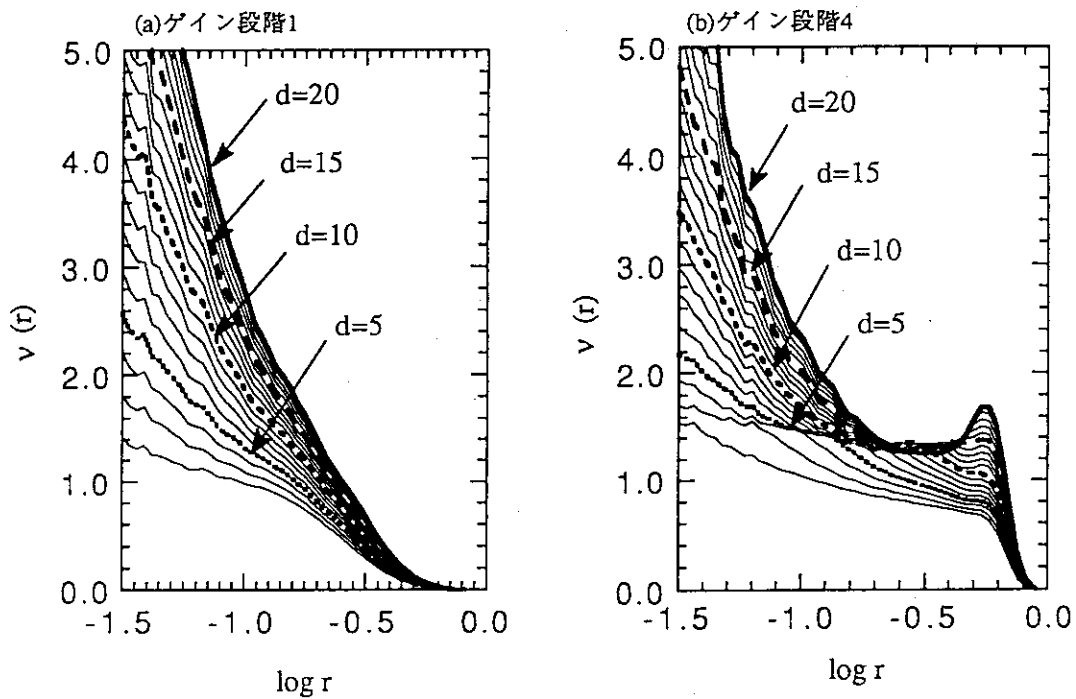


図4.1 NSRRの出力信号から得られた相関積分の傾き (SOC1) :
埋め込み次元 2 ~ 20
(b) のグラフは図3.6 と同じ

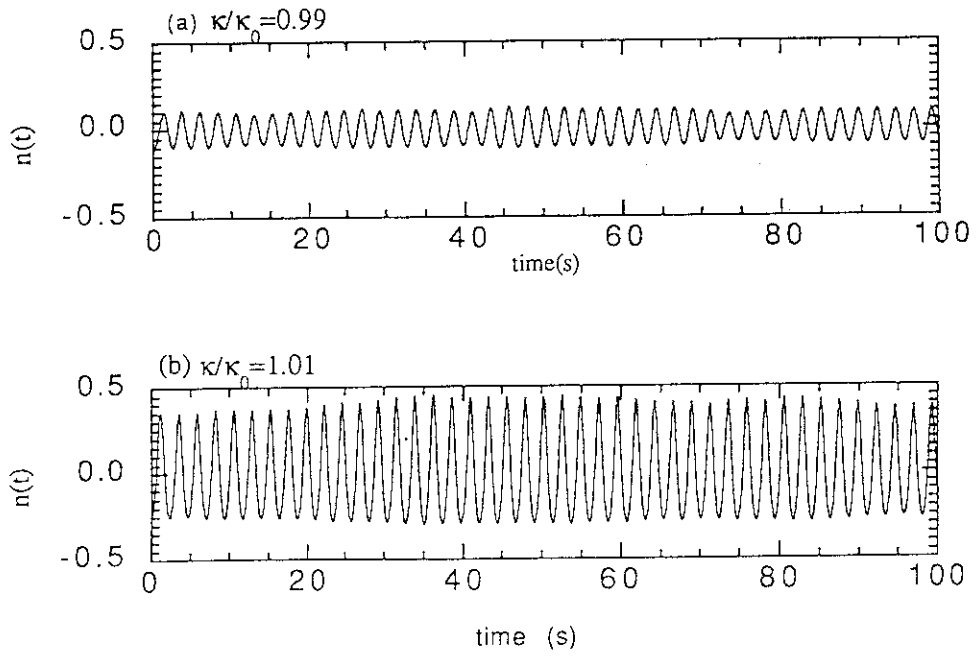


図4.2 ホップ分岐点 ($\kappa/\kappa_0 = 1.00$) 前後での中性子束信号の変化：
BWR出力振動モデルからの計算値

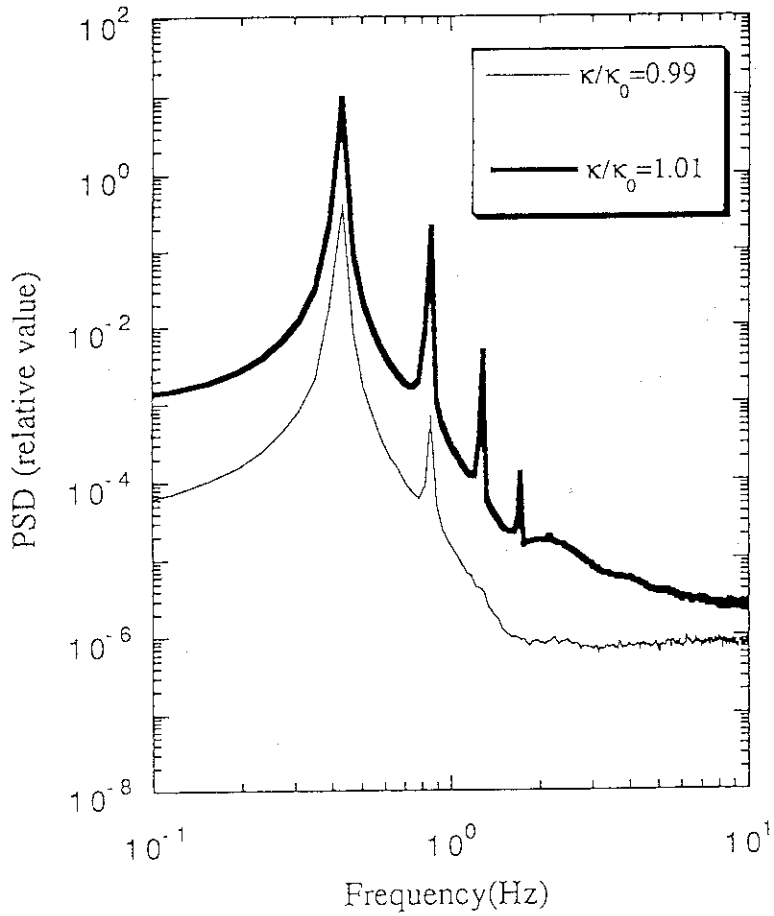


図4.3 パワースペクトル密度関数による中性子束信号の比較

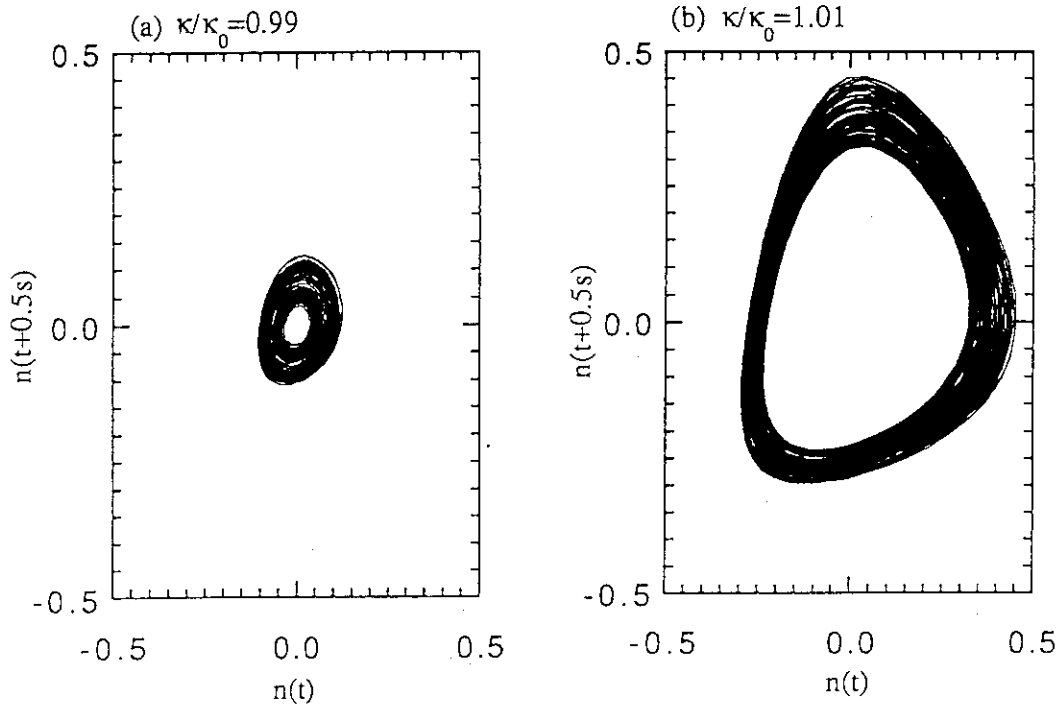


図4.4 2次元に埋め込まれた軌道による中性子束信号の比較

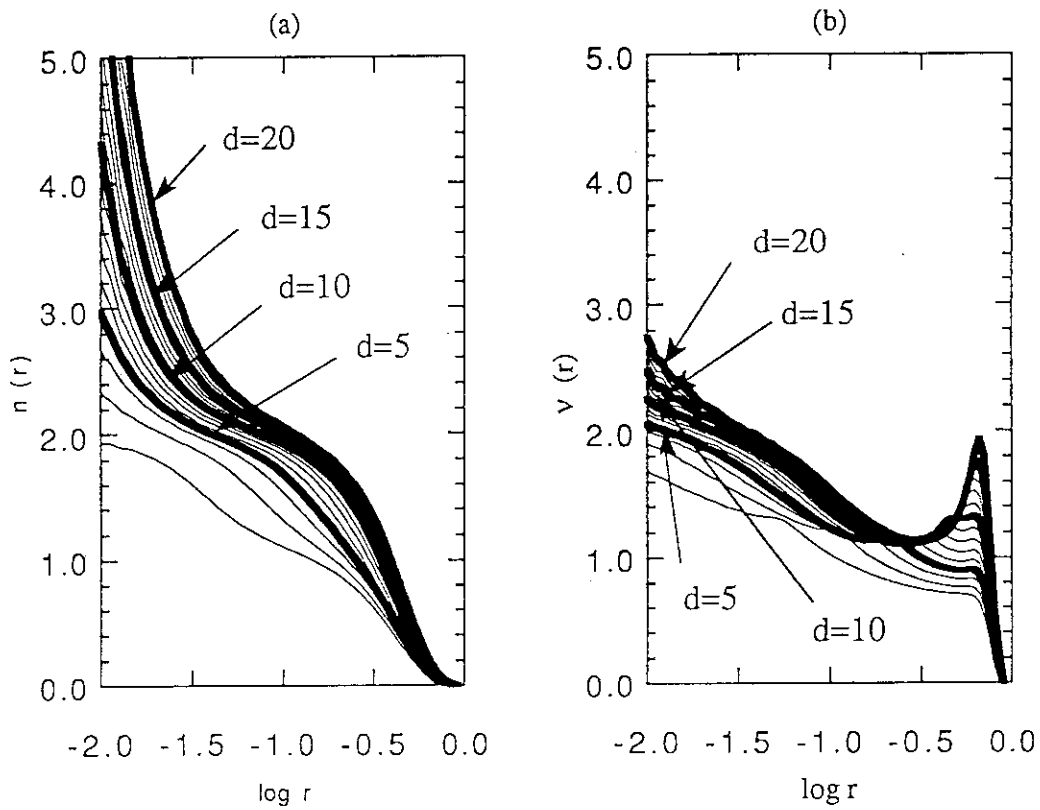
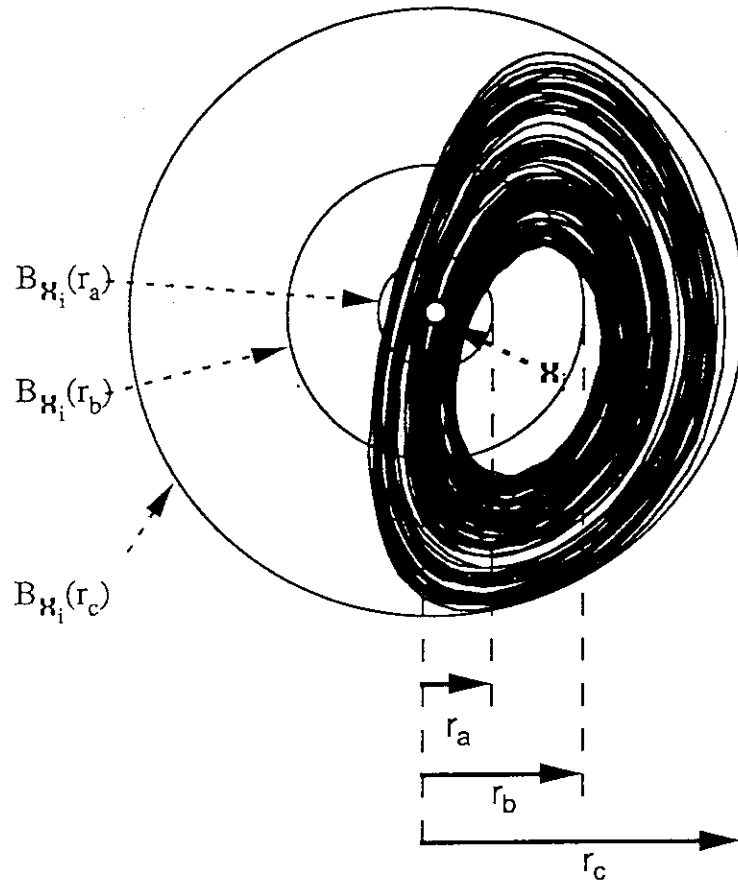


図4.5 相関積分の傾き (SOCl) による中性子束信号の比較：
 (a) $\kappa/\kappa_0 = 0.99$
 (b) $\kappa/\kappa_0 = 1.01$

(a) 確率的雑音が存在する場合の周期的アトラクター



(b) 上図のアトラクターのSOCI

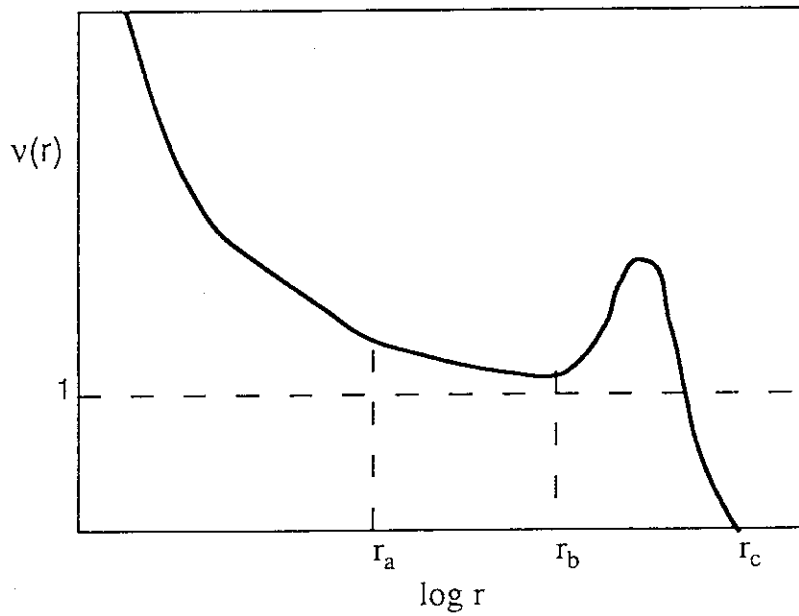


図4.6 相関積分の傾き (SOCI) に現れるピークの説明

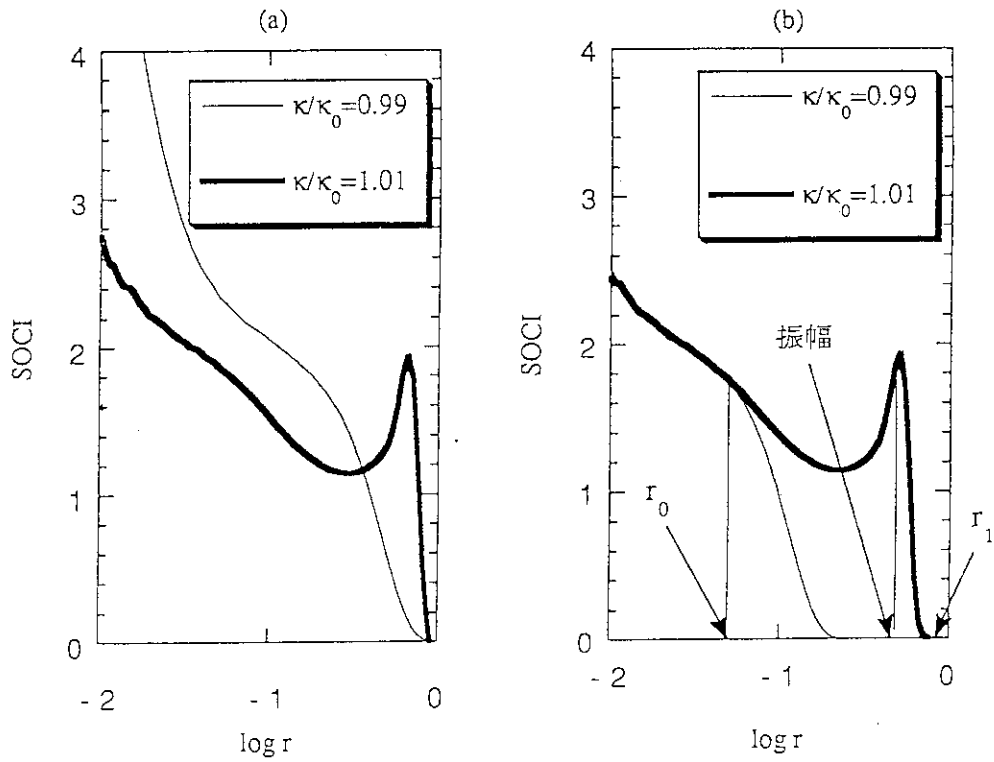


図4.7 規格化定数を共通化した時のホップ分岐点前後でのSOCIの変化
 (a) それぞれのアトラクターの最大径で規格化
 (b) 定常状態の出力で規格化

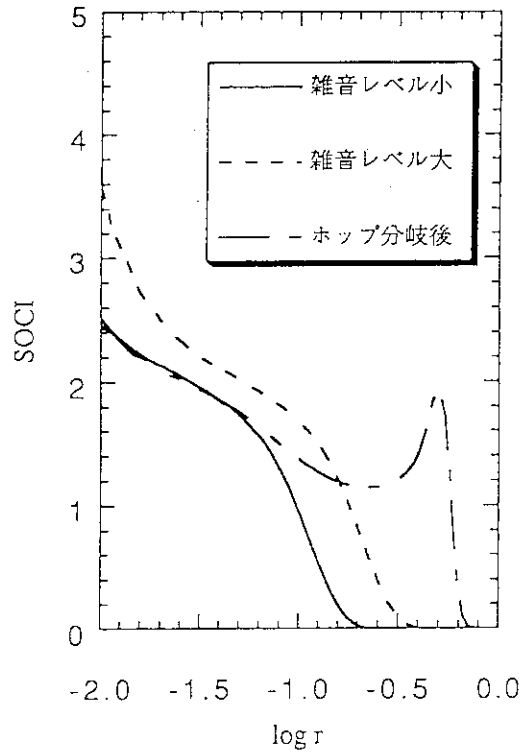


図4.8 雑音レベルの変化によるSOCIの変化と分岐現象によるSOCIの変化の比較

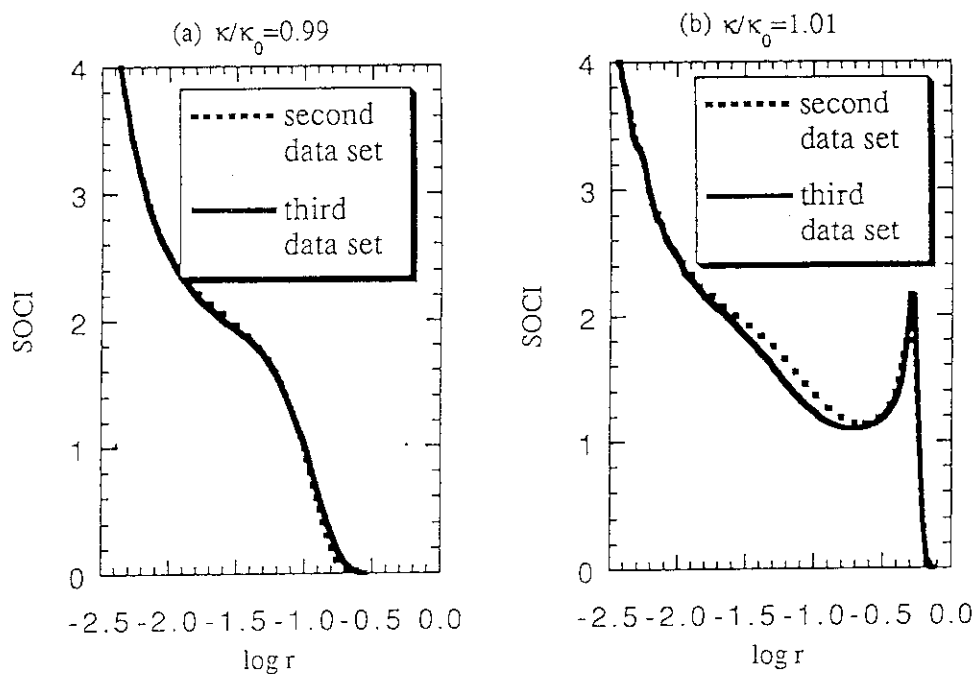


図4.9 SOCIの時間不変性の確認

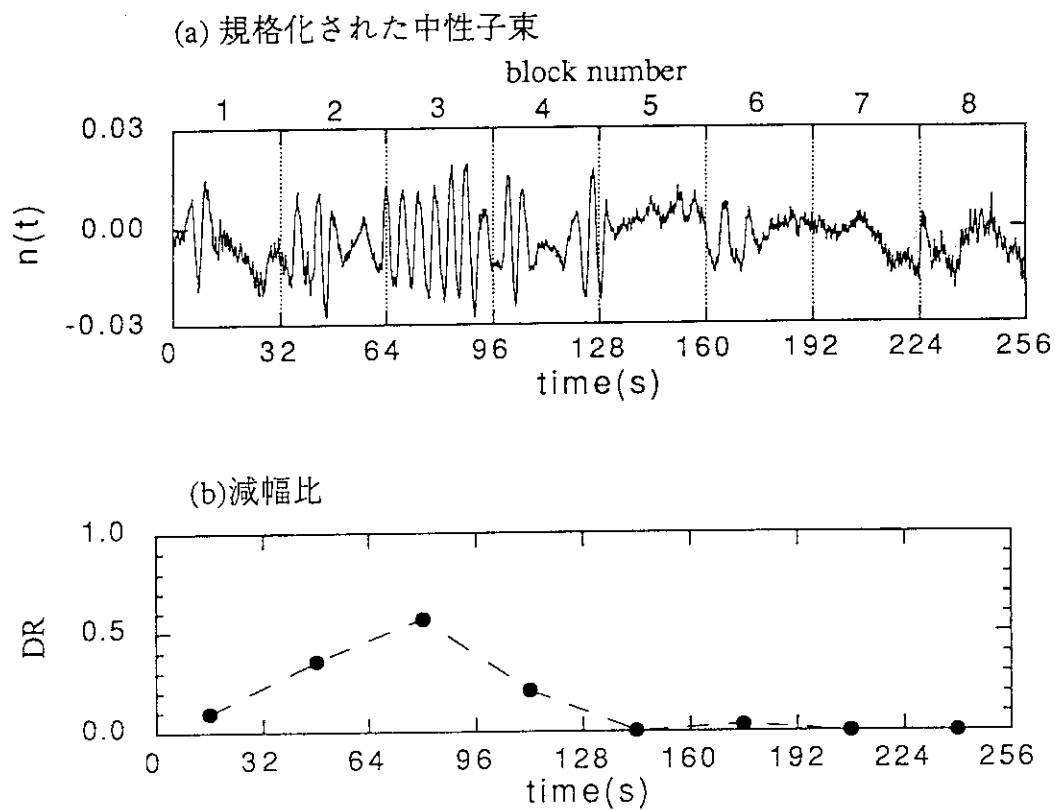


図4.10 (a) 8個の時間ブロックに区分分割されたNSRRの中性子束信号
 (b) それぞれの時間ブロックにおける減幅比

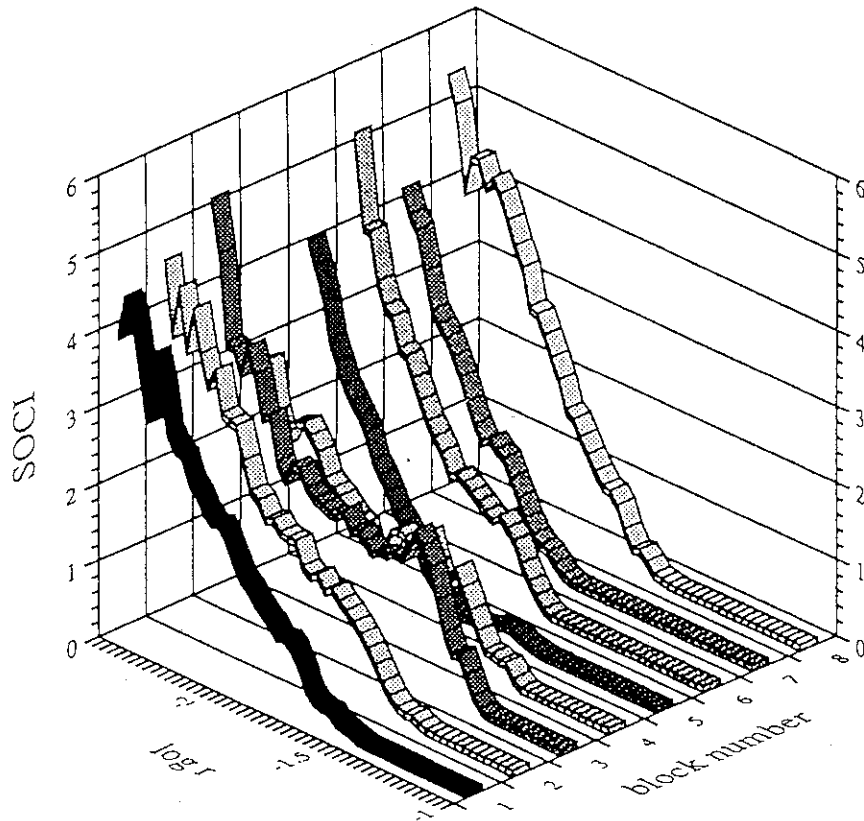


図4.11 図4.10aの時系列データの各ブロックごとのSOCI

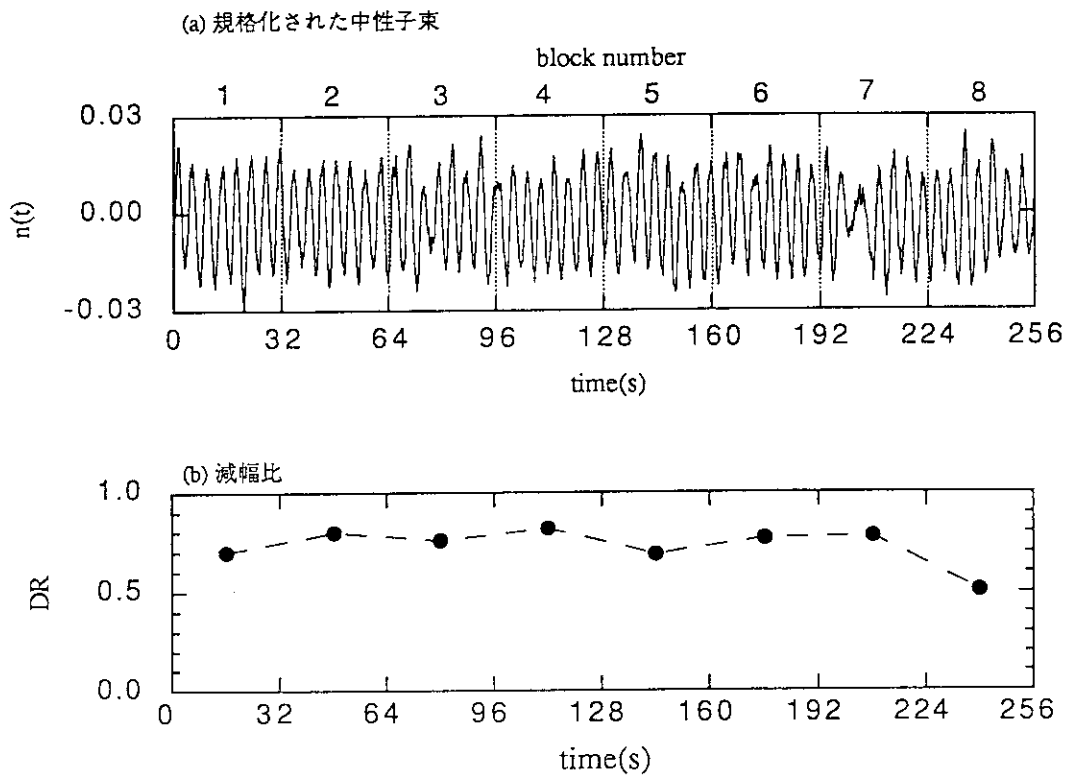


図4.12 (a) 8個の時間ブロックに区分分割されたNSRRの中性子束信号
 (b) それぞれの時間ブロックにおける減幅比

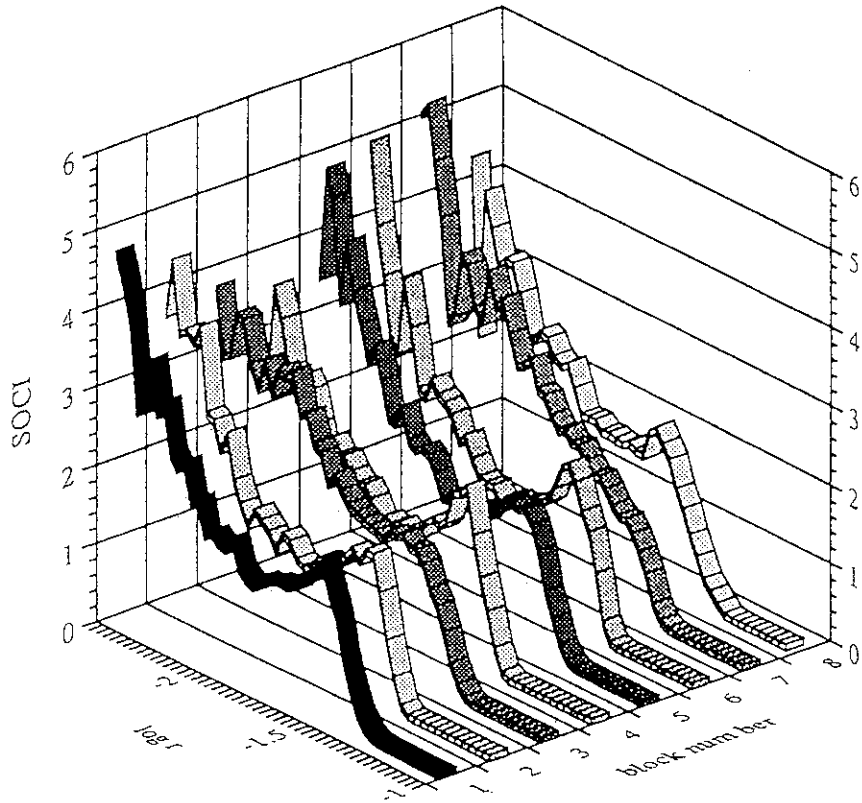


図4.13 図4.12aの時系列データの各ブロックごとのSOC I

5. 原子炉出力振動の解析的取り扱い

5.1 はじめに

原子炉の動特性をなるべく正確にモデル化しようとするれば、炉内の熱水力特性を含む物理的要素を計算機上に組み上げていき、大規模シミュレーション・コードを作らねばならない。第1章で述べたように、このような大規模シミュレーション・コードを用いたBWRの出力振動解析に関する研究が盛んに行なわれている。しかしながら、このような方法を用いて出力振動の一般的な性質を導くためには、モデルの可変パラメータを少しずつ変えながら多くのケース・スタディを行ない、それらを集約しなければならない。そのようなコードにおいては多くの物理パラメータを予め入力しなければならないため、解析に多くの労力を必要とし、また帰納的な方法論を用いているため、あるケース・スタディの欠如により重要な特性を見逃す可能性もある。そのうえ、本来なら本質的ではない空間および時間の離散化のためのパラメータの選択は常に結果に大きく影響しがちで、結果が検証しにくいという短所もある。

一方2.3節で述べたように、物理モデルが複雑でも、ある不安定なモードが存在する場合には、そのモデルを低次元の数学的モデルに近似することが可能である。この理由は、比較的安定なモードは動特性に現われず、系の時間発展はもっぱら最も不安定なモードのみに支配されるという事実に基づいている。すなわち、安定なモードは時定数が短いため動特性にはあまり影響を与えないのである。第3章で検証したように、線形安定しきい値近辺では、NSRRの出力振動は確率的成分を除けば単純なリミットサイクルであることがわかる。BWRの出力振動も同様であると予想される。よって、その物理モデルとほぼ等価な動特性を持ったモデルは、非常に低次元で表現できる筈である。このような低次元のモデルを定量的な解析に用いることはできないが、解析的な取り扱いによって定性的な解析ができる。様々な条件下でのモデルの挙動を知りたいとき、パラメータを文字変数として表しておくだけで演繹的な結果が得られる。解析的取り扱いにおいては、動特性とパラメータの関係は非常に明確になり、現象の直感的な理解に役立つという長所がある。

前章で紹介したように、マーチ・ルーバらは低次元化された原子炉出力振動モデルとして5次元の方程式を提案しているが、そのリミットサイクル運動の解析は時間領域での数値解析に留まっている。またムニョス・コボ²⁾らは、中心多様体定理を用いてこのモデルのホップ分岐現象を解析している。しかし彼らの結果は、モデルの次数が5次元であることから、最終的にはパラメータの値を代入するいわゆる数値的

な解析に留まっている。以上2つの研究は低次元モデルの有利さを十分に生かしているとは言えない。本章では、一点炉動特性方程式をさらに簡略化し、それとマーチ・ルーバらのモデルの反応度フィードバック方程式と組み合わせることにより3次の非線形時間発展方程式を導く。これは定性的に原子炉出力振動の発生メカニズムを模擬している最低次の方程式である。この方程式を用いて、線形安定条件やリミットサイクルの安定性に深くかかわっている弱安定条件等が解析的に示される。これらの結果は原子炉出力振動を定性的に理解するのに有用である。

5.2 簡略化された原子炉出力振動モデル

5.2.1 中性子動特性部分の簡略化

初めに、次のような一点炉動特性方程式を考える。

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N + \lambda C \quad (5.1)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} N - \lambda C \quad (5.2)$$

前章で述べたように、出力振動の周波数はある範囲内に限定して考えることができる。例えばBWRでは0.3~0.5Hzであり、NSRRでは0.2~0.3Hzである。よって出力振動の周波数は0.2~0.5Hzと考えておけばよい。このような周波数領域では即発跳躍近似 (Prompt Jump Approximation) が使えて(5.1)、(5.2)式は以下のように簡略化することができる³⁾。

$$(\rho - \beta) \frac{dN}{dt} = -\left(\frac{d\rho}{dt} + \lambda\rho\right)N \quad (5.3)$$

前章で行ったように、中性子束 $N(t)$ を定常状態における $N(t)$ の値 N_0 によって規格化する。

$$n(t) = [N(t) - N_0] / N_0 \quad (5.4)$$

(5.4)式を(5.3)式に代入すると

$$\frac{\dot{n}}{1+n} = \frac{\dot{\rho} + \lambda\rho}{\beta - \rho} \quad (5.5)$$

を得る。周波数領域0.2~0.5Hzでは、通常の λ ($\sim 10^{-1} \text{s}^{-1}$) に対して $|\lambda\rho| \ll |\beta|$ が成り立ち、(5.5)式の時間積分を行なうとき右辺の分子から $\lambda\rho$ を消去できる⁴⁾。この操作を行なえば、(5.5)式の両辺の時間に関する積分は

$$\int_{-\infty}^t \frac{\dot{n}(\tau)}{1+n(\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\rho}(\tau)}{\beta-\rho(\tau)} d\tau \quad (5.6)$$

となる。初期条件を定常状態 $n(-\infty)=0$ 、 $\rho(-\infty)=0$ とにおいて上記積分を実行すれば

$$n = \frac{\rho}{\beta - \rho} \quad (5.7)$$

が得られる。すなわち、出力振動の周波数が0.2~0.5Hzであれば、中性子束 $n(t)$ は同時刻の反応度 $\rho(t)$ で表わすことができる。(5.7)式を用いて $n(t)$ と $\rho(t)$ の関係を図5.1のような双曲線の一部によって表すことができる。この曲線は、2.3節の表現に従えば、(5.7)式は $n(t)$ と $\rho(t)$ がつくる状態空間内の中心多様体になっている。

今、何らかの理由で反応度に周期的な変動、 $\rho(t)=\rho_0 \sin(t)$ が生じたとする。(5.7)式が成り立つとすれば $n(t)$ は $\rho(t)$ に対して位相遅れなしに周期的な変動になる。 ρ_0 が比較的小さい場合には、 $n(t)$ の挙動はほぼ正弦波状であるが、 ρ_0 が大きくなると、図5.1の非線形性が無視できなくなりその振動は変形された曲線に変わる(図5.2)。実際のBWRにおいても、Vermont Yankee炉などで観察された比較的小振幅の出力振動は正弦波状で、La Salle 2号炉でミスオペレーションからスクラムに至った時に観測された比較的大振幅の出力振動は変形された曲線である。(5.7)式はこのように実際に観測された振動波形の定性的な性質と合致している。また、このような振動波形の変形が起きると、そこから得られるパワースペクトル密度関数の高調波成分が大きくなるので、出力振動の1つの代表的な特徴である高調波の存在も(5.7)式によって定性的に説明することができる。

5.2.2 反応度フィードバックのモデリング

前章でSOClの詳細な検討を行ったとき、BWRの原子炉出力振動の動特性モデルとしてマーチ・ルーバらが提唱したモデルを用いた。このモデルのフィードバック部分は(4.5)~(4.7)式で表されているが、これらの式をまとめて、中性子束から反応度への伝達関数は線形の伝達関数 $G(s)$ として

$$G(s) \equiv \frac{p(s)}{n(s)} = \frac{a_1 k + D a_1 (s^2 + a_3 s + a_4)}{s^3 + (a_2 + a_3) s^2 + (a_2 a_3 + a_4) s + a_2 a_4} \quad (5.8)$$

と表すことができる。マーチ・ルーバらのモデルにおいて $D=0$ とにおいて数値解を求めても、この項を消去しないのと同様に振動が発生し振動の波形などの定性的性質も変わらないことが確かめられている⁹⁾。

(5.8)式で、ドップラー効果の係数 D を0とおけば、伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{-k}{s^3 + c_1 s^2 + c_2 s + c_3} \quad (5.9)$$

とおくことができる。ただし

$$k = -a_1 k \quad (5.10)$$

$$c_1 = a_2 + a_3, c_2 = a_2 a_3 + a_4, c_3 = a_2 a_4 \quad (5.11)$$

である。

通常、原子炉における出力調整は反応度の調整を通して行われる。NSRRでの実験でもわかるように、原子炉出力はフィードバック効果が小さいときは振動せず、それが増大すると振動的になる。すなわち原子炉出力振動は制御工学でよく知られたサーボ機構などに見られる不安定振動と同じく、過剰の負のフィードバックによるものである。さて、このようなフィードバック・ループの中である振動モードが減衰しないで残っていくためには、その周波数の信号がループの中で一巡した時の位相遅れが $2n\pi\text{rad}$ ($n=1,2,3,\dots$)にならねばならない。ここではなるべく簡略化されたモデルを得たいので、 $n=1$ の場合だけを考える。

(5.7)式からわかるように、中性子動特性方程式には位相遅れは存在しない。よって、その反応度揺らぎによって生じた中性子束揺らぎ成分が $G(s)$ を通過した時の位相遅れが $2\pi\text{rad}$ 、すなわち $1/(s^3 + c_1 s^2 + c_2 s + c_3)$ を通過した時の位相遅れが πrad で、すなわち位相反転しなくてはならない。以上の関係を図5.3に簡単に示した。

制御工学の理論より、 $1/s$ は周波数無限大において位相遅れの最大値($\pi/2$)radを持つことが知られている。

よって、有限の周波数で πrad の位相遅れを生じさせるためには、少なくとも s の3次の項が存在しなくてはならない。すなわち、マーチ・ルーバらのモデルのフィードバック部分は大規模コードから得られた伝達関数を精度よく再現するにもかかわらず、振動を生じさせるための最低の次元で表されていることになる。

この制御系自体は線形安定であると規定しなくてはならないので、特性方程式、 $s^3 + c_1 s^2 + c_2 s + c_3 = 0$ の根の実数部がすべて負であるという条件より、

$$c_1, c_2, c_3 > 0 \quad (5.12)$$

$$c_1 c_2 c_3 > 0 \quad (5.13)$$

という条件を付加する。(5.9)式を以下のように微分方程式の形に書き換えることができる。

$$\ddot{p}(t) + c_1 \dot{p}(t) + c_2 \dot{p}(t) + c_3 p(t) = -kn(t) \quad (5.14)$$

即発跳躍近似から得られた中性子動特性方程式(5.7)を(5.14)式に代入して $n(t)$ を消去すれば

$$\ddot{p}(t) + c_1 \dot{p}(t) + c_2 \dot{p}(t) + c_3 p(t) + \frac{kp(t)}{\beta - \rho(t)} = 0 \quad (5.15)$$

が得られる。第2章で述べたように、ホップ分岐点付近においてすべての安定なモードを消去できる。よって(5.15)式はホップ分岐点付近という条件付きではあるが、出力振動の表現としてまだ一般性を失ってはいない。

同様に $p(t)$ を消去して $n(t)$ の式を得ることもできるが、その場合には非常に複雑な式になってしまう。また、 $n(t)$ は正弦波的でないので後の理論的考察において近似が使いにくくなる可能性がある。よって、簡略化された原子炉出力振動方程式として、(5.15)式のような $p(t)$ に関する3次の非線形微分方程式を提案し、解析することにする。

5.3 定常状態の線形安定性

2.1節ですでに示したように、ある動力学系がその1つの固定点の周りで線形安定かどうかを知るには、固定点における系のJacobianの固有値の実数部分の符号を知るだけで十分である。固有値問題を解くことは、それに対応する特性方程式を解くことである。4次方程式まではその解析解が一般的に存在するので、簡略化出力振動モデルの線形安定性の条件を4つのパラメータ k 、 c_1 、 c_2 および c_3 によって演繹的に与えることが可能である。

実際に固有値を計算する前に、モデルを表す(5.15)式を(2.1)式のような標準形に変形したい。(5.15)式の左辺の最後の項はテーラー展開によって

$$\frac{kp(t)}{\beta - \rho(t)} = \frac{kp(t)}{\beta} \left(\frac{1}{1 - \rho(t)/\beta} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k\rho(t)}{\beta} \left(1 + \frac{\rho(t)}{\beta} + \left(\frac{\rho(t)}{\beta} \right)^2 + \dots \right) \\
&= \frac{k\rho(t)}{\beta} + k \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\rho(t)}{\beta} \right)^i
\end{aligned} \tag{5.16}$$

と変形される。この結果を(5.15)式に代入すれば

$$\ddot{\rho}(t) + c_1 \dot{\rho}(t) + c_2 \rho(t) + \left(c_3 + \frac{k}{\beta} \right) \rho(t) + k \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\rho(t)}{\beta} \right)^i = 0 \tag{5.17}$$

を得る。これでモデルの線形項と非線形項が明確に別れた。(5.17)式を標準形に変形するために以下の2つの変数 $u(t)$ および $v(t)$ を定義する。

$$u(t) \equiv \dot{\rho}(t) + c_1 \rho(t) \tag{5.18}$$

$$v(t) \equiv -\frac{1}{\sqrt{c_2}} \dot{u}(t) \tag{5.19}$$

これらの新しい変数を用いれば(5.17)式は

$$-\sqrt{c_2} \dot{v}(t) + c_2 u(t) + \left(c_3 - c_1 c_2 + \frac{k}{\beta} \right) \rho(t) + k \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\rho(t)}{\beta} \right)^i = 0 \tag{5.20}$$

となる。(5.18)~(5.20)式において微分を含んだ項を左辺に移項することにより、モデルは以下のように変形できる。

$$\dot{u} = -\sqrt{c_2} v \tag{5.21}$$

$$\dot{v} = \sqrt{c_2} u + \mu \rho + \frac{k}{\sqrt{c_2}} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\rho(t)}{\beta} \right)^i \tag{5.22}$$

$$\dot{\rho} = -c_1 \rho + u \tag{5.23}$$

ただし、ここに $\mu = (c_3 - c_1 c_2 + \frac{k}{\beta}) / \sqrt{c_2}$ である。(5.21)式~(5.23)式を1まとめにして以下のように表すことも可能である。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{5.24}$$

ここに

$$\mathbf{x} = [u, v, \rho]^T \tag{5.25}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} -\sqrt{c_2}v \\ \sqrt{c_2}u + \mu\rho + \frac{k}{\sqrt{c_2}} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\rho(t)}{\beta} \right)^i \\ -c_1\rho + u \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

である。これは2.1節の最初に示した非線形動力学系の標準的な表現である。

この動力学系において原点は固定点になっており、定常運転状態に対応する。その固定点におけるDF(0)の固有値 λ は

$$|DF(0) - \lambda I| = 0 \quad (5.27)$$

を解くことにより得られる。(BWRの出力振動モデルにおいて λ を遅発中性子先行核崩壊定数とおいたが、ここからさきはDF(0)の固有値を表すものとする。) (5.26)式を(5.27)式に代入して

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_1c_2 + \mu\sqrt{c_2} = 0 \quad (5.28)$$

が得られる。さて3次の解の公式を使って(5.28)式を厳密に解くこともできるが、そうすると解が非常に複雑になってしまう。我々が知りたいのは固有値の実数部の符号であるので、ここでは以下に示すように近似的な解法によって解くことにする。さて3つの固有値は μ に依存しているので、それらを実数部が大きいものの順に $\lambda_1(\mu)$ 、 $\lambda_2(\mu)$ および $\lambda_3(\mu)$ とおく。(5.28)式は $\mu=0$ の場合には簡単に解けて

$$\lambda_1(0), \lambda_2(0) = \pm i\omega, \lambda_3(0) = -c_1 \quad (5.29)$$

となる。ここに $\omega = \sqrt{c_2}$ である。よって系は $\mu=0$ において線形安定から不安定へ移る臨界状態にあることがわかる。よって、 $\mu=0$ 近傍で $\lambda_1(\mu)$ 、 $\lambda_2(\mu)$ および $\lambda_3(\mu)$ の μ の1次の項までの近似値を計算する。さて $\mu=0$ における固有値に対する固有ベクトルは(5.29)式からただちに計算できて、 $[i\omega + c_1, \omega - ic_1, 1]^t$ 、 $[-i\omega + c_1, \omega + ic_1, 1]^t$ および $[0, 0, 1]^t$ となる。これらの固有ベクトルを基底とした新しい座標系は

$$[\bar{u}, \bar{v}, y]^t = T^{-1}[u, v, \rho] \quad (5.30)$$

によって得られる。ただし

$$T = \begin{bmatrix} \omega i + c_1 & -\omega i + c_1 & 0 \\ \omega - c_1 i & \omega + c_1 i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2\xi^2} \begin{bmatrix} -\omega i + c_1 & \omega + c_1 i & 0 \\ \omega i + c_1 & \omega - c_1 i & 0 \\ -2c_1 & -2\omega & 2\xi^2 \end{bmatrix} \quad (5.30')$$

$\xi^2 = c_1^2 + \omega^2$

である。この座標変換により(5.21)～(5.23)式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= \left\{ \frac{\omega\mu}{2\xi^2} + \left(\omega + \frac{c_1\mu}{2\xi^2}\right)i \right\} \bar{u} + \frac{(\omega + c_1 i)\mu}{2\xi^2} (\bar{v} + y) + \text{high-order terms} \\ \dot{\bar{v}} &= \left\{ \frac{\omega\mu}{2\xi^2} - \left(\omega + \frac{c_1\mu}{2\xi^2}\right)i \right\} \bar{v} + \frac{(\omega - c_1 i)\mu}{2\xi^2} (\bar{u} + y) + \text{high-order terms} \\ \dot{y} &= -\left(c_1 + \frac{\omega\mu}{\xi^2}\right)y - \frac{\omega\mu}{\xi^2} (\bar{u} + \bar{v}) + \text{high-order terms}\end{aligned}\quad (5.31)$$

(5.31)式の各式の右辺第1項から、 $\mu=0$ 近傍での $\lambda_1(\mu)$ 、 $\lambda_2(\mu)$ および $\lambda_3(\mu)$ の近似値が以下のように求まる。

$$\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu) = \frac{\omega\mu}{2\xi^2} \pm \left(\omega + \frac{c_1\mu}{2\xi^2}\right)i \quad (5.32)$$

$$\lambda_3(\mu) = -\left(c_1 + \frac{\omega\mu}{\xi^2}\right) \quad (5.33)$$

(5.32)式より、 μ が分岐変数になっており、 $\mu < 0$ では定常状態に対応する系の固定点は線形安定であることがわかる。 μ の定義を用いてこれを書き直せば

$$c_1 c_2 - c_3 > \frac{k}{\beta} \quad (5.34)$$

で固定点は安定である。このようにして簡略化原子炉出力振動モデルの線形安定性の条件をそのパラメータによって陽に表すことができる。(5.13)式と(5.34)式を比較すると、 $G(s)$ の安定条件は系全体の線形安定条件の必要条件になっていることがわかる。一般的に $G(s)$ の安定条件はみたされると考えられるため、線形安定しきい値でのこの動力学系の漸近解の変化は図5.4のように表すことができる。BWRにおいて炉心流量が低下するにつれて中性子束変化に対するボイド率変化が大きくなる。すなわち、 k が大きくなっていく。よって図5.4で示したように $c_1 c_2 c_3$ は単に $G(s)$ の安定性を規定するだけでなく、低流量状態で線形安定であるための余裕度であるとみなすことができる。

以上のような線形安定性に関する一般的な結果は数値的な手法では得られないことを付記しておく。また、参考文献6)で行なっているように、大規模シミュレーション・コードの反応度フィードバック効果を(5.8)式の形にフィッティング等で表すことができれば、パラメータ変換の式(5.10)、(5.11)および(5.34)式を用い、通常非常に時間がかかる時間領域の数値解析を行なわないで線形安定条件を試験することができる。

5.4 非線形項の評価

前節で解析したモデルでは、 $\mu=0$ においてDF(0)は共役な純虚数の固有値 $\lambda_1(0)=i\omega$ と $\lambda_2(0)=-i\omega$ をもち、その他の固有値の実数部は0または正でない。さらに、 $\mu=0$ において $\text{Re}[\lambda_1(\mu)]$ と $\text{Re}[\lambda_2(\mu)]$ の符号が変化する、すなわち、複素平面上で $\lambda_1(\mu)$ と $\lambda_2(\mu)$ の軌道が虚軸を左から右へ横切る。このように固有値が変化すると、動力学系の安定な固定点は不安定化し振動運動が誘発される。第2章で述べたように、このような系の漸近的性質の変化をホップ分岐と呼ぶ。

さて、5.3節で述べたように、モデルの線形安定性はその線形項のみに依存している。これに対して、ホップ分岐後のリミットサイクル運動を解析するにはモデルの非線形項を考慮しなくてはならない。以下では非線形項がリミットサイクル運動にどのようにかかわっているかを明らかにしていく。

非線形項は分岐変数 μ にあまり強く依存していないため、その評価には(5.21)~(5.23)式に $\mu=0$ を代入したモデル方程式（すなわちホップ分岐点におけるモデル方程式）、

$$\dot{u} = -\omega v \quad (5.35)$$

$$\dot{v} = \omega u + \frac{k}{\omega} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\rho(t)}{\beta} \right)^i \quad (5.36)$$

$$\dot{\rho} = -c_1 \rho + u \quad (5.37)$$

を用いることができる。ここに $\omega = \sqrt{c_2}$ である。第2章で述べたように、ホップ分岐点に近い系は中心多様体定理によって近似的に系の次数を減らすことができる。我々がここで扱っている系もそのような観点から低次元化されたモデルであるが、ここでそのモデルにもう一度中心多様体定理を用い系の次数を減らすことを考える。まず、これらの式を中心多様体定理を応用するための標準的な形に変換する必要がある。

(5.30)式の T^{-1} の第3行より

$$y = \rho - \frac{c_1}{\xi^2} u - \frac{\omega}{\xi^2} v \quad (5.38)$$

が成り立つ。ただし $\xi^2 = \omega^2 + c_1^2$ である。(5.38)式を用いて(5.36)式と(5.37)式から ρ を消去することにより

$$\dot{u} = -\omega v \quad (5.39)$$

$$\dot{v} = \omega u + \frac{k}{\omega} r(u, v, y) \quad (5.40)$$

$$\dot{y} = -c_1 y - \frac{k}{\xi^2} r(u, v, y) \quad (5.41)$$

を得る。ここに

$$r(u, v, y) \equiv \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta} \left(y + \frac{c_1}{\xi^2} u + \frac{\omega}{\xi^2} v \right) \right)^i \quad (5.42)$$

である。さて、(5.39)~(5.41)式を以下のように変形する。

$$\dot{x} = Bx + f_1(x, y) \quad (5.43)$$

$$\dot{y} = -c_1 y + f_2(x, y) \quad (5.44)$$

ここに $x = [u, v]^T$ 、 $B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$ 、 $f_1(x, y) = [0, (k/\omega)x]^T$ 、 $f_2(x, y) = -(k/\xi^2)x$ である。また(5.42)式から原点において f_1 と f_2 の値とそれらの微分はそれぞれ0になることがわかる。(5.43)、(5.44)式は中心多様体定理を説明するために使った(2.17)式と同じ形式であることに注意されたい。中心多様体 $y = h(x)$ は(2.22)式を満足しているので、0次および1次の項はない。 x が原点に近い場合、3次以上の項は無視できて

$$h(x) = c_{uu} u^2 + c_{uv} uv + c_{vv} v^2 \quad (5.45)$$

とおくことができる。また(2.21)式より、 $h(x)$ は以下の式を満足する。

$$Dh(x)[Bx + f_1(x, h(x))] = -c_1 h(x) + f_2(x, h(x)) \quad (5.46)$$

(5.45)式を(5.46)式の左辺に代入すれば

$$\begin{aligned} & [2c_{uu}u + c_{uv}v, 2c_{vv}v + c_{uv}u] [-\omega v, \omega u + \dots]^T \\ & = c_{uv}\omega u^2 + 2\omega(c_{vv} - c_{uu})uv - c_{vv}\omega v^2 + \text{high-order terms} \end{aligned} \quad (5.47)$$

となり、右辺に代入すれば

$$\begin{aligned} & -c_1(c_{uu}u^2 + c_{uv}uv + c_{vv}v^2) - \frac{k}{\beta^2\xi^6}(c_1^2u^2 + 2c_1\omega uv + \omega^2v^2) + \text{high-order terms} \\ & = (-c_1c_{uu} - \frac{kc_1^2}{\beta^2\xi^6})u^2 + (-c_1c_{uv} - \frac{2kc_1\omega}{\beta^2\xi^6})uv + (-c_1c_{vv} - \frac{k\omega^2}{\beta^2\xi^6})v^2 + \text{high-order terms} \end{aligned} \quad (5.48)$$

となる。(5.47)式と(5.48)式の u^2 、 uv および v^2 の係数がそれぞれ等しいとおけば

$$\begin{aligned}
c_{uv}\omega &= -c_1c_{uu} - \frac{kc_1^2}{\beta^2\xi^6} \\
2(c_w\omega - c_{uu}\omega) &= -c_1c_{uv} - \frac{2kc_1\omega}{\beta^2\xi^6} \\
-c_{uv}\omega &= -c_1c_w - \frac{k\omega^2}{\beta^2\xi^6}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

を得る。(5.49)式を c_{uu} 、 c_{uv} および c_w に関して解けば、

$$\begin{aligned}
c_{uu} &= -\frac{k(c_1^4 + 2\omega^4)}{c_1\beta^2\xi^6(c_1^2 + 4\omega^2)} \\
c_{uv} &= -\frac{2k\omega(2c_1^2 - \omega^2)}{\beta^2\xi^6(c_1^2 + 4\omega^2)} \\
c_w &= -\frac{k\omega^2(5c_1^2 + 2\omega^2)}{c_1\beta^2\xi^6(c_1^2 + 4\omega^2)}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

が得られる。結局、中心多様体 $y=h(x)$ は以下のように求まる。

$$h(x) = -\frac{k}{c_1\beta^2\xi^6(c_1^2 + 4\omega^2)} \left\{ (c_1^4 + 2\omega^4)u^2 + 2c_1\omega(2c_1^2 - \omega^2)uv + \omega^2(5c_1^2 + 2\omega^2)v^2 \right\} \tag{5.51}$$

(5.51)式は変数 y が同時刻の u および v によって表すことができることを示している。よって(5.51)式を(5.43)式に代入すれば

$$\dot{u} = -\omega v \tag{5.52}$$

$$\dot{v} = \omega u + g(u, v) \tag{5.53}$$

となる。ここで $g(u, v)$ を u および v に関して3次の項まで計算すれば以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
g(u, v) &= \frac{k}{\omega} \left\{ \left(\frac{c_1u + \omega v}{\beta\xi^2} \right)^2 + \left(\frac{c_1u + \omega v}{\beta\xi^2} \right)^3 \right\} \\
&\quad - \frac{2k^2}{c_1\omega\beta^4\xi^8(c_1^2 + 4\omega^2)} \{ c_1(c_1^4 + 2\omega^4)u^3 + (5c_1^2 + 2\omega^2)\omega^3v^3 \\
&\quad + \omega(5c_1^4 - 2c_1^2\omega^2 + 2\omega^4)u^2v + 9c_1^3\omega^2uv^2 \}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

以上のように中心多様体定理によってホップ分岐点での系の挙動を表す式を周期が

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{c_2}} \quad (5.55)$$

の調和振動子に非線形項が加えられた形の2次元の連続系の時間発展方程式に簡略化することができた。

(5.54)式において、 k は共通因数になっている。 $\mu=0$ において $k=\beta(c_1c_2c_3)$ が成り立つので $G(s)$ の安定境界点 $c_1c_2c_3=0$ において非線形項 $g(u,v)$ は0である。 $c_1c_2c_3$ の値は線形安定の余裕度を表すだけでなく、線形安定性が破れたときの非線形項の値にも大きく影響することがわかる。

5.5 定常状態の弱安定性

(5.52)および(5.53)式のような形で表された動力学系をシステムティックにnormal formと呼ばれる

$$\dot{r} = d_1 r^3 + d_2 r^5 + \dots \quad (5.56)$$

$$\dot{\theta} = \omega + e_1 r^2 + e_2 r^4 + \dots \quad (5.57)$$

のような式に変形することができる。ここに d および e は(5.52)、(5.53)式の ω および g から決定できるパラメータである。normal formを導出するために必要な一連の座標変換について付録3で概説することにして、ここではその結果のみを用いる。normal formの利点は系の動的性質が、振幅を支配する方程式、すなわち(5.56)式と、振動周波数のずれを支配する方程式、すなわち(5.57)式に分離されていて物理的な理解が容易であることである。

ここで安定性に関わっているのは(5.56)式である。もし $d_1 < 0$ であれば振幅は3次の項によっておさえられるため、系の固定点の線形安定性が満たされない場合、比較的小振幅のリミットサイクルになる。 $d_1 < 0$ であるとき、「固定点は弱安定である」という。一方、 $d_1 > 0$ であれば2通りのシナリオが考えられる。1つは5次、7次またはそれ以上の項で安定化されて、比較的大振幅のリミットサイクルが出現する場合であり。2つ目のシナリオは振動を抑える様な項が(5.56)式中に現われず、発散することである。

上記のことを原子炉出力にあてはめれば、定常状態がホップ分岐により不安定化し出力振動がおきた場合でも、弱安定であればその出力振動が定常状態近くの比較的小さな振幅を有するリミットサイクル振動におさまる。弱安定条件は原子炉を設計する段階ではあまり省みられないが、非常に重要な意味がある。なぜならばこの条件が満たされる限り、仮にBWR等でミスオペレーションその他の理由で冷却水流量が低くなり定常運転状態が不安定化しても、大振幅の振動にはならず定常状態近傍の周期的な挙動におさまるからである。

さて、 d_1 は非線形項 $g(u,v)$ から以下のように計算される。

$$d_1 = \frac{1}{16}(g_{uuv} + g_{vvv}) - \frac{1}{16\omega}g_{uv}(g_{uu} + g_{vv}) \quad (5.58)$$

ここに

$$g_{uv} = \frac{\partial g(0,0)}{\partial u \partial v}, \quad \text{etc.} \quad (5.59)$$

とする。(5.54)式から(5.58)式中の偏微分を計算し(5.58)式に代入すれば

$$d_1 = \frac{k}{16\beta^3 c_1 \xi^8 \omega^2 (c_1^2 + 4\omega^2)} \phi \quad (5.60)$$

を得る。ただし、

$$\phi = c_1 \xi^2 \omega^2 (3c_1^4 + 13c_1^2 \omega^2 + 4\omega^4) - \frac{k}{\beta} (2c_1^6 + 20c_1^4 \omega^2 + 14c_1^2 \omega^4 + 8\omega^6) \quad (5.61)$$

である。ここでモデルの仮定より $k > 0$ 、 $c_1 > 0$ であるので、弱安定条件 $d_1 < 0$ は $\phi < 0$ に帰結することができる。 $\mu = 0$ と仮定したので、 $k = \beta(c_1 c_2 c_3)$ なる関係がある。これを(5.61)式に代入すれば弱安定条件より k を消去できる。また、 ξ および ω をそれぞれの定義を用いて $\xi^2 = c_1^2 + \omega^2$ および $\omega^2 = c_2$ におきかえ、弱安定条件を $c_1 \sim c_3$ のみで

$$\begin{aligned} \phi(c_1, c_2, c_3) = & c_1 c_2 (c_1^2 + c_2) (3c_1^4 + 13c_1^2 c_2 + 4c_2^2) \\ & - (c_1 c_2 - c_3) (2c_1^6 + 20c_1^4 c_2 + 14c_1^2 c_2^2 + 8c_2^3) < 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

と表すことができる。(5.62)式から $\phi < 0$ であるためには明らかに $G(s)$ の安定条件 $c_1 c_2 c_3 > 0$ が必要であることがわかる。参考文献6)で行なっているように、大規模シミュレーション・コードの反応度フィードバック効果を(5.8)式の形にフィッティング等で表すことができれば、パラメータ変換の式(5.12)~(5.13)と(5.62)式を用いれば、容易に弱安定条件を試験することができる。

5.3節で求めた線形安定条件と弱安定条件を組み合わせて、固定点近傍での系の挙動は μ と ϕ の値によって図5.5のように場合分けができる。

5.6 まとめ

本章では原子炉出力振動を解析的に取り扱うために簡略化されたモデルを導入した。このモデルは即発跳躍近似を行った中性子動特性方程式と反応度フィードバックとしての3次の線形の伝達関数からなり、全体として3次の微分方程式で表すことができる。

モデルの線形安定条件は、それが低次元であるため解析的に示すことができ、モデルのパラメータが線形安定条件にどのように関わっているのかが演繹的に示される。また、線形安定が破れたとき系が定常安定状態近くのリミットサイクル状態に留まるための条件はモデルの非線形項に依存しており、それは弱安定条件と呼ばれる。中心多様体定理とnormal formを用いれば弱安定条件も陽に示すことができる。また、反応度フィードバック自体の安定条件は上記2つの安定条件の必要条件になっていることが示された。

本章で得られた結果は原子炉出力振動を定性的に理解する上で有用であり、数値解析からでは得られないものである。

第5章の参考文献

- 1) Suzudo T. and Shinohara Y.: An Analytical Study of Nonlinear Reactor Dynamics Based on Bifurcation Theory with Reference to BWR Power Oscillation, to appear in J. Nucl. Sci. Technol..
- 2) Muñoz-Cobo J. L. and Verdú G.: Application of Hopf bifurcation Theory and Variational Methods to the Study of Limit Cycle in Boiling Water Reactors, Ann. nucl. Energy, 18, 5, 269(1991).
- 3) 例えば、須田信英：原子炉の動特性と制御、同文書院(1969).
- 4) Blázquez J., Barrio F. and Ballestrín J.: Parameters of Reduced Order Model BWR Dynamics from Neutron Noise Analysis, Proc. Symp. Nucler Reactor Surveillance and Diagnostics, Knoxville, Tennessee, May 19-24, 1991, p.7.01 (1991).
- 5) March-Leuba J. and Cacuci D. G. and Perez R. B.: Nonlinear Dynamics and Stability of Boiling Water Reactor: Part 1 -Qualitative Analysis, Nucl. Sci. Eng., 93, 111(1986).
- 6) March-Leuba J.: A Reduced-Order Model of Boiling Water Reactor Linear Dynamics, Nucl. Technol., 75, 15(1986).
- 7) Guckenheimer J. and Holmes P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag(1985).

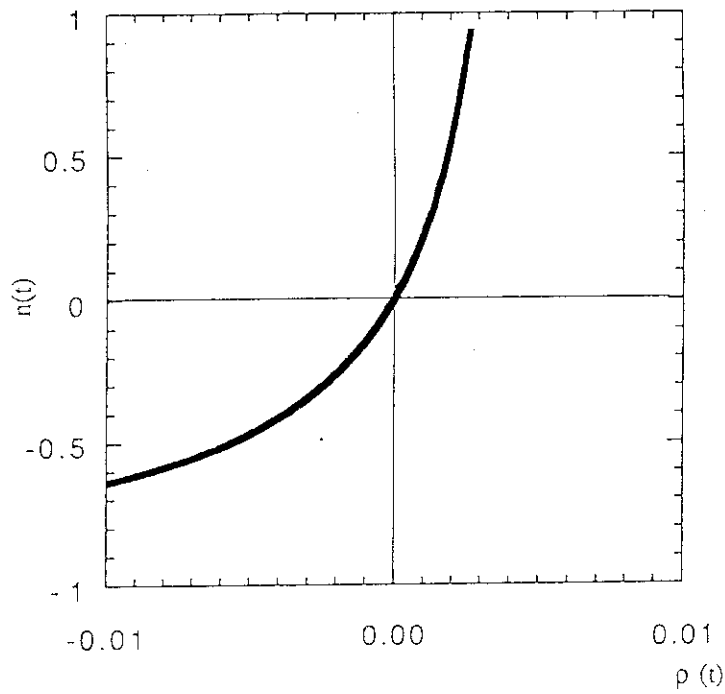


図5.1 即発跳躍近似によって得られた中性子束と反応度の関係

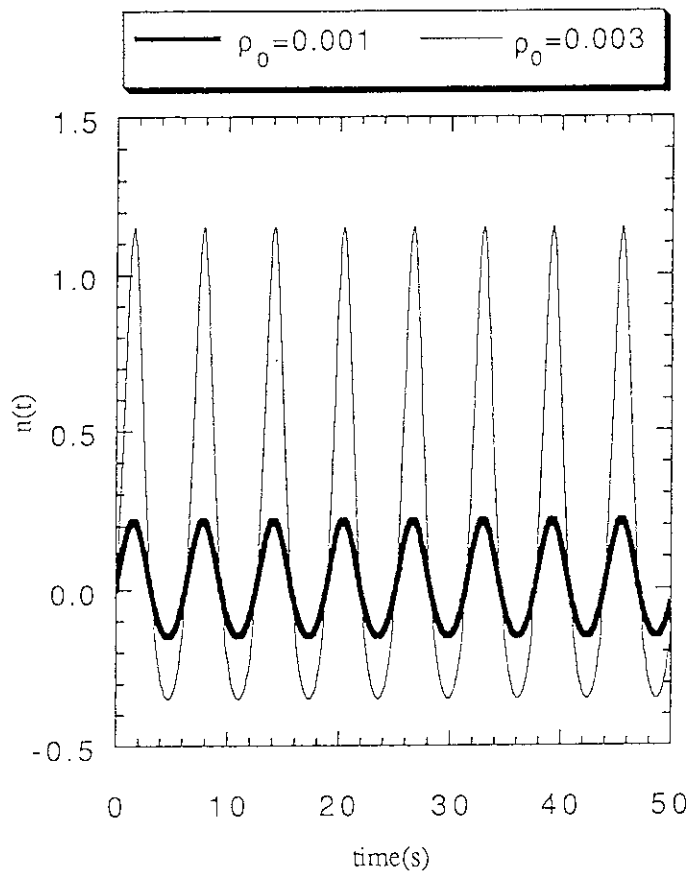


図5.2 反応度に正弦波状の外乱が加わった場合の中性子束の変動 (即発跳躍近似を適用した場合)

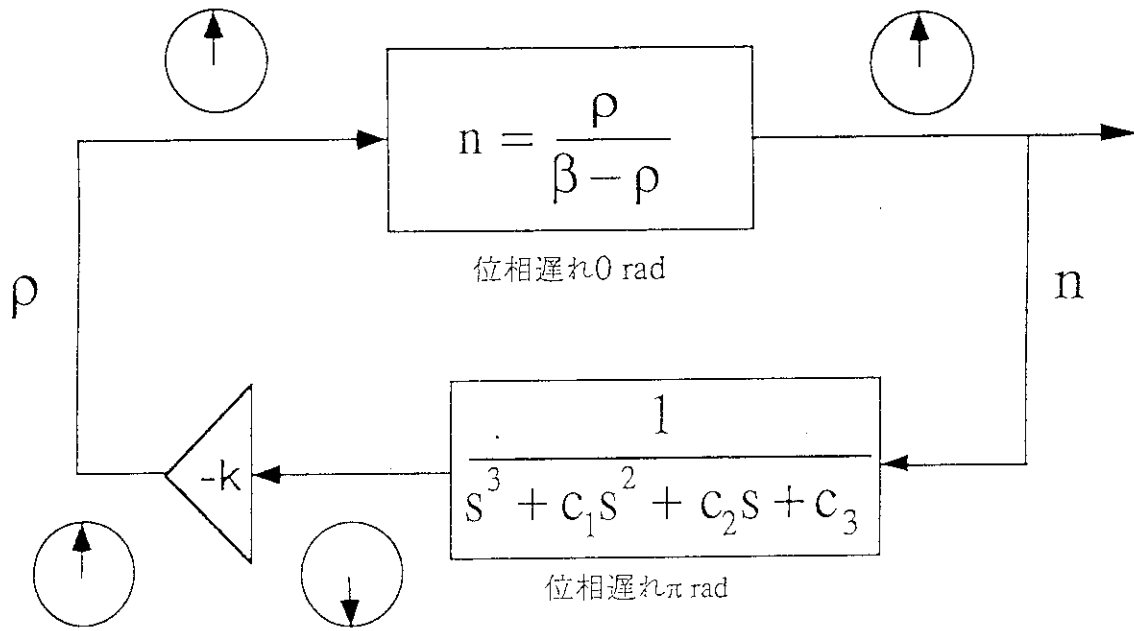


図5.3 反応度フィードバックの位相遅れと振動の発生

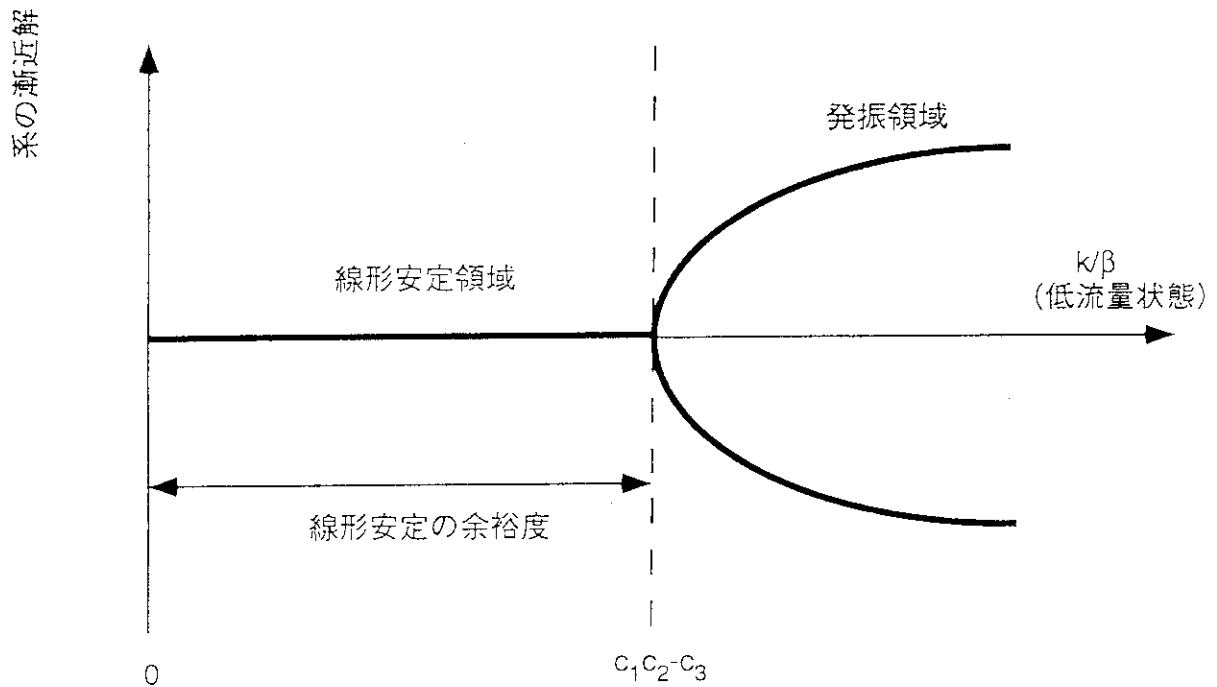


図5.4 線形安定しきい値と線形安定の余裕度

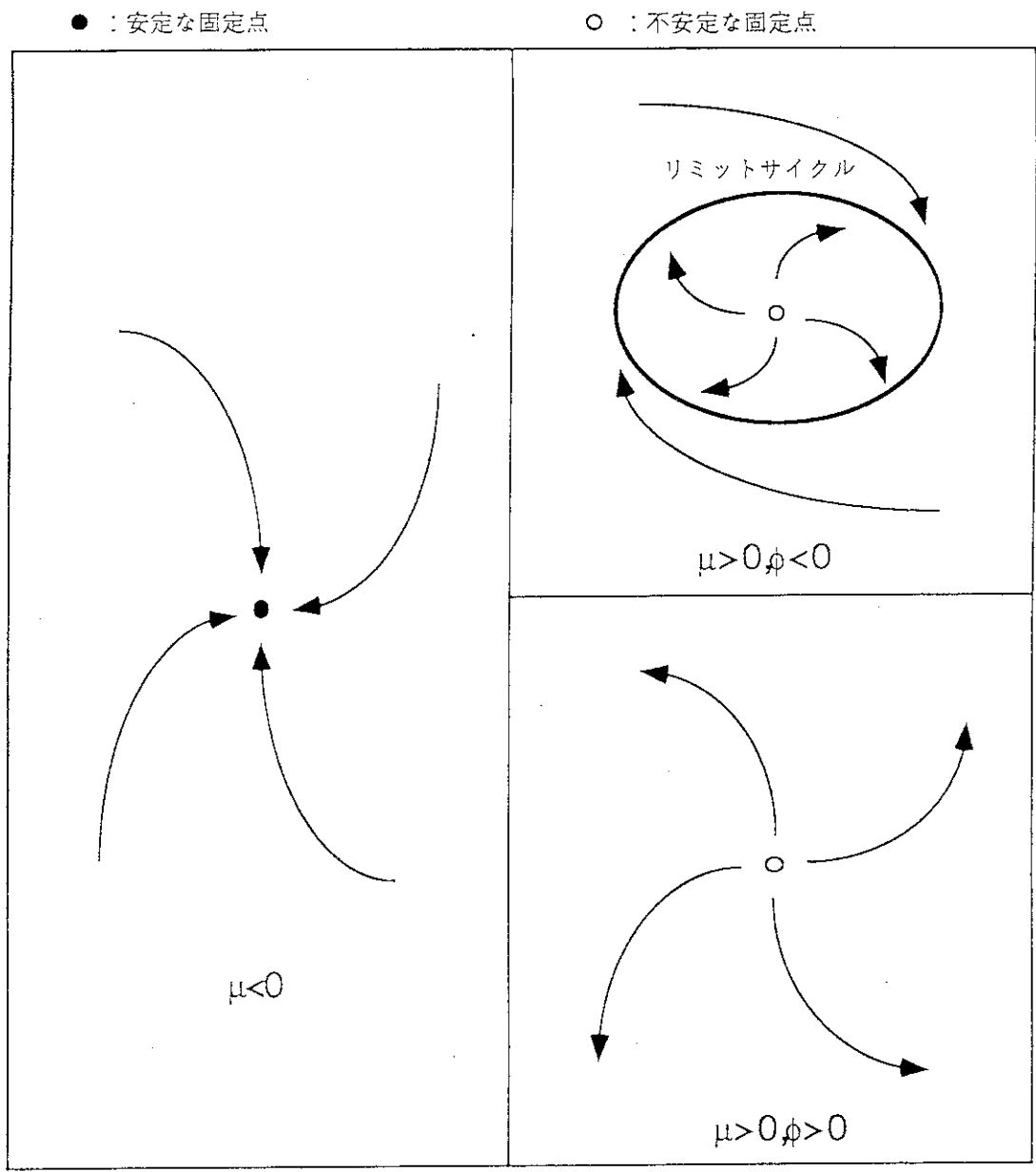


図5.5 μ が0に近い時の固定点近傍の局所的挙動

6. 結 論

従来より、原子炉出力振動の解析には線形動力学を基礎とした手法が用いられてきた。しかし、原子炉出力振動は本来非線形振動現象であり、線形的な手法には限界があることがわかってきた。このような状況を鑑み、本論文では非線形動力学理論に基づいて、原子炉出力振動を解析する方法論を包括的に検討した。

第2章では非線形振動現象の理論を概観し、原子炉出力振動の解析法の具体的方向を探った。非線形振動現象を線形のモデルで表現するには限界があるが、線形安定のしきい値であるホップ分岐点近傍で非線形振動現象は低次元で表される運動モード持つことがわかる。また、それら振動現象の低次元性を具体的に規定するため、一般化次元を用いることができ、時系列データから一般化次元の1つである情報次元を算出できる。

燃料研究用の小型原子炉であるNSRRから、改造前の炉心において奇妙な出力振動が観測されている。第3章では、この原子炉から得られた原子炉出力振動の実データの非線形動特性の同定を試みた。ここでは、ポアンカレ写像および情報次元による方法が用いられた。その結果、NSRRに生じた原子炉出力振動はリミットサイクル振動であることが明らかになった。また振動の振幅が時間的に揺らいでいるのが観察されたが、その揺らぎの規則性は発見できず、確率的雑音とみなされることがわかった。

NSRRでは、出力振動とは別に制御棒の自励振動が観測されている。この自励振動と出力振動が同時に起こった場合、非線形振動現象で特徴的である周波数ロッキング現象が起きていることが2つの振動の位相を比較することにより明らかになった。

以上のことから、非線形動力学を基礎としたデータ解析から、出力振動に関する線形的な方法からは得られない情報が得られ、その手法は解析法として有用であることがわかった。

一般的に原子炉出力の安定監視の指標として減幅比が用いられているが、その有効性の限界が問題になってきている。第4章では、時系列データから情報次元を算出するときに用いられる距離相関関数の積分の傾き (SOCi) を原子炉出力の安定監視の指標として選ぶことを提案した。定常状態が安定である場合にはSOCiは単調現象関数になるが、線形安定性が破れリミットサイクル振動が現われると、SOCiにピークが現われる。このピークの位置はアトラクター上の点の相関距離を表し、物理的には出力振動の振幅を表

している。BWR出力振動モデルから得られたシミュレーション・データを用いてその指標の有効性が試験され、線形安定しきい値の近辺では、減幅比等の他の方法に比べてSOCIによる方法が優れていることがわかった。さらに、オンライン監視を想定し、時間的に区分分割された実データの解析を行なった。その結果、監視指標として精度や実時間性に問題がないことが確認された。よって、このような手法をワークステーションまたはパーソナル・コンピュータにコード化し、実際のBWRの出力信号を十分に短い周期でサンプリングすれば、従来よりも質の高い監視が実現されるであろう。ただし、運転員が監視状況を容易に理解するため、制御盤での表示方法において少々工夫が必要であろう。

原子炉出力振動の分野では大規模モデルによる解析が盛んに行なわれている。しかし、その方法によって定量的な解析をすることは可能であるが、出力振動の発生機構や安定条件を数学的に理解するのは困難である。第5章では、一点炉動特性方程式と反応度フィードバックからなっている3次の非線形発展方程式を原子炉出力振動モデルとして提案し、それを解析的に取り扱った。このモデルを用いれば、振動の発生機構を直感的に理解することができる。また従来まで数値解析により帰納的に議論されてきた定常状態の線形安定の条件、その安定性が破れた場合のリミットサイクルの安定性に関連している弱安定条件などが、理論解析によりモデル・パラメータの関数として導出された。これらの結果により原子炉出力の安定性の定性的な見通しが改善され、原子炉出力振動の理解が深まった。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、筆者が所属する日本原子力研究所制御知能工学研究室の篠原慶邦元室長（現原子力発電技術機構）には本研究の機会を与えていただいたのみならず、終始丁寧に指導していただきました。同研究室の鈴木勝男室長には研究の進め方や論文投稿に関してご指導いただきました。同研究室の林光二氏には共同研究者として常に支援して下さいました。また、同研究室の佐々木忍氏との専門的なディスカッションは非常に有意義でした。その他の同研究室各室員には計算機等の使用において色々お世話になりました。また、黒田義輝東海大学名誉教授からの助言も本研究に有意義なものとなりました。ここに深く謝意を表します。

本論文をまとめるにあたり、東京工業大学の北沢日出男助教授、塩田進教授、三神尚教授、椛島成治教授、高橋亮一教授、堀田栄喜助教授には本論文を通読し適切な助言をしていただきました。ここに深く謝意を表します。

また、妻の協力に感謝します。

付録1 フラクタルと炉雑音解析

A1.1 フラクタルの概念

フラクタルという言葉は数学者マンデルブローによって命名された数学的な概念である。フラクタルを一言で言い表せば「特徴的な長さが存在しない図形」ということができるだろう。自然界においてフラクタルは無数に発見できる。例えば海岸線などは典型的なフラクタルの例である。我々はある未知の離島の地図を見たとき縮尺を知らずにその大きさを判断できない。これは海岸線に特徴的な長さが存在しないからである。それに対して都市の道路地図は縮尺が示されていなくともある程度その大きさを想像することができる。それは都市の道路の間隔が大雑把に言って建物数軒分の幅であるからである。すなわち都市の道路地図には特徴的な長さが存在する。

フラクタル図形は自然界だけに存在するのではなく人工的に作ることも可能である。図A1.1はコッホ曲線と呼ばれている有名なフラクタル図形である。この曲線の各所に全体の曲線の形と完全に相似な部分を見出すことができる。このような理想化されたフラクタルは自然界には存在しないがフラクタルの持つ数学的性質を説明するのに都合が良い。

「特徴的な長さが無い」ということは「拡大または縮小してもその図形の特徴が変化しない」ということに置き換えることができる。例えばある海岸線のある部分を拡大して見てもまたもとの海岸線のような図形が現われる。すなわちフラクタル図形は自己相似的であり、粗視化の度合いによってその特徴が変化しない。このことを物理の言葉で「スケーリング則が存在する」というように置き換えることができる。スケーリング則が存在する相転移現象や結晶成長過程などはフラクタルの物理学への典型的な応用分野である¹⁾。

A1.2 フラクタル次元

通常、我々が考えている次元とは空間の自由度のことだが、ある図形を相似な図形に分割することによっても次元を定義できる。例えば線分は1次元図形で相似比 $1/a$ の相似な図形 a^1 個よりなっている。正方形は2次元図形で相似比 $1/a$ の相似な図形 a^2 個よりなっている。立方体は3次元図形で相似比 $1/a$ の相似な図形 a^3 個よりなっている。これは「D次元図形は相似比 $1/a$ の図形 a^D 個よりなっている。」と一般化でき、これによっ

て定義される次元を相似性次元とよぶ。

相似性次元をコッホ曲線にあてはめてみると「コッホ曲線は相似比1/3の図形4個よりなっている」といえる。よってコッホ曲線の相似性次元Dは $4=3^D$ という関係を満たす。よって $D=(\log 4)/(\log 3)=1.2618\dots$ と求まる。すなわちコッホ曲線はその次元が1次元とも2次元とも言わず、非整数次元をもった図形といえることができる。このように非整数にまで拡張した次元はフラクタル次元または一般化次元と呼ばれている。相似性次元はその1つである。

また図形を被覆することによって次元を定義できる。あるd次元空間に描かれた図形を半径rのd次元球で被覆し、N(r)をその球の総数の最小値とする。すなわち、N(r)は無駄なく図形が被覆されたときの球の個数である。さてrが小さくなれば当然N(r)は増えていき、その割合は直感的に、図形の次元をDとすれば、Dのべきで増えていくことがわかる。すなわち

$$N(r) \propto \left(\frac{1}{r}\right)^D \quad (\text{A1.1})$$

である。この関係を利用して得られる次元Dを容量次元と呼び D_c で表す。容量次元は厳密には以下のように定義される。

$$D_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \quad (\text{A1.2})$$

コッホ曲線の容量次元を求めてみよう。図A1.2に示されたように半径1/2の円で曲線を被覆する場合にはNは1である。また、 $r=1/6$ では $N=4$ 、 $r=1/18$ では $N=16$ 、 \dots というように $r=(1/2) \cdot (1/3)^i$ のとき $N=4^i$ という関係が存在する。これを(A1.2)式に代入し $r \rightarrow 0$ のかわりに $i \rightarrow \infty$ とすれば $D_c=(\log 4)/(\log 3)$ となり相似性次元と一致する。またハウスドルフ次元 D_H も図形を被覆することによって定義される次元である。この次元は容量次元をより一般化した概念であり、その詳細は参考文献2)及び3)に委ねる。同様にコッホ曲線で $D_H=(\log 4)/(\log 3)$ となることを確かめることができる。また確率測度によって定義される次元は、本文の2.4節で述べたように情報次元と呼ばれフラクタル次元の1つである。このほかフラクタル図形がアトラクターである場合には、リアプノフ指数を用いてフラクタル次元を定義できる。これはリアプノフ次元と呼ばれており、付録2で紹介する。

A1.3 時系列データのフラクタル次元

非線形動力学系の漸近的な解曲線（アトラクター）のフラクタル次元（情報次元）を調べることによって、非線形動力学系を分類できることはすでに2.4節で述べた。よって2.5節で述べた方法で1次元時系列データから埋め込み法によって状態空間の軌道が再構成することができれば、次元測定は原子炉動特性解析の有力な手段となりうることは本文で詳細に述べた。これはある量の空間的な変動のフラクタル次元である。

これとは異なり、埋め込みを行わず、横軸時間、縦軸測定値の時系列データのグラフのフラクタル次元を考える。これはある量の時間的な変動のフラクタル次元といえることができる。たとえば、株価の1日の終値をグラフにすると測定値がランダムに変動している。次に、一か月の平均値を長い期間にわたってグラフにする。この2つのグラフを比べてみると後者のグラフは平均化したことによりかなりおとなしい動きのグラフになるような気がする。しかし実際にはそうではなく同じように測定値がランダムに変動している。即ち、サンプリング周期を変えても（すなわち観測の粗視化の度合いを変えても）その特徴が変わらない場合がある。このような変動についてフラクタル次元を定義できる。このフラクタル次元の取りうる値は時系列データの性質上、 $1 < D < 2$ である。

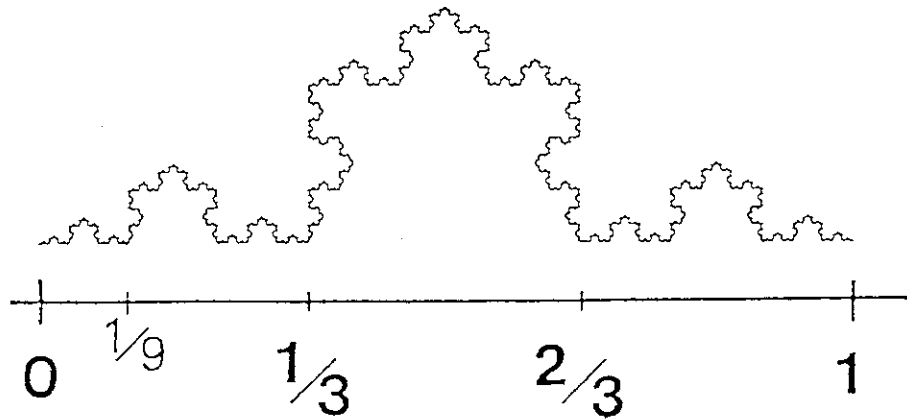
観測の粗視化の度合いを変えるということは、その時系列データの前処理過程であるローパス・フィルターのカットオフ周波数をかえることに相当する。カットオフ周波数をかえても時系列データの特徴が変化しなければパワースペクトル密度関数の特徴も変化しないので、そのようなパワースペクトル密度関数は $P(f) = f^{-\beta}$ のようなべきの形に限られる。べきの指数 β とフラクタル次元 D との間に

$$\beta = 5 - 2D \quad (\text{A1.3})$$

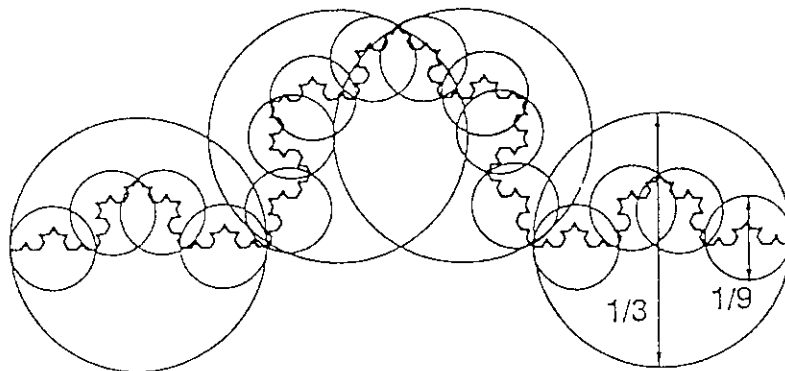
なる関係があることがわかっている。この式を用いれば1/f雑音ではほぼ $\beta=1$ でありフラクタル次元が2に近いことがわかる。またブラウン運動では $\beta=2$ であることが知られておりその時系列データのフラクタル次元 D は1.5である。このように時系列データのフラクタル次元は揺らぎに関して興味ある情報を与えてくれる。

雲などの例でわかるように、乱流はフラクタル構造をもっている。よって、乱流が発生している原子炉の冷却材循環系などから得られる圧力信号の時系列データはフラクタル的な変動をしていると期待できる。この変動のフラクタル次元を測定すれば内部状態の揺らぎに関する情報が得られるかもしれない。このように時系列データのフラクタル次元は原子炉の異常診断へ応用できる可能性がある。一般に炉雑音信号には特定の周波数成分が含まれており、揺らぎのフラクタル次元を(A1.3)式から直接求めることはできない。

今後の技術的な課題は特定周波数成分と揺らぎ成分の精度の良い分離にあると思われる。フラクタル次元を精度良く求めるのにウェーブレットを用いる方法が提案されているが、注目に値する⁴⁾。また理論的には、フラクタル的な時系列データとそうでないものとの現象論的な違い、測定されたフラクタル次元が物理量としてどのような意味を持つのかなどを解明していく必要がある。



図A 1.1 コッホ曲線



図A 1.2 コッホ曲線の容量次元の求め方

付録2 リアプノフ指数について

A2.1 リアプノフ指数の数学的意味

本文2.1節で述べたように、ある非線形動力学系において、その固定点のJacobianのすべての固有値が負の実数部を持てばその固定点は線形安定であり、(2.5)式のような線形動力学系で表すことができる。この場合、固定点近傍のある任意の2点から系を時間発展させたとしても、その2点間の距離は時間とともに縮んでいく。これに対してホップ分岐点を越えた系において、2点間の距離が縮まない方向が少なくとも1つ存在する。例えば周期的アトラクターの場合には、周期的軌道に沿った方向には2点間の距離は縮まらない。このように任意の2点間の距離の乖離や収縮を調べることによって非線形動力学系の挙動を分類できる。上記の距離の乖離や収縮の度合いを定量化したのが以下で紹介するリアプノフ指数である。

無限に近い2点が系の時間発展 t によって γ 方向に離れて（近づいて）いくとき、その距離 $d_\gamma(t)$ を

$$d_\gamma(t) \propto \exp(\lambda_\gamma t) \quad (\text{A2.1})$$

と表すことができれば、このとき λ_γ は γ 方向のリアプノフ指数と呼ばれる。厳密には、この量は以下の時間平均によって表される。

$$\lambda_\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{d_\gamma(t)}{d_\gamma(0)} \quad (\text{A2.2})$$

n 次元の状態空間では、 n 個のリアプノフ指数が $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n)$ のように定義でき、それらを一括してリアプノフ・スペクトラムと呼ぶ。

さてリアプノフ・スペクトラムは一般的に n 次元の非線形動力学系を表す式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (\text{A2.3})$$

とどのような関係があるだろうか。(A2.3)式において任意の点 \mathbf{x} からの微小変位ベクトル \mathbf{x}_d を考える。

(上記の d_γ は \mathbf{x}_d の1成分の絶対値になっていることに注意されたい。) \mathbf{x}_d を支配する方程式は(A2.3)式を \mathbf{x} において線形化することにより次のように求まる。

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{DF}(\mathbf{x})\mathbf{x}_d(t) \quad (\text{A2.4})$$

この方程式の解は

$$\mathbf{x}_d(t) = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{x}_d(0) \quad (\text{A2.5})$$

と表されたとする。ここで $\mathbf{T}^*(\mathbf{x})$ を $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ の随伴行列とすれば、 $\mathbf{T}^*(\mathbf{x})\mathbf{T}(\mathbf{x})$ は正定になりその固有値はすべて正の実数になる。これらの固有値を大きい順に $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_n$ とおくと、リアプノフ指数は

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \Lambda_i \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n) \quad (\text{A2.6})$$

と定義される。オゼルデックの乗法的エルゴード定理⁹⁾によってこの極限の存在は証明されている。

表A2.1に $n=3$ の場合の典型的アトラクターに関してリアプノフ・スペクトラムを示した。正のリアプノフ指数は、カオスの本質である初期値に対する敏感な依存性の数学的な説明になっていることがわかる。また表に次元も示したが、次元とリアプノフ指数には興味ある関係が存在する。すべてのリアプノフ指数が負であれば、状態空間上にでたらめにばらまかれた点は時間の経過とともにお互いの距離を縮めていくのですべての点は結局安定な固定点に引き込まれることになり、次元は0である。またホップ分岐がおきると1つの負のリアプノフ指数は0になる。この結果、ある1方向に関して距離が縮まなくなってしまうため次元が1つ増えることになる。すなわち次元はリアプノフ指数に深く関わっている。このような関係を一般化することにより以下のように次元を定義できる。リアプノフ指数を大きいものから k 個加算したものを $c(k)$ とおき、縦軸 $c(k)$ 、横軸 k の折れ線グラフを図A2.1のように書いたとする。その線が横軸($c(k)=0$)を横切ったときの k の値は一般に非整数でありそれをリアプノフ次元という。(これが次元であることを詳しく説明するには部分次元という少々複雑な概念を導入せねばならず、説明が長くなるので詳しくは参考文献5)を参照されたい。) すなわち、 $c(k)$ が負になる k の値で最小のものを j とおくとリアプノフ次元は

$$D_L = j - \frac{c(j)}{\lambda_j} \quad (\text{A2.7})$$

で定義される。リアプノフ次元は整数次元をもつ非カオス系はもちろん、低次元のカオス系についても情報次元と等しくなることが確かめられている。

以上のように非線形動力学系のリアプノフ・スペクトラムを求めることができれば、その一般化次元はたちどころに求まってしまうが、逆に一般化次元が求まってもそのリアプノフ・スペクトラムは一意的には決まらない。リアプノフ・スペクトラムが一般化次元より詳細な情報を有しているのか、それとも単に冗長な情報を有しているのかは筆者にはわかりかねる。いずれにせよ、リアプノフ・スペクトラムが系に

とって何を意味しているのかは理論的にも実験的にもまだ解明されているとは言い難い。

A2.2 リアプノフ指数の測定法と動特性解析への応用の可能性

リアプノフ指数をすべて決定するには、(A2.4)式を時間発展させて(A2.5)式の $T(x)$ を決定すればよいが、これは容易なことではない。というのは時間発展が正のリアプノフ指数の方向に発散してしまうからである。この問題を解決したのが島田⁶⁾らが提案した方法である。この方法は(A2.4)式の $x_d(t)$ のところに正規直交規定 $e(t)=[e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]$ をおき、それをある短い時間 τ だけ時間発展させる。時間発展させた時点のベクトルはもはや互いに直交していないのでグラム・シュミットの直交化により新しい正規直交ベクトルを求める。そしてこのベクトルの組を(A2.4)式によって再び時間発展させる。この操作のくりかえしにより、数値的なオーバーフローを避けながら(A2.6)式で要請されているような長時間の時間発展をさせることができる。この方法によりリアプノフ・スペクトラムは次のように計算される。

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\tau} \sum_{j=1}^k \ln \|e_i(j\tau)\| \quad (\text{A2.8})$$

以上のような方法は計算機シミュレーションのようにすべての状態変数が測定可能で初期条件を任意に取れる場合には有効であるが、実在の系から得られた時系列データには適用できない。この場合には埋め込み法によって再構成された軌道で、互いに隣接した軌道から(A2.5)式の $x_d(0)$ および $x_d(t)$ を得てそれらの組を多数集めることにより $T(x)$ を最適推定しなければならない⁷⁾。しかし実データの場合には、ある $x_d(0)$ に対して得られる $x_d(t)$ が $x_d(0)$ のすべて方向に対して一様分布しておらず、不安定方向のみに広がっている⁸⁾。すなわち、互いの軌道間の距離が縮む方向の運動はすでにほとんど折り込み済みであり、必ずしも負のリアプノフ指数を正しく求めることができない。また現実的には実際の系には雑音が存在し縮み方向の運動はかき消されてしまうと考えねばならない。このように我々が実際の時系列データから測定できるのは多くの場合正のリアプノフ指数のみである。正のリアプノフ指数で最も精度良く求まるのが、上の議論に従えば、最も不安定な方向のリアプノフ指数すなわち最大リアプノフ指数 λ_1 である。最大リアプノフ指数の測定法にはより簡便な方法が適用される。互いに隣接した軌道間の距離 $d(t)=|x_d(t)|$ は最も不安定な方向すなわち最大リアプノフ指数の方向に広がっていくため、(A2.2)式からの類推で次式が成り立つ。

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{d(t)}{d(0)} \quad (\text{A2.9})$$

この方法では最適推定は必要ない。さて実際に応用する場合には以下の等価表現が

$$\lambda_1 = \frac{1}{\delta t} \left\langle \log \frac{d(t+\delta t)}{d(t)} \right\rangle \quad (\text{A2.10})$$

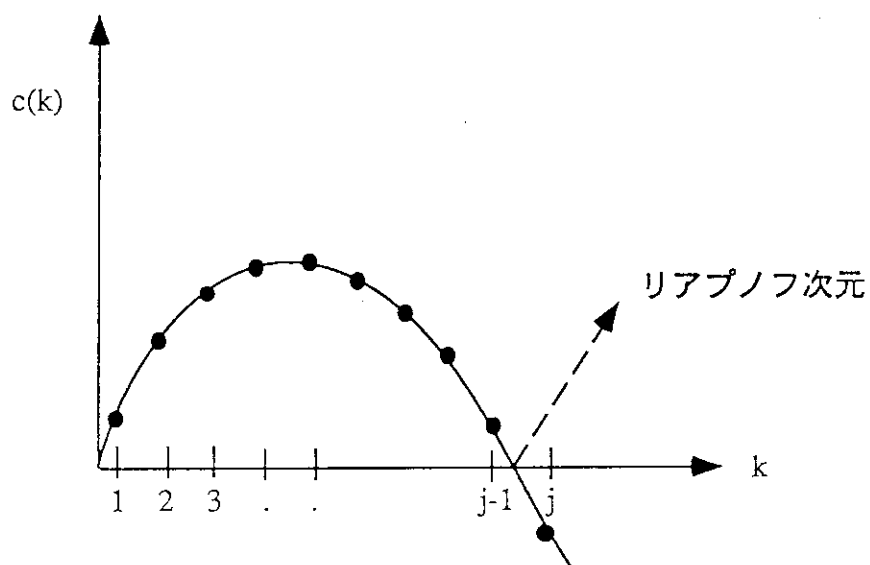
が実用的である⁹⁾。この式では微小な数 $d(0)$ による除算がなく、また時間平均がアンサンブル平均に改められている。

ここで紹介した方法は系内部や測定系に存在する確率論的雑音が元信号に対して無視できるほど小さい場合にのみ有効である。そうでない場合には以上のような方法はほとんど無力である。例えばローレンツ系に雑音を入れ時間発展させその最大リアプノフ指数を測定した例⁹⁾があるが、その値は正確にはもとまっていはいない。我々が通常炉雑音解析で扱う時系列データでは非常に確率論的雑音レベルが高い。このことはリアプノフ指数の時系列解析への応用を著しく狭めてしまう。実際、筆者らはNSRRの出力振動のデータより正のリアプノフ指数らしきものを測定した。¹⁰⁾ しかしながら本文で述べたようにその他の特徴量によってカオスの存在は、与えられたデータセットに限るなら、否定されている。すなわち低次元の運動の定性的な解析には、情報次元を測定すれば十分でありその精度はリアプノフ指数のそれに比べてかなり良い。

このように見てくると、リアプノフ指数の原子炉動特性解析への応用の接点は今のところ高次元の、すなわち空間次元を考慮した数値実験を介したもののみであると言わざるを得ない。筆者の知るかぎりではこのような研究を見たことはない。おそらくその理由は、研究成果が得られるかどうかかわからないのに大規模コード動かす場合のコストと時間がかかり過ぎることによると思われる。空間次元を考慮した数値解析の簡便な方法として、セル・オートマトン¹¹⁾やカップルド・マップ・ラティス(CML)¹²⁾等が提案されている。これらが原子炉の動特性モデルとしてどの程度現実味があるかはわからないが、その簡便さゆえリアプノフ指数ぬきにしても、検討してみる価値はあると思われる。また、昨今ソフト、ハードの両面で計算機技術がかつてない程の速さで発展しており、大規模コードを使った研究も徐々に現実的なものになっていくであろう。また、リアプノフ指数の測定法もリアプノフ指数の物理的な意味の解明と同様にまだまだ発展途上であり、今後の研究の成果いかんではその接点が大きく膨らむこともありうる。たとえば計算機技術が進めば、今まで煩雑さのためや計算時間が長すぎるため敬遠されてきた様々なデータ処理法が試験されるであろう。

表A 2.1 代表的なアトラクターのリアプノフ・スペクトラムと一般化次元

アトラクター	λ_1	λ_2	λ_3	D
固定点	-	-	-	0
周期的	0	-	-	1
準周期的	0	0	-	2
カオス	+	0	-	2より大



図A 2.1 リアプノフ次元の決定法

付録3 ホップ分岐点におけるnormal formの簡単な説明

ここでは対象としている系にすでに中心多様体定理による低次元化が行なわれたものとして、話をすすめる。そのような系では、中心多様体内のみの動特性を考えればよいので(5.52)および(5.53)式、またはより一般的には

$$\dot{u} = -\omega v + f(u, v) \quad (\text{A3.1})$$

$$\dot{v} = \omega u + g(u, v) \quad (\text{A3.2})$$

のような時間発展方程式から話を展開する。さて、上式を適当な座標変換により非線形項を低次から順番に消去していき、より簡略化された表現を得たい。ここで k を非線形項 f および g の最低次数とし、上式から k 次より大きい項を消去すれば

$$\dot{u} = -\omega v + f_k(u, v) \quad (\text{A3.3})$$

$$\dot{v} = \omega u + g_k(u, v) \quad (\text{A3.4})$$

となる。ここで座標変換

$$u = p + \phi(p, q) \quad (\text{A3.5})$$

$$v = q + \psi(p, q) \quad (\text{A3.6})$$

を考える。これらの時間微分は

$$\dot{u} = \dot{p} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} \quad (\text{A3.7})$$

$$\dot{v} = \dot{q} + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \psi}{\partial q} \dot{q} \quad (\text{A3.8})$$

となる。(A3.5)~(A3.8)式を(A3.3)および(A3.4)式に代入し、高次の項を無視すれば

$$\dot{p} = -\omega q + f_k(p, q) + \omega H(p, q) \quad (\text{A3.9})$$

$$\dot{q} = \omega p + g_k(p, q) + \omega K(p, q) \quad (\text{A3.10})$$

を得る。ここに

$$H(p, q) = -\psi(p, q) + \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial p} q - \frac{\partial \phi}{\partial q} p \right\} \quad (\text{A3.11})$$

$$K(p,q) = \phi(p,q) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} q - \frac{\partial \psi}{\partial q} p \right) \quad (\text{A3.12})$$

である。(A3.9)および(A3.10)式において非線形項が消えるように ϕ および ψ を選ぶことができれば k 次での目標は達成される。

まず最初に $k=2$ の場合を考える。このとき

$$\phi(p,q) = \alpha_1 p^2 + \beta_1 pq + \gamma_1 q^2 \quad (\text{A3.13})$$

$$\psi(p,q) = \alpha_2 p^2 + \beta_2 pq + \gamma_2 q^2 \quad (\text{A3.14})$$

$$H(p,q) = a_1 p^2 + b_1 pq + c_1 q^2 \quad (\text{A3.15})$$

$$K(p,q) = a_2 p^2 + b_2 pq + c_2 q^2 \quad (\text{A3.16})$$

とおくことができる。これらの式を(A3.11)および(A3.12)式に代入して、それらの両辺の p^2 、 pq および q^2 の係数が等しいとおけば以下の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.17})$$

上記の行列は正則であり（行列式の値は -9 ）、よって適当な ϕ および ψ をえらぶことにより2次の項はすべて消去できる。

次に、 $k=3$ の場合を考える。このとき ϕ 、 ψ 、 H および K を

$$\phi(p,q) = \alpha_1 p^3 + \beta_1 p^2 q + \gamma_1 p q^2 + \delta_1 q^3 \quad (\text{A3.18})$$

$$\psi(p,q) = \alpha_2 p^3 + \beta_2 p^2 q + \gamma_2 p q^2 + \delta_2 q^3 \quad (\text{A3.19})$$

$$H(p,q) = a_1 p^3 + b_1 p^2 q + c_1 p q^2 + d_1 q^3 \quad (\text{A3.20})$$

$$K(p,q) = a_2 p^3 + b_2 p^2 q + c_2 p q^2 + d_2 q^3 \quad (\text{A3.21})$$

とおく。 $k=2$ の場合と同じように計算し、以下の関係を得る。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.22})$$

この行列は正則ではなく、(A3.22)式を解こうとすれば、

$$3a_1 + c_1 + b_2 + 3d_2 = 0 \quad (\text{A3.23})$$

$$b_1 + 3d_1 - 3a_2 - c_2 = 0 \quad (\text{A3.24})$$

に帰着される。よって a_1 、 c_1 、 b_2 および d_2 は独立に決定することができない。 b_1 、 d_1 、 a_2 および c_2 も同様である。すなわち、いかなる座標変換によっても3次の項は消去することができない。しかしそれぞれの変数の関係（すなわち(A3.23)および(A3.24)式）でただか1自由度のみ縮退しているので、

$$f_3(p,q) + \omega H(p,q) = ap^3 - bp^2q + apq^2 - bq^3 \quad (\text{A3.25})$$

$$g_3(p,q) + \omega K(p,q) = bp^3 + ap^2q + bpq^2 + aq^3 \quad (\text{A3.26})$$

をみたく a および b を持つようにそれぞれの変数を選ぶことができる。上式を(A3.9)および(A3.10)式に代入すれば

$$\dot{p} = -\omega q + (ap - bq)(p^2 + q^2) \quad (\text{A3.27})$$

$$\dot{q} = \omega p + (aq + bp)(p^2 + q^2) \quad (\text{A3.28})$$

となり、これを座標変換 $r = (p^2 + q^2)^{1/2}$ 、および $\theta = \tan^{-1}(p/q)$ によって極座標で表現すれば

$$\dot{r} = ar^3 \quad (\text{A3.29})$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2 \quad (\text{A3.30})$$

となる。上式はホップ分岐に関する3次までのnormal formである。この一般形は(5.56)および(5.57)式になることが知られている。

付録の参考文献

- 1) 高安秀樹編著：フラクタル科学、朝倉書店(1987).
- 2) 高安秀樹：フラクタル、朝倉書店(1986).
- 3) Mandelbrot B.: *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco(1982).
- 4) Yamada M. and Ohkitani K.: An Identification of Energy Cascade in Turbulence by Orthonormal Wavelet Analysis, *Prog. Theor. Phys.*, 86, 4, 799(1991).
- 5) Eckmann J.-P. and Ruelle D.: Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, *Rev. Mod. Phys.*, 57, 3, Part-1, 617(1985).
- 6) Shimada I. and Nagashima T. : A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems, *Prog. Theor. Phys.*, 61, 6, 1605(1979).
- 7) Sano M. and Sawada Y.: Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series, *Phys. Rev. Lett.*, 55, 1082(1985).
- 8) Sato S., Sano M. and Sawada Y.: Practical Methods of Measuring the Generalized Dimension and the Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic System, *Prog. Theor. Phys.*, 77, 1, 1(1988).
- 9) Kapitaniak T.: *Chaos in Systems with Noise*, World Scientific Press, Singapore(1988).
- 1 0) Suzudo T. and Hayashi K.: Search for Chaotic Character of the Time Series of Reactor Signal, *Proc. Symp. Nuclear Reactor Surveillance and Diagnostics and Stability*, Knoxville, Tennessee, May 19-24, 1991, p.29.01(1991).
- 1 1) 武末真二：セルオートマトンと統計力学、*数理科学*、308、Feb.、33(1990).
- 1 2) Kaneko K.: Spatiotemporal Chaos in Coupled Map Lattice, *The Second Tsukuba Workshop on Chaos/Turbulence*, Jan. 16-17, 1992.