

JAERI-Research

96-044



抵抗性磁気流体力学安定性解析における  
線形内部層方程式の差分解法

1996年8月

徳田伸二・渡邊朋子\*

日本原子力研究所  
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。  
入手の問い合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1996

編集兼発行 日本原子力研究所  
印刷 (株)原子力資料サービス

抵抗性磁気流体力学安定性解析における  
線形内部層方程式の差分解法

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部

徳田 伸二・渡邊 朋子\*

(1996年7月12日受理)

抵抗性磁気流体力学的（抵抗性MHD）安定性を漸近接続法で解析する場合の接続問題を内部層方程式，それは有理面のまわりの薄い層におけるプラズマの運動を記述する，に対する初期値・境界値問題として再定式化した。この定式化では無限遠点における漸近条件の代わりに有限区間の境界に第3種の境界条件が内部層方程式に課せられる。この問題に対する差分解法を，解析解が閉じた形で知られているモデル方程式に適用し，この差分解法によって初期値問題および対応する固有値問題が数値的に安定に解けることを示した。ここで提案した定式化により漸近接続法は抵抗性MHD安定性解析の実用的な方法になる。

Finite Difference Method for Inner-layer Equations  
in the Resistive Magnetohydrodynamic Stability Analysis

Shinji TOKUDA and Tomoko WATANABE\*

Department of Fusion Plasma Research  
Naka Fusion Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received July 12, 1996)

The matching problem in resistive MagnetoHydroDynamic stability analysis by the asymptotic matching method has been reformulated as an initial-boundary value problem for the inner-layer equations describing the plasma dynamics in the thin layer around a rational surface. The third boundary conditions at boundaries of a finite interval are imposed on the inner layer equations in the formulation instead of asymptotic conditions at infinities. The finite difference method for this problem has been applied to model equations whose solutions are known in a closed form. It has been shown that the initial value problem and the associated eigenvalue problem for the model equations can be solved by the finite difference method with numerical stability. The formulation presented here enables the asymptotic matching method to be a *practical* method for the resistive MHD stability analysis.

Keywords: Tokamak Plasma, Resistive MHD Stability, Asymptotic Matching, Inner-layer Equations, Initial-boundary Value Problem, Eigenvalue Problem, Finite Difference Method

---

\* Research Organization for Information Science & Technology

## 目 次

1. 序 論 .....	1
2. 内部層方程式 .....	3
3. 作用素 $\nabla_{\parallel}$ , $\nabla_{\perp}$ および曲率 $\kappa_n$ の表式 .....	5
4. 境界条件の設定 .....	7
5. モデル方程式 .....	8
5.1 モデル方程式の無次元化 .....	8
5.2 モデル方程式の接続条件と分散関係式 .....	10
6. 固有値問題のための差分法 .....	12
7. 初期値・境界値問題のための差分法 .....	14
8. 台関数の導入 .....	15
9. 固有値問題のテスト計算 .....	17
9.1 不安定固有値と固有関数の計算 .....	17
9.2 安定側固有値・固有関数と台関数の効果 .....	18
9.3 境界条件の変更 .....	20
10. 初期値・境界値問題のテスト計算 .....	21
11. 要 約 .....	23
謝 辞 .....	24
参考文献 .....	24
付録A ディレクトリ構造 .....	84
付録B 固有値問題のプログラム仕様 .....	85
付録C 初期値・境界値問題のプログラム仕様 .....	96

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Inner-layer Equations .....	3
3. Expressions of Operators $\nabla_{\parallel}$ , $\nabla_{\perp}$ , and $\kappa_n$ .....	5
4. Boundary Conditions .....	7
5. Model Equations .....	8
5.1 Normalization of Model Equations .....	8
5.2 Matching Conditions for Model Equations and Dispersion Relation .....	10
6. Finite Difference Method for Eigenvalue Problem .....	12
7. Finite Difference Method for Initial-Boundary Value Problem .....	14
8. Use of Support Function .....	15
9. Numerical Experiments of Eigenvalue Problem .....	17
9.1 Unstable Eigenvalue and Its Eigenfunction .....	17
9.2 Stable Eigenvalues, Eigenfunctions and Effects of Support Function .....	18
9.3 Change of Boundary Conditions .....	20
10. Numerical Experiments of Initial-Boundary Value Problem .....	21
11. Summary .....	23
Acknowledgements .....	24
References .....	24
Appendix A Directory Structure .....	84
Appendix B Program Description of Eigenvalue Problem .....	85
Appendix C Program Description of Initial-Boundary Value Problem .....	96

# 1 序 論

トカマク・プラズマにおいてはプラズマの持つ電気抵抗(および他の散逸過程)によって磁気流体力学的モードが不安定に成長し(抵抗性 MHD 不安定性)、それがプラズマの閉じ込めに深刻な影響を与えることがある。たとえば、閉じ込めプラズマのベータ値(プラズマ圧力/磁気圧)は、電気抵抗をはじめ、すべての散逸効果を見捨てた場合の理想 MHD 安定性で決まる。しかしながら、定常炉や長時間運転を行う ITER の場合、定常的に保証されるベータ値は理想 MHD 安定性から決まるベータ値より低くなる可能性がある。抵抗性 MHD モードのダイナミクスはオームの法則に電気抵抗の効果を取り入れた抵抗性磁気流体力学(抵抗性 MHD) 方程式系で記述される。

線形抵抗性 MHD 安定性の理論的方法として漸近接続法がよく知られている [1]。この方法では、抵抗性 MHD モードの特徴的な時間スケールが理想 MHD を特徴づける時間スケール(アルフェン周波数の逆数)よりずっと長いことに着目して、プラズマの領域を有理面から離れた外部領域(理想 MHD 領域)と有理面のまわりの薄い層である内部層領域とに分ける。ここで、有理面とはプラズマ中の平衡磁場の磁力線のピッチ(安全係数)が有理数になる面である。外部領域ではプラズマは慣性および電気抵抗を見捨てた理想 MHD 方程式(Newcomb 方程式)で記述される。一方、内部層では、プラズマの慣性や電気抵抗(および他の散逸効果)を見捨てできない。しかし、変数の引き伸ばしの方法によって、内部層におけるプラズマの運動を記述する方程式は連立常微分方程式系(内部層方程式)に簡約される。内部層方程式は対象としているモードの成長率 $\gamma$ をパラメータとして含んでいる。そして、境界条件を満たす Newcomb 方程式の解と内部層方程式の解とが漸近的に接続される条件から成長率が決定される。

Newcomb 方程式では有理面は確定特異点になっており、その点のまわりでの Newcomb 方程式の Frobenius 解は自乗可積分でない「大きい解」と自乗可積分な「小さい解」とからなっている。Newcomb 方程式の解は確定特異点のまわりでは大きい解と小さい解の重ね合せで表現され、その混合比は外部領域での「接続データ」と呼ばれ漸近接続法で重要な役割をはたす。接続データは Newcomb 方程式の境界値問題を解いて求めることができる。有限要素法に基づく Newcomb 方程式の数値解法は文献 [2] に報告した。文献 [2] では、理想 MHD 的に臨界安定に近い場合も含めて接続データの数値計算法が述べられている。

次に、内部層方程式では理想 MHD 領域に対応する無限遠点( $|x| \rightarrow \infty$ ,  $x$  は引き伸ばされた独立変数)は不確定特異点になっており、その漸近解は  $\exp(\alpha x^2)$  で成長する解、 $\exp(-\alpha x^2)$  で減衰する解( $\alpha$  は  $\text{Re} \alpha > 0$  なる定数)および外部解と同じ指数を持つ、すなわち、外部解に接続される 2 つのベキ解からなる。したがって、内部層方程式の解には無限遠点で  $\exp(\alpha x^2)$  で成長しないという条件が課せられる。この条件を満たす解は無限遠点で 2 つのベキ解の重ね合わせを漸近解として持ち、その混合比  $\Delta(\gamma)$  は内部層接続データと呼ばれ、成長率  $\gamma$  の関数になっている。そして、漸近接続の条件は  $\Delta(\gamma) = \Delta_0$  ( $\Delta_0$ : 外部領域接続データ) で与えられる。これを分散

関係式と呼ぶ。

内部層方程式を解析的に解くことができれば、 $\gamma$ の超越関数として内部層接続データ $\Delta(\gamma)$ を解析的に求めること、したがって、分散関係式の解析的な表式を得ることができる。

しかしながら、内部層方程式を解析的に解くことは一般に不可能であり、数値計算が必要である。従来の数値計算法(たとえば文献[3])は次のような手続きで成長率 $\gamma$ を求める。(1)成長率 $\gamma$ の推測値を与え、(2)内部層方程式を原点 $x=0$ から数値的に解いて、無限遠点で解が指数関数的に成長しない $x=0$ での初期値を求め、次に、(3)そのときの数値解の無限遠点(実際は原点から十分に離れた点)での2つのベキ解の混合比から接続データ $\Delta(\gamma)$ を求める。そして(4)この接続データが分散関係式 $\Delta(\gamma) = \Delta_0$ を満たすかどうか判定し、分散関係式を満たしていなければ推測値 $\gamma$ を変えて(1)に戻る。しかしながら、ステップ(2)は一般的に数値的に不安定な方法であるとともに、有理面が複数ある場合への拡張が困難である。そのため、漸近接続法は内部層方程式の解を解析的に求めることができる場合にのみ有効であり、そのため、この方法は解析解の求めることのできない実際の問題には適用されていないのが実状である。

この漸近接続法を与えられた境界条件のもとでの線形常微分方程式系の固有値問題と比較してみると、上に述べたプロセスは古典的な(かつ数値的に安定な)固有値問題の逆問題を解いていることになる。すなわち、固有値問題では境界条件を与え、そのときの固有値を求める(順問題)が、一方、従来の漸近接続法では、逆に固有値を与えて接続データを求め、それが与えられた接続データと一致するかどうかを調べる。この逆問題になっていることは文献[3]で論じている差分法からよく理解される。順問題が数値的に安定な場合、逆問題は、しばしば数値的に不安定になる。

本報告書では内部層方程式の接続問題を内部層方程式の初期値・境界値問題およびそれに伴う固有値問題として再定式化する。このとき接続条件を第3種の境界条件に置き換える。外部領域接続データは既知、したがって境界条件も既知としているので、この定式化により、接続問題は数値的に安定な固有値問題となる。また、この定式化は複数有理面への拡張が容易である。

本報告書の第2章では円柱プラズマにおける内部層方程式を導き、第3章で内部層方程式に現れるいくつかの作用素の表式を与える。これらは、よく知られたことであるが、後の便利のために内部層方程式は初期値問題および固有値 $\gamma$ について線形性を保つ一般固有値問題の形式で表現される。内部層方程式は有限の計算区間で解かれる。その端点で方程式の解に境界条件を課す必要がある。第4章で接続条件に対応する第3種の境界条件を導き、第5章でそれを解析解の知られているモデル方程式に適用する。このモデル方程式は差分法で解かれ、第6章および第7章で、それぞれ、固有値問題および初期値・境界値問題の差分法について述べる。また、第8章では計算区間での内部層方程式の係数が境界条件に滑らかに対応するように台関数の導入を試みる。第9章および第10章は、それぞれ、固有値問題および初期値・境界値問題のテスト計算にあてられる。固有値問題では不安定固有値のみならず安定側固有値についても詳しく調べ、そのとき、台関数の効果および境界条件の



変更の効果についても調べる。安定側固有値、特にその分布は単に数学的な興味のみならず、初期値問題の差分スキームの安定性を論じる上で実際的な意味を持つ。最後に本報告で行った研究の要約を述べる。また、本報告書の研究を行うために開発したプログラムのドキュメントを付録に載せる。

## 2 内部層方程式

円柱プラズマ・モデルにおける線形抵抗性 MHD 方程式から内部層 (resistive layer) 近似によって連立常微分方程式系 (内部層方程式) を導く。プラズマ中心を原点とする円柱座標系を  $(r, \theta, \zeta)$  とし、また、以下のような物理記号を用いる。

$a$	プラズマ半径
$R_0$	主半径
$A$	アスペクト比 ( $A = R_0/a$ )
$\mathbf{B}$	平衡磁場
$B_0$	プラズマ表面のトロイダル磁場
$B$	$\mathbf{B}$ の大きさ ( $B^2 = B_p^2 + B_t^2$ )
$B_p$	ポロイダル磁場
$\mathbf{B}_t$	トロイダル磁場 ( $\mathbf{B}_t = R_0 B_0 F \nabla \zeta$ )
$q(r)$	MHD 平衡の安全係数
$r_0$	有理面 ( $m = nq(r_0)$ )
$m, n$	ポロイダル・モード数、トロイダル・モード数
$\tau$	時間
$\rho$	プラズマの質量密度
$\eta$	プラズマの抵抗率
$v_A$	アルフェン速度 ( $v_A^2 = B_0^2/\rho$ )
$\omega_A$	アルフェン周波数 ( $\omega_A = v_A/a$ )
$k_{\parallel}$	摂動の磁力線に平行な方向の波数
$k_{\perp}$	摂動の磁力線に垂直な方向の波数

摂動量  $f(x, \theta, \zeta)$  は  $\theta$  と  $\zeta$  に関してゆっくりと変化する関数とする。すなわち

$$f(x, \theta, \zeta) = f(x) \exp(im\theta - in\zeta)$$

におくとき、低  $m, n$  の摂動を考える。内部層のオーダリング・パラメータを  $\epsilon$  とし、以下の resistive interchange ordering を使う [1]。

$$\begin{aligned} \eta &= O(\epsilon^3), \\ r - r_0 &= \epsilon x, \quad m = nq(r_0), \\ \omega_A \partial_{\tau} &= O(\epsilon), \end{aligned}$$

変更の効果についても調べる。安定側固有値、特にその分布は単に数学的な興味のみならず、初期値問題の差分スキームの安定性を論じる上で実際的な意味を持つ。最後に本報告で行った研究の要約を述べる。また、本報告書の研究を行うために開発したプログラムのドキュメントを付録に載せる。

## 2 内部層方程式

円柱プラズマ・モデルにおける線形抵抗性 MHD 方程式から内部層 (resistive layer) 近似によって連立常微分方程式系 (内部層方程式) を導く。プラズマ中心を原点とする円柱座標系を  $(r, \theta, \zeta)$  とし、また、以下のような物理記号を用いる。

$a$	プラズマ半径
$R_0$	主半径
$A$	アスペクト比 ( $A = R_0/a$ )
$\mathbf{B}$	平衡磁場
$B_0$	プラズマ表面のトロイダル磁場
$B$	$\mathbf{B}$ の大きさ ( $B^2 = B_p^2 + B_t^2$ )
$B_p$	ポロイダル磁場
$\mathbf{B}_t$	トロイダル磁場 ( $\mathbf{B}_t = R_0 B_0 F \nabla \zeta$ )
$q(r)$	MHD 平衡の安全係数
$r_0$	有理面 ( $m = nq(r_0)$ )
$m, n$	ポロイダル・モード数、トロイダル・モード数
$\tau$	時間
$\rho$	プラズマの質量密度
$\eta$	プラズマの抵抗率
$v_A$	アルフェン速度 ( $v_A^2 = B_0^2/\rho$ )
$\omega_A$	アルフェン周波数 ( $\omega_A = v_A/a$ )
$k_{\parallel}$	摂動の磁力線に平行な方向の波数
$k_{\perp}$	摂動の磁力線に垂直な方向の波数

摂動量  $f(x, \theta, \zeta)$  は  $\theta$  と  $\zeta$  に関してゆっくりと変化する関数とする。すなわち

$$f(x, \theta, \zeta) = f(x) \exp(im\theta - in\zeta)$$

におくとき、低  $m, n$  の摂動を考える。内部層のオーダーリング・パラメータを  $\epsilon$  とし、以下の resistive interchange ordering を使う [1]。

$$\begin{aligned} \eta &= O(\epsilon^3), \\ r - r_0 &= \epsilon x, \quad m = nq(r_0), \\ \omega_A \partial_{\tau} &= O(\epsilon), \end{aligned}$$

$$k_{\parallel}/k_{\perp} = O(\epsilon),$$

$$\nabla = \left(\frac{1}{\epsilon}\partial_x\right)\nabla r + \nabla_s, \quad s: \text{slow variable}$$

このオーダーリングでは電磁場の摂動は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \epsilon\psi\mathbf{B} + \epsilon\mathbf{A}_{\perp} \\ \delta\mathbf{E} &= -\epsilon\nabla\varphi - \epsilon^2\partial_{\tau}\mathbf{A}_{\perp} \\ \delta\mathbf{B} &= \mathbf{Q} + \epsilon\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q} &= \partial_x\psi(\nabla r \times \mathbf{B}) + B_{\parallel}\mathbf{b} \\ \mathbf{Q}_1 &= \nabla_s\psi \times \mathbf{B} + \psi\mathbf{j} + \nabla_s \times \mathbf{A}_{\perp} \end{aligned}$$

のように表される。ここで、 $\mathbf{A}$  は摂動磁場 $\delta\mathbf{B}$ に対するベクトル・ポテンシャル ( $\delta\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ )、 $\varphi$  は摂動電場 $\delta\mathbf{E}$ に対する静電ポテンシャル、 $\mathbf{j}$  は平衡配位での電流 ( $\mathbf{j} = \text{rot}\mathbf{B}$ ) である。これらを用いて、次式のような円柱プラズマにおける内部層方程式を得る [1]。

渦度の運動方程式

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \tau} = -B^2 \nabla_{\parallel} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa_n (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s p \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = BU \quad (2.2)$$

オームの法則

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{B} \nabla_{\parallel} \varphi + \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

磁場に平行な運動方程式

$$\rho \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial \tau} = -\nabla_{\parallel} p - \frac{dp_0}{dr} (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s \psi \quad (2.4)$$

圧力方程式

$$\begin{aligned} (1 + \beta_s) \frac{\partial p}{\partial \tau} &= \eta \beta_s \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \beta_s B^2 \nabla_{\parallel} v_{\parallel} \\ &+ [(1 + \beta_s) \frac{1}{B^2} \frac{dp_0}{dr} - 2\beta_s \kappa_n] B (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s \varphi \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで

$$\beta_s = \frac{\Gamma p_0}{B^2}, \Gamma = \frac{3}{5} \quad (2.6)$$

であり、また、上の方程式に現れる  $B$  や  $p$  などの平衡量は有理面  $r = r_0$  での値である。ゼロベータ近似では、内部層方程式は渦度方程式とオームの法則だけからなる:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \tau} = -B_0^2 \nabla_{\parallel} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = B_0 U \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{B_0} \nabla_{\parallel} \varphi + \frac{\eta}{c^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

以下、式 (2.7) ~ 式 (2.9) をモデル方程式 [4] とし、数値計算法を適用する。

### 3 作用素 $\nabla_{\parallel}$ , $\nabla_s$ および曲率 $\kappa_n$ の表式

以下、平衡磁場を  $\mathbf{B}$  で表す。また、規格化定数を  $B_0$  (たとえばプラズマ表面での磁場の値) および  $a$  (プラズマ半径) とし、アスペクト比を  $A (= R_0/a)$  とする。

作用素  $\nabla_{\parallel}$

$$\begin{aligned} \nabla_{\parallel} &\equiv \frac{1}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla = \frac{1}{B} (B^{\theta} \partial_{\theta} + B^{\zeta} \partial_{\zeta}) \\ &= im \frac{B^{\zeta}}{B} \left( \frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right) \end{aligned}$$

有理面  $r = r_0$  のまわりで

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q(r_0)} + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{q} \right)_{r_0} (r - r_0) + \dots$$

と展開される。また

$$B^{\zeta} = \frac{F}{R_0} B_0 = \frac{F B_0}{A a}, \quad B = B_0 \hat{B}$$

より

$$\nabla_{\parallel} = \frac{\epsilon}{a} (im) \frac{1}{A \hat{B}} \frac{x}{s} = \frac{\epsilon}{a} \hat{k}_{\parallel}(x) \quad (3.1)$$

を得る。ここで

$$s^{-1} \equiv a \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{q} \right)_{r_0} \quad (3.2)$$

$$\hat{k}_{\parallel}(x) = (im) \frac{1}{A \hat{B}} \frac{x}{s} \quad (3.3)$$

ここで

$$\beta_s = \frac{\Gamma p_0}{B^2}, \Gamma = \frac{3}{5} \quad (2.6)$$

であり、また、上の方程式に現れる  $B$  や  $p$  などの平衡量は有理面  $r = r_0$  での値である。ゼロベータ近似では、内部層方程式は渦度方程式とオームの法則だけからなる：

$$\rho \frac{\partial U}{\partial \tau} = -B_0^2 \nabla_{\parallel} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = B_0 U \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{B_0} \nabla_{\parallel} \varphi + \frac{\eta}{c^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

以下、式 (2.7) ~ 式 (2.9) をモデル方程式 [4] とし、数値計算法を適用する。

### 3 作用素 $\nabla_{\parallel}$ , $\nabla_s$ および曲率 $\kappa_n$ の表式

以下、平衡磁場を  $\mathbf{B}$  で表す。また、規格化定数を  $B_0$  (たとえばプラズマ表面での磁場の値) および  $a$  (プラズマ半径) とし、アスペクト比を  $A (= R_0/a)$  とする。

作用素  $\nabla_{\parallel}$

$$\begin{aligned} \nabla_{\parallel} &\equiv \frac{1}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla = \frac{1}{B} (B^{\theta} \partial_{\theta} + B^{\zeta} \partial_{\zeta}) \\ &= im \frac{B^{\zeta}}{B} \left( \frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right) \end{aligned}$$

有理面  $r = r_0$  のまわりで

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q(r_0)} + \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{q} \right)_{r_0} (r - r_0) + \dots$$

と展開される。また

$$B^{\zeta} = \frac{F}{R_0} B_0 = \frac{F B_0}{A a}, \quad B = B_0 \hat{B}$$

より

$$\nabla_{\parallel} = \frac{\epsilon}{a} (im) \frac{1}{A \hat{B}} \frac{x}{s} = \frac{\epsilon}{a} \hat{k}_{\parallel}(x) \quad (3.1)$$

を得る。ここで

$$s^{-1} \equiv a \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{q} \right)_{r_0} \quad (3.2)$$

$$\hat{k}_{\parallel}(x) = (im) \frac{1}{A \hat{B}} \frac{x}{s} \quad (3.3)$$

作用素  $(\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s$

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s &= i \frac{\mathbf{B}}{B} (m \nabla r \times \nabla \theta + n \nabla \zeta \times \nabla r) \\ &= i \left( \frac{B_\zeta}{B} m + \frac{B_\theta}{B} n \right) (\nabla r \times \nabla \theta) \cdot \nabla \zeta \\ &= i \frac{1}{R_0 r} \frac{1}{B} (m B_\zeta + n B_\theta) \end{aligned}$$

ここで、有理面では

$$q = \frac{B_\zeta}{B_\theta} = \frac{m}{n}, \quad n = m \frac{B_\theta}{B_\zeta}$$

であるので

$$m B_\zeta + n B_\theta = m B_\zeta + m \frac{B_\theta B_\theta}{B_\zeta} = \frac{m}{B_\zeta} B^2$$

が成り立つ。これより

$$(\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s s = (im) \frac{1}{R_0 r} \frac{B}{B_\zeta} = (im) \frac{1}{r} \frac{\hat{B}}{F} = \frac{\hat{k}_\perp}{a} \quad (3.4)$$

ここで

$$\hat{k}_\perp = im \frac{1}{r/a} \frac{\hat{B}}{F} \quad (3.5)$$

曲率  $\kappa_n$

円柱プラズマでは

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\nabla \frac{B^2}{2} + B^2 \kappa_n \nabla r$$

が成立する。一方

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_r = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} B^2 - \frac{B_p^2}{r}$$

より

$$\kappa_n = -\frac{B_p^2}{B^2} \frac{1}{r} = \frac{\hat{\kappa}_n}{a} \quad (3.6)$$

$$\hat{\kappa}_n = -\frac{B_p^2}{B^2} \frac{1}{r/a} \quad (3.7)$$

が成立する。ここで  $B_p$  は平衡磁場のポロイダル成分である。

## 4 境界条件の設定

内部層方程式を「初期値・境界値問題」および与えられた境界条件のもとでの「固有値問題」として解く。境界条件の設定においては、次の基本的仮定

$|x| \rightarrow \infty$ では「線形理想 MHD 方程式」領域に漸近する。

を用いる。

ポテンシャル

$$\varphi = \varphi(x) \exp(im\theta - in\zeta) \quad (4.1)$$

の漸近条件は

$$\varphi(x) \sim \varphi_R(x^{-1/2-\mu} + \Delta_R x^{-1/2+\mu}), \quad x \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

$$\varphi(x) \sim \varphi_L(|x|^{-1/2-\mu} + \Delta_L |x|^{-1/2+\mu}), \quad x \rightarrow -\infty \quad (4.3)$$

である ( $\mu$ :Suydam 指数)。ここで接続データ  $\Delta_R, \Delta_L$  は外部解から与えられる [2]。

有限区間  $[x_L, x_R]$  を導入して、端点  $x_L, x_R$  で漸近条件が十分成立していると仮定する。このとき、(4.2) 式から  $\varphi_R$  を消去でき、第 3 種の齋次境界条件

$$\varphi = \sigma_R \frac{d\varphi}{dx}, \quad x = x_R \quad (4.4)$$

$$\sigma_R = \frac{x_R(1 + \Delta_R x_R^{2\mu})}{(-0.5 - \mu) + (-0.5 + \mu)\Delta_R x_R^{2\mu}} \quad (4.5)$$

を得る。左側の境界条件も同様にして

$$\varphi = \sigma_L \frac{d\varphi}{dx}, \quad x = x_L \quad (4.6)$$

$$\sigma_L = \frac{x_L(1 + \Delta_L |x_L|^{2\mu})}{(-0.5 - \mu) + (-0.5 + \mu)\Delta_L |x_L|^{2\mu}} \quad (4.7)$$

次に、理想 MHD 領域では電気抵抗が無視でき、また、プラズマの運動は非圧縮性 ( $\text{div} \mathbf{v} \sim 0$ ) であるので

$$\partial_\tau \psi + k_{\parallel}(x)\varphi = 0 \quad (4.8)$$

$$\partial_\tau p - \frac{dp_0}{dr} \frac{1}{B_0} (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s \varphi = 0 \quad (4.9)$$

が成立する。これから、端点における  $\varphi, p$  の境界条件が設定される。また  $v_{\parallel}$  の境界条件は磁場に平行な運動方程式

$$\rho_0 \partial_\tau v_{\parallel} = -k_{\parallel}(x)p - \frac{dp_0}{dr} (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s \psi \quad (4.10)$$

より与えられる。固有値問題の場合、置き換え  $\partial_\tau \rightarrow \gamma$  ( $\gamma$ は固有値) により、境界条件は

$$\gamma\psi = -k_{\parallel}(x)\varphi \quad (4.11)$$

$$\gamma p = \frac{dp_0}{dr} \frac{1}{B} (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s \varphi \quad (4.12)$$

$$\rho_0 \gamma v_{\parallel} = k_{\parallel}(x)p + \frac{dp_0}{dr} (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s \psi \quad (4.13)$$

となる。

## 5 モデル方程式

### 5.1 モデル方程式の無次元化

物理量  $X$  の次元 (ディメンジョン) を  $[X]$  で表すと、内部層方程式に現れる物理量の次元は次のようである。

$$[\psi] = [\text{長さ}], \quad [\varphi] = [B_0][\text{長さ}]^2[\text{時間}]^{-1}$$

$$[U] = [B_0]^{-1}[B_0][\text{時間}]^{-1} = [\text{時間}]^{-1}, \quad \left[ B_0^2 \nabla_{\parallel} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = [B_0]^2 [\text{長さ}]^{-2}$$

$$[\rho] = [B^2][\text{時間}]^2[\text{長さ}]^{-2}, \quad \left[ \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} \right] = [B^2][\text{時間}]^2[\text{長さ}]^{-2}[\text{時間}]^{-2} = \frac{[B^2]}{[\text{長さ}^2]}$$

そこで

$$\left. \begin{aligned} \psi &= a\Psi \\ x &= a\hat{x} \\ \varphi &= B_0 a^2 \omega_A \Phi \\ \tau &= \omega_A^{-1} \hat{\tau} \\ U &= \omega_A \hat{U} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

とおく。ここで  $v_A^2 = B_0^2/\rho_0$ ,  $\omega_A = v_A/a$  は、それぞれ、プラズマにおける特徴的なアルフェン速度およびアルフェン周波数である。(5.1)式を用いて、モデル方程式を無次元化すると

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{\tau}} = -\hat{\nabla}_{\parallel} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \hat{x}^2} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \hat{x}^2} = \hat{U} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\tau}} = -\hat{\nabla}_{\parallel} \Phi + \frac{\eta}{a^2 \omega_A \epsilon^3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \hat{x}^2} \quad (5.4)$$

を得る (ただし、 $\hat{\nabla}_{\parallel} = a\nabla_{\parallel}$ )。さらに抵抗拡散時間 (resistive diffusion time)  $\tau_R$  と磁気レイノズル数  $S_R$  を

$$\frac{1}{\tau_R} = \frac{\eta}{a^2}, \quad S_R = \frac{\tau_A}{\tau_R}$$



より与えられる。固有値問題の場合、置き換え  $\partial_\tau \rightarrow \gamma$  ( $\gamma$ は固有値) により、境界条件は

$$\gamma\psi = -k_{\parallel}(x)\varphi \quad (4.11)$$

$$\gamma p = \frac{dp_0}{dr} \frac{1}{B} (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s \varphi \quad (4.12)$$

$$\rho_0 \gamma v_{\parallel} = k_{\parallel}(x)p + \frac{dp_0}{dr} (\mathbf{b} \times \nabla r) \cdot \nabla_s \psi \quad (4.13)$$

となる。

## 5 モデル方程式

### 5.1 モデル方程式の無次元化

物理量  $X$  の次元 (ディメンジョン) を  $[X]$  で表すと、内部層方程式に現れる物理量の次元は次のようである。

$$[\psi] = [\text{長さ}], \quad [\varphi] = [B_0][\text{長さ}]^2[\text{時間}]^{-1}$$

$$[U] = [B_0]^{-1}[B_0][\text{時間}]^{-1} = [\text{時間}]^{-1}, \quad \left[ B_0^2 \nabla_{\parallel} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] = [B_0]^2 [\text{長さ}]^{-2}$$

$$[\rho] = [B^2][\text{時間}]^2[\text{長さ}]^{-2}, \quad \left[ \rho \frac{\partial U}{\partial \tau} \right] = [B^2][\text{時間}]^2[\text{長さ}]^{-2}[\text{時間}]^{-2} = \frac{[B^2]}{[\text{長さ}^2]}$$

そこで

$$\left. \begin{aligned} \psi &= a\Psi \\ x &= a\hat{x} \\ \varphi &= B_0 a^2 \omega_A \Phi \\ \tau &= \omega_A^{-1} \hat{\tau} \\ U &= \omega_A \hat{U} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

とおく。ここで  $v_A^2 = B_0^2/\rho_0$ ,  $\omega_A = v_A/a$  は、それぞれ、プラズマにおける特徴的なアルフェン速度およびアルフェン周波数である。(5.1)式を用いて、モデル方程式を無次元化すると

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{\tau}} = -\hat{\nabla}_{\parallel} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \hat{x}^2} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \hat{x}^2} = \hat{U} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\tau}} = -\hat{\nabla}_{\parallel} \Phi + \frac{\eta}{a^2 \omega_A \epsilon^3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \hat{x}^2} \quad (5.4)$$

を得る (ただし、 $\hat{\nabla}_{\parallel} = a\nabla_{\parallel}$ )。さらに抵抗拡散時間 (resistive diffusion time)  $\tau_R$  と磁気レイノズル数  $S_R$  を

$$\frac{1}{\tau_R} = \frac{\eta}{a^2}, \quad S_R = \frac{\tau_A}{\tau_R}$$

で定義する。このとき、今まで未定であった内部層近似におけるオーダーリング・パラメータ  $\epsilon$  は

$$\epsilon = S^{-1/3}$$

で与えられ、(5.4) 式は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\tau}} = -\hat{\nabla}_{\parallel} \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \hat{x}^2} \quad (5.5)$$

となる。次に、 $\Psi \rightarrow i\Psi$  に置き換え

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{\parallel} &= i\hat{k}_{\parallel}\hat{x} \\ \hat{k}_{\parallel} &= \frac{m}{A} \left( \frac{\hat{F}}{\hat{B}} \right)_{r_0} s^{-1} \end{aligned}$$

とすれば、無次元化されたモデル方程式として

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \hat{k}_{\parallel} x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = U \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\hat{k}_{\parallel} x \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (5.8)$$

を得る。ここで無次元量  $\hat{x}$  を  $x$  で表している。さらに、 $x$  と  $\tau$  のスケール変換をすると、(5.6) 式 ~ (5.8) 式はさらに簡単になる。すなわち

$$x = L_R z, \quad \tau = L_{\tau} t$$

とおくと、(5.8) 式は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\hat{k}_{\parallel} L_R L_{\tau} z \Phi + \frac{L_{\tau}}{L_R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (5.9)$$

となるので、条件

$$|\hat{k}_{\parallel}| L_R L_{\tau} = 1, \quad \frac{L_{\tau}}{L_R^2} = 1 \quad (5.10)$$

とすると

$$L_R = |\hat{k}_{\parallel}|^{-1/3}, \quad L_{\tau} = |\hat{k}_{\parallel}|^{-2/3} \quad (5.11)$$

を得る。このとき (5.9) 式は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\text{sgn}(\hat{k}_{\parallel}) z \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (5.12)$$

に簡約される。次に (5.7) 式は

$$\frac{1}{L_R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = U$$

であるので、新しく  $U_{new} = L_R^2 U$  とおくと

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = U_{new} \quad (5.13)$$

となる。そして、(5.6)式の両辺に  $L_R^2$  をかけると

$$\frac{\partial U_{new}}{\partial t} = \text{sgn}(\hat{k}_{\parallel})z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (5.14)$$

したがって、解くべき方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \text{sgn}(k_{\parallel})z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = U \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel})z \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (5.17)$$

となる。特に固有値問題は

$$\left. \begin{aligned} \gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \text{sgn}(k_{\parallel})z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\ \gamma \Psi &= -\text{sgn}(k_{\parallel})z \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

という簡単な方程式になる。

## 5.2 モデル方程式の接続条件と分散関係式

モデル方程式 (5.18) に対する接続条件として

$$\Phi(z) = \Phi_{\infty} \left[ \frac{1}{2} + \Phi_{odd}(z) \right] \quad (5.19)$$

とおくとき

$$\Phi_{odd}(z) \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad z \rightarrow +\infty \quad (5.20)$$

$$\Phi_{odd}(z) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad z \rightarrow -\infty \quad (5.21)$$

および

$$\frac{d\Phi_{odd}}{dz} = -\frac{\lambda_H}{\pi} \frac{1}{z^2}, \quad z \rightarrow \pm\infty \quad (5.22)$$

を採用する [4]。ここで  $\lambda_H$  は与えられたパラメータである。これより、 $z \rightarrow \infty$  のとき

$$\Phi(z) \rightarrow 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} \rightarrow -\Phi_{\infty} \frac{\lambda_H}{\pi} \frac{1}{z^2} \quad (5.24)$$

および、 $z \rightarrow -\infty$  のとき

$$\Phi(z) \rightarrow \Phi_{\infty} \quad (5.25)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} \rightarrow -\Phi_{\infty} \frac{\lambda_H}{\pi} \frac{1}{z^2} \quad (5.26)$$

である。したがって、 $z = z_L$  および  $z = z_R$  での境界条件を、それぞれ

$$\Phi = \sigma_L \frac{d\Phi}{dz} \quad (5.27)$$

および

$$\Phi = \sigma_R \frac{d\Phi}{dz} \quad (5.28)$$

とするとき

$$\sigma_L = -\frac{\pi}{\lambda_H} z_L^2, \quad \sigma_R = -z_R \quad (5.29)$$

を得る。

方程式 (5.18) は解析的に解くことができ、固有値  $\gamma$  を与える分散関係式は

$$\gamma = \lambda_H \frac{\gamma^{9/4} \Gamma((\gamma^{3/2} - 1)/4)}{8 \Gamma((\gamma^{3/2} + 5)/4)} \quad (5.30)$$

で与えられる [4]。ここで  $\Gamma(x)$  はガンマ関数である。(5.30) 式より

$$\lambda_H = 8\gamma^{-5/4} \frac{\Gamma((\gamma^{3/2} + 5)/4)}{\Gamma((\gamma^{3/2} - 1)/4)} \quad (5.31)$$

を得る。不安定固有値  $\gamma$  は常に正の実数であり、しかも各  $\lambda_H$  に対して不安定固有値は 1 つしかない。

$\gamma = 1 + \delta, 0 < \delta \ll 1$  のときの (5.30) 式の近似解は

$$\begin{aligned} \gamma &\sim 1 + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \lambda_H \\ &= 1 + 0.376 \lambda_H ; \lambda_H \ll 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

で与えられる。次に、 $\lambda_H < 0$  で  $0 < \gamma \ll 1$  の分散関係式として

$$\gamma = \Lambda_0 |\lambda_H|^{-4/5} = \Lambda_0 \left| \frac{1}{\lambda_H} \right|^{4/5} \quad (5.33)$$

$$\Lambda_0 \equiv \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \Gamma \left( \frac{3}{4} \right) \right)^2 \right\}^{-4/5} \quad (5.34)$$

を得る。

## 6 固有値問題のための差分法

等間隔グリッド

$$z_L = z_1 < z_2 < \cdots < z_N < z_{N+1} = z_R$$

を導入し、方程式 (5.18) に中心差分法を適用すると

$$\gamma \frac{\Phi_{j+1} - 2\Phi_j + \Phi_{j-1}}{(\Delta z)^2} = \text{sgn}(k_{\parallel}) z_j \frac{\Psi_{j+1} - 2\Psi_j + \Psi_{j-1}}{(\Delta z)^2} \quad (6.1)$$

$$\gamma \Psi_j = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_j \Phi_j + \frac{\Psi_{j+1} - 2\Psi_j + \Psi_{j-1}}{(\Delta z)^2} \quad (6.2)$$

を得る。次に左側の境界条件 (5.27) を  $j = 2$  で、右側の境界条件 (5.28) を  $j = N$  で課す。すなわち

$$\Phi_2 - \frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z} (\Phi_3 - \Phi_1) = 0 \quad (6.3)$$

$$\Phi_N - \frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z} (\Phi_{N+1} - \Phi_{N-1}) = 0 \quad (6.4)$$

これらを固有値問題の形式に書くと

$$\gamma \left[ \frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z} \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z} \Phi_3 \right] = \alpha \left[ \frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z} \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z} \Phi_3 \right] \quad (6.5)$$

$$\gamma \left[ \frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z} \Phi_{N-1} + \Phi_N - \frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z} \Phi_{N+1} \right] = \alpha \left[ \frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z} \Phi_{N-1} + \Phi_N - \frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z} \Phi_{N+1} \right] \quad (6.6)$$

を得る。ここで  $\alpha$  は入力パラメータである。これらの方程式は固有値  $\alpha$  を持ち、 $\gamma \neq \alpha$  の固有値に属する固有関数は境界条件 (6.3)、(6.4) を満たす。

もう 1 つの境界条件

$$\gamma \Psi = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z \Phi \quad (6.7)$$

は、 $j = 1, j = N + 1$  で課せられる。

$$\gamma \Psi_1 = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_1 \Phi_1 \quad (6.8)$$

$$\gamma \Psi_{N+1} = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_{N+1} \Phi_{N+1} \quad (6.9)$$

これらの方程式は  $\gamma = 0$  を固有値に持ち、 $\gamma \neq 0$  の固有値に属する固有関数は境界条件 (6.8)、(6.9) を満たす。

以上の方程式は、一般固有値問題

$$A\vec{x} = \gamma B\vec{x} \quad (6.10)$$

$$\vec{x} = (\Phi_1, \Psi_1, \dots, \Phi_{N+1}, \Psi_{N+1})^T \quad (6.11)$$

の形式にまとめられる。ここで、行列  $A, B$  は  $2(N+1) \times 2(N+1)$  の行列である。

この一般固有値問題は QR 法 (固有値をすべて求める場合) および逆ベキ法 (不安定固有値だけを求める場合) で解くことができる。QR 法では、まず、 $B$  の逆行列を求め、(6.10) 式を

$$(B^{-1}A)\vec{x} = \gamma\vec{x} \quad (6.12)$$

とする。そして、SSL2 のサブルーチン DCEIG2 (複素 Hessenberg 行列を用いる複素 QR 法) を実行する。

逆ベキ法では 1 次方程式

$$(A - \gamma_0 B)\vec{x}_{n+1} = B\vec{x}_n \quad (6.13)$$

を反復的に解く。ここで  $\gamma_0$  は固有値の推測値として与える。

複素 QR 法を用いる場合、固有値  $\gamma$  が実数であっても、固有ベクトル  $(\Phi_j, \Psi_j)$  ( $j = 1, \dots, N+1$ ) は実ベクトルとは限らない。しかし、次のようにして  $(\Phi_j, \Psi_j)$  を実ベクトル  $(\Phi_{new,j}, \Psi_{new,j})$  に変換することができる。  $|\operatorname{Re}\Phi|_{\max}$  となる  $\Phi_l$  ( $l \neq 1, l \neq N+1$ ) に対して

$$\tan \delta = \frac{\operatorname{Im}\Phi_l}{\operatorname{Re}\Phi_l}$$

となる  $\delta$  を求めて、位相  $\exp(-i\delta)$  を固有ベクトル  $(\Phi_j, \Psi_j)$  にかけると

$$\Phi_{new} = \Phi \exp(-i\delta) = (\operatorname{Re}\Phi)_{new} + i(\operatorname{Im}\Phi)_{new} \quad (6.14)$$

$$(\operatorname{Re}\Phi)_{new} = \operatorname{Re}\Phi \cos \delta + \operatorname{Im}\Phi \sin \delta \quad (6.15)$$

$$(\operatorname{Im}\Phi)_{new} = \operatorname{Im}\Phi \cos \delta - \operatorname{Re}\Phi \sin \delta \quad (6.16)$$

および

$$\Psi_{new} = \Psi \exp(-i\delta) = (\operatorname{Re}\Psi)_{new} + i(\operatorname{Im}\Psi)_{new} \quad (6.17)$$

$$(\operatorname{Re}\Psi)_{new} = \operatorname{Re}\Psi \cos \delta + \operatorname{Im}\Psi \sin \delta \quad (6.18)$$

$$(\operatorname{Im}\Psi)_{new} = \operatorname{Im}\Psi \cos \delta - \operatorname{Re}\Psi \sin \delta \quad (6.19)$$

を得る。ここで添字  $j$  は省略した。そして、 $\operatorname{Re}\Phi_{\max} = 1$  となるように

$$\Phi_{new} = \Phi_{new} / \operatorname{Re}\Phi_{new,j} \quad (6.20)$$

$$\Psi_{new} = \Psi_{new} / \operatorname{Re}\Phi_{new,j} \quad (6.21)$$

とすると、 $(\Phi_{new,j}, \Psi_{new,j})$  は  $\Phi_{new,j}$  の最大値が 1 である実ベクトルに変換される。

## 7 初期値・境界値問題のための差分法

時間の離散点を

$$\Phi^n, U^n, \Psi^n$$

ととり、内部層方程式の差分近似として、以下のような、 $\theta$ を入力パラメータとする荷重平均した差分近似法を用いる。

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta\tau} \\ = & \operatorname{sgn}(k_{\parallel})z_j \left\{ \theta \frac{\Psi_{j+1}^{n+1} - 2\Psi_j^{n+1} + \Psi_{j-1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} + (1-\theta) \frac{\Psi_{j+1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right\} \quad (7.1) \end{aligned}$$

$$\Phi_{j+1}^{n+1} - 2\Phi_j^{n+1} + \Phi_{j-1}^{n+1} = (\Delta z)^2 U_j^{n+1} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{\Delta\tau} = & -\operatorname{sgn}(k_{\parallel})z_j \left( \theta\Phi_j^{n+1} + (1-\theta)\Phi_j^n \right) \\ & + \frac{1}{(\Delta z)^2} \left\{ \theta \left( \Psi_{j+1}^{n+1} - 2\Psi_j^{n+1} + \Psi_{j-1}^{n+1} \right) \right. \\ & \left. + (1-\theta) \left( \Psi_{j+1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j-1}^n \right) \right\} \quad (7.3) \end{aligned}$$

すなわち、 $\theta = 0$  のときは陽解法、 $\theta = 1$  のときは完全陰解法、そして $\theta = 1/2$  のときは Crank-Nicolson 法になる [5]。(7.2) 式を (7.1) 式に代入し、未知数  $(\Phi_j^{n+1}, \Psi_j^{n+1})$  に対する 1 次方程式を作ると

$$\begin{aligned} & \Phi_{j+1}^{n+1} - 2\Phi_j^{n+1} + \Phi_{j-1}^{n+1} \\ & - \theta \operatorname{sgn}(k_{\parallel})z_j \Delta\tau \Psi_{j+1}^{n+1} + 2\theta \operatorname{sgn}(k_{\parallel})z_j \Delta\tau \Psi_j^{n+1} - \theta \operatorname{sgn}(k_{\parallel})z_j \Delta\tau \Psi_{j-1}^{n+1} \\ = & \Phi_{j+1}^n - 2\Phi_j^n + \Phi_{j-1}^n \\ & + (1-\theta) \operatorname{sgn}(k_{\parallel})z_j \Delta\tau (\Psi_{j+1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j-1}^n) \quad (7.4) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \theta \operatorname{sgn}(k_{\parallel})z_j \Delta\tau \Phi_j^{n+1} \\ & - \theta \frac{\Delta\tau}{(\Delta z)^2} \Psi_{j+1}^{n+1} + \left( 1 + 2\theta \frac{\Delta\tau}{(\Delta z)^2} \right) \Psi_j^{n+1} - \theta \frac{\Delta\tau}{(\Delta z)^2} \Psi_{j-1}^{n+1} \\ = & -\operatorname{sgn}(k_{\parallel})z_j (1-\theta) \Delta\tau \Phi_j^n \\ & + (1-\theta) \frac{\Delta\tau}{(\Delta z)^2} \Psi_{j+1}^n + \left( 1 - 2(1-\theta) \frac{\Delta\tau}{(\Delta z)^2} \right) \Psi_j^n \\ & + (1-\theta) \frac{\Delta\tau}{(\Delta z)^2} \Psi_{j-1}^n \quad (7.5) \end{aligned}$$

を得る。次に、 $\Phi$  に対する境界条件は

$$\frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z}\Phi_1^{n+1} + \Phi_2^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z}\Phi_3^{n+1} = 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z}\Phi_{N-1}^{n+1} + \Phi_N^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z}\Phi_{N+1}^{n+1} = 0 \quad (7.7)$$

となる。また、 $\Psi$ の境界条件

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel})z\Phi \quad (7.8)$$

については内部層の方程式に適用するのと同じの荷重平均を持つ差分近似を適用する。

$$\frac{\Psi_1^{n+1} - \Psi_1^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel})z_1(\theta\Phi_1^{n+1} + (1-\theta)\Phi_1^n) \quad (7.9)$$

$$\frac{\Psi_{N+1}^{n+1} - \Psi_{N+1}^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel})z_{N+1}(\theta\Phi_{N+1}^{n+1} + (1-\theta)\Phi_{N+1}^n) \quad (7.10)$$

(7.9)、(7.10)式は

$$\theta\text{sgn}(k_{\parallel})z_1\Delta\tau\Phi_1^{n+1} + \Psi_1^{n+1} = \Psi_1^n - (1-\theta)\text{sgn}(k_{\parallel})z_1\Delta\tau\Phi_1^n \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \theta\text{sgn}(k_{\parallel})z_{N+1}\Delta\tau\Phi_{N+1}^{n+1} + \Psi_{N+1}^{n+1} &= \Psi_{N+1}^n \\ &\quad - (1-\theta)\text{sgn}(k_{\parallel})z_{N+1}\Delta\tau\Phi_{N+1}^n \end{aligned} \quad (7.12)$$

となる。以上で得られた $\Phi_j^{n+1}, \Psi_j^{n+1}$ は次の1次方程式

$$A \begin{pmatrix} \Phi_1^{n+1} \\ \Psi_1^{n+1} \\ \vdots \\ \Phi_{N+1}^{n+1} \\ \Psi_{N+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \vec{u} \quad (7.13)$$

の形式に整理できる。ここで $A$ は時間ステップに依存しない、 $2(N+1) \times 2(N+1)$ の9重対角行列であり、この帯行列に対するLU分解を用いて、この1次方程式を解く。

## 8 台関数の導入

内部層方程式において $\Psi$ の境界条件は、オームの法則において、電気抵抗を落とした方程式になっている。これはモデル方程式(5.17)あるいは(5.18)において $z \rightarrow z_L$ および $z \rightarrow z_R$ のとき $\partial^2\Psi/\partial z^2$ の係数がステップ関数的にゼロになることを意味する。この性質を差分近似で表現するのは困難である。1つの対策として、中心を $z=0$ 、幅を $\delta(=z_R)$ とする台関数

$$H(z) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{2k(z/\delta)^{2k}}{1-(z/\delta)^{2k}}\right] & , |z| < \delta \\ 0 & , |z| > \delta \end{cases} \quad (8.1)$$



$$\frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z}\Phi_1^{n+1} + \Phi_2^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_L}{2\Delta z}\Phi_3^{n+1} = 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z}\Phi_{N-1}^{n+1} + \Phi_N^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_R}{2\Delta z}\Phi_{N+1}^{n+1} = 0 \quad (7.7)$$

となる。また、 $\Psi$ の境界条件

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel})z\Phi \quad (7.8)$$

については内部層の方程式に適用するのと同じの荷重平均を持つ差分近似を適用する。

$$\frac{\Psi_1^{n+1} - \Psi_1^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel})z_1(\theta\Phi_1^{n+1} + (1-\theta)\Phi_1^n) \quad (7.9)$$

$$\frac{\Psi_{N+1}^{n+1} - \Psi_{N+1}^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel})z_{N+1}(\theta\Phi_{N+1}^{n+1} + (1-\theta)\Phi_{N+1}^n) \quad (7.10)$$

(7.9)、(7.10)式は

$$\theta\text{sgn}(k_{\parallel})z_1\Delta\tau\Phi_1^{n+1} + \Psi_1^{n+1} = \Psi_1^n - (1-\theta)\text{sgn}(k_{\parallel})z_1\Delta\tau\Phi_1^n \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \theta\text{sgn}(k_{\parallel})z_{N+1}\Delta\tau\Phi_{N+1}^{n+1} + \Psi_{N+1}^{n+1} &= \Psi_{N+1}^n \\ &\quad - (1-\theta)\text{sgn}(k_{\parallel})z_{N+1}\Delta\tau\Phi_{N+1}^n \end{aligned} \quad (7.12)$$

となる。以上で得られた $\Phi_j^{n+1}, \Psi_j^{n+1}$ は次の1次方程式

$$A \begin{pmatrix} \Phi_1^{n+1} \\ \Psi_1^{n+1} \\ \vdots \\ \Phi_{N+1}^{n+1} \\ \Psi_{N+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \vec{u} \quad (7.13)$$

の形式に整理できる。ここで $A$ は時間ステップに依存しない、 $2(N+1) \times 2(N+1)$ の9重対角行列であり、この帯行列に対するLU分解を用いて、この1次方程式を解く。

## 8 台関数の導入

内部層方程式において $\Psi$ の境界条件は、オームの法則において、電気抵抗を落とした方程式になっている。これはモデル方程式(5.17)あるいは(5.18)において $z \rightarrow z_L$ および $z \rightarrow z_R$ のとき $\partial^2\Psi/\partial z^2$ の係数がステップ関数的にゼロになることを意味する。この性質を差分近似で表現するのは困難である。1つの対策として、中心を $z=0$ 、幅を $\delta(=z_R)$ とする台関数

$$H(z) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{2k(z/\delta)^{2k}}{1-(z/\delta)^{2k}}\right] & , |z| < \delta \\ 0 & , |z| > \delta \end{cases} \quad (8.1)$$

を導入することが考えられる。ここで  $k=2$  とする。

初期値・境界値問題に台関数を導入すると、オームの法則は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel})z\Phi + H(z)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (8.2)$$

となる。(8.2) 式の差分近似は

$$\begin{aligned} & \frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{\Delta \tau} \\ &= -\text{sgn}(k_{\parallel})z_j \left( \theta \Phi_j^{n+1} + (1-\theta)\Phi_j^n \right) \\ & \quad + \frac{H(z_j)}{(\Delta z)^2} \left\{ \theta \left( \Psi_{j+1}^{n+1} - 2\Psi_j^{n+1} + \Psi_{j-1}^{n+1} \right) \right. \\ & \quad \left. + (1-\theta) \left( \Psi_{j+1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j-1}^n \right) \right\} \end{aligned} \quad (8.3)$$

であり、未知変数を整理して 1 次方程式

$$\begin{aligned} & \theta \text{sgn}(k_{\parallel})z_j \Delta \tau \Phi_j^{n+1} \\ & - \theta \frac{\Delta \tau}{(\Delta z)^2} H(z_j) \Psi_{j+1}^{n+1} + \left( 1 + 2\theta \frac{\Delta \tau}{(\Delta z)^2} H(z_j) \right) \Psi_j^{n+1} - \theta \frac{\Delta \tau}{(\Delta z)^2} H(z_j) \Psi_{j-1}^{n+1} \\ &= -\text{sgn}(k_{\parallel})z_j (1-\theta) \Delta \tau \Phi_j^n \\ & \quad + (1-\theta) \frac{\Delta \tau}{(\Delta z)^2} H(z_j) \Psi_{j+1}^n + \left( 1 - 2(1-\theta) \frac{\Delta \tau}{(\Delta z)^2} H(z_j) \right) \Psi_j^n \\ & \quad + (1-\theta) \frac{\Delta \tau}{(\Delta z)^2} H(z_j) \Psi_{j-1}^n \end{aligned} \quad (8.4)$$

を得る。

固有値問題

$$\gamma \Psi = -\text{sgn}(k_{\parallel})z\Phi + H(z)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (8.5)$$

の差分近似は

$$\gamma \Psi_j = -\text{sgn}(k_{\parallel})z_j \Phi_j + H(z_j) \frac{\Psi_{j+1} - 2\Psi_j + \Psi_{j-1}}{(\Delta z)^2} \quad (8.6)$$

と表される。

## 9 固有値問題のテスト計算

### 9.1 不安定固有値と固有関数の計算

QR法で固有値と固有関数を求める場合の入力パラメータを以下に示す。なお、入力パラメータの詳細は付録 B.1 に示されている。

図 9.3、図 9.4 の入力パラメータ：

```
&EGNPRB
ZRIGHT = 10.0,
NDIV = 100,
BALPHA = -100.0,
ISLOPT = 0,
ISGOPT = 1,
RLAMBH = 0.1,
&END
```

図 9.5、図 9.6 の入力パラメータ：

```
&EGNPRB
ZRIGHT = 10.0,
NDIV = 100,
BALPHA = -10000.0,
ISLOPT = 0,
ISGOPT = 1,
RLAMBH = -10.0,
&END
```

不安定側固有値については、その分散関係式が (5.31) 式で与えられるので、数値的に求めた固有値と解析解との比較ができ、これによって数値計算法の妥当性を確認できる。 $\lambda_H > 0$  (抵抗性内部キンク・モード) の場合の数値的に求めた固有値 ( $\Delta$  で示す) と分散関係式 (実線) を図 9.1 に示す。また  $\lambda_H = -10$  (ティアリング・モード) の場合を図 9.2 に示す。実線は分散関係式、○印は後に述べる外挿値である (図 9.11 参照)。いずれの場合も、本報告書で提案した数値計算法で求めた固有値は (5.31) 式で与えられる分散関係式をみたしており、数値計算法が妥当であることを示している。なお、 $\lambda_H > 0$  の成長率が高い抵抗性内部キンク・モードの場合、計算区間  $[-z_R, z_R]$  が比較的短い場合でも固有値は解析的に一致するが、 $\lambda_H < 0$  の成長率が低いティアリング・モードの場合、長い計算区間が必要である。図 9.3、図 9.4 は  $\lambda_H = 0.1$  の場合の数値的に求めた固有関数  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  および  $d^2\Psi/dz^2$  を示す。 $\lambda_H = -10$  の場合の固有関数は図 9.5、図 9.6 に示す。 $\Phi(z)$  の形から分かるように、 $\lambda_H > 0$  のときの抵抗性内部キンク・モードの、および、 $\lambda_H < 0$  のときのティアリング・モードの性質がよく捉えられている [4]。また、 $d^2\Psi/dz^2$  が非ゼロの領域は電気抵抗の効果が働いている領域であり、両方の場合ともこれらの固有関数にとって  $|z| = z_R$  の領域は理想 MHD 領域であり、したがって  $z = \pm z_R$  で課した境界条件と両立する。

計算区間  $[-z_R, z_R]$  が長い場合、固有値問題を解くには逆ベキ法を用いることが必要になる。このとき推測固有値(反復法における初期値)はQR法で求めた固有値を用いる。この方法により固有値 $\gamma$ の計算区間の長さ(すなわち $z_R$ )依存性を調べることができる。以下に、逆ベキ法を用いるときの入力パラメータを示す。

図 9.7から図 9.10の入力パラメータ :

```
&EGNPRB
ZRIGTH = 160.0,
NDIV = 1600,
BALPHA = -10000.0,
ISLOPT = 1,
RLAMO = 1.0,
ISGOPT = 1,
RLAMBH = 0.1,
&END
```

図 9.11から図 9.14の入力パラメータ :

```
&EGNPRB
ZRIGTH = 160.0,
NDIV = 1600,
BALPHA = -10000.0,
ISLOPT = 1,
RLAMO = 0.2,
ISGOPT = 1,
RLAMBH = -10.0,
&END
```

図 9.7 ~ 図 9.10に $\lambda_H = 0.1$ の場合の、また図 9.11 ~ 図 9.14に $\lambda_H = -10$ の場合の、 $\gamma$ の $z_R$ 依存性、固有関数 $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$ および $d^2\Psi/dz^2$ を示す。これらより、計算区間を長くしても、固有値、固有関数とも安定に求めることができることが分かる。また、この数値実験からの固有値 $\gamma$ は $1/z_R$ の収束則で解析解に収束することが示された(図 9.2)。

## 9.2 安定側固有値・固有関数と台関数の効果

接続条件を境界条件に置き換えて固有値問題を解く本解法は、安定側の固有値も容易に得られることが大きな特徴である。安定側の固有値および固有関数を数値的に求め、その性質を調べる。この際、(8.1)式で与えられる台関数 $H(z)$ (図 9.15)の与える効果も調べる。最初に、図 9.16 および図 9.17 に $\lambda_H = -10$ 、 $z_R = 40$ の場合の固有値 $\gamma$ の分布を示す(グリッド点数は $NDIV = 400$ )。図 9.17 は台関数を使った場合の固有値の分布図である。固有値は特徴的な分布をしており、図中の記号(0)から(8)で示すように分類した。この分類は $H(z)$ の有無に関係しない。特に、図で記号(0)で示されている不安定側固有値( $\text{Re}\gamma > 0$ )は $H(z)$ の有無にかかわらず1個しか存在しない。また記号(1)で示す負の実固有値が存在する。そして、複素平面の原

点は、その固有値の集合の集積点になっていると推測できる。記号(2)で示される固有値の集合については、原点がその集積点になっているか、あるいは、不安定側固有値を第1固有値としているのかどうかは、数値計算だけからでは判定できない。台関数  $H(z)$  の有無の違いは、図 9.16 および図 9.17 で記号(4)で示される固有値の分布に最もよく現れる。すなわち、台関数を使用しない(図 9.16) 場合には固有値が3つずつ並んで、虚軸 ( $\text{Re}\gamma = 0$ ) に有限の角度で近づいていく。一方、台関数を使用する(図 9.17) 場合には、固有値が1本の曲線に載っており、しかも、その曲線が虚軸に載るようにして近づく。またどちらの場合も、(3)、(5)、(6)に囲まれた内部(記号(7)で示される)にも固有値が分布している。なお、物理的に重要な固有値は、不安定固有値 ( $\text{Re}\gamma > 0$ ) と  $|\text{Im}\gamma| \gg -\text{Re}\gamma$  であるような安定固有値 ( $\text{Re}\gamma < 0$ ) である。分布図では(0)および(1)、(2)で原点に近いもの、そして(4)の虚軸に近いものがそれに相当する。次に、それぞれ番号で分類された集合に属する固有値の固有関数を調べる。

図 9.18 および図 9.19 はそれぞれ、台関数を使用しない ( $\text{IOMFLG} = 0$ ) 場合と使用した ( $\text{IOMFLG} = 1$ ) 場合の不安定固有値の (a) $\Phi(z)$  と (b) $\Psi(z)$  を示している。固有値はそれぞれ

$$\gamma = 0.1937861071 \quad (\text{IOMFLG} = 0)$$

および

$$\gamma = 0.1937834760 \quad (\text{IOMFLG} = 1)$$

で、台関数の影響は無視できる。

図 9.20 ( $\text{IOMFLG} = 0$ ) と図 9.21 ( $\text{IOMFLG} = 1$ ) は、それぞれ、図 9.16 および図 9.17 で分類(1)に属する負の固有値の固有関数である。固有値は近いが別の固有関数である。すなわち、図 9.20 で  $\Phi$  が奇に近い固有関数であるが図 9.21 では  $\Phi$  は偶に近い固有関数である。両固有関数は原点 ( $z = 0$ ) から離れると激しく振動する。また、 $|z| > 20$  で急速に振幅が減少し、 $z = \pm z_R$  での境界条件の影響はあまり受けない。

次に、分類(2)に属する固有値を調べる。それらは、さらに2つに分類される。1つは図 9.22 ( $\text{IOMFLG} = 0$ ) および図 9.23 ( $\text{IOMFLG} = 1$ ) に示されるように遠方で  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  とともにゼロになる固有関数で、したがって、境界条件の影響が無視できる性質を持ち、偶奇の性質を持つ。たとえば図 9.22、図 9.23 に示される  $\Phi(z)$  はほとんど偶関数である。今ひとつは図 9.24 ( $\text{IOMFLG} = 0$ ) および図 9.25 ( $\text{IOMFLG} = 1$ ) に示されるように、境界条件の影響を強く受ける固有関数である。しかし、これらの固有関数は遠方では  $d^2\Phi/dz^2 \rightarrow 0$  であるため、台関数の影響は弱いとみなせる。図 9.24、図 9.25 の固有関数は不安定側固有関数(0)に連なる可能性があるが、数値計算だけでは判定できない。

分類(3)に属する固有関数はその固有値の実部がほぼ一定で

$$\text{Re}\gamma = -6.0 \sim -6.1 \quad (\text{IOMFLG} = 0)$$

および

$$\text{Re}\gamma = -5.1 \sim -5.8 \quad (\text{IOMFLG} = 1)$$

である(図 9.26 から図 9.29)。どの固有関数も、原点から離れて局在し、かつ短波長の波を持つ波束の性質を示している。そのため、台関数の有無に強い影響を受ける。また、左右非対称であるので境界条件の影響も受けている。

図 9.30 から図 9.34 は IOMFLG=0 の場合の分類 (4) に属する固有関数を、また図 9.35 から図 9.38 は IOMFLG=1 の場合で分類 (4) に属する固有関数を示している。いずれの場合も、固有値が虚軸に近いものから、分類 (3) との合流点に近づいていく順になっている。他の分類に属する固有関数との著しい差は、大域的であることと計算領域の端点付近で固有関数の 2 階微分がゼロでない変化をすることである。したがって、この固有関数は計算領域  $z_R$  の設定の仕方および台関数  $H(z)$  の有無に強く影響を受ける。その傾向は特に虚軸に近い固有値に著しい(図 9.30 と図 9.35 参照)。一方、固有値が分類 (3) との合流点に近づくと  $H(z)$  の有無にかかわらず、固有関数も分類 (3) に属する固有関数に近づく(図 9.34 と図 9.28, 図 9.38 と図 9.29 を比較)。

分類 (5) (図 9.39(IOMFLG=0)、図 9.40(IOMFLG=1))、分類 (6) (図 9.41(IOMFLG=0)、図 9.42(IOMFLG=1)) および分類 (7) (図 9.43(IOMFLG=0)、図 9.44(IOMFLG=1)) に属する固有関数は原点から離れた波束になっている。

分類 (8) に属する固有関数は、図 9.45(IOMFLG=0) と図 9.46(IOMFLG=1) に示すように台関数  $H(z)$  の有無に強い影響を受ける。いずれの場合も、固有関数は原点 ( $z=0$ ) から離れた波束になっているが、しかし、台関数を使用しない場合、固有関数は波束にゆっくり変化する関数が載っている。

台関数の使用が内部層方程式の固有値・固有関数に与える効果は次のように要約できる。

- (1) 不安定固有値は台関数  $H(z)$  の影響を受けない。
- (2) 台関数  $H(z)$  の効果は分類 (4)、(8) に属する固有関数に強く現れる。
- (3) 物理的に重要な安定側固有値のうち分類 (2) に属する固有関数については台関数の影響は小さい。一方、分類 (4) に属する固有関数は計算領域の設定に強く依存する。特に虚軸に近い固有関数が物理的に意味があるかどうかは、理論的な解析が必要である。

### 9.3 境界条件の変更

内部層方程式の境界条件においてポテンシャル  $\varphi(x)$  は時間に依存しない齋次境界条件 ((4.4) ~ (4.7)) であるけれども、磁束関数  $\psi(x)$  は時間に依存する境界条件 (4.8) になっている。それに対応して、固有値問題 (4.11) ~ (4.13) においては、物理的に興味のない  $\gamma=0$  が固有値になる。そこで磁束関数  $\psi(x)$  (および他の物理量) についてもその漸近形から境界条件を時間に依存しない齋次境界条件に変更することが考えられる。これをモデル方程式系 (5.6) ~ (5.8) について適用する。 $|z| \rightarrow \infty$  のとき

$$\Phi \sim \Phi_{\infty} \left( 1 + \frac{\Delta}{z} \right)$$

のとき、 $\Psi$ は漸近条件

$$\Psi \sim \Psi_{\infty}(z + \Delta) \quad (9.1)$$

を満たす。したがって、これより $\Psi$ についての第3種の齟次境界条件として

$$\Psi = \sigma_L^{\Psi} \frac{d\Psi}{dz}, \quad z = z_L \quad (9.2)$$

$$\sigma_L^{\Psi} = z_L + \frac{\lambda_H}{\pi} \quad (9.3)$$

および

$$\frac{d\Psi}{dz} = 0, \quad z = z_R \quad (9.4)$$

を得る。しかし、この境界条件では境界での $\Phi$ と $\Psi$ の結合がなくなっている。一方、もとの境界条件では固有値 $\gamma$ を通して $\Phi_{\infty}$ と $\Psi_{\infty}$ が結合している。

図 9.47 は、境界条件 (9.2) ~ (9.4) を用いた場合の不安定固有値の (a) 固有関数  $\Phi(z)$  と (b)  $\Psi(z)$  および  $d^2\Psi/dz^2$  を示している ( $\lambda_H = 0.1$ )。固有関数の形は図 9.3、図 9.4 と異なり、また、このときの固有値 ( $\gamma = 0.83067$ ) は解析値と一致していない (なお、不安定固有値は 1 つしかない)。これから、境界条件 (9.2) ~ (9.4) は不適切であることが分かる。そして、その原因は、境界で  $\Phi$  と  $\Psi$  の関係がなくなっていることにあると考えられる。

## 10 初期値・境界値問題のテスト計算

まず、初期値・境界値問題の差分近似式 (7.1) ~ (7.3) の数値安定性を調べる。完全陰解法 ( $\theta = 1$ ) の場合、差分近似式は

$$-\frac{1}{\Delta\tau} [(\delta^2 U^{n+1})_j - (\delta^2 U^n)_j] = \text{sgn}(k_{\parallel}) z_j (\delta^2 \Psi^{n+1})_j \quad (10.1)$$

$$\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_j \Phi_j^{n+1} + \frac{1}{(\Delta z)^2} (\delta^2 \Psi^{n+1})_j \quad (10.2)$$

となる。ここで

$$(\delta^2 f)_j \equiv f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1} \quad (10.3)$$

である。また、境界条件に対しても、同一の荷重平均を持つ差分近似が適用されるので

$$\frac{\Psi_1^{n+1} - \Psi_1^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_1 \Phi_1^{n+1} \quad (10.4)$$

$$\frac{\Psi_{N+1}^{n+1} - \Psi_{N+1}^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_{N+1} \Phi_{N+1}^{n+1} \quad (10.5)$$

を得る。これらを固有値問題に対する差分近似式 (6.1) ~ (6.9) と比較して、初期値・境界値問題の差分近似式は境界条件も含めて行列形式

のとき、 $\Psi$ は漸近条件

$$\Psi \sim \Psi_{\infty}(z + \Delta) \quad (9.1)$$

を満たす。したがって、これより $\Psi$ についての第3種の齋次境界条件として

$$\Psi = \sigma_L^{\Psi} \frac{d\Psi}{dz}, \quad z = z_L \quad (9.2)$$

$$\sigma_L^{\Psi} = z_L + \frac{\lambda_H}{\pi} \quad (9.3)$$

および

$$\frac{d\Psi}{dz} = 0, \quad z = z_R \quad (9.4)$$

を得る。しかし、この境界条件では境界での $\Phi$ と $\Psi$ の結合がなくなっている。一方、もとの境界条件では固有値 $\gamma$ を通して $\Phi_{\infty}$ と $\Psi_{\infty}$ が結合している。

図 9.47 は、境界条件 (9.2) ~ (9.4) を用いた場合の不安定固有値の (a) 固有関数  $\Phi(z)$  と (b)  $\Psi(z)$  および  $d^2\Psi/dz^2$  を示している ( $\lambda_H = 0.1$ )。固有関数の形は図 9.3、図 9.4 と異なり、また、このときの固有値 ( $\gamma = 0.83067$ ) は解析値と一致していない (なお、不安定固有値は 1 つしかない)。これから、境界条件 (9.2) ~ (9.4) は不適切であることが分かる。そして、その原因は、境界で  $\Phi$  と  $\Psi$  の関係がなくなっていることにあると考えられる。

## 10 初期値・境界値問題のテスト計算

まず、初期値・境界値問題の差分近似式 (7.1) ~ (7.3) の数値安定性を調べる。完全陰解法 ( $\theta = 1$ ) の場合、差分近似式は

$$-\frac{1}{\Delta\tau} [(\delta^2 U^{n+1})_j - (\delta^2 U^n)_j] = \text{sgn}(k_{\parallel}) z_j (\delta^2 \Psi^{n+1})_j \quad (10.1)$$

$$\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_j \Phi_j^{n+1} + \frac{1}{(\Delta z)^2} (\delta^2 \Psi^{n+1})_j \quad (10.2)$$

となる。ここで

$$(\delta^2 f)_j \equiv f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1} \quad (10.3)$$

である。また、境界条件に対しても、同一の荷重平均を持つ差分近似が適用されるので

$$\frac{\Psi_1^{n+1} - \Psi_1^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_1 \Phi_1^{n+1} \quad (10.4)$$

$$\frac{\Psi_{N+1}^{n+1} - \Psi_{N+1}^n}{\Delta\tau} = -\text{sgn}(k_{\parallel}) z_{N+1} \Phi_{N+1}^{n+1} \quad (10.5)$$

を得る。これらを固有値問題に対する差分近似式 (6.1) ~ (6.9) と比較して、初期値・境界値問題の差分近似式は境界条件も含めて行列形式



$$\frac{1}{\Delta\tau} B(\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n) = A\bar{x}^{n+1} \quad (10.6)$$

にまとめることができる。ここで、行列  $A, B$  は (6.10)、(6.11) 式における行列と同一であり、また

$$\bar{x}^n = (\Phi_1^n, \Psi_1^n, \dots, \Phi_{N+1}^n, \Psi_{N+1}^n)^T \quad (10.7)$$

である。(10.6) 式より  $\bar{x}^{n+1}$  に対する 1 次方程式

$$(B - \Delta\tau \cdot A)\bar{x}^{n+1} = B\bar{x}^n \quad (10.8)$$

を得る。 $\gamma$  を固有値問題  $A\bar{x} = \gamma B\bar{x}$  の固有値とすると  $(B - \Delta\tau \cdot A)^{-1}$  の固有値  $\alpha$  (増大因子) は

$$\alpha = \frac{1}{1 - \gamma\Delta\tau} \quad (10.9)$$

である。したがって、すべての安定側固有値に対して

$$|\alpha| \leq 1 \quad \text{for } \text{Re}\gamma \leq 0 \quad (10.10)$$

が成立するので完全陰解法は安定である。同様にして、Crank-Nicolson 法 ( $\theta = 1/2$ ) の場合、増大因子  $\alpha$  は

$$\alpha = \frac{1 + \gamma\Delta\tau/2}{1 - \gamma\Delta\tau/2} \quad (10.11)$$

を得る。これより

$$|\alpha| \leq 1 \quad \text{for } \text{Re}\gamma \leq 0 \quad (10.12)$$

であるので、Crank-Nicolson 法も安定である。

次に、 $\lambda_H = -10$  および  $\lambda_H = 0.1$  についてシミュレーションを行った。それぞれについて、完全陰解法および Crank-Nicolson 法を用いた。シミュレーション結果は

$\lambda_H = -10, \theta = 1/2$  について 図 10.1 ~ 図 10.4

$\lambda_H = -10, \theta = 1$  について 図 10.5 ~ 図 10.8

$\lambda_H = 0.1, \theta = 1/2$  について 図 10.9 ~ 図 10.12

$\lambda_H = 0.1, \theta = 1$  について 図 10.13 ~ 図 10.16

にそれぞれ示されている。各場合について 4 枚の図は、 $\|\Phi\|$  および  $\|\Psi\|$  の時間変化、各時間ステップにおける  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  および  $d^2\Psi/dz^2$  が示されている。ここで、 $\|\Psi\|$  は

$$\|\Psi\| = \left[ \sum_{j=1}^{N+1} |\Psi_j|^2 \right]^{1/2}$$

で与えられる ( $\|\Phi\|$  についても同様)。シミュレーションにおいてグリッド数  $NDIV = 100$ 、時間刻み幅  $\Delta\tau = 0.2$  であり、初期値は各  $\lambda_H$  の値に対応する不安定固有関数を

用いている。図 10.1、図 10.5、10.9 および 10.13 には  $\tau = 0$  と  $\tau = 50$  のときの  $\Phi(z)$  をもとに測定した増大因子  $\alpha$  と (10.9) 式あるいは (10.11) 式から計算した理論値も示されている。それらの一致は、すべての場合について、非常によい。

次に、 $\tau = 50$  のときの  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  をもとにして

$$\gamma = \frac{(\bar{x}A, \bar{x})}{(\bar{x}B, \bar{x})}$$

から固有値を求めた。それらは、 $\theta = 1/2$  および  $\theta = 1$  のいずれの場合についても

$$\gamma = 0.1609663 \quad \text{for } \lambda_H = -10.0$$

$$\gamma = 1.038921 \quad \text{for } \lambda_H = 0.1$$

であり、これらは QR 法の結果と一致している (図 9.3 および図 9.5 参照)。以上の結果から、本報告で用いている初期値・境界値問題の差分解法は、十分満足できるものであることが分かる。

以上の結果をもとに、内部層方程式の解  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  の時間発展を見るアニメーションを作成した。アニメーションの作成にはシリコングラフィック社 indigo2 上で AVS (Application Visualization System) を用いており、アニメーションを実行する Network を図 10.17 に示す。このときの時間刻み幅は  $\Delta\tau = 0.05$  であり、 $\tau = 12.5$  における  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  および  $d^2\Psi/dz^2$  をそれぞれ図 10.18 ~ 図 10.20 に示す。各図で実線は  $\theta = 1.0$ 、点線は  $\theta = 0.5$  の場合であり、ほとんど重なっている。

## 11 要 約

もともとの線形抵抗性 MHD 安定性問題は、境界条件を持つ初期値問題および境界値問題である。この初期値・境界値問題および固有値問題については現代的な関数解析 (functional analysis) による数学的理論が蓄積されており、その成果に裏付けされた数値計算法も非常に発展している。しかしながら、漸近接続法から導かれる内部層方程式の従来の数値解法 (したがって分散関係式の数値解法) は、上の数学的理論からみれば固有値問題に対する逆問題になっており、したがって、数値計算の不安定で、実行の困難な定式化に基づいている。本報告書では、その内部層の問題を固有値問題および初期値・境界値問題の順問題に戻したことになっている。これが提案した数値解法が成功した主な理由である。境界条件の変更や台関数の導入は、数値実験の結果、不適切ないし不要であること、したがって、本報告書の定式化が内部層問題にちょうど適合したものであることが示された。

さらに、この定式化から漸近接続法を次のように解釈できる。すなわち、外部解はプラズマの運動の原点における正則条件とプラズマ表面での境界条件を内部層でのプラズマの運動に対する境界条件に変換する働きをしており、その変換を担う量が接続データである。そして漸近接続法は、大域的な抵抗性 MHD 方程式の固有値問題を接続データを介して内部層方程式に対する固有値問題に翻訳する。

この数値解法によって漸近接続法による抵抗性 MHD 安定性解析が実用的になる

用いている。図 10.1、図 10.5、10.9 および 10.13 には  $\tau = 0$  と  $\tau = 50$  のときの  $\Phi(z)$  をもとに測定した増大因子  $\alpha$  と (10.9) 式あるいは (10.11) 式から計算した理論値も示されている。それらの一致は、すべての場合について、非常によい。

次に、 $\tau = 50$  のときの  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  をもとにして

$$\gamma = \frac{(\bar{x}A, \bar{x})}{(\bar{x}B, \bar{x})}$$

から固有値を求めた。それらは、 $\theta = 1/2$  および  $\theta = 1$  のいずれの場合についても

$$\gamma = 0.1609663 \quad \text{for } \lambda_H = -10.0$$

$$\gamma = 1.038921 \quad \text{for } \lambda_H = 0.1$$

であり、これらは QR 法の結果と一致している (図 9.3 および図 9.5 参照)。以上の結果から、本報告で用いている初期値・境界値問題の差分解法は、十分満足できるものであることが分かる。

以上の結果をもとに、内部層方程式の解  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  の時間発展を見るアニメーションを作成した。アニメーションの作成にはシリコングラフィック社 indigo2 上で AVS (Application Visualization System) を用いており、アニメーションを実行する Network を図 10.17 に示す。このときの時間刻み幅は  $\Delta\tau = 0.05$  であり、 $\tau = 12.5$  における  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  および  $d^2\Psi/dz^2$  をそれぞれ図 10.18 ~ 図 10.20 に示す。各図で実線は  $\theta = 1.0$ 、点線は  $\theta = 0.5$  の場合であり、ほとんど重なっている。

## 11 要 約

もともとの線形抵抗性 MHD 安定性問題は、境界条件を持つ初期値問題および境界値問題である。この初期値・境界値問題および固有値問題については現代的な関数解析 (functional analysis) による数学的理論が蓄積されており、その成果に裏付けされた数値計算法も非常に発展している。しかしながら、漸近接続法から導かれる内部層方程式の従来の数値解法 (したがって分散関係式の数値解法) は、上の数学的理論からみれば固有値問題に対する逆問題になっており、したがって、数値計算の不安定で、実行の困難な定式化に基づいている。本報告書では、その内部層の問題を固有値問題および初期値・境界値問題の順問題に戻したことになっている。これが提案した数値解法が成功した主な理由である。境界条件の変更や台関数の導入は、数値実験の結果、不適切ないし不要であること、したがって、本報告書の定式化が内部層問題にちょうど適合したものであることが示された。

さらに、この定式化から漸近接続法を次のように解釈できる。すなわち、外部解はプラズマの運動の原点における正則条件とプラズマ表面での境界条件を内部層でのプラズマの運動に対する境界条件に変換する働きをしており、その変換を担う量が接続データである。そして漸近接続法は、大域的な抵抗性 MHD 方程式の固有値問題を接続データを介して内部層方程式に対する固有値問題に翻訳する。

この数値解法によって漸近接続法による抵抗性 MHD 安定性解析が実用的になる

と期待される。特に本報告書で行った定式化は安全係数が凹状分布の場合やトロイダル配位の場合のような複数量有面問題への拡張が安易である。この問題の研究については近い将来報告する予定である。

## 謝 辞

本報告書で行った定式化に関してご助言をいただきました電気通信大学加古孝教授に感謝します。

## 参考文献

- [1] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, Plasma Confinement, Addison-Wesley, New York, (1992).
- [2] 徳田伸二, 渡邊朋子, MARG1D : 1次元外部領域接続データコード, JAERI-Data/Code 95-011 (1995).
- [3] Glasser, A. H., Jardin, S. C. and Tesauro G., Numerical Solution of the Resistive Magnetohydrodynamic Boundary Layer Equations, Phys. Fluids, **27** (1984), 1225 - 1242.
- [4] G. Ara, B. Basu, B. Coppi, G. Laval, M.N. Rosenbluth, and B. V. Waddell, Magnetic Reconnection and  $m = 1$  Oscillations in Current Carrying Plasmas, Annals of Phys., **112** 443-476 (1978).
- [5] G.D. スミス, コンピュータによる偏微分方程式の解法 [新訂版], サイエンス社, 東京, (1996).

と期待される。特に本報告書で行った定式化は安全係数が凹状分布の場合やトロイダル配位の場合のような複数次有理面問題への拡張が安易である。この問題の研究については近い将来報告する予定である。

## 謝 辞

本報告書で行った定式化に関してご助言をいただきました電気通信大学加古孝教授に感謝します。

## 参考文献

- [1] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, Plasma Confinement, Addison-Wesley, New York, (1992).
- [2] 徳田伸二, 渡邊朋子, MARG1D : 1次元外部領域接続データコード, JAERI-Data/Code 95-011 (1995).
- [3] Glasser, A. H., Jardin, S. C. and Tesauro G., Numerical Solution of the Resistive Magnetohydrodynamic Boundary Layer Equations, Phys. Fluids, **27** (1984), 1225 - 1242.
- [4] G. Ara, B. Basu, B. Coppi, G. Laval, M.N. Rosenbluth, and B. V. Waddell, Magnetic Reconnection and  $m = 1$  Oscillations in Current Carrying Plasmas, Annals of Phys., **112** 443-476 (1978).
- [5] G.D. スミス, コンピュータによる偏微分方程式の解法 [新訂版], サイエンス社, 東京, (1996).

と期待される。特に本報告書で行った定式化は安全係数が凹状分布の場合やトロイダル配位の場合のような複数有理面問題への拡張が安易である。この問題の研究については近い将来報告する予定である。

## 謝 辞

本報告書で行った定式化に関してご助言をいただきました電気通信大学加古孝教授に感謝します。

## 参考文献

- [1] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, Plasma Confinement, Addison-Wesley, New York, (1992).
- [2] 徳田伸二, 渡邊朋子, MARG1D : 1次元外部領域接続データコード, JAERI-Data/Code 95-011 (1995).
- [3] Glasser, A. H., Jardin, S. C. and Tesauro G., Numerical Solution of the Resistive Magnetohydrodynamic Boundary Layer Equations, Phys. Fluids, **27** (1984), 1225 - 1242.
- [4] G. Ara, B. Basu, B. Coppi, G. Laval, M.N. Rosenbluth, and B. V. Waddell, Magnetic Reconnection and  $m = 1$  Oscillations in Current Carrying Plasmas, Annals of Phys., **112** 443-476 (1978).
- [5] G.D. スミス, コンピュータによる偏微分方程式の解法 [新訂版], サイエンス社, 東京, (1996).

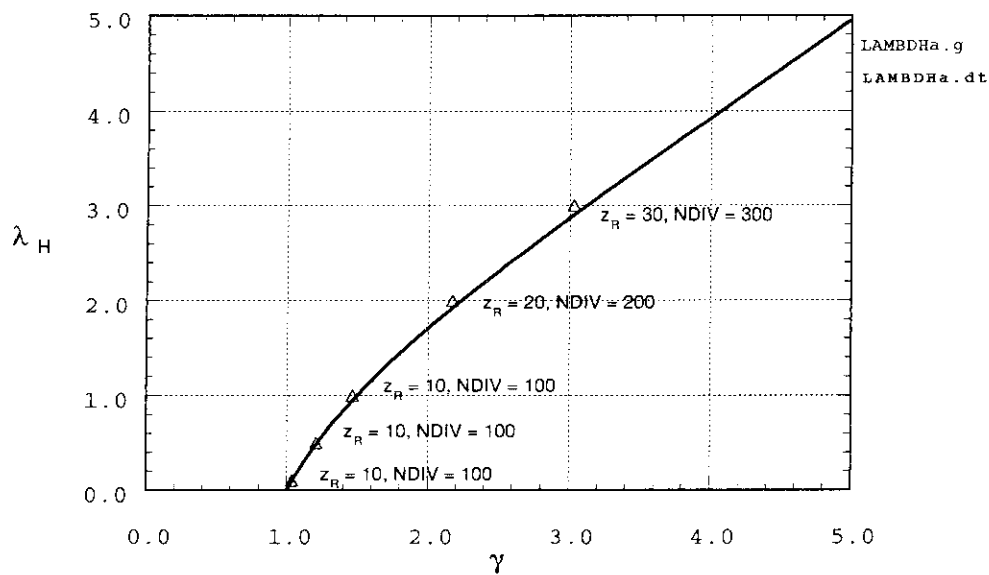


図 9.1: 固有値 (△印) と分散関係式 (実線)。

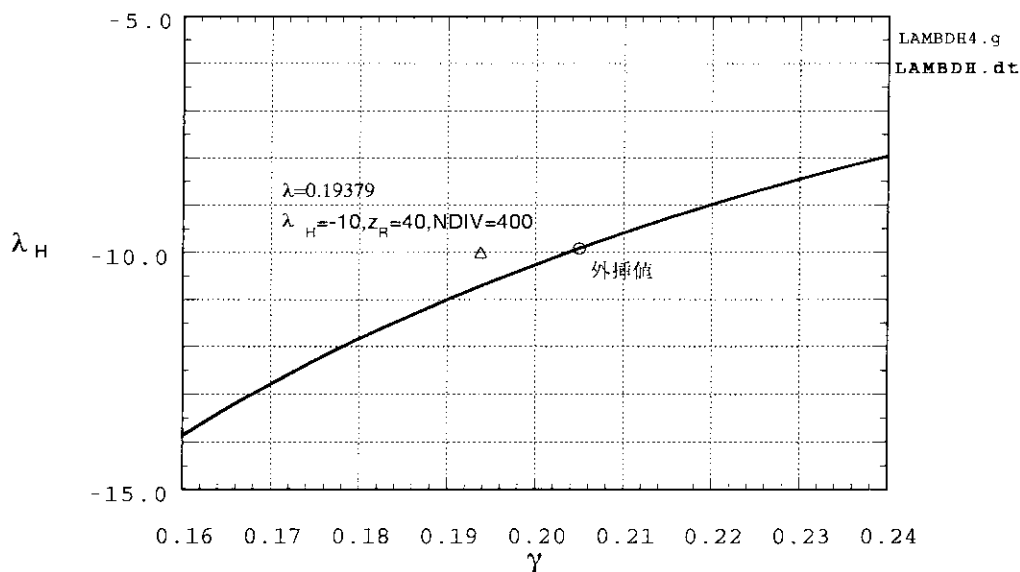


図 9.2:  $\lambda_H = -10$  の場合の固有値 (△印) と外挿値 (○印)。実線は分散関係式。

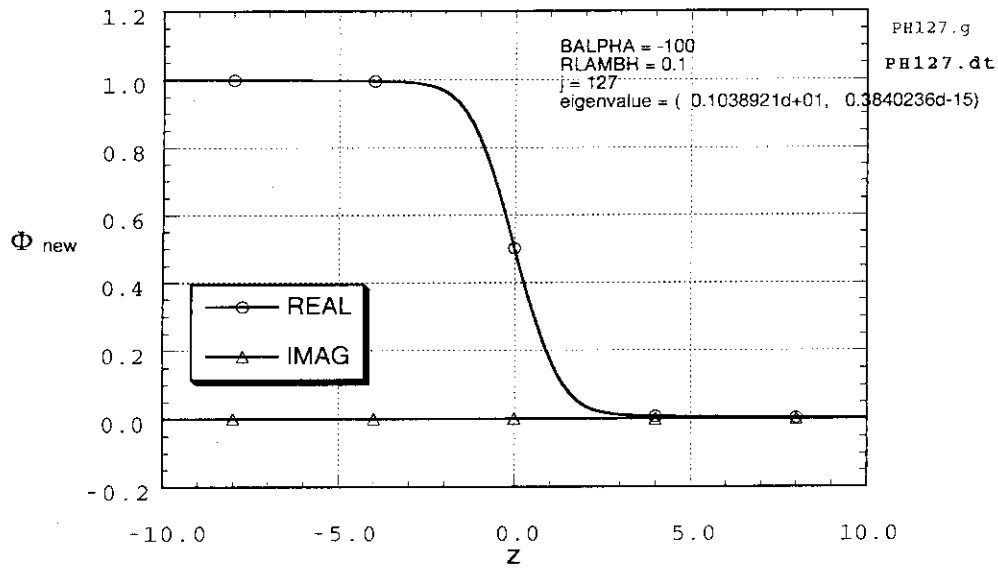


図 9.3:  $\lambda_H = 0.1, NDIV = 100, z_R = 10$  の固有関数  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

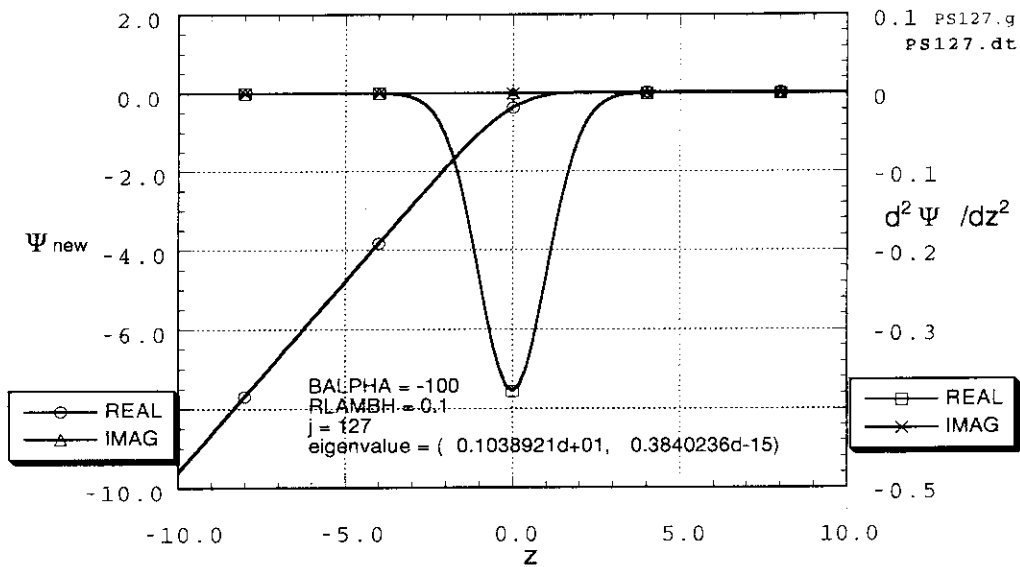


図 9.4:  $\lambda_H = 0.1, NDIV = 100, z_R = 10$  の固有関数  $\Psi(z)$  (左軸, ○印:実部, △印:虚部) と  $d^2\Psi/dz^2$  (右軸, □印:実部, ×印:虚部)。



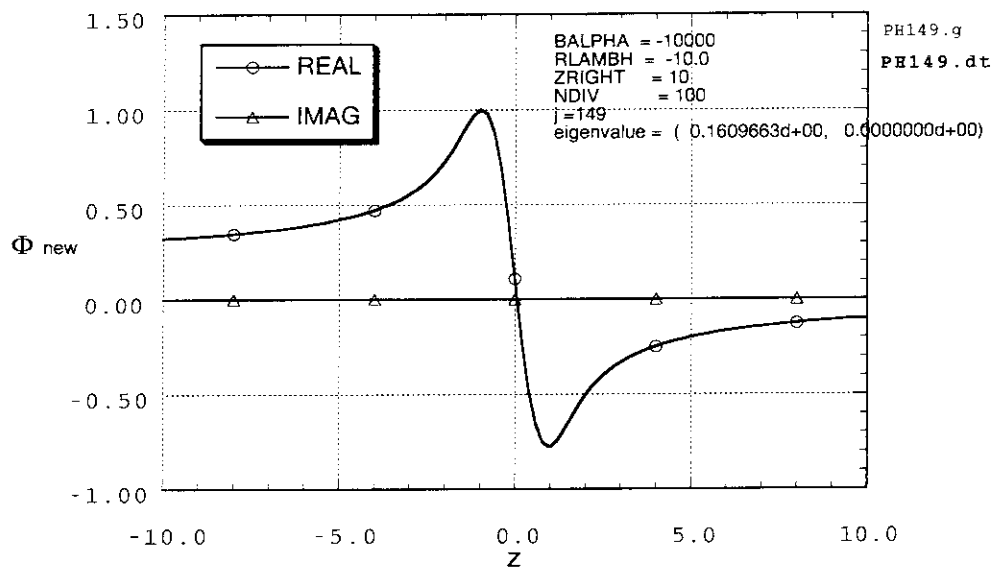


図 9.5:  $\lambda_H = -10, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の固有関数  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

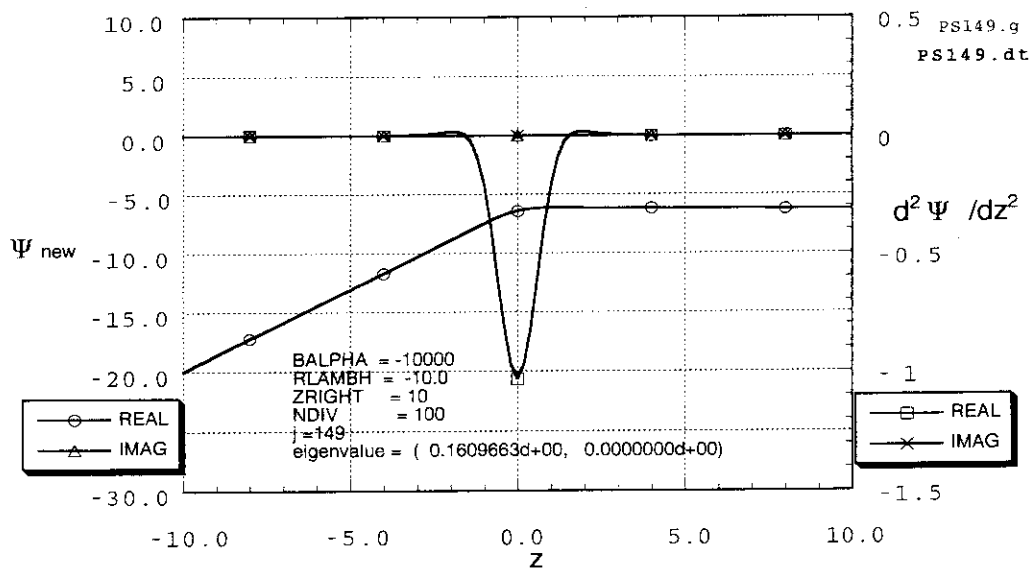


図 9.6:  $\lambda_H = -10, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の固有関数  $\Psi(z)$  (左軸, ○印:実部, △印:虚部) と  $d^2\Psi/dz^2$  (右軸, □印:実部, ×印:虚部)。

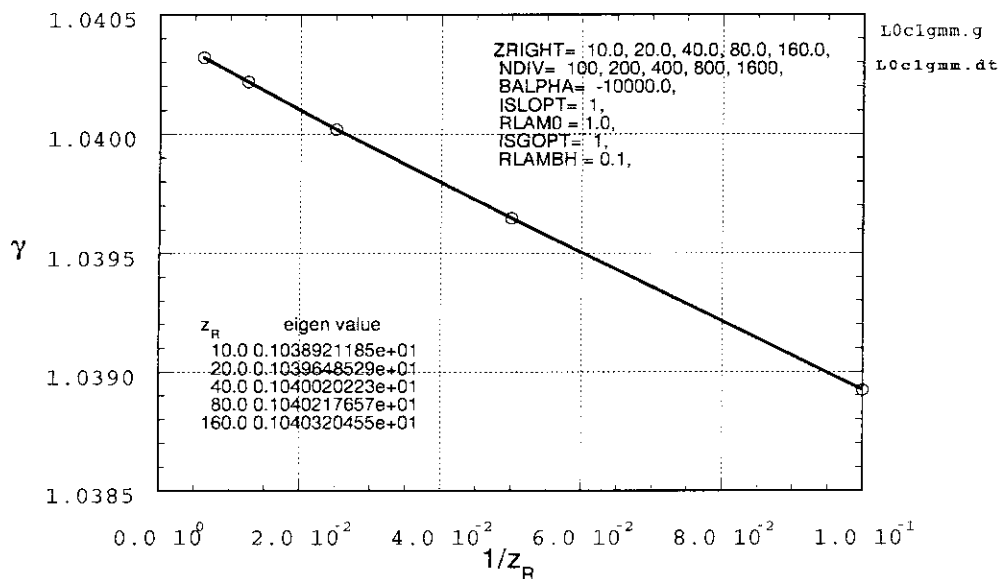


図 9.7:  $\lambda_H = 0.1$  の場合の逆ベキ法で求めた固有値  $\gamma$  の  $z_R$  依存性。  $\gamma$  は  $1/z_R$  の収束則で収束している。グリッドの刻み幅は  $\Delta z = 0.2$  に固定。

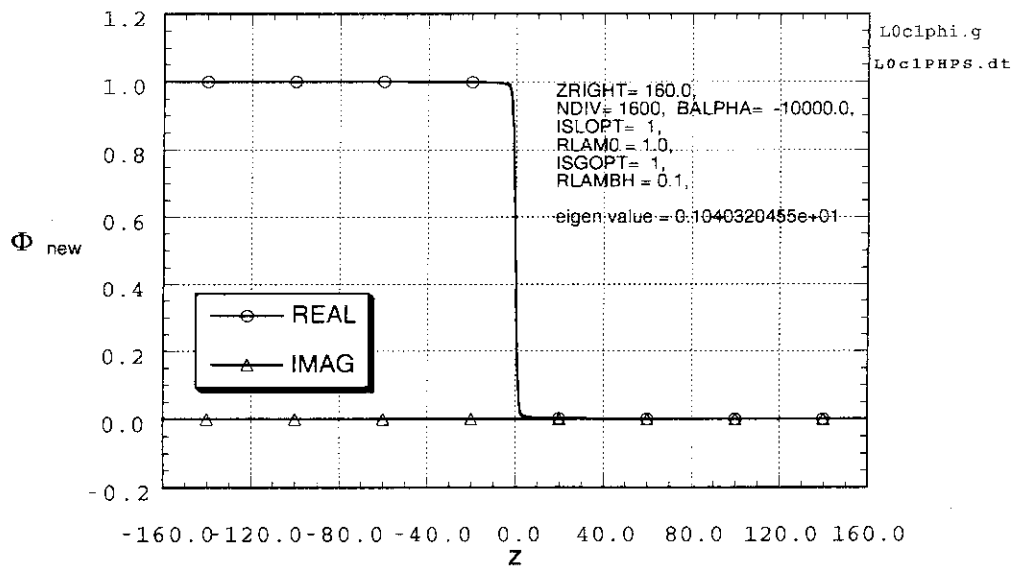


図 9.8:  $\lambda_H = 0.1, NDIV = 1600, z_R = 160$  の場合の逆ベキ法で求めた固有関数  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

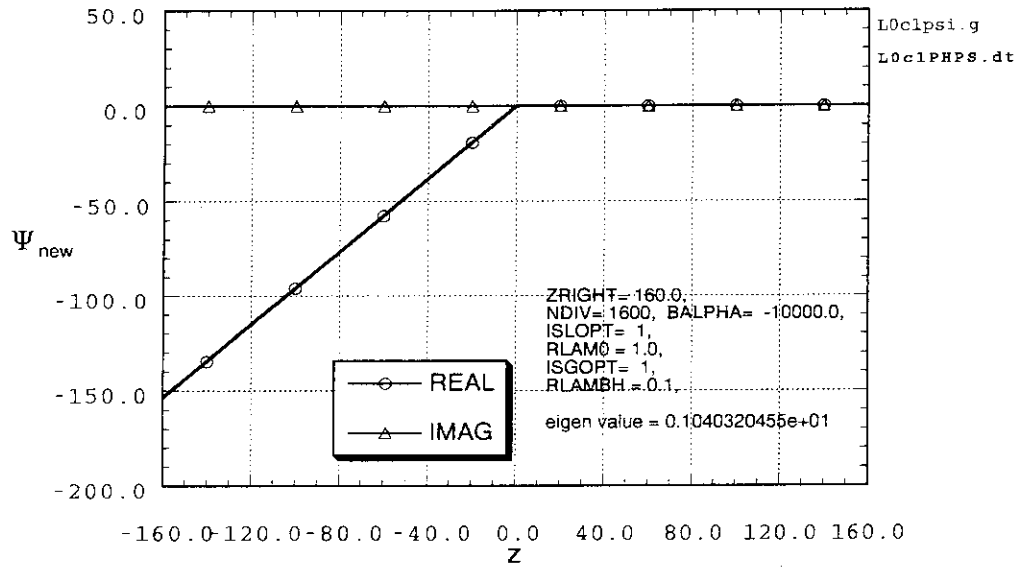


図 9.9:  $\lambda_H = 0.1, NDIV = 1600, z_R = 160$  の場合の逆ベキ法で求めた固有関数  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

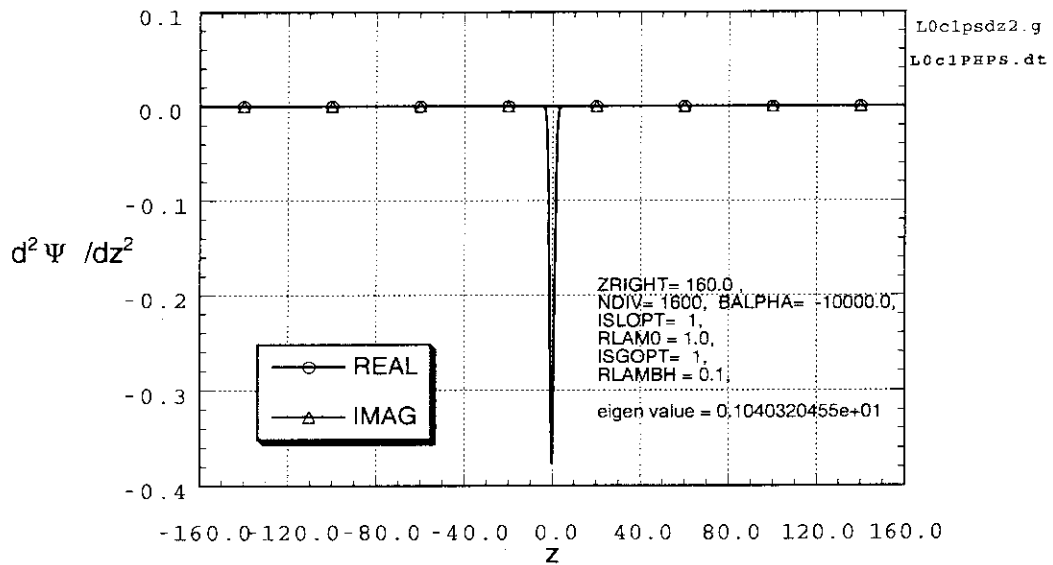


図 9.10:  $\lambda_H = 0.1, NDIV = 1600, z_R = 160$  の場合の逆ベキ法で求めた固有関数  $\Psi(z)$  の 2 階微分  $d^2\Psi/dz^2$  (○印:実部, △印:虚部)。

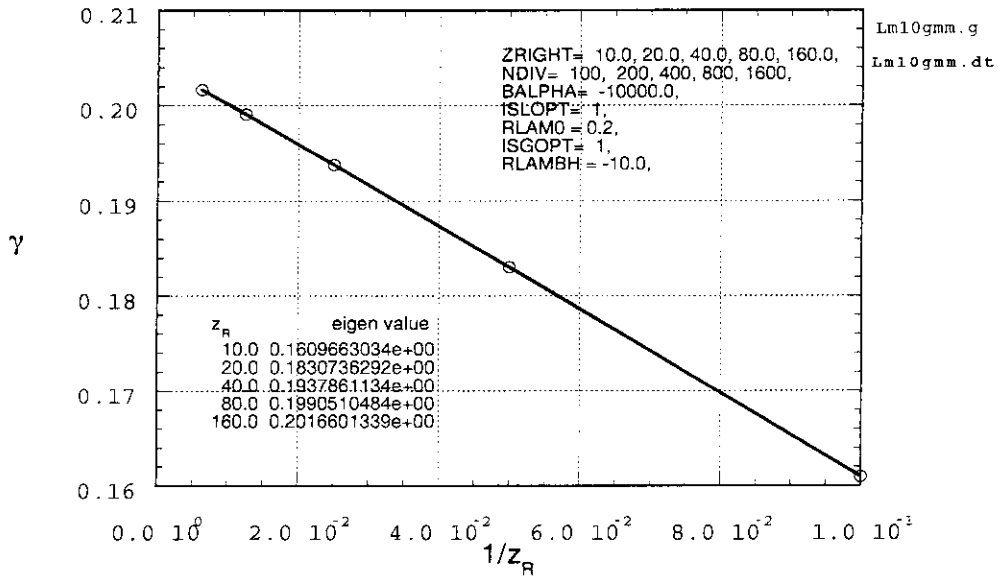


図 9.11:  $\lambda_H = -10$  の場合の逆ベキ法で求めた固有値  $\gamma$  の  $z_R$  依存性。  
 $\gamma$  は  $1/z_R$  の収束則で解析値に収束している (図 9.2 参照)。グリッドの刻み幅は  $\Delta z = 0.2$  に固定。

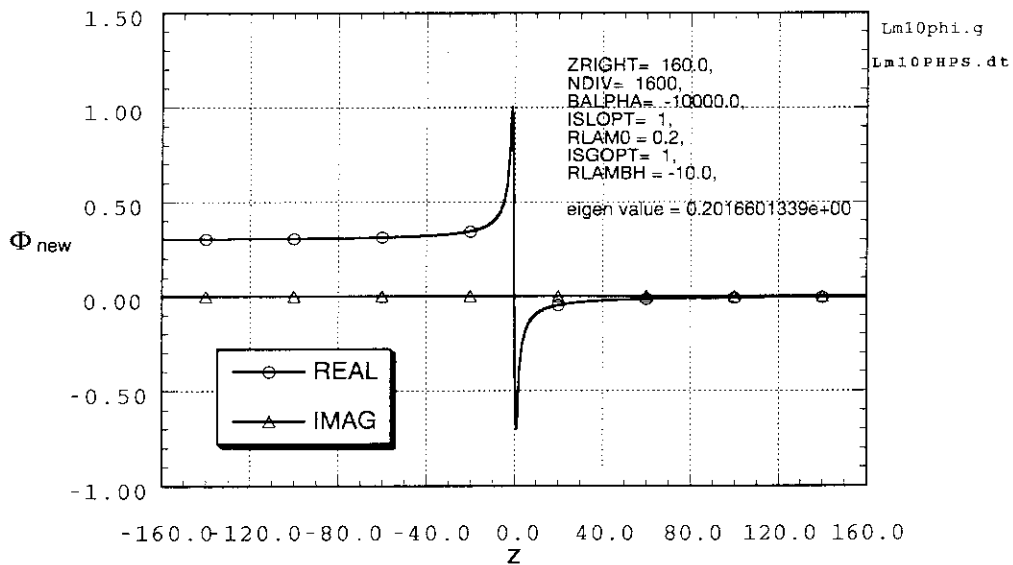


図 9.12:  $\lambda_H = -10, NDIV = 1600, z_R = 160$  の場合の逆ベキ法で求めた固有関数  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

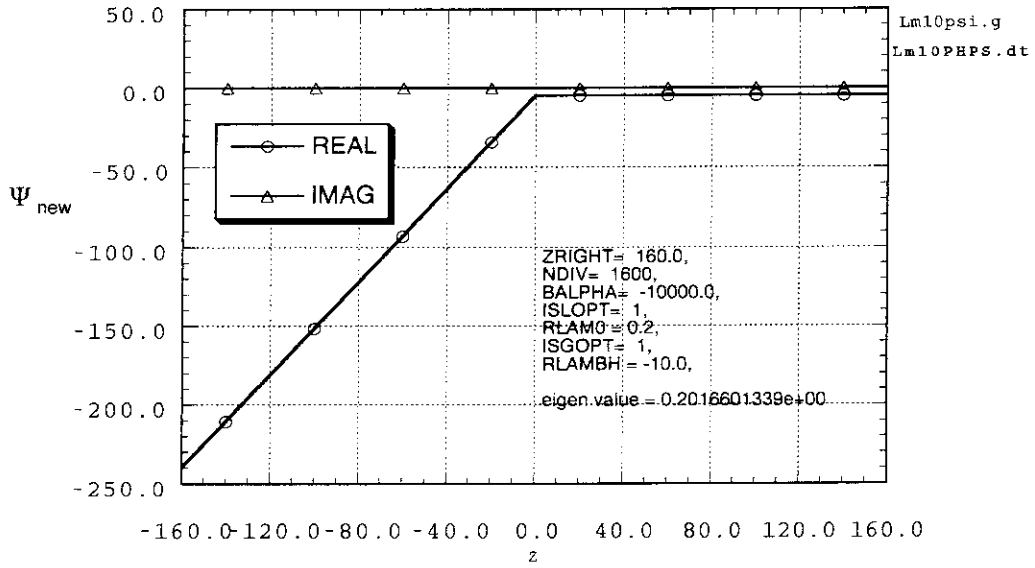


図 9.13:  $\lambda_H = -10, NDIV = 1600, z_R = 160$  の場合の逆べき法で求めた固有関数  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

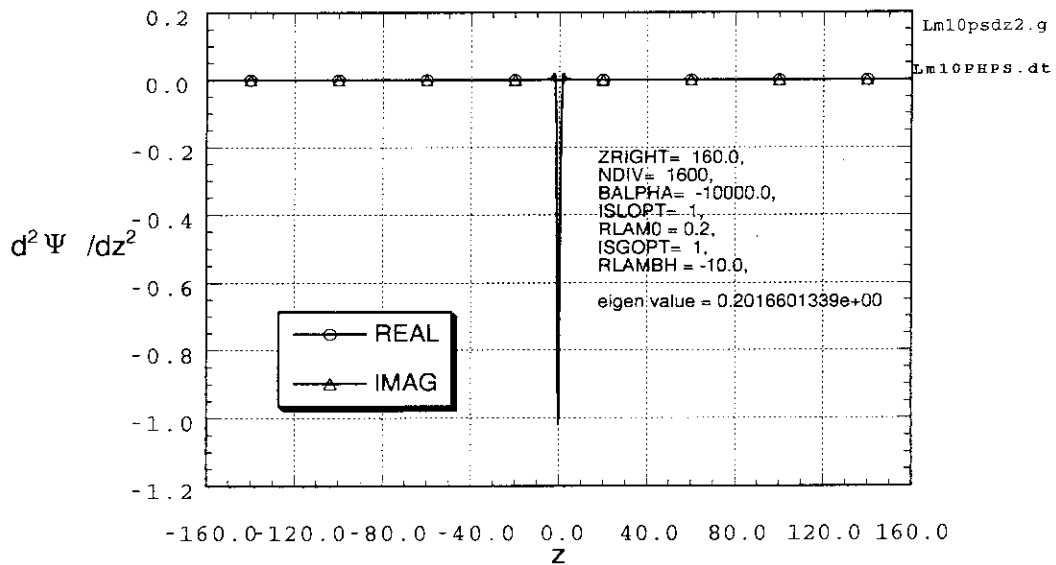


図 9.14:  $\lambda_H = -10, NDIV = 1600, z_R = 160$  の場合の逆べき法で求めた固有関数  $\Psi(z)$  の 2 階微分  $d^2\Psi/dz^2$  (○印:実部, △印:虚部)。

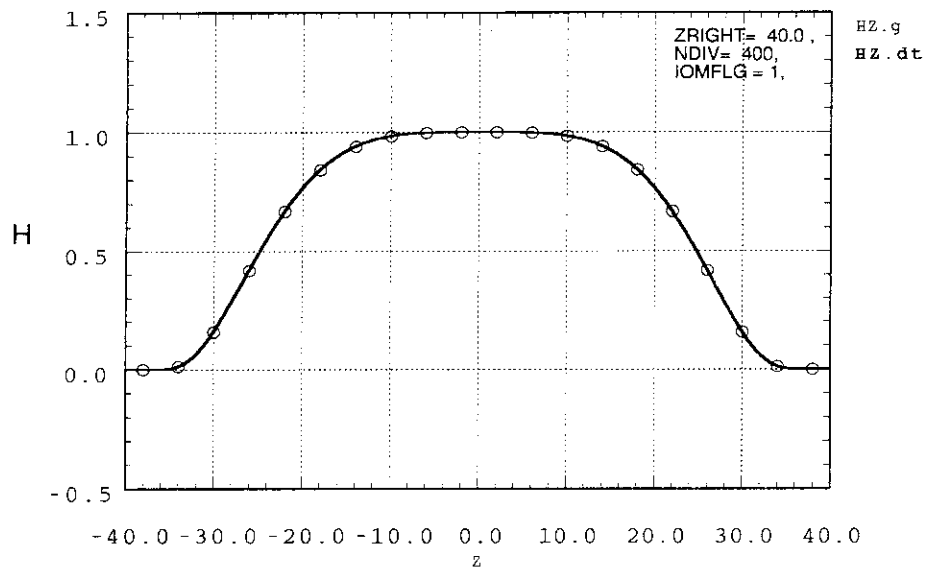


図 9.15: 台関数  $H(z)$  (グリッド点数は  $NDIV = 400$ )。

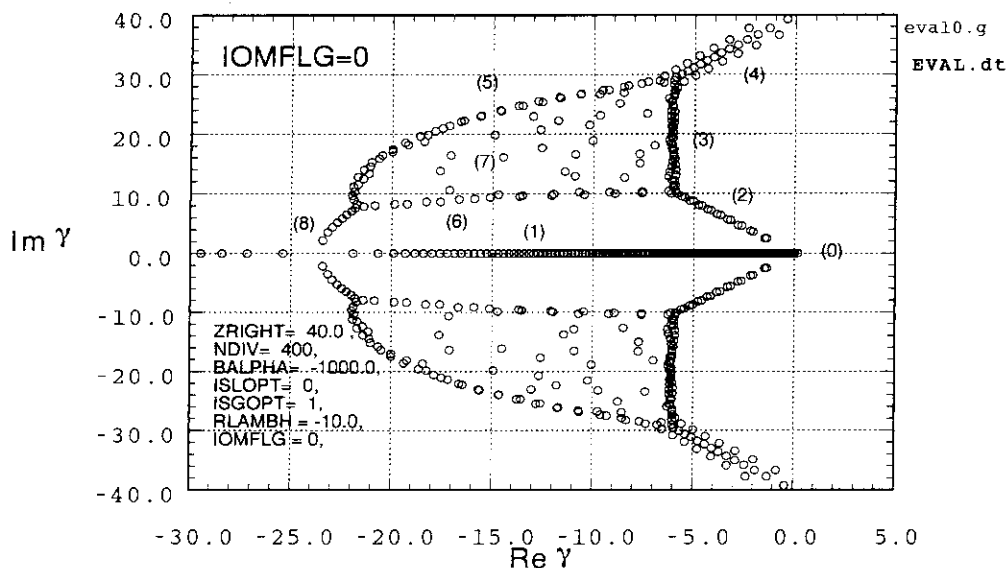


図 9.16:  $\lambda_H = -10, z_R = 40$ , グリッド点数  $NDIV = 400$  の場合の固有値の分布図。

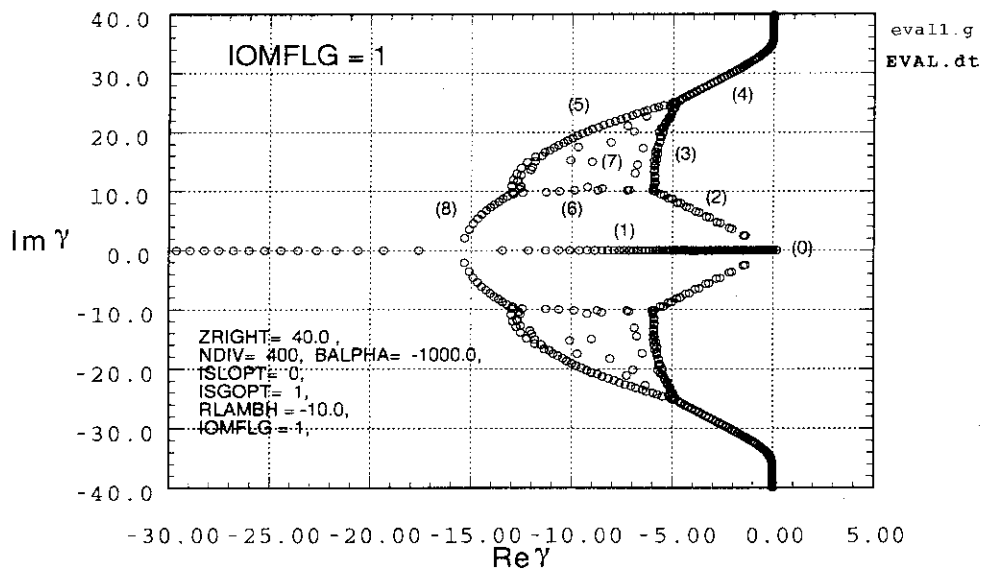


図 9.17:  $\lambda_H = -10, z_R = 40$ , グリッド点数  $NDIV = 400$  で台関数を使用した場合の固有値の分布図。

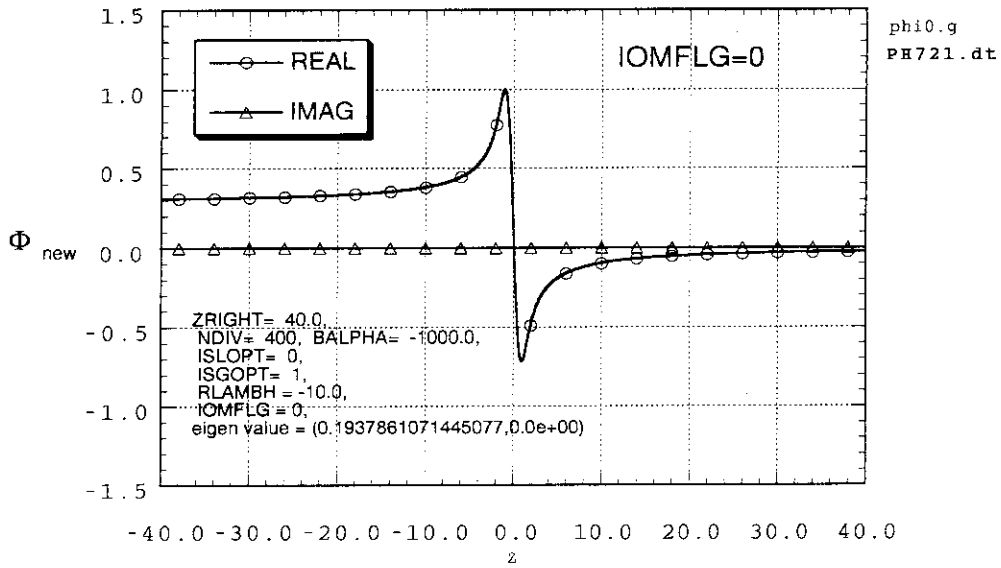


図 9.18(a): 台関数を使用しない場合の不安定固有値 (分類 (0)) の  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

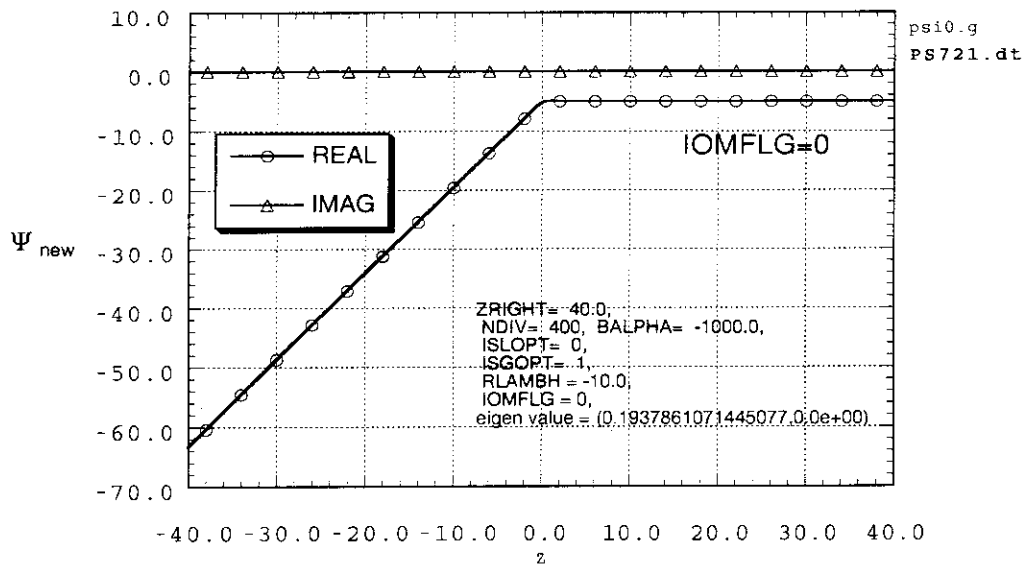


図 9.18(b): 台関数を使用しない場合の不安定固有値 (分類 (0)) の  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。



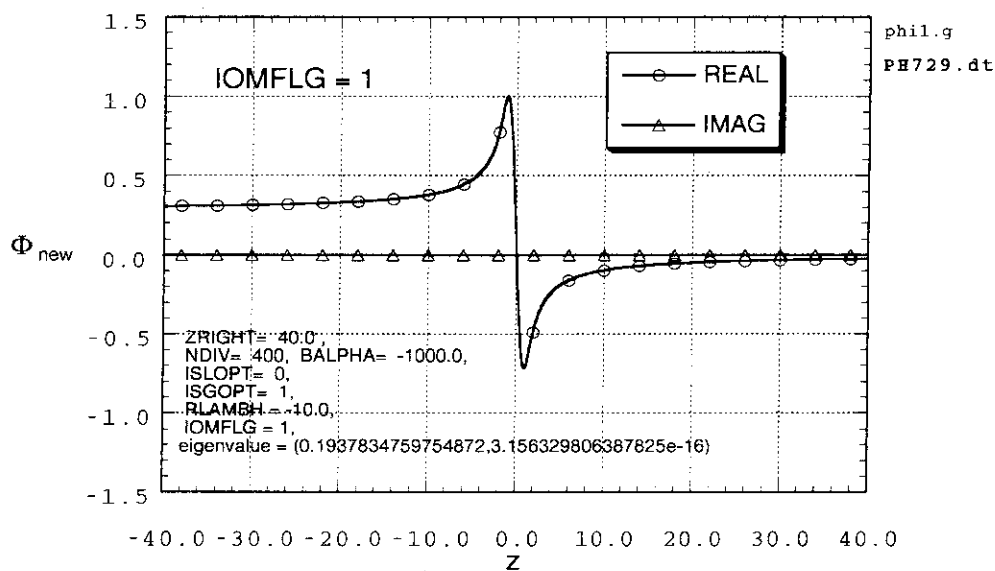


図 9.19(a): 台関数を使用した場合の不安定固有値 (分類 (0)) の  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

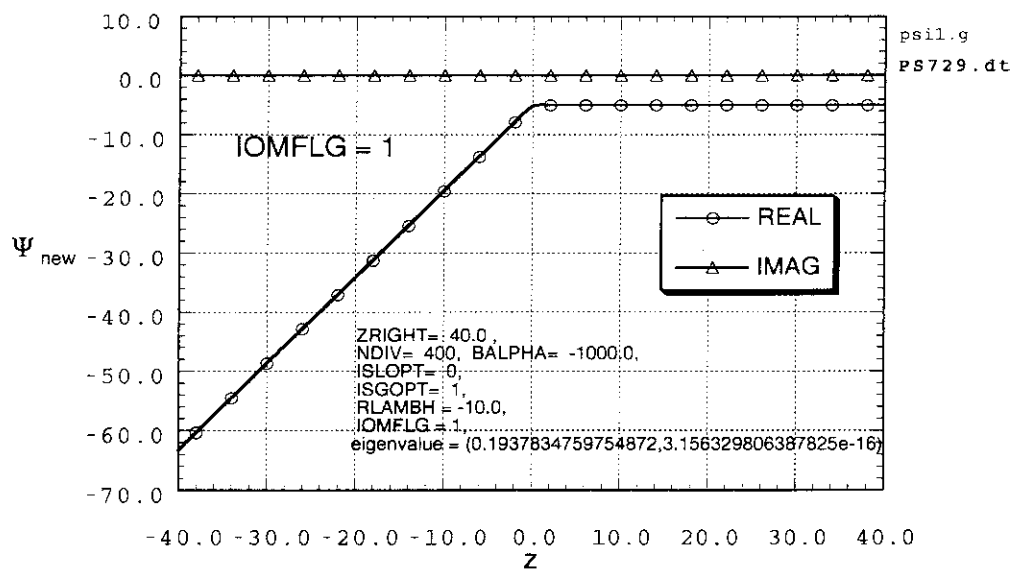


図 9.19(b): 台関数を使用した場合の不安定固有値 (分類 (0)) の  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

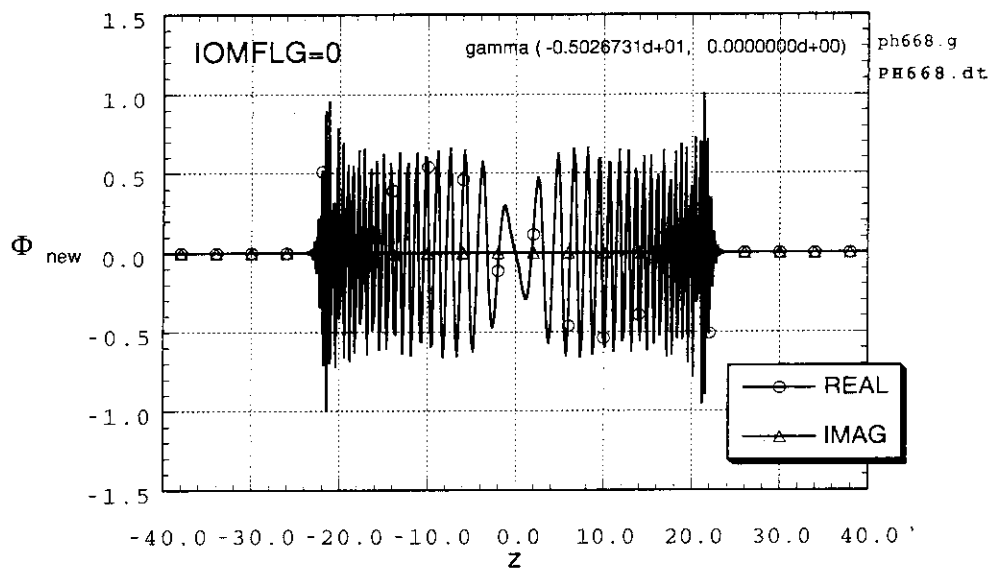


図 9.20(a): 台関数を使用しない場合の分類 (1) に属する負の固有値の $\Phi(z)$ (○印:実部, △印:虚部)。

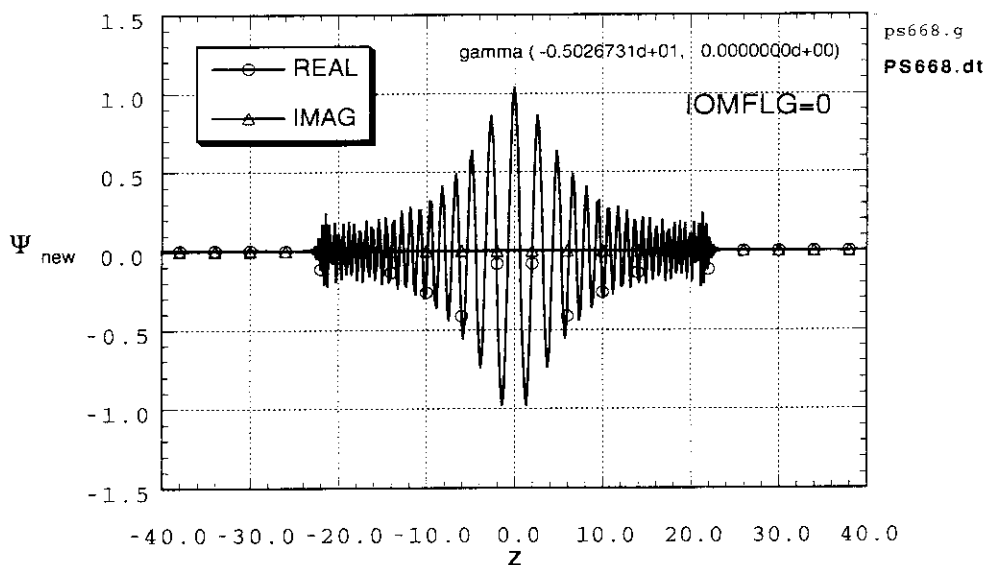


図 9.20(b): 台関数を使用しない場合の分類 (1) に属する負の固有値の $\Psi(z)$ (○印:実部, △印:虚部)。

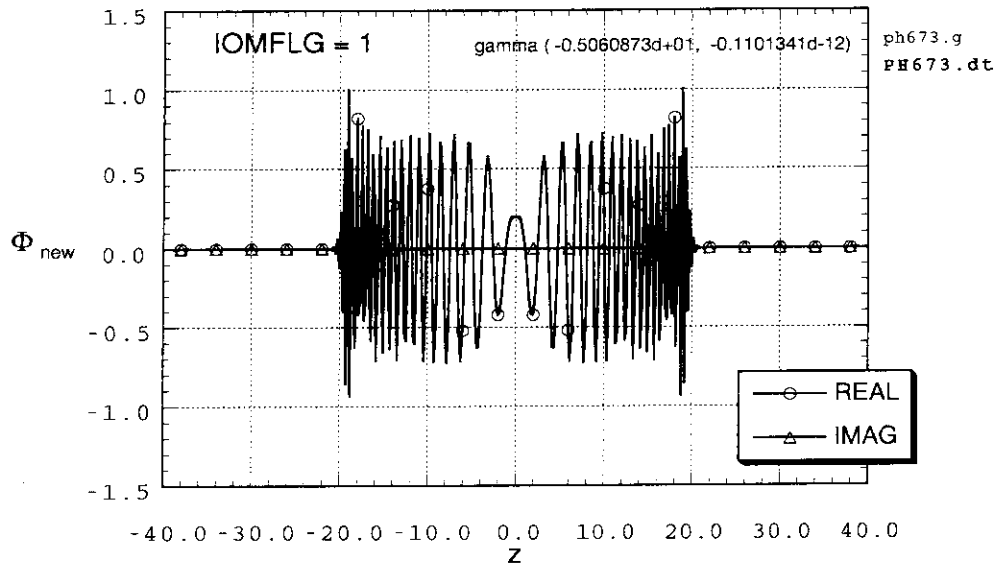


図 9.21(a): 台関数を使用した場合の分類 (1) に属する負の固有値の $\Phi(z)$ (○印:実部, △印:虚部)。

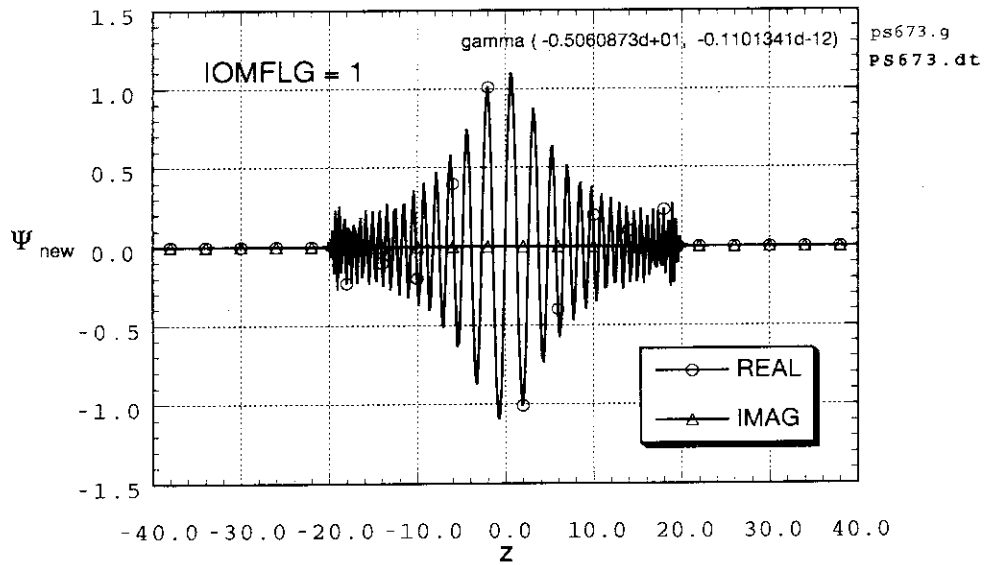


図 9.21(b): 台関数を使用した場合の分類 (1) に属する負の固有値の $\Psi(z)$ (○印:実部, △印:虚部)。

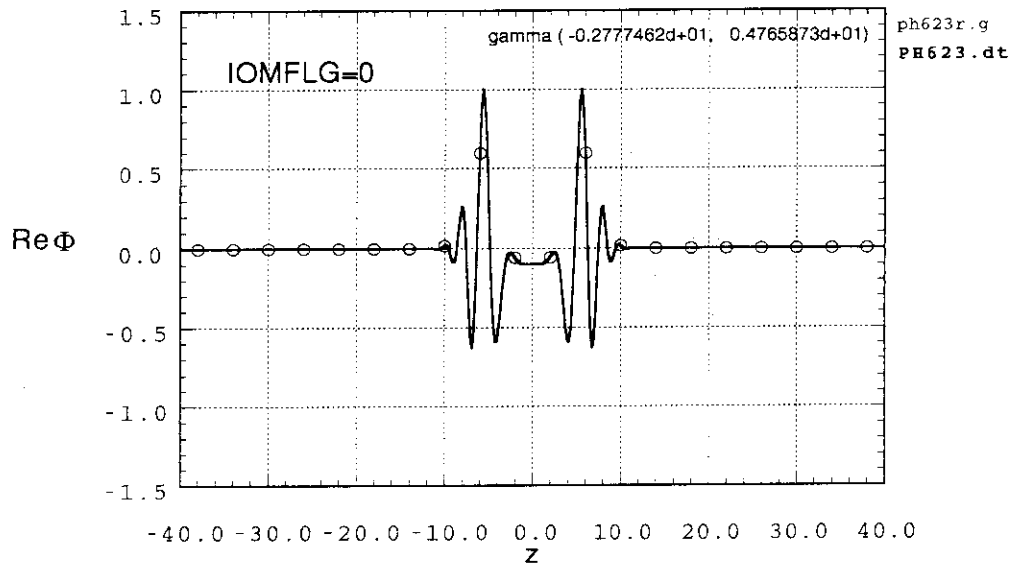


図 9.22(a): 台関数を使用しない場合の分類 (2) に属する固有値の $\Phi(z)$ の実部。境界条件の影響が無視できる。

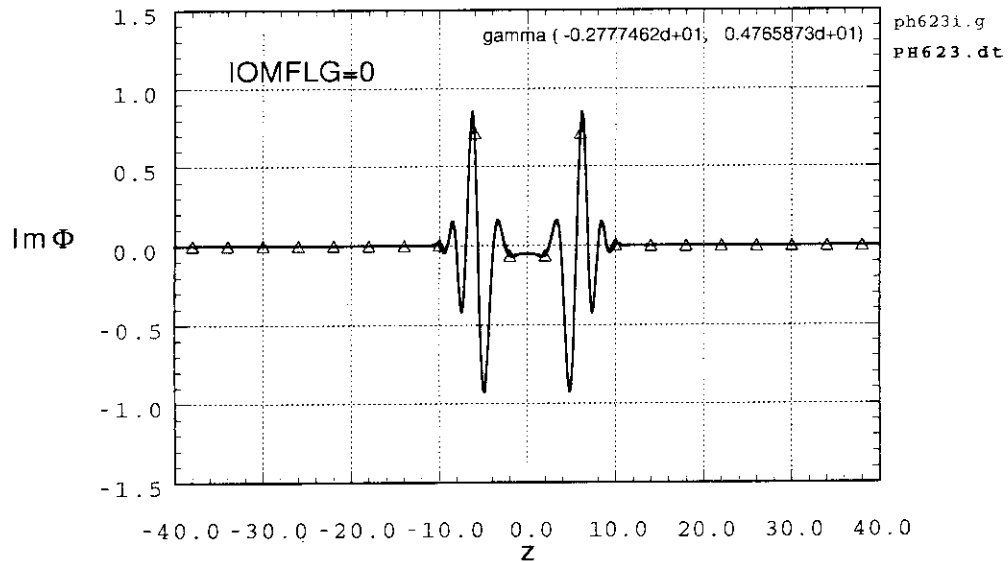


図 9.22(b): 台関数を使用しない場合の分類 (2) に属する固有値の $\Phi(z)$ の虚部。

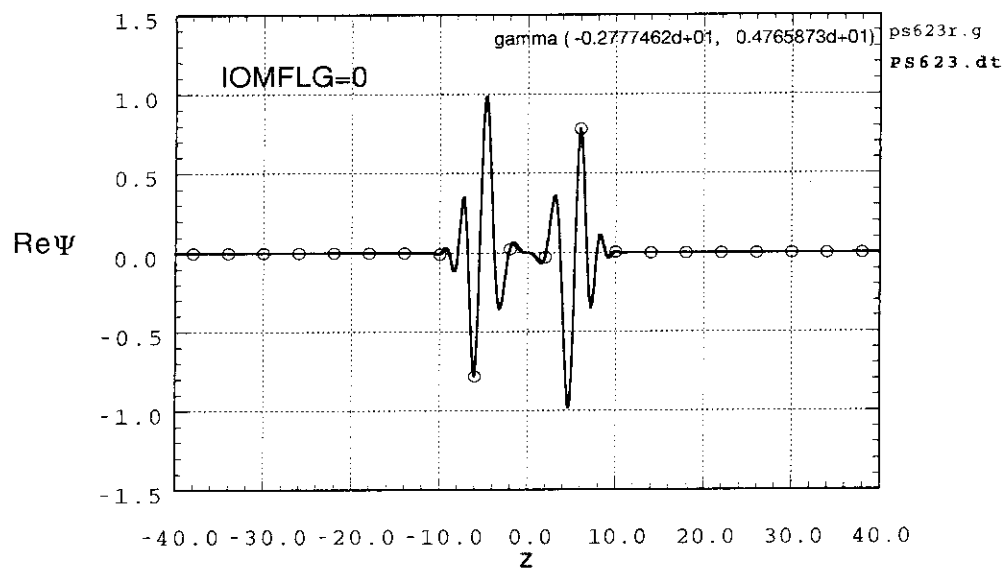


図 9.22(c): 台関数を使用しない場合の分類 (2) に属する固有値の $\Psi(z)$ の実部。

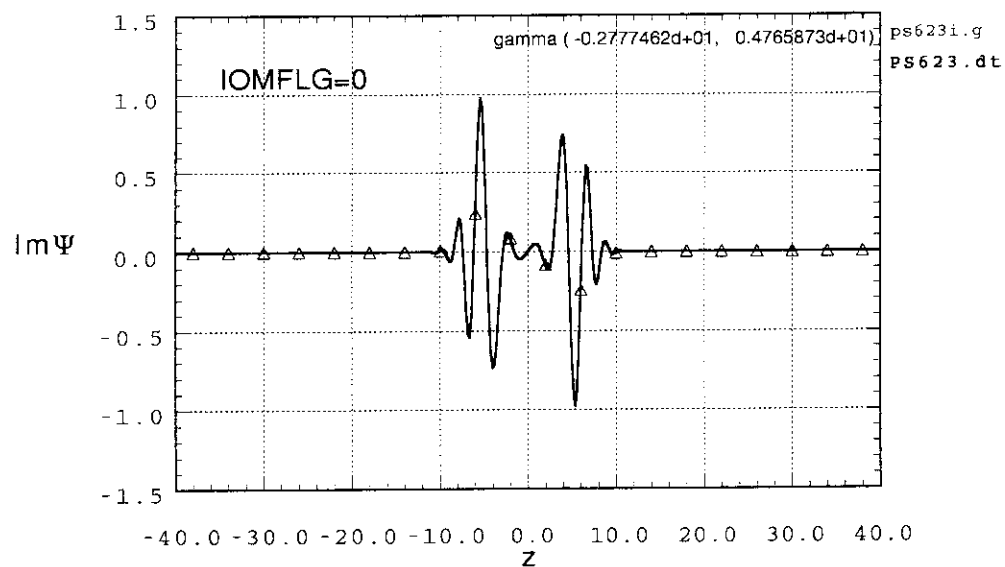


図 9.22(d): 台関数を使用しない場合の分類 (2) に属する固有値の $\Psi(z)$ の虚部。

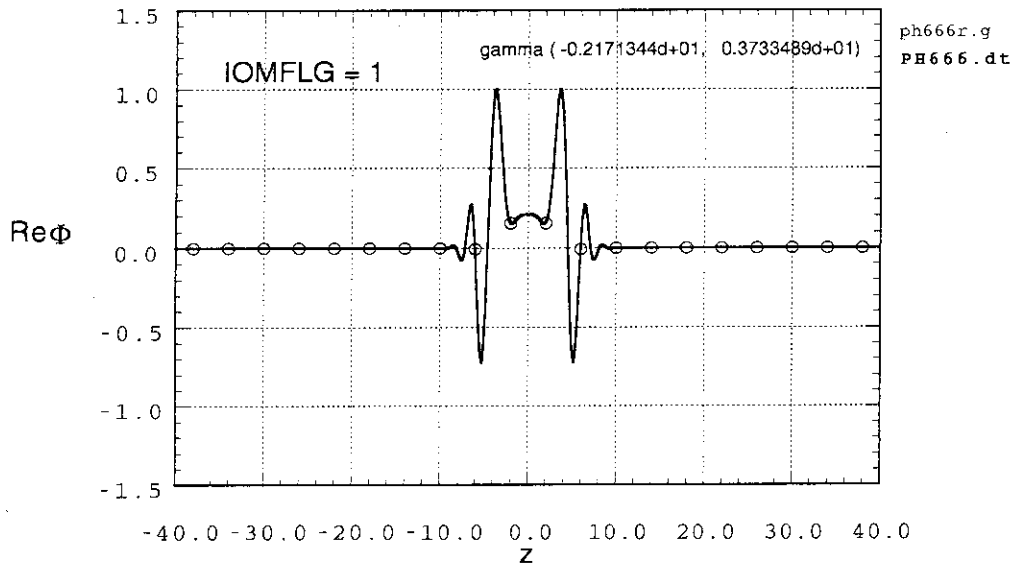


図 9.23(a): 台関数を使用した場合の分類 (2) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

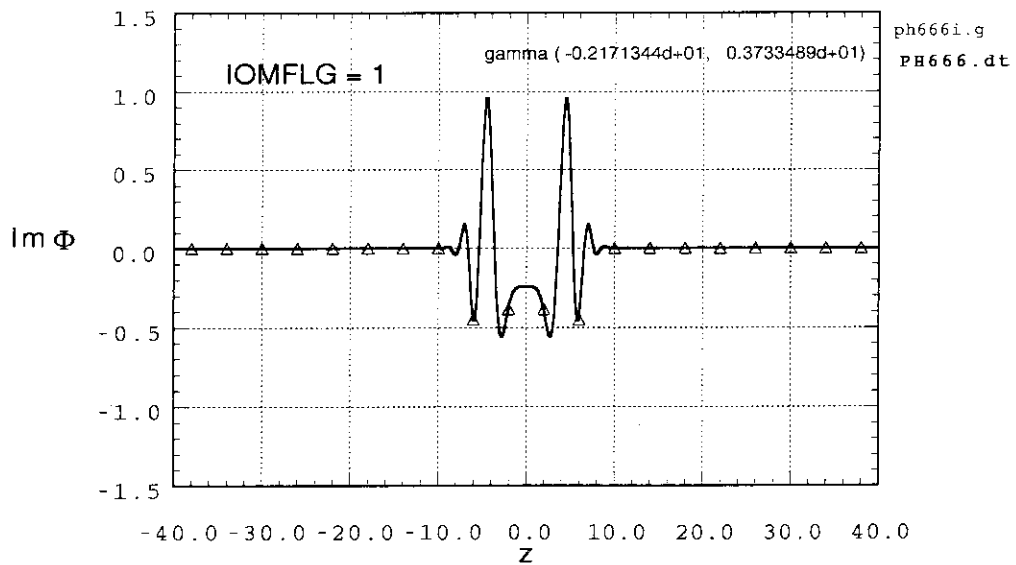


図 9.23(b): 台関数を使用した場合の分類 (2) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

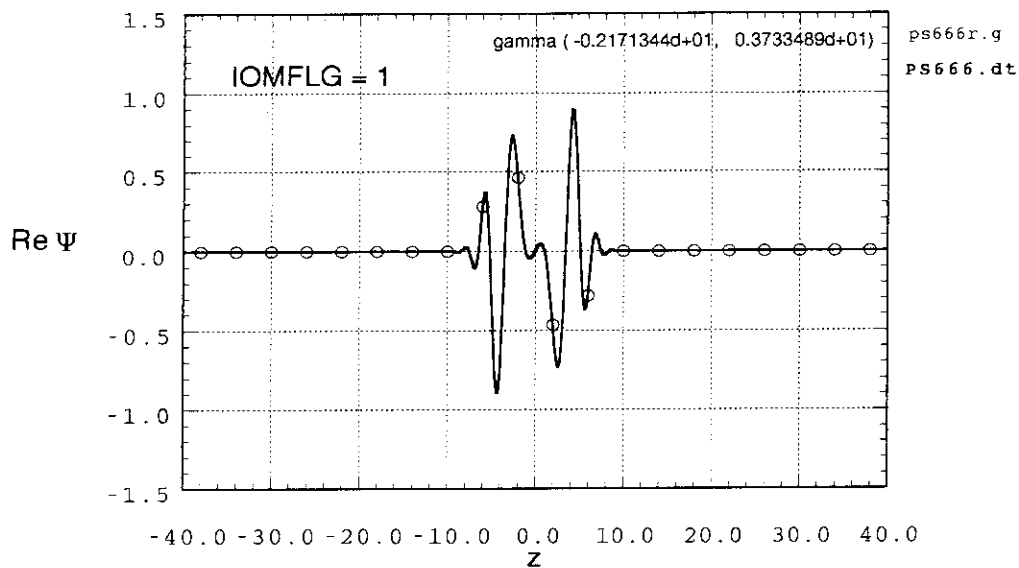


図 9.23(c): 台関数を使用した場合の分類 (2) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の実部。

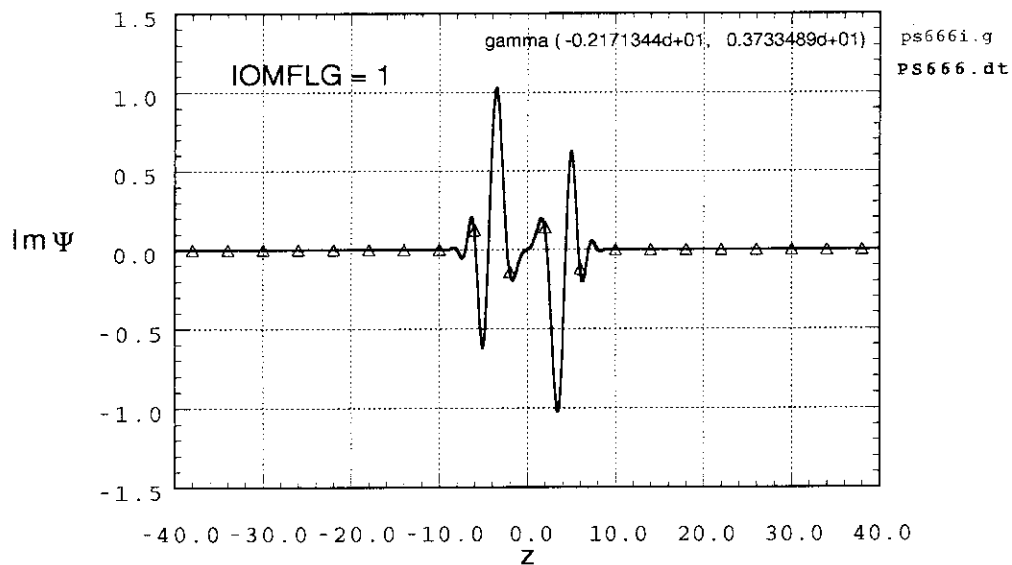


図 9.23(d): 台関数を使用した場合の分類 (2) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の虚部。

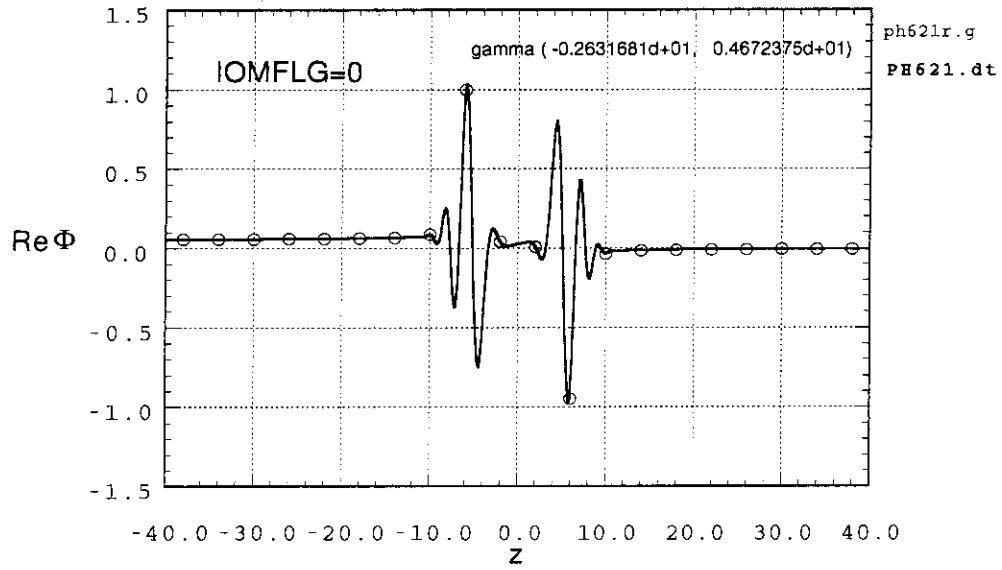


図 9.24(a): 台関数を使用しない場合の分類 (2) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。境界条件の影響を強く受けている。

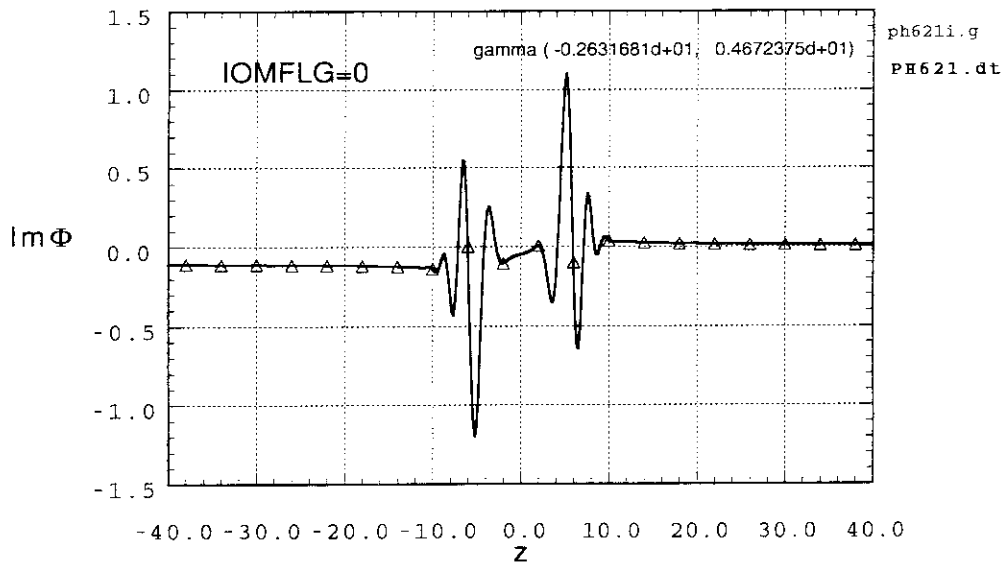


図 9.24(b): 台関数を使用しない場合の分類 (2) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。



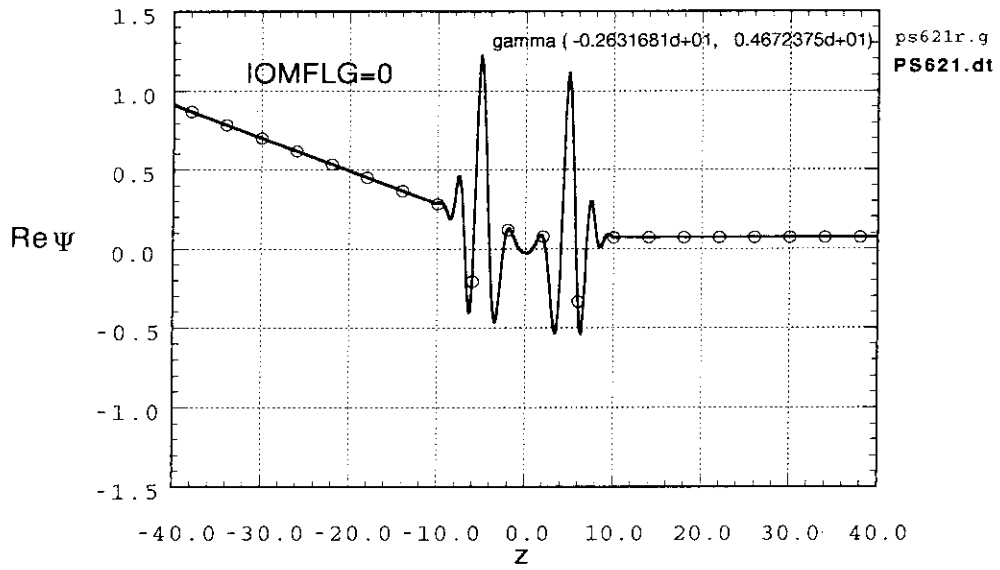


図 9.24(c): 台関数を使用しない場合の分類 (2) に属する固有値の $\Psi(z)$ の実部。

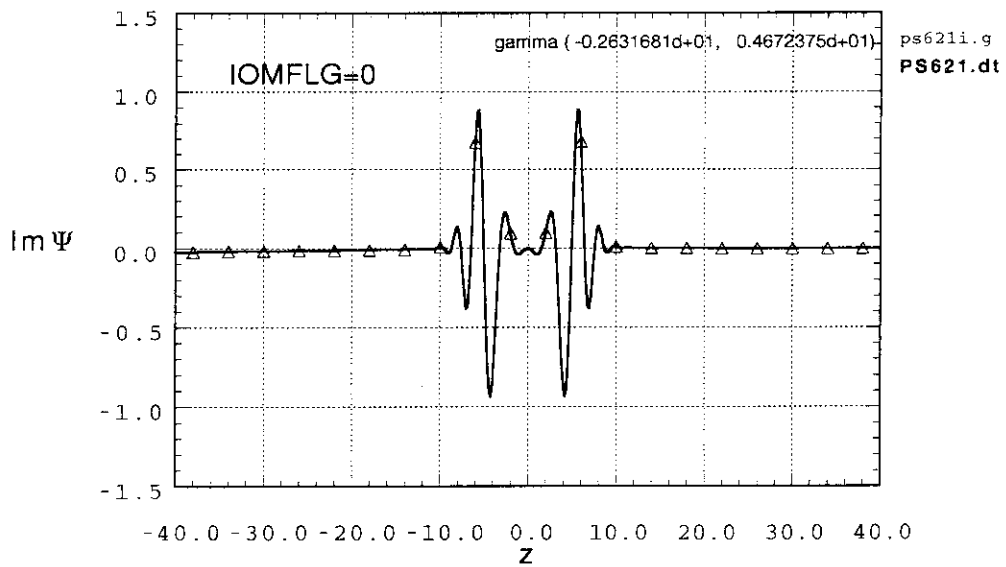


図 9.24(d): 台関数を使用しない場合の分類 (2) に属する固有値の $\Psi(z)$ の虚部。

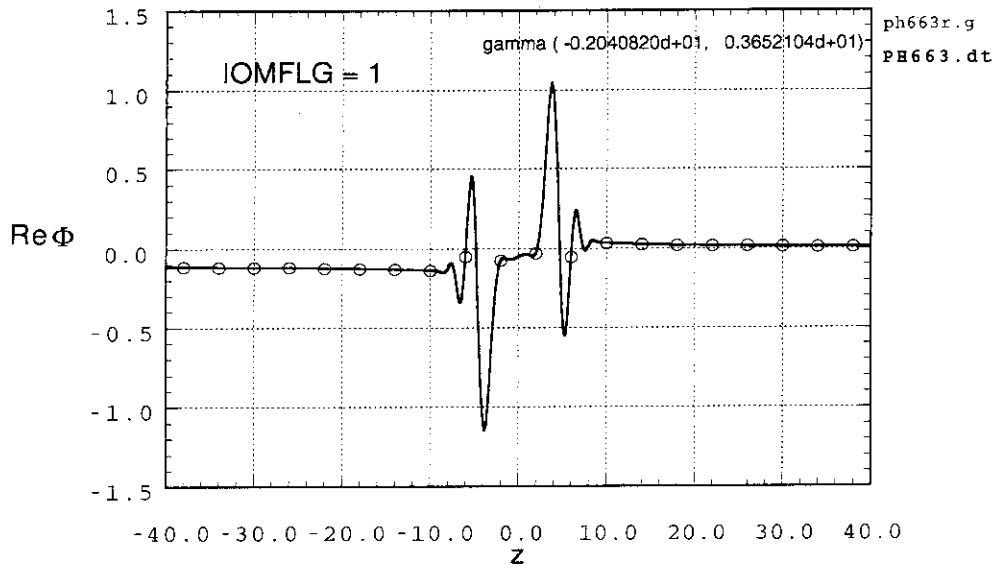


図 9.25(a): 台関数を使用した場合の分類 (2) に属する固有値の $\Phi(z)$ の実部。

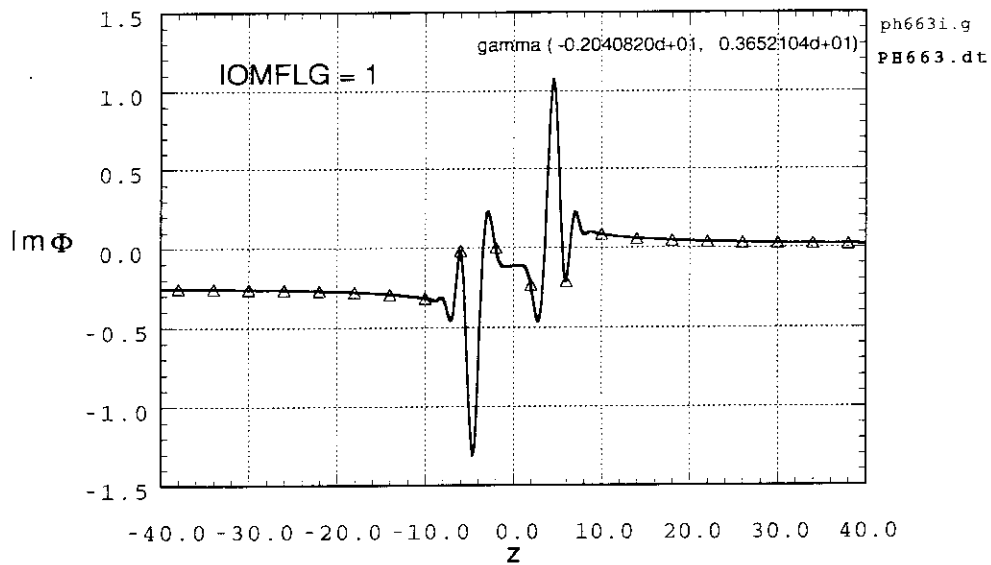


図 9.25(b): 台関数を使用した場合の分類 (2) に属する固有値の $\Phi(z)$ の虚部。

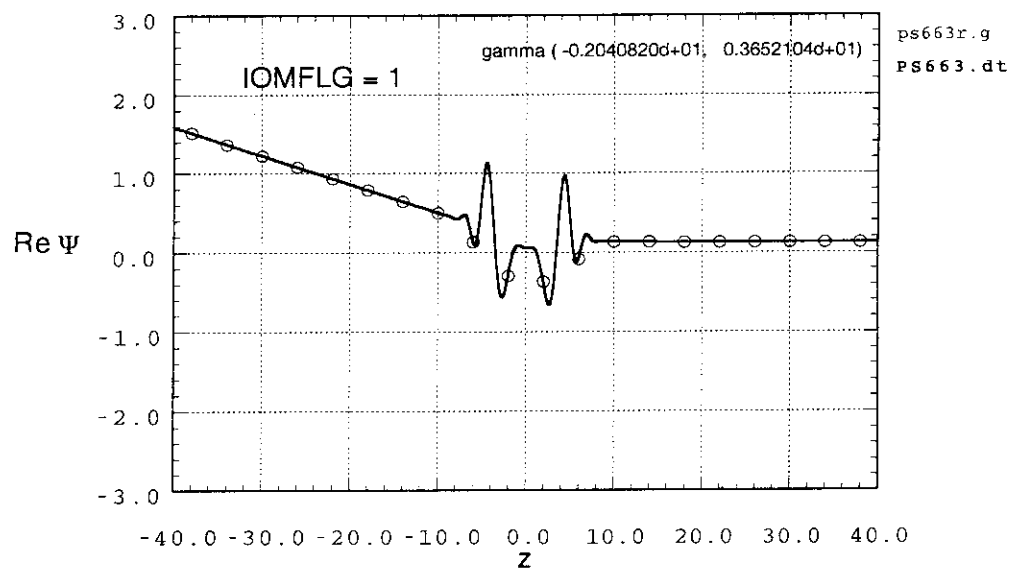


図 9.25(c): 台関数を使用した場合の分類 (2) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の実部。

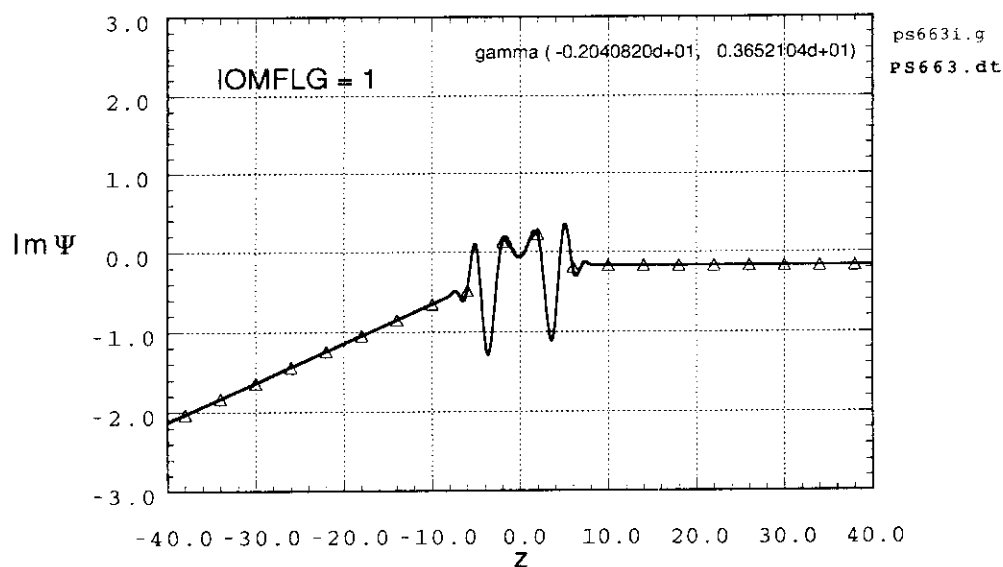


図 9.25(d): 台関数を使用した場合の分類 (2) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の虚部。

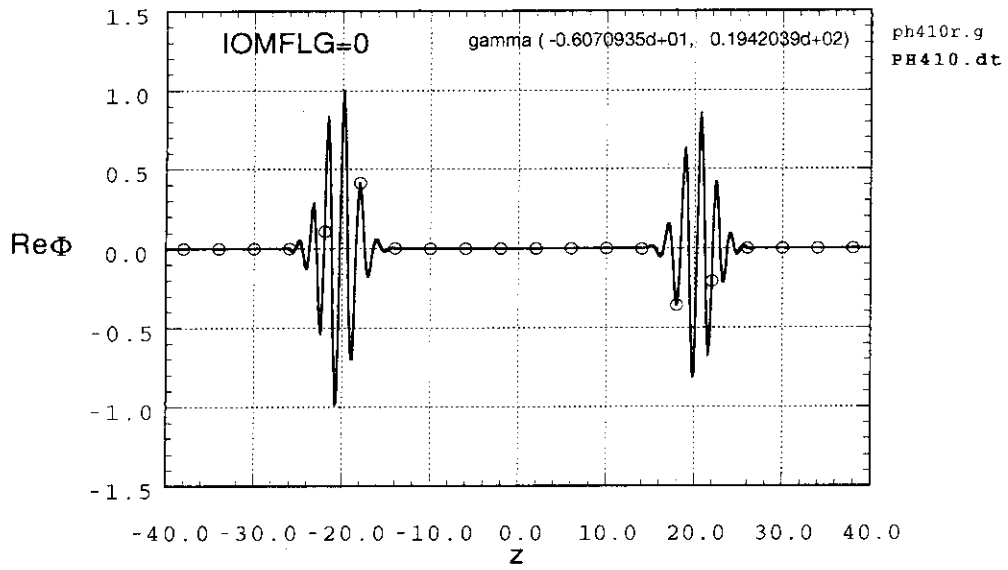


図 9.26(a): 台関数を使用しない場合の分類 (3) に属する固有値の $\Phi(z)$ の実部。

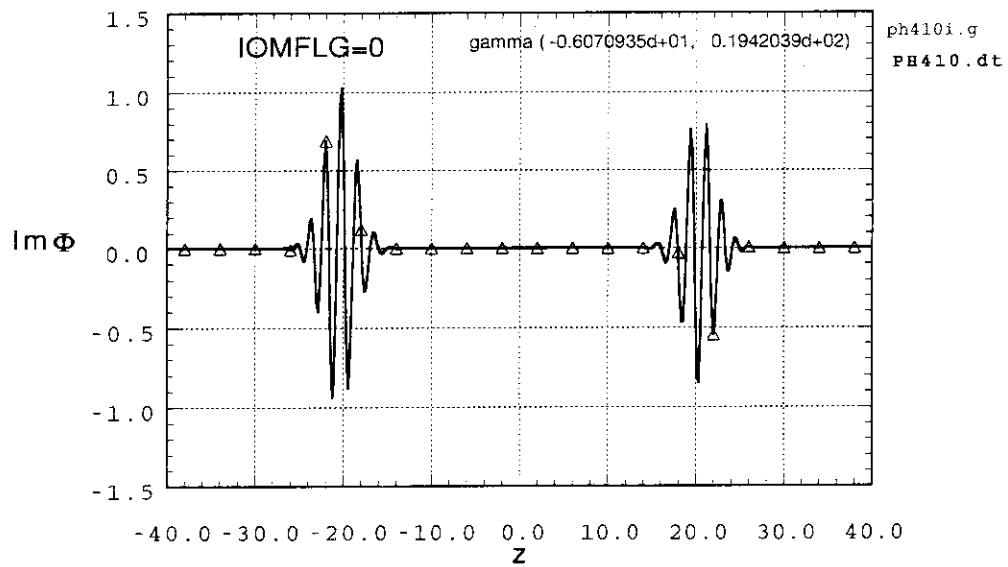


図 9.26(b): 台関数を使用しない場合の分類 (3) に属する固有値の $\Phi(z)$ の虚部。

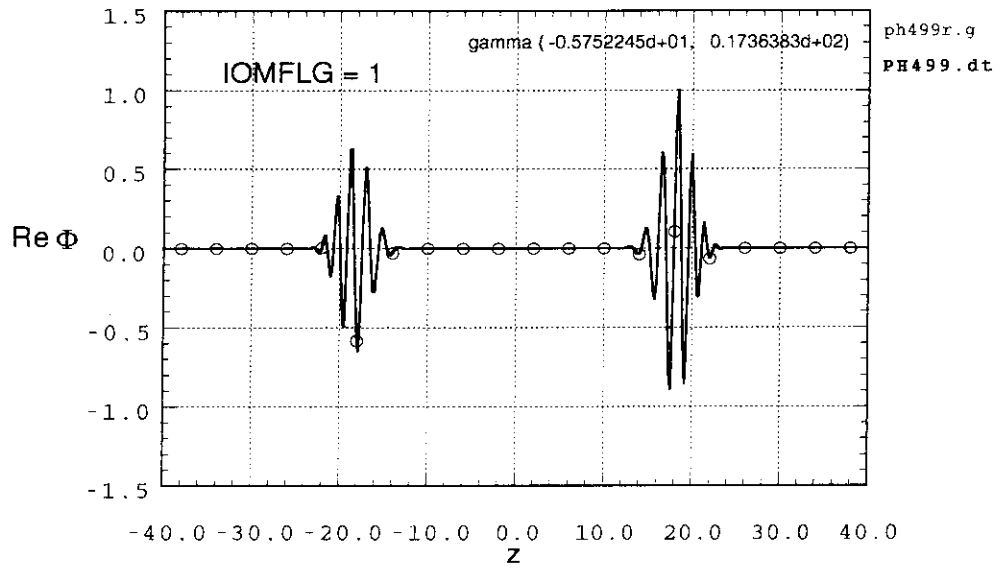


図 9.27(a): 台関数を使用した場合の分類 (3) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

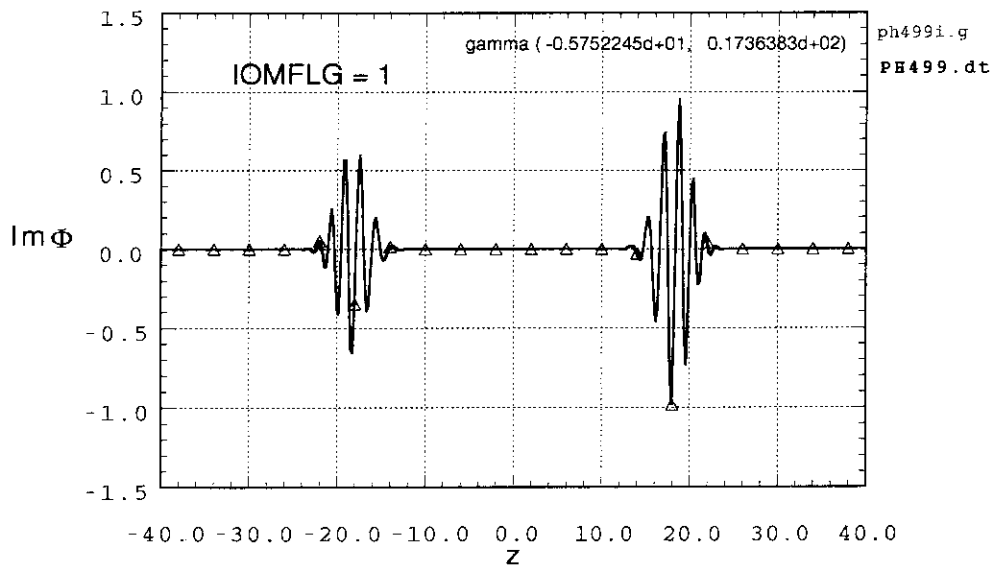


図 9.27(b): 台関数を使用した場合の分類 (3) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

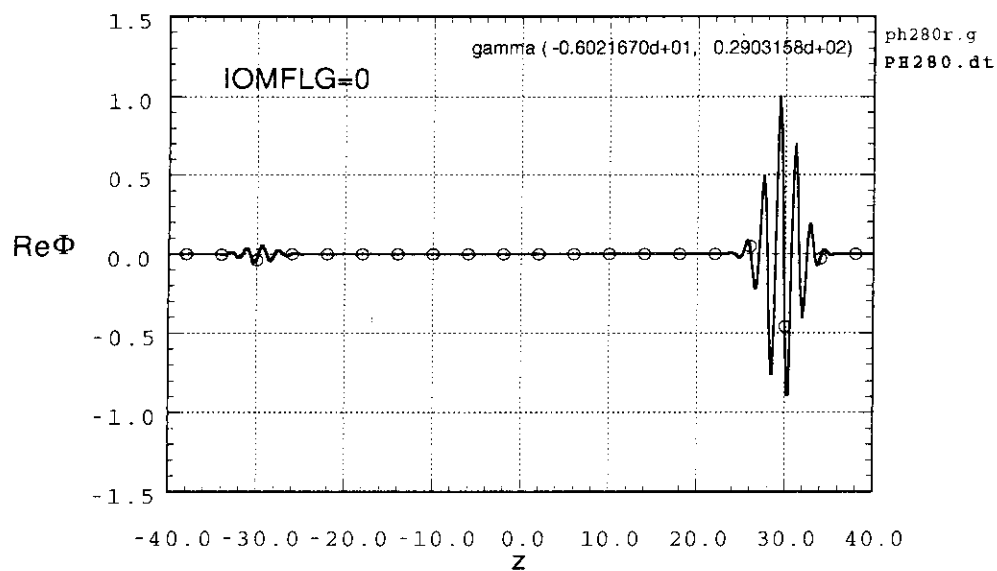


図 9.28(a): 台関数を使用しない場合の分類 (3) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

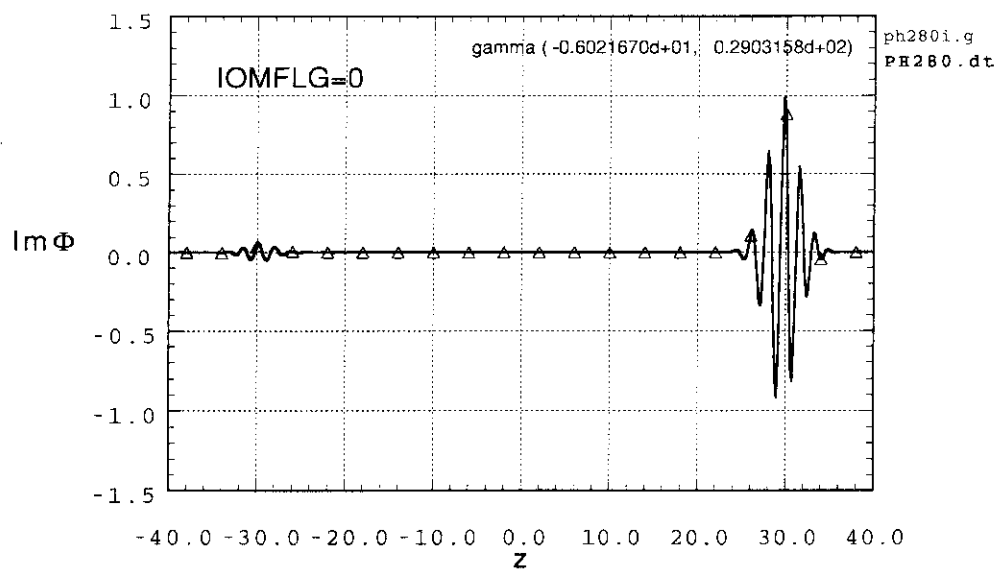


図 9.28(b): 台関数を使用しない場合の分類 (3) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

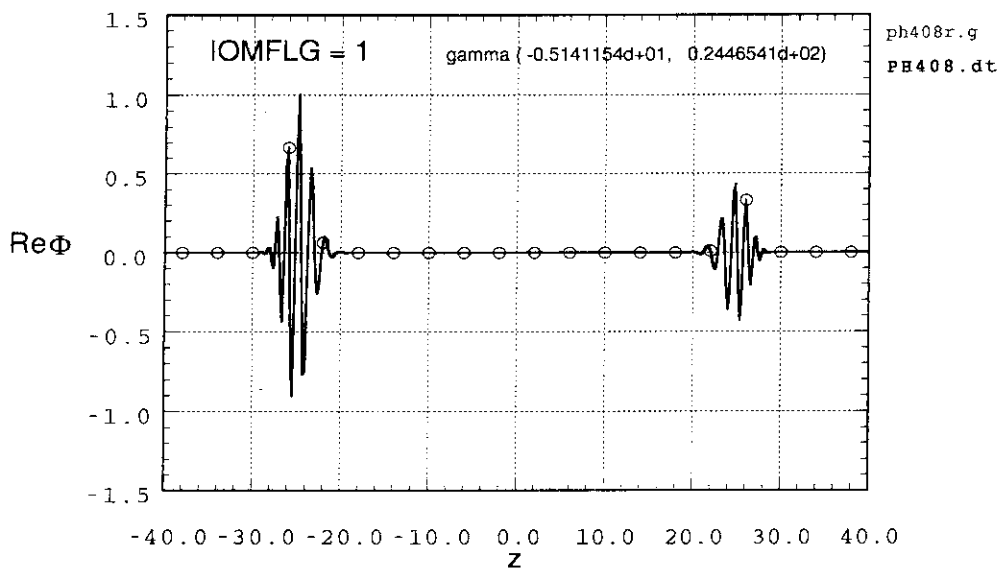


図 9.29(a): 台関数を使用した場合の分類 (3) に属する固有値の $\Phi(z)$ の実部。

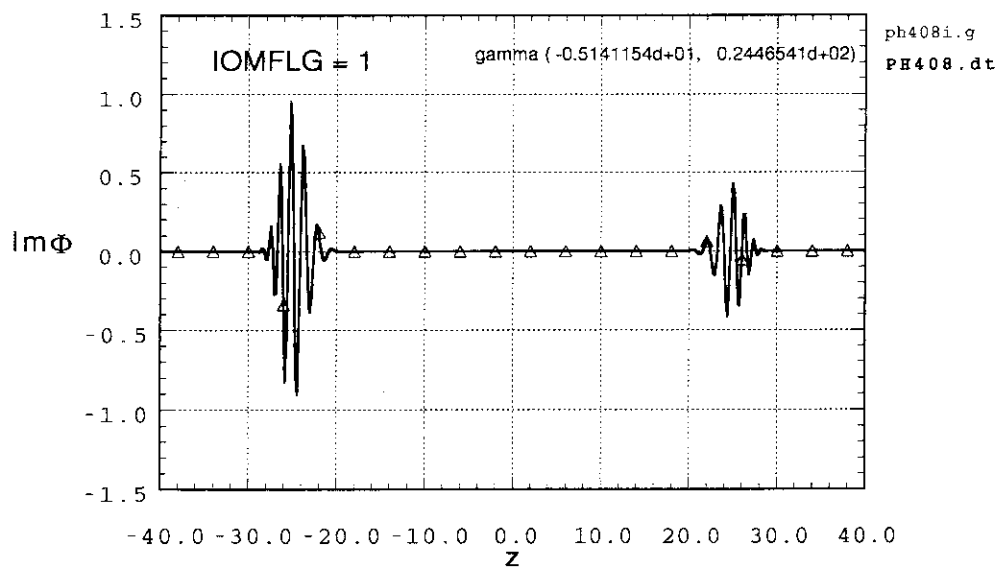


図 9.29(b): 台関数を使用した場合の分類 (3) に属する固有値の $\Phi(z)$ の虚部。

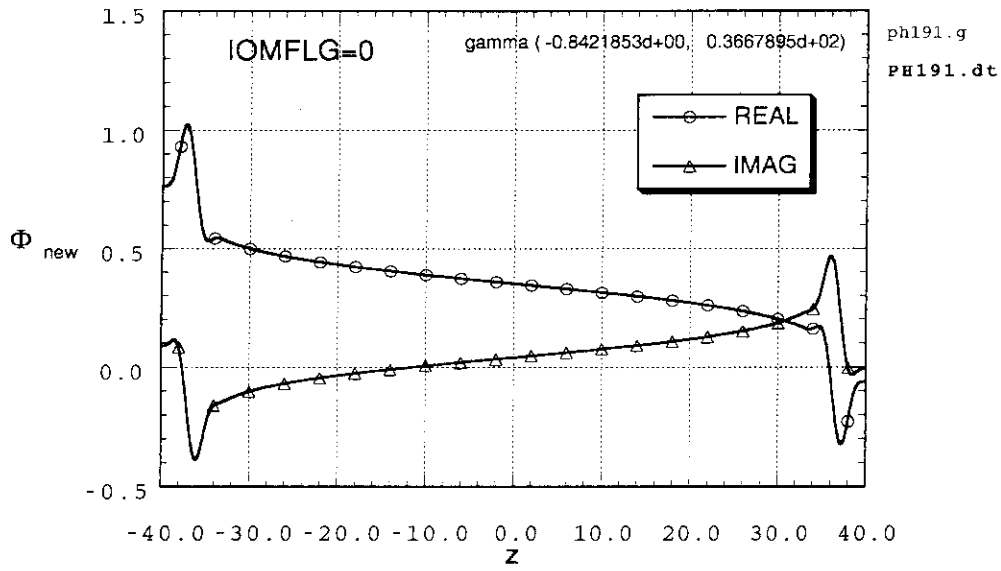


図 9.30(a): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

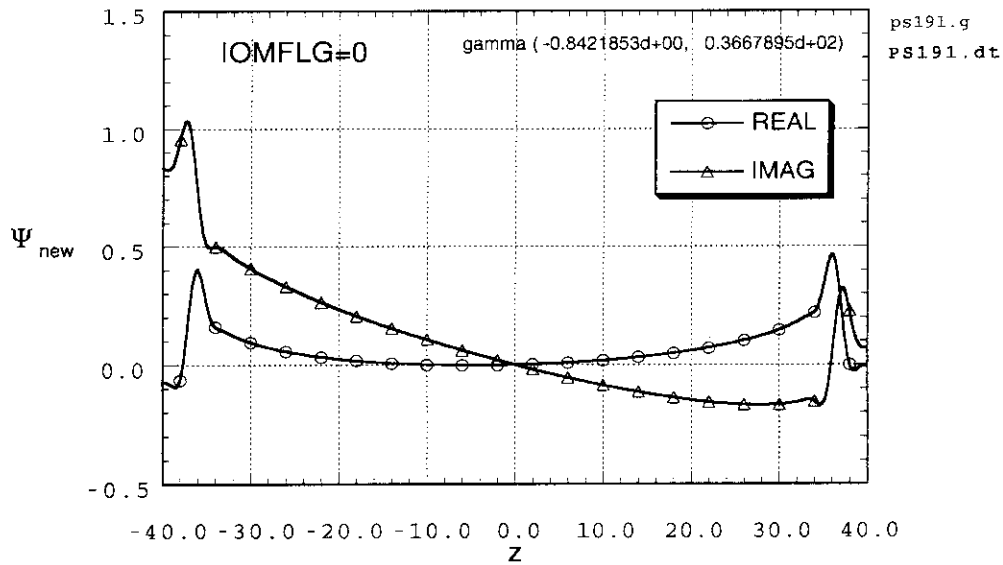


図 9.30(b): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。



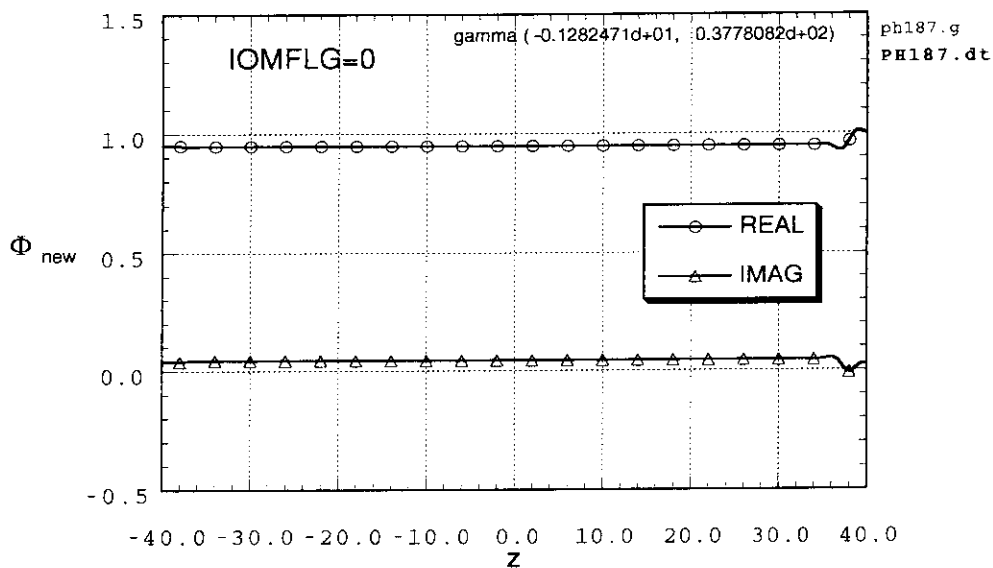


図 9.31(a): 台関数を使用しない場合の分類(4)に属する固有値の $\Phi(z)$ (○印:実部, △印:虚部)。

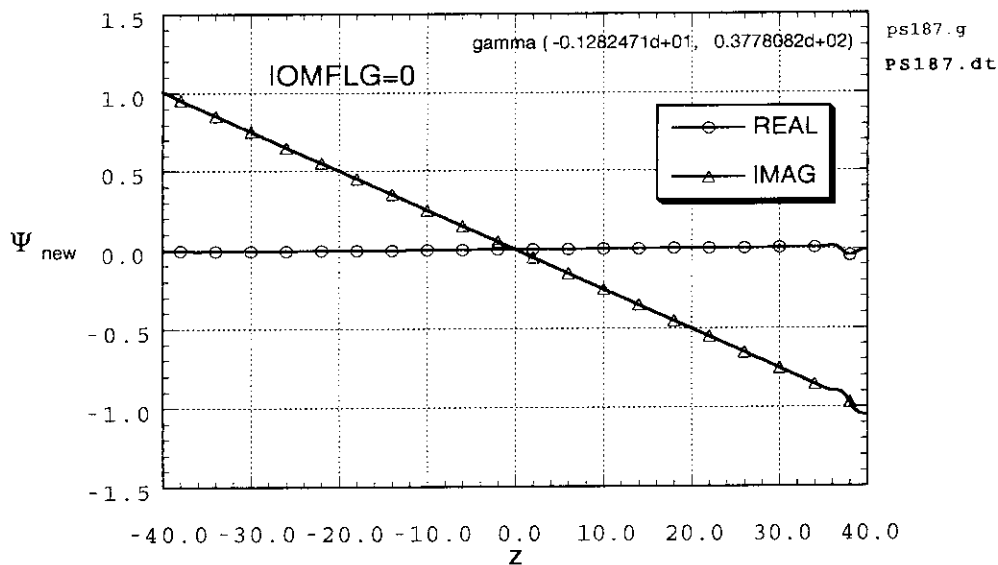


図 9.31(b): 台関数を使用しない場合の分類(4)に属する固有値の $\Psi(z)$ (○印:実部, △印:虚部)。

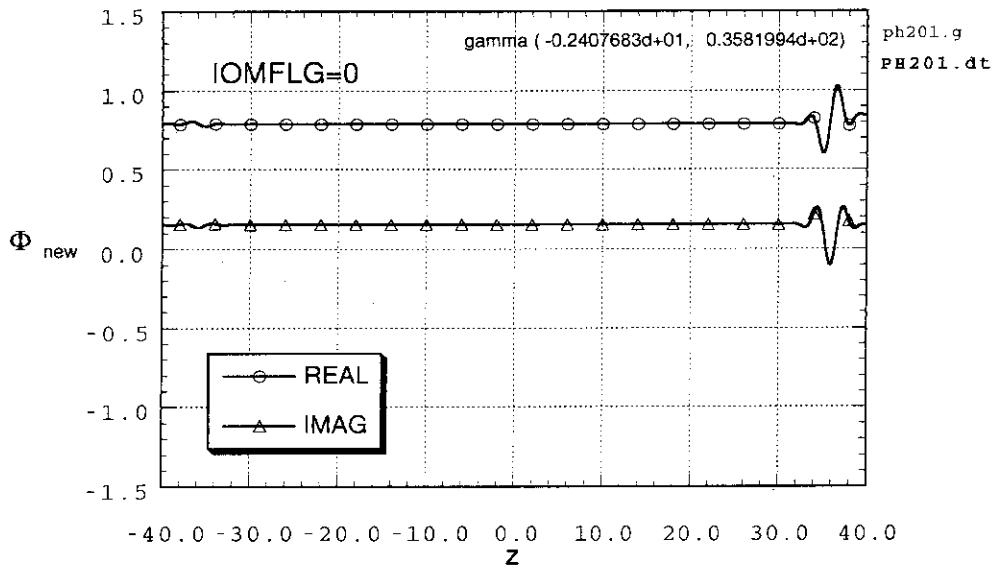


図 9.32(a): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

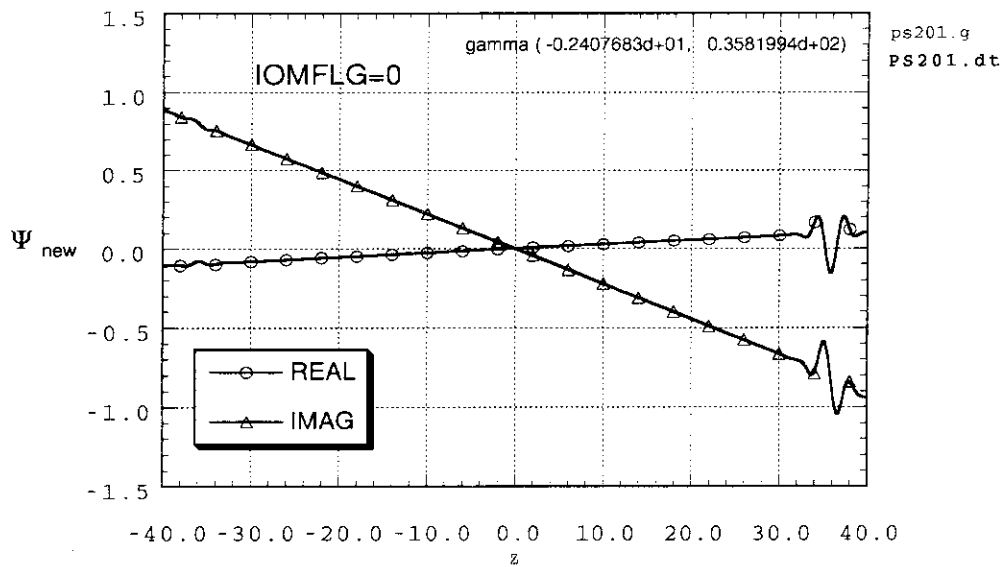


図 9.32(b): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

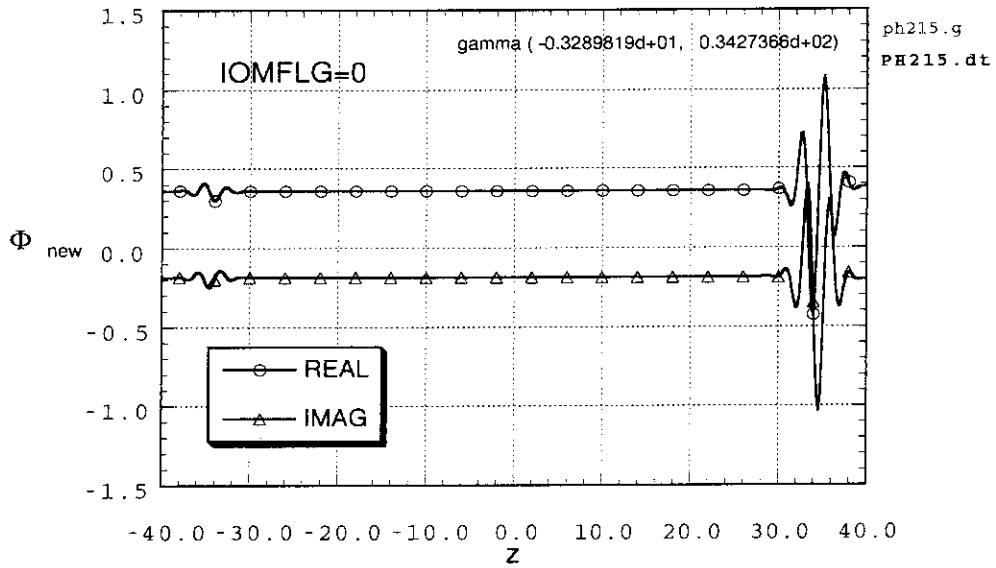


図 9.33(a): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  (○印:実部,  $\Delta$ 印:虚部)。

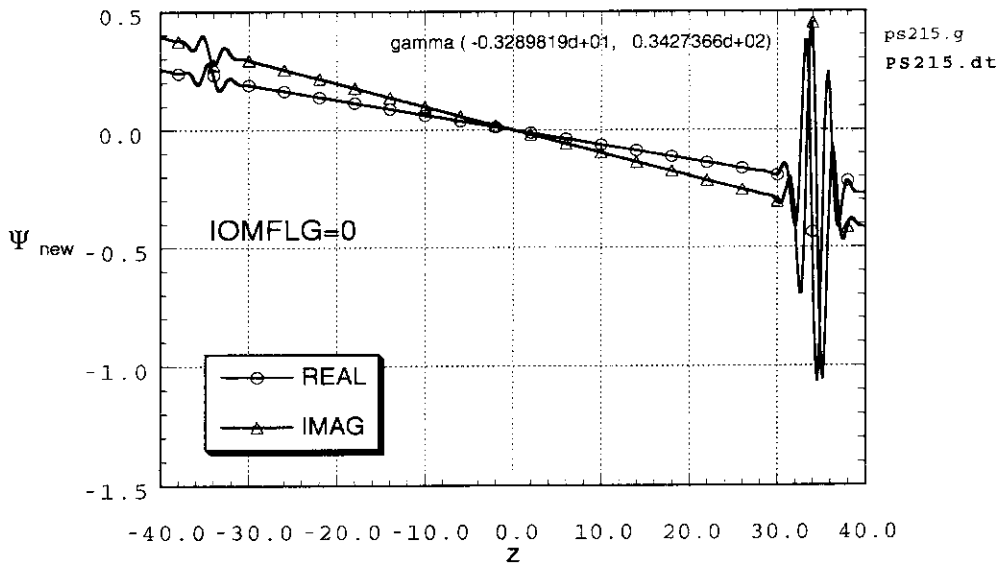


図 9.33(b): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Psi(z)$  (○印:実部,  $\Delta$ 印:虚部)。

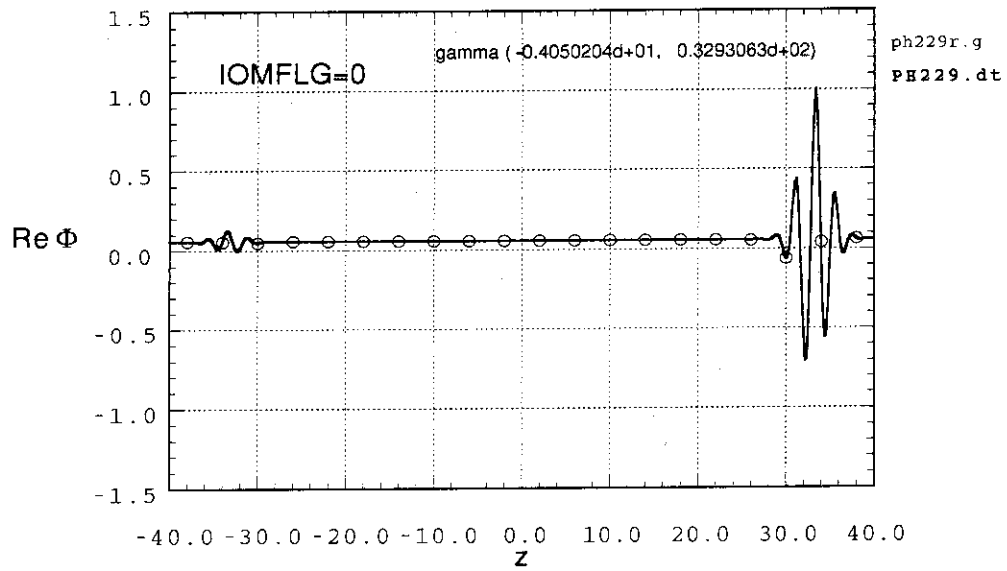


図 9.34(a): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

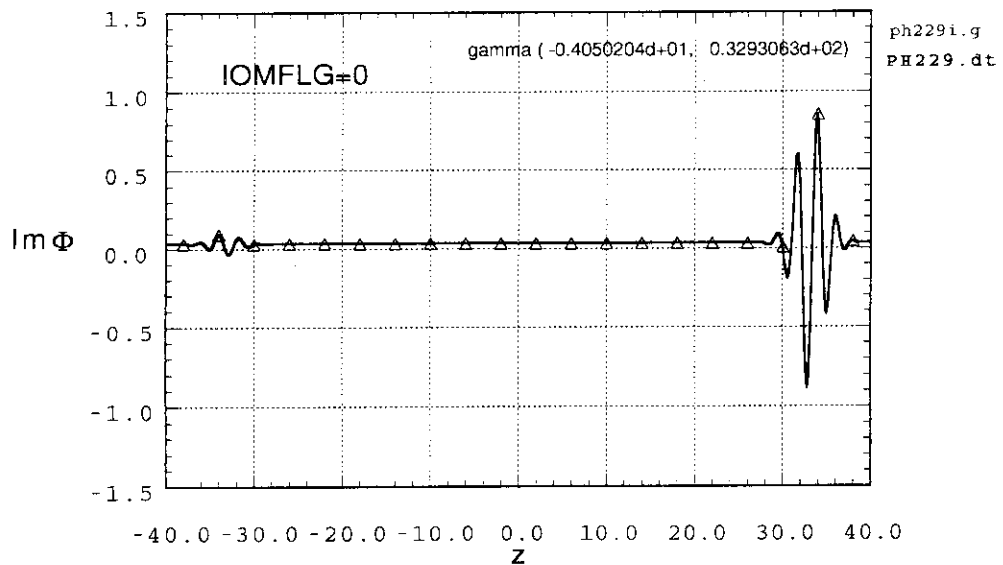


図 9.34(b): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

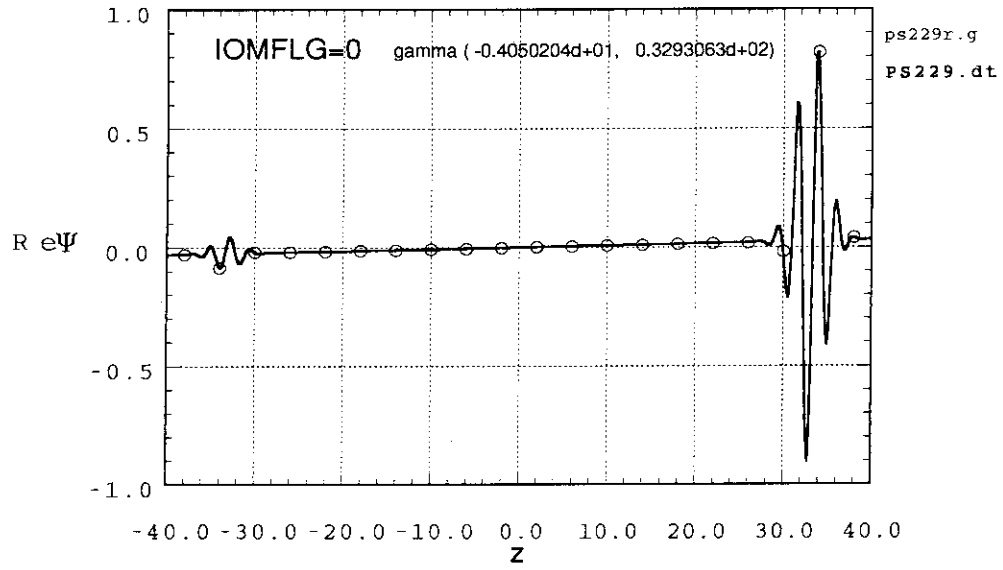


図 9.34(c): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の $\Psi(z)$ の実部。

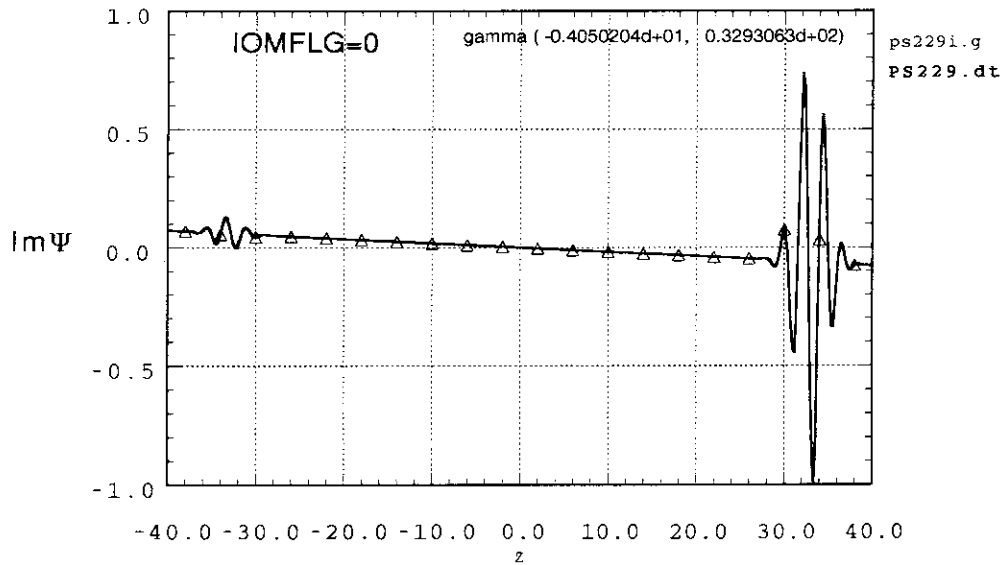


図 9.34(d): 台関数を使用しない場合の分類 (4) に属する固有値の $\Psi(z)$ の虚部。

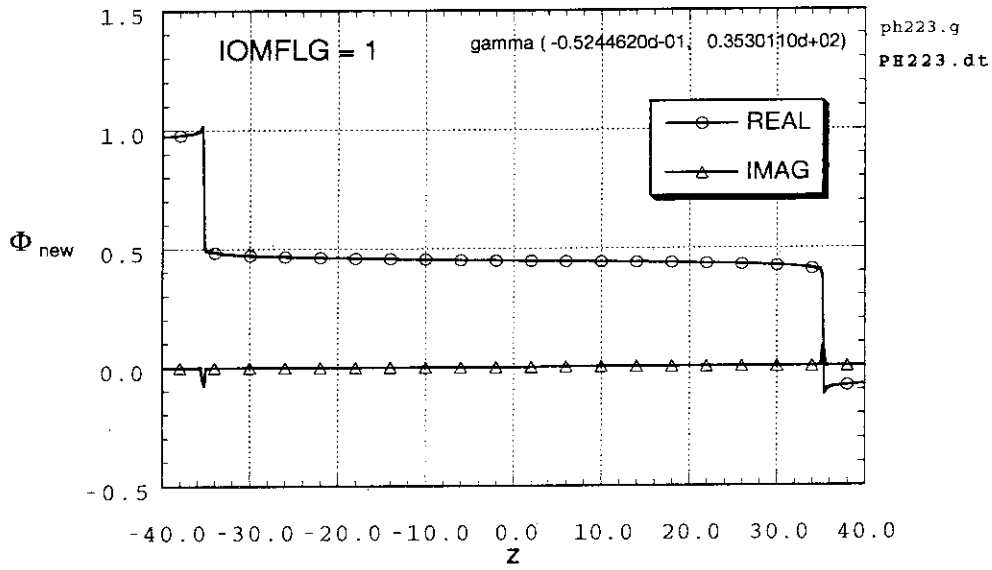


図 9.35(a): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

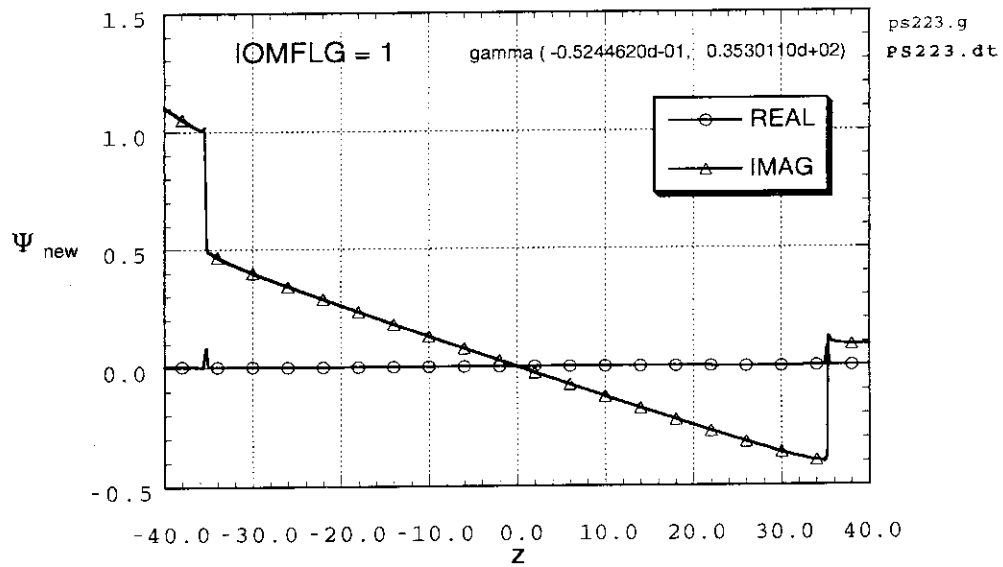


図 9.35(b): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

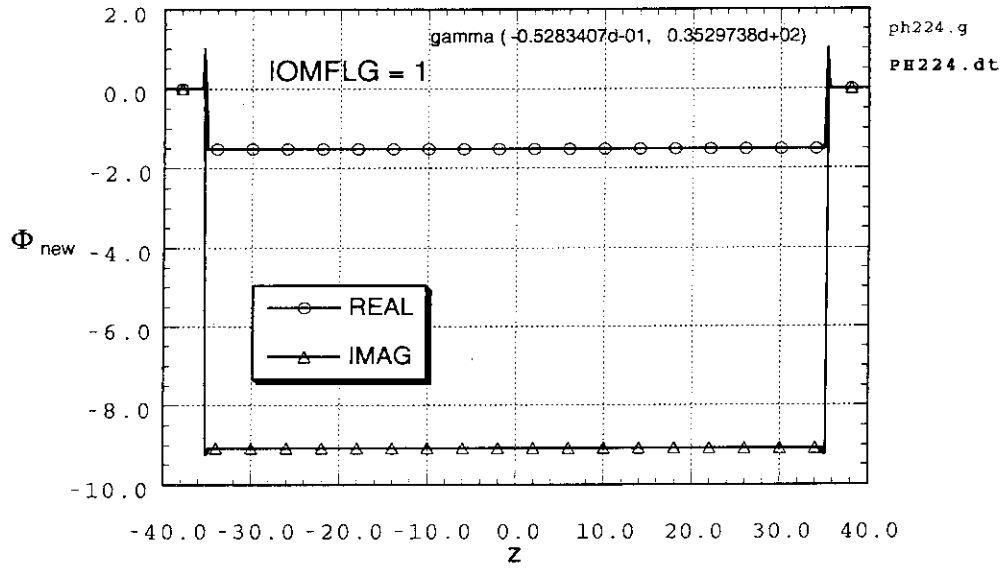


図 9.36(a): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

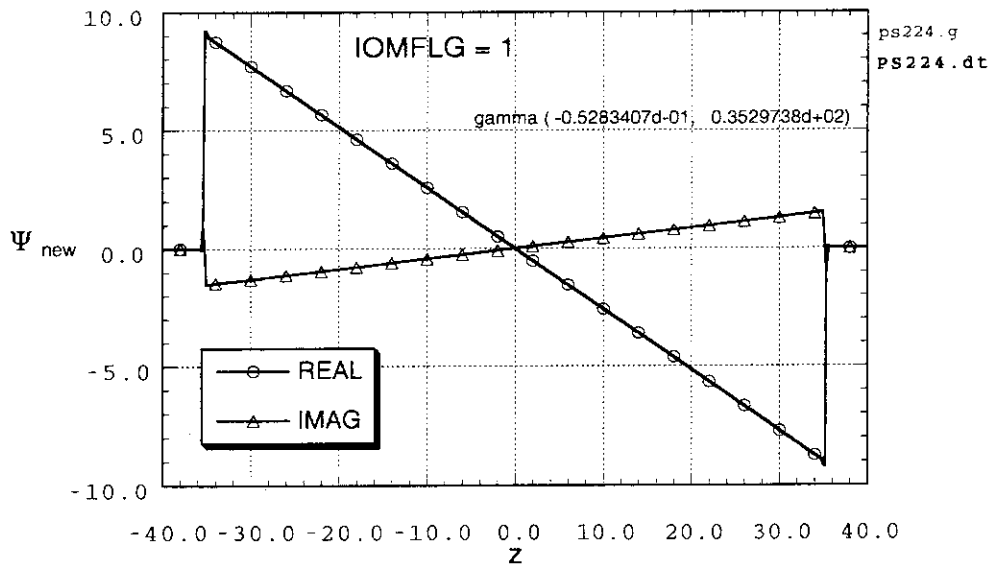


図 9.36(b): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

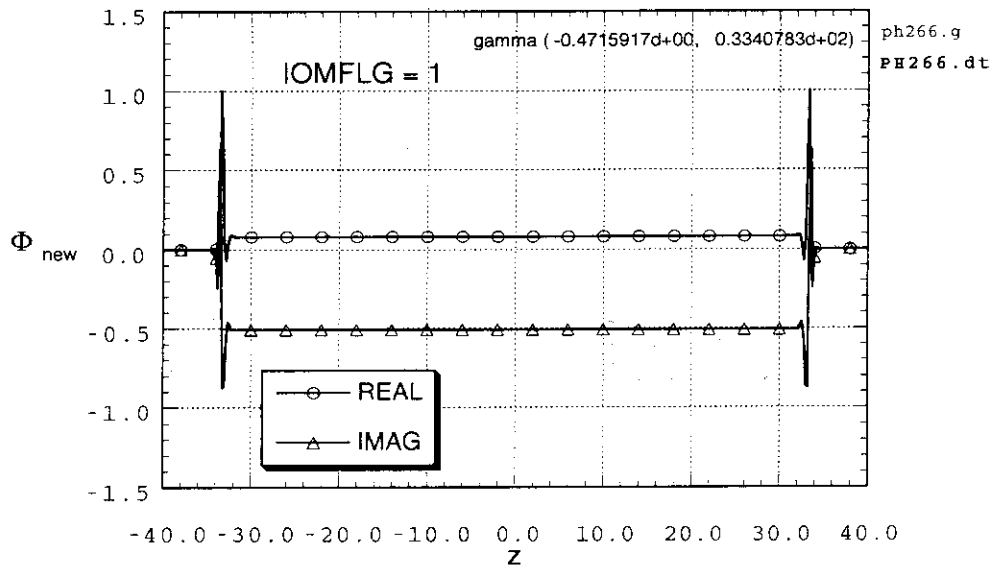


図 9.37(a): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。

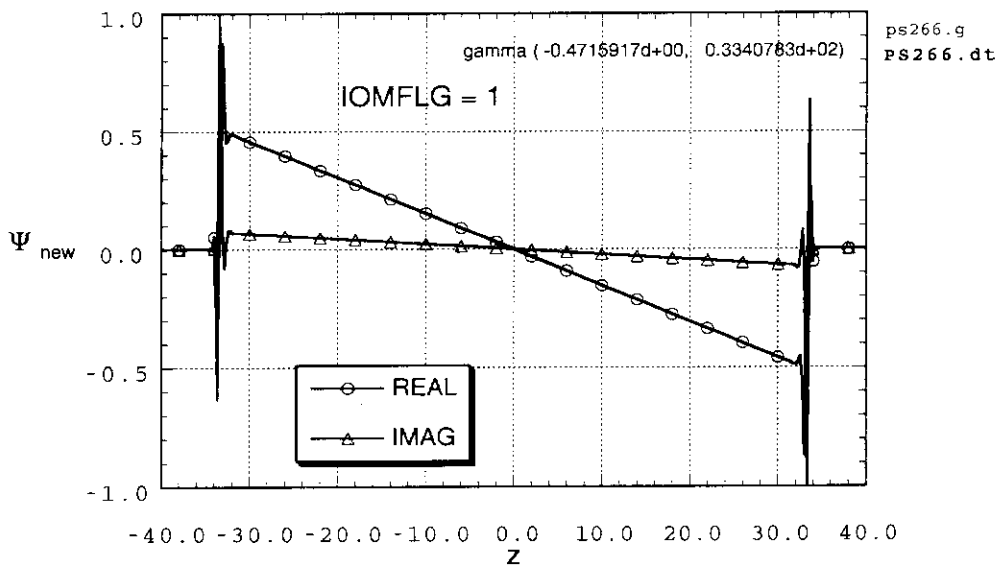


図 9.37(b): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Psi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。



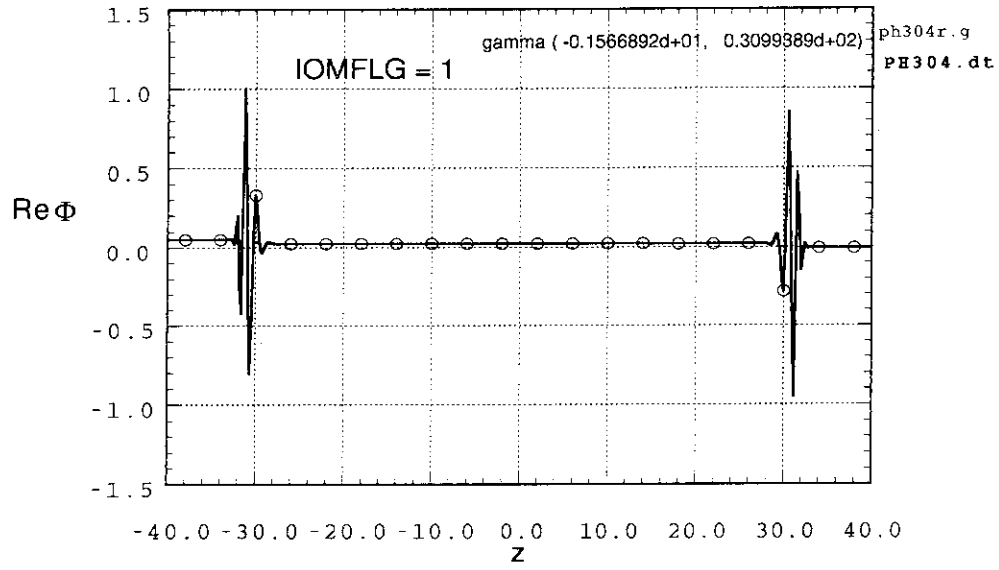


図 9.38(a): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

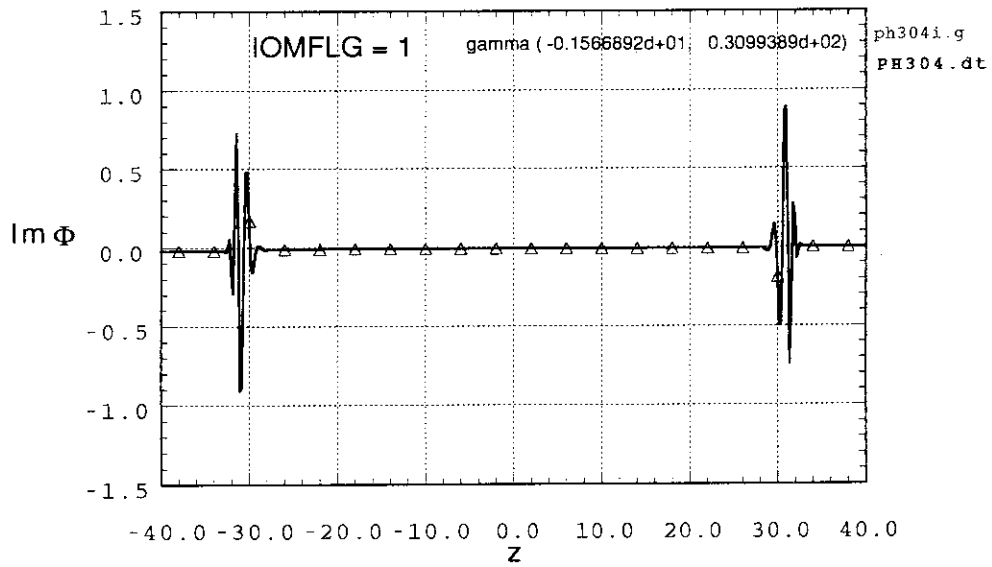


図 9.38(b): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

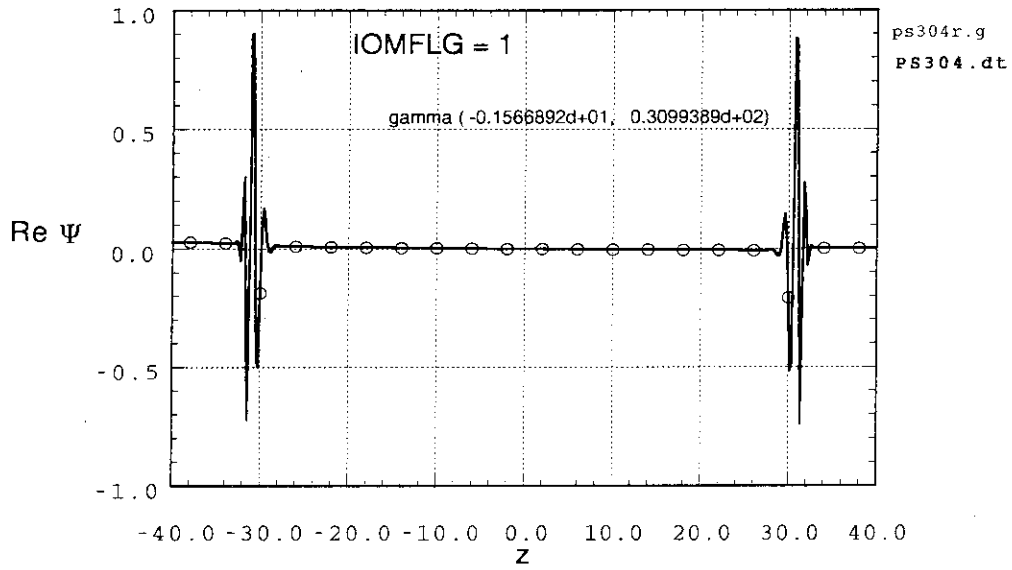


図 9.38(c): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の実部。

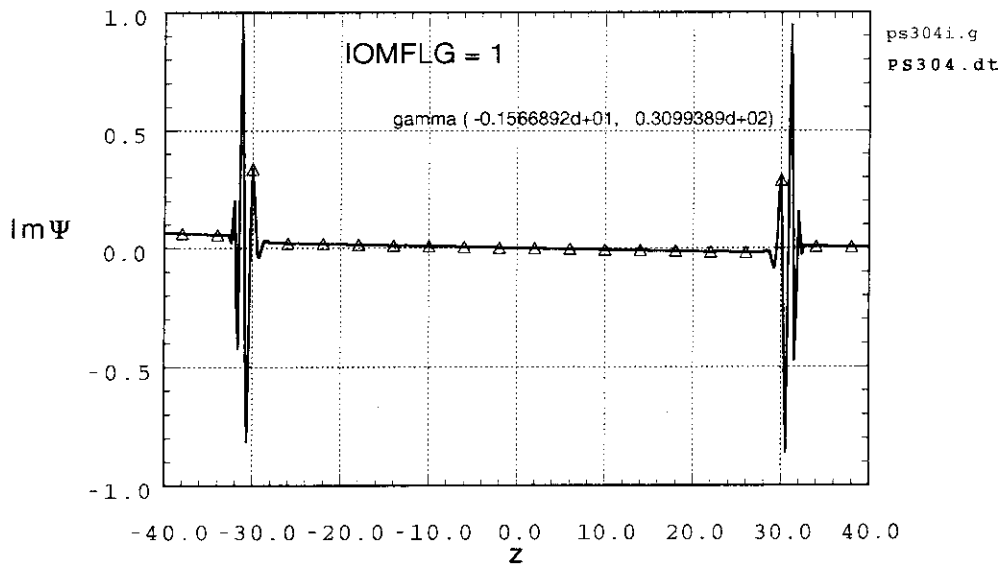


図 9.38(d): 台関数を使用した場合の分類 (4) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の虚部。

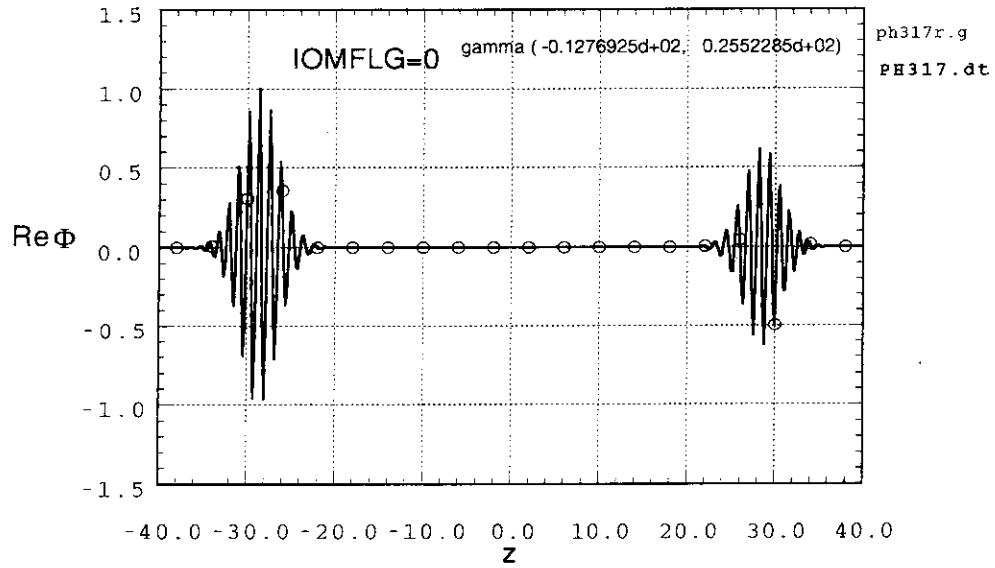


図 9.39(a): 台関数を使用しない場合の分類 (5) に属する固有値の $\Phi(z)$ の実部。

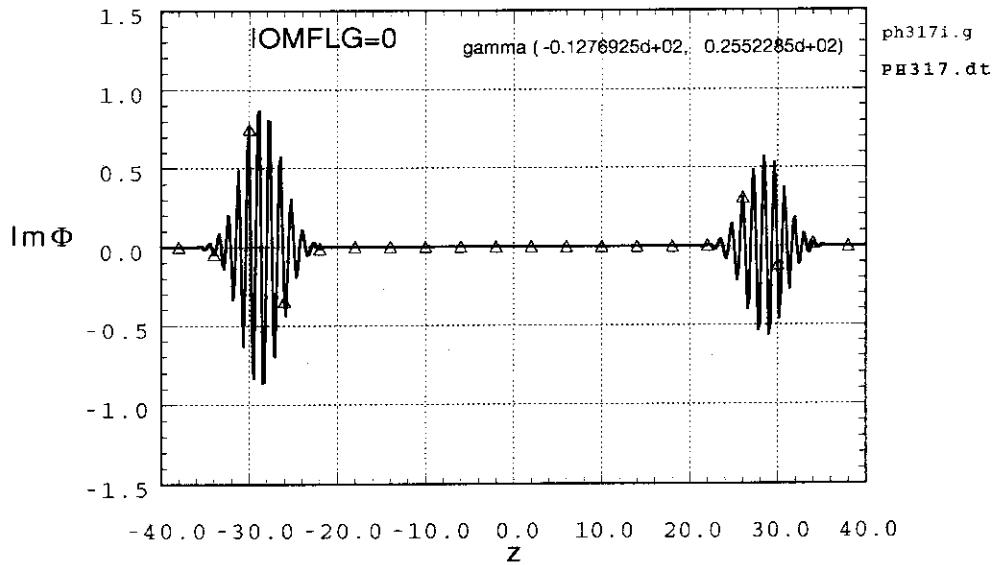


図 9.39(b): 台関数を使用しない場合の分類 (5) に属する固有値の $\Phi(z)$ の虚部。

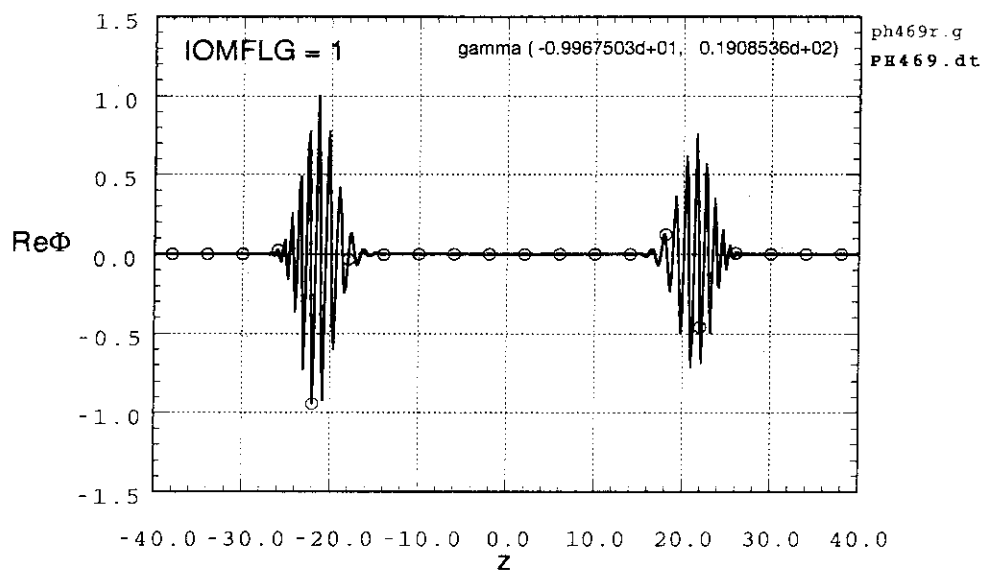


図 9.40(a): 台関数を使用した場合の分類 (5) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

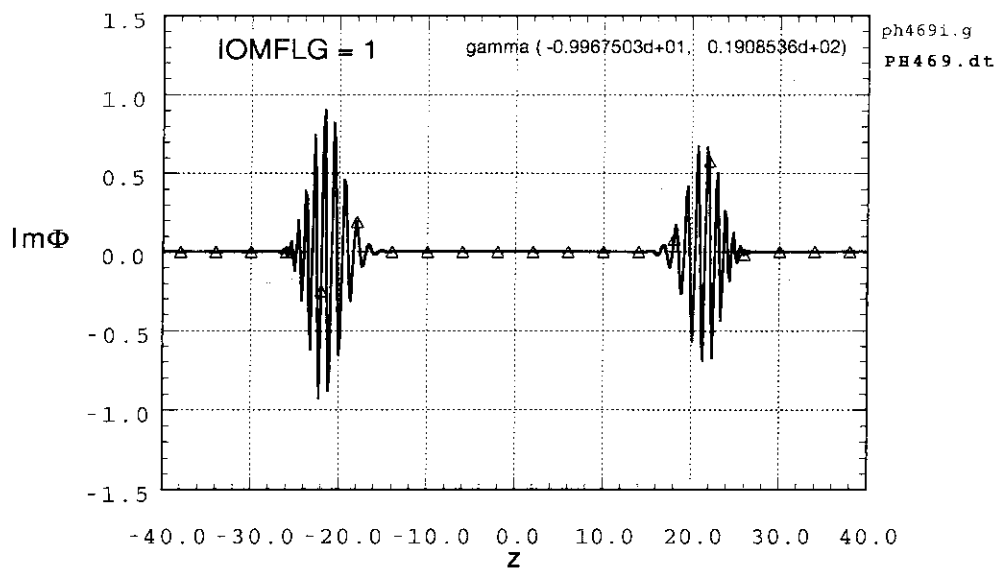


図 9.40(b): 台関数を使用した場合の分類 (5) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

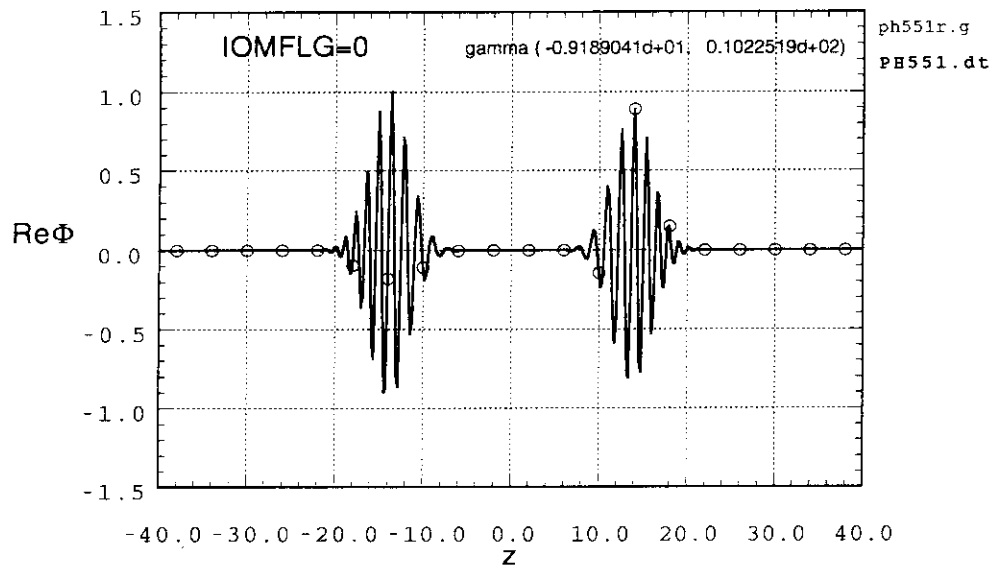


図 9.41(a): 台関数を使用しない場合の分類 (6) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

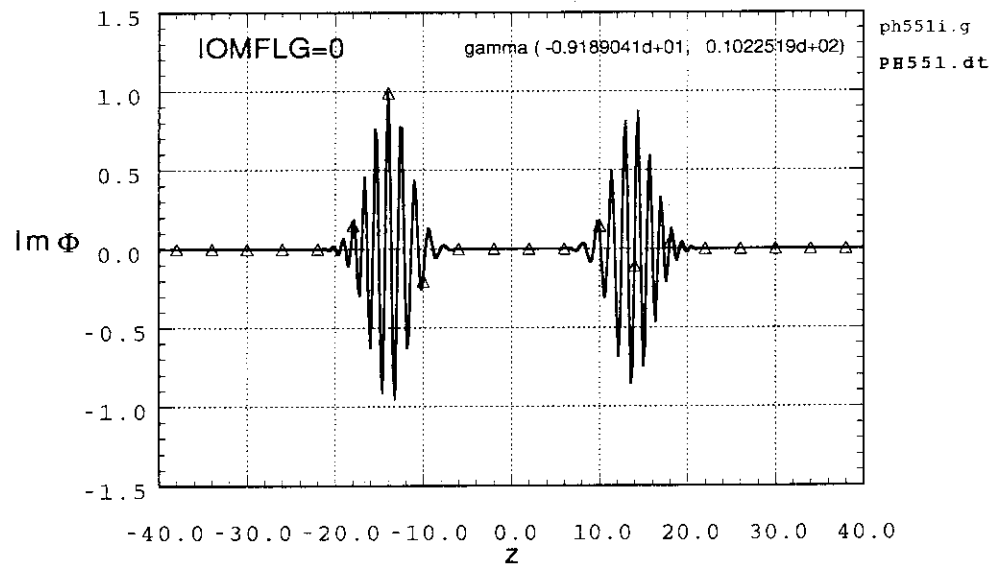


図 9.41(b): 台関数を使用しない場合の分類 (6) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

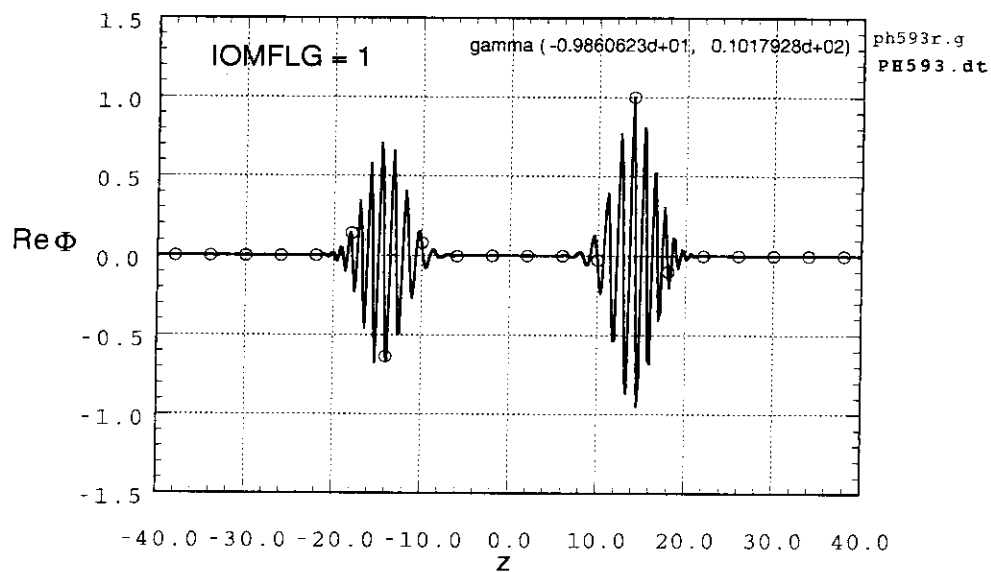


図 9.42(a): 台関数を使用した場合の分類 (6) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

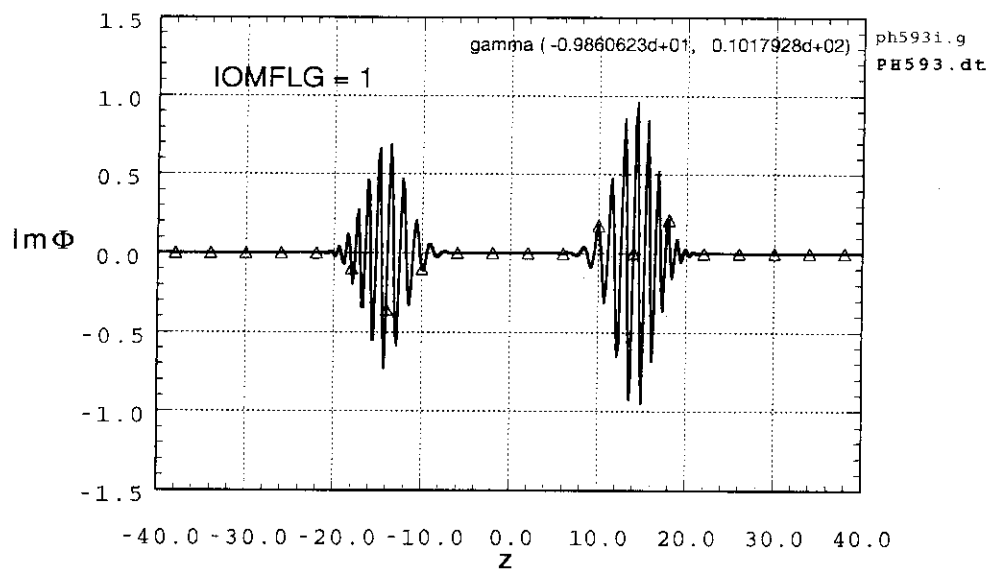


図 9.42(b): 台関数を使用した場合の分類 (6) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

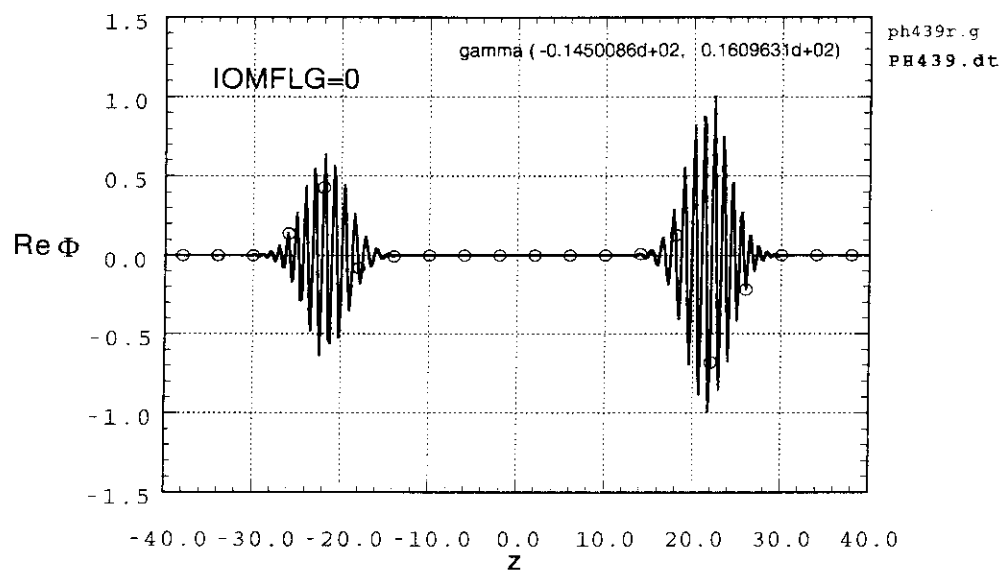


図 9.43(a): 台関数を使用しない場合の分類 (7) に属する固有値の $\Phi(z)$ の実部。

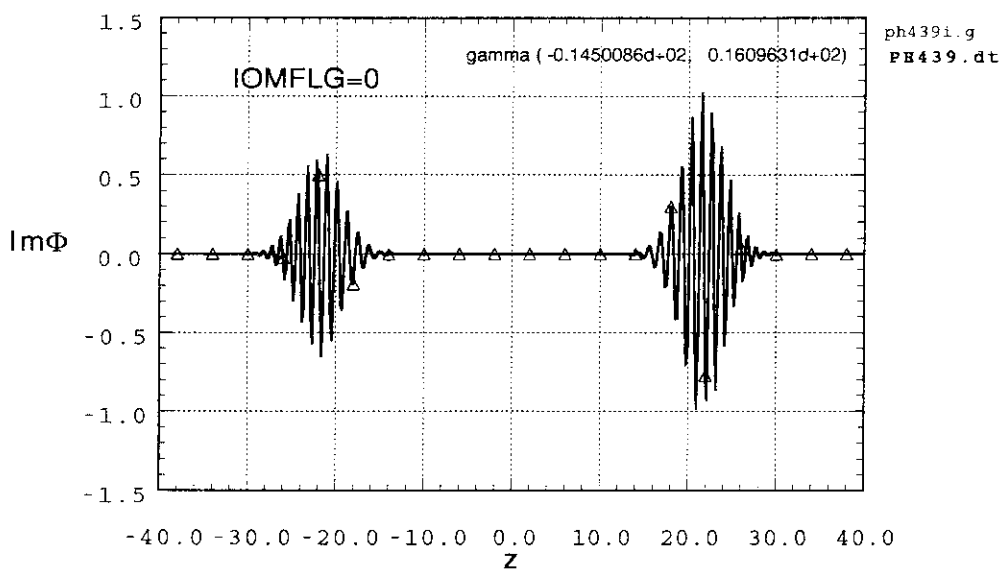


図 9.43(b): 台関数を使用しない場合の分類 (7) に属する固有値の $\Phi(z)$ の虚部。

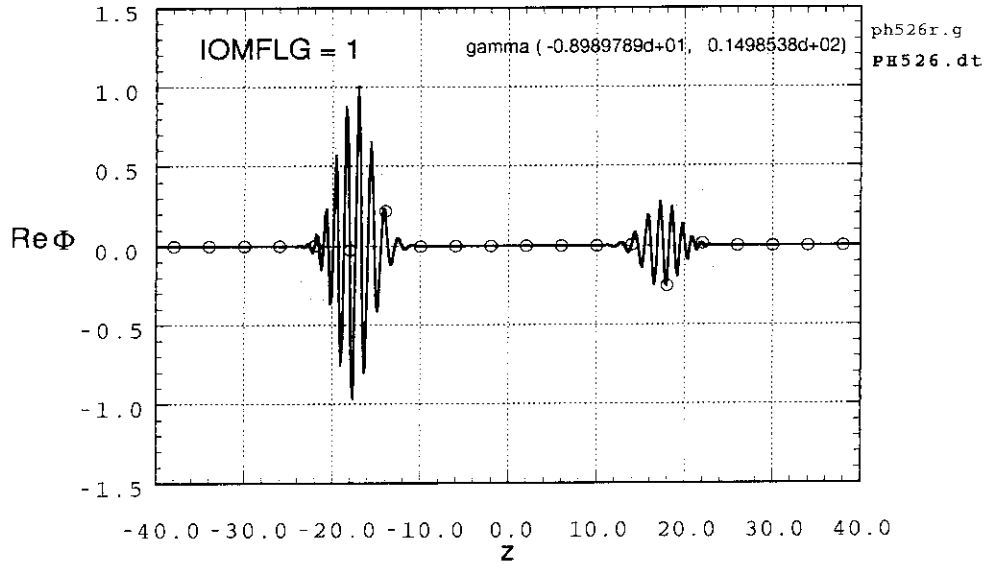


図 9.44(a): 台関数を使用した場合の分類 (7) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

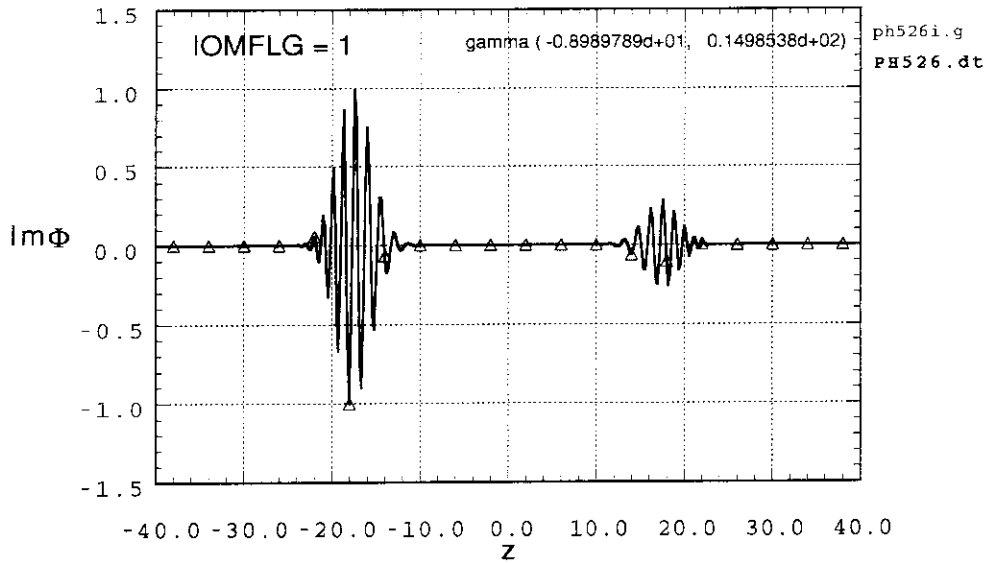


図 9.44(b): 台関数を使用した場合の分類 (7) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。



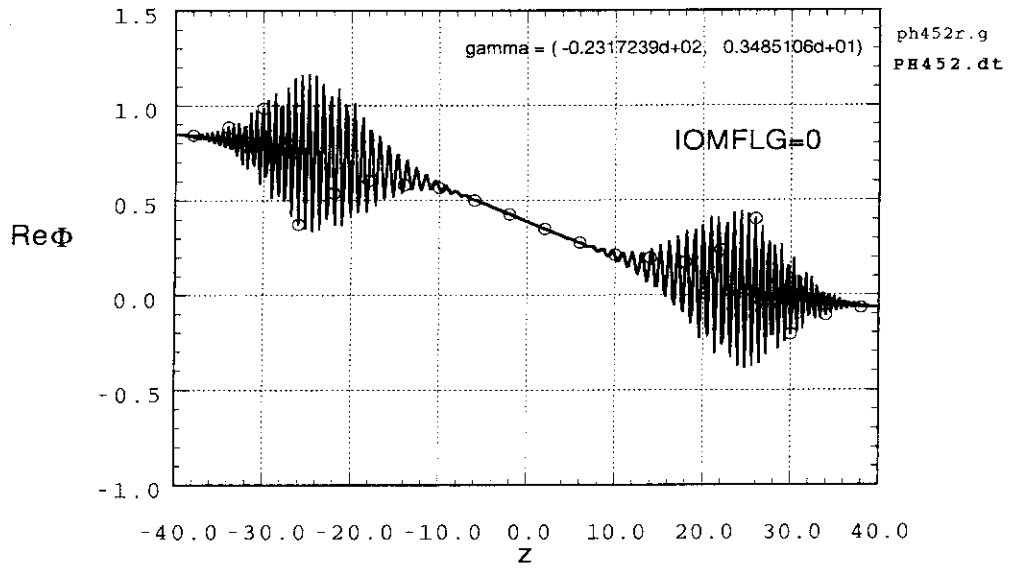


図 9.45(a): 台関数を使用しない場合の分類 (8) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。短波長の振動を含む波束にゆっくりした変動が載っている。

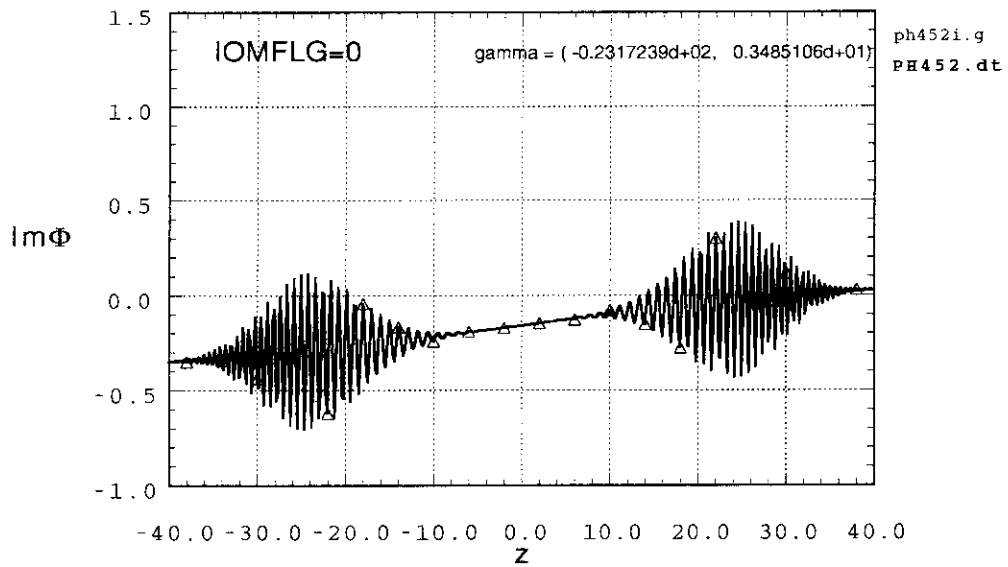


図 9.45(b): 台関数を使用しない場合の分類 (8) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

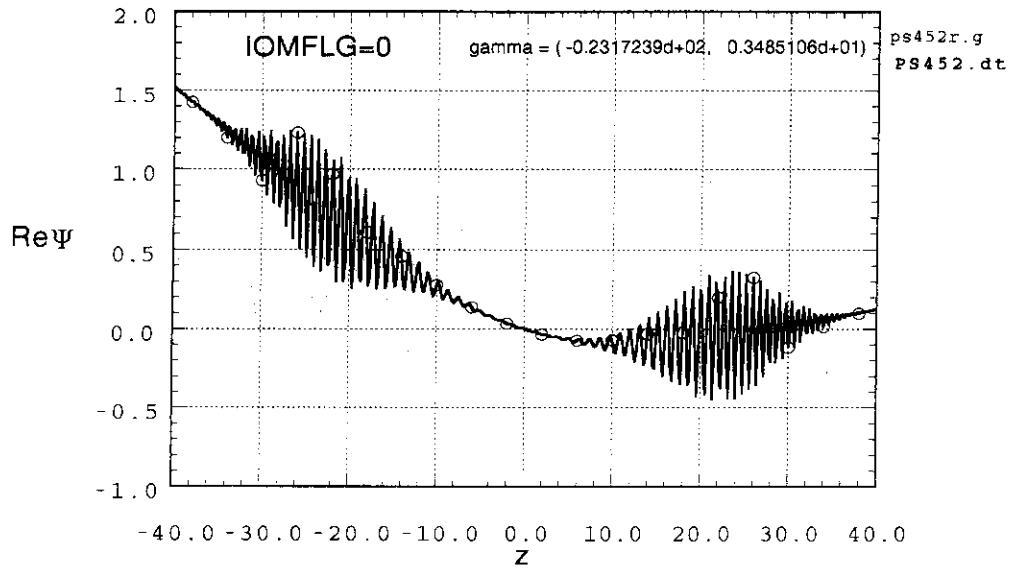


図 9.45(c): 台関数を使用しない場合の分類 (8) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の実部。

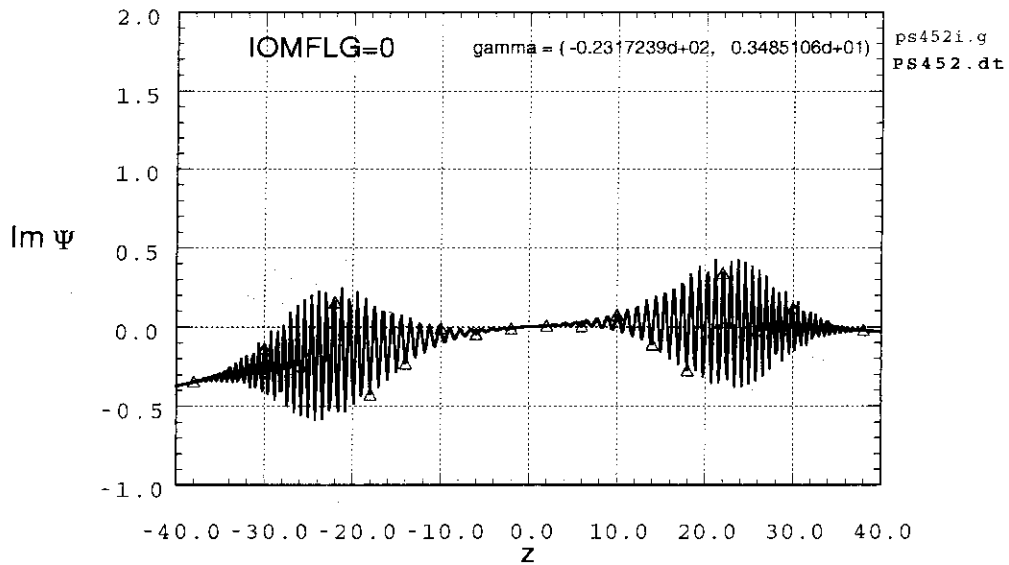


図 9.45(d): 台関数を使用しない場合の分類 (8) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の虚部。

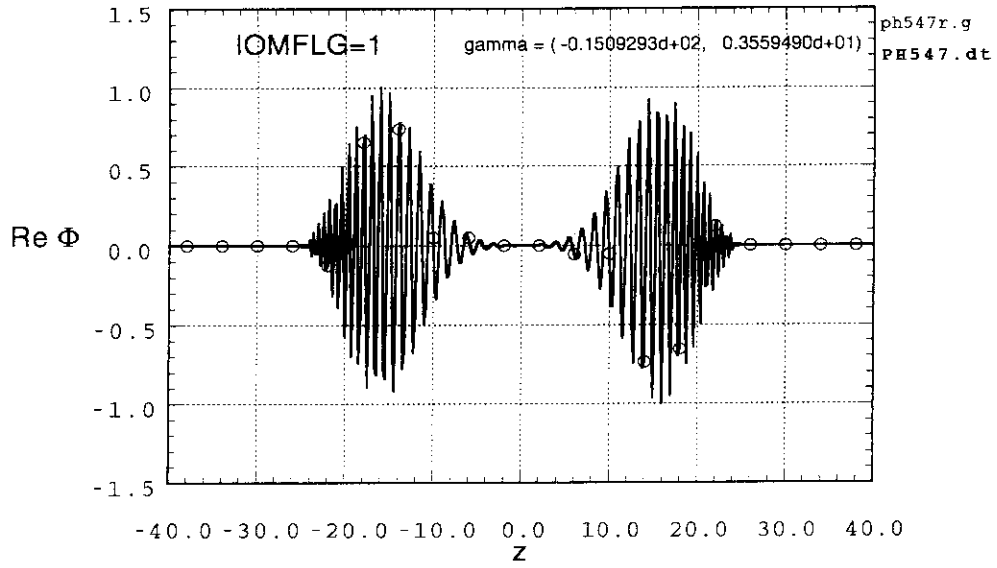


図 9.46(a): 台関数を使用した場合の分類 (8) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の実部。

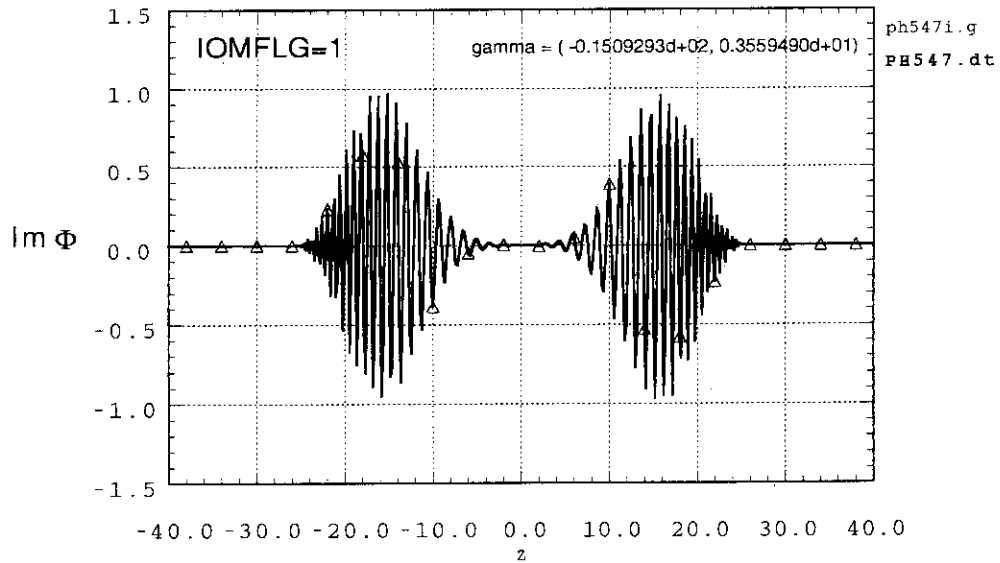


図 9.46(b): 台関数を使用した場合の分類 (8) に属する固有値の  $\Phi(z)$  の虚部。

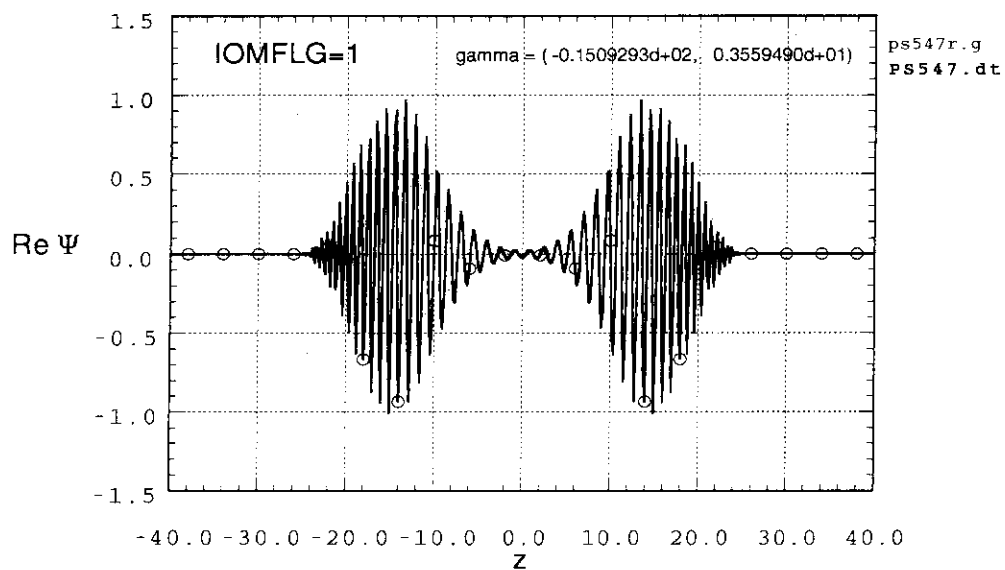


図 9.46(c): 台関数を使用した場合の分類 (8) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の実部。

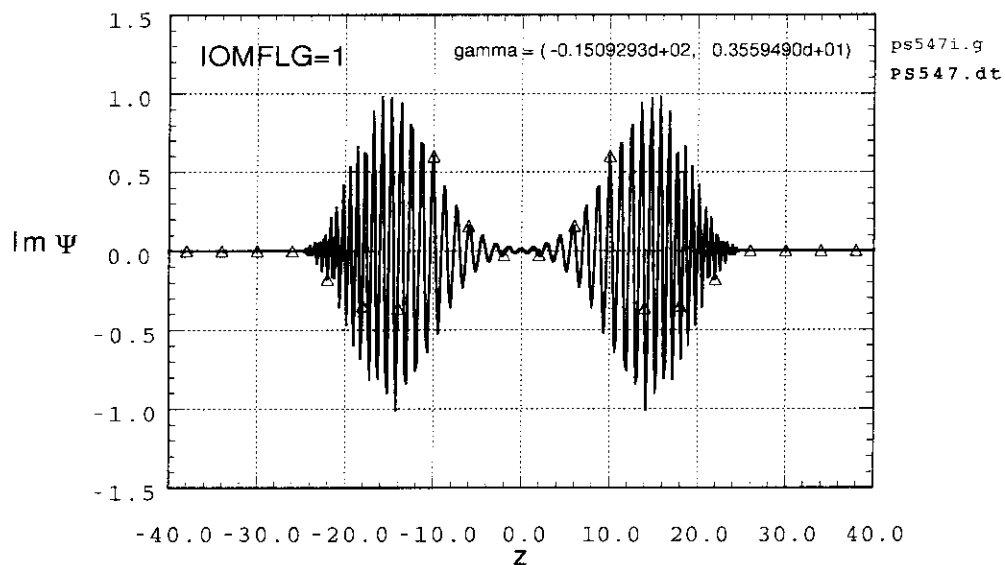


図 9.46(d): 台関数を使用した場合の分類 (8) に属する固有値の  $\Psi(z)$  の虚部。

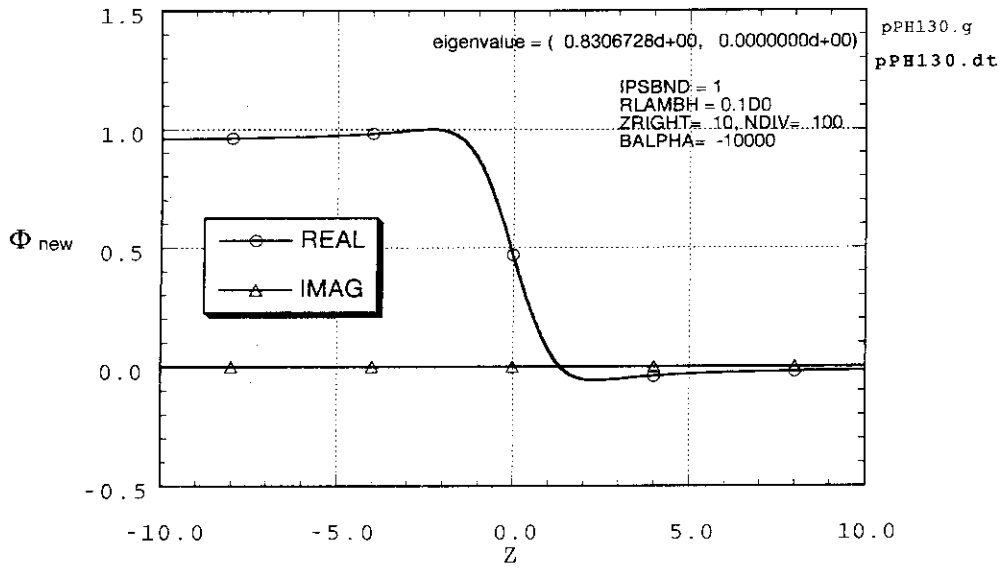


図 9.47(a): 境界条件 (10.2) ~ (10.4) を用いた  $\lambda_H = 0.1$  の場合の不安定固有値の  $\Phi(z)$  (○印:実部, △印:虚部)。固有値の形は図 9.3 とは異なり、固有値 ( $\gamma = 0.83067$ ) は解析値と一致していない。

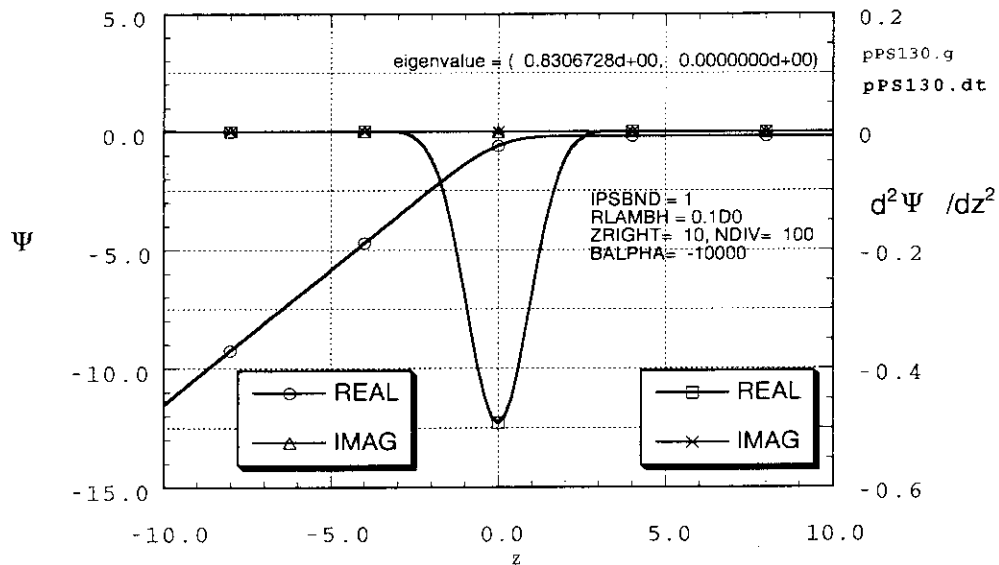


図 9.47(b): 境界条件 (10.2) ~ (10.4) を用いた  $\lambda_H = 0.1$  の場合の不安定固有値の  $\Psi(z)$  (左軸, ○印:実部, △印:虚部) と  $d^2\Psi/dz^2$  (右軸, □印:実部, ×印:虚部)。

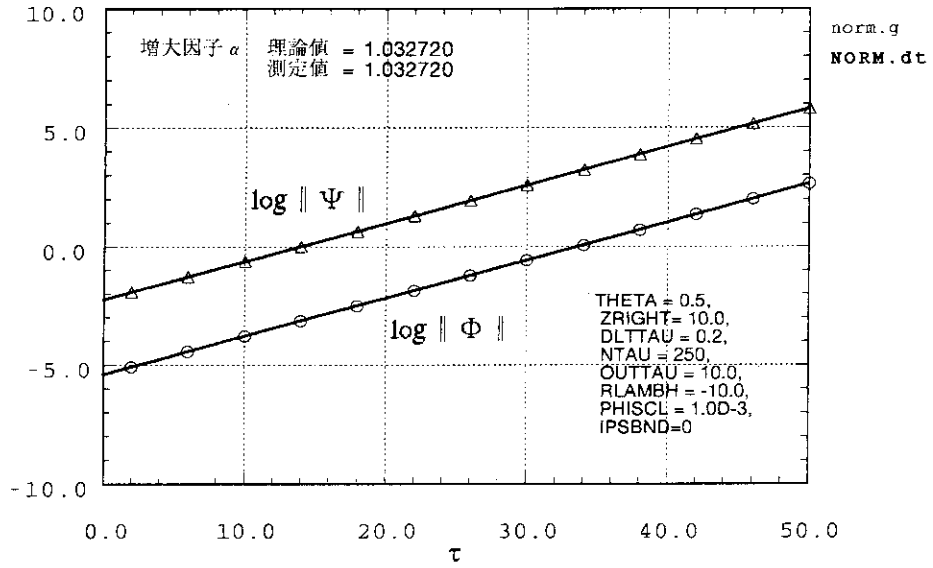


図 10.1:  $\lambda_H = -10, \theta = 1/2, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の  $\log \|\Phi\|$  (○印)、 $\log \|\Psi\|$  (△印) の時間変化。 $\Phi(z)$  をもとに測定した増大因子  $\alpha$  と理論値は一致している。

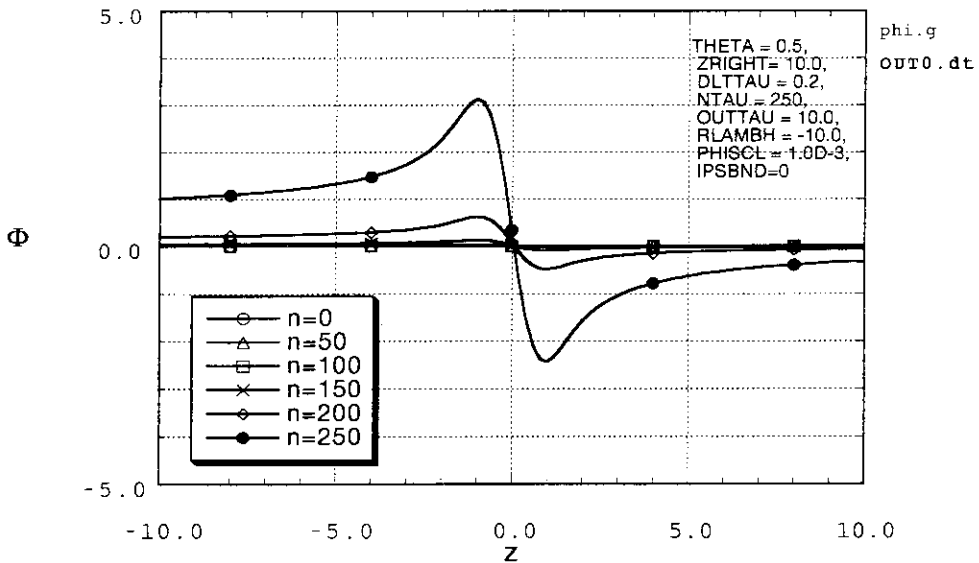


図 10.2:  $\lambda_H = -10, \theta = 1/2, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 50 毎の  $\Phi(z)$ 。

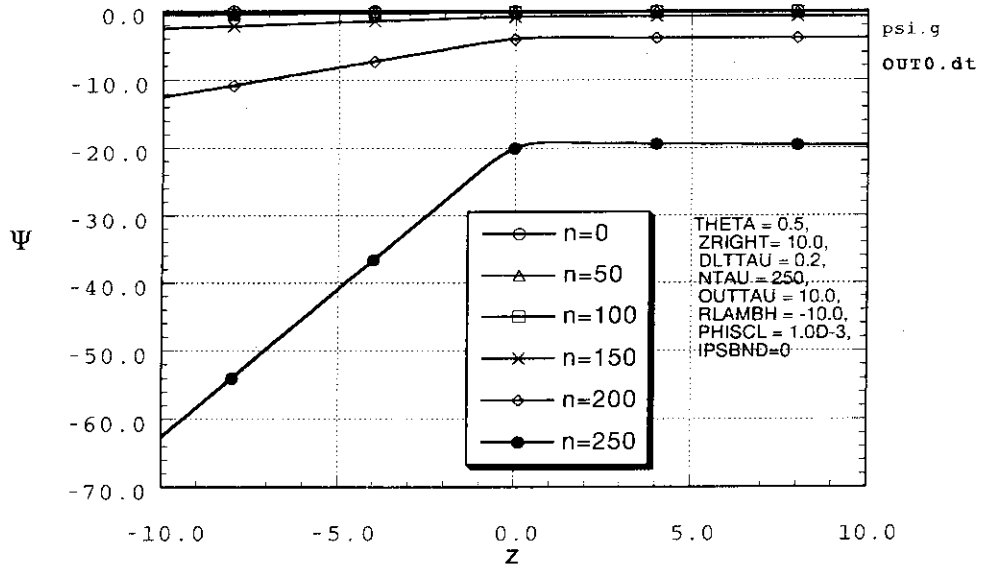


図 10.3:  $\lambda_H = -10, \theta = 1/2, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 50 毎の  $\Psi(z)$ 。

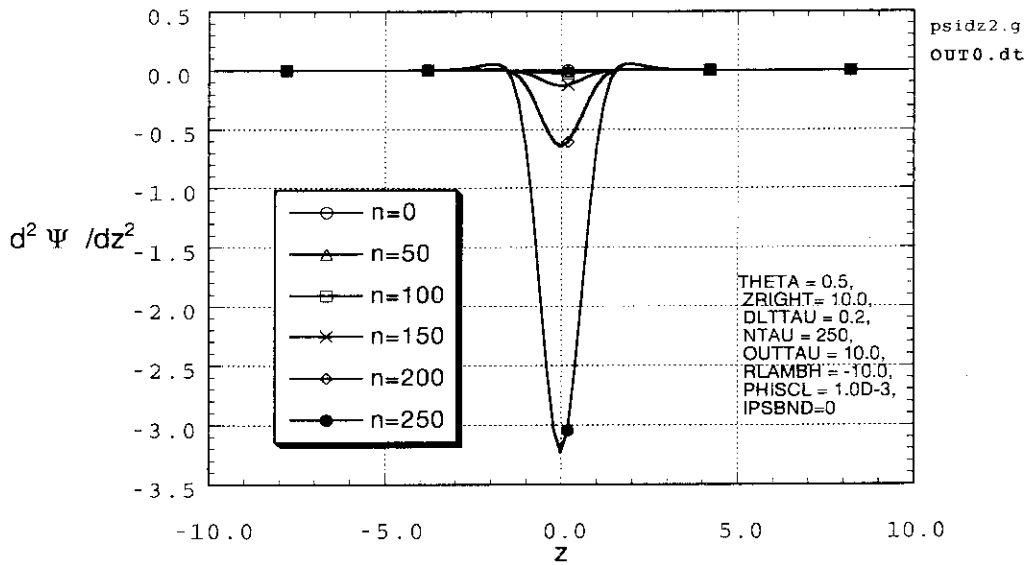


図 10.4:  $\lambda_H = -10, \theta = 1/2, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 50 毎の  $d^2\Psi/dz^2$ 。

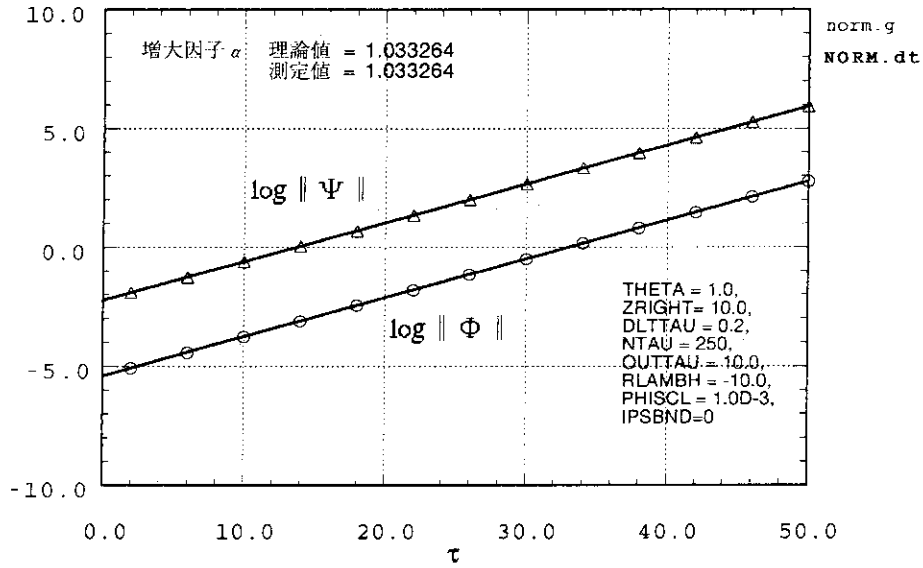


図 10.5:  $\lambda_H = -10, \theta = 1, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の  $\log \|\Phi\|$  (○印)、 $\log \|\Psi\|$  (△印) の時間変化。 $\Phi(z)$  をもとに測定した増大因子  $\alpha$  と理論値は一致している。

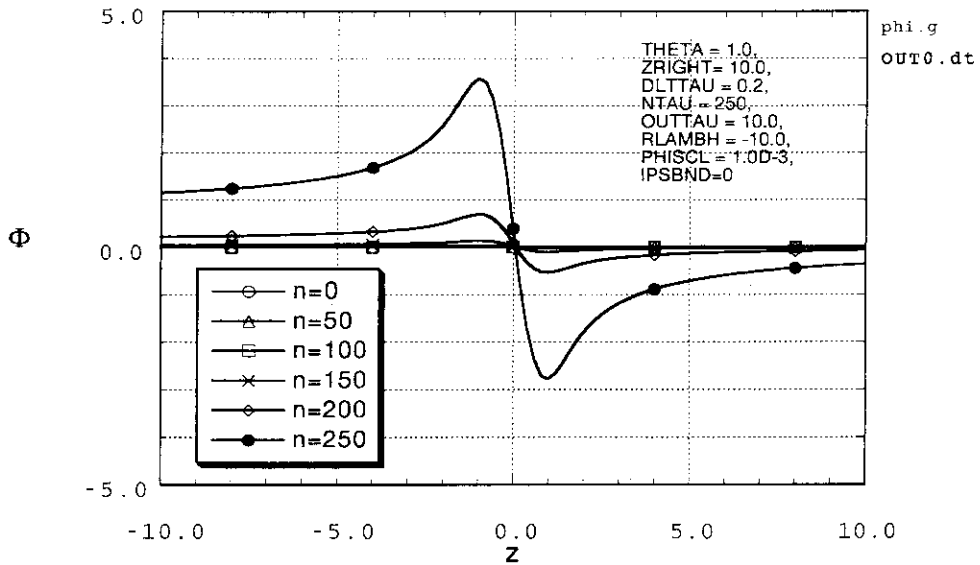


図 10.6:  $\lambda_H = -10, \theta = 1, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 50 毎の  $\Phi(z)$ 。



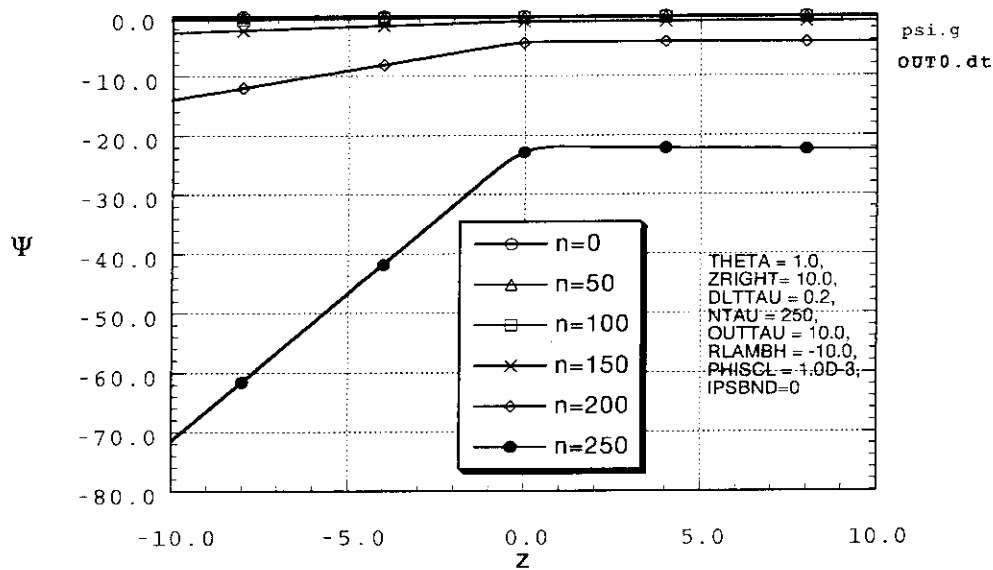


図 10.7:  $\lambda_H = -10, \theta = 1, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 50 毎の  $\Psi(z)$ 。

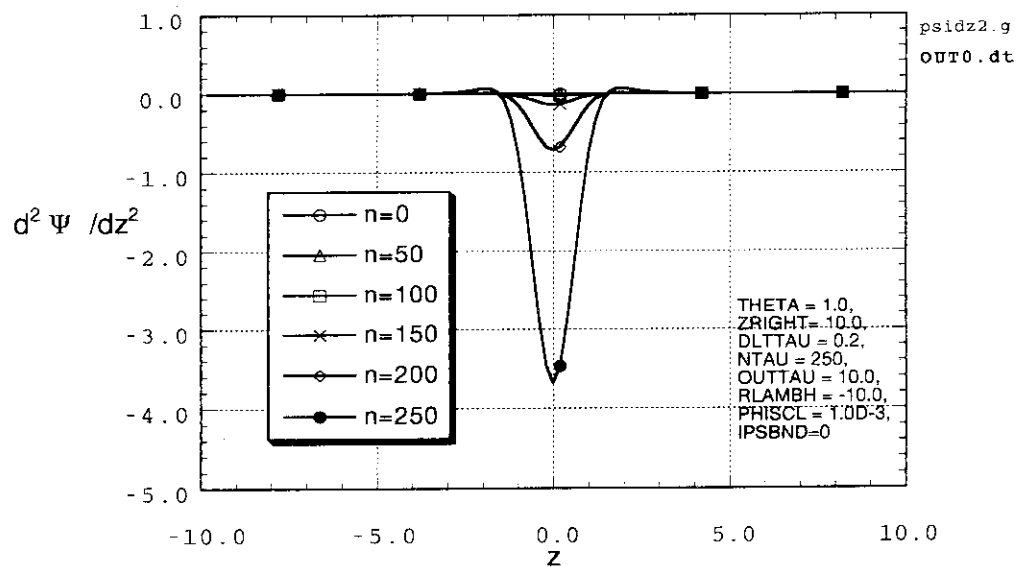


図 10.8:  $\lambda_H = -10, \theta = 1, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 50 毎の  $d^2\Psi/dz^2$ 。

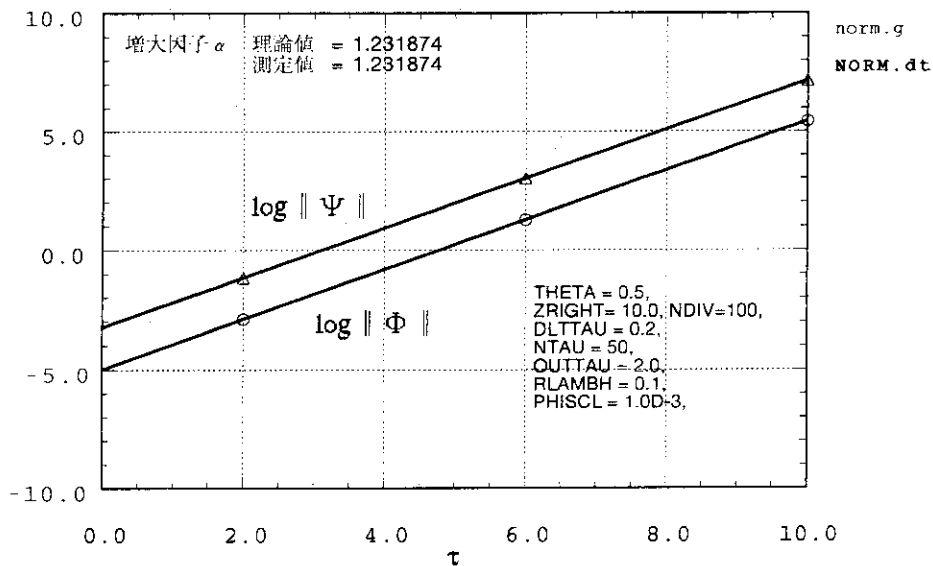


図 10.9:  $\lambda_H = 0.1, \theta = 1/2, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の  $\log \|\Phi\|$  (○印)、 $\log \|\Psi\|$  (△印) の時間変化。 $\Phi(z)$  をもとに測定した増大因子  $\alpha$  と理論値は一致している。

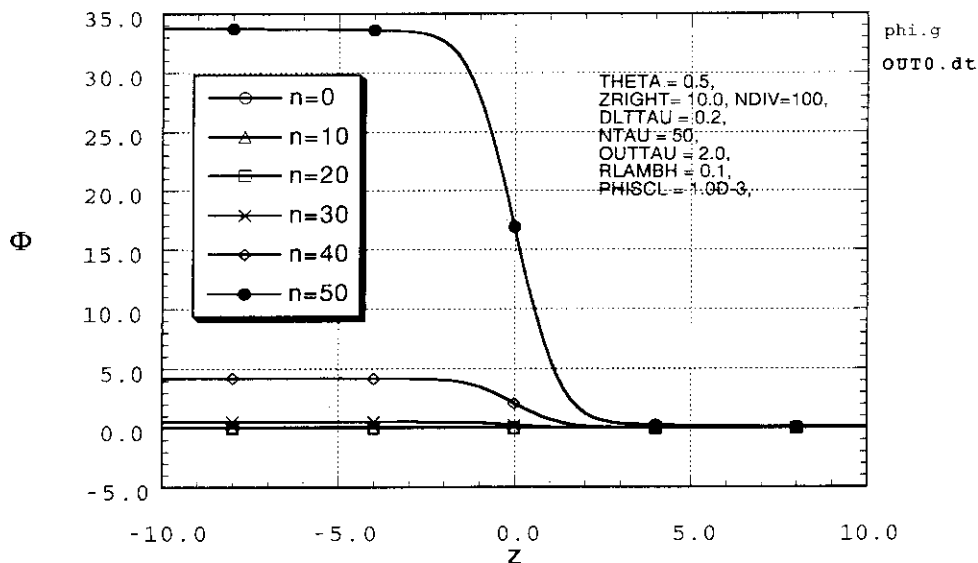


図 10.10:  $\lambda_H = 0.1, \theta = 1/2, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 10 毎の  $\Phi(z)$ 。

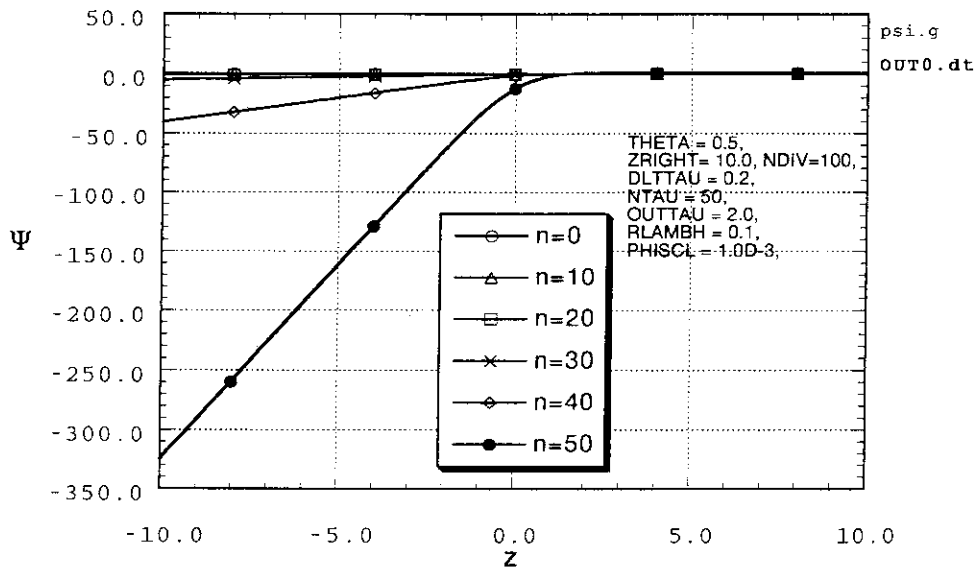


図 10.11:  $\lambda_H = 0.1, \theta = 1/2, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 10 毎の  $\Psi(z)$ 。

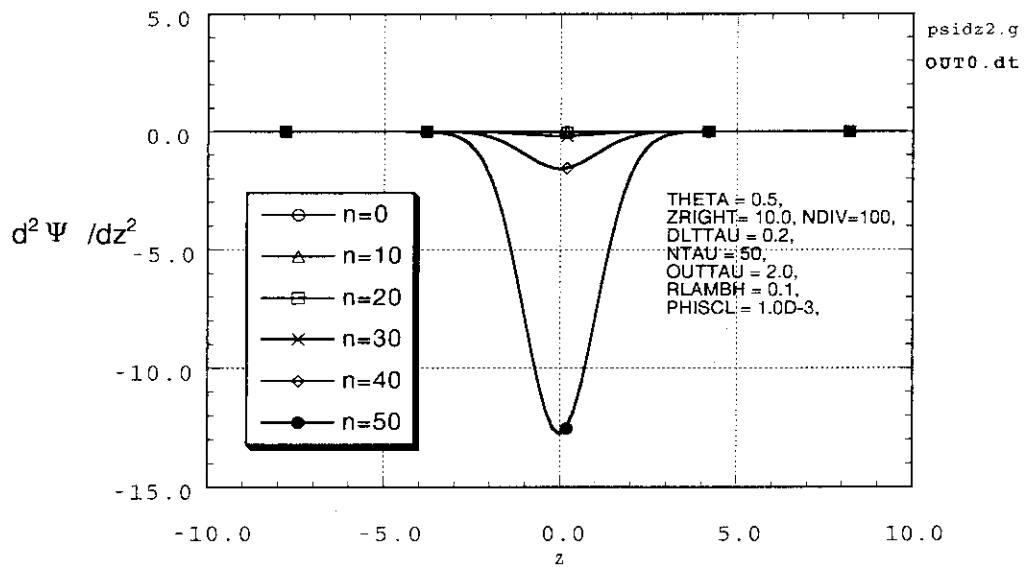


図 10.12:  $\lambda_H = 0.1, \theta = 1/2, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 10 毎の  $d^2 \Psi / dz^2$ 。

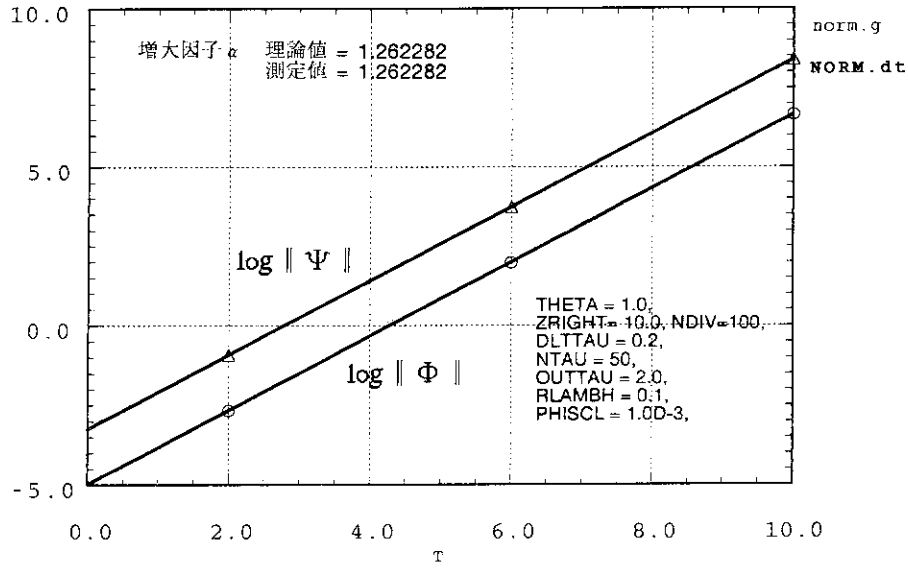


図 10.13:  $\lambda_H = 0.1, \theta = 1, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の  $\log \|\Phi\|$  (○印)、 $\log \|\Psi\|$  (△印) の時間変化。 $\Phi(z)$  をもとに測定した増大因子  $\alpha$  と理論値は一致している。

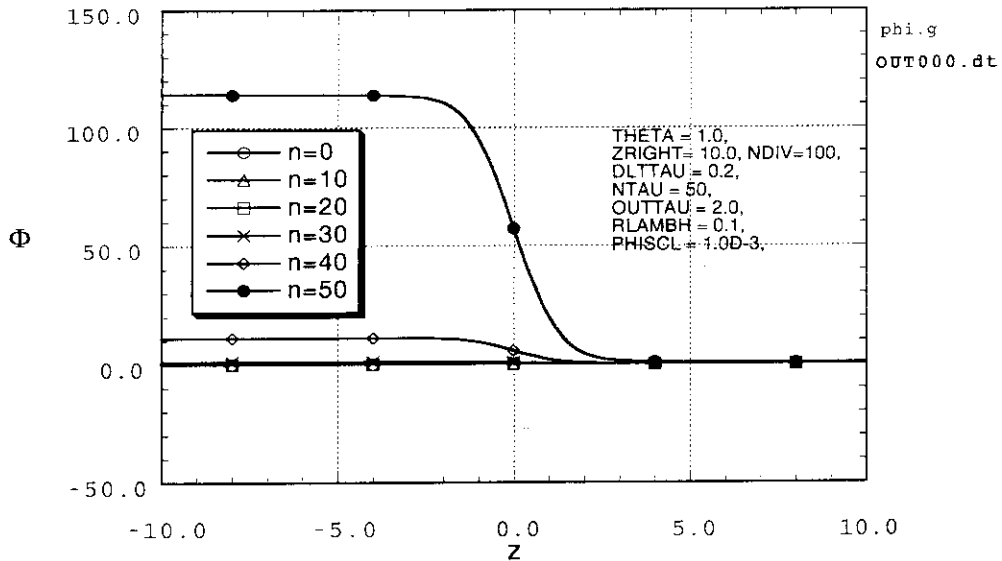


図 10.14:  $\lambda_H = 0.1, \theta = 1, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 10 毎の  $\Phi(z)$ 。

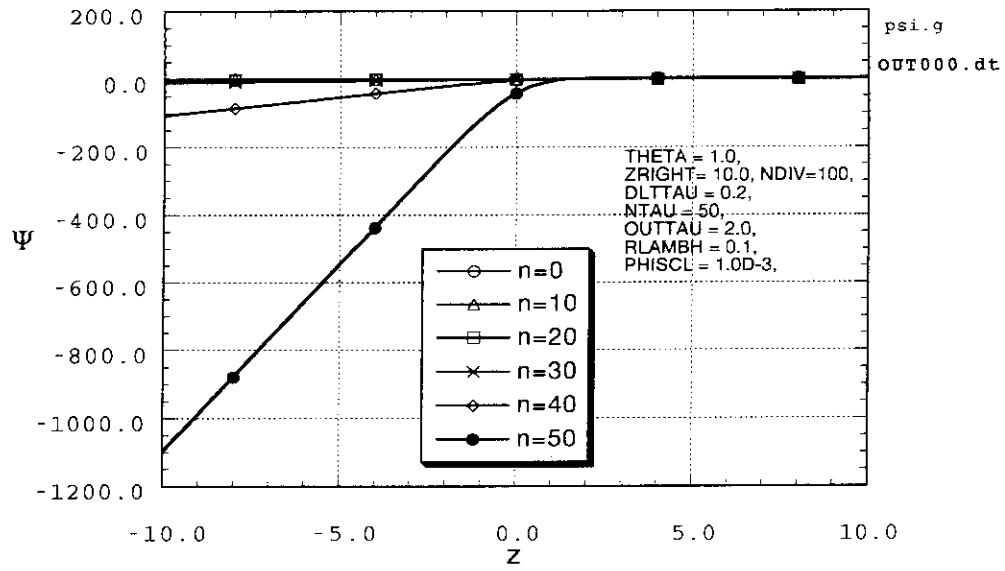


図 10.15:  $\lambda_H = 0.1, \theta = 1, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 10 毎の  $\Psi(z)$ 。

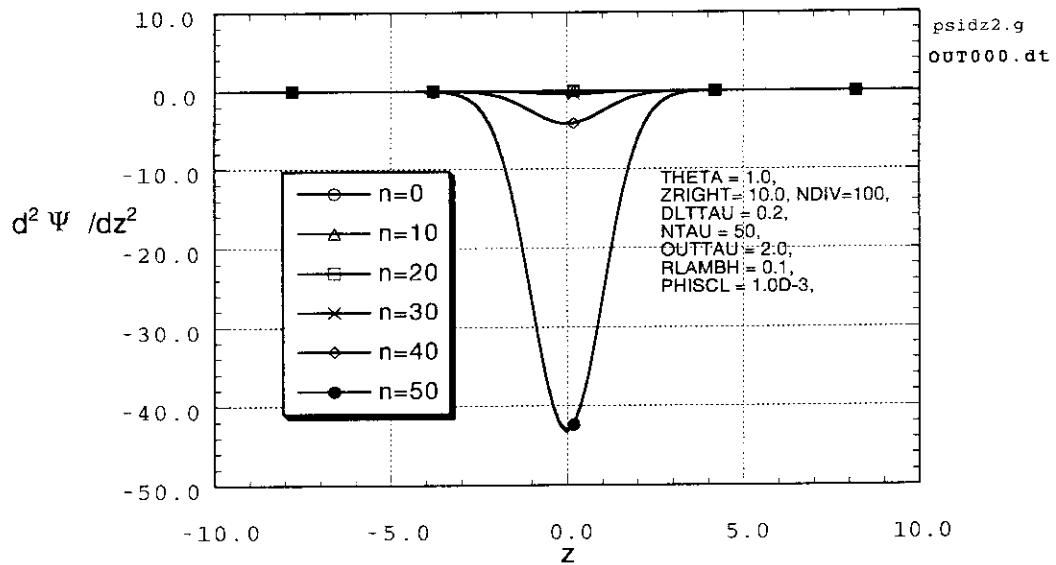


図 10.16:  $\lambda_H = 0.1, \theta = 1, NDIV = 100, z_R = 10$  の場合の時間ステップ 10 毎の  $d^2\Psi/dz^2$ 。

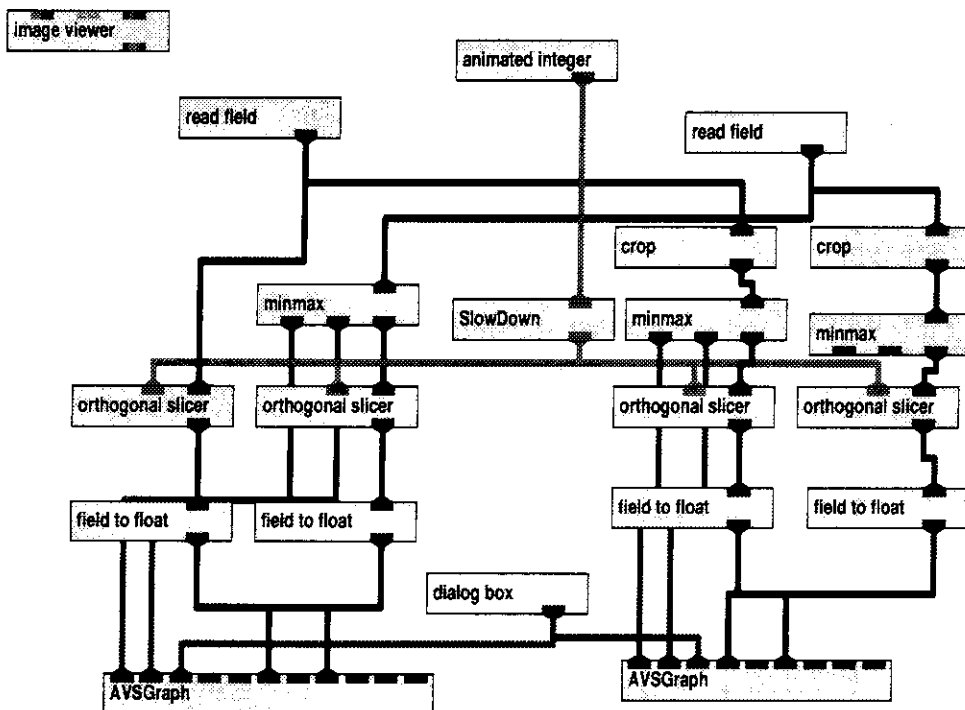


図 10.17:  $\Phi(z)$ 、 $\Psi(z)$  の時間発展のアニメーションを実行する Network。  $\theta = 1/2$  と  $\theta = 1$  の場合を同時に表示し、左端を拡大して表示する。

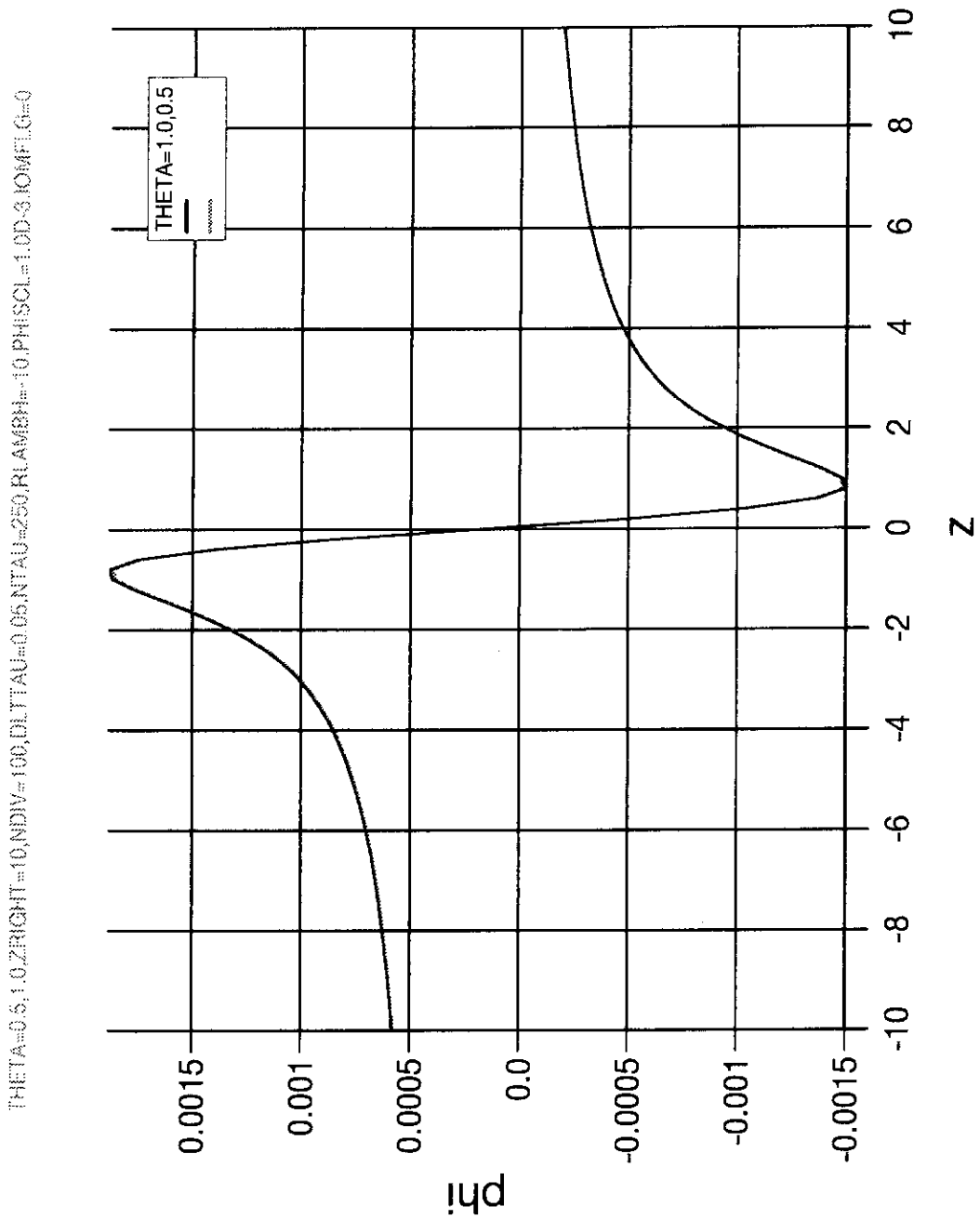


図 10.18:  $\lambda_H = -10, \Delta\tau = 0.05$  の場合のアニメーションの  $\tau = 12.5$  における  $\Phi(z)$ 。  
 $\theta = 1/2$ (点線) と  $\theta = 1$ (実線) はほとんど重なっている。

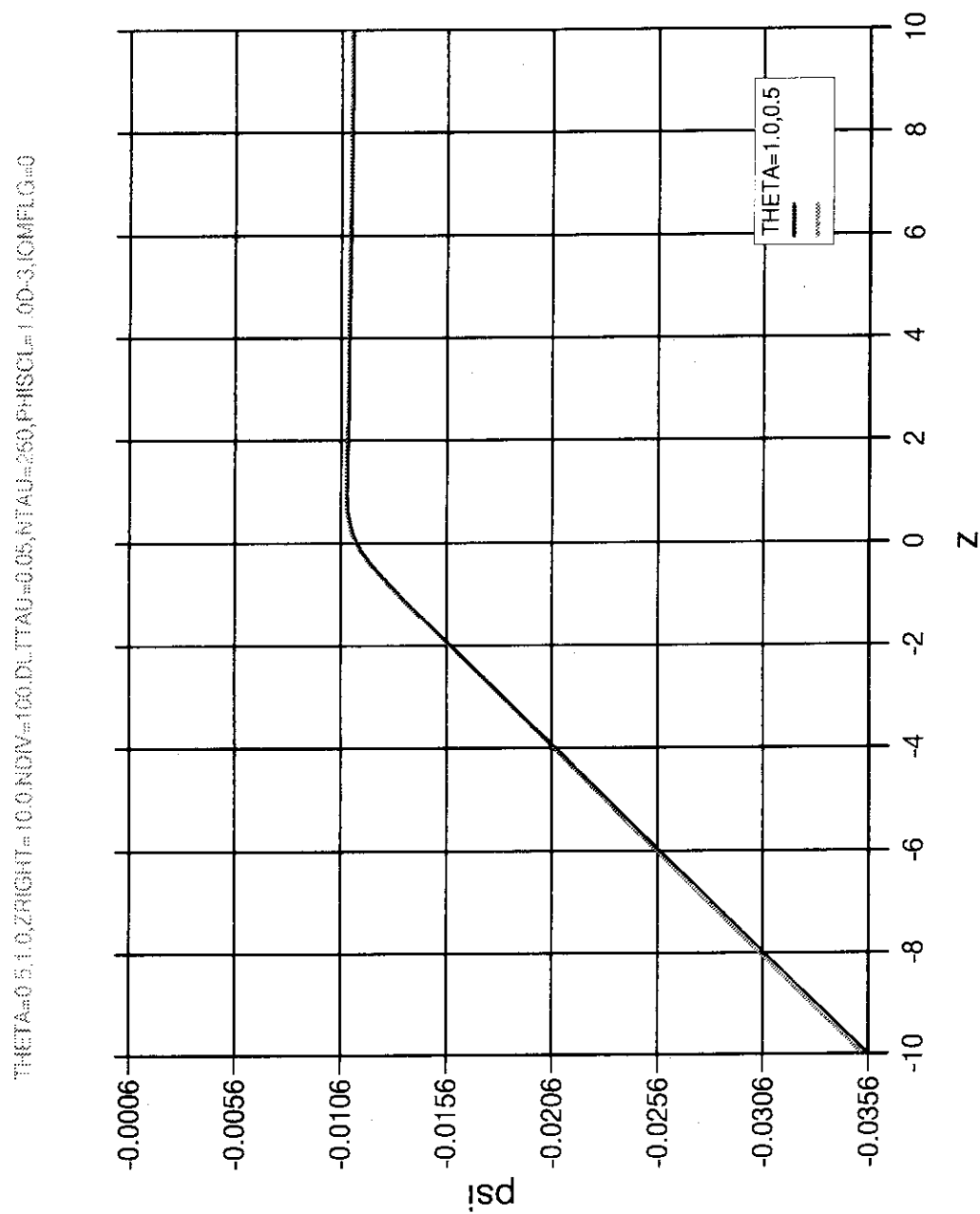


図 10.19:  $\lambda_H = -10, \Delta\tau = 0.05$  の場合のアニメーションの  $\tau = 12.5$  における  $\Psi(z)$  (点線:  $\theta = 1/2$ , 実線:  $\theta = 1$ )。



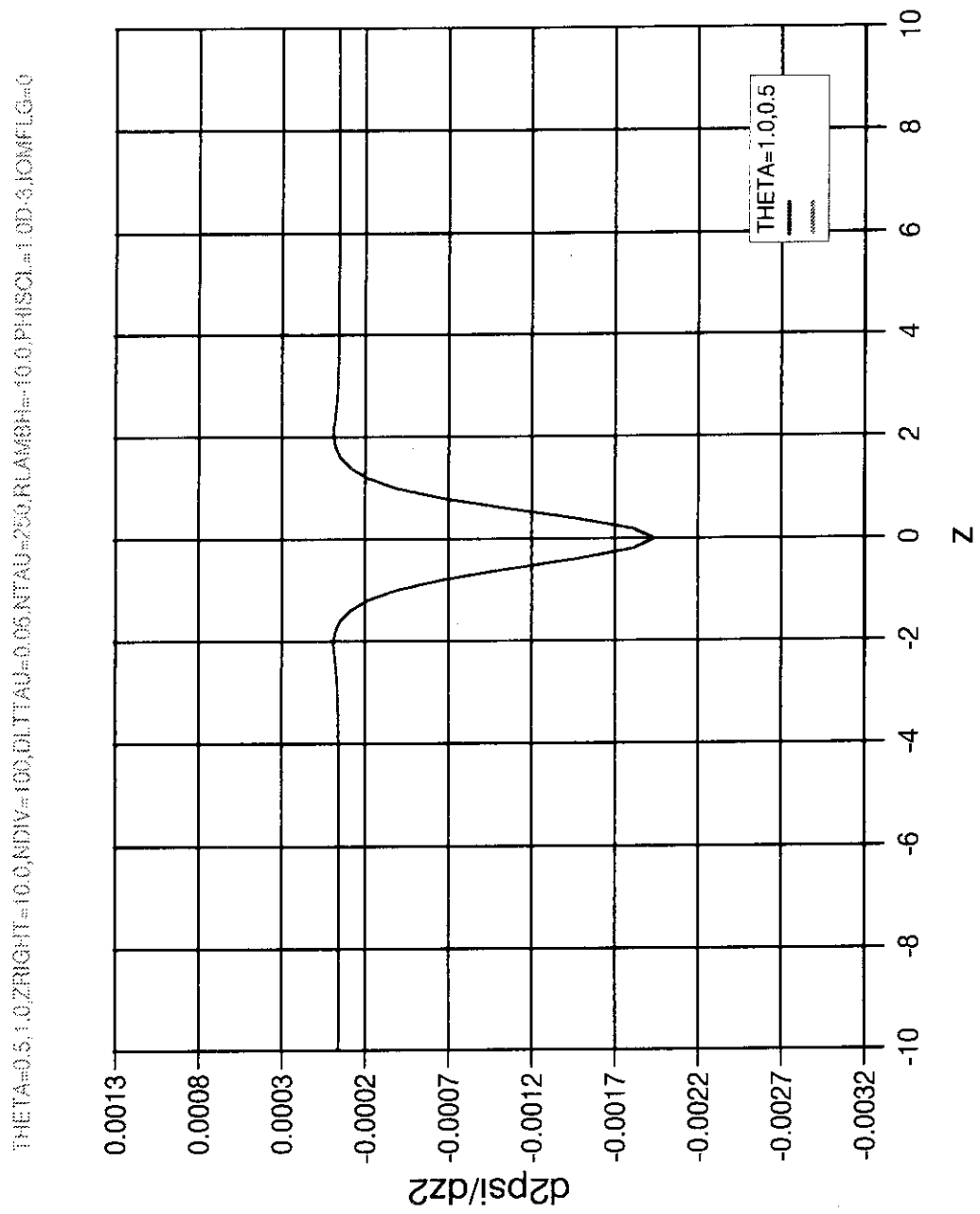


図 10.20:  $\lambda_H = -10$ ,  $\Delta\tau = 0.05$  の場合のアニメーションの  $\tau = 12.5$  における  $d^2\Psi/dz^2$  (点線:  $\theta = 1/2$ , 実線:  $\theta = 1$ )。

## 付録 A ディレクトリ構造

ディレクトリ /linbnd の下の構造を示す。

<u>ディレクトリ</u>	<u>ファイル内容</u>	<u>ファイル名</u>
/ doc	仕様書 ディレクトリ LATEX 原稿 グラフ、プログラム フロー ポスト スクリプト /GRPH 固有値問題テスト結果グラフディレクトリ /GRPH/IOM0 IOMFLG = 0 の eps ファイルディレクトリ /GRPH/IOM1 IOMFLG = 1 の eps ファイルディレクトリ	*.tex *.eps *.ps
/ egnver2	固有値問題 ディレクトリ メイン プログラム サブルーチン、ファンクション インクルード ファイル メイクファイル 計算パラメータ MARG1D のデータ 実行シェル スクリプト (vpp500/42 用) (ここで計算パラメータファイル名, MARG1D のデータファイル名 を設定) 実行結果出力ファイル (付録 B.2参照)	main.f *.f  makefile NML.DATA M1D.DATA wex.sh
/ bndver3	初期値・境界値問題 (シミュレーション) ディレクトリ  メイン プログラム サブルーチン、ファンクション インクルード ファイル メイクファイル 計算パラメータ 実行シェル スクリプト (vpp500/42 用) (ここで計算パラメータファイル名, 固有値問題の固有関数 $\Phi$ , $\Psi$ ファイル名, MARG1D のデータファイル名 を設定) 実行結果出力ファイル (付録 C.2参照)	main.f *.f  makefile NML.DATA wex.sh

## 付録 B 固有値問題のプログラム仕様

## B.1 入力データ

## 1. 計算パラメータ

項目	配列	型	意味	default 値
IXZOPT	-	I	範囲設定変数オプション = 0 のとき $z_R$ 入力 = 1 のとき $x_R$ 入力 $L_R =  k_{  } ^{-1/3}$ $z_R = \frac{x}{L_R}$	0
XRIGHT	-	R*8	$x_R$ (IXZOPT=1 のとき有効)	1000.0
ZRIGHT	-	R*8	$z_R$ (IXZOPT=0 のとき有効)	1000.0
NDIV	-	I	$z$ の分割数	100
BALPHA	-	R*8	$\Psi$ の境界条件の $\alpha$	1.0
IRAOPT	-	I	範囲オプション = 0 のとき $z_L \leq z \leq z_R$ で解く = 1 のとき $0 \leq z \leq z_R$ で解く (無効)	0
ISLOPT	-	I	固有値問題解法オプション = 0 のとき複素 Hessenberg 行列に変換して解く (SSL2 の DCEIG2 を使う) = 1 のとき逆ベキ法 (対角行列) で解く = 2 のとき逆ベキ法 (密行列) で解く	0
CLAM0	-	C*16	逆ベキ法の固有値の初期値 $\gamma_0$ (ISLOPT=1 または 2 のとき有効)	-
KPAOPT	-	I	$k_{  }$ 入力オプション = 0 のとき MARG1D のデータから計算 = 1 のとき 計算パラメータとして入力	0
RKPARA	-	R*8	$k_{  }$ (KPAOPT=1 のとき有効) KPAOPT=0 のときは $k_{  } = \frac{m}{A} \left( \frac{\hat{F}}{B} \right)_{r_0} s^{-1}$	1.0
ISGOPT	-	I	$\bar{\sigma}_L, \bar{\sigma}_R$ 入力オプション = 0 のとき 計算パラメータとして入力 = 1 のとき モデル方程式の接続データ	0
SIGMAR	-	R*8	$\bar{\sigma}_R$ (ISGOPT=0 のとき有効) ISGOPT=1 のとき $\bar{\sigma}_R = -z_R$	1.0
SIGMAL	-	R*8	$\bar{\sigma}_L$ (ISGOPT=0 のとき有効) ISGOPT=1 のとき $\bar{\sigma}_L = -\frac{\pi}{\lambda_H} z_L^2$	1.0
RLAMBH	-	R*8	$\lambda_H$ (ISGOPT=1 のとき有効)	1.0

項目	配列	型	意味	default 値
JOUTNO	10	I	ファイル出力する固有ベクトルの番号 (正の値の固有値に対応する固有ベクトル は自動的にファイル出力するので、ここ で指定する必要はない) (ISLOPT=0 のとき有効)	0, ..., 0
IOMFLG	-	I	台関数導入フラグ = 0 : 導入しない = 1 : 導入する	0

## 2. MARG1D のデータ

項目	配列	型	意味
ASPCT	-	R*8	アスペクト比 $A$
RRAT	-	R*8	有理面 $\hat{r}_0$
MM	-	I	ポロイダル・モード数 $m$
RMU	-	R*8	Mercier index $\mu$
DELTAR	-	R*8	接続データ $\Delta_R$
DELTAL	-	R*8	接続データ $\Delta_L$
QRAT	-	R*8	有理面における安全係数 $q(r_0)$
DQDRRA	-	R*8	有理面における $dq/dr$
FRAT	-	R*8	有理面における $\hat{F}$

## B.2 出力データ

## 1. SSL2 の DCEIG2 を使用して解いたとき (ISLOPT=0) の出力ファイル

ファイル名	内容
EVAL.DATA	固有値
PH××.DATA	$\Phi_{new}$
PS××.DATA	$\Psi_{new}, \partial^2 \Psi / \partial z^2$
BPH××.DATA	シミュレーション初期値用 $\Phi_{new}, \Psi_{new}$

××は正の固有値の番号、または計算パラメータで設定されている固有値の番号に対応する。

## 2. 逆ベキ法を使用して解いたとき (ISLOPT=1 または 2) の出力ファイル

ファイル名	内容
PHPS.DATA	$\Phi_{new}, \Psi_{new}, \partial^2 \Psi / \partial z^2$
BPH.DATA	シミュレーション初期値用 $\Phi_{new}, \Psi_{new}$

3. HZ.DATA 台関数  $H(z)$

## B.3 主な変数

変数名	配列	型	意味	※
IXZOPT	-	I	範囲設定変数オプション = 0 のとき $z_R$ = 1 のとき $x_R$	P
XRIGHT	-	R*8	$x_R$	P
ZRIGHT	-	R*8	$z_R$	P
ZLEFT	-	R*8	$z_L (= -z_R)$	
Z	(IAN)	R*8	$z_j, j = 1, \dots, N + 1$	
DELTAZ	-	R*8	$\Delta z$	
NDIV	-	I	$z$ の分割数	P
BALPHA	-	R*8	$\Psi$ の境界条件の $\alpha$	P
IRAOPT	-	I	範囲オプション = 0 のとき $z_L \leq z \leq z_R$ で解く = 1 のとき $0 \leq z \leq z_R$ で解く	P
ISLOPT	-	I	固有値問題解法オプション = 0 のとき複素 Hessenberg 行列に変換して解く (SSL2 の DCEIG2 を使う) = 1 のとき逆ベキ法で解く (対角行列) = 2 のとき逆ベキ法で解く (密行列)	P
CLAM0	-	C*16	逆ベキ法の固有値の初期値	P
KPAOPT	-	I	$k_{  }$ 入力オプション = 0 のとき MARG1D のデータから計算 = 1 のとき 計算パラメータとして入力	P
RKPARA	-	R*8	$k_{  }$	P
SGNKPA	-	R*8	$\text{sgn}(k_{  })$	
ISGOPT	-	I	$\bar{\sigma}_L, \bar{\sigma}_R$ 入力オプション = 0 のとき 計算パラメータとして入力 = 1 のとき モデル方程式の接続データ用	P
SIGMAR	-	R*8	$\bar{\sigma}_R$	P
SIGMAL	-	R*8	$\bar{\sigma}_L$	P
RLAMBH	-	R*8	$\lambda_H$	P
JOUTNO	10	I	ファイル出力する固有ベクトルの番号	P
IOMFLG	-	I	台関数導入フラグ = 0 : 導入しない = 1 : 導入する	P
IPSBND	-	I	$\Psi$ の境界条件選択 (メイン・プログラムで設定) = 0 のとき $\gamma\Psi = -\text{sgn}(k_{  })z\Phi$ = 1 のとき $\Psi = \sigma_L^\Psi \frac{d\Psi}{dz}$ at $z = z_L$ ( $\sigma_L^\Psi = z_L + \lambda_H/\pi$ ) $\frac{d\Psi}{dz} = 0$ at $z = z_R$	

変数名	配列	型	意味	※
ASPCT	-	R*8	アスペクト比 $A$	M
RRAT	-	R*8	有理面 $\hat{r}_0$	M
MM	-	I	$m$	M
RMU	-	R*8	Mercier index $\mu$	M
DELTAR	-	R*8	接続データ $\Delta_R$	M
DELTAL	-	R*8	接続データ $\Delta_L$	M
QRAT	-	R*8	有理面における安全係数 $q(r_0)$	M
DQDRRA	-	R*8	有理面における $dq/dr$	M
FRAT	-	R*8	有理面における $\hat{F}$	M
BRAT	-	R*8	有理面における $\hat{B}$	
			$\hat{B} = \hat{F} \left[ 1 + \left( \frac{1}{A} \right)^2 \left( \frac{\hat{r}_0}{q} \right)^2 \right]^{1/2}$	
SINVR	-	R*8	$s^{-1} = \frac{d}{d\hat{r}} \left( \frac{1}{q} \right)_{r_0} = -\frac{1}{q^2} \frac{dq}{dr}$	
SIGPSL	-	R*8	$\sigma_L^\Psi$	
RLR	-	R*8	$L_R$	
BMAT	(IAN2,IAN2)	C*16	行列 $B$	
AMAT	(IAN2,IAN2)	C*16	行列 $A$	
BINVR	(IAN2,IAN2)	C*16	行列 $B^{-1}$	
BINVA	(IAN2,IAN2)	C*16	行列 $B^{-1}A$	
CEVAL	(IAN2)	C*16	全固有値 $\lambda_j, j = 1, \dots, N + 1$	
CEVECN	(IAN2,IAN2)	C*16	全固有ベクトル $\vec{x}_j, j = 1, \dots, N + 1$	
BMAT1	(IGADIA)	C*16	行列 $B$ の対角要素 (逆ベキ法で解くとき使用)	
AMAT1	(IGADIA)	C*16	行列 $A$ の対角要素 (逆ベキ法で解くとき使用)	
REVAL	-	R*8	固有値 $\lambda$ (逆ベキ法で解くとき使用)	
CEVEC	(IGAN2)	C*16	固有ベクトル $\vec{x}$ (逆ベキ法で解くとき使用)	
XAX	-	C*16	$(\vec{x}, A\vec{x})$	
XBX	-	C*16	$(\vec{x}, B\vec{x})$	
XAXXBX	-	C*16	$(\vec{x}, A\vec{x}) / (\vec{x}, B\vec{x})$	
MSIZE	-	I	対角行列 1 次元配列格納情報	
NUB	11	I	対角行列 1 次元配列格納情報	
NDIM	-	I	対角行列 1 次元配列格納情報	
BMAT2	(IANT,IANT)	C*16	行列 $B$ の対角要素	
AMAT2	(IANT,IANT)	C*16	行列 $A$ の対角要素	

※

P : 計算パラメータ

M : MARGID からの入力データ

## 配列の大きさの定義

- IAN  $\geq$  NDIV + 1 (NDIV :  $z$ の分割数)
- IAN2  $\geq$  2 · (NDIV + 1)  
(ISLOPT=0 のとき使う配列の大きさ)
- IGADIA  $\geq$  行列 A, B の対角要素数 (対角行列の幅は 9)  
 $\geq$  9 · 2 · (NDIV + 1) - 20  
(ISLOPT=1,2 のとき使う配列の大きさ)
- IGAN2  $\geq$  2 · (NDIV + 1)  
(ISLOPT=1 のとき使う配列の大きさ)
- IANT  $\geq$  2 · (NDIV + 1)  
(ISLOPT=2 のとき使う配列の大きさ)

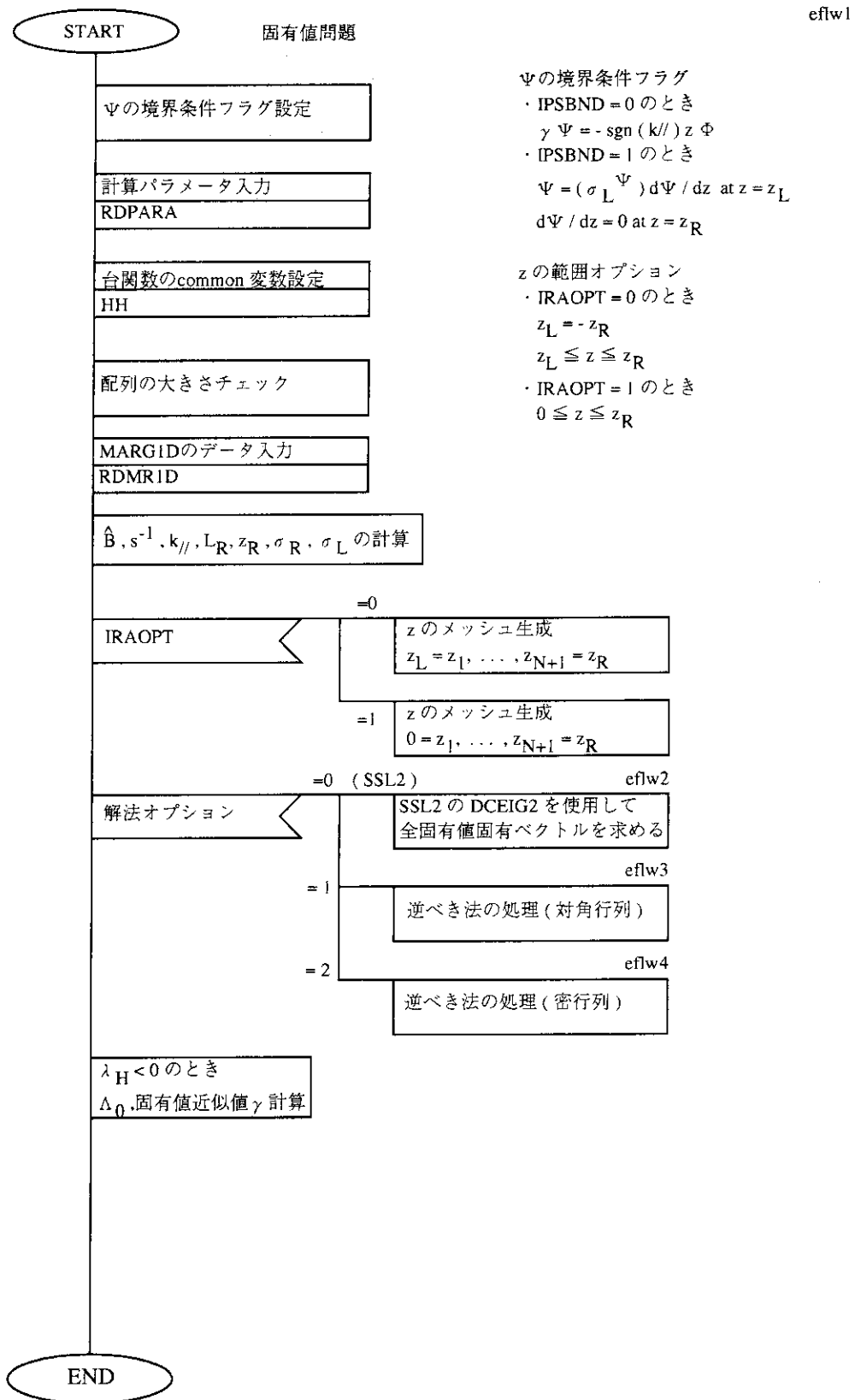
## B.4 固有値問題のサブルーチン一覧

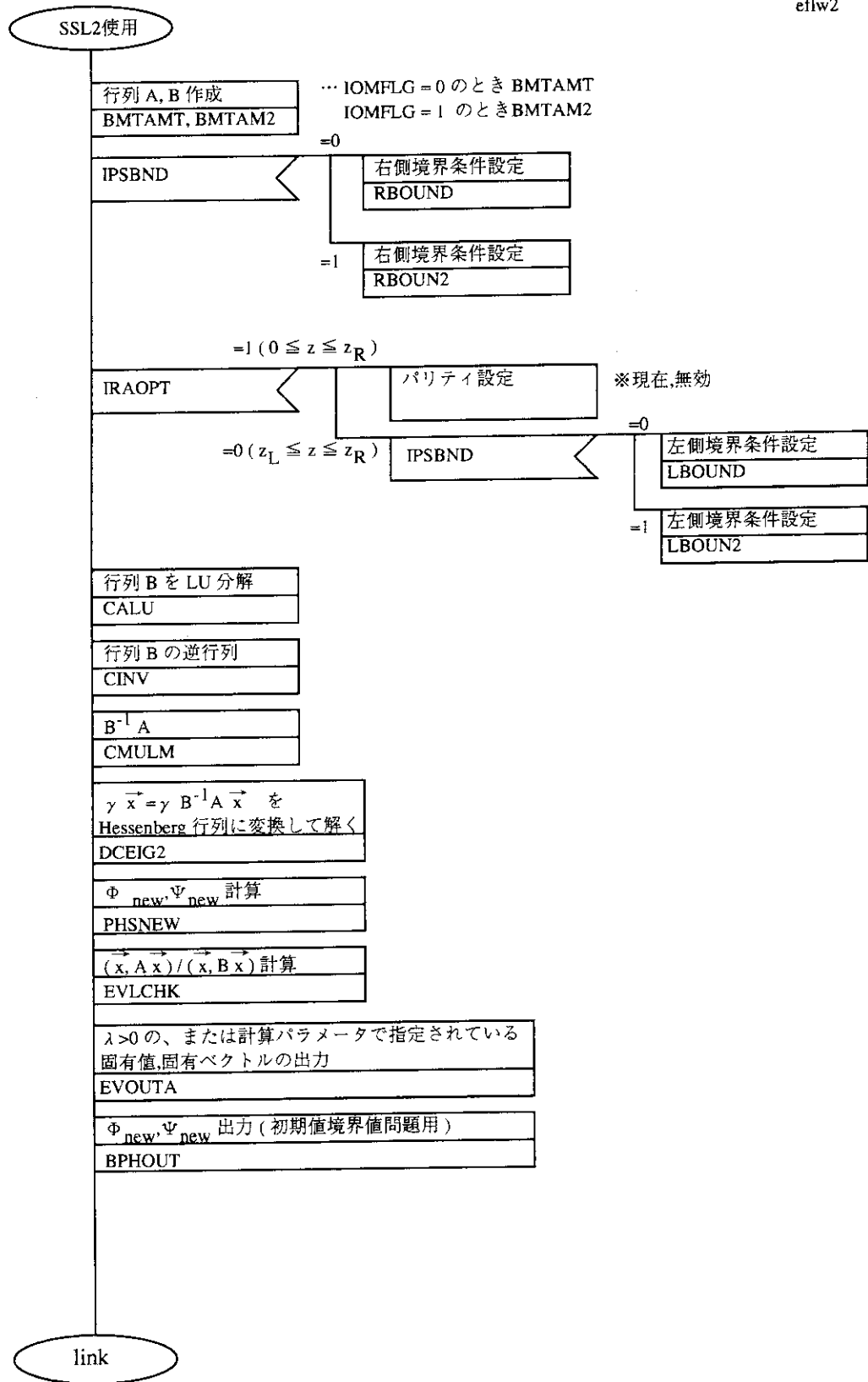
名称	内容
RDPARA	計算パラメータ読み込み
RDMR1D	MARG1D のデータ読み込み
<u>SSL2 の DCEIG2 で解く ( ISLOPT = 0 ) とき実行</u>	
BMTAMT	行列 $A, B$ 作成
RBOUND	右側境界条件 (IPSBND = 0)
RBOUN2	右側境界条件 (IPSBND = 1)
LBOUND	左側境界条件 (IPSBND = 0)
LBOUN2	左側境界条件 (IPSBND = 1)
EVOUTA	全固有値、全固有ベクトルを出力
EVLCHK	$(\vec{x}, A\vec{x})/(\vec{x}, B\vec{x})$ 計算
PHSNEW	$\Phi, \Psi$ を $\Phi_{new}, \Psi_{new}$ に変換
BPHOUT	$\Phi_{new}, \Psi_{new}$ ファイル出力 (シミュレーション初期値用)
<u>逆ベキ法で解く (対角行列)( ISLOPT = 1 ) とき実行</u>	
DBMAM	行列 $A, B$ 作成 (対角要素を 1 次元配列に格納)
DRBND0	右側境界条件 (IPSBND = 0)
DRBND1	右側境界条件 (IPSBND = 1)
DLBND0	左側境界条件 (IPSBND = 0)
DLBND1	左側境界条件 (IPSBND = 1)
PHSOUT	$\Phi_{new}, \Psi_{new}$ ファイル出力 (ASCII データ)
BPHOU2	$\Phi_{new}, \Psi_{new}$ ファイル出力 (シミュレーション初期値用)
CEGNVL	逆ベキ法で固有値問題を解く (対角行列)(C*16)
CBMATY	行列とベクトルの演算 $\vec{y} = A\vec{x}$ ( C*16 ) 行列 $A$ は 1 次元配列に格納された対角行列
CLDUCM	行列を LU 分解する ( C*16 )
CTRIAN	LU 分解した行列を使って 1 次方程式を解く ( C*16 )
<u>逆ベキ法で解く (密行列)( ISLOPT = 2 ) とき実行</u>	
CEGNV1	逆ベキ法で固有値問題を解く (密行列)(1 次元配列)(C*16) sub CALU, CINV を使用
CEGNV2	逆ベキ法で固有値問題を解く (密行列)(2 次元配列)(C*16) sub CLAX を使用

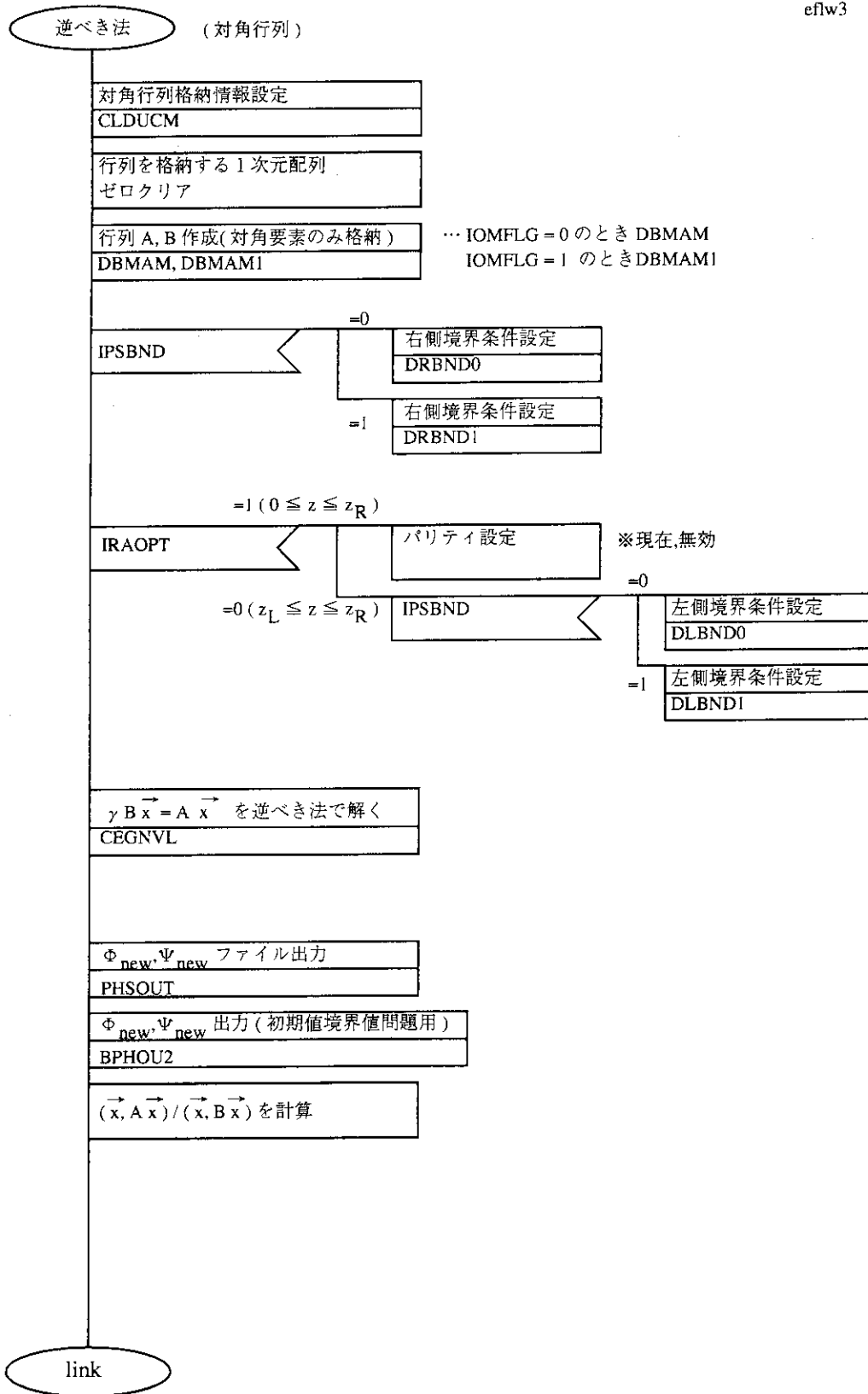


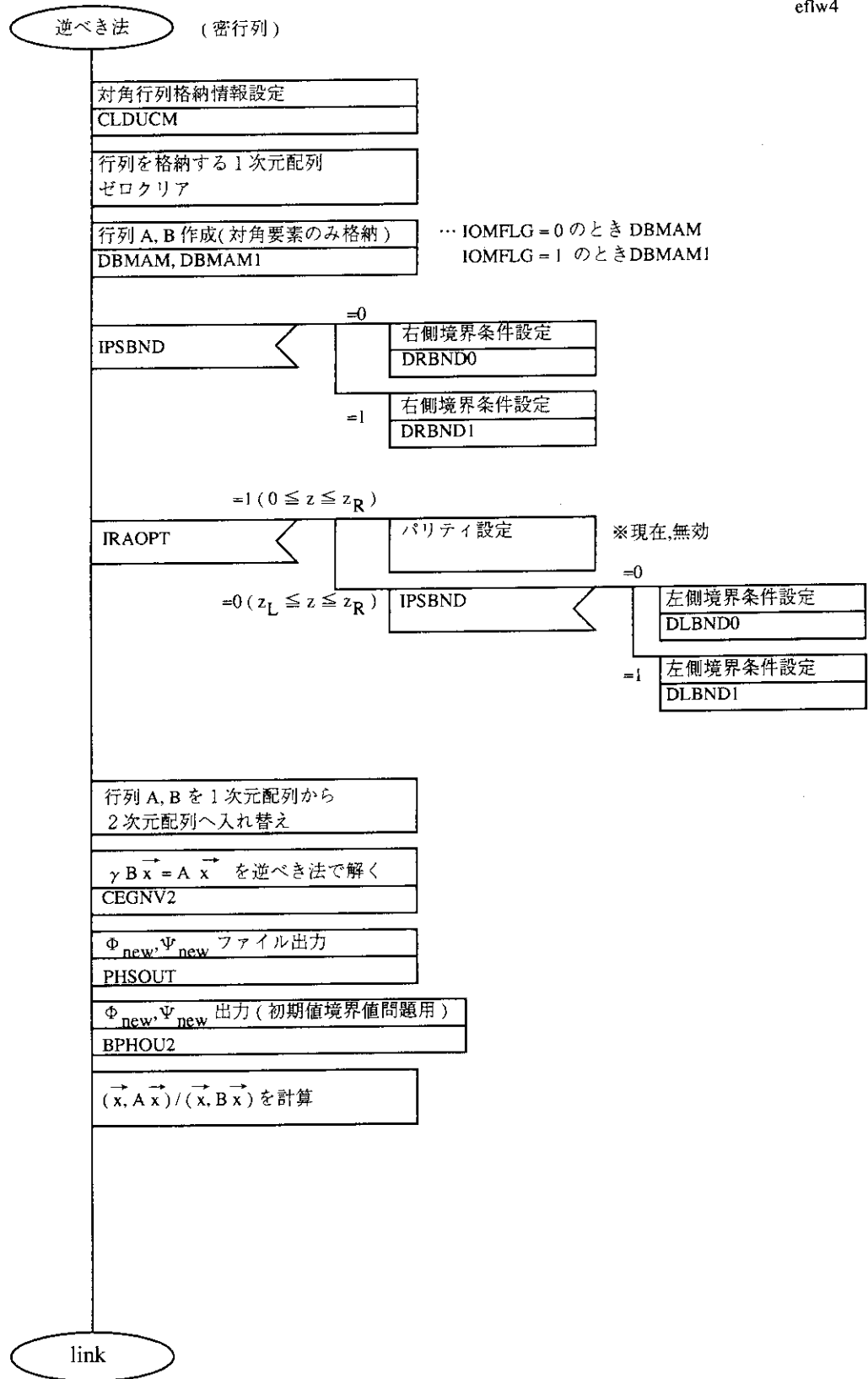
<u>名称</u>	<u>内容</u>
CMULM	行列演算 $C = AB$ (2次元配列)( C*16 )
CMULMV	行列とベクトルの演算 $\vec{y} = A\vec{x}$ (2次元配列)( C*16 )
CMULM1	行列演算 $C = AB$ (密行列,1次元配列)( C*16 )
CMLMV1	行列とベクトルの演算 $\vec{y} = A\vec{x}$ (密行列,1次元配列)( C*16 )
CVECPR	ベクトル演算 $z = \vec{x} \cdot \vec{x}$ ( C*16 )
CALU	行列を LU 分解 (密行列,1次元配列) ( C*16 )
CINV	LU 分解した行列から逆行列計算 (密行列,1次元配列) ( C*16 )
CLAX	1次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ を解く (2次元配列)( C*16 ) ピボットイング有

### B.5 プログラム・フロー









## 付録 C 初期値・境界値問題のプログラム仕様

## C.1 入力データ

## 1. 計算パラメータ

項目	配列	型	意味	default 値
THETA	-	R*8	$\theta$	0.5
ZRIGHT	-	R*8	$z_R$	10.0
NDIV	-	I	$z$ の分割数	100
DLTTAU	-	R*8	$U, \Phi, \Psi$ 計算時間間隔 $\Delta\tau$	0.1
NTAU	-	I	時刻計算回数	10
OUTTAU	-	R*8	$U, \Phi, \Psi$ を ASCII でファイル出力 する時間間隔 $\Delta\tau_0$ $\Delta\tau_0 = n\Delta\tau$ とする	0.5
RLAMBH	-	R*8	$\lambda_H$	1.0
PHISCL	-	R*8	$\Phi$ の初期値のスケール	0.001
IOMFLG	-	I	台関数導入フラグ = 0 : 導入しない = 1 : 導入する	0

## 2. MARG1D のデータ

項目	配列	型	意味
ASPCT	-	R*8	アスペクト比 $A$
RRAT	-	R*8	有理面 $\hat{r}_0$
MM	-	I	ポロイダル・モード数 $m$
RMU	-	R*8	Mercier index $\mu$
DELTAR	-	R*8	接続データ $\Delta_R$
DELTAL	-	R*8	接続データ $\Delta_L$
QRAT	-	R*8	有理面における安全係数 $q(r_0)$
DQDRRA	-	R*8	有理面における $dq/dr$
FRAT	-	R*8	有理面における $\hat{F}$

3.  $\Phi, \Psi$ 初期値

固有値問題の解 $\Phi^e, \Psi^e$ を $\Phi$ の初期値 $\Phi^0$ 、 $\Psi$ の初期値 $\Psi^0$ とする。

固有値問題における  $z$ の両端を  $z_L^e, z_R^e$ とすると、 $z < z_L^e$ のとき

$$\begin{aligned}\Phi^0(z) &= \Phi^e(z_L^e) \\ \Psi^0(z) &= \Psi^e(z_L^e) - \frac{z_L^e - z}{z_2^e - z_1^e}(\Psi_2^e - \Psi_1^e)\end{aligned}$$

$z > z_R^e$ のとき

$$\begin{aligned}\Phi^0(z) &= \Phi^e(z_R^e) \\ \Psi^0(z) &= \Psi^e(z_R^e)\end{aligned}$$

$z_L^e \leq z \leq z_R^e$  のとき、固有値問題と初期値境界値問題のグリッド点が異なる場合は、Lagrange 補間 (2次) を使う。

$$\Phi_0 \leftarrow \Phi_0 \times (\text{計算パラメータのスケール})$$

$$\Psi_0 \leftarrow \Psi_0 \times (\text{計算パラメータのスケール})$$

とする。

## C.2 出力データ

計算結果を以下のファイルへ書き出す。

<u>ファイル名</u>	<u>内容</u>
OUTn.DATA	$z, \Phi^n, \Psi^n, \partial^2 \Psi^n / \partial z^2$ (ASCII データ) ( $\partial^2 \Psi^n / \partial z^2 = \frac{\Psi_{j+1}^n - 2\Psi_j^n + \Psi_{j-1}^n}{2\Delta z}$ )
BPHI.dat	$\Phi$ (BINARY データ)
BPSI.dat	$\Psi$ (BINARY データ)
BPSD.dat	$\partial^2 \Psi / \partial z^2$ (BINARY データ)
HZ.DATA	台関数 $H(z)$ (ASCII データ)
NORM.DATA	$\log \ \Phi^n\ , \log \ \Psi^n\ $ (ASCII データ)

## C.3 主な変数

変数名	配列	型	意味	※
THETA	-	R*8	$\theta$	P
ZRIGHT	-	R*8	$z_R$	P
ZLEFT	-	R*8	$z_L (= -z_R)$	
Z	(IAN)	R*8	$z_j, j = 1, \dots, N + 1$	
DELTAZ	-	R*8	$\Delta z$	
NDIV	-	I	$z$ の分割数	P
SIGMAR	-	R*8	$\bar{\sigma}_R$	
SIGMAL	-	R*8	$\bar{\sigma}_L$	
SIGPSL	-	R*8	$\sigma_L^\Psi$	
DLTTAU	-	R*8	$U, \Phi, \Psi$ 計算時間間隔 $\Delta\tau$	P
NTAU	-	I	時刻計算回数	P
OUTTAU	-	R*8	$U, \Phi, \Psi$ 出力時間間隔 $\Delta\tau_o$ $\Delta\tau_o = n\Delta\tau$ とする	P
RLAMBH	-	R*8	$\lambda_H$	P
PHISCL	-	R*8	$\Phi$ の初期値のスケール	P
IOMFLG	-	I	台関数導入フラグ = 0 : 導入しない = 1 : 導入する	P
IPSBND	-	I	$\Psi$ の境界条件選択 (メインプログラムで設定) = 0 のとき $\gamma\Psi = -\text{sgn}(k_{  })z\Phi$ = 1 のとき $\Psi = \sigma_L^\Psi \frac{d\Psi}{dz}$ at $z = z_L$ ( $\sigma_L^\Psi = z_L + \lambda_H/\pi$ ) $\frac{d\Psi}{dz} = 0$ at $z = z_R$	
ASPCT	-	R*8	アスペクト比 $A$	M
RRAT	-	R*8	有理面 $\hat{r}_0$	M
MM	-	I	$m$	M
RMU	-	R*8	Mercier index $\mu$	M
DELTAR	-	R*8	接続データ $\Delta_R$	M
DELTAL	-	R*8	接続データ $\Delta_L$	M
QRAT	-	R*8	有理面における安全係数 $q(r_0)$	M
DQDRRA	-	R*8	有理面における $dq/dr$	M
FRAT	-	R*8	有理面における $\hat{F}$	M
TAU	(IAT)	R*8	時刻 $\tau$	
BRAT	-	R*8	有理面における $\hat{B}$	
SINVR5	-	R*8	$s^{-1}$	
RLR	-	R*8	$L_R$	
RKPARA	-	R*8	$k_{  }$	
SGNKPA	-	R*8	$\text{sgn}(k_{  })$	



変数名	配列	型	意味	※
PHIB	(IAN)	R*8	$\Phi_j^n, j = 1, \dots, N + 1$	
PHI	(IAN)	R*8	$\Phi_j^{n+1}, j = 1, \dots, N + 1$	
PSIB	(IAN)	R*8	$\Psi_j^n, j = 1, \dots, N + 1$	
PSI	(IAN)	R*8	$\Psi_j^{n+1}, j = 1, \dots, N + 1$	
PSNORM	(IAT)	R*8	$\ \Psi^n\ $	
PHNORM	(IAT)	R*8	$\ \Phi^n\ $	
UVEC	(IAN*2)	R*8	$\vec{u}$	
AMAT	(IAN*2*9)	R*8	行列 $A$ の対角要素	
NEGN	-	I	固有値問題の $0 \leq z \leq z_R$ の分割数 $N_e$	
PHIEGN	(IAN)	R*8	固有値問題の $\Phi_j^e$	
PSIEGN	(IAN)	R*8	固有値問題の $\Psi_j^e$	
ZEGN	(IAN)	R*8	固有値問題の $z^e$	
EBMAT	(IAN*2*9)	R*8	固有値問題の行列 $B$	
EAMAT	(IAN*2*9)	R*8	固有値問題の行列 $A$	
RWKGMM	-	R*8	$\gamma = (\vec{x}, A\vec{x}) / (\vec{x}, B\vec{x})$ ( $\vec{x}$ は最終時刻における $\Phi, \Psi$ のベクトル)	

※

P : 計算パラメータ

M : MARG1D からの入力データ

配列の大きさの定義

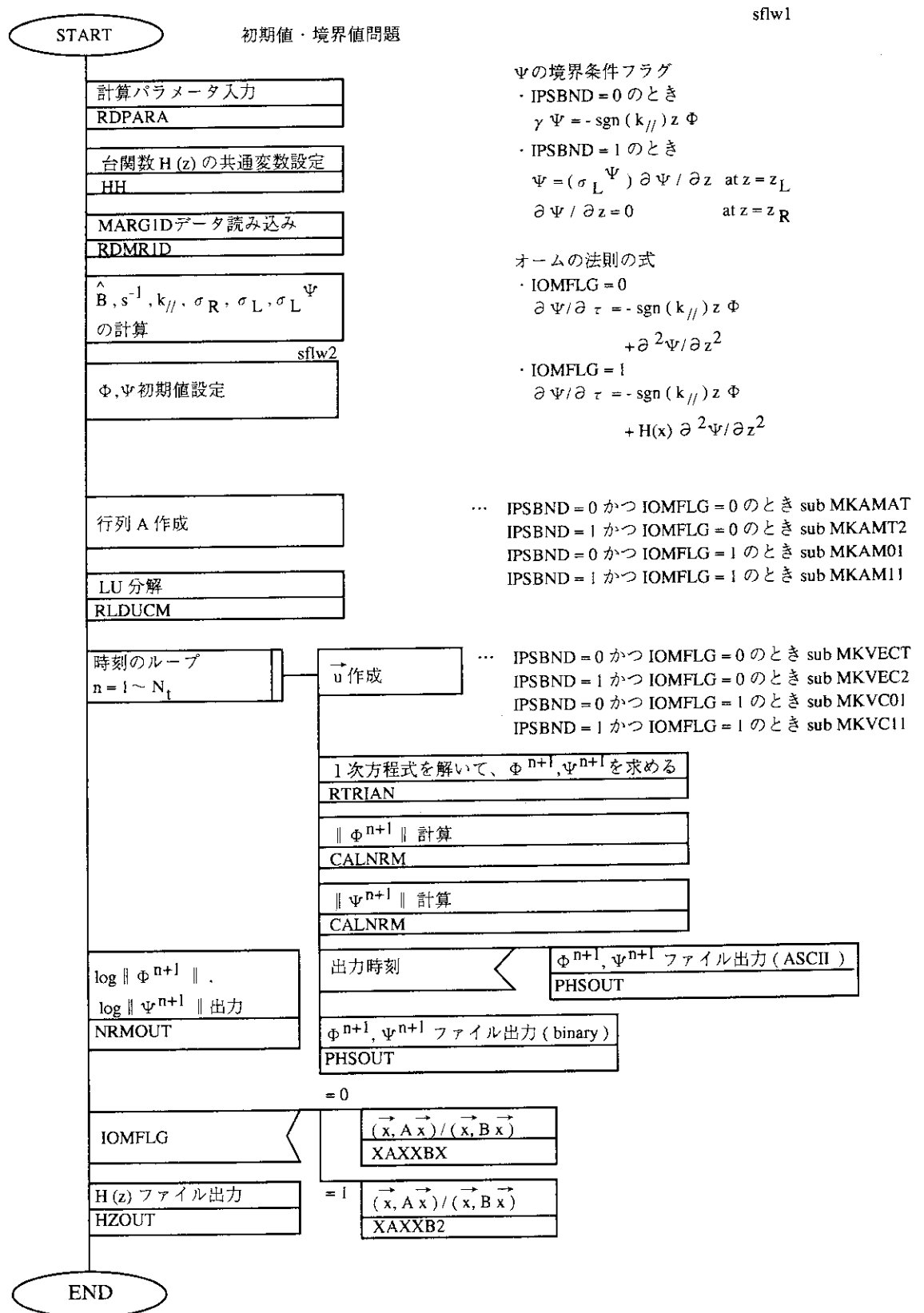
IAN  $\geq$  NDIV + 1 (NDIV :  $z$  の分割数)IAT  $\geq$  NTAU (NTAU : 時刻計算回数)

## C.4 サブルーチン一覧

名称	内容
RDPARA	計算パラメータ読み込み
RDMR1D	MARG1D のデータ読み込み
PHSINT	固有値問題の解 $\Phi, \Psi$ を入力して、 $\Phi, \Psi$ 初期値設定
PHSOUT	$\Phi^{n+1}, \Psi^{n+1}$ ファイル出力 ( ASCII データ )
PHSOU7	$\Phi, \Psi, \partial^2 \Psi / \partial z^2$ ファイル出力 ( BINARY データ )
NRMOUT	$\ \Phi^{n+1}\ , \ \Psi^{n+1}\ $ ファイル出力
CALNRM	$\ \Phi^{n+1}\ $ または $\ \Psi^{n+1}\ $ 計算
MKAMAT	行列 $A$ を作成 ( IPSBND = 0, IOMFLG = 0 )
MKAMT2	行列 $A$ を作成 ( IPSBND = 1, IOMFLG = 0 )
MKAM01	行列 $A$ を作成 ( IPSBND = 0, IOMFLG = 1 )
MKAM11	行列 $A$ を作成 ( IPSBND = 1, IOMFLG = 1 )
MKVECT	$\vec{u}$ を作成 ( IPSBND = 0, IOMFLG = 0 )
MKVEC2	$\vec{u}$ を作成 ( IPSBND = 1, IOMFLG = 0 )
MKVC01	$\vec{u}$ を作成 ( IPSBND = 0, IOMFLG = 1 )
MKVC11	$\vec{u}$ を作成 ( IPSBND = 1, IOMFLG = 1 )
XAXXBX	$(\vec{x}, A\vec{x}) / (\vec{x}, B\vec{x})$ ( IPSBND = 0 )
XAXXB2	$(\vec{x}, A\vec{x}) / (\vec{x}, B\vec{x})$ ( IPSBND = 1 )
RLDUCM	行列を LU 分解する ( REAL*8 )
RTRIAN	LU 分解した行列から 1 次方程式を解く ( REAL*8 )
RVCPRO	$\vec{x} \cdot \vec{y}$ ( REAL*8 )
RDMLMV	対角行列とベクトルの積 $M\vec{x}$ ( REAL*8 )
HH	台関数 $H(z)$ の共通変数設定
HZOUT	台関数 $H(z)$ ファイル出力 ( ASCII データ )
H (f)	台関数 $H(z)$
HP (f)	$dH/dz$
H2 (f)	$d^2 H/dz^2$
FUNLAG (f)	Lagrange 補間 ( 2 次 )

(f) はファンクションである。

C.5 プログラム・フロー



sflw2

