

JAERI-Research

96-027



曲面上に衝突する壁噴流に関する考察
(表面温度一定の場合)

1996年6月

椎名保顕

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1996

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 株式会社原子力資料サービス

曲面上に衝突する壁噴流に関する考察
(表面温度一定の場合)

日本原子力研究所大洗研究所核熱利用研究部
椎名 保顕

(1996年5月8日受理)

衝突壁噴流の高い熱伝達特性を熱エネルギーの有効利用に使用する機器の伝熱性能向上に役立てることが可能である。相変化を利用する蓄熱器等の機器の伝熱特性の向上に衝突壁噴流を利用する場合には、相変化界面は一般に曲面を示すと考えられ、その場合、噴流の流れ及び熱伝達は平板の場合とは異なった特性を示すと考えられる。

衝突壁噴流では、よどみ点近傍領域において流体は加速されるため層流となり、下流域において乱流に遷移するまで層流状態が保持されると考えられる。従来行われてきた壁噴流の研究は、平板上に衝突する噴流に関するものがほとんどであった。そこで、本報告では、球殻及び円筒の内面に衝突する噴流の流れ及び熱伝達を解析的に取り扱い、従来取り扱われてきた平板上の壁噴流の解析との比較を行った。球殻内面に衝突する軸対称壁噴流の場合は、よどみ点から遠ざかるにつれて平板の解からのずれが大きくなる。一方、円筒面を含む2次元曲面に衝突する噴流の場合には、境界層厚さが小さい場合、基礎方程式は平板と全く同じ形となり、同様の取り扱いができる。

Consideration of Wall Jet Impinging on Curved Surfaces
(For Case of Constant Surface Temperature)

Yasuaki SHIINA

Department of Advanced Nuclear Heat Technology
Oarai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received May 8, 1996)

It will be possible to utilize high heat transfer characteristics of impinging wall jet for heat transfer improvement of the machineries which are used in heat utilization system. When the wall jet is applied to the system involving solid-liquid phase change such as heat storage unit, the configuration of the phase change interface would not be flat but curved surface. Flow and heat transfer characteristics of impinging wall jet on curved surfaces would be different from the case of flat surface.

Flow is accelerated in the vicinity of stagnation point of impinging wall jet. Laminar flow is maintained by the flow acceleration until flow turns into turbulent in the downstream. Studies on impinging wall jet have been confined in the case of impinging wall jet on flat surfaces. This report describes the analysis of flow and heat transfer characteristics of impinging wall jet on curved surfaces such as inner surfaces of spherical shell and circular cylinder. Comparison was made with the wall jet impinging on flat surface. For the case of a spherical shell, flow and heat transfer differ from the case of flat surface as flow departs from a stagnation point. For the case of a circular cylinder, basic equations are same as the case of flat surface when boundary layer thickness is sufficiently small compared with the cylinder diameter.

Keywords: Impinging Jet, Wall Jet, Laminar Flow, Heat Transfer, Curved Surface,
Submerged Jet

目 次

1. はじめに	1
2. 球殻内面に衝突する軸対称壁噴流の解析	2
2.1 速度分布	2
2.2 A 及び a_c の評価	8
2.3 熱伝達	12
2.4 $R \rightarrow \infty$ の場合	14
2.5 結果と考察	15
3. 円筒内面上の2次元壁噴流の解析	17
3.1 速度分布	17
3.2 A 及び c の評価	19
3.3 熱伝達	21
4. まとめ	22
参考文献	23

Contents

1. Introduction	1
2. Analysis on Axisymmetric Wall Jet Impinging on Spherical Inner Surfaces	2
2.1 Velocity Profile	2
2.2 Evaluation of A and a_c	8
2.3 Heat Transfer	12
2.4 For Case of $R \rightarrow \infty$	14
2.5 Results and Discussion	15
3. Analysis of Wall Jet on Cylindrical Inner Surfaces	17
3.1 Velocity Profile	17
3.2 Evaluation of A and c	19
3.3 Heat Transfer	21
4. Concluding Remarks	22
References	23

1. はじめに

壁面に垂直に衝突する壁噴流は、よどみ点近傍における熱伝達率が高く、さまざまな産業において効率的冷却のために利用されている。この壁噴流の高い熱伝達特性を蓄熱や熱回収等の熱利用機器の伝熱特性の向上に応用することができる。その場合にはエネルギー有効利用の観点から、ポンプ動力等に要するエネルギーを節約し、低い流速の噴流を効率的に利用する必要がある。

従来、平板に衝突する壁噴流の研究は数多く行われてきた。しかし、相変化が存在する系で壁噴流を取り扱う場合には、相変化界面は一般に曲面を示すと考えられる。伝熱面が曲率を持つ場合には、よどみ点から遠ざかるにつれて、流れ及び熱伝達は平板の場合とは異なる特性を示すと考えられるが、この場合の流れ及び熱伝達を取り扱った研究はほとんど行われていない。そこで、本研究では、曲面に衝突する壁噴流を解析的に取り扱い、考察を加えた。

自由噴流は、ノズルから十分下流ではポテンシャルコアは消滅し、速度分布が相似形を示すことが知られている⁽¹⁾。一方、壁に垂直に衝突する壁噴流は、よどみ点領域を越えると境界層が発達し壁噴流域が形成されるが、Glauert⁽²⁾は自由噴流の場合と同様に相似解の存在を仮定してこれを取り扱った。Schwartz⁽³⁾は壁噴流の流速測定実験を行い、壁噴流域においても自由噴流の場合と同様に流速分布は相似形となることを示した。自由噴流はポテンシャルコア外側における速度分布の変曲点の存在により極めて不安定で、噴出後、わずかの距離で直ちに乱流に遷移すると考えられる。しかし、壁に垂直に衝突する壁噴流の場合には、壁の影響を大きく受ける。すなわち、ノズルから放出された噴流はポテンシャルコア外側で混合域(Mixing layer)を形成し乱れが生成されるが、ノズルと壁の距離が小さい場合にはポテンシャルコアを残したまま、壁に衝突しよどみ点領域が形成される。よどみ点において流速はいったんゼロとなるが、よどみ点を過ぎると流体は加速され、乱れは抑制されて層流域が保持されたまま壁噴流域が形成される。そのため、乱流への遷移はよどみ点からある程度離れた下流域で生じることになる。

従来の壁噴流の研究では、熱伝達の第2ピークの存在等から、ノズルレイノルズ数が数千以上の壁噴流はすべて乱流として取り扱われてきた⁽⁴⁾。しかし、液体噴流の場合には明確なピークが観察されない⁽⁵⁾等、層流-乱流遷移は必ずしも明確とはいえない。壁噴流で高い熱伝達特性を示すのは、よどみ点及びその近傍における壁噴流域であり、レイノルズ数の比較的低い壁噴流の場合には、この領域は層流域と考えることができる。本解析では、この領域の流れ及び熱伝達を取り扱う。

従来の壁噴流に関する解析は、主として平板における壁噴流に限られてきた。Glauert⁽²⁾は平板上の2次元及び軸対称層流壁噴流の解析を行い、層流の場合の相似解を求めるとともに、乱流壁噴流の流速分布に関する考察を加えた。Glauertは最初、運動方程式の積分の際に積分定数を無視したが、後に積分定数を含んだ解を提出している⁽⁶⁾。この積分定数は、壁噴流の境界層厚さがゼロとなる仮想原点と解釈される。Schwartz⁽⁷⁾らは仮想原点を含んだGlauertの解に基づいて、等温及び熱流速一定の場合の2次元壁噴流の熱伝達の解析を行い、壁温が変化する場合についても考察を加えた。Scholtz⁽⁶⁾は軸対称壁噴流の物質伝達の解析を行い、実験と解析の比較を行った。また、三田地ら⁽⁸⁾は仮想原点を無視することによって、2次元及び軸対称壁噴流の熱伝達を統一的に取り扱った。

解析の原点と仮想原点が実際に異なることは、Bajura⁽⁹⁾らの2次元噴流における流速分布の測定によって、確かめられている。彼らの実験では仮想原点はレイノルズ数が大きくなると実際の原点より遠くに移動することが示され、Schwartz及びScholtz等によって提案されている仮想原点の評価式の傾向と定性的に一致している。

これらは、伝熱面が平板の場合の解析であり、曲面の場合に適用することはできない。壁噴流を一般の曲面に適用する場合には、曲率を考慮する必要がある。曲面の場合には、よどみ点極近傍は曲率無限大の平板と近似できるが、よどみ点から離れると平板の解析と大きく異なるものと考えられる。また、仮想原点を考慮した解析は、相似解が存在する場合（等温）に限られて解かれており、相似解の存在しない場合（たとえば等熱流束等）の解析は行われていない。そこで、曲面上の壁噴流の流れ及び熱伝達に関して解析的検討を加えるとともに、仮想原点を考慮したときの熱流束一定の場合の熱伝達についても検討を加えた。曲面としては球殻内面及び円筒内面を取り扱った。本報告では、等温における解析結果について述べる。

2. 球殻内面に衝突する軸対称壁噴流の解析

2.1 速度分布

第1章に記述したようによどみ点から遠くない壁噴流域では、流れは層流と仮定することができる。そこで、層流軸対称流れを仮定して解析を行う。Fig. 1に解析の回転軸対称座標系 $x-y-\theta$ を示す。 $x-y-\theta$ 方向の速度成分を (u, v, w) とすると、基礎方程式は次のように表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{w^2}{r} \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{uw}{r} \frac{dr}{dx} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (ru) + \frac{1}{rR_c} \frac{\partial}{\partial y} (rR_c v) + \frac{1}{R_c} \frac{\partial}{r \partial \theta} (R_c w) = 0 \quad (4)$$

ここで、 R_c は壁面の曲率中心から (x, y, θ) までの距離であり、この場合 r 及び R_c は負の符号を持つとする。境界条件は

$$\begin{aligned} y=0 & : u=v=0 \\ y \rightarrow \infty & : u \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。Fig.1に示すように物体の子午線と中心軸のなす角を α とすると、

解析の原点と仮想原点が実際に異なることは、Bajura⁽⁹⁾らの2次元噴流における流速分布の測定によって、確かめられている。彼らの実験では仮想原点はレイノルズ数が大きくなると実際の原点より遠くに移動することが示され、Schwartz及びScholtz等によって提案されている仮想原点の評価式の傾向と定性的に一致している。

これらは、伝熱面が平板の場合の解析であり、曲面の場合に適用することはできない。壁噴流を一般の曲面に適用する場合には、曲率を考慮する必要がある。曲面の場合には、よどみ点極近傍は曲率無限大の平板と近似できるが、よどみ点から離れると平板の解析と大きく異なるものと考えられる。また、仮想原点を考慮した解析は、相似解が存在する場合（等温）に限られて解かれており、相似解の存在しない場合（たとえば等熱流束等）の解析は行われていない。そこで、曲面上の壁噴流の流れ及び熱伝達に関して解析的検討を加えるとともに、仮想原点を考慮したときの熱流束一定の場合の熱伝達についても検討を加えた。曲面としては球殻内面及び円筒内面を取り扱った。本報告では、等温における解析結果について述べる。

2. 球殻内面に衝突する軸対称壁噴流の解析

2.1 速度分布

第1章に記述したようによどみ点から遠くない壁噴流域では、流れは層流と仮定することができる。そこで、層流軸対称流れを仮定して解析を行う。Fig. 1に解析の回転軸対称座標系 $x-y-\theta$ を示す。 $x-y-\theta$ 方向の速度成分を (u, v, w) とすると、基礎方程式は次のように表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{w^2}{r} \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{uw}{r} \frac{dr}{dx} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (ru) + \frac{1}{rR_c} \frac{\partial}{\partial y} (rR_c v) + \frac{1}{R_c} \frac{\partial}{r \partial \theta} (R_c w) = 0 \quad (4)$$

ここで、 R_c は壁面の曲率中心から (x, y, θ) までの距離であり、この場合 r 及び R_c は負の符号を持つとする。境界条件は

$$\begin{aligned} y=0 & : u=v=0 \\ y \rightarrow \infty & : u \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。Fig.1に示すように物体の子午線と中心軸のなす角を α とすると、

$$\begin{aligned}
 r &= r_0(x) + y \cos \alpha \\
 R_c &= R_{c0}(x) + y \\
 \frac{dr}{dx} &= \frac{dr_0}{dx} = \sin \alpha
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

となる。主流が回転成分を持たない場合には $w=0$, $\partial/\partial\theta=0$ となる。さらに、境界層厚さが曲率に比べて十分に小さい場合には、連続の式の R_c は消えて結局、基礎方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
 \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r_0 u) + \frac{\partial}{\partial y}(r_0 v) = 0
 \tag{8}$$

となる。本解析では球殻内面に垂直に衝突する壁噴流を取り扱う。この場合、曲率半径は球の半径 R と一致する ($R_c=R$ = 一定)。球殻の内面に沿う軸対称噴流を取り扱う場合には $r_0 = -R \sin \varphi = -R \sin(x/R)$ となるので、式(8)は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u \cos(x/R)}{R \sin(x/R)} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0
 \tag{8'}$$

となる。Glauert⁽²⁾の解析にならって、速度の次元を持つ U を導入して次の無次元量を定義する。

$$\bar{x} = xU/\nu
 \tag{9a}$$

$$\bar{y} = yU/\nu
 \tag{9b}$$

$$u = U \cdot \bar{u} = U \cdot s(\bar{x}) \cdot f(\eta)
 \tag{9c}$$

$$v = U \cdot \bar{v}
 \tag{9d}$$

これらを用いて基礎方程式を書き直すと

$$\left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{u} \cos(x/R)}{\bar{R} \sin(x/R)} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \right.
 \tag{10}$$

$$\left. \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right.
 \tag{11}$$

となる。

ここで $\bar{R} = RU/\nu$ である。また、流れ関数 Ψ を次のように無次元化する

$$\bar{\Psi} = U\Psi/\nu^2
 \tag{12}$$

式(12)から \bar{u}, \bar{v} は

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{R \sin(x/R)} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} \\ \bar{v} &= -\frac{1}{R \sin(x/R)} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}}\end{aligned}\tag{13}$$

と表される。ここで、境界層厚さ $\delta(x)$ を用いて

$$\eta = \beta \cdot y / \delta(x)\tag{14}$$

を導入する。 β は定数である。 $\bar{\delta} = \delta \cdot U / v$ とすると、

$$\eta = \beta \cdot \bar{y} / \bar{\delta}\tag{14'}$$

となる。これを用いると偏微分は次式のように常微分に変換される。

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = -\frac{1}{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} \eta \frac{d}{d\eta}\tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\beta}{\bar{\delta}} \frac{d}{d\eta}$$

これを用いて、流れ関数は次のように求められる。

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{\beta} \bar{\delta} \cdot s(\bar{x}) \bar{R} \cdot \sin \frac{x}{R} \int f(\eta) d\eta\tag{16}$$

これから \bar{v} , $\partial \bar{v} / \partial \bar{y}$ は次のように表される。

$$\bar{v} = -\frac{1}{\sin(x/R)} \cdot \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{\delta} \cdot s \cdot \sin \frac{x}{R} \right) \int f d\eta - s \cdot \sin \frac{x}{R} \cdot \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} \cdot \eta \cdot f \right\}\tag{17}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\delta}} \frac{1}{\sin(x/R)} \left\{ \frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{\delta} \cdot s \cdot \sin \frac{x}{R} \right) \cdot f - s \cdot \sin \frac{x}{R} \cdot \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} \left(f + \eta \frac{df}{d\eta} \right) \right\}$$

さらに、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{ds}{d\bar{x}} \cdot f - \frac{s}{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} \eta \cdot \frac{df}{d\eta}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \beta \frac{s}{\bar{\delta}} \cdot \frac{df}{d\eta}\tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \beta^2 \frac{s}{\delta^2} \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

を基礎方程式に代入すると式(11)は

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\bar{\delta}}{\sin(x/R)} \cdot \frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{\delta} \cdot s \cdot \sin \frac{x}{R} \right) \cdot \frac{df}{d\eta} \cdot \int f d\eta - \frac{1}{\beta^2} \bar{\delta}^2 \frac{ds}{d\bar{x}} \cdot f^2 = 0 \quad (19)$$

となる。上式は

$$\begin{cases} \frac{\bar{\delta}}{\beta^2 \sin(x/R)} \cdot \frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{\delta} \cdot s \cdot \sin \frac{x}{R} \right) = a & (20) \\ -\frac{1}{\beta^2} \bar{\delta}^2 \cdot \frac{ds}{d\bar{x}} = b & (21) \end{cases}$$

が成立するとき常微分方程式となる。

球の半径 $R \rightarrow \infty$ の場合、すなわち $x/R \rightarrow 0$ の場合には平板と一致するはずである。このとき Glauert⁽²⁾ の解析から、 $\bar{\delta}, \beta, s$ は

$$\bar{\delta} \rightarrow \bar{x}^{-\frac{5}{4}}, \quad \beta = \frac{3}{4}, \quad s \rightarrow \frac{3}{4} \bar{x}^{-\frac{1}{4}} \quad (22)$$

となる。式(22)を式(20)及び(21)に代入し、 $x/R \rightarrow 0$ とすることにより $a=1, b=2$ が求められる。従って、式(20)(21)は次のようになる。

$$\frac{\bar{\delta}}{\sin(x/R)} \cdot \frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{\delta} \cdot s \cdot \sin \frac{x}{R} \right) = \frac{9}{16} \quad (23)$$

$$\bar{\delta}^2 \frac{ds}{d\bar{x}} = -\frac{9}{8} \quad (24)$$

式(24)を用いて式(23)を変形すると、

$$s \frac{d}{d\bar{x}} \left(\bar{\delta} \cdot s \cdot \sin \frac{x}{R} \right) = -\frac{1}{2} \bar{\delta} \cdot s \cdot \sin \frac{x}{R} \frac{ds}{d\bar{x}}$$

が得られる。積分すると

$$s^3 \cdot \bar{\delta}^2 \cdot \sin^2 \frac{x}{R} = \text{const}$$

となり、 $R \rightarrow \infty$ の場合の解から上式の右辺 $= 9 / (16 \cdot R^2 \cdot \bar{\delta}^2)$ となる。式(24)を右辺に代入し整理すると

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{8}{3} \bar{R}^2 s^3 \cdot \sin^2 \frac{x}{R}$$

が得られる。これを積分して整理すると

$$s = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4\bar{R}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{x}{2R} + \frac{a_0^3}{3R^3} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (25)$$

が得られる。式(25)において、 $R \rightarrow \infty$ の場合に式を簡単にするために、積分定数を $a_0^3/3R^3$ とおいた。また、 $\bar{\delta}$ 及び η はそれぞれ

$$\bar{\delta} = 3^{\frac{1}{2}} \bar{R}^{\frac{5}{4}} \frac{1}{\sin(x/R)} \left(-\frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{x}{2R} + \frac{a_0^3}{3R^3} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (26)$$

$$\eta = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{4} \bar{R}^{-\frac{5}{4}} \frac{\sin(x/R) \cdot \bar{y}}{\left(-\frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{x}{2R} + \frac{a_0^3}{3R^3} \right)^{\frac{3}{4}}} \quad (27)$$

と表される。

式(20)(21)における $a=1$, $b=2$ を運動方程式(19)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{d^3 F}{d\eta^3} + \frac{d^2 F}{d\eta^2} \cdot F + 2 \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 = 0 \quad (28)$$

ここで $F = \int f d\eta$ である。

式(28)の境界条件は

$$F(0) = \left(\frac{dF}{d\eta} \right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dF}{d\eta} \right)_\infty = 0 \quad (28')$$

である。式(28)及び(28')は Glauert⁽²⁾が導いた平板の場合の方程式と同じ形である。したがって、Glauertと同様に積分して解を求めることができる。

運動方程式(28)を解く。Fを掛けて積分し、境界条件を考慮すると

$$F \frac{d^2 F}{d\eta^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 + F^2 \frac{dF}{d\eta} = 0 \quad (29)$$

が求められる。さらに $F^{-\frac{3}{2}}$ を掛けて積分すると、

$$F^{-\frac{1}{2}} \frac{dF}{d\eta} + \frac{2}{3} F^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad (30)$$

が得られる。 $F=G^2$ とおいて式(30)に代入すると

$$\frac{dG}{d\eta} = \frac{1}{3} (1 - G^3) \quad (31)$$

となり、積分して

$$\eta = \log \frac{\sqrt{1+G+G^2}}{1-G} + \sqrt{3} \cdot \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}G}{2+G} \quad (32)$$

が得られる。

自由噴流では噴出された運動量が保存されるから、任意の位置において全領域で積分すると運動量流束は一定となる。壁噴流の場合には、壁面における摩擦抵抗のために噴出された運動量は保存されない。しかし、運動方程式を積分することにより、外部運動量流束(Exterior momentum flux) A が保存される。すなわち、平板上の軸対称壁噴流では

$$A = \int_0^{\infty} x u \left\{ \int_y^{\infty} x u^2 dy \right\} dy = \text{constant} \quad (33)$$

が成立する。球面に衝突する壁噴流の場合においても運動方程式を積分することにより

$$\begin{aligned} A &= \int_0^R u \cdot R \cdot \sin \frac{x}{R} \left\{ \int_y^R u^2 \cdot R \cdot \sin \frac{x}{R} dy \right\} dy \\ &= \frac{3}{4} \frac{v^4}{U} \int_0^{\infty} \frac{dF}{d\eta} \left\{ \int_{\eta}^{\infty} \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 d\eta \right\} d\eta = \text{constant} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。式(34)の {} の中は式(29)を用いて

$$\int_{\eta}^{\infty} \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 d\eta = -\frac{2}{3} \frac{dF}{d\eta} \cdot F + \frac{2}{9} (1 - F^3)$$

となる。上式と式(30)から式(34)右辺の積分を実行して

$$A = \frac{3}{40} \frac{v^4}{U} \quad (35)$$

が得られる。

次に摩擦係数を求める。壁面摩擦応力を τ_w とするとこれは

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (36)$$

と表される。右辺を書き直すと

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{4U^2}{3\nu} \frac{s(\bar{x})}{\delta} \left(\frac{d^2 F}{d\eta^2} \right)_{\eta=0}$$

となる。式(29)を用いて $d^2 F/d\eta^2$ を F , $dF/d\eta$ で表し、 $F = G^2$ の関係を用いると上式右辺は、

$$\left(\frac{d^2 F}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} = \frac{(dF/d\eta)_{\eta=0}}{3F^{1/2}(0)} = \frac{2}{3} \left(\frac{dG}{d\eta} \right)_{\eta=0} = \frac{2}{9} \quad (37)$$

となる。これらから計算し、まとめると、摩擦応力は

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{1}{9} \left(\frac{5}{2} \right)^{1/4} \left(\frac{A^3}{\nu R^{11}} \right)^{1/4} \frac{\sin(x/R)}{\left(\frac{x}{2R} - \frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{a_0^3}{R^3} \right)^{1/4}} \quad (38)$$

と求められる。

2.2 A及び a_0 の評価

以上の解析に示されるように、式(25)-(27)及び式(38)等は a_0 及びAあるいはUを含む。式(25)から明らかなように、分母=0となる x が存在し、その位置で流速は無限大になる。すなわち、本解析では仮想原点において噴流が湧き出していると仮定した解析を行っていることになり、Uは噴流の湧きだし量に関係する定数である。実際の噴流でAまたはUを求めるには式(34)の積分を行う必要があるが、壁面摩擦応力及びエントレインメント等の存在により、AまたはUを正確に評価することはきわめて困難である。ここでは、近似的にこれらの量を評価することを試みる。

Fig.2に球面に衝突する噴流の模式図を示す。よどみ点位置から球面に沿ってx座標をとる。噴流の境界層外側の圧力を p_∞ とする。球面が無限空間にある場合には、壁面圧力は $x=0$ で最大値をとり、やがて減少して無限遠圧力 p_∞ と等しくなる。Scholtz⁽¹⁰⁾の実験では、 $x/d=1$ において壁面上の圧力が p_∞ とほぼ等しくなることが示される。この位置は、よどみ点の近傍領域であり、したがって、ノズルから出た噴流は、流速が十分に大きい場合には、初期の運動量を保持していると考えることができる。圧力が p_∞ と等しくなるx座標を x_0 とし、 $x=0$ と x_0 が曲面の曲率中心となす角度を φ_0 とすると $\varphi_0 = x_0/R$ であり、 $x=0$ から $x=x_0$ まで噴流は自由流線を形成する。 $x=x_0$ における噴流の高さをhとすると、流体はこの位置において、壁面近傍の極薄い境界層領域を除き一様流速 u_0 で流出する。 $x=x_0$ で流体が流出する面積は $\pi h(2R-h)\sin\varphi_0$ となるので、ノズルから噴出する流量 $\pi d^2 u_0/4$ と $x=x_0$ における流出量を等しいとおくことによりhは、

$$h = R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \varphi_0} \frac{d^2}{R^2}} \right) \quad (39)$$

と求められる。この場合には外部運動量流束は式(34)を計算して

$$A = \int_0^h u_0 \cdot R \cdot \sin \varphi_0 \left\{ \int_y^h u_0^2 \cdot R \cdot \sin \varphi_0 dy \right\} dy \quad (40)$$

となる。式(40)は dy 以外は積分の外に出すことができ、これを計算すると $A = (1/2)h^2 u_0^3 R^2 \sin^2(x/R)$ となる。式(39)を用いると結局Aは、

$$A = \frac{1}{2} u_0^3 R^2 \sin^2 \varphi_0 \left\{ 2R^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \varphi_0} \frac{d^2}{R^2}} \right) - \frac{d^2}{4 \sin \varphi_0} \right\} \quad (41)$$

となる。式(41)に示されるようにノズルから噴出される流速 u_0 、及び x_0 の値が知られば、Aを求めることができる。 $R \gg d$ の場合、式(41)を簡単にすることができる。すなわち、このとき式(41)の $\sqrt{\quad}$ の中を $(1-z)$ と表すと z は d/R の場合でも1より小さい。そこでTaylor展開を行うと、

$$\sqrt{1-z} \approx 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 \quad (42)$$

が得られる。これを式(41)に代入して

$$A \approx \frac{1}{128} u_0^3 d^4 \quad (43)$$

としてよい。これは、Sholtzら⁽⁶⁾が軸対称平板壁噴流で求めた関係と一致する。式(43)と式(35)からUと u_0 の関係

$$U = \frac{48}{5} \frac{v^4}{u_0^3 d^4} = \frac{48}{5} \text{Re}_d^{-4} \cdot u_0 \quad (44)$$

が得られる。ここで $\text{Re}_d = u_0 d / v$ であり、ノズル径とノズル出口流速から定められるレイノルズ数である。

次に a_0 を求める。 $x=x$ における壁噴流の流量を求め、それがノズルから放出される流量と等しいとして a_0 を求める。任意の x における壁噴流の流量Qは

$$Q = 2\pi \sin \frac{x}{R} \int_0^R u(R-y) dy \quad (45)$$

とあらわされる。式(45)に式(9c)(14)を用いると

$$Q = \frac{8}{3} R \pi v \cdot \bar{\delta} \cdot s(\bar{x}) \cdot \sin \frac{x}{R} \cdot \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\delta}{R} \int_0^\infty \eta \frac{dF}{d\eta} d\eta \right) \quad (46)$$

となる。右辺の積分は、 $F=G^2$ 及び式(31)を用いて変形し、式(32)を用いると、

$$\int_0^\infty \eta \frac{dF}{d\eta} d\eta = \left[\eta G - \log(1-G^3) \right]_{G=0}^{G=1} = \frac{3}{2} \log 3 + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = 1.5151 \quad (47)$$

となり、オーダー1の量である。 $R \gg \delta$ としてよいから、式(46)の右辺の δ/R は無視することができる。結局、流量は

$$Q = 2 \cdot 3^{1/4} \pi \cdot \frac{v^2}{U} \bar{R}^3 \left(-\frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{x}{2R} + \frac{a_0^3}{3R^3} \right)^{1/4} \quad (48)$$

となる。式(48)式がノズルからの流量 $\pi d^2 u_0 / 4$ と等しいとおくと、次式を得る。

$$\frac{a_0^3}{3R^3} = \frac{1}{5 \cdot 4^4} \left(\frac{d}{R} \right)^3 \text{Re}_d + \frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} - \frac{x}{2R}$$

これから、次式が得られる。

$$\bar{a}_0^3 = \frac{3}{5 \cdot 4^4} \text{Re}_d \cdot \bar{d} + \frac{3}{4} \bar{R}^3 \cdot \sin \frac{2x}{R} - \frac{3}{2} \bar{R}^2 \cdot \bar{x}^2 \quad (49)$$

$$\hat{a}_0^3 = \frac{3}{5 \cdot 4^4} \text{Re}_d + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{d} \right)^3 \cdot \sin \frac{2x}{R} - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{d} \right)^2 \cdot \hat{x}^2 \quad (50)$$

が得られる。ここで $\hat{x} = x/d$, $\bar{a}_0 = a_0 U / v$, $\hat{a}_0 = a_0 / d$ である。また、

$$\bar{d} = Ud/v = \frac{48}{5} \text{Re}_d^{-3} \quad (51)$$

である。

式(25)(26)から、 $-(1/4) \sin(2x/R) + (x/2R) + (a_0^3/3R^3) = 0$ のとき、流速は無限大となり境界層厚さは0となる。2.2節はじめにおいて、本解析は仮想原点において噴流が湧き出しているとした仮定に基づくこと述べたが、 a_0 は仮想原点位置を示す量である。上式を満たす x の位置において噴流が湧き出していると仮定することができる。上式を満たす x の値は負である。すなわち、この位置は現実の物理空間内には存在しない。噴流は仮想空間における仮想原点から湧き出し、 $x=0$ においてある有限の流速をもって現れる。 $x/R \rightarrow 0$ の場合には式(48)は次のようになる。

$$Q = 2\pi \frac{v^2}{U} (\bar{x}^3 + \bar{a}_0^3)^{\frac{1}{3}} \quad (52)$$

したがって、式(49),(50)は

$$\bar{a}_0^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^4 \text{Re}_d^{-8} - \bar{x}^3 \quad (53)$$

$$\hat{a}_0^3 = \frac{1}{1280} \text{Re}_d - \hat{x}^3 \quad (53')$$

と表される。x=0において流量が等しいとすると

$$\bar{a}_0 = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \text{Re}_d^{-\frac{8}{3}} \quad (54)$$

$$\hat{a}_0 = 0.1328 \text{Re}_d^{\frac{1}{3}} \quad (54')$$

となる。

式(54)からわかるように、 $\bar{a}_0 > 0$ である。このことは、軸対称壁噴流の場合、噴流の仮想原点は物理空間の中には存在しないことを意味する。

以上は流量に基いて \hat{a}_0 を評価した結果である。次に境界層厚さ式(26)を検討しよう。式(26)から、境界層厚さはx=0からxが増加するにつれて減少し、極小値を示した後増加することがわかる。これは、物理的にはよどみ点近傍の加速域において境界層厚さが減少することを意味する。また、これは、壁面圧力を考えると、よどみ点において圧力は最大値を示し、その後減少して、加速が終了した位置において周囲圧力と等しくなることを意味している。境界層厚さが最小値を示すxの値は式(26)の極値を求めることにより、

$$\frac{x}{2R} - \frac{1}{4} \sin \frac{x}{R} \cdot \cos \frac{x}{R} - \frac{3}{4} \tan \frac{x}{R} = \frac{a_0^3}{3R^3}$$

を満たす。したがって、これから a_0 とxの関係は

$$\hat{a}_0 = 3^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R}{d}\right) \left(\frac{x}{2R} - \frac{1}{4} \sin \frac{x}{R} \cos \frac{x}{R} - \frac{3}{4} \tan \frac{x}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (55)$$

と求められる。x/R→0の場合には式(55)は

$$\hat{a}_0 = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \hat{x} \quad (56)$$

となる。従来の実験から壁面圧力は $\hat{x} = 1 \sim 1.5$ で周囲圧力と等しくなることが示されており、 \hat{x} の実験値を用いることにより \hat{a}_0 を求めることができる。

式(9c),(27)等においてx, y, u, δ等をUを用いて無次元化した。しかし、Uは物理量としてとらえることが難しい。実際の流れにおいては、 $\hat{u} = u/u_0$, $\hat{x} = x/d$ 等の量を用いて表す方が理解しやすい。そこで、uとUの関係式(44)を用いて、 u/u_0 , \hat{s} , $\hat{\delta} = \delta/d$ を求める。それらを以下に示す。

$$\hat{u} = \frac{u}{u_0} = \frac{48}{5} \text{Re}_d^{-4} \cdot s(\bar{x}) \cdot f(\eta) \quad (57)$$

$$s(\bar{x}) = \frac{5^{\frac{3}{2}} \text{Re}_d^{\frac{9}{2}}}{2^8 3^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left\{ -\frac{3}{4} \left(\frac{R}{d} \right)^3 \sin \frac{2x}{R} + \frac{3}{2} \left(\frac{R}{d} \right)^2 \left(\frac{x}{d} \right) + \left(\frac{a_0}{d} \right)^3 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (58)$$

$$\hat{\delta} = 2 \left(\frac{3}{5} \right)^{\frac{1}{4}} \text{Re}_d^{-\frac{1}{4}} \frac{\left\{ -\frac{3}{4} \left(\frac{R}{d} \right)^3 \sin \frac{2x}{R} + \frac{3}{2} \left(\frac{R}{d} \right)^2 \frac{x}{d} + \left(\frac{a_0}{d} \right)^3 \right\}^{\frac{3}{4}}}{(R/d) \sin(x/R)} \quad (59)$$

2.3 熱伝達

温度境界層厚さが球殻半径Rより十分小さいとするとエネルギー方程式は次のように表される。

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (60)$$

境界条件 $\begin{cases} y=0 & : T = T_w \\ y=R & : T = T_b \end{cases}$

ここで、ノズルから流出する流体温度と無限遠方における流体温度は等しいとして温度を次のように無次元化する

$$T - T_b = (T_w - T_b) \cdot \bar{T}(\eta) \quad (60')$$

T_b, T_w 及び κ はそれぞれ、無限遠における流体温度、球表面温度及び温度伝導率である。式(9c),(15),(17)を用いて式(60)を変形すると次式が求められる。

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\eta^2} + \text{Pr} \cdot F(\eta) \frac{d\bar{T}}{d\eta} = 0 \quad (61)$$

境界条件 $\begin{cases} \eta=0: & \bar{T}=1 \\ \eta \rightarrow \infty: & \bar{T}=0 \end{cases}$

式(61)を積分すると

$$\bar{T} = 1 + \left(\frac{d\bar{T}}{d\eta} \right)_0 \int_0^\eta \exp \left(-\text{Pr} \int_0^\eta F d\eta \right) d\eta \quad (62)$$

が得られる。式(62)において、無限遠まで積分することにより次式を得る。

$$\left(\frac{d\bar{T}}{d\eta}\right)_0 = -\frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\eta F d\eta\right) d\eta} \quad (63)$$

式(31)式から $d\eta = 3dG/(1-G^3)$ となる。これを用ると、

$$\int_0^\eta F d\eta = \int_0^\eta G^2 d\eta = -\log(1-G^3)$$

となる。これを用いて、式(63)分母は

$$\int_0^\infty \exp\left(-Pr \int_0^\eta F d\eta\right) d\eta = 3 \int_0^1 (1-G^3)^{Pr-1} dG \quad (64)$$

となる。式(64)右辺の積分はベータ関数 B 及びガンマ関数 Γ を用いて

$$\int_0^1 (1-G^3)^{Pr-1} dG = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, Pr\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma(Pr)}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right)} \quad (65)$$

と表される。これを用いると式(63)は

$$\left(\frac{d\bar{T}}{d\eta}\right)_0 = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma(Pr)} \quad (66)$$

となる。従って、エネルギー方程式の解は

$$\bar{T} = 1 - \frac{3\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma(Pr)} \int_0^G (1-G^3)^{Pr-1} dG \quad (67)$$

となる。伝熱面表面における熱流束 q は

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0 = \lambda(T_w - T_b) \frac{4U}{3\nu} \frac{1}{\delta} \left(\frac{d\bar{T}}{d\eta}\right)_0 = \lambda(T_w - T_b) \frac{4U}{3\nu} \frac{1}{\delta} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma(Pr)} \quad (68)$$

となり、これからヌッセルト数が求められる。代表径としてノズル直径 d 及び原点からの座標 x を用いたヌッセルト数をそれぞれ Nu_d 及び Nu_x とすると、 Nu_d および Nu_x は次のように求められる。

$$Nu_d = \frac{d \cdot q}{\lambda(T_w - T_b)} = 4 \cdot 3^{-\frac{7}{4}} R^{-\frac{5}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(Pr)} \frac{\bar{d} \cdot \sin(x/R)}{\left(-\frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{x}{2R} + \frac{a_0^3}{3R^3}\right)^{\frac{3}{4}}} \quad (69)$$

$$Nu_x = \frac{x \cdot q}{\lambda(T_w - T_b)} = 4 \cdot 3^{-\frac{7}{4}} R^{-\frac{5}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(Pr)} \frac{\bar{x} \cdot \sin(x/R)}{\left(-\frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{x}{2R} + \frac{a_0^3}{3R^3}\right)^{\frac{3}{4}}} \quad (70)$$

式(35)(43)を用いてUまたはAをノズルレイノルズ数 Re_d を用いて表すと、式(69)(70)は次のようになる。

$$Nu_d = \frac{5^{\frac{1}{4}}}{8} \left(\frac{d}{R}\right)^{\frac{5}{4}} Re_d^{\frac{3}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(Pr)} \frac{\sin(x/R)}{\left(-\frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{x}{2R} + \frac{a_0^3}{3R^3}\right)^{\frac{3}{4}}} \quad (71)$$

$$Nu_x = \frac{5^{\frac{1}{4}}}{8} \left(\frac{d}{R}\right)^{\frac{5}{4}} Re_d^{\frac{3}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(Pr)} \frac{\sin(x/R) \cdot \frac{x}{d}}{\left(-\frac{1}{4} \sin \frac{2x}{R} + \frac{x}{2R} + \frac{a_0^3}{3R^3}\right)^{\frac{3}{4}}} \quad (72)$$

$\Gamma(1/3 + Pr)/\Gamma(1/3)\Gamma(Pr)$ とPrとの関係をTable 1に示す。

2.4 $R \rightarrow \infty$ の場合

$R \rightarrow \infty$ の場合、 $x/R \rightarrow 0$ として $\sin(x/R)$ 等を展開して整理すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} s &= \frac{3}{4} \frac{1}{(\bar{x}^3 + \bar{a}_0^3)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2^{-8} \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}} Re_d^{\frac{9}{2}} \frac{1}{(\hat{x}^3 + \hat{a}_0^3)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\bar{\delta} = \frac{(\bar{x}^3 + \bar{a}_0^3)^{\frac{3}{4}}}{\bar{x}} \tag{74}$$

$$\hat{\delta} = 2\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \text{Re}_d^{-\frac{3}{4}} \frac{(\hat{x}^3 + \hat{a}_0^3)^{\frac{3}{4}}}{\hat{x}}$$

$$Nu_x = \frac{3}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \text{Pr}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(\text{Pr})} \frac{\bar{x}^2}{(\bar{x}^3 + \bar{a}_0^3)^{\frac{3}{4}}} = \frac{5^{\frac{1}{4}}}{8} 3^{\frac{3}{4}} \text{Re}_d^{\frac{3}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \text{Pr}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(\text{Pr})} \frac{\hat{x}^2}{(\hat{x}^3 + \hat{a}_0^3)^{\frac{3}{4}}} \tag{75}$$

$$Nu_d = Nu_x \cdot \frac{d}{x} = \frac{5^{\frac{1}{4}}}{8} 3^{\frac{3}{4}} \text{Re}_d^{\frac{3}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \text{Pr}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(\text{Pr})} \frac{\hat{x}}{(\hat{x}^3 + \hat{a}_0^3)^{\frac{3}{4}}} \tag{76}$$

となる。ここで、 $\hat{x} = x/d$ である。これらは、平板上の軸対称噴流と一致する。
Pr=7の場合にはTable 1から $\Gamma(1/3 + \text{Pr})/\Gamma(1/3)\Gamma(\text{Pr}) = 0.70310$ であるから、式(75)(76)は

$$Nu_x = 0.2996 \text{Re}_d^{\frac{3}{4}} \frac{\hat{x}^2}{(\hat{x}^3 + \hat{a}_0^3)^{\frac{3}{4}}} \tag{77}$$

$$Nu_d = 0.2996 \text{Re}_d^{\frac{3}{4}} \frac{\hat{x}}{(\hat{x}^3 + \hat{a}_0^3)^{\frac{3}{4}}} \tag{78}$$

となる。

2.5 結果と考察

Fig.3-5に $\text{Re}_d=10^4$ の場合の $\bar{\delta}$ と \bar{x} の関係を示す。Fig.3は $\bar{R}=10^{-10}$ の場合の $\bar{\delta}$ と x/R (x/R は $x=0$ と $x=R$ の間の角度を表す)の関係を示したものである。 x/R は $\pi/2$ までをプロットした。 $\bar{R} = \bar{d} \cdot R/d$ である。式(51)からこの場合 $\bar{d} = 9.6 \times 10^{-12}$ である。したがって、 $\bar{R} = 10^{-10}$ は、 $R/d=10.4$ に相当する。図で実線は平板の場合の結果であり、三角印は平板で $a_0=0$ とした場合の結果である。 \bar{a}_0 は式(54)から求めた値を用いた。 x/R の小さい領域で $\bar{\delta}$ が減少しているのは a_0 の影響である。実際の衝突噴流の場合にも、流体はよどみ点から遠ざかるときに加速されるため境界層厚さは薄くなり、その後壁噴流域で境界層厚さは増加する。本解析の場合、曲率の影響が現れるのはFig.3から $x/R > 1.2$ の領域であるが、平板の場合との差はあまり大きくない。Fig.4及び5はそれぞれ $\bar{R} = 10^{-9}$ 及び $\bar{R} = 10^{-11}$ の場合の結果である。これらはそれぞれ、 $R/d=104.2$ 及び 1.04 の場合に対応する。曲率半径がノズル径に比べて大きい場合には、 $x/R \rightarrow 0$ の近傍で境界層厚さは減少しやがて増加に転ずる。すなわ

ち、 a_0 の影響は $x/R \rightarrow 0$ の極近傍に限られる(Fig.4)。また、 $R/d=1.04$ の場合には $\bar{\delta}$ は $x/R \sim \pi/2$ まで減少する。すなわち、 a_0 の影響は $x/R \sim \pi/2$ にまで及ぶ。このことは、 $x/R \sim \pi/2$ の領域までよどみ点の特性が持続され、境界層が発達しないことを意味する(Fig.5)。

Fig.6-8に $Re_d=10^4$ の場合の $s(\bar{x})$ と x の関係を示す。Fig.6は $\bar{R}=10^{10}$ の場合の結果である($R/d=10.42$ に相当)。実線は $a_0 \neq 0$ とした場合の平板の結果であり、三角印は平板で $a_0=0$ の場合を表す。 a_0 の影響により $x/R \rightarrow 0$ では流速は一定値を示す。この場合も曲率の影響が現れるのは $x/R > 1$ の領域であり、球面の場合には平板の場合に比べて面に沿う流速が大きくなるのがわかる。しかし、平板の場合との差はさほど大きくない。Fig.7及び8はそれぞれ $\bar{R}=10^8$ ($R/d=1041$)及び $\bar{R}=10^{11}$ ($R/d=1.04$)の場合の結果である。 $R/d=1.04$ の場合には解析した $0 \leq x/R \leq \pi/2$ の全領域で流速は一定値を示す。

Fig.9及び10に境界層内流速分布 \bar{u} と \bar{y} の関係を示す。Fig.9は $Re_d=10^4$ の場合の $\bar{x}=4.8 \times 10^{-11}$ の位置における \bar{u} と \bar{y} の関係を x/R をパラメーターとして示したものである。 $\bar{x}=4.8 \times 10^{-11}$ は $x/d=5$ に対応する。図で実線は平板の場合の流速分布である。 $x/R=0.5$ の場合には流速分布は平板の場合とほとんど変わらないが、 $x/R > 0.5$ となると、最大流速を示す位置は次第に壁から外側に移動し、また、流速も増加することがわかる。 $x/R=\pi/2$ の場合には流速は平板の場合の20%程度高くなる。Fig.10に同じレイノルズ数における $\bar{x}=4.8 \times 10^{-11}$ ($x/d=5$)及び $\bar{x}=9.6 \times 10^{-11}$ ($x/d=10$)における流速分布の比較を示す。

Fig.11-16に $Re_d=10^4$ の場合の Nu_x 及び Nu_d と x の関係を示す。Fig.11は $\bar{R}=10^9$ ($R/d=104.2$)の場合の Nu_x と x/R の関係を示したものである。 $\bar{\delta}$ 、 s の場合と同様に R/d が大きい場合には a_0 の影響は $x/R \rightarrow 0$ 付近に極限される。すなわち、この場合、 $x/R \rightarrow 0$ においてヌッセルト数は急速に減少する。 x/R が増加すると a_0 の影響は小さくなり、 $Nu_x \rightarrow \bar{x}^{-1/4}$ となる。この場合、平板と球面によるヌッセルト数の違いは小さい。Fig.12は $\bar{R}=10^{11}$ ($R/d=1.04$)の場合の Nu_x と x/R の関係を示す。この場合、 a_0 の影響は大きく、 $a_0=0$ とした場合の解析は Nu_x が x とともに減少する結果を示しているのに、 $a_0 \neq 0$ の場合には Nu_x は x/R とともに増加する。これは、 R と d がほとんど等しいため、 $x/R \sim \pi/2$ でもよどみ点近傍の流れとなるためである。また、曲率の影響もFig.11の場合よりも大きくなるのがわかる。Fig.13は横軸として \bar{x} をとり、 $\bar{R}=10^{10}$ ($R/d=10.4$)と $\bar{R}=10^8$ ($R/d=1042$)を比較したものである。 a_0 の影響は $\bar{x} \sim 5 \times 10^{11}$ までで、 x が大きくなると a_0 の影響は無視することができる。

Fig.14-16は Nu_d と x の関係を示したものである。Fig.14は $\bar{R}=10^8$ ($R/d=1042$)の場合、Fig.15は $\bar{R}=10^{10}$ ($R/d=10.42$)の場合の図であり、Fig.16はこれらを比較したものである。Fig.15及び16の範囲では、平板と球面における噴流による Nu_d の違いは小さいことがわかる。また、 Nu_d の場合においても、 $x/R \rightarrow 0$ では a_0 の影響が顕著となるとともに、式(68)に示されるように境界層厚さは $x=0$ で無限大となるため、 x が0に近づくとつれて Nu_d は減少し、 $x \rightarrow 0$ で $Nu_d \rightarrow 0$ となる。実際の衝突噴流の場合、よどみ点領域において境界層厚さは一定値を示すためヌッセルト数も一定となる。このような、 $x \rightarrow 0$ における本解析と熱伝達実験結果との不一致は湧き出し流れ(本解析)とよどみ点流れの違いに基づく。

3. 円筒内面上の2次元壁噴流の解析

3. 1 速度分布

解析の物理座標系はFig.1と同じである。ただし、この場合は対称軸はなく、紙面に垂直方向に無限に長いとする。この曲面線型座標 (Curvilinear coordinate system) において、壁面が曲率半径 $R_c(x)$ を持つ場合、運動方程式及び連続の式は一般に次のように表される⁽¹⁾。

$$\frac{R_c}{R_c + y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R_c + y} = -\frac{R_c}{R_c + y} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{R_c + y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \quad (79)$$

$$-\frac{u^2}{R_c + y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (80)$$

$$\frac{R_c}{R_c + y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{R_c + y} = 0 \quad (81)$$

ここで、 R_c は $x=x$ における曲面の曲率半径を示す。境界層厚さが曲率半径よりも十分に小さいとすると、式(80)から、境界層内外の圧力差は

$$p(\delta) - p(0) = \rho \int_0^\delta \frac{u^2}{R_c} dy = \frac{\rho}{R_c} \int_0^\delta u^2 dy \quad (82)$$

と表される。流速は $y=0$ で0、 $y=\delta$ (境界層外縁) で $u=U_\infty$ とすると、上式の u を代表流速 U_∞ の1/2で近似して積分を実行すると

$$\{p(\delta) - p(0)\} / (\rho U_\infty^2 / 2) = \delta / R_c \quad (83)$$

となる。

式(83)右辺は近似的に0とおくことができる。すなわち、一般に曲率がある面に沿う流れでは、曲率半径方向に圧力勾配を持つが、境界層厚さが曲率半径より十分に小さい場合には、式(80)左辺は0とすることができ、境界層厚さ方向に圧力は一定であると考えてよい。また、壁噴流の境界層外側は圧力一定であるから $\partial p / \partial x = 0$ とすることができる。

したがって、基礎方程式(80)(81)は

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (85)$$

と表される。

これは、平板上の2次元噴流の場合と同じ方程式である。すなわち、曲率半径が境界層厚さに比べて十分大きい2次元曲面上の噴流の場合には、2次元平板の壁噴流の取り扱いとまったく同じになる。

第1章で述べたように、平板の場合の解析は、流れがGlauert⁽²⁾により解かれている。また、熱伝達はSchwartz⁽⁷⁾及び三田地ら⁽⁸⁾により取り扱われている。しかし、Schwartz及び三田地らの熱伝達の解析結果は、前節における解析結果及び実験等との比較が容易ではないので、比較しやすい形の解を求める。

式(9)の無次元化を導入すると基礎方程式は

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (86)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (87)$$

となる。 \bar{u}, \bar{v} は式(12)に代わって

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \quad (88)$$

と求められる。式(15)の関係を考慮して上式を積分すると式(16)の変わりに

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{\beta} s(\bar{x}) \cdot \bar{\delta} \cdot \int f(\eta) d\eta \quad (89)$$

が得られる。これから以下の式が求められる。

$$\bar{v} = -\frac{1}{\beta} \left\{ \frac{d}{d\bar{x}} (s \cdot \bar{\delta}) \int_0^\eta f \cdot d\eta - s \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} \eta \cdot f \right\}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{ds}{d\bar{x}} f - \frac{s}{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} \eta \frac{df}{d\eta} \quad (90)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \beta \frac{s}{\bar{\delta}} \frac{df}{d\eta}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \beta^2 \frac{s}{\bar{\delta}^2} \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

式(90)を基礎方程式に代入して整理すると、次の式が得られる。

$$\frac{d^3 F}{d\eta^3} + \frac{\bar{\delta}}{\beta^2} \frac{d}{d\bar{x}} (s \cdot \bar{\delta}) \frac{d^2 F}{d\eta^2} - \frac{\bar{\delta}^2}{\beta^2} \frac{ds}{d\bar{x}} \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 = 0 \quad (91)$$

ここで、 $F = \int f d\eta$ である。式(91)は

$$-\frac{\bar{\delta}^2}{\beta^2} \frac{ds}{d\bar{x}} = a$$

$$\frac{\bar{\delta}}{\beta^2} \frac{d}{d\bar{x}} (s \cdot \bar{\delta}) = b \quad (92)$$

が成り立つとき常微分化される。Glauert⁽²⁾の解析と比較することにより

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad \beta = 1/4 \quad (93)$$

となる。式(93)を用いて式(92)を積分すると

$$s(\bar{x}) = \frac{1}{4} \frac{1}{(\bar{x} + \bar{c})^{\frac{1}{2}}} \quad (94)$$

$$\bar{\delta} = (\bar{x} + \bar{c})^{\frac{3}{2}} \quad (95)$$

が得られる。ここで $\bar{c} = cU/\nu$ を表し、 c は積分定数である。また、 η は

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{\bar{y}}{(\bar{x} + \bar{c})^{\frac{1}{2}}} \quad (96)$$

となる。

前節と同様に運動方程式を積分して外部運動量流束保存の式が求められる。

$$A = \int_0^R u \left(\int_y^R u^2 dy \right) dy = \frac{U\nu^2}{4} \int_0^\infty \frac{dF}{d\eta} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{dF}{d\eta} \right)^2 d\eta \right\} d\eta \quad (97)$$

= constant

式(96)右辺の積分は1/10となるので

$$A = \frac{U\nu^2}{40} \quad (98)$$

が得られる。

3.2 A及びcの評価

2.2節と同様に、幅 d のスロットから一定流速 u_0 で放出される噴流と式(97)との関係を求めよう。理想流体を仮定すると円筒内面にあたる噴流の場合にもFig.2で表すことができる。流れは自由流線を形成して壁面に衝突し、 $x=x_0$ で壁面の圧力が外側圧力と等しくなるとすると、その位置で壁に沿う流速が一樣となる。 $x=x_0$ で壁噴流の高さを h とすると、ノズルから吹き出す流量と左右に流れる壁噴流の流量が等しいとして、

$$h = \frac{1}{2} d \quad (99)$$

が得られる。また、式(97)から

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^h u_0 \left(\int_y^h u_0^2 dy \right) dy = \frac{1}{2} h^2 u_0^3 \\
 &= \frac{1}{8} d^2 u_0^3
 \end{aligned}
 \tag{100}$$

が得られる。上式と式(98)からUは

$$U = \frac{5}{\nu^2} d^2 u_0^3 = 5 \text{Re}_d^2 \cdot u_0 \tag{101}$$

と求められる。

式(101)を用いると

$$\bar{d} = 5 \text{Re}_d^3 \tag{102}$$

となる。

次に \bar{c} の評価を行う。 $\bar{c} \neq 0$ の場合、 $x=0$ における境界層厚さ、流速は有限となる。そこで、 $x=0$ における壁噴流の流量を計算し、それがノズルから出る流量と等しいとして \bar{c} を求める。 $x=0$ における壁噴流の流量は

$$Q = 2 \int_0^\infty (u)_{x=0} dy \times 1 = u_0 d \times 1$$

と表される。ここで上式の1は、スパン方向の長さとして単位長さをとったことを示している。上式の積分で式(9b)(9c)および $F(\infty)=1$ を用いると、

$$Q = 2\nu(\bar{c})^{\frac{1}{2}} \tag{103}$$

が求められ、結局、 \bar{c} は

$$\bar{c} = \frac{1}{16} \text{Re}_d^4 \tag{104}$$

と求められる。式(101)を用いて式(104)を変形すると、 $\hat{c} = c/d$ として、

$$\hat{c} = \frac{1}{80} \text{Re}_d \tag{105}$$

が得られる。

式(95)からわかるように、境界層厚さは極値をとらず単調に増加する。これは衝突噴流の振舞いとは異なると考えられる。2次元壁噴流の場合は、通常は衝突壁噴流ではなく、伝熱面に平行なスロットからの噴流である。Fig.1(b)に模式図を示す。この場合にはよどみ点は形成されず、伝熱面上の圧力は周囲流体の圧力と等しくなる。すなわち、境界層はスロット出口から発達し、厚さは増加し続ける。本解析は物理的にはFig.1(b)の場合の壁噴流に対応する。壁噴流は下流において速度分布が相似になるから、衝突壁噴流に対してもよどみ点近傍以外では本解析を適用することができる。

Fig.1(b)の場合の仮想原点を評価してみよう。まず、式(98)のAとUの関係を求める。衝突噴流の場合には、ノズルからの流れが+xと-xの2方向に分かれるが、この場合にはx方向のみに向かうので式(100)において $h=d$ となる。したがって

$$A = \frac{1}{2} d^2 u_0^3 \quad (106)$$

となり、式(101)に代わって

$$U = 20u_0^3 d^3 \quad (107)$$

が得られる。

これから、衝突噴流の場合と同様に $x=0$ における流量が等しいとおいて

$$\hat{c} = \frac{1}{320} \text{Re}_d \quad (108)$$

となる。

衝突噴流に対して得られた式(101)及び式(105)を用いると式(94)-(96)は以下のように表される。

$$s(\hat{x}) = \frac{1}{4\sqrt{5}} \text{Re}_d^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{(\hat{x} + \hat{c})^{\frac{1}{2}}} \quad (109)$$

$$\bar{\delta} = 5^{\frac{3}{4}} \text{Re}_d^{\frac{3}{4}} (\hat{x} + \hat{c})^{\frac{3}{4}} \quad (110)$$

$$\eta = \frac{5^{\frac{1}{4}}}{4} \text{Re}_d^{\frac{3}{4}} \frac{\hat{y}}{(\hat{x} + \hat{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (111)$$

3.3 熱伝達

エネルギー方程式及び境界条件は式(60)と同じである。前節と同様に $T - T_b = (T_w - T_b) \cdot \bar{T}(\eta)$ において、式(9c),(9d),(94)-(96)を用いて無次元化すると

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\eta^2} + \text{Pr} \cdot F(\eta) \frac{d\bar{T}}{d\eta} = 0 \quad \text{B.C.} \begin{cases} \eta = 0: \bar{T} = 1 \\ \eta \rightarrow \infty: \bar{T} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (112)$$

となる。これは式(61)式と同じである。前節の方法と同様に解いて式(67)を得る。結局ヌッセルト数は

$$Nu_R = \frac{Rq}{\lambda(T_w - T_b)} = \frac{UR}{4\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \text{Pr}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(\text{Pr})} \frac{1}{(\bar{x} + \bar{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (113)$$

$$Nu_x = \frac{xq}{\lambda(T_w - T_b)} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \text{Pr}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(\text{Pr})} \frac{\bar{x}}{(\bar{x} + \bar{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (114)$$

$$Nu_d = \frac{dq}{\lambda(T_w - T_b)} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right) \bar{d}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma(Pr) (\bar{x} + \bar{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (115)$$

と表される。式(101),(105)を用いて式(114)(115)を書き直すと

$$Nu_x = 2^{-\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot Re_d^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right) \hat{x}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma(Pr) (\hat{x} + \hat{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (116)$$

$$Nu_d = 2^{-\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot Re_d^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right) 1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma(Pr) (\hat{x} + \hat{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (117)$$

となる。Pr=7の場合には、式(116),(117)は以下のようにになる。

$$Nu_x = 0.44205 \cdot Re_d^{\frac{3}{4}} \frac{\hat{x}}{(\hat{x} + \hat{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (118)$$

$$Nu_d = 0.44205 \cdot Re_d^{\frac{3}{4}} (\hat{x} + \hat{c})^{-\frac{3}{4}} \quad (119)$$

4. ま と め

第2章及び第3章においてそれぞれ球殻内面及び円筒内面に衝突する壁噴流を解析的に取り扱い、流れ及び熱伝達の解を求めた。いずれの場合も $u = U \cdot s(\bar{x}) \cdot f(\eta)$ とおいて境界層厚さ δ を導入し、 $\eta = \beta \cdot y / \delta$ を用いて整理すると、 f に関して同じ形の常微分方程式が得られる。特に、円筒内面上の壁噴流の解析において示したように、円筒内面のみならず2次元曲面上における基礎方程式は、曲率が境界層厚さに比べて小さい場合には平板上の壁噴流の方程式と一致する。

運動方程式の積分において積分定数（第2章では a_0 、第3章では c ）が現れる。この積分定数は、物理的には仮想原点（曲率半径 $R \rightarrow \infty$ の場合、 $x = -a_0$ または $x = -c$ において壁噴流が湧き出す）を表す値として意味づけられる。しかし、軸対称壁噴流の場合には、2.2節に述べたように $x = -a_0$ は物理空間内には存在しない。

2次元壁噴流の解析は、Fig.1bに示すスロットから噴出される壁噴流を模擬するものであり、境界層厚さは流れ方向に増大し続ける。したがって、この解析は、衝突2次元噴流のよどみ点近くの流れを模擬することはできない。しかし、よどみ点から離れた領

$$Nu_d = \frac{dq}{\lambda(T_w - T_b)} = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right) \bar{d}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(Pr)(\bar{x} + \bar{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (115)$$

と表される。式(101),(105)を用いて式(114)(115)を書き直すと

$$Nu_x = 2^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot Re_d^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right) \hat{x}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(Pr)(\hat{x} + \hat{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (116)$$

$$Nu_d = 2^{-\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot Re_d^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3} + Pr\right) 1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma(Pr)(\hat{x} + \hat{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (117)$$

となる。Pr=7の場合には、式(116),(117)は以下のようになる。

$$Nu_x = 0.44205 \cdot Re_d^{\frac{3}{4}} \frac{\hat{x}}{(\hat{x} + \hat{c})^{\frac{3}{4}}} \quad (118)$$

$$Nu_d = 0.44205 \cdot Re_d^{\frac{3}{4}} (\hat{x} + \hat{c})^{-\frac{3}{4}} \quad (119)$$

4. ま と め

第2章及び第3章においてそれぞれ球殻内面及び円筒内面に衝突する壁噴流を解析的に取り扱い、流れ及び熱伝達の解を求めた。いずれの場合も $u = U \cdot s(\bar{x}) \cdot f(\eta)$ とおいて境界層厚さ δ を導入し、 $\eta = \beta \cdot y / \delta$ を用いて整理すると、 f に関して同じ形の常微分方程式が得られる。特に、円筒内面上の壁噴流の解析において示したように、円筒内面のみならず2次元曲面上における基礎方程式は、曲率が境界層厚さに比べて小さい場合には平板上の壁噴流の方程式と一致する。

運動方程式の積分において積分定数(第2章では a_0 、第3章では c) が現れる。この積分定数は、物理的には仮想原点(曲率半径 $R \rightarrow \infty$ の場合、 $x = -a_0$ または $x = -c$ において壁噴流が湧き出す)を表す値として意味づけられる。しかし、軸対称壁噴流の場合には、2.2節に述べたように $x = -a_0$ は物理空間内には存在しない。

2次元壁噴流の解析は、Fig.1bに示すスロットから噴出される壁噴流を模擬するものであり、境界層厚さは流れ方向に増大し続ける。したがって、この解析は、衝突2次元噴流のよどみ点近くの流れを模擬することはできない。しかし、よどみ点から離れた領

域においては、壁噴流が発達し流速分布は相似となるため、本解析を2次元曲面における衝突壁噴流に適用することができる。

軸対称噴流の解析では、 $x \rightarrow 0$ においてヌッセルト数は減少し0となる。これは、衝突壁噴流のよどみ点における熱伝達実験の結果とは一致しない。この理由は、解析では境界層厚さが $x=0$ において無限大となるためである。しかし、 $x=0$ の極近傍以外の領域では、 δ , s , 及びヌッセルト数の振舞いは定性的には実験結果を比較的良く説明すると考えられる（たとえば平板における壁噴流に関するScholtzの実験⁽⁶⁾）。第1章に述べたように、よどみ点領域で流体が加速され層流流れが形成されるため、比較的低いレイノルズ数の衝突壁噴流は、下流域まで層流状態が保たれる。従って、乱流に遷移するまでの領域において本解析の結果を適用することができる。

参 考 文 献

- (1) Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, (1968)
- (2) Glauert, M.B., "The Wall Jet", *J. Fluid Mech.*, **1**, 625 (1956)
- (3) Schwartz, W.H. and Caswell, B., "Some Heat Transfer Characteristics of the Two-Dimensional Laminar Incompressible Wall Jet", *Chem. Eng. Sci.*, **16**, 338 (1961)
- (4) Gardon, R. et al., "Heat Transfer Characteristics of Impinging Two-Dimensional Air Jets", *Trans. ASME Ser. C*, **88**, 101 (1966)
- (5) Rao, V.V. et al., "Mass Transfer from a Flat Surface to an Impinging Turbulent Jet", *Can. J. Ch. Eng.*, **42**, 95 (1964)
- (6) Sholtz, M.T. and Trass O., "Mass Transfer in the Laminar Radial Wall Jet", *AICHE. J.*, **9**, 548 (1963)
- (7) Schwartz, W.H. and Cosart, W.P., "The two-Dimensional Turbulent Wall-Jet", *J. Fluid Mech.*, **10**, 481 (1961)
- (8) 三田地紘史、石黒亮二、"ウォールジェットの熱伝達"、*機論*、**39**, 2825 (1973)
- (9) Bajura, R.A. and Szewczyk, A.A., "Experimental Investigation of a Laminar Two-Dimensional Plane Wall Jet", *Phys. Fluids*, **13**, 1653 (1970)
- (10) Sholtz, M.T. and Trass, O., "Mass Transfer in a Nonuniform Impinging Jet", *AICHE Journal*, **16**, 82 (1970)
- (11) 生井武文、井上雅弘、"粘性流体の力学"、理工学社 (1979)

域においては、壁噴流が発達し流速分布は相似となるため、本解析を2次元曲面における衝突壁噴流に適用することができる。

軸対称噴流の解析では、 $x \rightarrow 0$ においてヌッセルト数は減少し0となる。これは、衝突壁噴流のよどみ点における熱伝達実験の結果とは一致しない。この理由は、解析では境界層厚さが $x=0$ において無限大となるためである。しかし、 $x=0$ の極近傍以外の領域では、 δ , s , 及びヌッセルト数の振舞いは定性的には実験結果を比較的良く説明すると考えられる（たとえば平板における壁噴流に関するScholtzの実験⁽⁶⁾）。第1章に述べたように、よどみ点領域で流体が加速され層流流れが形成されるため、比較的低いレイノルズ数の衝突壁噴流は、下流域まで層流状態が保たれる。従って、乱流に遷移するまでの領域において本解析の結果を適用することができる。

参 考 文 献

- (1) Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, (1968)
- (2) Glauert, M.B., "The Wall Jet", *J. Fluid Mech.*, **1**, 625 (1956)
- (3) Schwartz, W.H. and Caswell, B., "Some Heat Transfer Characteristics of the Two-Dimensional Laminar Incompressible Wall Jet", *Chem. Eng. Sci.*, **16**, 338 (1961)
- (4) Gardon, R. et al., "Heat Transfer Characteristics of Impinging Two-Dimensional Air Jets", *Trans. ASME Ser. C*, **88**, 101 (1966)
- (5) Rao, V.V. et al., "Mass Transfer from a Flat Surface to an Impinging Turbulent Jet", *Can. J. Ch. Eng.*, **42**, 95 (1964)
- (6) Sholtz, M.T. and Trass O., "Mass Transfer in the Laminar Radial Wall Jet", *AICHE. J.*, **9**, 548 (1963)
- (7) Schwartz, W.H. and Cosart, W.P., "The two-Dimensional Turbulent Wall-Jet", *J. Fluid Mech.*, **10**, 481 (1961)
- (8) 三田地紘史、石黒亮二、"ウォールジェットの熱伝達"、*機論*, **39**, 2825 (1973)
- (9) Bajura, R.A. and Szewczyk, A.A., "Experimental Investigation of a Laminar Two-Dimensional Plane Wall Jet", *Phys. Fluids*, **13**, 1653 (1970)
- (10) Sholtz, M.T. and Trass, O., "Mass Transfer in a Nonuniform Impinging Jet", *AICHE Journal*, **16**, 82 (1970)
- (11) 生井武文、井上雅弘、"粘性流体の力学"、理工学社 (1979)

Table 1 Values of $\frac{\Gamma(1/3 + \text{Pr})}{\Gamma(1/3)\Gamma(\text{Pr})}$ for various Prandtl number

Pr	$\frac{\Gamma(1/3 + \text{Pr})}{\Gamma(1/3)\Gamma(\text{Pr})}$
0.0001	0.0009974717
0.005	0.0049366469
0.01	0.0097516689
0.05	0.0444251666
0.1	0.101590327
0.5	0.237680427
0.72	0.286171517
1	0.333261379
5	0.624007932
6	0.665752172
7	0.702586709
8	0.736202137
9	0.766877226
10	0.795280086
11	0.821789422
12	0.846692132
20	1.007615159
50	1.37212737
100	1.73069724
200	2.18175464
500	2.96208416
1000	3.73240698
2000	4.70279940
5000	6.38289354
10000	8.04203129

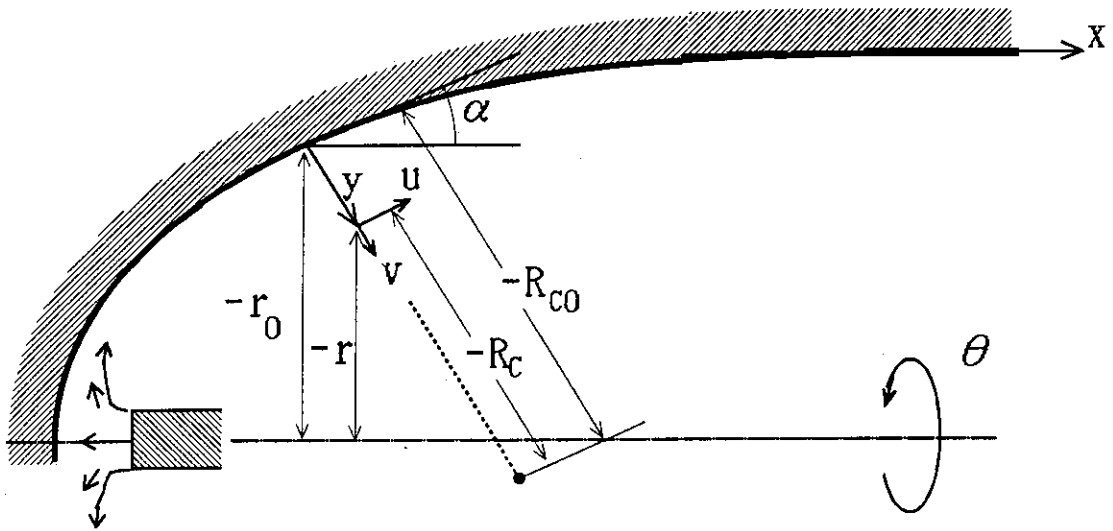


Fig. 1a Physical co-ordinate system of axisymmetric flow field

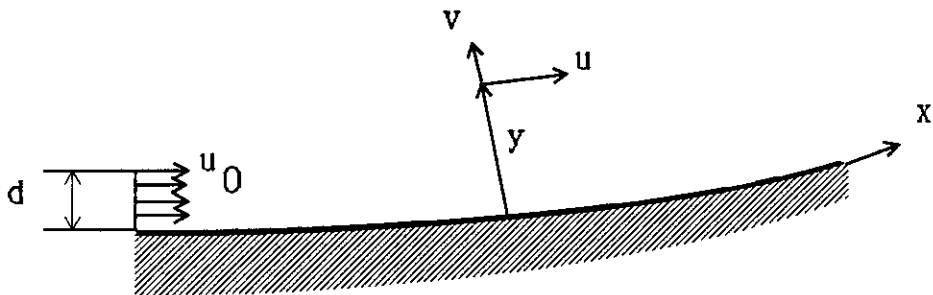


Fig. 1b Physical co-ordinate system of two-dimensional flow field along a curved surface

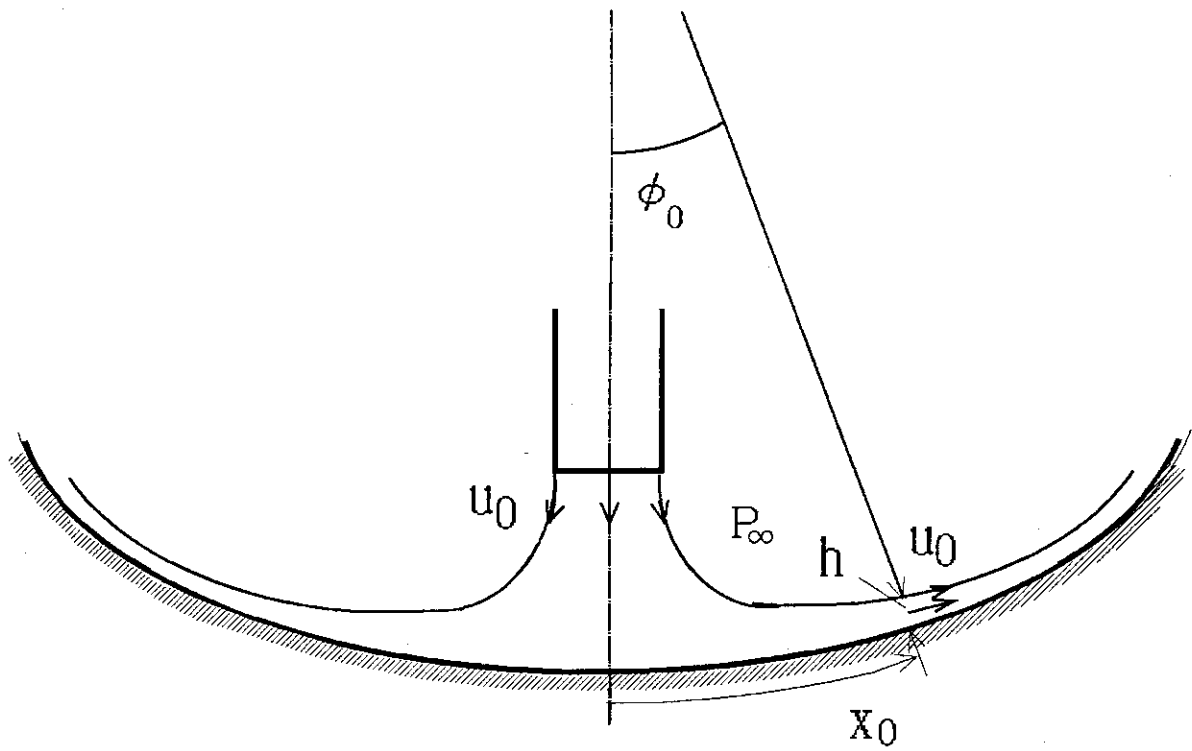


Fig. 2 Free streamline of impinging wall jet on inner surface of a spherical or a cylindrical shell

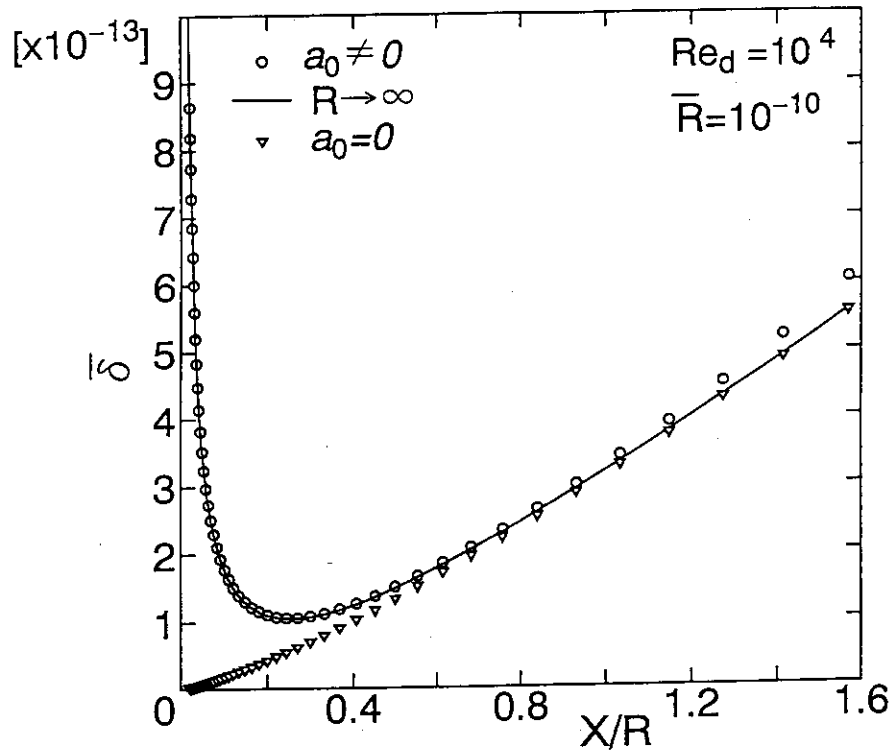


Fig. 3 Plot of boundary layer thickness $\bar{\delta}$ against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-10}$ ($R/d = 10.4$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

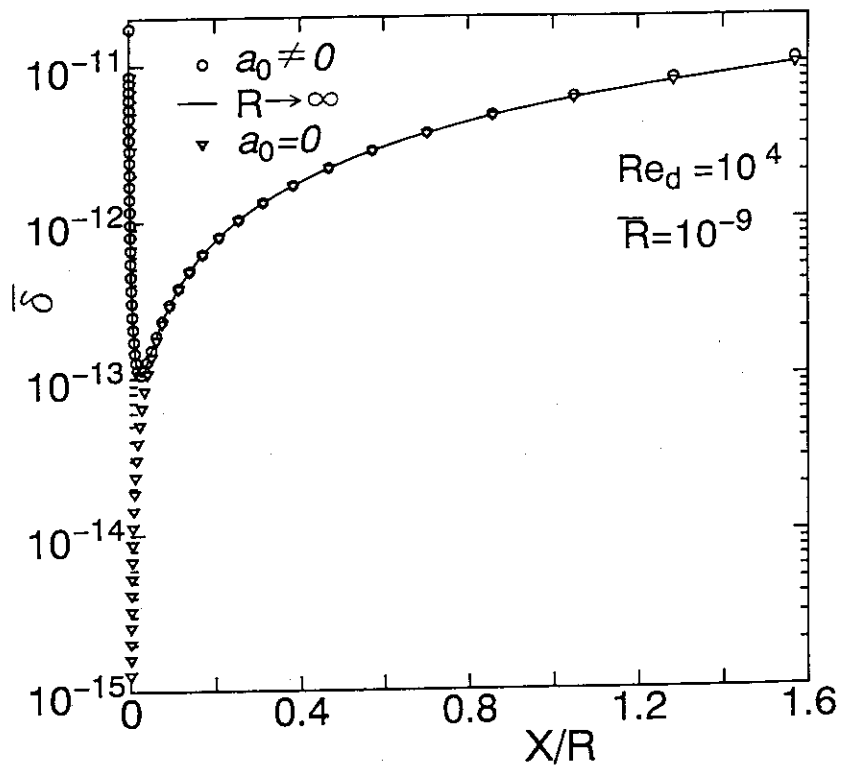


Fig. 4 Plot of boundary layer thickness $\bar{\delta}$ against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-9}$ ($R/d = 104.2$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

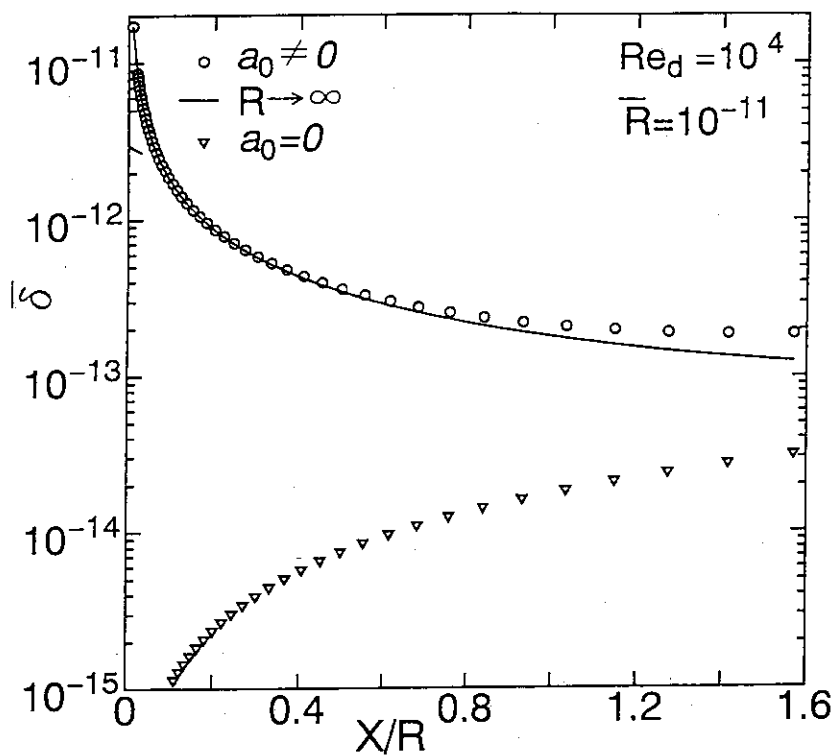


Fig. 5 Plot of boundary layer thickness $\bar{\delta}$ against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-11}$ ($R/d = 1.04$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

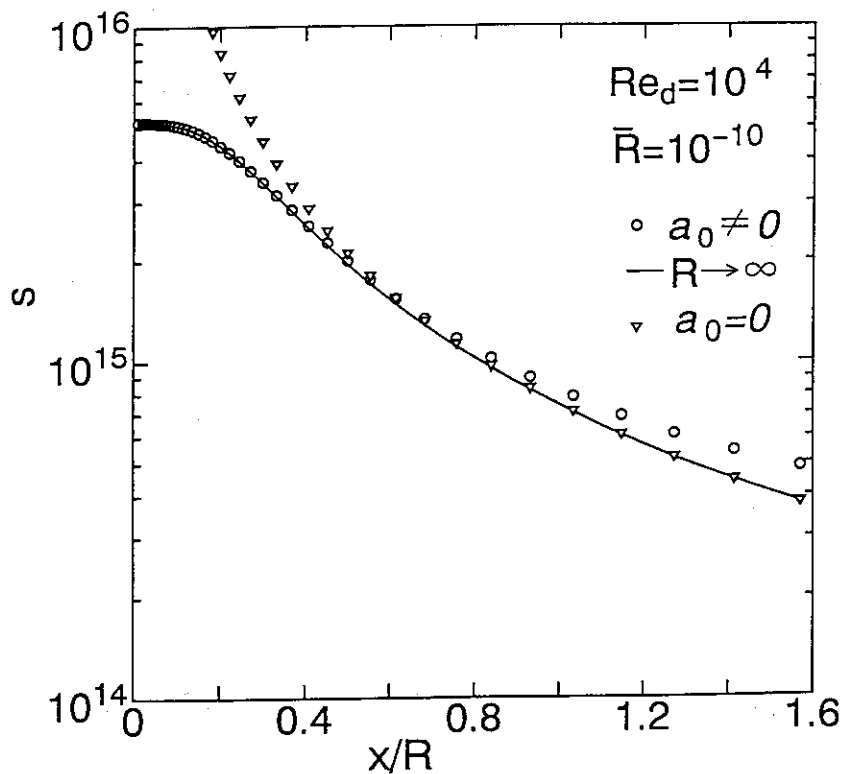


Fig. 6 Plot of $s(\bar{x})$ against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-10}$ ($R/d = 10.4$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

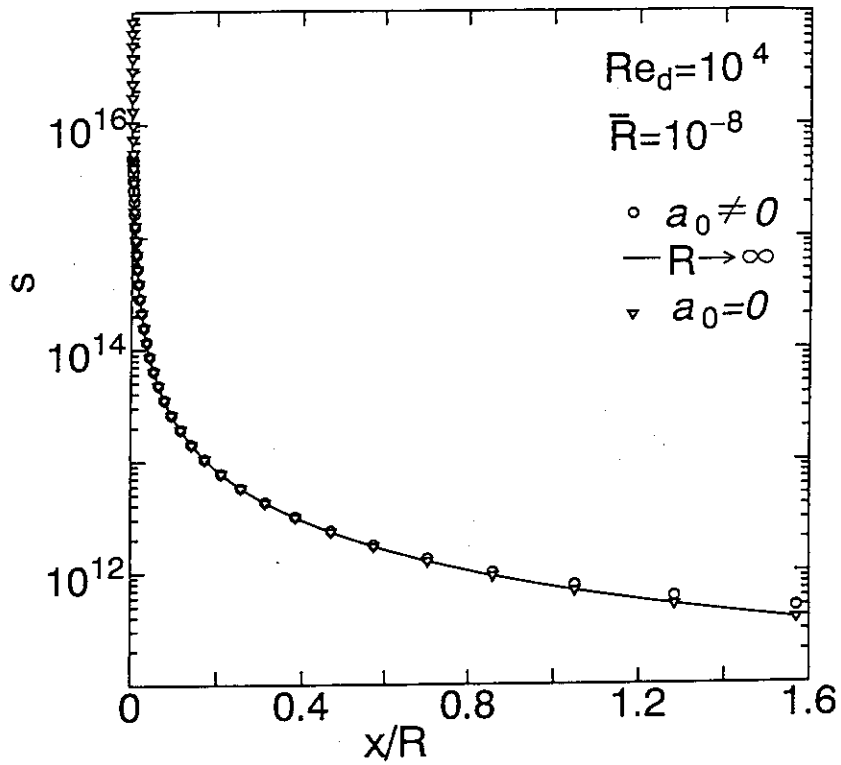


Fig. 7 Plot of $s(\bar{x})$ against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-8}$ ($R/d = 1042$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

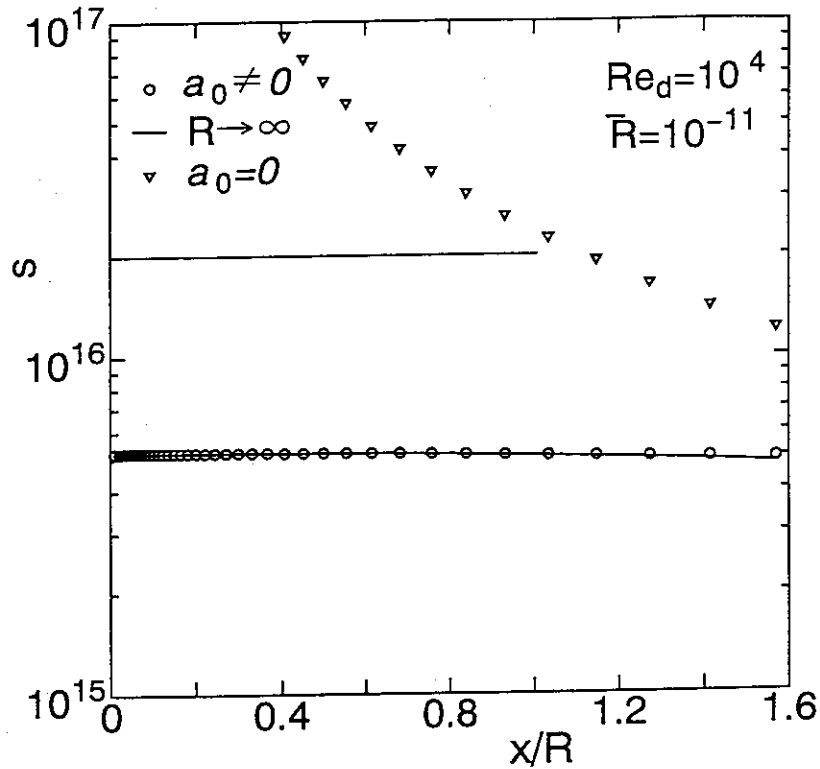


Fig. 8 Plot of $s(\bar{x})$ against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-11}$ ($R/d = 10.4$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

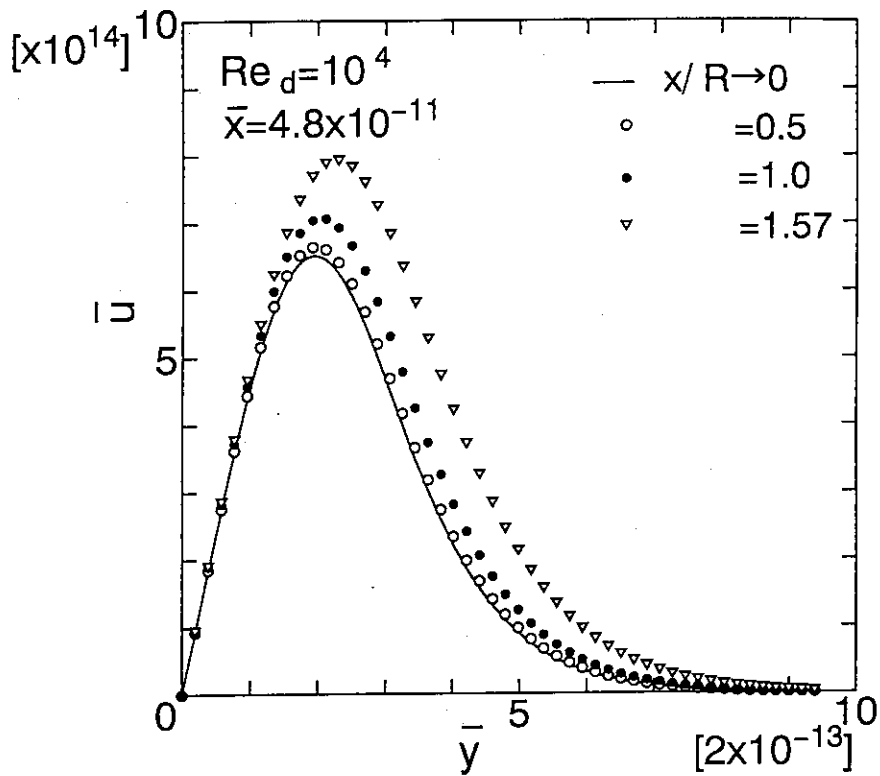


Fig. 9 Velocity distribution in a boundary layer at $Re_d = 10^4$ and $\bar{x} = 4.8 \times 10^{-11}$ with x/R as a parameter for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

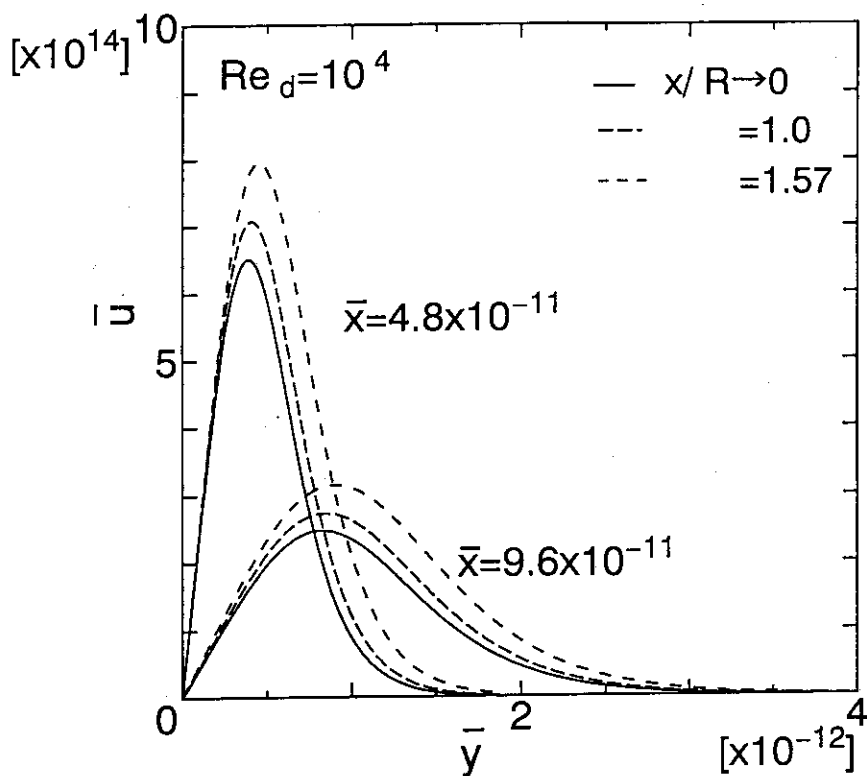


Fig. 10 Comparison of velocity distribution in boundary layers at $\bar{x} = 4.8 \times 10^{-11}$ and $\bar{x} = 9.6 \times 10^{-11}$ for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

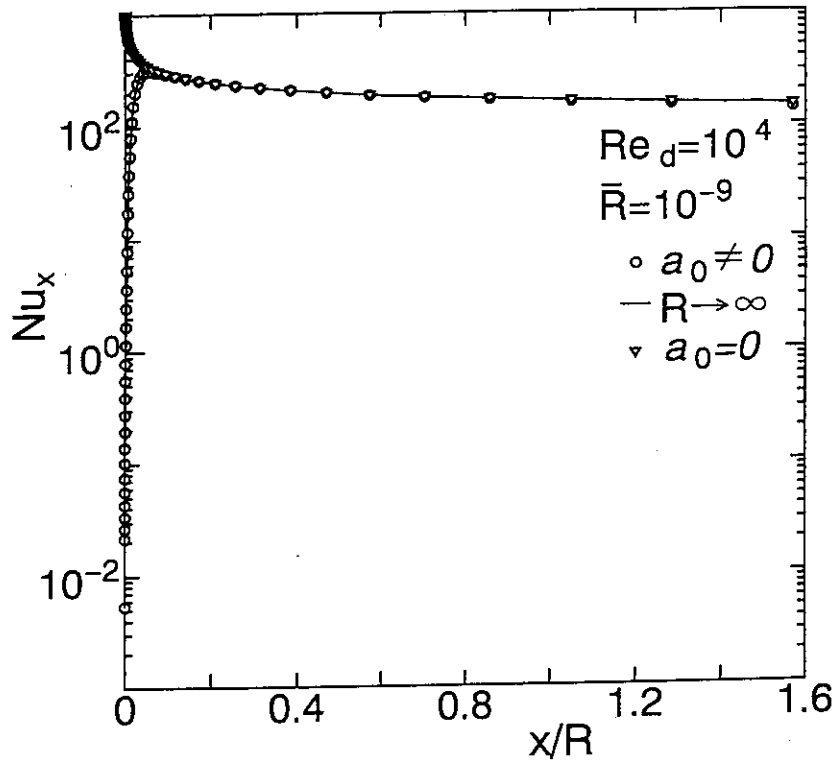


Fig. 11 Plot of Nusselt number Nu_x against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-9}$ ($R/d = 104.2$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

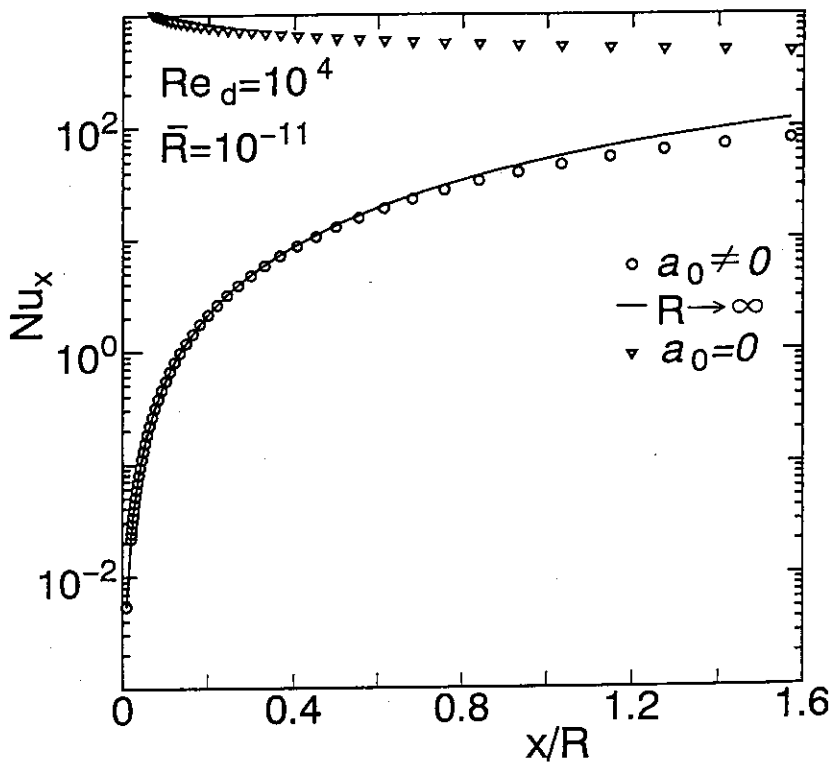


Fig. 12 Plot of Nusselt number Nu_x against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-11}$ ($R/d = 1.04$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

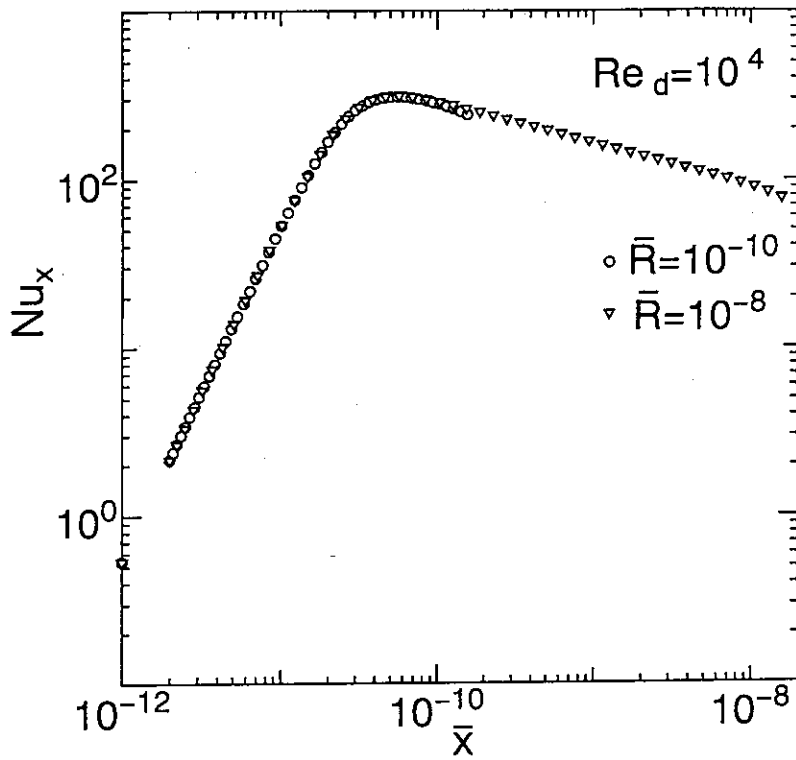


Fig. 13 Comparison of Nu_x between $\bar{R} = 10^{-8}$ ($R/d = 1042$) and $\bar{R} = 10^{-10}$ ($R/d = 10.4$) at $Re_d = 10^4$ for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

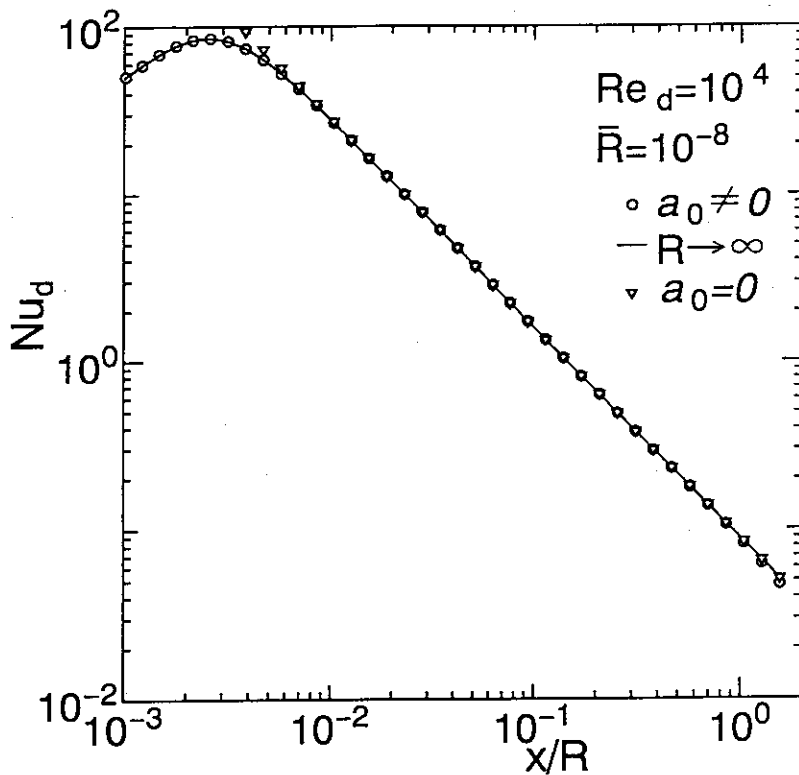


Fig. 14 Plot of Nusselt number Nu_d against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-8}$ ($R/d = 1042$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

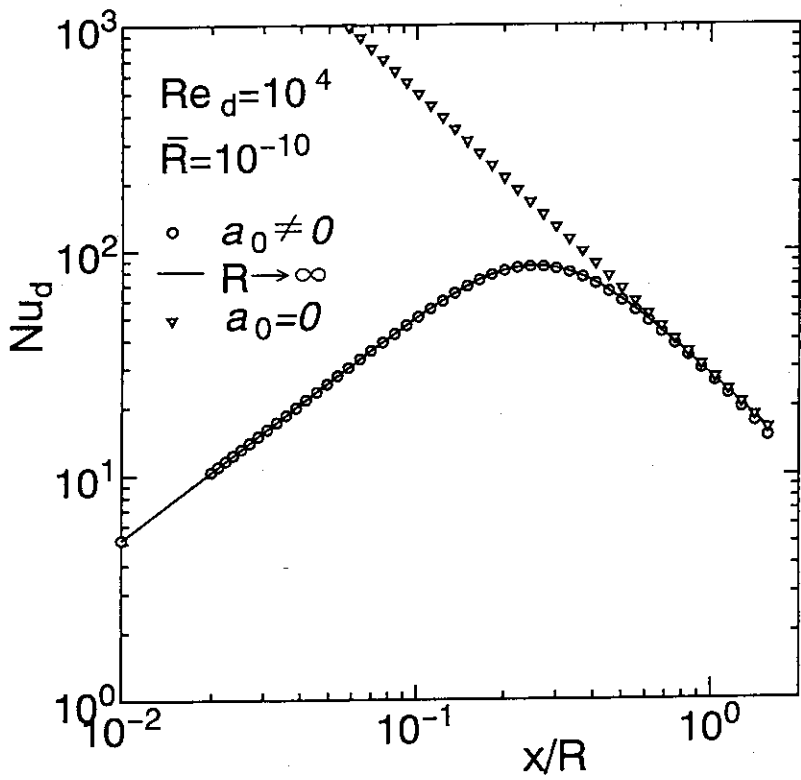


Fig. 15 Plot of Nusselt number Nu_d against x/R at $Re_d = 10^4$ and $\bar{R} = 10^{-10}$ ($R/d = 1042$) for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell

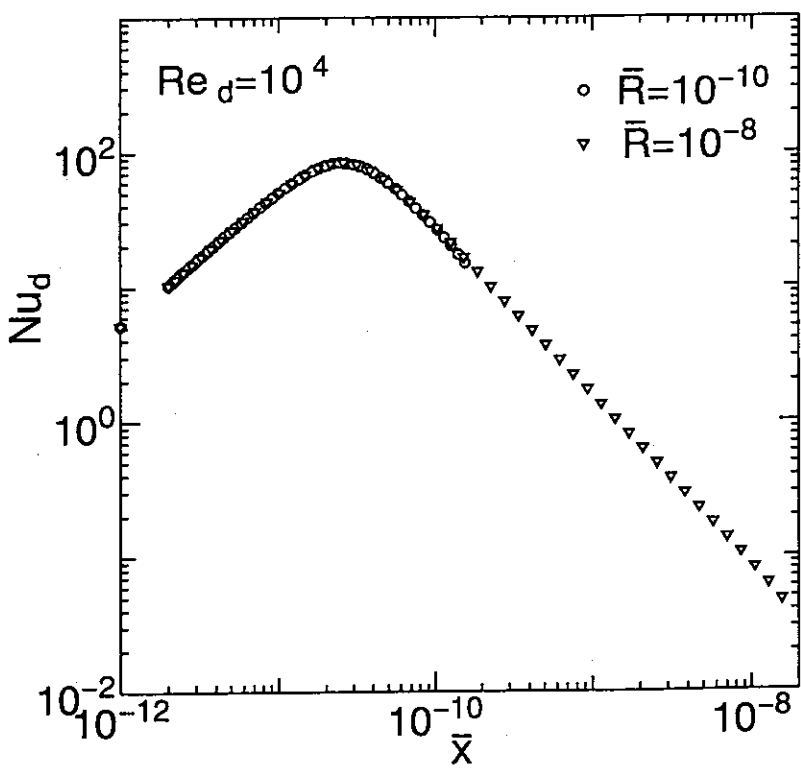


Fig. 16 Comparison of Nu_d between $\bar{R} = 10^{-8}$ ($R/d = 1042$) and $\bar{R} = 10^{-10}$ ($R/d = 10.4$) at $Re_d = 10^4$ for axisymmetric wall jet impinging on a inner surface of a spherical shell