

JAERI-Research

95-009



電場型プラズマ・アンジュレーターの解析

1995年2月

鈴木康夫

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越しください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1995

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 ㈱原子力資料サービス

電場型プラズマ・アンジュレーターの解析

日本原子力研究所東海研究所原子炉工学部

鈴木 康夫

(1995年1月24日受理)

プラズマ・マイクロ・アンジュレーターにおける、相対論的電子ビームにかかるアンジュレーター力を解析した。プラズマ・マイクロ・アンジュレーターとは数百の薄いプラズマ・スラブのアレイからできるもので、電子ビームとの相互作用で周期的静電場が作られるものである。

普通の永久磁石型のアンジュレーターのK値とプラズマ・マイクロ・アンジュレーターのそれとを比べることによって、プラズマ・リップル密度と電子ビームのパンチに必要な関係を検討し、アンジュレーターのピッチの関数として得ることができた。結論として、 $K=1$ で $10\mu\text{m}$ ～ $1000\mu\text{m}$ のアンジュレーターのピッチを得るために必要なリップル密度や電子パンチのパラメーターを表にした。

Analyses of Plasma Undulators of Electro-static Type

Yasuo SUZUKI

Department of Reactor Engineering
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received January 24, 1995)

Undulator forces on the relativistic electron beam are analysed in the plasma micro-undulators which are composed of an array of hundreds of slender plasma slabs, and which can generate periodic electrostatic field by the interaction of the electron beam.

Comparing the K-value of undulator performance with that of usual undulators of permanent magnets, the required relations between the plasma ripple density and the electron bunch, are considered and are obtained as a function of undulator pitch. In the conclusion the ripple density and the parameters of electron bunches are listed for $K=1$ and $10\ \mu\text{m} \sim 1000\ \mu\text{m}$ undulator pitches.

Keywords: Free Electron Laser, Undulator, Plasma Undulator, Electron Beam, Micro Undulator.

目 次

1. はじめに	1
2. シュート・バンチの場合	2
3. ロング・バンチの場合	4
4. プラズマが波状の密度分布の場合	6
5. 討論とまとめ	7
謝 辞	9
参考文献	9

Contents

1. Introduction	1
2. Case of Short Bunch	2
3. Case of Long Bunch	4
4. Case of Sinusoidal Plasma Density	6
5. Discussion and Conclusion	7
Acknowledgements	9
References	9

1. はじめに

電場型プラズマ・アンジュレーターと相対論的電子ビームとの相互作用を運動力学的側面から検討する。

プラズマ・アンジュレーターは参考文献(1)に詳しい。多数のプラズマ・スラブ列に電子ビームを斜交させると、強いリップル状の電場が生ずるので、それが電子ビームに対して横方向に力を作用し、蛇行運転をさせることになる。この際に、放射光を出させることができるというものである。

厚み $\lambda/2$ プラズマ・スラブを間隔 λ おいて並べ、電子ビームが斜交する系をかんがえる。プラズマ・スラブに生ずる電荷分布を鏡像の方法で求め、その電荷分布が作る電場を計算する。この電場が周期的に存在して、電子ビームに蛇行運動させると考える。

プラズマ・スラブは第1図の様にシャープな境界をもつ超電導体あるいは誘電率無限大の物質と考える。電子ビームはプラズマ中では中性化され力を受けないが粒子間の衝突は無視できるものとする。プラズマの境界上では電位が一定になるように電荷分布がきまらることを用いて真空中の電場を求めることとする。それには、仮想的な電荷分布を鏡像の方法で求めるのが簡単である。また、さらにその後で、もっと一般的に三角関数的な波状の密度分布の場合に拡張することとする。

電子ビームは次の三つのケースを考える、すなわち、

イ. ショート・バンチの場合： 電荷 q 、半径 r_0 の球状電子バンチ、

$$q = -Ne, \quad r_0 \ll \lambda.$$

ロ. ロング・バンチの場合： 密度 n 、半径 r_0 、長さ L の円筒状バンチ、

$$N = n \pi r_0^2 L, \quad r_0 \ll \lambda \sim L.$$

ハ. 一様ビームの場合： 密度 n_0 の一様なビーム。但し、プラズマは波状密度分布と
とする、 $r_0 > \lambda$ 。

プラズマ・アンジュレーターは概念を理解するために、通常の永久磁石型アンジュレーターの場合と比べることとする。

まず、永久磁石型アンジュレーターの運動方程式を考える。座標系は、軌道方向に s 、それに直交する方向に X とすれば、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{cK \sin(2\pi x/\lambda_0)}{\gamma}, \quad K = \frac{eB\lambda_0}{2\pi mc},$$

$$\frac{ds}{dt} = V_s + \frac{K^2 c \cos(4\pi s/\lambda_0)}{4\beta\lambda^2}, \quad \frac{V_s}{c} = 1 - \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}.$$

ここで、 m 、 e は、電子の質量と電荷、 β 、 γ は相対論のパラメーター、 B 、 λ_0 は、アンジュレーターの磁場強度とその波長である。

s 方向の平均速度 V_s は蛇行するため、元の速度 $v_s = \beta c$ より若干おそくなる。K はアンジュレーターの特性を表すパラメータで、この K によって放射光の波長や強度がきまる。同時にこれは、電子の蛇行運動時の軌道の振幅や最大ふれ角を定めるパラメータでもある。 $cK/\gamma = V_{x0}$ (直交方向の最大速度) から、 ϕ_{max} (最大ふれ角) = K/γ が得られ、 $V_s^2 = V^2 - V_{x0}^2/2$ から $\gamma_s^2 = \gamma^2 (1 + K^2/2)$ が得られる。また、放射光の波長も共鳴条件 $(1/V_s - 1/c) \lambda_u = \lambda_r/c$ から、 $\lambda_u = \lambda_r (1 + K^2/2)/2\gamma^2$ と表される。さらに、放射光の強度は $F_n(K)$ によって定まる。

$$\text{Brightness} = 4.5 \times 10^4 \gamma^2 N_u^2 F_n(K),$$

$$F(K) = 4 n \xi [J_{(n-1)/2}(\xi) - J_{(n+1)/2}(\xi)]^2,$$

$$\xi = \frac{nK^2/4}{1+K^2/2}.$$

ここで、 N_u はアンジュレーターのピッチ数、 n は高調波の次数であり J_n は n 次のベッセル関数である。この関数は、 $K = 0.8 \sim 1.8$ で $0.32 \sim 0.37$ 、そこからずれて小さくなると K^2 に比例して急激に小さくなる関数である。

以下では、この K 値がプラズマ・アンジュレーターの特性を代表して表すことから、プラズマ・アンジュレーターの K 値を求めることによってその性能をしらべることとする。

2. ショート・パンチの場合

第 1 図のような系を考えてみる。この図において、プラズマは電子ビームに対して十分に密度が高く (over dense plasma という) 真空中にある電荷 $Q(q, x)$ にかかる電場は、この電荷の存在によってプラズマ表面に生ずる電荷の変位によって起こるものと考えることができる。この電場をきめるプラズマ表面の電荷分布は鏡像電荷の方法で求められ、プラズマ表面での電位ポテンシャルが一定という境界条件によって第 1 表の様に高次の項まで考慮して以下のように書くことができる。 y 方向の依存性はないので、 y 座標は省略して、

$$D_n(q_n, x_n) = D_n\{(-1)^n q, -n\lambda/2 + (-1)^n x\},$$

$$E_n(q_n, x_n) = E_n\{(-1)^n q, n\lambda/2 + (-1)^n x\},$$

このような電荷分布による電位ポテンシャルは、

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{|x - x_n|}$$

と表わされるから、点 x における電位ポテンシャルは次のように書かれる、

s 方向の平均速度 V_s は蛇行するため、元の速度 $v_s = \beta c$ より若干おそくなる。K はアンジュレーターの特性を表すパラメータで、この K によって放射光の波長や強度がきまる。同時にこれは、電子の蛇行運動時の軌道の振幅や最大ふれ角を定めるパラメータでもある。 $cK/\gamma = V_{x0}$ (直交方向の最大速度) から、 ϕ_{\max} (最大ふれ角) = K/γ が得られ、 $V_s^2 = V^2 - V_{x0}^2/2$ から $\gamma_s^2 = \gamma^2 (1 + K^2/2)$ が得られる。また、放射光の波長も共鳴条件 $(1/V_s - 1/c) \lambda_u = \lambda_r/c$ から、 $\lambda_u = \lambda_r (1 + K^2/2)/2\gamma^2$ と表される。さらに、放射光の強度は $F_n(K)$ によって定まる。

$$\text{Brightness} = 4.5 \times 10^4 \gamma^2 N_u^2 F_n(K),$$

$$F(K) = 4 n \xi [J_{(n-1)/2}(\xi) - J_{(n+1)/2}(\xi)]^2.$$

$$\xi = \frac{nK^2/4}{1+K^2/2}.$$

ここで、 N_u はアンジュレーターのピッチ数、 n は高調波の次数であり J_n は n 次のベッセル関数である。この関数は、 $K = 0.8 \sim 1.8$ で $0.32 \sim 0.37$ 、そこからずれて小さくなると K^2 に比例して急激に小さくなる関数である。

以下では、この K 値がプラズマ・アンジュレーターの特性を代表して表すことから、プラズマ・アンジュレーターの K 値を求めることによってその性能をしらべることとする。

2. ショート・バンチの場合

第 1 図のような系を考えてみる。この図において、プラズマは電子ビームに対して十分に密度が高く (over dense plasma という) 真空中にある電荷 $C(q, x)$ にかかる電場は、この電荷の存在によってプラズマ表面に生ずる電荷の変位によって起こるものと考えることができる。この電場をきめるプラズマ表面の電荷分布は鏡像電荷の方法で求められ、プラズマ表面での電位ポテンシャルが一定という境界条件によって第 1 表の様に高次の項まで考慮して以下のように書くことができる。 y 方向の依存性はないので、 y 座標は省略して、

$$D_n(q_n, x_n) = D_n\{(-1)^n q, -n\lambda/2 + (-1)^n x\},$$

$$E_n(q_n, x_n) = E_n\{(-1)^n q, n\lambda/2 + (-1)^n x\},$$

このような電荷分布による電位ポテンシャルは、

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{|x - x_n|}$$

と表わされるから、点 x における電位ポテンシャルは次のように書かれる、

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n q}{x + n\lambda/2 - (-1)^n x} + \frac{(-1)^n q}{-x + n\lambda/2 + (-1)^n x} \right\}$$

ここで偶数項は定数項となるため省略できて、

$$\begin{aligned} U &= \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)\lambda/2 + 2x} + \frac{1}{(2n-1)\lambda/2 - 2x} \right\} \\ &= \frac{-q}{2\pi\epsilon_0\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n-1)}{(2n-1)^2 - (4x/\lambda)^2} \end{aligned}$$

さらに、 $4x/\lambda < 1$ であるから $n \geq 2$ では $(2n-1)^2 \gg (4x/\lambda)^2$ と考えられる。したがって、第2項以下も十分省略できる。つまり、第1次鏡像電荷で十分に近似できることから、 $q = -Ne$ とおいて、

$$U = \frac{Ne}{2\pi\epsilon_0\lambda} \left\{ \frac{1}{1-4x/\lambda} + \frac{1}{1+4x/\lambda} \right\} + \text{Const.}$$

$$\text{ただし } -\lambda/4 + r_0 \leq x \leq \lambda/4 - r_0$$

となる。

$x = \lambda/4$ では U は発散するので、この周辺をかんがえる。半径 r_0 の電子バンチの一部がプラズマにかかっている間、つまり $-\lambda/4 < x < -\lambda/4 + r_0$ 、または $\lambda/4 - r_0 < x < \lambda/4$ では電場は一定と仮定して、この間の電位ポテンシャルを考えることにしよう。

プラズマ中では電子ビームは中性化されて電場はないと考えて、 $x = \lambda/4$ で $U = 0$ 、 $x = -\lambda/4 + r_0$ 、 $\lambda/4 - r_0$ で、直線でスムーズに繋げるようにすれば（電場は一定を意味する）、第2図を参考にして、

$$U = \frac{Ne}{2\pi\epsilon_0\lambda} \left\{ \frac{1}{1-4x/\lambda} + \frac{1}{1+4x/\lambda} \right\} - \frac{Ne}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

$$U = \frac{-Ne\lambda(1+4x/\lambda)}{32\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (-\lambda/4 \leq x \leq -\lambda/4 + r_0)$$

$$U = \frac{-Ne\lambda(1-4x/\lambda)}{32\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (\lambda/4 - r_0 \leq x \leq \lambda/4)$$

あるいは、フーリエ展開の第1項をとって、次のように近似できる、

$$U = \frac{-Ne\lambda\{1 + \cos(2\pi x/\lambda)\}}{8\pi\epsilon_0 r_0}$$

ここで、 $r_0 \ll \lambda$ を使って近似した。

したがって、その運動方程式は以下のようなになる。

$$Nm\gamma \frac{dv_x}{dt} = Ne^2 \nabla U$$

$$Nm \gamma \frac{dv_y}{dt} = 0 ,$$

積分して,

$$v_x = v_{x0}^2 + 2eU/m\gamma \approx v_{x0} - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi \epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} .$$

$$v_y = v_{y0} .$$

ここで, 添字 0 は初期値を意味する。

s, X座標系に変換する。 $v_{x0} = v_{s0} \cos \theta$, $v_{y0} = v_{s0} \sin \theta$ として,

$$v_s = v_{x0} \cos \theta - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi \epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} \cos \theta + v_{y0} \sin \theta .$$

$$v_x = v_{x0} \sin \theta - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi \epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} \sin \theta + v_{y0} \cos \theta .$$

から, $v_{s0} \cos \theta = v_{x0}$ を利用して,

$$v_s = v_{s0} - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi \epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} ,$$

$$v_x = - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi \epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} \tan \theta .$$

$\theta = \pi/4$ として,

$$cK/\gamma = \frac{Ne^2}{8\pi \epsilon_0 m \gamma v_{s0} r_0} \quad \text{から, } K = \frac{Ne^2}{8\pi \epsilon_0 m c^2 \beta r_0}$$

X方向への平均速度 $V_{x0} = -Ne^2/8\pi \epsilon_0 m \gamma v_{s0} r_0$ をもつことは気にかかるところであるが, V_{x0} は v_{s0} に比べて十分小さく, わずかな屈折があると思えばよい。あるいは, 初期速度の設定の仕方によると思えばよい。K値が $\tan \theta$ に比例することは注目になるが, $\lambda_0 = \lambda/\cos \theta$ によることも考慮する必要がある。さらに注目すべき点は, K値がプラズマの密度に直接よらないことである。プラズマが電子ビームの真空部への突出に対して境界条件を満たすように対応可能な密度を n_0 として, $n_0 \lambda^3 \sim N$ を目安としたらどうだろうか。

3. ロング・バンチの場合

第3図のような場合を考える。座標系を s, Xにとる。さらにここでも, 簡単にするために $\theta = \pi/4$ とする。

鏡像電荷は前章の考察から第1次の項だけを考える。点 (s, X) の電位ポテンシャルは

$$Nm \gamma \frac{dv_y}{dt} = 0 ,$$

積分して,

$$v_x = v_{x0}^2 + 2eU/m\gamma \approx v_{x0} - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi\epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} .$$

$$v_y = v_{y0} .$$

ここで、添字₀は初期値を意味する。

s, X座標系に変換する。v_{x0} = v_{s0} cos θ, v_{y0} = v_{s0} sin θとして,

$$v_s = v_{x0} \cos \theta - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi\epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} \cos \theta + v_{y0} \sin \theta .$$

$$v_x = v_{x0} \sin \theta - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi\epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} \sin \theta + v_{y0} \cos \theta .$$

から, v_{s0} cos θ = v_{x0}を利用して,

$$v_s = v_{s0} - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi\epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} ,$$

$$v_x = - \frac{Ne^2 \{(1 + \cos(2\pi x/\lambda))\}}{8\pi\epsilon_0 m \gamma v_{x0} r_0} \tan \theta .$$

θ = π/4として,

$$cK/\gamma = \frac{Ne^2}{8\pi\epsilon_0 m \gamma v_{s0} r_0} \quad \text{から, } K = \frac{Ne^2}{8\pi\epsilon_0 m c^2 \beta r_0}$$

X方向への平均速度 $V_{x0} = -Ne^2/8\pi\epsilon_0 m \gamma v_{s0} r_0$ をもつことは気にかかるところであるが、 V_{x0} は v_{s0} に比べて十分小さく、わずかな屈折があると思えばよい。あるいは、初期速度の設定の仕方によると思えばよい。K値が tan θ に比例することは注目になるが、 $\lambda_0 = \lambda/\cos \theta$ によることも考慮する必要がある。さらに注目すべき点は、K値がプラズマの密度に直接よらないことである。プラズマが電子ビームの真空部への突出に対して境界条件を満たすように対応可能な密度を n_0 として、 $n_0 \lambda^3 \sim N$ を目安としたらどうだろうか。

3. ロング・バンチの場合

第3図のような場合を考える。座標系を s, Xにとる。さらにここでも、簡単にするために θ = π/4 とする。

鏡像電荷は前章の考察から第1次の項だけを考える。点(s, X)の電位ポテンシャルは

$$U(s, X) = \frac{-en \pi r_0^2}{4 \pi \epsilon_0} \left[\int_{-\lambda/4}^{2X-\lambda/4} \frac{ds'}{s-s'} - \int_{-\lambda/2}^0 \frac{dX'}{\sqrt{(X'-X)^2 + (\lambda/4-s)^2}} \right. \\ \left. - \int_0^{\lambda/2} \frac{dX'}{\sqrt{(X'-X)^2 + (\lambda/4-s)^2}} \right].$$

但し、右辺第1項は、電子ビーム自身による電位ポテンシャルであり、 n は電子ビームの電子密度である。これは $s \geq 0$ のときで、左右対称性があるので積分範囲の内キャンセルできる所は省略してあり、 $s < 0$ のときは、

$$\int_{\lambda/4+2X}^{\lambda/4} \frac{ds'}{s'-s}.$$

となる。これを積分して、

$$U(s, X) = \frac{-en \pi r_0^2}{4 \pi \epsilon_0} \left[\ell n \left\{ \frac{\lambda/4 + |s|}{\lambda/4 - |s|} \right\} \right. \\ + \ell n \left\{ \frac{X + \sqrt{X^2 + (\lambda/4-s)^2}}{X + \lambda/2 + \sqrt{(X + \lambda/2)^2 + (\lambda/4-s)^2}} \right\} \\ + \ell n \left\{ \frac{X - \lambda/2 + \sqrt{(X - \lambda/2)^2 + (\lambda/4+s)^2}}{X + \sqrt{X^2 + (\lambda/4+s)^2}} \right\}, \\ \left. - \partial U(s, X) / \partial X_{x=0} = E_x = \frac{-en \pi r_0^2}{4 \pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\lambda/4-s} - \frac{1}{\sqrt{(\lambda/2)^2 + (\lambda/4-s)^2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{(\lambda/2)^2 + (\lambda/4+s)^2}} - \frac{1}{\lambda/4+s} \right\} \right].$$

$m \gamma dv_x / dt = -eE_x$ を積分すれば、($s = vt$ として ds/dt を両辺にかけて積分する。)

$$m \gamma v v_x = \frac{e^2 n \pi r_0^2}{4 \pi \epsilon_0} \left[\ell n \left\{ \frac{\lambda/4 - |s|}{\lambda/4 + |s|} \right\} \right. \\ \left. + \ell n \left\{ \frac{\lambda/4 + s + (\lambda/4 + s)^2 + (\lambda/2)^2}{\lambda/4 - s + (\lambda/4 - s)^2 + (\lambda/2)^2} \right\} \right]$$

右辺は力のポテンシャルに相当するが、これも $x = \pm \lambda/4$ では発散するので、前章で述べた様な端での処理をすれば、第4図のような考察によって下記ようになる。ここで $\ell n |2r_0/\lambda_0|$ の項は正確には $\ell n |2r_0/\lambda_0| + 1$ であるが1を省略した。 $\lambda = \lambda_0$ と書き換えて、

$$v_x = \frac{e^2 n \pi r_0^2}{4 \pi \epsilon_0 m \gamma v} | \ell n 2r_0 / \lambda_u | (1 + \cos(2 \pi s / \lambda_u))$$

したがって、

$$K = \frac{e^2 n \pi r_0^2 | \ell n 2r_0 / \lambda_u |}{4 \pi \epsilon_0 m c^2 \beta} = \frac{N e^2 | \ell n 2r_0 / \lambda_u |}{4 \pi \epsilon_0 m c^2 \beta L}$$

4. プラズマが波状の密度分布の場合

第1図を参考にして考えることにする。この図で電子ビームは一様にs方向に進むとし、その密度は、プラズマ密度より高いとする。(under dense plasmaという。)この場合、プラズマ中の電子は、相対論的に重い電子ビームによってすべて吹き飛ばされ、

$$n_i = n_0 \{1 + \cos(2 \pi x / \lambda)\}$$

$$n_e = n_b = n_0$$

と書ける。ここで、 n_b 中の電荷のうち n_0 より過剰な一様電荷分は無視する。

$$\text{div } E = (e / \epsilon_0) (n_i - n_0) = (n_0 e / \epsilon_0) \cos(2 \pi x / \lambda),$$

$$\therefore E_x = - \frac{n_0 e \lambda \sin(2 \pi x / \lambda)}{2 \pi \epsilon_0}$$

従って、電子の運動方程式は、

$$m \gamma \frac{dv_x}{dt} = \frac{ne^2 \lambda \sin(2 \pi x / \lambda)}{2 \pi \epsilon_0}$$

$$m \gamma \frac{dv_y}{dt} = 0$$

積分して、

$$m \gamma v_x^2 / 2 = \frac{-ne^2 \lambda^2 (1 + \cos(2 \pi x / \lambda))}{4 \pi^2 \epsilon_0} + m \gamma v_{x0}^2 / 2$$

ここで、 v_{x0} として v_x の最大値とした。

$$\therefore v_x = v_{x0} - \frac{ne^2 \lambda^2}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}} - \frac{ne^2 \lambda^2 \cos(2 \pi x / \lambda)}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}}$$

$$v_y = v_{y0}$$

$$v_x = \frac{e^2 n \pi r_0^2}{4 \pi \epsilon_0 m \gamma v} | \ell n 2r_0 / \lambda_u | (1 + \cos(2 \pi s / \lambda_u))$$

したがって、

$$K = \frac{e^2 n \pi r_0^2 | \ell n 2r_0 / \lambda_u |}{4 \pi \epsilon_0 m c^2 \beta} = \frac{N e^2 | \ell n 2r_0 / \lambda_u |}{4 \pi \epsilon_0 m c^2 \beta L}$$

4. プラズマが波状の密度分布の場合

第1図を参考にして考えることにする。この図で電子ビームは一様にs方向に進むとし、その密度は、プラズマ密度より高いとする。(under dense plasmaという。)この場合、プラズマ中の電子は、相対論的に重い電子ビームによってすべて吹き飛ばされ、

$$n_i = n_0 \{1 + \cos(2 \pi x / \lambda)\}$$

$$n_e = n_b = n_0$$

と書ける。ここで、 n_b 中の電荷のうち n_0 より過剰な一様電荷分は無視する。

$$\text{div } E = (e / \epsilon_0) (n_i - n_0) = (n_0 e / \epsilon_0) \cos(2 \pi x / \lambda),$$

$$\therefore E_x = - \frac{n_0 e \lambda \sin(2 \pi x / \lambda)}{2 \pi \epsilon_0}$$

従って、電子の運動方程式は、

$$m \gamma \frac{dv_x}{dt} = \frac{ne^2 \lambda \sin(2 \pi x / \lambda)}{2 \pi \epsilon_0}$$

$$m \gamma \frac{dv_y}{dt} = 0$$

積分して、

$$m \gamma v_x^2 / 2 = \frac{-ne^2 \lambda^2 (1 + \cos(2 \pi x / \lambda))}{4 \pi^2 \epsilon_0} + m \gamma v_{x0}^2 / 2$$

ここで、 v_{x0} として v_x の最大値とした。

$$\therefore v_x = v_{x0} - \frac{ne^2 \lambda^2}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}} - \frac{ne^2 \lambda^2 \cos(2 \pi x / \lambda)}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}}$$

$$v_y = v_{y0}$$

s, X座標に変換して,

$$v_s = v_{s0} - \frac{ne^2 \lambda^2 \cos \theta}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}} - \frac{ne^2 \lambda^2 \cos \theta \cos(2\pi x/\lambda)}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}}$$

$$v_x = -\frac{ne^2 \lambda^2 \sin \theta}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}} - \frac{ne^2 \lambda^2 \sin \theta \cos(2\pi x/\lambda)}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}}$$

$\theta = \pi/4$ とすれば, $\sqrt{2}\lambda = \lambda_u$ とおいて,

$$K = \frac{ne^2 \lambda_u^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2 \beta}$$

n $\lambda_u^3 = N$ とおけば,

$$K = \frac{Ne^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2 \beta \lambda_u}$$

5. 討論とまとめ

以上えられたKをまとめると, $\beta = 1$ とおいて,

$$\text{ショートバンチ} \quad \frac{Ne^2}{8 \pi \epsilon_0 m c^2 r}$$

$$\text{ロングバンチ} \quad \frac{Ne^2 |\ln 2r_0/\lambda_u|}{4 \pi \epsilon_0 m c^2 L}$$

$$\text{一様ビーム} \quad \frac{Ne^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2 \lambda_u} = \frac{n_0 e^2 \lambda_u^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2}$$

$$\text{磁石型} \quad \frac{e(B \times c) \lambda_u}{2 \pi m c^2} = 93.4 \lambda_u (\text{m}) B (\text{t})$$

磁石型アンジュレーターの場合に力のポテンシャルは $e \cdot c \times B \cdot \lambda_u$ であり, それと慣性エネルギー mc^2 との比がKをあたえる。電場型の場合は力のポテンシャルは $Ne^2/4 \pi \epsilon_0 \Lambda$ で表される, ここで Λ はバンチの幾何学的大きさを特徴付ける r_0 , L , λ_u などである。このKが Λ に反比例しており Λ が小さくなるとKは大きくなることは極めて特徴的である。

ショートバンチやロングバンチの場合に, プラズマの境界はシャープなものと仮定したがこれは本質的なものではなく, 鏡像の方法を使えるためである。プラズマ中の電子が重い電子ビームに反発して分布を変えられる程度に密度勾配があればよい。

電場ポテンシャルをフーリエ変換して第1項のみで近似したが, 高周波成分は, この境界のありかたに大きく依存する。

s, X座標に変換して,

$$v_s = v_{s0} - \frac{ne^2 \lambda^2 \cos \theta}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}} - \frac{ne^2 \lambda^2 \cos \theta \cos(2\pi x/\lambda)}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}}$$

$$v_x = -\frac{ne^2 \lambda^2 \sin \theta}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}} - \frac{ne^2 \lambda^2 \sin \theta \cos(2\pi x/\lambda)}{4 \pi^2 \epsilon_0 m \gamma v_{x0}}$$

$\theta = \pi/4$ とすれば, $\sqrt{2}\lambda = \lambda_u$ とおいて,

$$K = \frac{ne^2 \lambda_u^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2 \beta}$$

n $\lambda_u^3 = N$ とおけば,

$$K = \frac{Ne^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2 \beta \lambda_u}$$

5. 討論とまとめ

以上えられたKをまとめると, $\beta = 1$ とおいて,

$$\text{ショートバンチ} \quad \frac{Ne^2}{8 \pi \epsilon_0 m c^2 r}$$

$$\text{ロングバンチ} \quad \frac{Ne^2 |\ln 2r_0/\lambda_u|}{4 \pi \epsilon_0 m c^2 L}$$

$$\text{一様ビーム} \quad \frac{Ne^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2 \lambda_u} = \frac{n_0 e^2 \lambda_u^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 m c^2}$$

$$\text{磁石型} \quad \frac{e(B \times c) \lambda_u}{2 \pi m c^2} = 93.4 \lambda_u (\text{m}) B (\text{t})$$

磁石型アンジュレーターの場合に力のポテンシャルは $e \cdot c \times B \cdot \lambda_u$ であり, それと慣性エネルギー mc^2 との比がKをあたえる。電場型の場合は力のポテンシャルは $Ne^2/4 \pi \epsilon_0 \Lambda$ で表される, ここで Λ はバンチの幾何学的大きさを特徴付ける r_0 , L , λ_u などである。このKが Λ に反比例しており Λ が小さくなるとKは大きくなることは極めて特徴的である。

ショートバンチやロングバンチの場合に, プラズマの境界はシャープなものと仮定したがこれは本質的なものではなく, 鏡像の方法を使えるためである。プラズマ中の電子が重い電子ビームに反発して分布を変えられる程度に密度勾配があればよい。

電場ポテンシャルをフーリエ変換して第1項のみで近似したが, 高周波成分は, この境界のありかたに大きく依存する。

ショートバンチおよびロングバンチの場合には、アンジュレーターの波長 λ_u によらず、電子ビームの大きさによることは、アンジュレーターの短波長化に極めて有利な条件となり得る。つまり、電子ビームの作り方のみに依存しプラズマの密度が極端に小さくなければあまりよらないことになる。

斜交角の影響は、 θ を大きくするとK値が $\tan \theta$ に比例して大きくできるが、短波長化をねらうには波長が大きくなるので、最適化が必要である。

一様ビームの場合には、すなわち λ_u に対して電子ビームが十分太い場合にKは $n\lambda_u^2$ に比例すると書ける。しかし、磁石型アンジュレーターの場合の磁場強度Bが $\text{EXP}(-g/\lambda)$ （ここでgは磁石間のギャップ間隔で電子ビームを通すため十分な大きさが必要となる）に比例することを考えると電場型の方が短波長化には、はるかに有利と言える。

通常よく使われるリニアックを例にとって数値をあたってみる。50 MeVでマイクロパルス5A、5p秒を考える。この場合は、 $N=1 \times 10^{11}$ ケ、16nC、ロングバンチの場合を考えるとすれば、 $L=1.5$ mm、 $\gamma \sim 100$ に相当する。

$$\frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 m c^2} = 1.43 \times 10^{-12} .$$

$$|\ln 2r_0/\lambda_u| \sim 1.6 (r_0/\lambda_u = 1/10) .$$

などが参考になる数値となる。

まず、 $K=1$ 、 $\lambda_u = 10 \mu\text{m} \sim 1 \text{mm}$ ($\lambda_r = 1 \text{nm} \sim 100 \text{nm}$)となるパラメーターを当たってみる。

ショートバンチの場合を考える。 $r_0 = \lambda_u/10$ 、必要なプラズマ密度 $n_0 = N/\lambda_u^3$ として $K=1$ 、 $\lambda_u \sim 10 \mu\text{m}$ にするには $r_0 = 1 \mu\text{m}$ （これは3フェムト秒のバンチに相当する）であるから、 $N=7 \times 10^{11} r_0 K$ から、 $N=7 \times 10^8$ 、 $n_0 = 7 \times 10^{20}/\text{m}^3$ となる。

ロングバンチの場合を考える。 $K=4.6 \times 10^{-12} N/L$ から $N=2.2 \times 10^{11} KL$ とし、 $\lambda_u = 100 \mu\text{m}$ とするには、 $r_0 = 10 \mu\text{m}$ 、 $L=10\lambda_u=1 \text{mm}$ において、 $N=2.2 \times 10^8$ 、 $n_0 = N/L \lambda_u^2 = 2.2 \times 10^{19}/\text{m}^3$ となる。

一様ビームの場合には、 $K=0.46 \times 10^{-12} N/\lambda_u$ から $N=2.2 \times 10^{12} K \lambda_u$ とし、 $\lambda_u = 1 \text{mm}$ とするには、 $N=2.2 \times 10^9$ 、 $n_0 = 2.2 \times 10^{18}$ となる。

これらの検討から、 $K=1$ について必要なバンチパラメーターやプラズマパラメーターをまとめると第2表になる。技術開発の方向を加速器技術（バンチパラメーター）におくかプラズマ生成技術（プラズマパラメーター）参考文献(2)のどちらを選ぶかによって短波長化の方法がきまる。いずれの方法に向かっても実現可能であろう。k値のいくつかについてN、 n_0 、 Λ の関係を図にすると、第5、6、7図のようになる。 λ_u がたとえ $10 \mu\text{m}$ のオーダーであっても十分に実現可能なパラメーター領域である。

この電場型プラズマ・アンジュレーターは、この解析に用いたモデルから考えて、Smith-Purcellプラズマ・アンジュレーターあるいはOTR (Optical Transition Radiation) プラズマ・アンジュレーターと呼ばれ得るものである。

謝 辞

この解析は、池畑 隆（茨大工）、西田 靖（宇都宮大工）、小方 厚（高エネ研）の諸氏がチャンスを与えてくれた。また、原研自由電子レーザー研究室の励ましにも元気づけられた。深く感謝します。

参 考 文 献

- (1) プラズマ・アンジュレーター，鈴木康夫，核融合研究 68（1992）488。
- (2) プライベート・コミュニケーション，池畑 隆，その他。

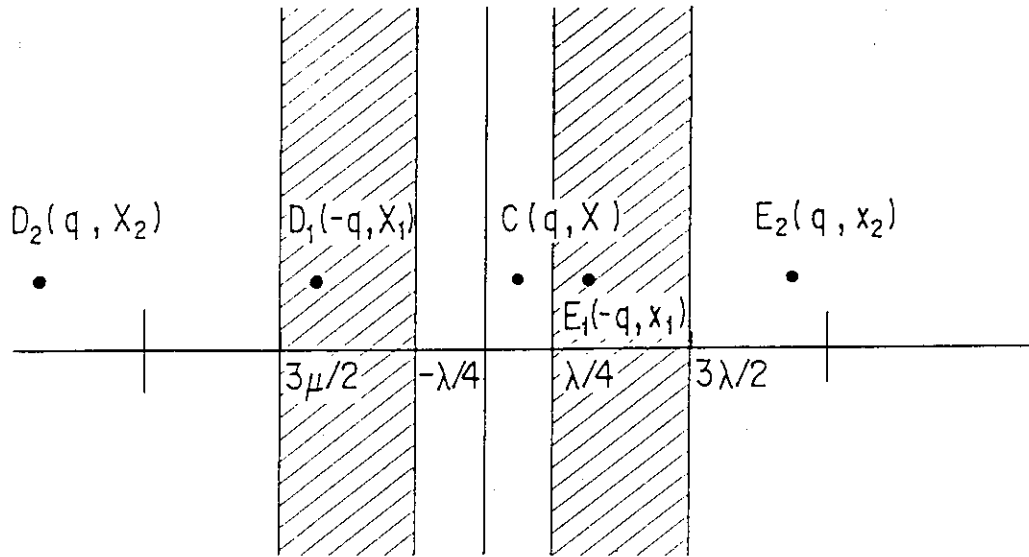
謝 辞

この解析は、池畑 隆（茨大工）、西田 靖（宇都宮大工）、小方 厚（高エネ研）の諸氏がチャンスを与えてくれた。また、原研自由電子レーザー研究室の励ましにも元気づけられた。深く感謝します。

参 考 文 献

- (1) プラズマ・アンジュレーター，鈴木康夫，核融合研究 68（1992）488。
- (2) プライベート・コミュニケーション，池畑 隆，その他。

第1表 鏡像電荷とその位置
(Y座標は共通なので省略した。)



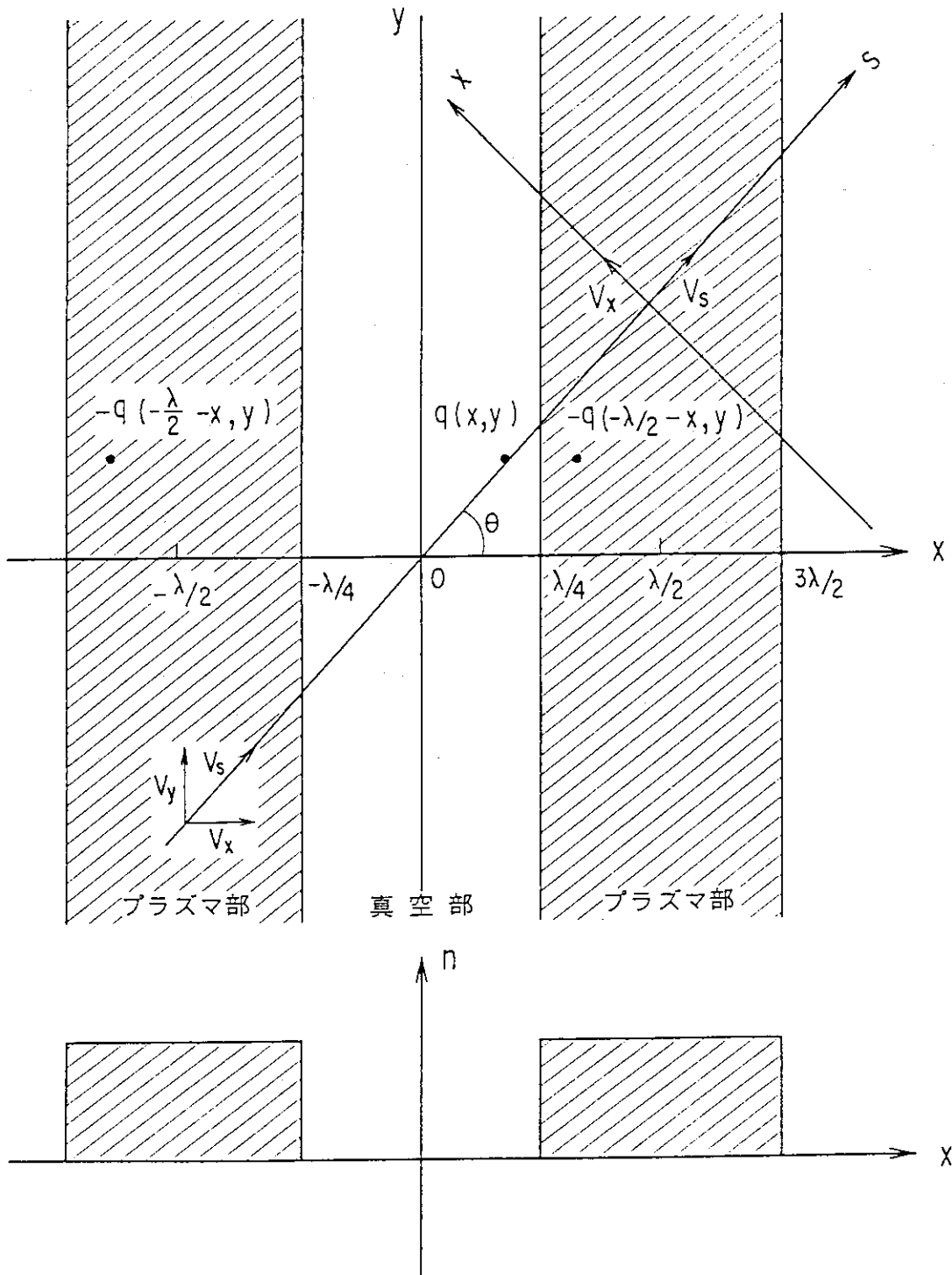
$D_n(q_n, x_n)$		$E_n(q_n, x_n)$
$D_1(-q, -\lambda/2 - x)$	$C(q, x)$	$E_1(-q, \lambda/2 - x)$
$D_2(q, -\lambda + x)$		$E_2(q, \lambda + x)$
$D_3(-q, -3\lambda/2 - x)$		$E_3(-q, 3\lambda/2 - x)$
$D_4(q, -2\lambda + x)$		$E_4(q, 2\lambda + x)$

$$D_n((-1)^n q, -n\lambda/2 + (-1)^n x)$$

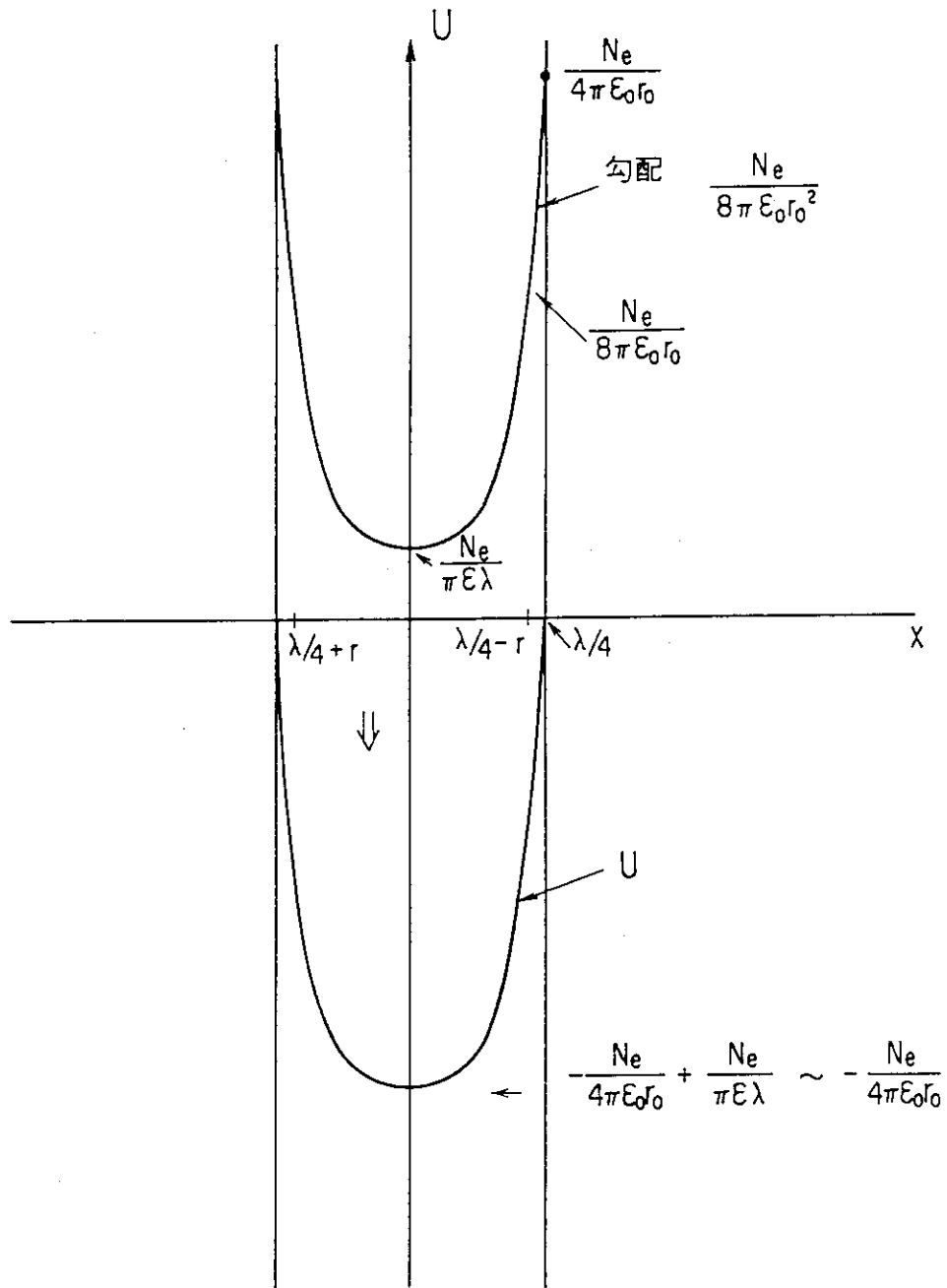
$$E_n((-1)^n q, n\lambda/2 + (-1)^n x)$$

第2表 $k=1$ のバンチとプラズマ

λ_0	$10\mu\text{m}$	$100\mu\text{m}$	1mm
ショート バンチ	$r_0 = 1\mu\text{m}$ $N = 7 \times 10^5$ $n_0 = 7 \times 10^{20}$	$r_0 = 10\mu\text{m}$ $N = 7 \times 10^6$ $n_0 = 7 \times 10^{18}$	$r_0 = 100\mu\text{m}$ $N = 7 \times 10^7$ $n_0 = 7 \times 10^{16}$
ロング バンチ	$L = 100\mu\text{m}$ $r_0 = 1\mu\text{m}$ $N = 7 \times 10^7$ $n_0 = 2.2 \times 10^{21}$	$L = 1\text{mm}$ $r_0 = 10\mu\text{m}$ $N = 7 \times 10^8$ $n_0 = 7 \times 10^{19}$	$L = 10\text{mm}$ $r_0 = 100\mu\text{m}$ $N = 7 \times 10^9$ $n_0 = 7 \times 10^{17}$
一様 ビーム	$N = 2.2 \times 10^7$ $n_0 = 2.2 \times 10^{22}$	$N = 2.2 \times 10^8$ $n_0 = 2.2 \times 10^{20}$	$N = 2.2 \times 10^9$ $n_0 = 2.2 \times 10^{18}$



第1図 プラズマスラブと座標系

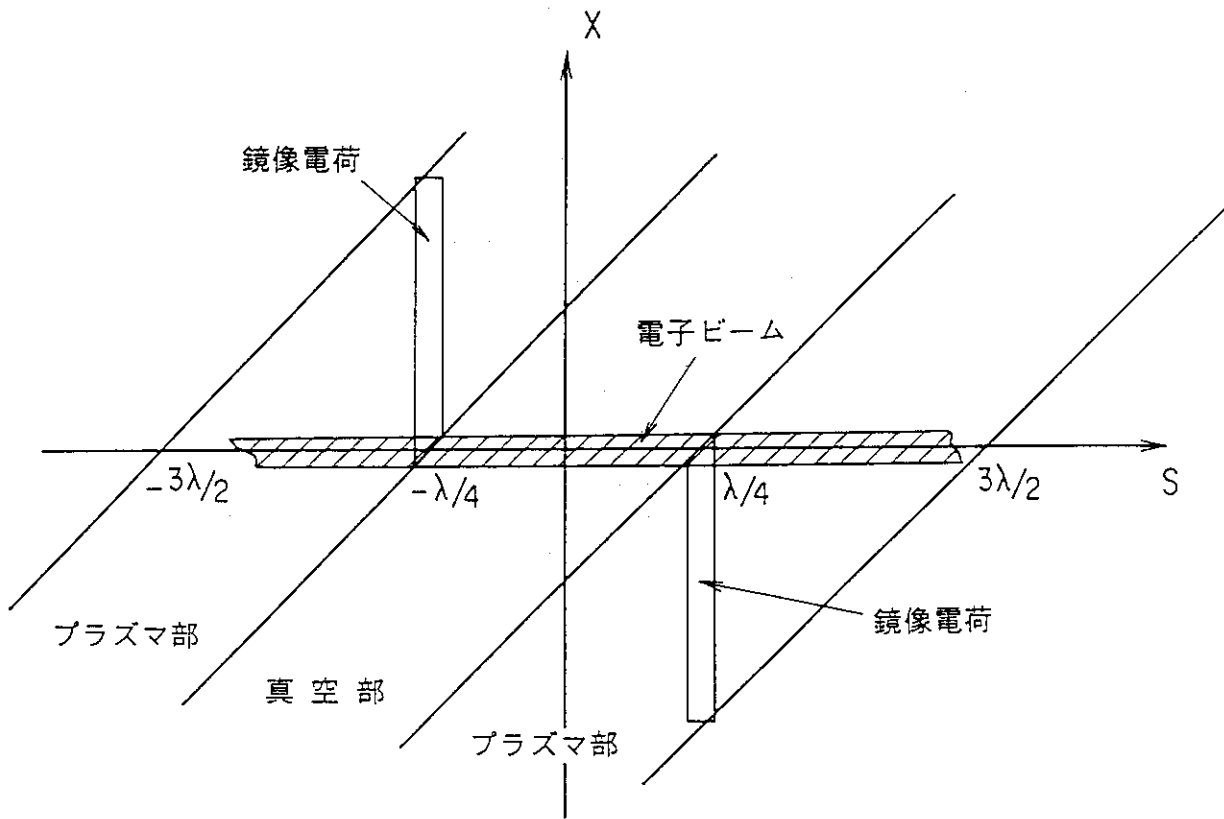


第2図 ショートバンチの電位ポテンシャル

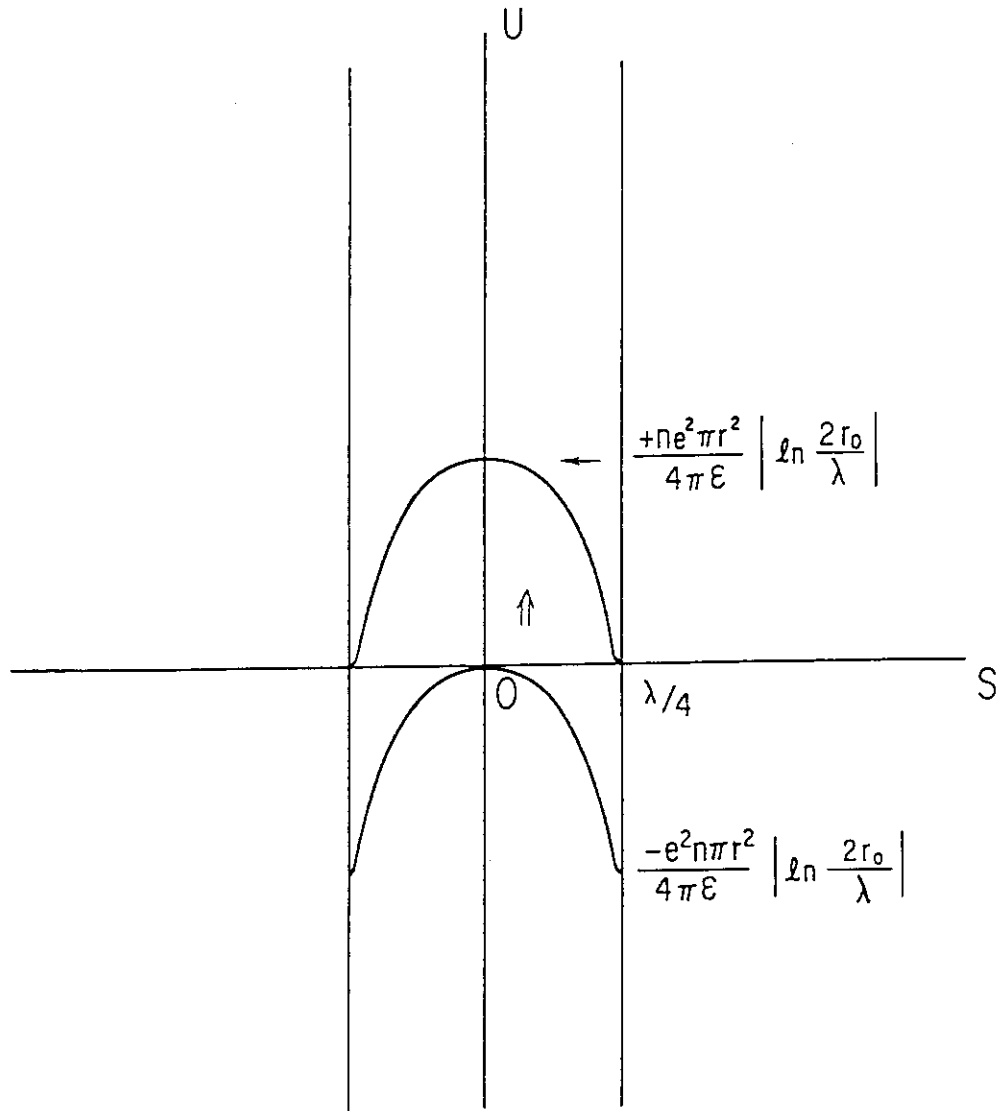
直線をつなげた $X = \lambda/4$ のところで $U = \frac{N_e}{4\pi \epsilon_0 r_0}$ となることから、

Const. = $-\frac{N_e}{4\pi \epsilon_0 r_0}$ となる。 $r/\lambda \ll 1$ として近似を

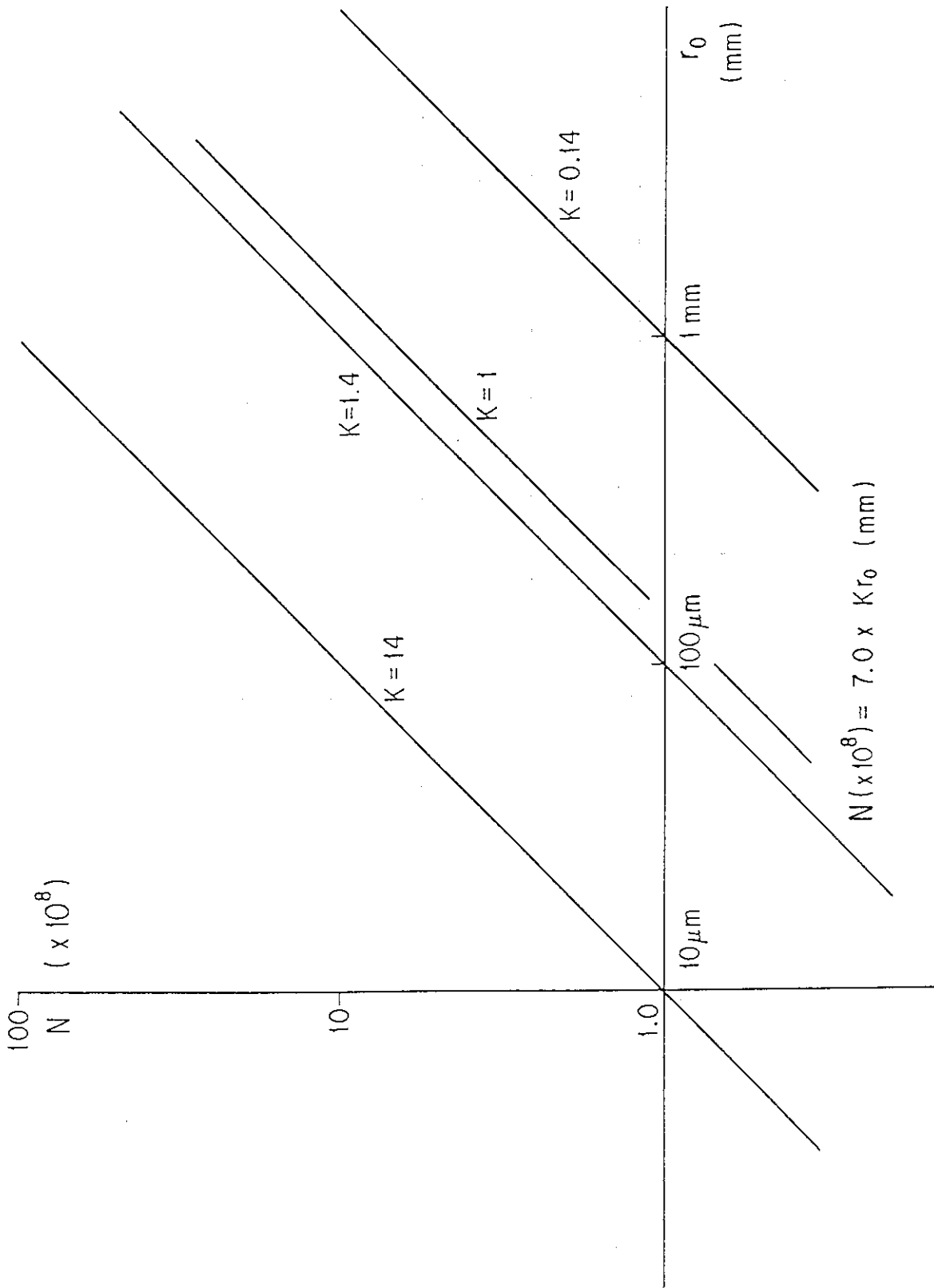
している。



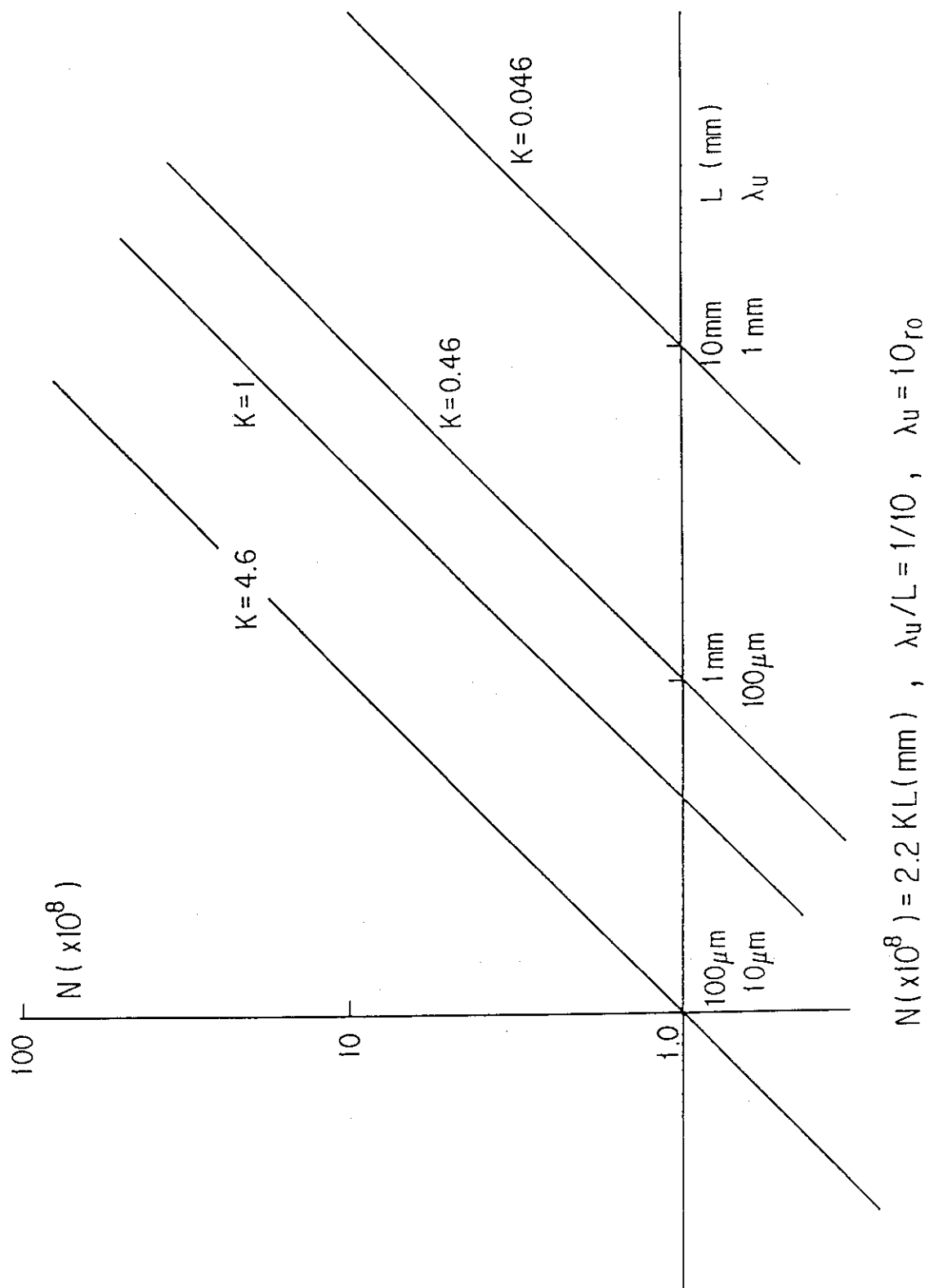
第3図 ロングバンチの鏡像



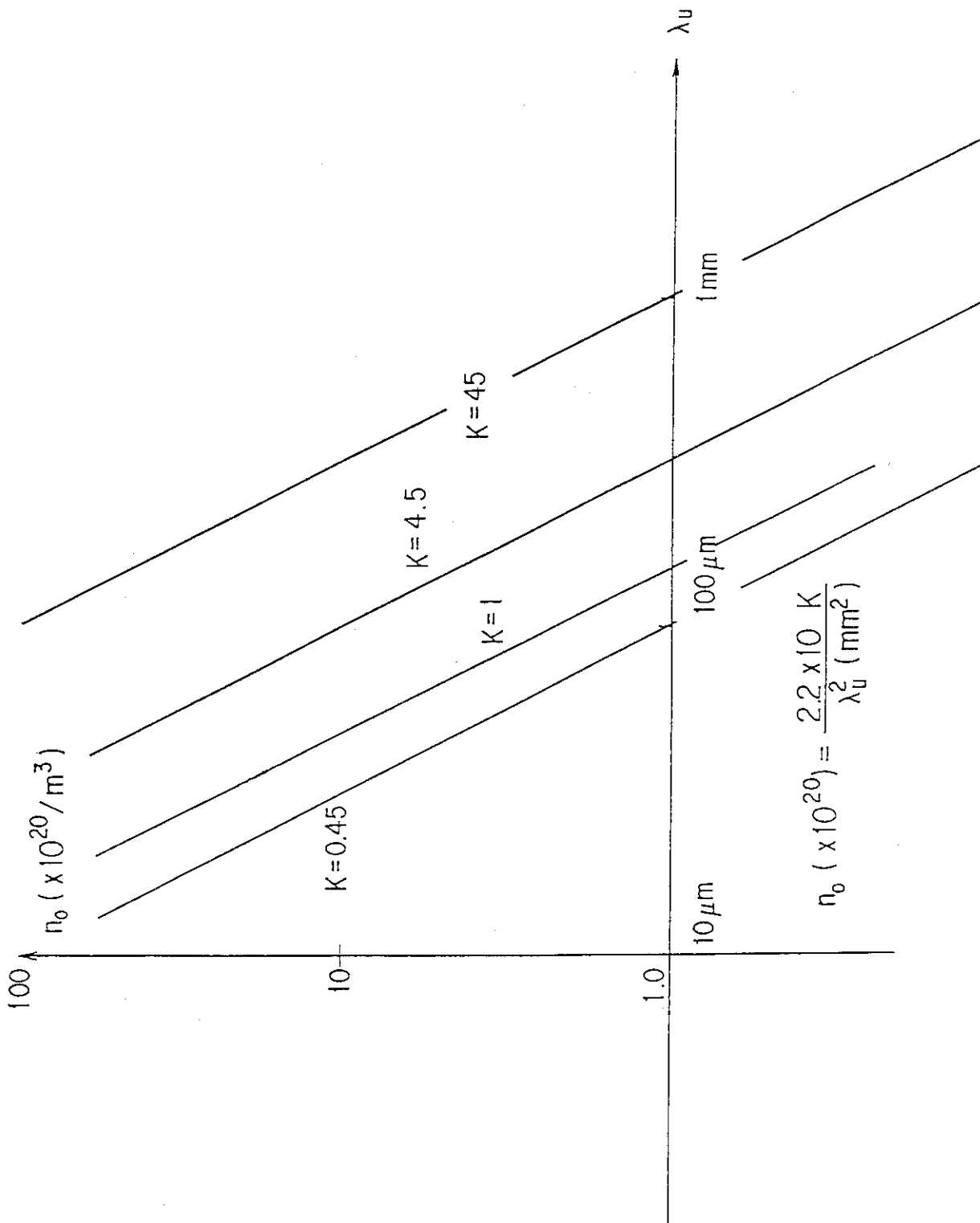
第4図 ロングバンチの電位ポテンシャル



第5図 ショートパンチのk値



第6図 ロングバUNCHとk値



第7図 一様ビームとk値