

JAERI-Research

96-057



負磁気シア配位における  
抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論

1996年11月

徳田伸二・渡邊朋子\*

日本原子力研究所  
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1996

編集兼発行 日本原子力研究所  
印刷 (株)原子力資料サービス

負磁気シア配位における  
抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部  
徳田 伸二・渡邊 朋子\*

(1996年10月4日受理)

有理面が2枚ある負磁気シア配位における抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論とその数値解法を提示する。この理論では、理想MHD領域における Newcomb方程式と有理面のまわりの内部層方程式を解くことを有限要素法や差分法解法の適用できる境界値問題・固有値問題として定式化する。したがって、安定性解析の問題を数値的に安定な解法で解くことができる。解析解が既知であるモデル方程式に対して、提案した数値解法を負磁気シア配位に適用し、解析解との比較からこの理論の妥当性を検証した。

Theory of Asymptotic Matching  
for Resistive Magnetohydrodynamic Stability  
in a Negative Magnetic Shear Configuration

Shinji TOKUDA and Tomoko WATANABE\*

Department of Fusion Plasma Research  
Naka Fusion Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received October 4, 1996)

A theory and a numerical method are presented for the asymptotic matching analysis of resistive magnetohydrodynamic stability in a negative magnetic shear configuration with two rational surfaces. The theory formulates the problem of solving both the Newcomb equations in the ideal MHD region and the inner-layer equations around rational surfaces as boundary value/eigenvalue problems to which the finite element method and the finite difference method can be applied. Hence, the problem of stability analysis is solved by a numerically stable method. The present numerical method has been applied to model equations having analytic solutions in a negative magnetic shear configuration. Comparison of the numerical solutions with the analytical ones verifies the validity of the numerical method proposed.

Keywords: Resistive MHD Stability, Negative Magnetic Shear Configuration, Tokamak, Rational Surface, Newcomb Equation, Inner-layer Equation, Dispersion Relation, Eigenvalue Problem, Boundary Value Problem

---

\* Research Organization for Information Science & Technology

## 目 次

1. 序 論 .....	1
2. 負磁気シア配位での Newcomb方程式の接続問題 .....	3
3. 例 題 .....	5
3.1 臨界安定な場合 .....	5
3.2 $O(\epsilon^2)$ の補正 .....	8
4. 接続問題を境界値問題に変換すること .....	10
5. 内部層方程式に対する境界条件 .....	13
6. モデル方程式に対する分散関係式 .....	17
6.1 通常配位の場合 .....	17
6.2 負磁気シア配位の場合 .....	19
7. テスト計算 .....	23
7.1 数値計算法の概要 .....	23
7.2 テスト計算結果 .....	24
8. 要約と議論 .....	26
謝 辞 .....	26
参考文献 .....	27
付録A モデル方程式の解析解 .....	42
付録B プログラム仕様 .....	47

# 1 序 論

トカマク炉を効率的にするため、閉じ込め電流の大部分(たとえば80%以上)をブートストラップ電流でまかなうことが提案されている[1]。ブートストラップ電流の性質より、このような運転では閉じ込め電流は凹状になり、その結果、安全係数 $q$ の分布が単調増加でない負磁気シア配位になる。最近、JT-60Uを始めとする大型トカマクでこの負磁気シア配位の実験が行われ、内部輸送障壁の形成等、従来の閉じ込めとは著しく異なる特性が発見され、この配位はトカマクの閉じ込めの革新的な方法として着目されている[2]。

この負磁気シア配位では、磁気流体力学(MHD)的モードの安定性も通常の磁気シア配位と著しく異なることが予想される。

このMHDモードのうち、プラズマの持つ電気抵抗(および他の散逸効果)によって不安定になる抵抗性MHDモードはプラズマの閉じ込めに深刻な影響を与えると考えられているため、負磁気シア配位での抵抗性MHDモードの安定性解析の確立が望まれる。抵抗性MHD安定性理論において、負磁気シア配位と通常の磁気シア配位との大きな差異は、対象とするモードに対して有理面が2枚存在する場合があることである。有理面が1枚の場合、漸近接続法[3]に基づく安定性解析理論は良く知られているけれども、それを2枚有理面の場合に適用することはできない。漸近接続法では、プラズマの領域を有理面から離れた外部領域(理想MHD領域)と有理面のまわりの薄い層である内部層領域とに分ける。外部領域ではプラズマは慣性および電気抵抗を無視した理想MHD方程式(Newcomb方程式)で記述される。一方、内部層では、プラズマは、慣性や電気抵抗(および他の散逸効果)を無視しないけれども、連立常微分方程式系に簡約された内部層方程式で記述される。内部層方程式は、対象としているモードの成長率 $\gamma$ をパラメータとして含んでおり、境界条件を満たすNewcomb方程式の解と内部層方程式の解とが漸近的に接続される条件から成長率が決定される。

Newcomb方程式では有理面は確定特異点になっており、その点のまわりでのNewcomb方程式のFrobenius解は自乗可積分でないべき解(大きい解)と自乗可積分なべき解(小さい解)とからなっている。Newcomb方程式の解は確定特異点のまわりでは大きい解と小さい解の重ね合わせで表現され、その混合比は外部領域での「外部領域接続データ」と呼ばれ漸近接続法で重要な役割をはたす。我々は、Newcomb方程式の大域的な解を境界値問題として有限要素法に基づいて数値的に解き、その数値解から漸近接続に接続データを求める方法を文献[4]に報告した。次に、内部層方程式では理想MHD領域に対応する無限遠点は不確定特異点になっている。したがって、漸近接続の条件は、無限遠点での内部層方程式の解が外部解と同じ2つのべき解の重ね合わせで表せ、その混合比(内部層接続データ)が外部領域接続データに等しいという条件で表せる。この条件から導かれる、成長率 $\gamma$ について超越方程式は分散関係式と呼ばれ、この分散関係式より $\gamma$ が固有値として決定される。この内部層方程式に対して、我々は、最近、従来の方法である分散関係式の数値解法に代えて、接続問題を有限区間の内部層方程式の初期値・境界値問題、および、それに

伴う固有値問題として解く方法を提案し、接続問題が数値的に安定な固有値問題として解けることを示した。

本報告書では文献 [4]、[5] の方法を円柱プラズマ・モデルで 2 枚有理面の場合に拡張する。

各有理面における内部層方程式は、その導き方から明らかなように、一方の有理面における内部層方程式と結合することはない。しかし、文献 [5] で用いている定式化では内部層方程式に対する境界条件は Newcomb 方程式の「大域的な解」から決定されるため、各々の有理面における内部層方程式は一方の有理面の存在を境界条件を通じて知ることになる。内部層方程式に対する結合した境界条件を得るためには、外部領域における Newcomb 方程式を 2 点境界値問題として解く必要がある。1 枚有理面の場合、2 つある境界点のうち 1 点は有理面でなく、そこでの境界条件の設定には困難はない。しかし 2 枚有理面の場合は事情が異なる。この場合、両方の有理面 (境界点) で大域解は「大きい解」を含み得る。この大域解を文献 [4] で論じた変分原理の枠内にとらえ、境界値問題として解くためには、2 枚有理面の場合での Newcomb 方程式の大域解とは何かを再考する必要がある。

本報告書の第 2 章で有理面が 2 枚ある場合に Newcomb 方程式の大域解を構成する問題を常微分方程式の確定特異点のまわりの局所解 (Frobenius 解) を他の確定特異点まで接続する接続問題 [6] としてとらえ、第 3 章で、その簡単な例題として、臨界安定に近い  $m = 1/n = 1$  モードの Newcomb 方程式に対して接続問題を解く。次に、第 4 章では、第 2 章で論じた Newcomb 方程式の接続問題を境界値問題に変換する。これによって、文献 [4] で論じている変分原理が適用できる。また、接続問題としてとらえることにより、各々の有理面のまわりの内部層方程式の解に対する境界条件を設定することができる。そして、この境界条件の設定に際して文献 [5] の方法を適用することができる。これについて第 5 章で論じる。第 6 章では、ゼロ・ベータ近似の内部層方程式をモデル方程式として、2 枚有理面の場合の分散関係式を解析的に求める。このとき、境界条件の設定に際しては第 3 章の例題の結果を用いる。次に、第 7 章で同じ問題を数値的に解き、本報告書で提案する数値計算法の妥当性を検証する。第 8 章では本報告書の要約と議論を与える。また、ゼロ・ベータ近似での内部層方程式の解析解を付録 A に、数値計算のために開発したプログラムのドキュメントを付録 B に載せる。なお、第 2 章で導かれた境界値問題の有限要素法による数値解法は引き続いて刊行する報告書で報告する予定である。

## 2 負磁気シア配位での Newcomb 方程式の接続問題

有理面が 2 枚ある場合の大域解を  $m = n = 1$  の Newcomb 方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( f(x) \frac{d\xi}{dx} \right) - \epsilon^2 g(x) \xi(x) &= 0 \\ f(x) &= \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} - 1 \right)^2 \\ g(x) &= \frac{2x^2}{1 + \epsilon^2 x^2} \left[ \frac{1}{\epsilon^2} \frac{dp}{dx} \right] \\ &\quad + F^2 \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} - 1 \right) \left[ \left( \frac{1}{q} - 1 \right) - \frac{2}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} + 1 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

を例にとって論じる。ここで独立変数  $x$  の区間は  $0 \leq x \leq 1$  であり、図 2.1 に示されるように点  $x_1, x_2$  が  $q = 1$  の有理面で、 $0 < x_1 < x_2 < 1$  とする。このような配位では方程式 (2.1) の大域解として 3 種類の解  $\xi_L(x)$ 、 $\xi_R(x)$  および  $\xi(x)$  が存在する。そのうち、左側および右側の解  $\xi_L(x)$ 、 $\xi_R(x)$  は

$$\xi_L(x) \neq 0, \quad x < x_1, \quad \xi_L(x) \equiv 0, \quad x > x_1 \quad (2.2)$$

$$\xi_R(x) \neq 0, \quad x > x_2, \quad \xi_R(x) \equiv 0, \quad x < x_2 \quad (2.3)$$

であり、それらの構成法は 1 枚有理面の場合と同じである。一方、 $\xi(x)$  は、2 枚の有理面にはさまれた区間  $(x_1, x_2)$  でのみ非ゼロで他の区間では恒等的にゼロである：

$$\xi(x) \neq 0, \quad x_1 < x < x_2, \quad \xi(x) \equiv 0, \quad x < x_1 \quad \text{or} \quad x > x_2 \quad (2.4)$$

大域解  $\xi(x)$  は両端  $x_1, x_2$  で大きい解を含むことができる。もし、 $\epsilon^2 = 0$  のとき

$$\xi(x) = 1, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (2.5)$$

は方程式 (2.1) の解である。以下、一般的な場合について大域解  $\xi(x)$  の構成法を考える。

$x_1$  の近傍  $(x_1, x_1 + \rho_1)$  ( $\rho_1 > 0$ ) での Newcomb 方程式の 2 つの 1 次独立な解を  $\xi_1^{(b)}(x)$ 、 $\xi_2^{(s)}(x)$  とおく。  $\xi_1^{(b)}(x)$  は  $x = x_1$  で大きい解、 $\xi_2^{(s)}(x)$  は小さい解であり、ともに  $x = x_1$  のまわりで局所的に Frobenius 級数で表現される。ただし、 $\xi_1^{(b)}(x)$  は  $x = x_1$  で小さい解を含んでもよい。同様に、 $x_2$  の近傍  $(x_2 - \rho_2, x_2)$  ( $\rho_2 > 0$ ) で Frobenius 級数で表現される Newcomb 方程式の 1 次独立な解 (局所解) を  $\zeta_1^{(b)}(x)$ 、 $\zeta_2^{(s)}(x)$  とおく。

次に、点  $x_1$  のまわりの局所解  $\xi_1^{(b)}(x)$ 、 $\xi_2^{(s)}(x)$  を点  $x_2$  まで解析接続する。解析接続して得られた関数を  $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$  とおくと、それらは Newcomb 方程式の大域解であり、 $x \in (x_1, x_1 + \rho_1)$  のとき

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= \xi_1^{(b)}(x) \\ y_2(x) &= \xi_2^{(s)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$



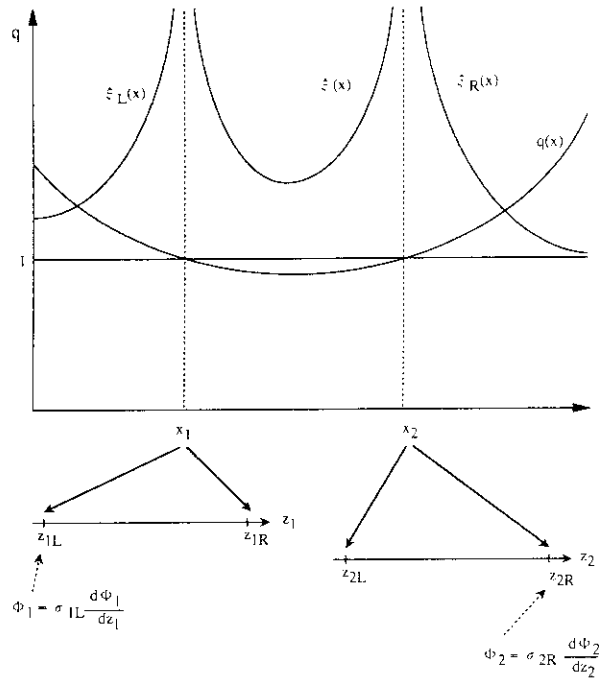


図 2.1:

負磁気シア配位での 2 枚有理面問題。  $x_1, x_2$  は  $q = 1$  の有理面である。  $\xi_L(x)$  は  $x < x_1$  のみ、  $\xi_R(x)$  は  $x > x_1$  のみ非ゼロ、また、  $\xi(x)$  は 2 枚の有理面  $x_1, x_2$  にはさまれた区間でのみ非ゼロである。

である。一方、  $x \in (x_2 - \rho_2, x_2)$  では  $\zeta_1^{(b)}(x), \zeta_2^{(s)}(x)$  は Newcomb 方程式の 1 次独立な解であるので、  $y_j(x) (j = 1, 2)$  は  $x \in (x_2 - \rho_2, x_2)$  では

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= T_{11}\zeta_1^{(b)}(x) + T_{12}\zeta_2^{(s)}(x) \\ y_2(x) &= T_{21}\zeta_1^{(b)}(x) + T_{22}\zeta_2^{(s)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

と表される。そして各定数  $T_{jk}$  から作られる行列

$$T = (T_{jk}) \quad (2.8)$$

は点  $x_1$  での局所解  $\xi_1^{(b)}(x), \xi_2^{(s)}(x)$  と点  $x_2$  での局所解  $\zeta_1^{(b)}(x), \zeta_2^{(s)}(x)$  とをつなぐ接続行列である [6]。したがって

「2 枚有理面のある場合の Newcomb 方程式を解くということは接続行列  $T$  を求めることである。」

そして、大域解  $y(x)$  は、  $c_1, c_2$  を任意定数として

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (2.9)$$

で表される。(2.7)式で特に

$$T_{21} = 0 \quad (2.10)$$

の場合を考えると、これは Newcomb 方程式  $\mathcal{L}\xi = 0$  が自明でない、自乗可積な大域解をもつことを意味する。すなわち、物理的には

$$T_{21} = 0 \Leftrightarrow \text{臨界安定な場合} \quad (2.11)$$

という命題が成立する。

### 3 例 題

方程式 (2.1) は  $\epsilon^2$  について逐次的に解けるので前章の結果 (2.7) 式を確認することができる。また、この例題の結果は、後で示す内部層方程式を数値的に解く場合の境界条件の設定に用いられる。

#### 3.1 臨界安定な場合

方程式 (2.1) で臨界安定な場合は

$$\mathcal{L}\xi = \frac{d}{dx} \left[ f(x) \frac{d\xi}{dx} \right] = 0 \quad (3.1)$$

となる。(3.1) 式の自乗可積な解は

$$\xi(x) \equiv 1 \quad (3.2)$$

であり、もう 1 つの解は

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{f(x)} \quad (3.3)$$

$$\xi(x) = - \int_x^{x_0} \frac{dz}{f(z)} + c \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで、 $c$  は定数、 $x_0 = (x_1 + x_2)/2$  である。定数  $c$  は  $x = x_1$  のまわりで  $\xi(x)$  が「大きい解」だけを含む条件から決めることができる。まず、(3.4) 式において

$$f(x) = f_{10}(x - x_1)^2 + f_{11}(x - x_1)^3 + \dots \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{(x - x_1)^2} \left[ 1 - \frac{f_{11}}{f_{10}}(x - x_1) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \frac{1}{x - x_1} + h_1(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

で表される。(2.7)式で特に

$$T_{21} = 0 \quad (2.10)$$

の場合を考えると、これは Newcomb 方程式  $\mathcal{L}\xi = 0$  が自明でない、自乗可積な大域解をもつことを意味する。すなわち、物理的には

$$T_{21} = 0 \Leftrightarrow \text{臨界安定な場合} \quad (2.11)$$

という命題が成立する。

### 3 例 題

方程式 (2.1) は  $\epsilon^2$  について逐次的に解けるので前章の結果 (2.7) 式を確認することができる。また、この例題の結果は、後で示す内部層方程式を数値的に解く場合の境界条件の設定に用いられる。

#### 3.1 臨界安定な場合

方程式 (2.1) で臨界安定な場合は

$$\mathcal{L}\xi = \frac{d}{dx} \left[ f(x) \frac{d\xi}{dx} \right] = 0 \quad (3.1)$$

となる。(3.1) 式の自乗可積な解は

$$\xi(x) \equiv 1 \quad (3.2)$$

であり、もう 1 つの解は

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{f(x)} \quad (3.3)$$

$$\xi(x) = - \int_x^{x_0} \frac{dz}{f(z)} + c \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで、 $c$  は定数、 $x_0 = (x_1 + x_2)/2$  である。定数  $c$  は  $x = x_1$  のまわりで  $\xi(x)$  が「大きい解」だけを含む条件から決めることができる。まず、(3.4) 式において

$$f(x) = f_{10}(x - x_1)^2 + f_{11}(x - x_1)^3 + \dots \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{(x - x_1)^2} \left[ 1 - \frac{f_{11}}{f_{10}}(x - x_1) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \frac{1}{x - x_1} + h_1(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

より

$$\int_{x_0}^x \frac{dz}{f(z)} = -\frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x-x_1} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log(x-x_1) + w_1(x) \\ + \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log(x_0-x_1) \quad (3.7)$$

を得る。(3.6)式で  $h_1(x)$  は  $x = x_1$  で解析的であり、(3.7)式の  $w_1(x)$  は

$$w_1(x) = \int_{x_0}^x h_1(x) dx \quad (3.8)$$

である。また、係数  $f_{10}$ 、 $f_{11}$  の具体形は付録 B で与えられている。任意定数  $c$  を

$$w_1(x_1) + \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log(x_0-x_1) + c = 0 \quad (3.9)$$

となるように、すなわち

$$c = -\frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x_0-x_1} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log|x_0-x_1| + \int_{x_1}^{x_0} h_1(z) dz \quad (3.10)$$

と選ぶ。このとき、(3.4)式は

$$\xi(x) = -\int_x^{x_0} \frac{dz}{f(z)} + c \quad (3.11)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x-x_1} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log(x-x_1), \quad x \rightarrow x_1 \quad (3.12)$$

となり、大きい解だけを含む。次に大域解(3.11)の  $x \rightarrow x_2$  での挙動を調べる。 $x \rightarrow x_2$  では、 $1/f(x)$  は

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{(x-x_2)^2} - \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \frac{1}{x-x_2} + h_2(x) \quad (3.13)$$

と展開できる。ここで  $h_2(x)$  は  $x = x_2$  で解析的である ( $f_{20}$ 、 $f_{21}$  に関しては付録 B を参照)。これを(3.11)式に代入して

$$\xi(x) = \frac{1}{f_{20}} \int_{x_0}^x \frac{dz}{(z-x_2)^2} - \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \int_{x_0}^x \frac{dz}{z-x_2} \\ + \int_{x_0}^x h_2(z) dz + c \quad (3.14)$$

すなわち

$$\xi(x) = -\frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x_0-x_2} - \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log|x-x_2| + \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log|x_2-x_0| \\ + \int_{x_0}^x h_2(z) dz + c \quad (3.15)$$

したがって、 $x \rightarrow x_2$ のとき

$$\xi(x) \rightarrow \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x_2 - x} - \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log |x - x_2| + d \quad (3.16)$$

$$d = \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x_0 - x_2} + \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log |x_2 - x_0| + \int_{x_0}^{x_2} h_2(z) dz + c \quad (3.17)$$

を得る。すなわち、 $x \rightarrow x_2$ では第2章で述べたように $\xi(x)$ は大きい解と小さい解が混合する。以上をまとめると

$$y_1(x) \rightarrow \frac{1}{x - x_1} + \dots \quad (3.18)$$

となる解は

$$y_1(x) = -f_{10}\xi(x) \quad (3.19)$$

で与えられる。このとき  $x \rightarrow x_2$ で

$$y_2(x) = -\frac{f_{10}}{f_{20}} \frac{1}{x_2 - x} - f_{10}d + \dots \quad (3.20)$$

である。方程式(3.1)のもう1つの1次独立な解は

$$y_2(x) \equiv 1 \quad (3.21)$$

である。これから、臨界安定な Newcomb 方程式の解

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (3.22)$$

は、 $x \rightarrow x_1$ で

$$y(x) \rightarrow \frac{c_1}{x - x_1} + c_2 \quad (3.23)$$

$x \rightarrow x_2$ で

$$y(x) \rightarrow \frac{c_1 \Lambda}{x_2 - x} + (c_1 \Delta_{12} + c_2) \quad (3.24)$$

であり、係数 $\Lambda$ 、 $\Delta_{12}$ は

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= -\frac{f_{10}}{f_{20}} \\ \Delta_{12} &= -f_{10}d \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

で与えられる。付録Bで示されているように係数 $f_{10}$ 、 $f_{20}$ は各有理面における磁気シアの自乗に比例するので、有理面 $x_2$ における大きい解と有理面 $x_1$ における大きい解の比は $x_1$ における磁気シアの自乗と $x_2$ における磁気シアの自乗の比(の符号を替えたもの)に比例することが分かる。

### 3.2 $O(\epsilon^2)$ の補正

次に、(3.1) 式で  $\epsilon^2 g(x)$  を残した場合を考える ( $g(x)$  は (2.1) 式で与えられている)。  $\epsilon^2 \neq 0, \epsilon^2 \ll 1$  に対して方程式 (2.1) の解で  $x = x_1$  で自乗可積な解  $\xi(x)$  を逐次近似で解いて解 (3.2) の  $O(\epsilon^2)$  の補正を求める。このとき、その補正は大きい解を含むことが示される。

まず、小さい解の  $O(\epsilon^2)$  の補正を求めておく。  $f(x)$  は  $x = x_1$  の近傍では (3.5) 式で、また、  $x = x_2$  の近傍で

$$f(x) = f_{20}(x - x_2)^2 + f_{21}(x - x_2)^3 + \dots \quad (3.26)$$

と展開できる。 Suydam index は

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{4\epsilon^2 g(x_1)}{f_{10}} \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\epsilon^2 g(x_1)}{f_{10}} + \dots \right) \quad (3.27)$$

および

$$b_{1s} = -\frac{1}{2} + \mu_1 = \epsilon^2 \frac{g(x_1)}{f_{10}} \quad (3.28)$$

より、  $x = x_1$  における小さい解は、  $O(\epsilon^2)$  の範囲で

$$\begin{aligned} (x - x_1)^{b_{1s}} &= (x - x_1)^{\epsilon^2 g(x_1)/f_{10}} = \exp \left[ \frac{\epsilon^2 g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) \right] \\ &= 1 + \epsilon^2 \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

で表される。同様に、  $x = x_2$  における小さい解も

$$(x_2 - x)^{b_{2s}} = 1 + \epsilon^2 \frac{g(x_2)}{f_{20}} \log(x_2 - x) + \dots \quad (3.30)$$

と表される。

$x = x_1$  で自乗可積な解を

$$\xi(x) = 1 + \epsilon^2 \eta(x) \quad (3.31)$$

とおくと、(2.1) 式から、  $\eta(x)$  は方程式

$$\frac{d}{dx} \left( f(x) \frac{d\eta}{dx} \right) = g(x) \quad (3.32)$$

を満足する。  $\eta(x)$  は  $x = x_1$  で小さい解だから

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad (3.33)$$

これより

$$f(x) \frac{d\eta}{dx} = w_1(x) \quad (3.34)$$

$$w_1(x) = \int_{x_1}^x g(y)dy = w_{10}(x - x_1) + \dots \quad (3.35)$$

$$w_{10} = \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=x_1} = g(x_1) \quad (3.36)$$

および

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{w_1(x)}{f(x)} \quad (3.37)$$

を得る。  $x \rightarrow x_1$  では

$$\frac{w_1(x)}{f(x)} \rightarrow \frac{w_{10}(x - x_1) + \dots}{f_{10}(x - x_1)^2 + \dots} = \frac{w_{10}}{f_{10}} \frac{1}{(x - x_1)} + h_1(x) \quad (3.38)$$

である ( $h_1(x)$  は  $x = x_1$  で解析的) ので、(3.37) 式を積分して、 $\eta(x)$  として

$$\eta(x) = \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) + \left[ \int_{x_0}^x h_1(y)dy - \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x_0 - x_1) + \alpha_1 \right] \quad (3.39)$$

を得る。ここで、 $x_0$  は  $x_1 < x_0 < x_2$  なる任意の点、 $\alpha_1$  は任意定数である。 $x \rightarrow x_1$  のとき、 $\xi(x)$  が  $O(\epsilon^2)$  の補正を持つ小さい解 (3.29) 式に近づく条件より、定数  $\alpha_1$  が決定され、それは

$$\alpha_1 - \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x_0 - x_1) = \int_{x_1}^{x_0} h_1(x)dx \quad (3.40)$$

である。これを (3.39) 式に使うと、 $\eta(x)$  として

$$\eta(x) = \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) + \int_{x_1}^x h_1(y)dy \quad (3.41)$$

を得る。次に関数  $\eta(x)$  の  $x \rightarrow x_2$  での挙動を求める。

$$h_1(x) = \frac{w_1(x)}{f(x)} - \frac{w_{10}}{f_{10}} \frac{1}{x - x_1} \quad (3.42)$$

は、 $x \rightarrow x_2$  で  $(x_2 - x)^{-2}$  のように発散する。 $x_0 = (x_1 + x_2)/2$  とおくと、 $x_0 < x < x_2$  に対しては

$$\eta(x) = \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) + \int_{x_1}^{x_0} h_1(x)dx + \int_{x_0}^x h_1(y)dy \quad (3.43)$$

である。 $x = x_2$  のまわりで

$$\frac{w_1(x)}{f(x)} = \frac{w_{-2,1}}{(x - x_2)^2} + \frac{w_{-1,1}}{x - x_2} + \dots \quad (3.44)$$

と展開できる。ここで

$$\left. \begin{aligned} w_{-2,1} &= \frac{w_1(x_2)}{f_{20}}, & w_{-1,1} &= \frac{1}{f_{20}} \left( \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=x_2} - \frac{f_{21}}{f_{20}} w_1(x_2) \right) \\ w_1(x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx, & \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=x_2} &= g(x_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

したがって

$$h_1(x) = \frac{w_{-2,1}}{(x-x_2)^2} + \frac{w_{-1,1}}{x-x_2} + w_{1r}(x) \quad (3.46)$$

であり、 $w_{1r}(x)$  は  $x = x_2$  で解析的である。これより

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x h_1(y)dy &= w_{-2,1} \int_{x_0}^x \frac{dy}{(y-x_2)^2} + w_{-1,1} \int_{x_0}^x \frac{dy}{y-x_2} + \int_{x_0}^x w_{1r}(y)dy \\ &= -w_{-2,1} \frac{2}{x_2-x_1} + w_{-1,1} \log\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \int_{x_0}^{x_2} w_{1r}(x)dx \\ &\quad + w_{-2,1} \frac{1}{x_2-x} - w_{-1,1} \log(x_2-x) \end{aligned} \quad (3.47)$$

以上より、 $x \rightarrow x_2$  で

$$\begin{aligned} \xi(x) &= 1 + \epsilon^2 \left[ \alpha_{22} + \beta_{21} \frac{1}{x_2-x} \right] \\ &= T_{21} \zeta_1^{(b)}(x) + T_{22} \zeta_2^{(s)}(x) \end{aligned} \quad (3.48)$$

とおいたとき、係数  $\alpha_{22}$ 、 $\beta_{21}$  の表式として

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x_2-x_1) + \int_{x_1}^{x_0} h_1(x)dx \\ &\quad - w_{-2,1} \frac{2}{x_2-x_1} + w_{-1,1} \log\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \int_{x_0}^{x_2} w_{1r}(y)dy \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\beta_{21} = w_{-2,1} = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx / f_{20} \quad (3.50)$$

を得る。以上をまとめると  $m = n = 1$  モードに対する接続行列は

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \Lambda = -f_{10}/f_{20}, & T_{12} &= -f_{10}d \\ T_{21} &= \epsilon^2 \beta_{21}, & T_{22} &= 1 + \epsilon^2 \alpha_{22} \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

で与えられる。我々に興味がある係数  $T_{21}$  は区間  $(x_1, x_2)$  におけるポテンシャル・エネルギーと有理面  $x_2$  における磁気シアとの比で与えられ、これは 1 枚有理面の場合と事情が同じである。

## 4 接続問題を境界値問題に変換すること

文献 [4] に従い、Newcomb 方程式に随伴する固有値問題を

$$\mathcal{L}\xi(x) = -\lambda\rho(x)\xi(x) \quad (4.1)$$

とする。ここで、重み関数  $\rho(x)$  は  $x = x_1, x_2$  で

$$\rho(x) = \rho_0(x-x_j)^2 + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (4.2)$$



したがって

$$h_1(x) = \frac{w_{-2,1}}{(x-x_2)^2} + \frac{w_{-1,1}}{x-x_2} + w_{1r}(x) \quad (3.46)$$

であり、 $w_{1r}(x)$  は  $x = x_2$  で解析的である。これより

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x h_1(y)dy &= w_{-2,1} \int_{x_0}^x \frac{dy}{(y-x_2)^2} + w_{-1,1} \int_{x_0}^x \frac{dy}{y-x_2} + \int_{x_0}^x w_{1r}(y)dy \\ &= -w_{-2,1} \frac{2}{x_2-x_1} + w_{-1,1} \log\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \int_{x_0}^{x_2} w_{1r}(x)dx \\ &\quad + w_{-2,1} \frac{1}{x_2-x} - w_{-1,1} \log(x_2-x) \end{aligned} \quad (3.47)$$

以上より、 $x \rightarrow x_2$  で

$$\begin{aligned} \xi(x) &= 1 + \epsilon^2 \left[ \alpha_{22} + \beta_{21} \frac{1}{x_2-x} \right] \\ &= T_{21} \zeta_1^{(b)}(x) + T_{22} \zeta_2^{(s)}(x) \end{aligned} \quad (3.48)$$

とおいたとき、係数  $\alpha_{22}$ 、 $\beta_{21}$  の表式として

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x_2-x_1) + \int_{x_1}^{x_0} h_1(x)dx \\ &\quad - w_{-2,1} \frac{2}{x_2-x_1} + w_{-1,1} \log\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \int_{x_0}^{x_2} w_{1r}(y)dy \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\beta_{21} = w_{-2,1} = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx / f_{20} \quad (3.50)$$

を得る。以上をまとめると  $m = n = 1$  モードに対する接続行列は

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \Lambda = -f_{10}/f_{20}, & T_{12} &= -f_{10}d \\ T_{21} &= \epsilon^2 \beta_{21}, & T_{22} &= 1 + \epsilon^2 \alpha_{22} \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

で与えられる。我々に興味がある係数  $T_{21}$  は区間  $(x_1, x_2)$  におけるポテンシャル・エネルギーと有理面  $x_2$  における磁気シアとの比で与えられ、これは 1 枚有理面の場合と事情が同じである。

## 4 接続問題を境界値問題に変換すること

文献 [4] に従い、Newcomb 方程式に随伴する固有値問題を

$$\mathcal{L}\xi(x) = -\lambda\rho(x)\xi(x) \quad (4.1)$$

とする。ここで、重み関数  $\rho(x)$  は  $x = x_1, x_2$  で

$$\rho(x) = \rho_0(x-x_j)^2 + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (4.2)$$

と展開できるものとする。固有値問題 (4.1) の固有関数のうち、 $\xi_0(x) \neq 0$ 、 $x_1 < x < x_2$ で、かつ、絶対値最小の固有値 $\lambda_0$ に属する固有関数を $\xi_0(x)$ とする。第2章の議論に基づき、 $x = x_1$ で大きい Newcomb 方程式の解を

$$y_1(x) = \hat{\xi}_1^{(b)}(x) + \Lambda \hat{\zeta}_1^{(b)}(x) + \eta(x) \quad (4.3)$$

と表す。ここで、 $\hat{\xi}_1^{(b)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}_1^{(b)}(x)$  はそれぞれ

$$\hat{\xi}_1^{(b)}(x) = (x - x_1)^{-1/2 - \mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (4.4)$$

$$\hat{\zeta}_1^{(b)}(x) = (x_2 - x)^{-1/2 - \mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (4.5)$$

で、かつ

$$\hat{\xi}_1^{(b)}(x) \equiv 0, \quad x > x_1 + \epsilon_1, \quad \epsilon_1 > 0 \quad (4.6)$$

$$\hat{\zeta}_1^{(b)}(x) \equiv 0, \quad x < x_2 - \epsilon_2, \quad \epsilon_2 > 0 \quad (4.7)$$

とする。また、 $\eta(x)$  は  $x_1 \leq x \leq x_2$  で自乗可積であり、 $\Lambda$  はこれから決める未定定数である。 $y_1(x)$  は Newcomb 方程式  $\mathcal{L}y_1(x) = 0$  を大域的に満たすので、未定関数  $\eta(x)$  は境界値問題

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\eta(x) &= -(\mathcal{L}\hat{\xi}_1^{(b)}) - \Lambda(\mathcal{L}\hat{\zeta}_1^{(b)}) \\ \eta(x) &\text{は } x = x_1, x_2 \text{ で small} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

の解である。

(4.3) 式における未定定数 $\Lambda$ は次の考察によって決定することができる。すなわち、(4.3) 式で表現される  $x = x_1$  で大きい解は同時に  $x = x_1$  で小さい局所解も含むことができ、それゆえ、 $\eta(x)$  には任意性がある。そこで、未定定数 $\Lambda$ を調整して、条件

$$\eta(x) \text{ は } \xi_0(x) \text{ に直交する。}$$

すなわち

$$(\xi_0, \rho\eta) = 0 \quad (4.9)$$

を課することができる。このとき

$$(\xi_0, \mathcal{L}\eta) = -\lambda_0(\rho\xi_0, \eta) = 0 \quad (4.10)$$

より、可解条件

$$\Lambda(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}_1^{(b)}) = -(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\xi}_1^{(b)}) \quad (4.11)$$

を得、これより未定定数 $\Lambda$ が

$$\Lambda = -\frac{(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\xi}_1^{(b)})}{(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}_1^{(b)})} \quad (4.12)$$

で与えられる。(4.12) 式で与えられる $\Lambda$ に対して境界値問題 (4.8) は一意的に解ける。特に、演算子 $\mathcal{L}$ が特異であっても、すなわち、臨界安定な場合でも、一意的に解ける。

境界値問題 (4.8) の解  $\eta(x)$  は自乗可積であるので

$$\eta(x) \rightarrow \Delta_{11}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (4.13)$$

$$\eta(x) \rightarrow \Delta_{12}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (4.14)$$

これより

$$y_1(x) \rightarrow (x-x_1)^{-1/2-\mu_1} + \dots \\ + \Delta_{11}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (4.15)$$

および

$$y_1(x) \rightarrow \Lambda(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + \dots \\ + \Delta_{12}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (4.16)$$

が成立する。

次に、 $x = x_1$  で小さい Newcomb 方程式の解を

$$y_2(x) = \xi_0(x) + \lambda_0 \zeta(x) + \lambda_0 \Omega \hat{\zeta}_1^{(b)}(x) \quad (4.17)$$

とおく。ここで  $\zeta(x)$  は  $x_1 < x < x_2$  で自乗可積で、かつ  $\xi_0(x)$  に直交する。

$$(\xi_0, \rho \zeta) = 0 \quad (4.18)$$

方程式  $\mathcal{L}y_2(x) = 0$  より

$$-\lambda_0 \rho \xi_0(x) + \lambda_0 \mathcal{L}\zeta = -\lambda_0 \Omega (\mathcal{L}\hat{\zeta}_1^{(b)}) \quad (4.19)$$

より、 $\zeta(x)$  に対する方程式

$$\mathcal{L}\zeta(x) = \rho \xi_0(x) - \Omega (\mathcal{L}\hat{\zeta}_1^{(b)}) \quad (4.20)$$

を得る。そして、可解条件より

$$\Omega = \frac{\|\xi_0\|^2}{(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}_1^{(b)})}, \quad \|\xi_0\|^2 \equiv (\xi_0, \rho \xi_0) \quad (4.21)$$

すなわち、MARG1D コードをそのまま使える [4]。

境界値問題 (4.20) は一意的に解け

$$\zeta_f(x) = \xi_0(x) + \lambda_0 \zeta(x) \quad (4.22)$$

とおくと、(4.17) 式は

$$y_2(x) = \zeta_f(x) + \lambda_0 \Omega \hat{\zeta}_1^{(b)}(x) \quad (4.23)$$

したがって

$$y_2(x) \rightarrow \Delta_{21}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (4.24)$$

$$y_2(x) \rightarrow \lambda_0 \Omega(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + \dots \\ + \Delta_{22}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (4.25)$$

が成立する。以上の手続きで構成された  $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$  を用いて、Newcomb 方程式の解  $y(x)$  は  $c_1$ 、 $c_2$  を任意定数として

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (4.26)$$

で与えられる。そして、 $x \rightarrow x_1$  で

$$y(x) = c_1 \left\{ (x-x_1)^{-1/2-\mu_1} + \Delta_{11}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \right\} \\ + c_2 \Delta_{21}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \quad (4.27)$$

また、 $x \rightarrow x_2$  で

$$y(x) = c_1 \left\{ \Lambda(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + \Delta_{12}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \right\} \\ + c_2 \left\{ \lambda_0 \Omega(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + \Delta_{22}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \right\} \quad (4.28)$$

これは (2.8) 式における接続行列  $T$  が得られたことになっている。逆に、接続行列 ( $T_{jk}$ ) が与えられたときは、( $\Delta_{jk}$ )、 $\Lambda$ 、 $\Omega$  は

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= T_{11}, \quad \lambda_0 \Omega = T_{21} \\ \Delta_{11} &= 0, \quad \Delta_{12} = T_{12} \\ \Delta_{21} &= 1, \quad \Delta_{22} = T_{22} \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

で与えられる。

## 5 内部層方程式に対する境界条件

前章 (4.27)、(4.28) 式を使えば、文献 [5] の方法を拡張して有理面  $x = x_1$  および  $x = x_2$  の近傍における内部層方程式の境界条件を設定できる。独立変数を

$$x - x_1 = \epsilon_1 z_1, \quad \epsilon_1 = S_1^{-1/3} L_{R1}, \quad L_{R1} = |k_{||}(x_1)|^{-1/3} \quad (5.1)$$

$$x - x_2 = \epsilon_2 z_2, \quad \epsilon_2 = S_2^{-1/3} L_{R2}, \quad L_{R2} = |k_{||}(x_2)|^{-1/3} \quad (5.2)$$

と引き伸ばす。ここで、 $S_1$ 、 $S_2$  は各有理面における磁気レイノズル数、また、 $k_{||}(x)$  は振動の磁力線に平衡な波数であり  $d/dx(1/q)$  に比例する [5]。有理面  $x_1$ 、 $x_2$  における内部層方程式としてゼロ・ベータ近似方程式

$$\gamma \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \text{sgn}(k_{||}) z \frac{d^2 \psi}{dz^2} \quad (5.3)$$

$$\gamma \psi = -\text{sgn}(k_{||}) z \varphi + \frac{d^2 \psi}{dz^2} \quad (5.4)$$

したがって

$$y_2(x) \rightarrow \Delta_{21}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (4.24)$$

$$y_2(x) \rightarrow \lambda_0 \Omega(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + \dots \\ + \Delta_{22}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (4.25)$$

が成立する。以上の手続きで構成された  $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$  を用いて、Newcomb 方程式の解  $y(x)$  は  $c_1$ 、 $c_2$  を任意定数として

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (4.26)$$

で与えられる。そして、 $x \rightarrow x_1$  で

$$y(x) = c_1 \left\{ (x-x_1)^{-1/2-\mu_1} + \Delta_{11}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \right\} \\ + c_2 \Delta_{21}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \quad (4.27)$$

また、 $x \rightarrow x_2$  で

$$y(x) = c_1 \left\{ \Lambda(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + \Delta_{12}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \right\} \\ + c_2 \left\{ \lambda_0 \Omega(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + \Delta_{22}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \right\} \quad (4.28)$$

これは (2.8) 式における接続行列  $T$  が得られたことになっている。逆に、接続行列 ( $T_{jk}$ ) が与えられたときは、 $(\Delta_{jk})$ 、 $\Lambda$ 、 $\Omega$  は

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= T_{11}, \quad \lambda_0 \Omega = T_{21} \\ \Delta_{11} &= 0, \quad \Delta_{12} = T_{12} \\ \Delta_{21} &= 1, \quad \Delta_{22} = T_{22} \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

で与えられる。

## 5 内部層方程式に対する境界条件

前章 (4.27)、(4.28) 式を使えば、文献 [5] の方法を拡張して有理面  $x = x_1$  および  $x = x_2$  の近傍における内部層方程式の境界条件を設定できる。独立変数を

$$x - x_1 = \epsilon_1 z_1, \quad \epsilon_1 = S_1^{-1/3} L_{R1}, \quad L_{R1} = |k_{||}(x_1)|^{-1/3} \quad (5.1)$$

$$x - x_2 = \epsilon_2 z_2, \quad \epsilon_2 = S_2^{-1/3} L_{R2}, \quad L_{R2} = |k_{||}(x_2)|^{-1/3} \quad (5.2)$$

と引き伸ばす。ここで、 $S_1$ 、 $S_2$  は各有理面における磁気レイノズル数、また、 $k_{||}(x)$  は振動の磁力線に平衡な波数であり  $d/dx(1/q)$  に比例する [5]。有理面  $x_1$ 、 $x_2$  における内部層方程式としてゼロ・ベータ近似方程式

$$\gamma \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \text{sgn}(k_{||}) z \frac{d^2 \psi}{dz^2} \quad (5.3)$$

$$\gamma \psi = -\text{sgn}(k_{||}) z \varphi + \frac{d^2 \psi}{dz^2} \quad (5.4)$$

をモデル方程式として採用する。すなわち、両有理面における内部層方程式は共通である。ここで、 $\gamma$ は固有値(成長率)である。内部層方程式には、実際はスケール変換(5.1)、(5.2)に伴う係数が固有値にかかるが、議論を簡単にするため、その効果を見捨てる。ただし、境界条件の設定におけるスケール変換の効果は正しく反映されている。なお、モデル方程式(5.3)、(5.4)の解析解は付録Aで論じられている。

文献[5]の方法にしたがい、静電ポテンシャル $\varphi_1(z_1)$ 、 $\varphi_2(z_2)$ の境界条件を導く。(4.27)、(4.28)式より $\varphi_1(z_1)$ 、 $\varphi_2(z_2)$ に対する漸近条件は次式で与えられる。

$$\varphi_1(z_1) \sim c_1 \epsilon_1^{-1/2-\mu_1} z_1^{-1/2-\mu_1} + \epsilon_1^{-1/2+\mu_1} (c_1 \Delta_{11} + c_2 \Delta_{21}) z_1^{-1/2+\mu_1}, \quad z_1 \rightarrow +\infty \quad (5.5)$$

および

$$\varphi_2(z_2) \sim \epsilon_2^{-1/2-\mu_2} (c_1 \Lambda + c_2 \lambda_0 \Omega) |z_2|^{-1/2-\mu_2} + \epsilon_2^{-1/2+\mu_2} (c_1 \Delta_{12} + c_2 \Delta_{22}) |z_2|^{-1/2+\mu_2}, \quad z_2 \rightarrow -\infty \quad (5.6)$$

(5.5)、(5.6)式を行列形式で書くと

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \sim B \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \epsilon_1^{-1/2-\mu_1} z_1^{-1/2-\mu_1} + \hat{\Delta}_{11} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ B_{12} &= \hat{\Delta}_{21} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ B_{21} &= \hat{\Lambda} |z_2|^{-1/2-\mu_2} + \hat{\Delta}_{12} |z_2|^{-1/2+\mu_2} \\ B_{22} &= \hat{\Omega} |z_2|^{-1/2-\mu_2} + \hat{\Delta}_{22} |z_2|^{-1/2+\mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Delta}_{11} &= \epsilon_1^{-1/2+\mu_1} \Delta_{11}, & \tilde{\Delta}_{21} &= \epsilon_1^{-1/2+\mu_1} \Delta_{21} \\ \hat{\Lambda} &= \epsilon_2^{-1/2-\mu_2} \Lambda, & \hat{\Omega} &= \epsilon_2^{-1/2-\mu_2} \lambda_0 \Omega \\ \tilde{\Delta}_{12} &= \epsilon_2^{-1/2+\mu_2} \Delta_{12}, & \tilde{\Delta}_{22} &= \epsilon_2^{-1/2+\mu_2} \Delta_{22} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

である。次に、(5.7)式を微分して

$$\begin{pmatrix} z_1 \frac{d\varphi_1}{dz_1} \\ z_2 \frac{d\varphi_2}{dz_2} \end{pmatrix} \sim \Gamma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11} &= -(1/2 + \mu_1) \epsilon_1^{-1/2-\mu_1} z_1^{-1/2-\mu_1} + (-1/2 + \mu_1) \tilde{\Delta}_{11} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ \Gamma_{12} &= (-1/2 + \mu_1) \tilde{\Delta}_{21} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ \Gamma_{21} &= -(1/2 + \mu_2) \hat{\Lambda} |z_2|^{-1/2-\mu_2} + (-1/2 + \mu_2) \tilde{\Delta}_{12} |z_2|^{-1/2+\mu_2} \\ \Gamma_{22} &= -(1/2 + \mu_2) \hat{\Omega} |z_2|^{-1/2-\mu_2} + (-1/2 + \mu_2) \tilde{\Delta}_{22} |z_2|^{-1/2+\mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

を得る。(5.7)式より  $(c_1, c_2)$  を消去して、境界条件

$$\begin{pmatrix} z_1 \frac{d\varphi_1}{dz_1} \\ z_2 \frac{d\varphi_2}{dz_2} \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$\Sigma = \Gamma B^{-1} \quad (5.13)$$

が導かれる。

以上から、複素有理面問題において、内部層方程式自身は他の有理面の存在を知らないけれども、その存在を境界条件を通して知ることが分かる。

(5.12)式は $\alpha$ を与えられた定数として固有値問題の形式

$$\gamma \left[ z_{1R} \frac{d\varphi_1}{dz_1} - (\Sigma_{11}\varphi_1 + \Sigma_{12}\varphi_2) \right] = \alpha \left[ z_{1R} \frac{d\varphi_1}{dz_1} - (\Sigma_{11}\varphi_1 + \Sigma_{12}\varphi_2) \right] \quad (5.14)$$

$$\gamma \left[ z_{2L} \frac{d\varphi_2}{dz_2} - (\Sigma_{21}\varphi_1 + \Sigma_{22}\varphi_2) \right] = \alpha \left[ z_{2L} \frac{d\varphi_2}{dz_2} - (\Sigma_{21}\varphi_1 + \Sigma_{22}\varphi_2) \right] \quad (5.15)$$

に表すことができる。数値計算ではこの方程式を境界条件として採用する。

ゼロ・ベータのとき、 $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$ であるので、(5.5)、(5.6)式は

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &\sim \frac{c_1}{\epsilon_1} \frac{1}{z_1} + (c_1 \Delta_{11} + c_2 \Delta_{21}) \\ &= c_1 \left( \Delta_{11} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{1}{z_1} \right) + c_2 \Delta_{21}, \quad z_1 \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(z_2) &\sim (c_1 \Lambda + c_2 \lambda_0 \Omega) \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{|z_2|} + (c_1 \Delta_{12} + c_2 \Delta_{22}) \\ &= c_1 \left( \Delta_{12} + \frac{\Lambda}{\epsilon_2} \frac{1}{|z_2|} \right) + c_2 \left( \Delta_{22} + \frac{\lambda_0 \Omega}{\epsilon_2} \frac{1}{|z_2|} \right), \quad z_2 \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (5.17)$$

に帰着する。したがって  $\hat{\Lambda} = \Lambda/\epsilon_2$ 、 $\hat{\Omega} = \lambda_0 \Omega/\epsilon_2$  とおくと

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \sim B \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} + 1/(\epsilon_1 z_1) & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} + \hat{\Lambda}/|z_2| & \Delta_{22} + \hat{\Omega}/|z_2| \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

および

$$\begin{pmatrix} z_1 \frac{d\varphi_1}{dz_1} \\ z_2 \frac{d\varphi_2}{dz_2} \end{pmatrix} \sim \Gamma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -1/(\epsilon_1 z_1) & 0 \\ -\hat{\Lambda}/|z_2| & -\hat{\Omega}/|z_2| \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

これから、 $(c_1, c_2)$  を消去して、境界条件として

$$\begin{pmatrix} z_1 \frac{d\varphi_1}{dz_1} \\ z_2 \frac{d\varphi_2}{dz_2} \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \Gamma B^{-1} \quad (5.21)$$

を得る。

次に、 $z_1 \rightarrow -\infty$  での  $\varphi_1(z_1)$  の境界条件および  $z_2 \rightarrow +\infty$  での  $\varphi_2(z_2)$  の境界条件を求める。 $x < x_1$  での Newcomb 方程式の解は  $x \rightarrow x_1$  で

$$\begin{aligned} \xi(x) &\rightarrow c(1 + \Delta_{L1}^{-1} \xi_1^b(x)) \\ &= c \left[ 1 + \Delta_{L1}^{-1} \frac{1}{x_1 - x} + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

と表される。したがって、静電ポテンシャル  $\varphi_1(z_1)$  の  $z_1 \rightarrow -\infty$  での漸近形は

$$\varphi_1(z_1) \sim c \left[ 1 + \tilde{\Delta}_{L1}^{-1} \frac{1}{-z_1} + \dots \right] \quad (5.23)$$

$$\tilde{\Delta}_{L1}^{-1} = \frac{\Delta_{L1}^{-1}}{\epsilon_1} \quad (5.24)$$

である。(5.23) 式を  $z_1$  について微分して

$$\frac{d\varphi_1}{dz_1} \sim c \left[ \frac{\tilde{\Delta}_{L1}^{-1}}{z_1^2} + \dots \right] \quad (5.25)$$

(5.23)、(5.25) 式から任意定数  $c$  を消去して

$$\varphi_1(z_{1L}) = \tilde{\Delta}_{L1} z_{1L}^2 \left( 1 - \frac{\tilde{\Delta}_{L1}^{-1}}{z_{1L}} \right) \frac{d\varphi_1}{dz_1} = \sigma_{L1} \frac{d\varphi_1}{dz_1} \quad (5.26)$$

$$\sigma_{L1} = \tilde{\Delta}_{L1} z_{1L}^2 \left( 1 - \frac{\tilde{\Delta}_{L1}^{-1}}{z_{1L}} \right), \quad \tilde{\Delta}_{L1} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_{L1}^{-1}} \quad (5.27)$$

を得る。

次に、 $x > x_2$  での Newcomb 方程式の解は  $x \rightarrow x_2$  で

$$\begin{aligned} \xi(x) &\rightarrow c(\xi_2^b(x) + \Delta_{R2}) \\ &= c \left[ \frac{1}{x - x_2} + \Delta_{R2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

したがって、静電ポテンシャル  $\varphi_2(z_2)$  の  $z_2 \rightarrow \infty$  での漸近形は

$$\varphi_2(z_2) \sim c' \left[ \frac{1}{z_2} + \tilde{\Delta}_{R2} + \dots \right] \quad (5.29)$$

$$\tilde{\Delta}_{R2} = \epsilon_2 \Delta_{R2} \quad (5.30)$$



で与えられ、これより

$$\frac{d\varphi_2}{dz_2} \sim -c' \left[ \frac{1}{z_2^2} + \dots \right] \quad (5.31)$$

を得る。これから、 $c'$ を消去して

$$\varphi_2(z_{2R}) = -z_{2R}^2 \left( \tilde{\Delta}_{R2} + \frac{1}{z_{2R}} \right) \frac{d\varphi_2}{dz_2} = \sigma_{R2} \frac{d\varphi_2}{dz_2} \quad (5.32)$$

$$\sigma_{R2} = -z_{2R} - \tilde{\Delta}_{R2} z_{2R}^2 \quad (5.33)$$

なお、Newcomb 方程式 (2.1) に対する接続データ  $\Delta_{L1}^{-1}$  および  $\Delta_{R2}$  は次式で与えられる [4]。

$$\Delta_{L1}^{-1} = \frac{\epsilon^2}{f_{10}} \int_0^{x_1} g(x) dx \quad (5.34)$$

$$\Delta_{R2} = \frac{1}{1-x_2} - \frac{f_{21}}{f_{20}} \log(1-x_2) + f_{20} \int_{x_2}^1 f_r(x) dx \quad (5.35)$$

$$f_r(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{f_{-2}}{(x-x_2)^2} - \frac{f_{-1}}{x-x_2} \quad (5.36)$$

$$f_{-2} = \frac{1}{f_{20}}, \quad f_{-1} = -\frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \quad (5.37)$$

## 6 モデル方程式に対する分散関係式

ゼロ・ベータ近似の内部層方程式 (5.3)、(5.4) は解析的に解けるので漸近接続により分散関係式を求めることができる。この分散関係式から決定される固有値と前章で設定した境界条件のもとで内部層方程式の固有値問題を数値的に解いて得られる固有値問題とを比較することにより、数値計算法の妥当性を検証できる。まず、次節で有理面が1枚の通常配位の場合についてよく知られた分散関係式を復習する。次に、2枚有理面のある負磁気シア配位での分散関係式を導く。この際必要な漸近条件は第2章の結果から得られる。また、同時に数値的に確認できる固有関数の情報についても議論する。

### 6.1 通常配位の場合

有理面  $x_0$  の左右での  $m=1$  モードの Newcomb 方程式の解を、それぞれ、 $\xi_L(x)$ 、 $\xi_R(x)$  とすると

$$\xi_L(x) \rightarrow c_L \left( \frac{1}{x_0-x} + \Delta_L \right), \quad x \rightarrow x_0 - 0 \quad (6.1)$$

$$\xi_R(x) \rightarrow c_R \left( \frac{1}{x-x_0} + \Delta_R \right), \quad x \rightarrow x_0 + 0 \quad (6.2)$$

である。ここで  $\Delta_L$ 、 $\Delta_R$  は左右の外部領域接続データ、 $c_L$ 、 $c_R$  は任意定数である。変数  $x$  を

$$x - x_0 = \epsilon z \quad (6.3)$$

で与えられ、これより

$$\frac{d\varphi_2}{dz_2} \sim -c' \left[ \frac{1}{z_2^2} + \dots \right] \quad (5.31)$$

を得る。これから、 $c'$ を消去して

$$\varphi_2(z_{2R}) = -z_{2R}^2 \left( \tilde{\Delta}_{R2} + \frac{1}{z_{2R}} \right) \frac{d\varphi_2}{dz_2} = \sigma_{R2} \frac{d\varphi_2}{dz_2} \quad (5.32)$$

$$\sigma_{R2} = -z_{2R} - \tilde{\Delta}_{R2} z_{2R}^2 \quad (5.33)$$

なお、Newcomb 方程式 (2.1) に対する接続データ  $\Delta_{L1}^{-1}$  および  $\Delta_{R2}$  は次式で与えられる [4]。

$$\Delta_{L1}^{-1} = \frac{\epsilon^2}{f_{10}} \int_0^{x_1} g(x) dx \quad (5.34)$$

$$\Delta_{R2} = -\frac{1}{1-x_2} - \frac{f_{21}}{f_{20}} \log(1-x_2) + f_{20} \int_{x_2}^1 f_r(x) dx \quad (5.35)$$

$$f_r(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{f_{-2}}{(x-x_2)^2} - \frac{f_{-1}}{x-x_2} \quad (5.36)$$

$$f_{-2} = \frac{1}{f_{20}}, \quad f_{-1} = -\frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \quad (5.37)$$

## 6 モデル方程式に対する分散関係式

ゼロ・ベータ近似の内部層方程式 (5.3)、(5.4) は解析的に解けるので漸近接続により分散関係式を求めることができる。この分散関係式から決定される固有値と前章で設定した境界条件のもとで内部層方程式の固有値問題を数値的に解いて得られる固有値問題とを比較することにより、数値計算法の妥当性を検証できる。まず、次節で有理面が1枚の通常配位の場合についてよく知られた分散関係式を復習する。次に、2枚有理面のある負磁気シア配位での分散関係式を導く。この際必要な漸近条件は第2章の結果から得られる。また、同時に数値的に確認できる固有関数の情報についても議論する。

### 6.1 通常配位の場合

有理面  $x_0$  の左右での  $m=1$  モードの Newcomb 方程式の解を、それぞれ、 $\xi_L(x)$ 、 $\xi_R(x)$  とすると

$$\xi_L(x) \rightarrow c_L \left( \frac{1}{x_0 - x} + \Delta_L \right), \quad x \rightarrow x_0 - 0 \quad (6.1)$$

$$\xi_R(x) \rightarrow c_R \left( \frac{1}{x - x_0} + \Delta_R \right), \quad x \rightarrow x_0 + 0 \quad (6.2)$$

である。ここで  $\Delta_L$ 、 $\Delta_R$  は左右の外部領域接続データ、 $c_L$ 、 $c_R$  は任意定数である。変数  $x$  を

$$x - x_0 = \epsilon z \quad (6.3)$$

と引き伸ばすと

$$\xi_L(x) \rightarrow \tilde{c}_L \left( -\frac{1}{z} + \tilde{\Delta}_L \right), \quad \tilde{\Delta}_L = \epsilon \Delta_L, \quad z \rightarrow -0 \quad (6.4)$$

$$\xi_R(x) \rightarrow \tilde{c}_R \left( \frac{1}{z} + \tilde{\Delta}_R \right), \quad \tilde{\Delta}_R = \epsilon \Delta_R, \quad z \rightarrow +0 \quad (6.5)$$

一方、内部層方程式の解は、 $c_e$ 、 $c_o$ を任意定数として

$$\phi(z) = c_e \phi_{\text{even}}(z) + c_o \phi_{\text{odd}}(z), \quad \phi_{\text{even}}(z) \equiv 1 \quad (6.6)$$

と表せ、 $\phi(z)$ の漸近形は

$$\phi(z) \sim (c_e + c_o \Delta_o(\gamma)) + \frac{c_o}{z}, \quad z \rightarrow +\infty \quad (6.7)$$

$$\phi(z) \sim (c_e - c_o \Delta_o(\gamma)) + \frac{c_o}{z}, \quad z \rightarrow -\infty \quad (6.8)$$

で表される。ここで、 $\Delta_o(\gamma)$ は(A.46)式で与えられている。したがって、漸近接続の条件、すなわち、(6.4)式と(6.8)式とが、および、(6.5)式と(6.7)式とが関数形として一致する条件より、定数 $\tilde{c}_L$ 、 $\tilde{c}_R$ 、 $c_e$ 、 $c_o$ の満たすべき4つの1次方程式

$$c_e + c_o \Delta_o(\gamma) = \tilde{c}_R \tilde{\Delta}_R, \quad c_o = \tilde{c}_R \quad (6.9)$$

$$c_e - c_o \Delta_o(\gamma) = \tilde{c}_L \tilde{\Delta}_L, \quad c_o = -\tilde{c}_L \quad (6.10)$$

を得る。 $\tilde{c}_R$ 、 $\tilde{c}_L$ を消去して

$$c_e + c_o \Delta_o(\gamma) = c_o \tilde{\Delta}_R \quad (6.11)$$

$$c_e - c_o \Delta_o(\gamma) = -c_o \tilde{\Delta}_L \quad (6.12)$$

これより、分散関係式

$$\Delta_o(\gamma) = \frac{1}{2} (\tilde{\Delta}_R + \tilde{\Delta}_L) \quad (6.13)$$

を得る。文献[7]では

$$\tilde{\Delta}_R = 0, \quad \tilde{\Delta}_L = -\frac{\pi}{\lambda_H} \quad (6.14)$$

としているので、(6.13)式は

$$-\frac{\pi}{2\lambda_H} = \Delta_o(\gamma) \quad (6.15)$$

となる。これに(A.46)式を使うと文献[7]の(III.11)式

$$\gamma = \lambda_H \left\{ \frac{\gamma^{9/4} \Gamma((Q-1)/4)}{8 \Gamma((Q+5)/4)} \right\}, \quad Q = \gamma^{3/2} \quad (6.16)$$

を得る。また、定数 $c_e$ と $c_o$ との比は(6.11)式と(6.12)式から

$$\frac{c_e}{c_o} = \frac{1}{2} (\tilde{\Delta}_R - \tilde{\Delta}_L) \quad (6.17)$$

で与えられる。

## 6.2 負磁気シア配位の場合

負磁気シア配位において、有理面を  $x_1, x_2 (x_1 < x < x_2)$ 、また

$$\begin{aligned} x = x_1 \text{で大きい解を } \xi_1^{(b)}(x), \text{ 小さい解を } \xi_2^{(s)}(x) \\ x = x_2 \text{で大きい解を } \zeta_1^{(b)}(x), \text{ 小さい解を } \zeta_2^{(s)}(x) \end{aligned}$$

とする。そして、第2章の考え方にしたがって、 $\xi_1^{(b)}(x), \xi_2^{(s)}(x)$  を  $x = x_2$  まで解析接続すれば

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^{(b)}(x) &\rightarrow T_{11}\zeta_1^{(b)}(x) + T_{12}\zeta_2^{(s)}(x) \\ \xi_2^{(s)}(x) &\rightarrow T_{21}\zeta_1^{(b)}(x) + T_{22}\zeta_2^{(s)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

となる。ここでは、接続行列  $T = (T_{jk})$  が与えられているものとする。たとえば、 $m = n = 1$  モードの場合は接続行列  $T$  は (3.51) 式で表される。 $x_1 < x < x_2$  における Newcomb 方程式の解は  $c_1, c_2$  を任意定数として

$$y(x) = c_1 \xi_1^{(b)}(x) + c_2 \xi_2^{(s)}(x) \quad (6.19)$$

と表せる。したがって、 $x \rightarrow x_1 + 0$  では

$$y(x) \rightarrow c_1 \frac{1}{x - x_1} + c_2 \quad (6.20)$$

$x \rightarrow x_2 - 0$  では

$$y(x) = (c_1 T_{11} + c_2 T_{21}) \zeta_1^{(b)}(x) + (c_1 T_{12} + c_2 T_{22}) \zeta_2^{(s)}(x) \quad (6.21)$$

$$\rightarrow (c_1 T_{11} + c_2 T_{21}) \frac{1}{x_2 - x} + (c_1 T_{12} + c_2 T_{22}) \quad (6.22)$$

である。 $x = x_1$  での左側の Newcomb 方程式の解は、 $c_L$  を未定定数として

$$y_L(x) \rightarrow c_L \left( \frac{1}{x_1 - x} + \Delta_L \right), \quad x \rightarrow x_1 - 0 \quad (6.23)$$

また、 $x = x_2$  での右側の Newcomb 方程式の解は、 $c_R$  を未定定数として

$$y_R(x) \rightarrow c_R \left( \frac{1}{x - x_2} + \Delta_R \right), \quad x \rightarrow x_2 + 0 \quad (6.24)$$

である。 $x = x_1$  および  $x = x_2$  における内部層方程式の解を、それぞれ

$$\phi_1(z_1) = a_e + a_o \phi_{\text{odd}}(z_1) \quad (6.25)$$

および

$$\phi_2(z_2) = b_e + b_o \phi_{\text{odd}}(z_2) \quad (6.26)$$

とおく。ここで

$$x - x_1 = \epsilon_1 z_1, \quad x - x_2 = \epsilon_2 z_2 \quad (6.27)$$

である。前節で示した漸近接続の考えにしたがい、8つの係数  $a_e, a_o, b_e, b_o, c_1, c_2, c_L, c_R$  に関する8つの1次方程式を導くことができる。そして、消去を行って  $c_L, c_R$  に対する同次な1次方程式に簡約し、この方程式が自明な解以外の解を持つ条件から分散関係式が導かれる。まず、 $z_1 \rightarrow -\infty$  での  $\phi_1(z_1)$  を (6.23) 式に、 $z_1 \rightarrow +\infty$  での  $\phi_1(z_1)$  を (6.20) 式に接続する。この結果、係数  $a_e, a_o, c_L, c_1$  および  $c_2$  に関する4つの1次方程式を得る。それらは

$$a_e - a_o \Delta_o(\gamma) = c_L \Delta_L, \quad -\frac{c_L}{\epsilon_1} = a_o \quad (6.28)$$

$$a_e + a_o \Delta_o(\gamma) = c_2, \quad \frac{c_1}{\epsilon_1} = a_o \quad (6.29)$$

である。これから  $c_1, c_2, a_e, a_o$  を  $c_L$  で表せ

$$\left. \begin{aligned} a_o &= -\frac{c_L}{\epsilon_1}, & a_e &= \left( -\frac{\Delta_o(\gamma)}{\epsilon_1} + \Delta_L \right) c_L \\ c_1 &= -c_L, & c_2 &= \left( \Delta_L - 2\frac{\Delta_o(\gamma)}{\epsilon_1} \right) c_L \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

を得る。同様にして、 $z_2 \rightarrow -\infty$  での  $\phi_2(z_2)$  を (6.22) 式に、 $z_2 \rightarrow +\infty$  での  $\phi_2(z_2)$  を (6.24) 式に接続することによって、係数  $b_e, b_o, c_R, c_1$  および  $c_2$  に関する4つの1次方程式

$$b_o = \frac{c_R}{\epsilon_2}, \quad b_e + b_o \Delta_o(\gamma) = c_R \Delta_R \quad (6.31)$$

$$b_o = -\frac{1}{\epsilon_2} (c_1 T_{11} + c_2 T_{21}), \quad b_e - b_o \Delta_o(\gamma) = c_1 T_{12} + c_2 T_{22} \quad (6.32)$$

を得る。これから、 $c_1, c_2, b_e$  および  $b_o$  を  $c_R$  で表せ、その結果は

$$b_e = \left( \Delta_R - \frac{\Delta_o(\gamma)}{\epsilon_2} \right) c_R \quad (6.33)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 T_{11} + c_2 T_{21} &= -c_R \\ c_1 T_{12} + c_2 T_{22} &= \left( \Delta_R - \frac{2\Delta_o(\gamma)}{\epsilon_2} \right) c_R \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

で与えられる。(6.30) 式を使って (6.34) 式の左辺を  $c_L$  で表すと、結局、 $c_L, c_R$  に対する同次な1次方程式

$$\begin{pmatrix} -T_{11} + T_{21} (\Delta_L - 2\Delta_o(\gamma)/\epsilon_1) & 1 \\ -T_{12} + T_{22} (\Delta_L - 2\Delta_o(\gamma)/\epsilon_1) & 2\Delta_o(\gamma)/\epsilon_2 - \Delta_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_L \\ c_R \end{pmatrix} = 0 \quad (6.35)$$

を得る。この同次方程式 (6.35) が  $c_L = c_R = 0$  以外の解を持つ条件より、 $\Delta_o(\gamma)$  に対する2次方程式

$$\begin{aligned} & \left[ -T_{11} + T_{21} \left( \Delta_L - \frac{2\Delta_o(\gamma)}{\epsilon_1} \right) \right] \left[ \frac{2\Delta_o(\gamma)}{\epsilon_2} - \Delta_R \right] \\ & + T_{12} - T_{22} \left( \Delta_L - \frac{2\Delta_o(\gamma)}{\epsilon_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

すなわち

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2T_{21}}{\epsilon_1} \Delta_o(\gamma) + (T_{11} - T_{21} \Delta_L) \right] \left[ \frac{2}{\epsilon_2} \Delta_o(\gamma) - \Delta_R \right] \\ & + (-T_{12} + T_{22} \Delta_L) - \frac{2T_{22}}{\epsilon_1} \Delta_o(\gamma) = 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

を得る。ここで

$$x = \frac{1}{\Delta_o(\gamma)} \quad (6.38)$$

とおき、両辺に  $\epsilon_1$  をかけることにより、(6.37) 式は  $x$  についての 2 次方程式

$$\begin{aligned} & [\epsilon_1 \Delta_L (T_{22} + T_{21} \Delta_R) - \epsilon_1 (T_{12} + T_{11} \Delta_R)] x^2 \\ & + 2 \left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (T_{11} - T_{21} \Delta_L) - (T_{22} + T_{21} \Delta_R) \right] x + 4 \frac{T_{21}}{\epsilon_2} = 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

に変形することができる。さらに

$$a_\Delta = \epsilon_1 \Delta_L (T_{22} + T_{21} \Delta_R) - \epsilon_1 (T_{12} + T_{11} \Delta_R) \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} b_\Delta &= \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} T_{11} - T_{22} \right) - (\epsilon_1 \Delta_L + \epsilon_2 \Delta_R) \frac{T_{21}}{\epsilon_2} \\ &= b_0 - (\epsilon_1 \Delta_L + \epsilon_2 \Delta_R) \frac{T_{21}}{\epsilon_2} \end{aligned} \quad (6.41)$$

および

$$\lambda = 4 \frac{T_{21}}{\epsilon_2} \quad (6.42)$$

とおくと、2 次方程式は

$$a_\Delta x^2 + 2b_\Delta x + \lambda = 0 \quad (6.43)$$

と表せる。今、対象としている  $m = n = 1$  モードの Newcomb 方程式に対しては

$$a_\Delta \approx \epsilon_1 \Delta_L, \quad b_\Delta = b_0 - \epsilon_1 \Delta_L \frac{T_{21}}{\epsilon_2}, \quad b_0 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} T_{11} - 1 \quad (6.44)$$

である ( $T_{22} = 1 + O(\epsilon^2)$  を使った)。したがって、モデル方程式 (5.3)、(5.4) に対する分散関係式 (6.43) は有理面  $x_1$ 、 $x_2$  における磁気シア配位 (これは係数  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$  および  $T_{11}$  を与える)、有理面  $x_1$ 、 $x_2$  にはさまれた区間でのポテンシャル・エネルギー (これは  $T_{21}$  を与える) および  $x_1$  の左側の区間でのポテンシャル・エネルギー (これは  $\Delta_L$  を与える) で決定される。特に  $\lambda = 0$  のとき、(6.43) 式の解は

$$x = 0, \quad x = -\frac{2b_\Delta}{a_\Delta} \quad (6.45)$$

である。 $x = 0$  は  $\gamma = 1$  に対応する。次に、 $|\lambda|$  が小さいときの解は

$$x = -\frac{\lambda}{2b_\Delta}, \quad x = -\frac{2b_\Delta}{a_\Delta} + \frac{\lambda}{2b_\Delta} \quad (6.46)$$

で与えられる。したがって、求めるべき分散関係式として

$$\frac{1}{\Delta_o(\gamma)} = -\frac{\lambda}{2b_\Delta} \quad (6.47)$$

および

$$\frac{1}{\Delta_o(\gamma)} = -\frac{2b_\Delta}{a_\Delta} + \frac{\lambda}{2b_\Delta} \quad (6.48)$$

を得る。

さて、内部層方程式の解は

$$\phi_1(z_1) = a_e + a_o \phi_{\text{odd}}(z_1), \quad \phi_2(z_2) = b_e + b_o \phi_{\text{odd}}(z_2) \quad (6.49)$$

だから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi_1(0)}{\phi_2(0)} &= \frac{a_e}{b_e}, & \frac{\phi_1'(z)}{\phi_2'(z)} &= \frac{a_o}{b_o} \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

が成立する。比  $a_e/b_e$  と  $a_o/b_o$  は固有関数の成分  $\phi_1(z_1)$  と  $\phi_2(z_2)$  の結合の度合いを示すパラメータである。また、(6.50) 式の各左辺は数値解から容易に計算できるので、(6.50) 式は数値計算の検証に用いることができる。比  $a_e/b_e$  と  $a_o/b_o$  は (6.28)、(6.30)、(6.31)、(6.33) 式より、比  $c_L/c_R$  を使って

$$\frac{a_e}{b_e} = \frac{\epsilon_2 c_L}{\epsilon_1 c_R} \frac{1 - \epsilon_1 \Delta_L / \Delta_o(\gamma)}{1 - \epsilon_2 \Delta_R / \Delta_o(\gamma)} \quad (6.51)$$

$$\frac{a_o}{b_o} = -\frac{\epsilon_2 c_L}{\epsilon_1 c_R} \quad (6.52)$$

と表される。そして、比  $c_L/c_R$  自身は (6.35) 式の第1式あるいは第2式より、それぞれ

$$\frac{c_L}{c_R} = \frac{1/\Delta_o(\gamma)}{2T_{21}/\epsilon_1 + (1/\Delta_o(\gamma))(T_{11} - T_{21}\Delta_L)} \quad (6.53)$$

$$\frac{c_L}{c_R} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{1 - \epsilon_2 \Delta_R / (2\Delta_o(\gamma))}{T_{22} + \epsilon_1 / (2\Delta_o(\gamma))(-\Delta_L + T_{12}/T_{22})} \quad (6.54)$$

と表される。もちろん、固有値  $\gamma$  が分散関係式 (6.43) を満足すれば、両者は等しい。特に臨界安定の場合 ( $T_{22} = 1$ ,  $T_{21} = 0$ )、 $\gamma = 1$  の固有関数については

$$\frac{a_e}{b_e} = 1, \quad \frac{a_o}{b_o} = -1 \quad (6.55)$$

である。一方、 $1/\Delta_o(\gamma) = -2b_\Delta/a_\Delta$  に対応する固有関数については、(6.53) 式より  $c_L/c_R = 1/T_{11}$  であるので

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_e}{b_e} &= \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1 - \epsilon_1 \Delta_L / \Delta_o(\gamma)}{T_{11} + \epsilon_1 / (2\Delta_o(\gamma))(-\Delta_L + T_{12}/T_{22})} \\ \frac{a_o}{b_o} &= -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{T_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

が成立する。以上から、分散関係式 (6.43) を満たす 2 つの固有関数は、互いに異なる次のような特徴を持つ。すなわち、 $|\lambda|$  が小さいとき (6.47) 式に属する固有値は、有理面  $x_1, x_2$  にはさまれた区間でのポテンシャル・エネルギーに強く依存し、 $\varphi_1(z)$  と  $\varphi_2(z)$  の比は  $O(1)$  であり、その比は  $x_1, x_2$  における磁気シアの影響をあまり受けない。一方、(6.48) 式に属する固有値にとって  $\lambda$  (したがって、ポテンシャル・エネルギー) は摂動的にのみ働き、また、 $\varphi_1(z)$  と  $\varphi_2(z)$  の比は  $x_1, x_2$  における磁気シアで決まる。

## 7 テスト計算

第 5 章で示した方法の検証をするため、ゼロ・ベータ近似の内部層方程式を用いて負磁気シア配位での抵抗性  $m = 1/n = 1$  モードの固有値を求める。このとき、外部領域接続データが必要になる。このデータの計算には、(3.25) 式、(3.49) 式および (3.50) 式を用いる。

### 7.1 数値計算法の概要

内部層方程式の離散近似には中心差分法を用いる。変数  $z_1, z_2$  に対して等間隔グリッド

$$\left. \begin{aligned} z_L = -z_R = z_{1,1} < z_{1,2} \cdots < z_{1,N+1} = z_R \\ z_L = -z_R = z_{2,1} < z_{2,2} \cdots < z_{2,N+1} = z_R \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

を導入し、各  $z_{j,k} (j=1, 2, k=1, \dots, N+1)$  上の  $\varphi_j(z_{j,k}), \psi_j(z_{j,k})$  の値をそれぞれ、 $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}$  とする。このとき、(5.14)、(5.15) 式の中心差分近似により

$$\begin{aligned} & \gamma \left[ z_{1,N} \frac{\varphi_{1,N+1} - \varphi_{1,N-1}}{2\Delta z} - (\Sigma_{11}\varphi_{1,N} + \Sigma_{12}\varphi_{2,2}) \right] \\ &= \alpha \left[ z_{1,N} \frac{\varphi_{1,N+1} - \varphi_{1,N-1}}{2\Delta z} - (\Sigma_{11}\varphi_{1,N} + \Sigma_{12}\varphi_{2,2}) \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} & \gamma \left[ z_{2,2} \frac{\varphi_{2,3} - \varphi_{2,1}}{2\Delta z} - (\Sigma_{21}\varphi_{1,N} + \Sigma_{22}\varphi_{2,2}) \right] \\ &= \alpha \left[ z_{2,2} \frac{\varphi_{2,3} - \varphi_{2,1}}{2\Delta z} - (\Sigma_{21}\varphi_{1,N} + \Sigma_{22}\varphi_{2,2}) \right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

を得る。なお、離散近似方程式の数値計算法については文献 [5] に示されている。

負磁気シア配位の安全係数  $q(x)$  は、有理面  $x_1, x_2$  とそこでの安全係数の値  $q_r$  を与えて、 $x_c \leq x$  のとき

$$q = q_0 \left[ 1 + \left( \frac{x - x_c}{x_2 - x_c} \right)^{a_R} \right]^b \quad (7.4)$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{a_R b q_0}{x_2 - x_c} \left( \frac{x - x_c}{x_2 - x_c} \right)^{a_R - 1} \left[ 1 + \left( \frac{x - x_c}{x_2 - x_c} \right)^{a_R} \right]^{b-1} \quad (7.5)$$



が成立する。以上から、分散関係式 (6.43) を満たす 2 つの固有関数は、互いに異なる次のような特徴を持つ。すなわち、 $|\lambda|$  が小さいとき (6.47) 式に属する固有値は、有理面  $x_1, x_2$  にはさまれた区間でのポテンシャル・エネルギーに強く依存し、 $\varphi_1(z)$  と  $\varphi_2(z)$  の比は  $O(1)$  であり、その比は  $x_1, x_2$  における磁気シアの影響をあまり受けない。一方、(6.48) 式に属する固有値にとって  $\lambda$  (したがって、ポテンシャル・エネルギー) は摂動的にのみ働き、また、 $\varphi_1(z)$  と  $\varphi_2(z)$  の比は  $x_1, x_2$  における磁気シアで決まる。

## 7 テスト計算

第 5 章で示した方法の検証をするため、ゼロ・ベータ近似の内部層方程式を用いて負磁気シア配位での抵抗性  $m = 1/n = 1$  モードの固有値を求める。このとき、外部領域接続データが必要になる。このデータの計算には、(3.25) 式、(3.49) 式および (3.50) 式を用いる。

### 7.1 数値計算法の概要

内部層方程式の離散近似には中心差分法を用いる。変数  $z_1, z_2$  に対して等間隔グリッド

$$\left. \begin{aligned} z_L = -z_R = z_{1,1} < z_{1,2} \cdots < z_{1,N+1} = z_R \\ z_L = -z_R = z_{2,1} < z_{2,2} \cdots < z_{2,N+1} = z_R \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

を導入し、各  $z_{j,k} (j=1, 2, k=1, \dots, N+1)$  上の  $\varphi_j(z_{j,k}), \psi_j(z_{j,k})$  の値をそれぞれ、 $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k}$  とする。このとき、(5.14)、(5.15) 式の中心差分近似により

$$\begin{aligned} & \gamma \left[ z_{1,N} \frac{\varphi_{1,N+1} - \varphi_{1,N-1}}{2\Delta z} - (\Sigma_{11}\varphi_{1,N} + \Sigma_{12}\varphi_{2,2}) \right] \\ &= \alpha \left[ z_{1,N} \frac{\varphi_{1,N+1} - \varphi_{1,N-1}}{2\Delta z} - (\Sigma_{11}\varphi_{1,N} + \Sigma_{12}\varphi_{2,2}) \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} & \gamma \left[ z_{2,2} \frac{\varphi_{2,3} - \varphi_{2,1}}{2\Delta z} - (\Sigma_{21}\varphi_{1,N} + \Sigma_{22}\varphi_{2,2}) \right] \\ &= \alpha \left[ z_{2,2} \frac{\varphi_{2,3} - \varphi_{2,1}}{2\Delta z} - (\Sigma_{21}\varphi_{1,N} + \Sigma_{22}\varphi_{2,2}) \right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

を得る。なお、離散近似方程式の数値計算法については文献 [5] に示されている。

負磁気シア配位の安全係数  $q(x)$  は、有理面  $x_1, x_2$  とそこでの安全係数の値  $q_r$  を与えて、 $x_c \leq x$  のとき

$$q = q_0 \left[ 1 + \left( \frac{x - x_c}{x_2 - x_c} \right)^{a_R} \right]^b \quad (7.4)$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{a_R b q_0}{x_2 - x_c} \left( \frac{x - x_c}{x_2 - x_c} \right)^{a_R - 1} \left[ 1 + \left( \frac{x - x_c}{x_2 - x_c} \right)^{a_R} \right]^{b-1} \quad (7.5)$$

$x < x_c$  のとき

$$q = q_0 \left[ 1 + \left( \frac{x_c - x}{x_c - x_1} \right)^{a_L} \right]^b \quad (7.6)$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{a_L b q_0}{-(x_c - x_1)} \left( \frac{x_c - x}{x_c - x_1} \right)^{a_L - 1} \left[ 1 + \left( \frac{x_c - x}{x_c - x_1} \right)^{a_L} \right]^{b-1} \quad (7.7)$$

で表される。ここで  $q_0$  は  $x_c = (x_1 + x_2)/2$  での安全係数、 $a_L$  および  $a_R$  は、それぞれ、 $x_c$  の左側および右側での  $q(x)$  の分布を与え、3 つとも入力パラメータである。また、 $b = \log(q_r/q_0)/\log 2$  である。

次に、圧力勾配  $dp/dx$  は

$$\frac{dp}{dx} = - \left( \frac{1}{4} - \mu^2 \right) \frac{x}{2} F^2 \left( \frac{dq/dx}{q} \right)^2 \quad (7.8)$$

で与える。計算パラメータによって、 $x < x_0$  のとき  $dp/dx = 0$  とすることもできる。ここで  $\mu$  は  $0 < \mu \leq 1/2$  の入力パラメータ、または、 $\mu = \sqrt{1 - \epsilon^2}/2$  ( $\epsilon$ : 逆アスペクト比で入力パラメータ) である。

また、トロイダル磁場  $F$  は平衡方程式

$$\frac{d}{dx} F^2 = -2 \frac{\frac{dp}{dx} + \epsilon^2 \frac{F^2}{q} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{q} \right)}{1 + \epsilon^2 \left( \frac{x}{q} \right)^2} \quad (7.9)$$

$$F^2(x=1) = 1 \quad (7.10)$$

から決定される。この微分方程式を  $F^2$  について、区間  $0 \leq x \leq 1$  にわたって 4 次の Runge-Kutta 法で解く。

## 7.2 テスト計算結果

図 7.1、7.2 にテスト計算に用いる  $q(x)$  と  $dp/dx$  を示す。ここで  $x < 0.6$  のとき  $dp/dx = 0$  であり、また用いたパラメータは以下の通りである。

$$q_0 = 0.8, \quad a_L = 2.0, \quad a_R = 2.5, \quad q_r = 1.0,$$

$$x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.8, \quad \epsilon = 0.2,$$

$$\text{各有理面における磁気レイノズル数: } S_1 = S_2 = 10^9$$

このとき、数値計算に必要な各量の値は次のようになる:

$$\epsilon_1 = 1.4606365 \times 10^{-3}, \quad \epsilon_2 = 1.3602123 \times 10^{-3},$$

$$\Lambda = T_{11} = -8.1526232 \times 10^{-2}, \quad \lambda_0 \Omega = T_{21} = -1.8827617 \times 10^{-3},$$

$$\Delta_{11} = 0, \quad \Delta_{12} = T_{12} = -18.104211,$$

$$\Delta_{21} = 1, \quad \Delta_{22} = T_{22} = 1$$

ここで、 $\Delta_{22}$ (および  $T_{22}$ ) の  $O(\epsilon^2)$  の補正は無視した。また、(5.34)、(5.35) 式で与えられる左右での接続データの値は

$$\tilde{\Delta}_{L1}^{-1} = \Delta_{L1}^{-1}/\epsilon_1 = 0.47110945, \quad \tilde{\Delta}_{R2} = \epsilon_2 \Delta_{R2} = 3.6415226 \times 10^{-3}$$

である。したがって、(6.40)、(6.41) 式における  $a_\Delta$ 、 $b_0$  は、それぞれ

$$a_\Delta \approx \epsilon_1 \Delta_L = 2.1601106$$

$$b_0 \approx \epsilon_1/\epsilon_2 T_{11} - T_{22} = -1.0875453$$

となる。数値計算では  $T_{21}$  を  $aT_{21}$  ( $-1 \leq a \leq 1$ ) に換えて、固有値、固有関数を求め、それらを解析解と比較した。したがって、分散関係式 (6.43) における  $\lambda$  は

$$\lambda = 4a \frac{T_{21}}{\epsilon_2} = -5.5366700 \times a, \quad -1 \leq a \leq 1$$

である。

図 7.3 に固有値の、図 7.4 および図 7.5 に、それぞれ、 $\phi_1(0)/\phi_2(0)$  および  $\phi_1'(0)/\phi_2'(0)$  の  $a$ -依存性を示す。このとき、(7.1) 式で計算領域を決めるパラメータ  $z_R$  およびグリッドの分割数  $N$  は、それぞれ、 $z_R = 20$  および  $N = 200$  である。また、固有値問題はすべて逆ベキ法で解いた。

図で示されるように、値の大きい方の固有値 (第 1 固有値) についても小さい方の固有値 (第 2 固有値) についても、この図のスケールで、解析解と数値解はよく一致している。また、固有値、固有関数は分散関係式 (6.43) に関して行った議論に一致した挙動を示す。すなわち、第 1 固有値は、ポテンシャル・エネルギー項に敏感であり、 $a > 0$  の側では、 $\gamma > 1$  の理想 MHD モードになっている。一方、第 2 固有値は、ポテンシャル・エネルギー項に鈍感であり、 $\gamma < 1$  のままである。また、 $|a|$  の小さい領域および  $a > 0$  側では第 1 固有関数の  $\varphi_1(z)$  成分と  $\varphi_2(z)$  成分の比は  $O(1)$  であり、一方、第 2 固有関数の  $\varphi_1(z)$  成分と  $\varphi_2(z)$  成分の比は  $a = 0$  の近くでは有理面  $x_1$ 、 $x_2$  での磁気シアで決まっている。

図 7.6、7.7 に  $a = 0$  の場合の、図 7.8、7.9 に  $a = -1$  の場合の第 1 固有関数と第 2 固有関数を示す。これらの図では  $z_R = 20$ 、 $N = 200$  である。図 7.10、7.11 は  $a = 1$  の場合で、それぞれ、 $z_R = 80$ 、 $N = 800$  および  $z_R = 200$ 、 $N = 2000$  のときの第 1 固有関数を示す。図 7.12 は  $a = 1$ 、 $z_R = 20$ 、 $N = 200$  のときの第 2 固有関数である。固有値  $\gamma$  が 1 より大きいと固有関数が広がるので  $z_R$  を大きくとる必要がある (図 7.15 参照)。

次に、固有値、固有関数の収束性を調べた。図 7.13、7.14 および 7.15 はそれぞれ、 $a = 0$ 、 $a = -1$  および  $a = 1$  の場合の固有値  $\gamma$  のグリッド点数  $N$  に対する依存性を示している。○印は第 1 固有値を、△印は第 2 固有値を示す。このとき、計算領域  $z_R$  は固定している。どの場合も固有値はほぼ  $1/N$  則で解析解に収束していることが分かる。なお、図 7.15 に示すように  $a = 1$  のときの第 1 固有値は  $z_R = 80$  のとき  $1/N$  則で収束するが解析解に収束しない。一方、 $z_R = 200$  にすると解析解への収束が改善される。

固有関数の収束性は関係式 (6.51)、(6.52) を数値解と比較することによって調べることができる。その結果を図 7.16、7.17( $a = -1$ ) および図 7.18、7.19( $a = 1$ ) に示す (○印:第1固有関数、△印:第2固有関数)。いずれの場合も  $1/N$  則で解析値へ収束している。

## 8 要約と議論

本報告書では、有理面が2枚ある負磁気シア配位での抵抗性 MHD 安定性の解析理論と境界条件を通して結合した内部層方程式の数値計算法を提示した。また、それをモデル方程式、それは  $m = n = 1$  モードに対する Newcomb 方程式とゼロ・ベータ近似の内部層方程式とから成る、に適用し、数値計算法の妥当性を検証した。本報告書の抵抗性 MHD 安定性解析への新しい貢献は、両端で「大きい解」を含む Newcomb 方程式の大域解を変分原理やそれに基づく有限要素法の適用できる境界値問題の解としてとらえたこと、および、その結果から各有理面における内部層方程式の漸近条件を導いたことにある。この漸近条件を有限計算領域での境界条件に置き換えることにより、内部層方程式を境界条件のもとでの固有値問題として数値的に解くことができる。この解析理論により、有理面が2枚ある負磁気シア配位でも、数値的に安定な有限要素法および差分法に基づく境界値問題・固有値問題として抵抗性 MHD モードの安定性を解析することができる。なお、負磁気シア配位における Newcomb 方程式の大域解に関する変分原理および有限要素法は、これに引き続いて報告する予定である。

## 謝 辞

本研究の遂行にあたり、始終激励していただきました安積正史炉心プラズマ研究部次長、平山俊雄プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

固有関数の収束性は関係式 (6.51)、(6.52) を数値解と比較することによって調べることができる。その結果を図 7.16、7.17( $a = -1$ ) および図 7.18、7.19( $a = 1$ ) に示す (○印:第1固有関数、△印:第2固有関数)。いずれの場合も  $1/N$  則で解析値へ収束している。

## 8 要約と議論

本報告書では、有理面が2枚ある負磁気シア配位での抵抗性 MHD 安定性の解析理論と境界条件を通して結合した内部層方程式の数値計算法を提示した。また、それをモデル方程式、それは  $m = n = 1$  モードに対する Newcomb 方程式とゼロ・ベータ近似の内部層方程式とから成る、に適用し、数値計算法の妥当性を検証した。本報告書の抵抗性 MHD 安定性解析への新しい貢献は、両端で「大きい解」を含む Newcomb 方程式の大域解を変分原理やそれに基づく有限要素法の適用できる境界値問題の解としてとらえたこと、および、その結果から各有理面における内部層方程式の漸近条件を導いたことにある。この漸近条件を有限計算領域での境界条件に置き換えることにより、内部層方程式を境界条件のもとでの固有値問題として数値的に解くことができる。この解析理論により、有理面が2枚ある負磁気シア配位でも、数値的に安定な有限要素法および差分法に基づく境界値問題・固有値問題として抵抗性 MHD モードの安定性を解析することができる。なお、負磁気シア配位における Newcomb 方程式の大域解に関する変分原理および有限要素法は、これに引き続いて報告する予定である。

## 謝 辞

本研究の遂行にあたり、始終激励していただきました安積正史炉心プラズマ研究部次長、平山俊雄プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

固有関数の収束性は関係式 (6.51)、(6.52) を数値解と比較することによって調べることができる。その結果を図 7.16、7.17( $a = -1$ ) および図 7.18、7.19( $a = 1$ ) に示す (○印:第1固有関数、△印:第2固有関数)。いずれの場合も  $1/N$  則で解析値へ収束している。

## 8 要約と議論

本報告書では、有理面が2枚ある負磁気シア配位での抵抗性 MHD 安定性の解析理論と境界条件を通して結合した内部層方程式の数値計算法を提示した。また、それをモデル方程式、それは  $m = n = 1$  モードに対する Newcomb 方程式とゼロ・ベータ近似の内部層方程式とから成る、に適用し、数値計算法の妥当性を検証した。本報告書の抵抗性 MHD 安定性解析への新しい貢献は、両端で「大きい解」を含む Newcomb 方程式の大域解を変分原理やそれに基づく有限要素法の適用できる境界値問題の解としてとらえたこと、および、その結果から各有理面における内部層方程式の漸近条件を導いたことにある。この漸近条件を有限計算領域での境界条件に置き換えることにより、内部層方程式を境界条件のもとでの固有値問題として数値的に解くことができる。この解析理論により、有理面が2枚ある負磁気シア配位でも、数値的に安定な有限要素法および差分法に基づく境界値問題・固有値問題として抵抗性 MHD モードの安定性を解析することができる。なお、負磁気シア配位における Newcomb 方程式の大域解に関する変分原理および有限要素法は、これに引き続いて報告する予定である。

## 謝 辞

本研究の遂行にあたり、始終激励していただきました安積正史炉心プラズマ研究部次長、平山俊雄プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] M.Kikuchi, Nucl. Fusion **30** (1990) 265.
- [2] H.Kimura and JT-60 Team, Phys. Plasmas **3** (1996) 1943.
- [3] R. D. Hazeltine and J. D. Meiss, Plasma Confinement, Addison-Wesley, New York, (1992).
- [4] 徳田伸二, 渡邊朋子, MARG1D : 1次元外部領域接続データコード, JAERI-Data/Code 95-011 (1995).
- [5] 徳田伸二, 渡邊朋子, 抵抗性磁気流体力学安定性解析における線形内部層方程式の差分法, JAERI-Research 96-044 (1996).
- [6] 福原満洲雄, 常微分方程式 第2版, 岩波書店, (1980).
- [7] G. Ara, B. Basu, B. Coppi, G. Laval, M.N. Rosenbluth, and B. V. Waddell, Magnetic Reconnection and  $m = 1$  Oscillations in Current Carrying Plasmas, Annals of Phys.. **112** 443-476 (1978).
- [8] 森口繁一, 岩波 数学公式 III, 岩波書店, (1960).

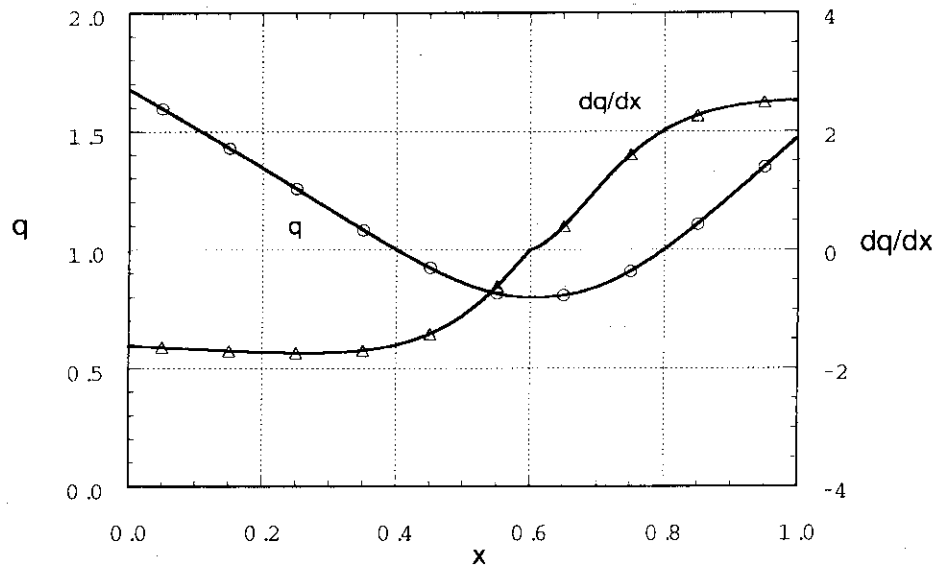


図 7.1: テスト計算に用いる  $q$  分布。パラメータは次の通り:  $q_0 = 0.8$ ,  $a_L = 2.0$ ,  $a_R = 2.5$ ,  $q_r = 1.0$ ,  $x_1 = 0.4$ ,  $x_2 = 0.8$

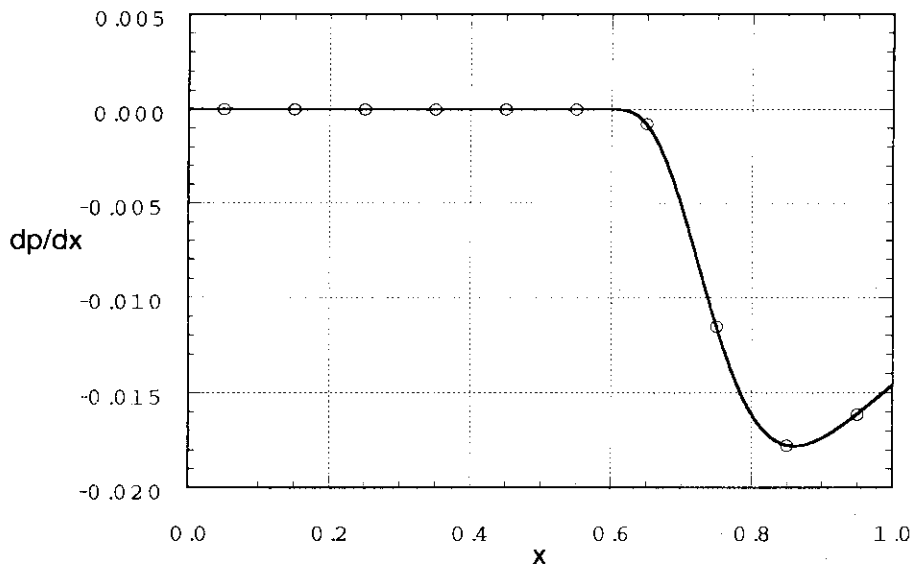


図 7.2: テスト計算荷に用いる圧力勾配  $dp/dx$ 。(7.8)式で  $\epsilon = 0.2$ ,  $\mu = 0.48989795$ , また、 $x < 0.6$  では  $dp/dx = 0$  である。



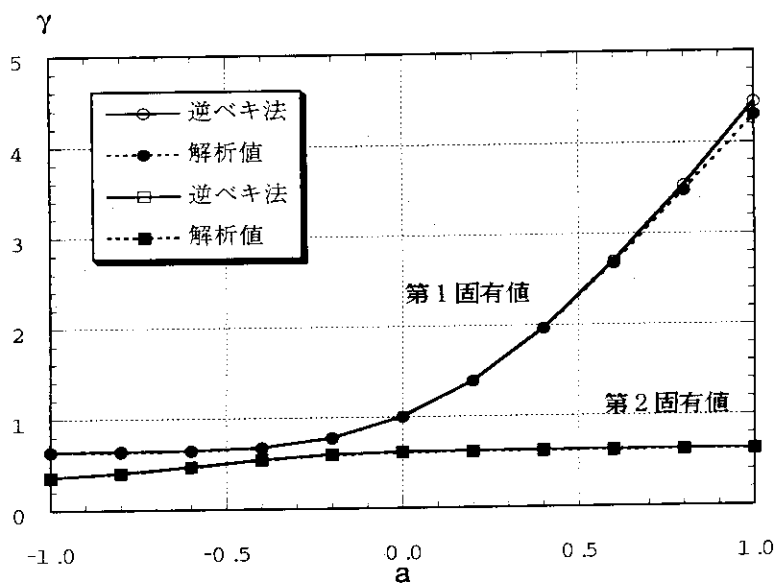


図 7.3: 固有値  $\gamma$  の  $a$  依存性 ( $\lambda = 4aT_{21}/\epsilon_2$ )。記号「○」及び「□」は、それぞれ、逆ベキ法で求めた第1固有値と第2固有値を、記号「●」及び「■」は、2次方程式(6.43)より求めた第1および第2固有値を示す。このスケールでは、いずれも重なっている。

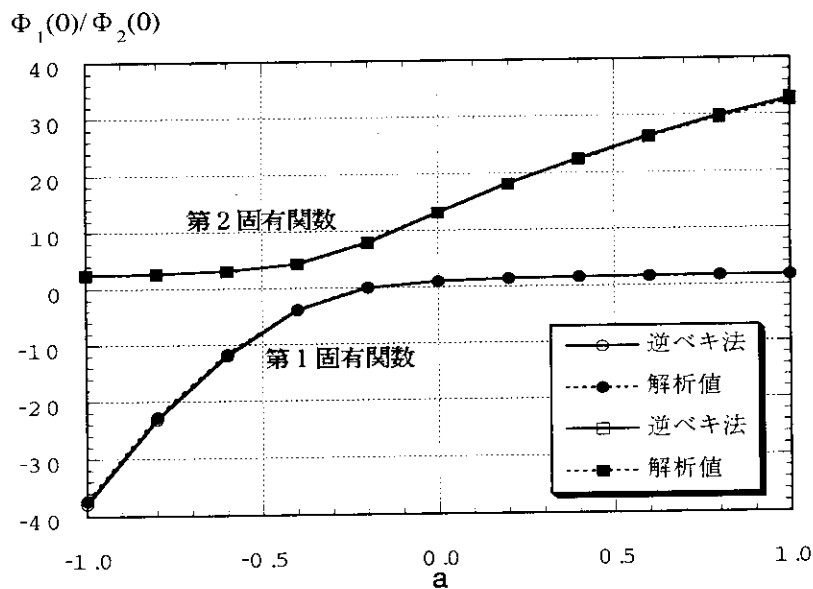


図 7.4:  $z = 0$  における固有関数の第1成分と第2成分の比  $\phi_1(0)/\phi_2(0)$  の  $a$  依存性。記号の意味は図 7.3 と同じ。解析値は(6.51)式から求める。このスケールでは数値解と解析値は重なっている。

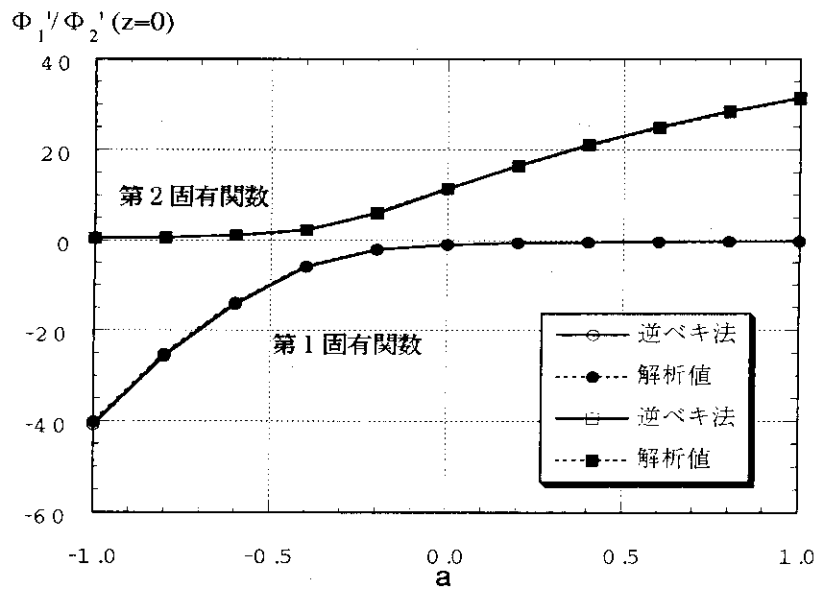


図 7.5: 固有関数の第1成分の  $z = 0$  における微分係数と第2成分のそれの比  $\phi_1'(0)/\phi_2'(0)$  の  $a$  依存性。記号の意味は図 7.3 と同じ。解析値は (6.52) 式から求める。このスケールでは数値解と解析値は重なっている。

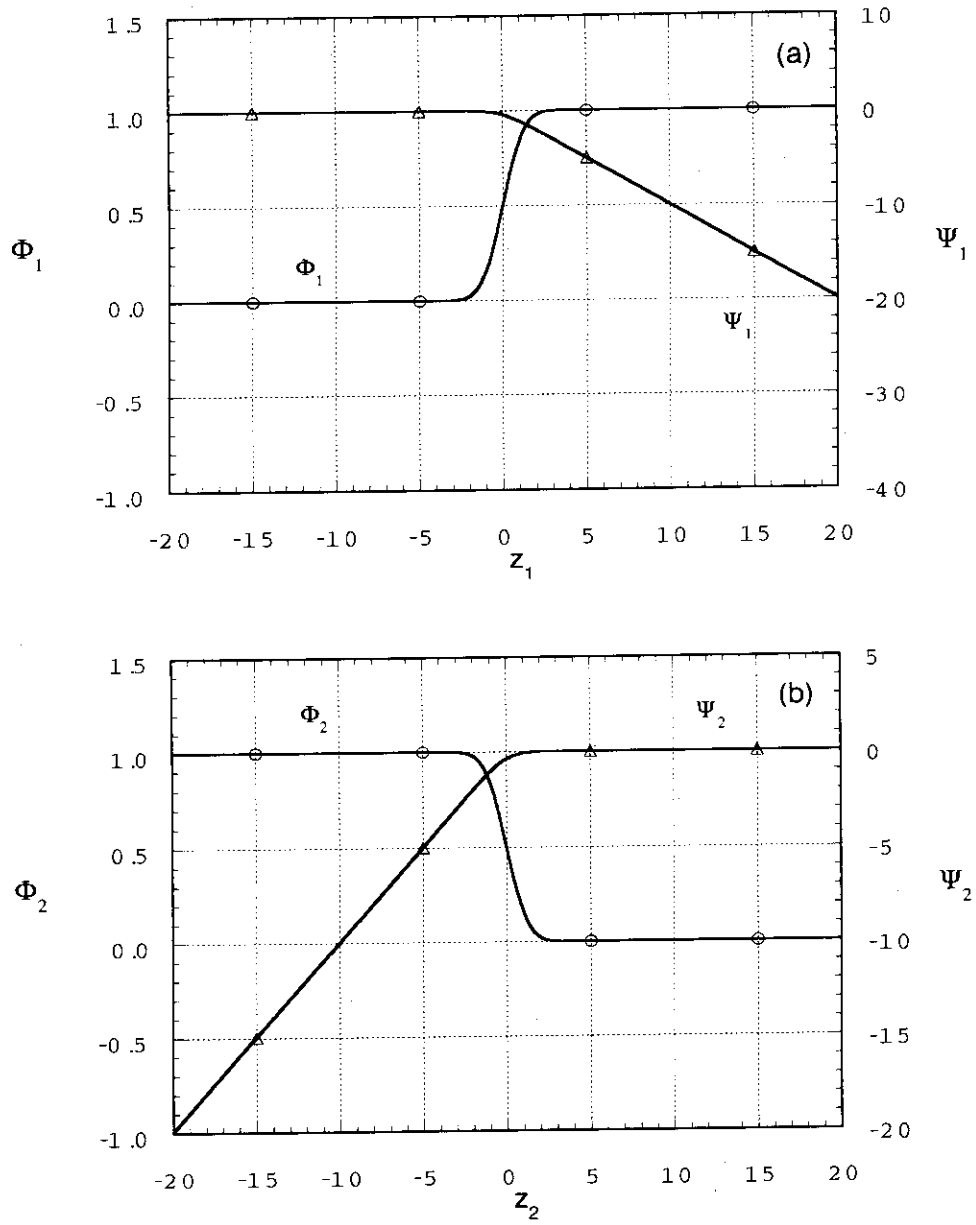


図 7.6:  $a = 0$ 、 $N = 200$  に対する第 1 固有関数 ( $\gamma = 1.0016688$ )。

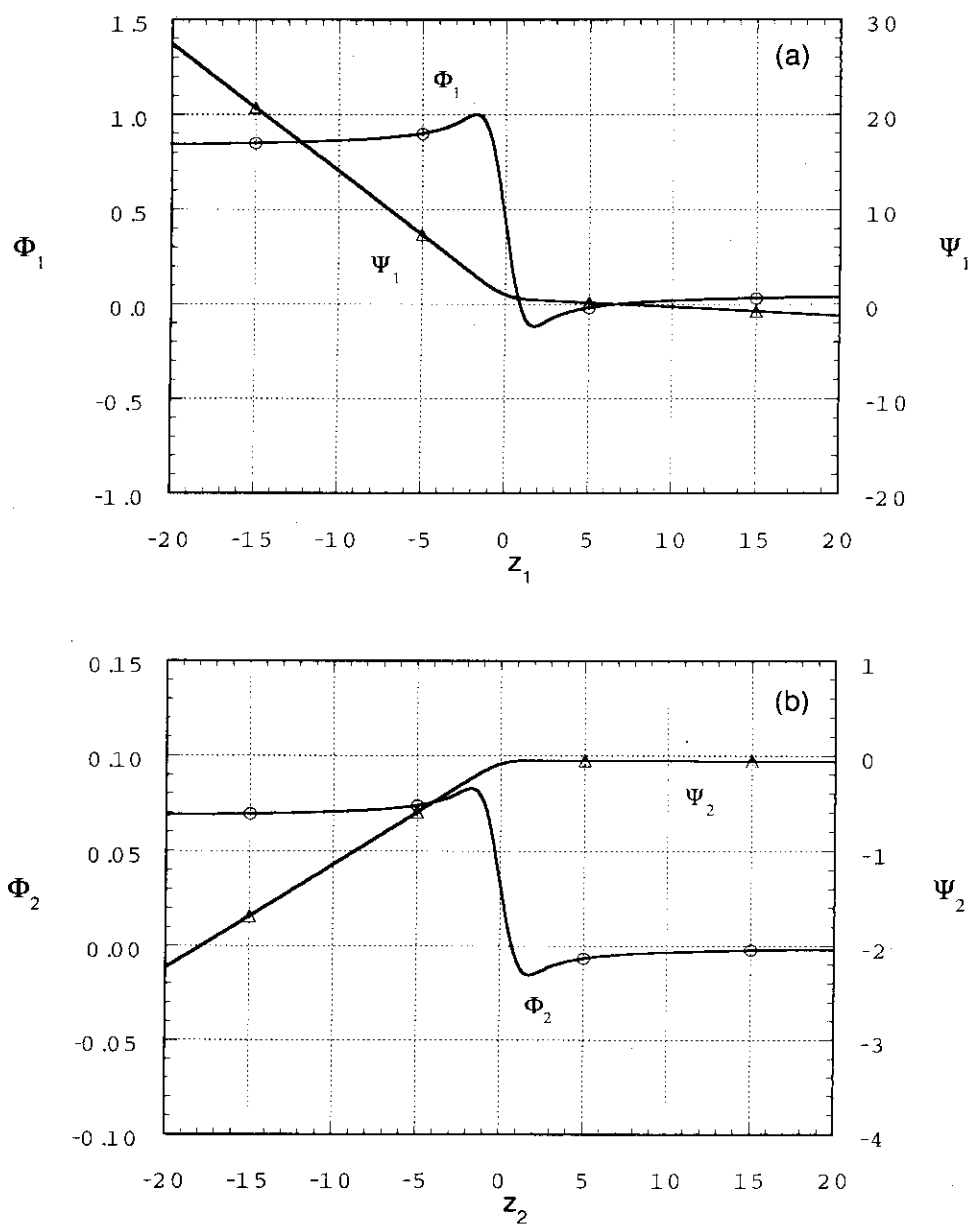


図 7.7:  $a = 0$ 、 $N = 200$  の場合の第 2 固有関数 ( $\gamma = 0.61416272$ )。

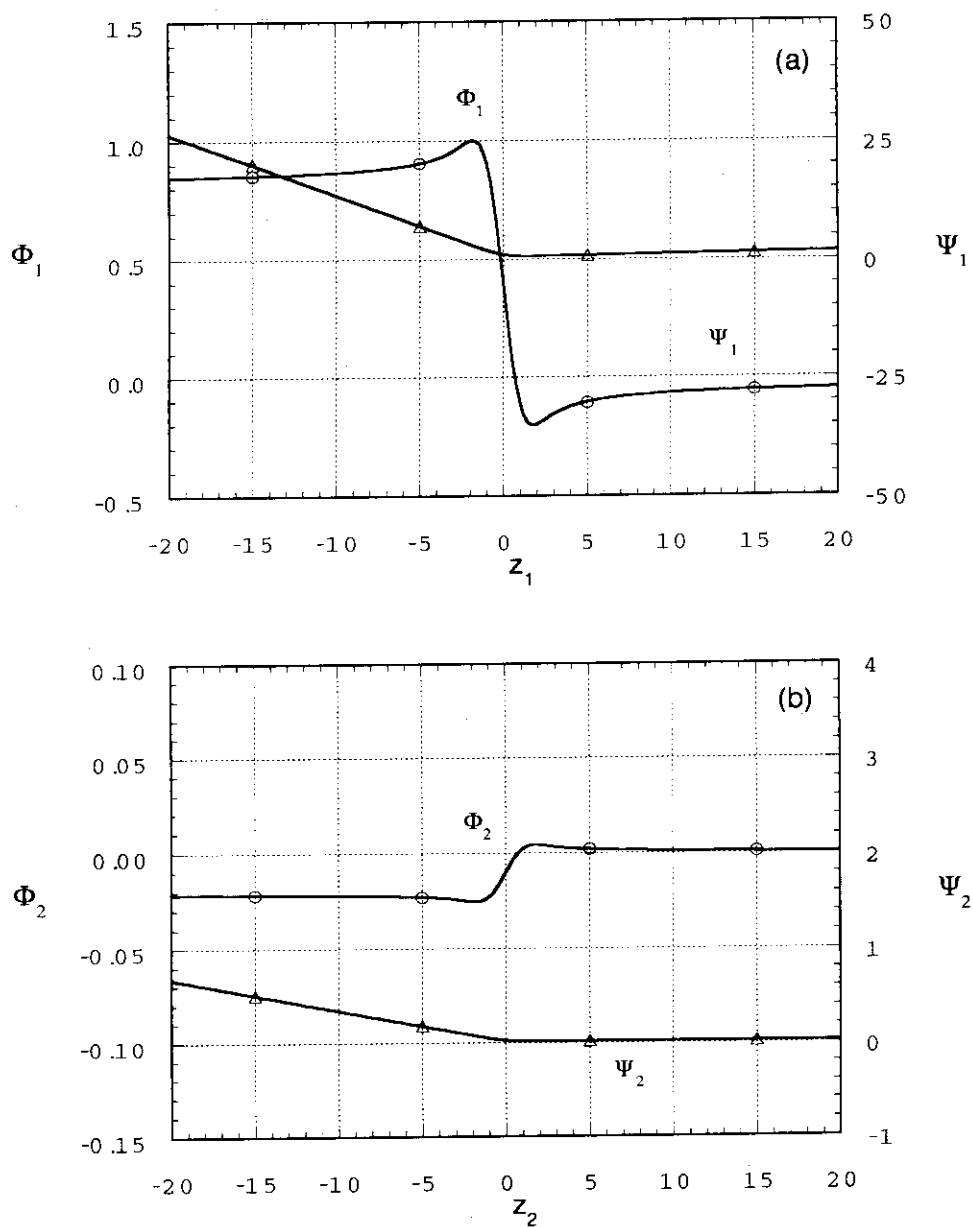


図 7.8:  $a = -1$ 、 $N = 200$  の場合の第 1 固有関数 ( $\gamma = 0.64043140$ )。

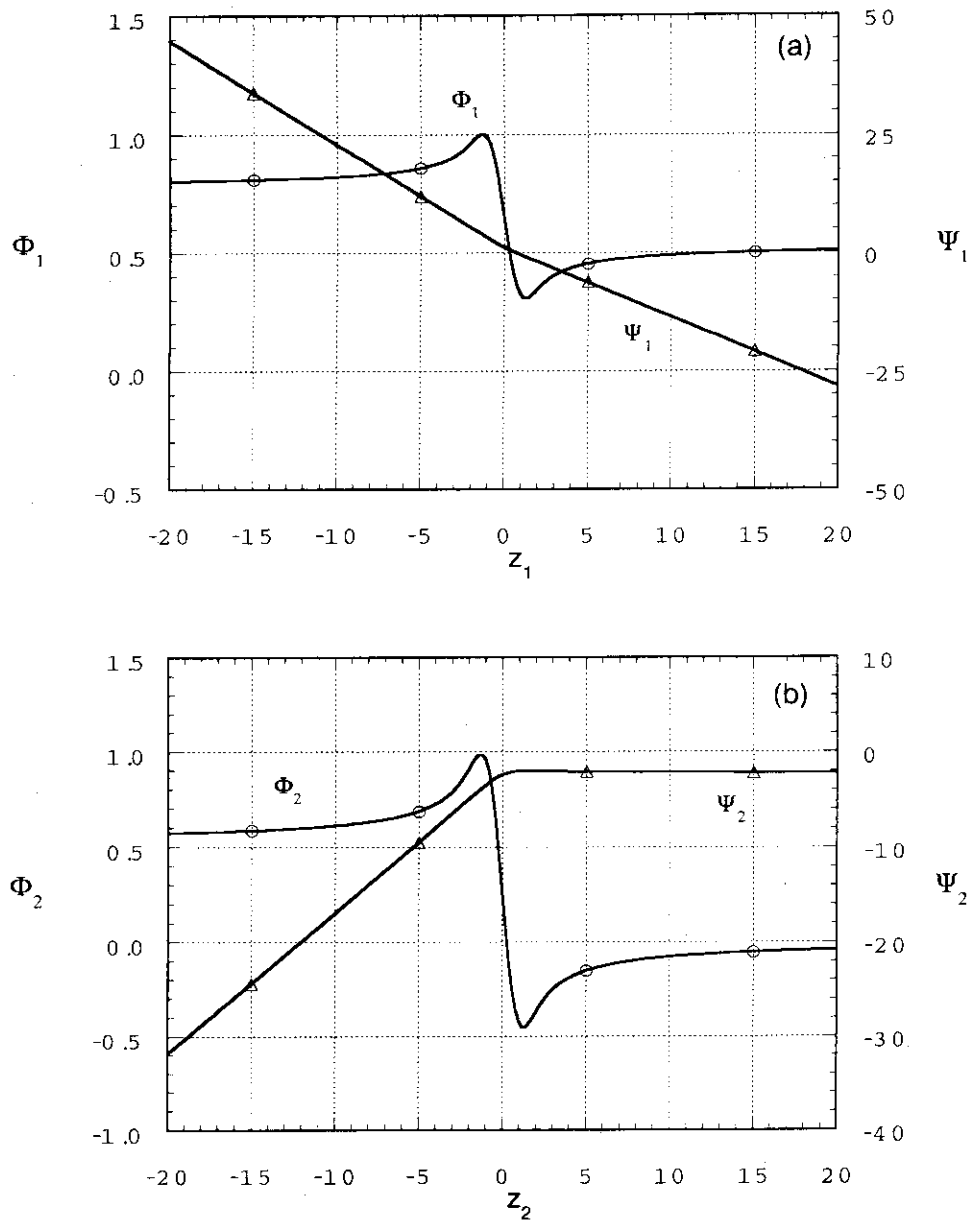


図 7.9:  $a = -1$ 、 $N = 200$  の場合の第 2 固有関数 ( $\gamma = 0.35868452$ )。

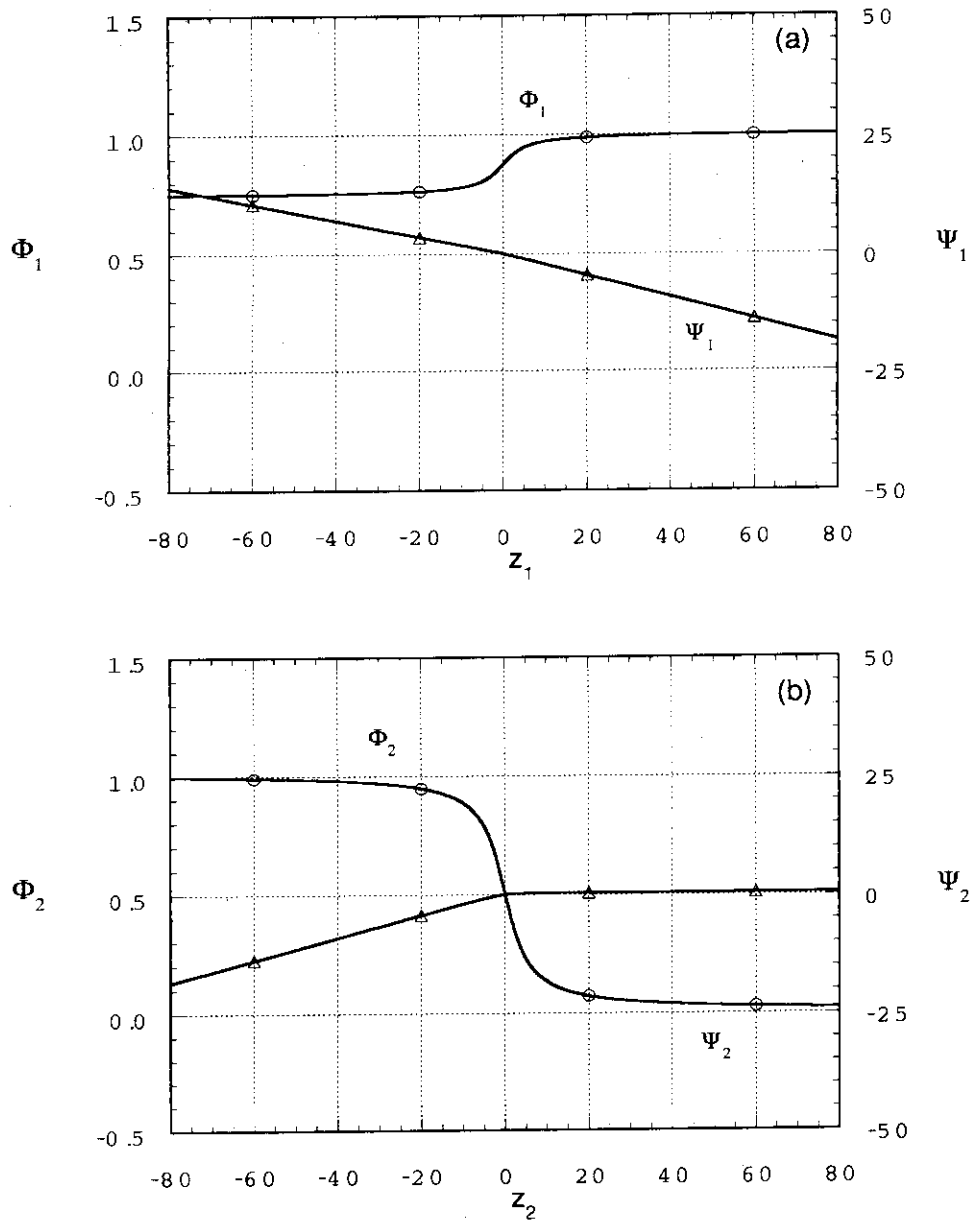


図 7.10:  $a = 1$ ,  $N = 800$  の場合の第 1 固有関数 ( $\gamma = 4.3040259$ )。理想 MHD モード的であるので  $\varphi_1(z)$  の幅が広がっている。

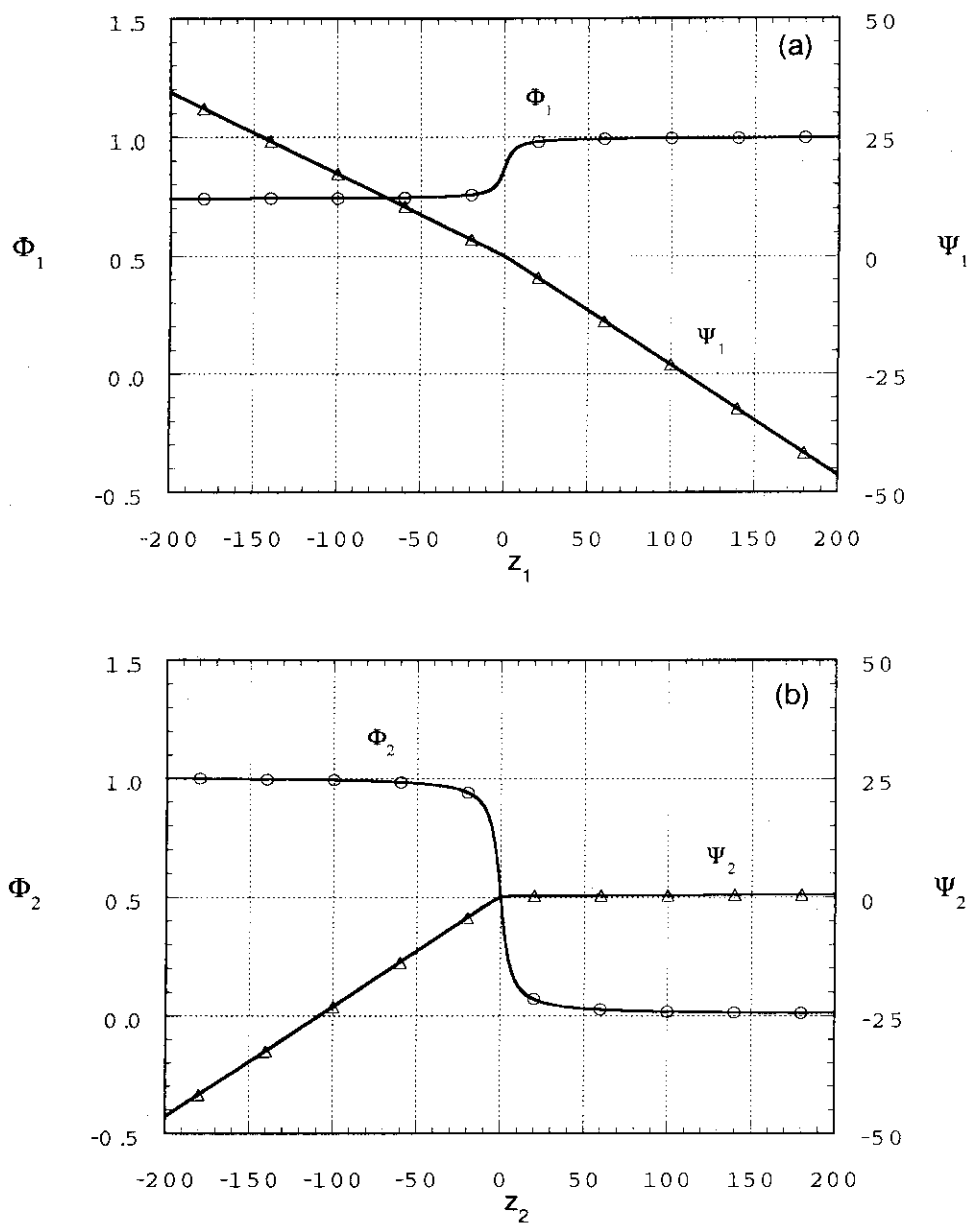


図 7.11:  $a = 1$ ,  $N = 2000$  の場合の第 1 固有関数 ( $\gamma = 4.3002494$ )。



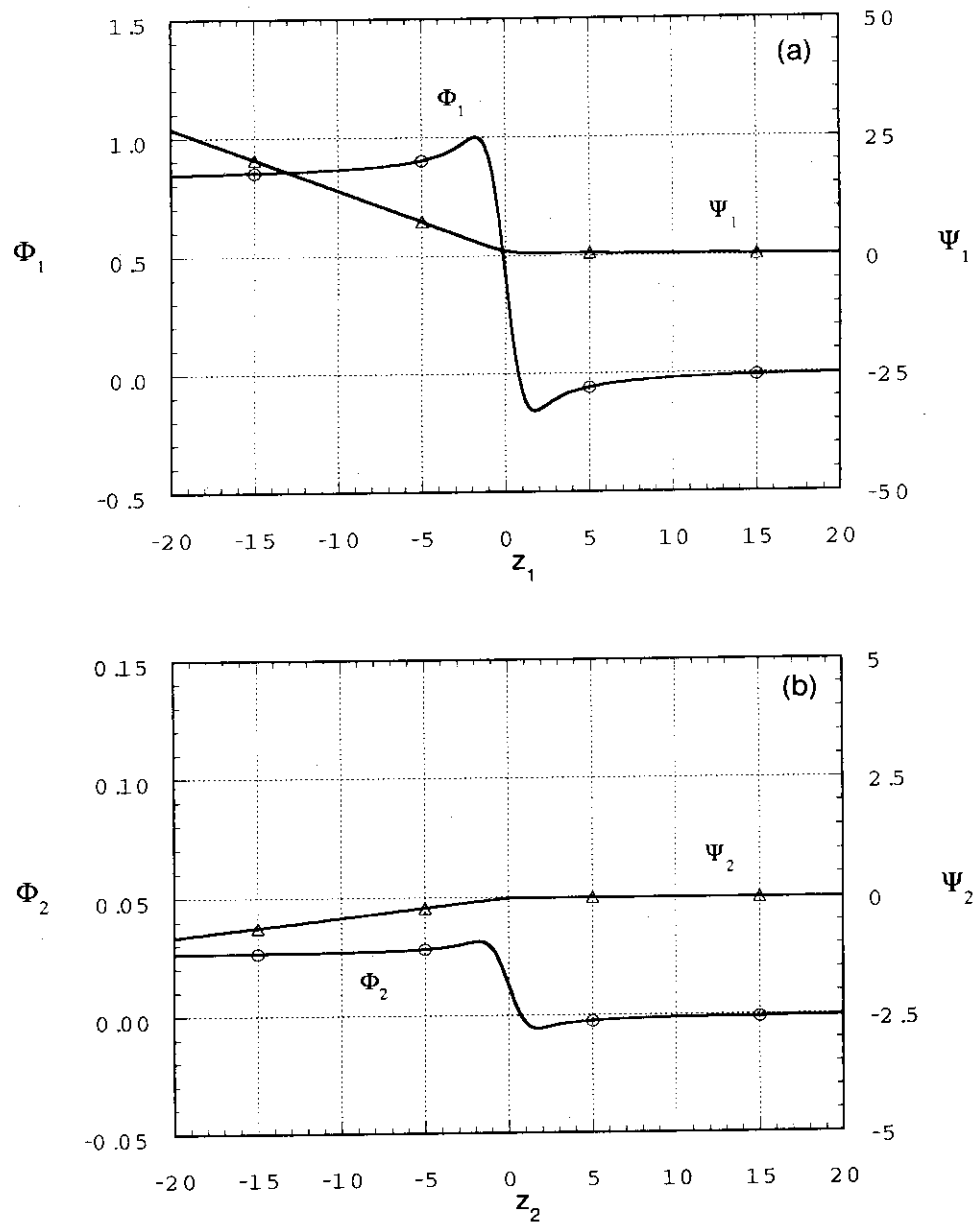


図 7.12:  $a = 1$ ,  $N = 200$  の場合の第 2 固有関数 ( $\gamma = 0.62695978$ )。

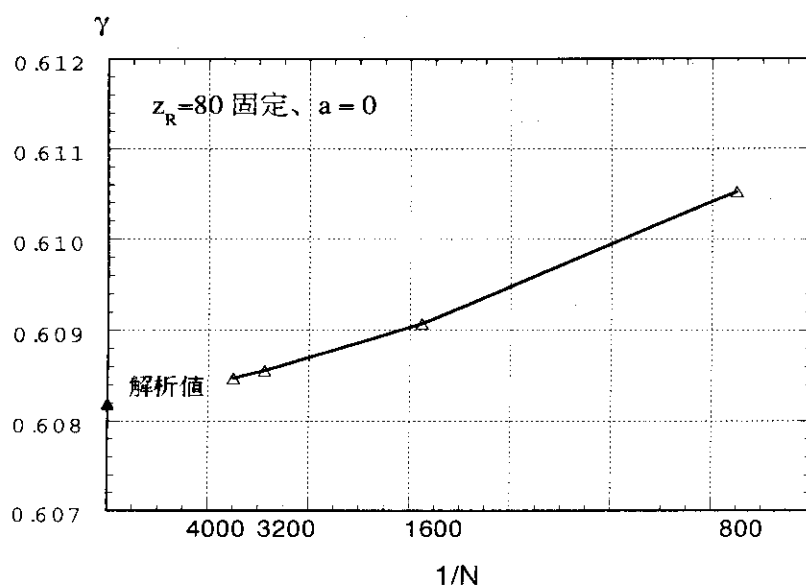


図 7.13:  $z_R = 80$  に固定した場合のグリッド点数  $N$  に対する第 2 固有値  $\gamma$  の収束 ( $a = 0$ )。横軸は  $1/N$  スケールである。

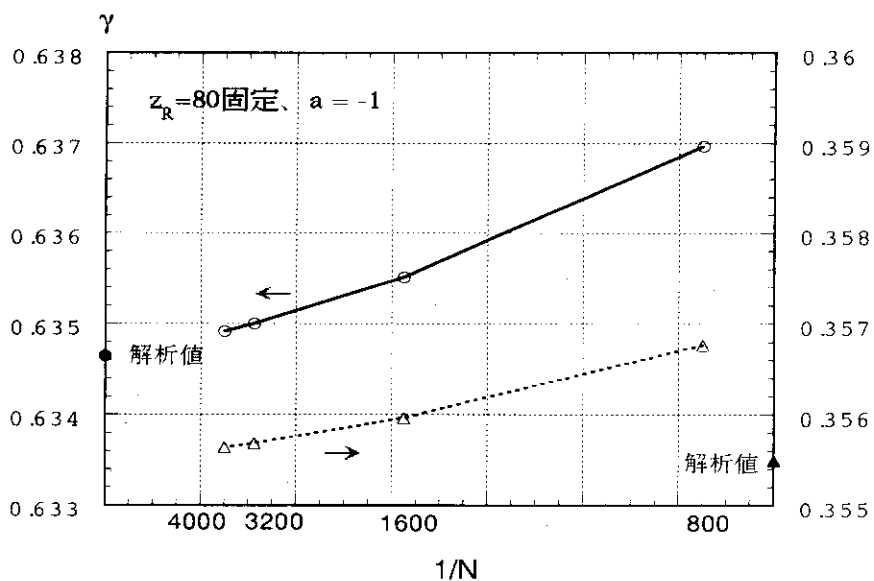


図 7.14:  $z_R = 80$  に固定した場合のグリッド点数  $N$  に対する第 1 固有値 (実線) および第 2 固有値 (点線) の収束 ( $a = -1$ )。左軸上の ● は第 1 固有値の解析値を、右軸上の ▲ は第 2 固有値の解析値を示す。

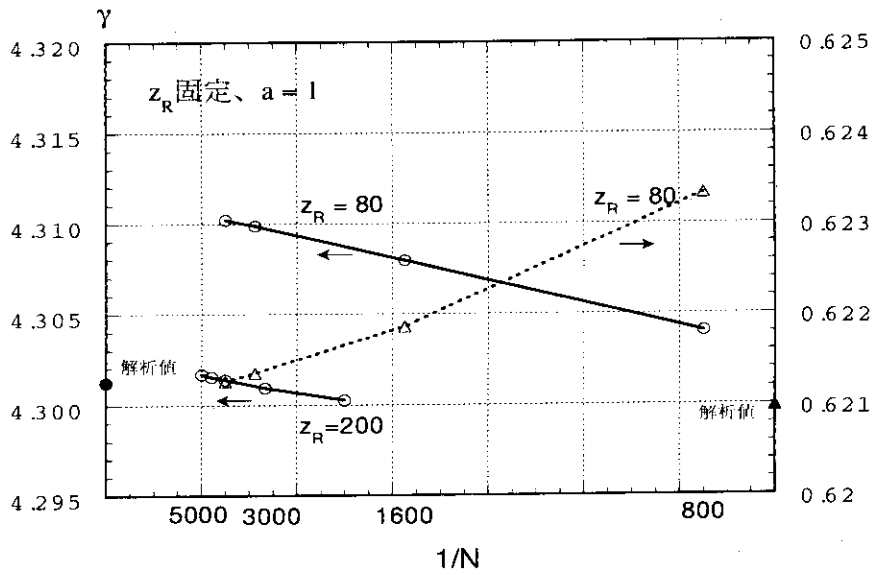


図 7.15:  $a = 1$  の場合のグリッド点数  $N$  に対する固有値の収束。実線は  $z_R = 80$  および  $200$  に対する第 1 固有値の収束曲線、点線は  $z_R = 80$  に対する第 2 固有値の収束曲線を示す。 $z_R = 80$  のとき、第 1 固有値は解析値 (左軸上の●で示されている) から離れた値に収束するが、 $z_R = 200$  のとき解析値への収束が改善される。一方、第 2 固有関数は  $z_R = 80$  で、解析値 (右軸上の▲で示されている) に収束する。

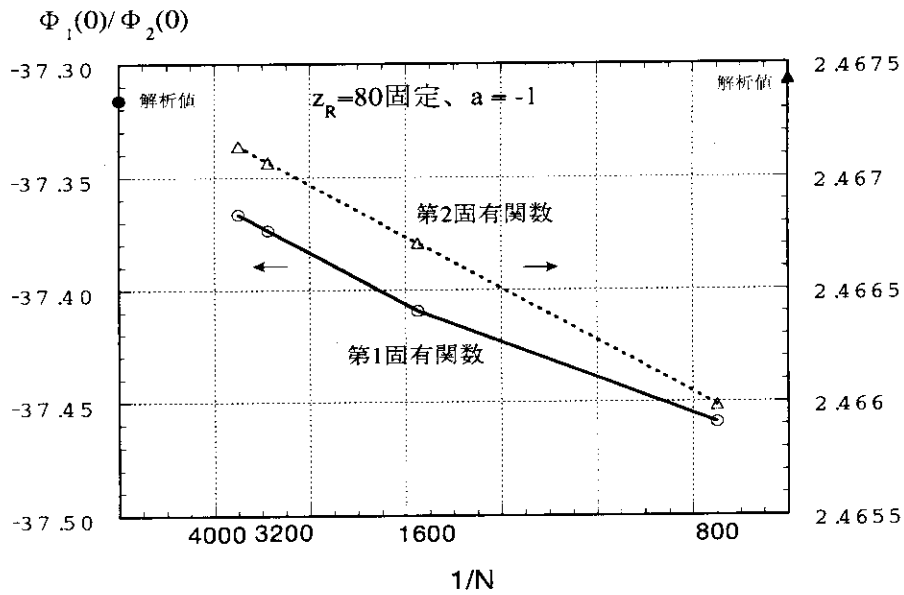


図 7.16:  $z_R = 80$  に固定したときの比  $\varphi_1(0)/\varphi_2(0)$  のグリッド点数  $N$  に対する収束 ( $a = -1$ )。実線は第 1 固有関数に対する、点線は第 2 固有関数に対する収束曲線である。

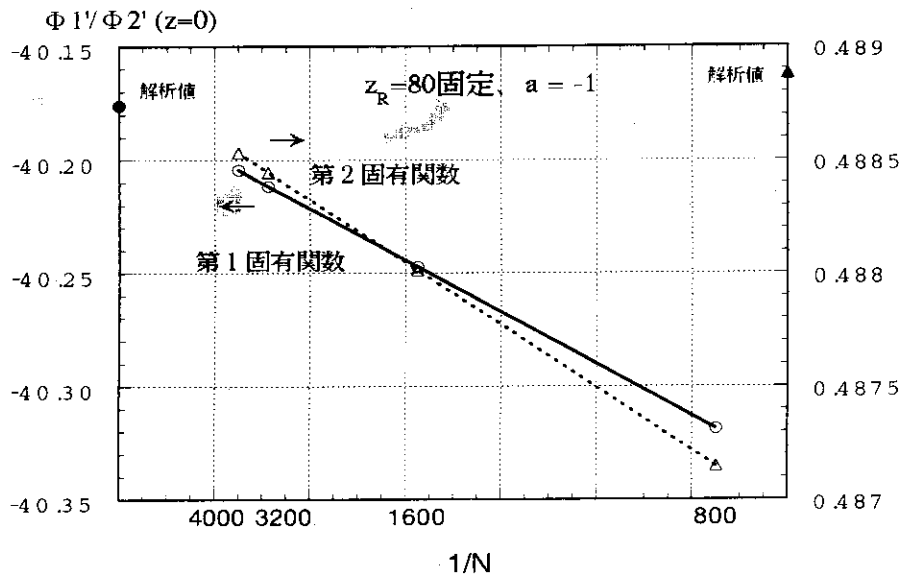


図 7.17:  $a = -1$  で、 $z_R = 80$  に固定したときの比  $\varphi_1'(0)/\varphi_2'(0)$  の収束曲線 (実線:第 1 固有関数、点線:第 2 固有関数)。

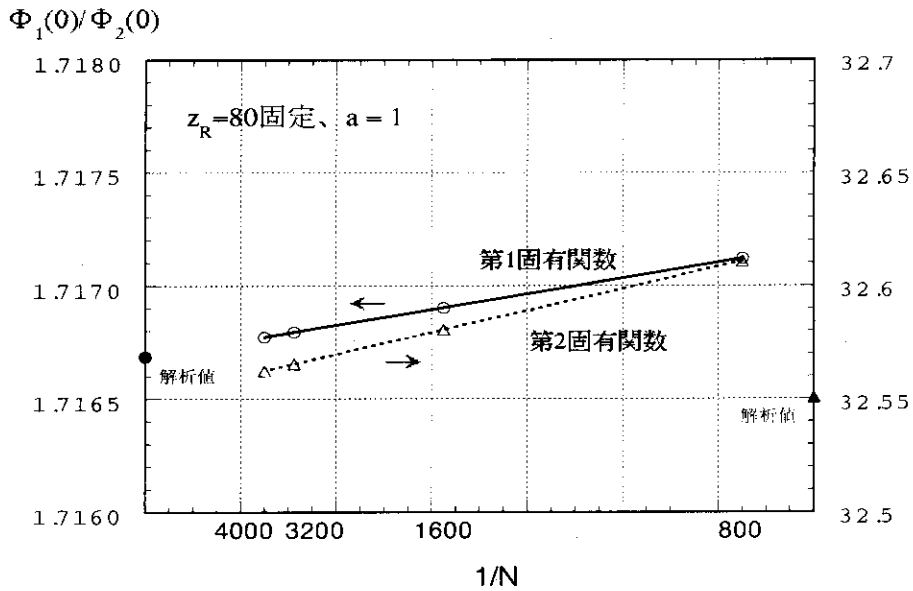


図 7.18:  $a = 1$  で、 $z_R = 80$  に固定したときの比  $\varphi_1(0)/\varphi_2(0)$  の収束曲線 (実線:第 1 固有関数、点線:第 2 固有関数)。

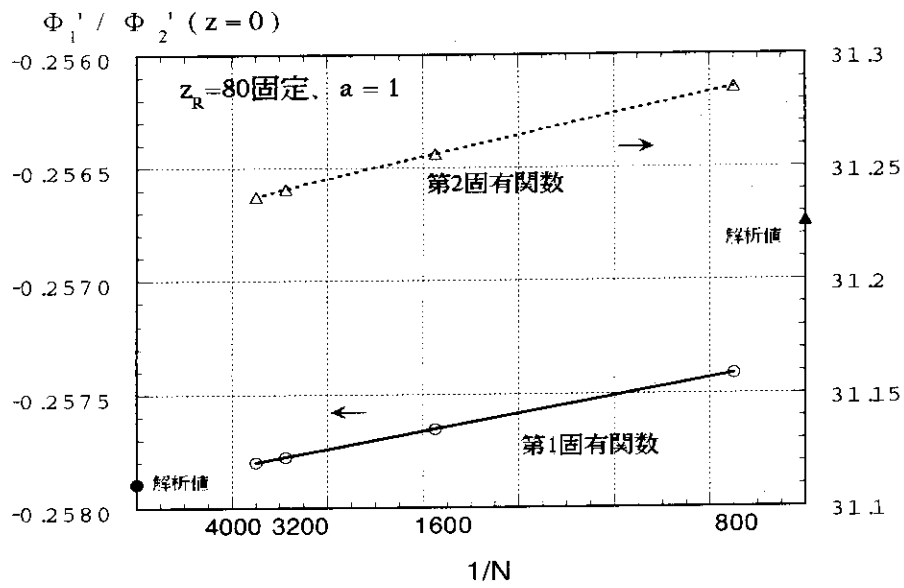


図 7.19:  $a = 1$  で、 $z_R = 80$  に固定したときの比  $\phi_1'(0)/\phi_2'(0)$  の収束曲線 (実線: 第 1 固有関数、点線: 第 2 固有関数)。

## 付録A モデル方程式の解析解

モデル方程式

$$\gamma \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \operatorname{sgn}(k_{\parallel}) z \frac{d^2 \psi}{dz^2} \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma \psi = -\operatorname{sgn}(k_{\parallel}) z \varphi + \frac{d^2 \psi}{dz^2} \quad (\text{A.2})$$

はパリティで分類できる。以下 $\varphi$ のパリティでモデル方程式の解を分類し、 $(\varphi_{\text{even}}, \psi_{\text{odd}})$ を偶、 $(\varphi_{\text{odd}}, \psi_{\text{even}})$ を奇の解と呼ぶことにする。(A.1)、(A.2)式は偶の解

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= c \\ \gamma \psi(z) &= -c \operatorname{sgn}(k_{\parallel}) z \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

をもつ。したがって以下奇の解を求めればよい。 $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ を

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) \exp(ikz) dk, \quad \psi(z) = i \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k) \exp(ikz) dk \quad (\text{A.4})$$

$$\varphi(-z) = -\varphi(z) \quad (\text{A.5})$$

とおく。このとき $\Phi(k)$ は $k$ について奇( $\Phi(-k) = -\Phi(k)$ )、 $\Psi(k)$ は $k$ について偶( $\Psi(-k) = \Psi(k)$ )である。

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \Phi(k) \exp(ikz) dk, \quad \frac{d^2 \psi}{dz^2} = -i \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \Psi(k) \exp(ikz) dk \quad (\text{A.6})$$

を使うと、 $\Psi(k)$ は

$$\Psi(k) = - \frac{\operatorname{sgn}(k_{\parallel})}{\gamma + k^2} \frac{d\Phi}{dk} \quad (\text{A.7})$$

と解ける。そして、 $\Phi(k)$ についての2階常微分方程式

$$\frac{d}{dk} \left[ \frac{k^2}{\gamma + k^2} \frac{d\Phi}{dk} \right] - \gamma k^2 \Phi(k) = 0 \quad (\text{A.8})$$

を得る。この方程式に対して $k=0$ は確定特異点であり、そのまわりの解は $k=0$ で正則な解と $1/k$ から始まるFrobenius解とからなる。そして $\Phi(k)$ は奇関数であるので $k>0$ 側だけを考えればよい。この方程式の一般解は合流型超幾何関数で表すことができる。まず、 $x = \delta^2 k^2$  ( $\delta$ はあとで決める定数)、および

$$\Phi(k) = \Xi(x) \exp(-x/2) \quad (\text{A.9})$$

とおく。

$$\frac{1}{k} \frac{d\Psi}{dk} = 2\delta^2 \left( \frac{d\Xi}{dx} - \frac{1}{2} \Xi \right) \exp(-x/2) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dk^2} = 2\delta^2 \frac{d\Phi}{dx} + 4\delta^2 x \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \quad (\text{A.11})$$

より (A.8) 式は

$$x \frac{d^2 \Xi}{dx^2} + \left\{ \left( \frac{1}{2} - x \right) + \frac{\gamma}{\gamma + x/\delta^2} \right\} \frac{d\Xi}{dx} + \frac{1}{4} \left\{ \left( 1 - \frac{\gamma}{\delta^4} \right) x - \left( 1 + \frac{\gamma^2}{\delta^2} \right) - \frac{2}{\gamma + x/\delta^2} \right\} \Xi = 0 \quad (\text{A.12})$$

となる。そこで、 $\gamma = \delta^4$  に選ぶと ( $\delta^2 = \sqrt{\gamma}$ ,  $\gamma^2/\delta^2 = \gamma^{3/2}$ )、 $\Xi$  に対する方程式は

$$x \frac{d^2 \Xi}{dx^2} + \left\{ \left( \frac{1}{2} - x \right) + \frac{Q}{Q+x} \right\} \frac{d\Xi}{dx} - \frac{1}{4} \left\{ (1+Q) + \frac{2Q}{Q+x} \right\} \Xi = 0 \quad (\text{A.13})$$

となる。ここで

$$Q = \gamma^{3/2} \quad (\text{A.14})$$

(A.13) 式の  $x=0$  で正則な解を

$$\Xi = F(a, b; x) + cx F(p, q; x) \quad (\text{A.15})$$

とおく。ここで、 $F(a, b; z)$  は合流型超幾何関数で微分方程式

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + (b-z) \frac{dy}{dz} - ay = 0 \quad (\text{A.16})$$

の解である。

定数  $a, b, c, p, q$  は (A.15) 式が (A.13) 式を満たすように決められる。このとき、次の漸化式

$$F'(a, b; z) = F(a, b; z) + \left( \frac{a}{b} - 1 \right) F(a, b+1; z) \quad (\text{A.17})$$

$$z F'(p, q; z) = (q-1) F(p, q-1; z) - (q-1) F(p, q; z) \quad (\text{A.18})$$

と  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $iz \neq$  負の実数での漸近形

$$F(\alpha, \beta; z) \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \exp(z) z^{\alpha-\beta} \quad (\text{A.19})$$

を利用する [8]。 (A.13) 式は  $|x| \rightarrow \infty$  で

$$x \frac{d^2 \Xi}{dx^2} + \left( \frac{1}{2} - x \right) \frac{d\Xi}{dx} - \frac{1}{4} (1+Q) \Xi = 0 \quad (\text{A.20})$$

に近づく。これは  $F((1/4)(1+Q), 1/2; x)$  を解に持つから (A.13) 式の  $|z| \rightarrow \infty$  での漸近解の主要項は

$$\Xi(x) \sim \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma((1/4)(1+Q))} \exp(x) x^{(Q-1)/4} \quad (\text{A.21})$$

である。一方

$$F(a, b; x) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \exp(x)x^{a-b} \quad (\text{A.22})$$

$$czF(p, q; x) \sim c \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} \exp(x)x^{p-q+1} \quad (\text{A.23})$$

したがって、(A.22)式と(A.23)式が同じ漸近形(A.21)を持つ条件より

$$a - b = \frac{1}{4}(Q - 1), \quad p - q + 1 = \frac{1}{4}(Q - 1) \quad (\text{A.24})$$

を得る。

次に、方程式(A.13)より  $d\Xi/dx - 1/2\Xi$  は  $Q+x$  を因子に持つ必要がある。漸化式(A.17)、(A.18)を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d\Xi}{dx} - \frac{1}{2}\Xi &= \frac{1}{2}F(a, b; x) + \left(\frac{a}{b} - 1\right)F(a, b+1; x) \\ &+ c(q-1)F(p, q-1; x) + c\left(2 - q + \frac{Q}{2}\right)F(p, q; x) \\ &- \frac{c}{2}(Q+x)F(p, q; x) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

を得る。右辺の最後の項を除く項が恒等的にゼロである条件および(A.24)式から、定数  $a, b, c, p, q$  が決定され、それらは

$$a = p = \frac{1}{4}(Q+5), \quad b = \frac{3}{2}, \quad q = \frac{5}{2}, \quad c = -\frac{1}{3} \quad (\text{A.26})$$

で与えられる。以上から  $\Xi$  の関数形が

$$\Xi = F\left(\frac{1}{4}(Q+5), \frac{3}{2}\right) - \frac{x}{3}F\left(\frac{1}{4}(Q+5), \frac{5}{2}\right) \quad (\text{A.27})$$

で決まる。これを、直接微分方程式に代入することにより、(A.27)式は方程式(A.13)の解であることが確認できる。 $x \rightarrow 0$  で  $1/\sqrt{x}$  となる解も同様にして求めることができる。すなわち

$$\Xi = x^{-1/2}F(a, b; x) + cx^{1/2}F(p, q; x) \quad (\text{A.28})$$

とおくと、 $|x| \rightarrow \infty$  での漸近条件から

$$a - b - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(Q - 1), \quad p - q + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(Q - 1) \quad (\text{A.29})$$

を得る。また、(A.29)式と  $\Xi - (1/2)\Xi$  が  $Q+x$  を因子に持つ条件から、定数  $a, b, c, p, q$  が決定され

$$a = p = \frac{1}{4}(3+Q), \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1+Q}{Q}, \quad q = \frac{3}{2} \quad (\text{A.30})$$

を得る。これから(A.28)の関数が

$$\Xi(x) = x^{-1/2}F\left(\frac{1}{4}(3+Q), \frac{1}{2}; x\right) - \frac{1+Q}{Q}x^{1/2}F\left(\frac{1}{4}(3+Q), \frac{3}{2}; x\right) \quad (\text{A.31})$$



と決定され、これも方程式 (A.13) を満たすことが確認できる。

結論として

$$x \frac{d^2 \Xi}{dx^2} + \left\{ \left( \frac{1}{2} - x \right) + \frac{Q}{Q+x} \right\} \frac{d\Xi}{dx} - \frac{1}{4} \left\{ (1+Q) + \frac{2Q}{Q+x} \right\} \Xi = 0 \quad (\text{A.32})$$

の2つの1次独立な解は合流型超幾何関数で表すことができる。そして、 $x=0$ で正則な解

$$\Xi_1(x) = F\left(\frac{1}{4}(Q+5), \frac{3}{2}; x\right) - \frac{x}{3} F\left(\frac{1}{4}(Q+5), \frac{5}{2}; x\right) \quad (\text{A.33})$$

であり、 $x \rightarrow 0$ で $1/\sqrt{x}$ となる解は

$$\Xi_2(x) = x^{-1/2} F\left(\frac{1}{4}(Q+3), \frac{1}{2}; x\right) - \frac{1+Q}{Q} x^{1/2} F\left(\frac{1}{4}(Q+3), \frac{3}{2}; x\right) \quad (\text{A.34})$$

である。また  $x \rightarrow +\infty$  のときの  $\Xi_1(x)$ 、 $\Xi_2(x)$  の漸近形は

$$\Xi_1(x) \sim \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma((1/4)(Q+5))} \exp(x) x^{(1/4)(Q-1)} \quad (\text{A.35})$$

$$\Xi_2(x) \sim \frac{2}{Q} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma((1/4)(Q-1))} \exp(x) x^{(1/4)(Q-1)} \quad (\text{A.36})$$

$$(\text{A.37})$$

で与えられる。もともと解くべき方程式は

$$\frac{d}{dk} \left[ \frac{k^2}{\gamma + k^2} \frac{d\Phi}{dk} \right] - \gamma k^2 \Phi = 0 \quad (\text{A.38})$$

である。この方程式の解  $\Phi(k)$  は

$$\Phi(k) = c_\infty \exp(-x/2) [\Xi_1(x) + \bar{\Delta}(\gamma) \Xi_2(x)] \quad (\text{A.39})$$

$$x = \sqrt{\gamma} k^2 \quad (\text{A.40})$$

と書ける。フーリエ空間における接続データ  $\bar{\Delta}$  は次の条件

$$\left[ k \rightarrow +\infty \text{で} \Phi(k) \text{は有限(発散しない)} \right]$$

から決まる。(A.35)、(A.36)式より  $\bar{\Delta}$  に対する方程式

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma((1/4)(Q+5))} + \bar{\Delta}(\gamma) \frac{2}{Q} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma((1/4)(Q-1))} = 0, \quad Q = \gamma^{3/2} \quad (\text{A.41})$$

を得る。これより  $\bar{\Delta}$  は

$$\bar{\Delta}(\gamma) = -\frac{Q \Gamma((1/4)(Q-1))}{8 \Gamma((1/4)(Q+5))} \quad (\text{A.42})$$

で与えられることが分かる。(A.39)、(A.40)式より  $k \rightarrow +0$  では

$$\Phi(k) \rightarrow c_\infty \left( 1 + \gamma^{-1/4} \bar{\Delta}(\gamma) \frac{1}{k} \right) \quad (\text{A.43})$$

である。ここで  $1/k$  が実空間における「小さい解」、定数項が実空間における「大きい解」に対応する。そして、モデル方程式の解  $\phi_{\text{odd}}(z)$  の  $z \rightarrow +\infty$  での漸近形を

$$\phi_{\text{odd}}(z) \sim c_{\text{odd}} \left( \frac{1}{z} + \Delta_o(\gamma) \right) \quad (\text{A.44})$$

とおくと、接続データ  $\Delta_o$  と  $\bar{\Delta}$  との間には関係式

$$\Delta_o(\gamma) = \frac{\pi}{2} \gamma^{-1/4} \bar{\Delta}(\gamma) \quad (\text{A.45})$$

が成立する。これに (A.42) 式を用いると

$$\Delta_o(\gamma) = -\frac{\pi}{2} \frac{\gamma^{5/4}}{8} \frac{\Gamma((1/4)(Q-1))}{\Gamma((1/4)(Q+5))} \quad (\text{A.46})$$

を得る。

## 付録B プログラム仕様

## B.1 接続データの計算手順

$$1. f_{10} = \frac{x_1^3}{1 + \epsilon^2 x_1^2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \right]_{x=x_1}^2 = \frac{x_1^3}{1 + \epsilon^2 x_1^2} \left( \frac{dq}{dx} \right)^2 \frac{1}{q(x_1)^4}$$

$$2. f_{11} = \left( a(x_1)b(x_1) + \frac{db}{dx} \Big|_{x=x_1} \right) \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \right]_{x=x_1}^2$$

$$a(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{q} \right) / \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right)$$

$$b(x) = \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{3x^2}{1 + \epsilon^2 x^2} - 2\epsilon^2 \frac{x^4}{(1 + \epsilon^2 x^2)^2}$$

$$3. f_{20} = \frac{x_2^3}{1 + \epsilon^2 x_2^2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \right]_{x=x_2}^2$$

$$4. f_{21} = \left( a(x_2)b(x_2) + \frac{db}{dx} \Big|_{x=x_2} \right) \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \right]_{x=x_2}^2$$

5.  $\int_{x_1}^{x_0} h_1(z) dz$  を Simpson の積分で計算する。

$$h_1(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \frac{1}{x - x_1}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} - 1 \right)^2$$

$$6. c = -\frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x_0 - x_1} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log |x_0 - x_1| + \int_{x_1}^{x_0} h_1(z) dz$$

7.  $\int_{x_0}^{x_2} h_2(z) dz$  を Simpson の積分で計算する。

$$h_2(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{(x - x_2)^2} + \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \frac{1}{x - x_2}$$

$$8. d = \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x_0 - x_2} + \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log |x_2 - x_0| + \int_{x_0}^{x_2} h_2(z) dz + c$$

$$9. \Lambda = -\frac{f_{10}}{f_{20}}, \quad \hat{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\epsilon_2}, \quad \epsilon_2 = S_2^{-1/3} L_{R2}$$

$$\Delta_{12} = -f_{10} d$$

$$\Delta_{11} = 0, \quad \Delta_{21} = \Delta_{22} = 1$$

$$\lambda_0 = 0, \quad \hat{\Omega} = \frac{\lambda_0 \Omega}{\epsilon_2} = 0$$

10.  $w_1(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} g(y)dy$  を Simpson の積分で計算する。

$$g(x) = \frac{2x^2}{1 + \epsilon^2 x^2} \left[ \frac{1}{\epsilon^2} \frac{dp}{dx} \right] + F^2 \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} - 1 \right) \left[ \left( \frac{1}{q} - 1 \right) - \frac{2}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} + 1 \right) \right]$$

11.  $w_{-2,1} = \frac{w_1(x_2)}{f_{20}}$

12. IT21FLG = 0 のとき  $T_{21} = \lambda_0 \Omega$

IT21FLG = 1 のとき  $T_{21} = \epsilon^2 w_{-2,1}$ ,  $T_{21} \leftarrow a T_{21}$ ,  $-1 \leq a \leq 1$

13.  $B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} + 1/(\epsilon_1 z_{1R}) & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} + \hat{\Lambda}/|z_{2L}| & \Delta_{22} + \hat{T}_{21}/|z_{2L}| \end{pmatrix}$ ,  $\hat{T}_{21} = \frac{T_{21}}{\epsilon_2}$

14.  $\Gamma = \begin{pmatrix} -1/(\epsilon_1 z_{1R}) & 0 \\ -\hat{\Lambda}/|z_{2L}| & -\hat{T}_{21}/|z_{2L}| \end{pmatrix}$

15.  $\Sigma = \Gamma B^{-1}$

16.  $\int_0^{x_1} g(x)dx$  を Simpson の積分で計算する。

17.  $\Delta_{L1}^{-1} = \frac{\epsilon^2}{f_{10}} \int_0^{x_1} g(x)dx$ ,  $\tilde{\Delta}_{L1}^{-1} = \frac{\Delta_{L1}^{-1}}{\epsilon_1}$ ,  $\epsilon_1 = S_1^{-1/3} L_{R1}$

18.  $f_{-2} = \frac{1}{f_{20}}$ ,  $f_{-1} = -\frac{f_{21}}{(f_{20})^2}$

19.  $\int_{x_2}^1 f_r(x)dx$  を変数変換を使った数値積分の方法で計算する。

$$f_r(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{f_{-2}}{(x - x_2)^2} - \frac{f_{-1}}{x - x_2}$$

20.  $\Delta_{R2} = -\frac{1}{1 - x_2} - \frac{f_{21}}{f_{20}} \log(1 - x_2) + f_{20} \int_{x_2}^1 f_r(x)dx$ ,  $\tilde{\Delta}_{R2} = \epsilon_2 \Delta_{R2}$

## B.2 ディレクトリ構造

ディレクトリ /DBTEAR の下の構造を示す。

<u>ディレクトリ</u>	<u>ファイル内容</u>	<u>ファイル名</u>
/ doc	仕様書 ディレクトリ LATEX 原稿 グラフ、プログラム フロー ポスト スクリプト	*.tex *.eps *.ps
/ ver2	プログラムのディレクトリ メイン プログラム サブルーチン、ファンクション インクルード ファイル メイクファイル 計算パラメータ 実行シェル スクリプト (vpp500/42 用) (ここで計算パラメータファイル名 を設定) 実行結果出力ファイル (付録 B.4参照)	main.f *.f makefile NML.DATA wex.sh

## B.3 入力データ

項目	配列	型	意味	default 値
ZRIGHT	-	R*8	$z_R$	1000.0
NDIV	-	I	$z$ の分割数	100
BALPHA	-	R*8	$\Psi$ の境界条件の $\alpha$	1.0
ISLOPT	-	I	固有値問題解法オプション = 0 のとき複素 Hessenberg 行列に変換して解く (SSL2 の DCEIG2 を使う) = 1 のとき逆ベキ法 (対角行列) で解く	0
CLAM0	-	C*16	逆ベキ法の固有値の初期値 $\gamma_0$ (ISLOPT = 1 のとき有効)	-
JOUTNO	10	I	ファイル出力する固有ベクトルの番号 (正の値の固有値に対応する固有ベクトルは自動的にファイル出力するので、ここで指定する必要はない) (ISLOPT = 0 のとき有効)	0, ..., 0
MM	-	I	ポロイダル・モード数 $m$	1
QZERO	-	R*8	$q_0$	0.9
QRAT	-	R*8	有理面での安全係数 $q_r$	1.0
QAPOWL	-	R*8	$a_L$	4.0
QAPOWR	-	R*8	$a_R$	4.0
IMUFLG	-	I	Suydam 指数 $\mu$ 設定フラグ = 0: $\mu$ は入力データ (SUYDAM) $\neq 0$ : $\mu = (1/2)\sqrt{1-\epsilon^2}$	1
SUYDAM	-	R*8	Suydam 指数 $\mu_1, \mu_2$ (IMUFLG = 0 のとき有効) ( $0 < \mu_1 \leq 1/2, 0 < \mu_2 \leq 1/2$ )	0.25
RRAT1	-	R*8	有理面 $x_1$	0.3
RRAT2	-	R*8	有理面 $x_2$	0.8
IDPFLG	-	I	(7.8) 式の $dp/dx$ で $x < x_0$ において IDPFLG = 1 のとき $dp/dx = 0$ とする IDPFLG = 0 のとき $dp/dx = 0$ としない	1
EPSLNA	-	R*8	逆アスペクト比 $\epsilon$ (IMUFLG $\neq 0$ のとき $\epsilon^2 \leq 3/4$ )	0.1
EPSLNB	-	R*8	数値積分をするときの端点と特異点の距離 $\epsilon_b$	$10^{-6}$
SLARG1	-	R*8	有理面 $r_1$ における磁気レイノズル数 $S_1$	$10^9$
SLARG2	-	R*8	有理面 $r_2$ における磁気レイノズル数 $S_2$	$10^9$
ICPLFL	-	I	$\Phi_1, \Psi_1$ と $\Phi_2, \Psi_2$ の結合フラグ ICPLFL = 0 のとき結合している ICPLFL = 1 のとき結合をはずす (有理面 1 枚の処理)	0

項目	配列	型	意味	default 値
IT21FL	-	I	$T_{21}$ 設定フラグ IT21FL = 0 のとき $T_{21} = \lambda_0 \Omega = 0$ IT21FL = 1 のとき $T_{21} = \epsilon^2 w_{-2,1}$	0
T21SCL	-	R*8	$T_{21}$ のスケール $a$ $T_{21} \leftarrow aT_{21}$ (IT21FL = 1 のとき有効)	1.0

図 7.6 のときの入力パラメータを以下に示す。

```

&EGNPRB
ZRIGHT = 20.0,
NDIV = 200,
BALPHA = -1.0D8,
ISLOPT = 1,
CLAMO = (1.00D0, 0.0D0),
JOUTNO = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
MM = 1,
QZERO = 0.8D0,
QRAT = 1.0D0,
QAPOWL = 2.0D0,
QAPOWR = 2.5D0,
IMUFLG = 1,
RRAT1 = 0.4D0,
RRAT2 = 0.8D0,
IDPFLG = 1,
EPSLNA = 0.20D0,
EPSLNB = 1.0D - 6,
SLARG1 = 1.0D9,
SLARG2 = 1.0D9,
ICPLFL = 0,
IT21FL = 0
T21SCL = 0.0D0,
&END

```

## B.4 出力データ

### 1. SSL2 の DCEIG2 を使用して解いたとき (ISLOPT=0) の出力ファイル

<u>ファイル名</u>	<u>内容</u>
EVAL.DATA	固有値
PH1A.DATA	正の値で1番大きい固有値の固有ベクトル $\Phi_1, \Psi_1$
PH2A.DATA	正の値で1番大きい固有値の固有ベクトル $\Phi_2, \Psi_2$
PH1B.DATA	正の値で2番めに大きい固有値の固有ベクトル $\Phi_1, \Psi_1$
PH2B.DATA	正の値で2番めに大きい固有値の固有ベクトル $\Phi_2, \Psi_2$
PH1C.DATA	その他の正の固有値の固有ベクトル $\Phi_1, \Psi_1$
PH2C.DATA	その他の正の固有値の固有ベクトル $\Phi_2, \Psi_2$

### 2. 逆ベキ法を使用して解いたとき (ISLOPT=1) の出力ファイル

<u>ファイル名</u>	<u>内容</u>
PHPS1.DATA	$\Phi_1, \Psi_1$
PHPS2.DATA	$\Phi_2, \Psi_2$
KEKKA.DATA	テスト結果整理用
KEKKA.DATA2	テスト結果整理用

### 3. 共通

<u>ファイル名</u>	<u>内容</u>
F.DATA	$F, dF/dx, d/dx(F^2), dp/dx$
Q.DATA	$q, dq/dx, d^2q/dx^2$
GFUN.DATA	$g(x), f(x)$
FR.DATA	$f_r(x)$
H1H2.DATA	$h_1(x), h_2(x)$
DOG.DATA	$\Delta_o(\gamma)$



## B.5 サブルーチン一覧

名称	種類	内容
BMTAMT	S	行列 A, B 作成 (2次元配列)
BNDCON	S	境界条件 (7.2) 式、(7.3) 式を行列 A、B に設定 (2次元配列)
BUNSA1	S	有理面 1 枚 ( $\Sigma_{12} = \Sigma_{12} = 0$ ) のときの分散関係式
BUNSAN	S	有理面 2 枚のときの分散関係式
CALFPQ	S	有理面 $x_1, x_2$ における $F, dq/dx, d^2q/dx^2, dp/dx, B$ 計算 $F_j$ の Spline 補間の係数設定
DBMAM	S	行列 A, B 作成 (対角要素を 1次元配列に格納)
DBNDCN	S	境界条件 (7.2) 式、(7.3) 式を行列 A、B に設定 (1次元配列)
DLBPHI	S	左側境界条件 $\Phi - \sigma_L d\Phi/dz = 0$ を行列 A、B に設定 (1次元配列)
DLBPHS	S	左側境界条件 $\gamma\Psi = -\text{sgn}(k_{\parallel})z\Phi$ を行列 A、B に設定 (1次元配列)
DOGNEW	S	$1/\Delta_o(\gamma)$ から Newton 法で $\gamma$ を求める
DOGOUT	S	$1/\Delta_o(\gamma)$ を計算、出力
DRBPHI	S	右側境界条件 $\Phi - \sigma_R d\Phi/dz = 0$ を行列 A、B に設定 (1次元配列)
DRBPHS	S	右側境界条件 $\gamma\Psi = -\text{sgn}(k_{\parallel})z\Phi$ を行列 A、B に設定 (1次元配列)
EVOUT3	S	全固有値と正の固有値を持つ固有ベクトル出力 (ISLOPT=0 のとき)
GFOUT	S	$g(x), f(x)$ を計算、出力
LBPHI	S	左側境界条件 $\Phi - \sigma_L d\Phi/dz = 0$ を行列 A、B に設定 (2次元配列)
LBPHPS	S	左側境界条件 $\gamma\Psi = -\text{sgn}(k_{\parallel})z\Phi$ を行列 A、B に設定 (2次元配列)
MARINN	S	$\hat{\Lambda}, \Delta_{12}, \Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \hat{\Omega}$ 設定
MAROUT	S	外部接続データ $\hat{\Delta}_R, \hat{\Delta}_L^{-1}$ 計算
MKSIGM	S	行列 $\Sigma$ 作成
OPNCLS	S	ファイルの OPEN、CLOSE
PHSNEW	S	$\Phi, \Psi$ を $\Phi_{new}, \Psi_{new}$ に変換
PHSOU2	S	$\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ 出力 (ISLOPT=0 のとき)
RBPHI	S	右側境界条件 $\Phi - \sigma_R d\Phi/dz = 0$ を行列 A、B に設定 (2次元配列)
RBPHPS	S	右側境界条件 $\gamma\Psi = -\text{sgn}(k_{\parallel})z\Phi$ を行列 A、B に設定 (2次元配列)
RDPARA	S	計算パラメータ読み込み
SETT21	S	$T_{21} = \epsilon^2 w_{-2,1}$ 計算
SNGINT	S	端点で特異性を持つ関数の変数変換と台形則による数値積分
GFNC	F	SUB SNGINT で使われる関数 (右端が特異点の $g(z)$ )
GFNCA	F	SUB SNGINT で使われる関数 (左端が特異点の $g(z)$ )
CALU	S	行列を LU 分解 (密行列, 1次元配列) (C*16)
CBMATY	S	行列とベクトルの演算 $\vec{y} = A\vec{x}$ (C*16) 行列 A は 1次元配列に格納された対角行列
CEGNIN	S	逆ベキ法で固有値問題を解く (対角行列)(C*16)
CINV	S	LU 分解した行列から逆行列計算 (密行列, 1次元配列) (C*16)
CINV23	S	逆行列計算 (2×2 または 3×3 行列, 1次元配列) (C*16)
CINVR	S	LU 分解した行列から逆行列計算 (密行列, 2次元配列) (C*16)

名称	種類	内容
CLDUCM	S	行列を LU 分解する ( C*16 )
CTRIAN	S	LU 分解した行列を使って 1 次方程式を解く ( C*16 )
CMLMV1	S	行列とベクトルの演算 $\vec{y} = A\vec{x}$ (密行列, 1次元配列)( C*16 )
CMULM	S	行列演算 $C = AB$ (2次元配列)( C*16 )
CMULM1	S	行列演算 $C = AB$ (密行列, 1次元配列)( C*16 )
CMULMV	S	行列とベクトルの演算 $\vec{y} = A\vec{x}$ (2次元配列)( C*16 )
CVECPR	S	ベクトル演算 $z = \vec{x} \cdot \vec{x}$ ( C*16 )
DINV23	S	逆行列計算 ( $2 \times 2$ または $3 \times 3$ 行列, 1次元配列) ( R*8 )
DMULM1	S	行列演算 $C = AB$ (密行列, 1次元配列)( R*8 )
QSF	S	Simpson の積分
DGAMID	F	$d/dz(1/\Gamma(z))$ (級数展開)
DGAMM2	F	$\Gamma(z)$ ( $z < 0$ も可)
DGAMMD	F	$d/dz(\Gamma(z))$
DGAMMI	F	$1/\Gamma(z)$ (級数展開)
FDOGID	F	$d/d\gamma(1/\Delta_o(\gamma))$
FDOGMI	F	$1/\Delta_o(\gamma)$
FFR	F	$f_r(x)$
FFX	F	$f(x)$
FGX	F	$g(x)$
FF00	S	$d/dx(F^2)$ を RK 法で解いて $F$ を求める
FQ00	F	$q(x)$
FQ01	F	$dq/dx$
FQ02	F	$d^2q/dx^2$
FP01	F	$dp/dx$
FF201	F	$d/dx(F^2)$
FF01	F	$dF/dx$

ここで、種類の欄の S は SUBROUTINE、F は FUNCTION である。

## B.6 主な変数

変数名	配列	型	意味
ZRIGHT	-	R*8	$z_R$
NDIV	-	I	$z$ の分割数
BALPHA	-	R*8	$\Psi$ の境界条件の $\alpha$
ISLOPT	-	I	固有値問題解法オプション = 0 のとき複素 Hessenberg 行列に変換して解く (SSL2 の DCEIG2 を使う) = 1 のとき逆ベキ法 (対角行列) で解く
CLAM0	-	C*16	逆ベキ法の固有値の初期値 $\gamma_0$ (ISLOPT=1 のとき有効)
JOUTNO	10	I	ファイル出力する固有ベクトルの番号 (正の値の固有値に対応する固有ベクトルは自動的にファイル出力するので、ここで指定する必要はない) (ISLOPT=0 のとき有効)
MM	-	I	ポロイダル・モード数 $m$
QZERO	-	R*8	$q_0$
QRAT	-	R*8	有理面での安全係数 $q_r$
QAPOWL	-	R*8	$a_L$
QAPOWR	-	R*8	$a_R$
IMUFLG	-	I	Suydam 指数 $\mu$ 設定フラグ = 0: $\mu$ は入力データ (SUYDAM) $\neq 0$ : $\mu = (1/2)\sqrt{1-\epsilon^2}$
SUYDAM	-	R*8	Suydam 指数 $\mu_1, \mu_2$ (IMUFLG = 0 のとき有効) ( $0 < \mu_1 \leq 1/2, 0 < \mu_2 \leq 1/2$ )
RRAT1	-	R*8	有理面 $x_1$
RRAT2	-	R*8	有理面 $x_2$
IDPFLG	-	I	(7.8) 式の $dp/dx$ で $x < x_0$ において IDPFLG = 1 のとき $dp/dx = 0$ とする IDPFLG = 0 のとき $dp/dx = 0$ としない
EPSLNA	-	R*8	逆アスペクト比 $\epsilon$ (IMUFLG $\neq 0$ のとき $\epsilon^2 \leq 3/4$ )
EPSLNB	-	R*8	数値積分をするときの端点と特異点の距離 $\epsilon_b$
SLARG1	-	R*8	有理面 $r_1$ における磁気レイノズル数 $S_1$
SLARG2	-	R*8	有理面 $r_2$ における磁気レイノズル数 $S_2$
IT21FL	-	I	$T_{21}$ 設定フラグ IT21FL = 0 のとき $T_{21} = \lambda_0 \Omega = 0$ IT21FL = 1 のとき $T_{21} = \epsilon^2 \omega_{-2,1}$
T21SCL	-	R*8	$T_{21}$ のスケール $a$ $T_{21} \leftarrow aT_{21}$ (IT21FL = 1 のとき有効)

変数名	配列	型	意味
RC	-	R*8	$x_0 = (x_1 + x_2)/2$
ASPCT	-	R*8	アスペクト比 $A$
ZLEFT	-	R*8	$z_{1L}, z_{2L}$
Z	IAN	R*8	$z_{1,j}, z_{2,j} (j = 1, \dots, NDIV + 1)$
DELTAZ	-	R*8	$\Delta z_1, \Delta z_2$
DQDRR1	-	R*8	有理面 $x_1$ における $dq/dx$
DQDRR2	-	R*8	有理面 $x_2$ における $dq/dx$
FRAT1	-	R*8	有理面 $x_1$ における $F$
FRAT2	-	R*8	有理面 $x_2$ における $F$
DPDRR1	-	R*8	有理面 $x_1$ における $dp/dx$
DPDRR2	-	R*8	有理面 $x_2$ における $dp/dx$
DQDR21	-	R*8	有理面 $x_1$ における $d^2q/dx^2$
DQDR22	-	R*8	有理面 $x_2$ における $d^2q/dx^2$
BRAT1	-	R*8	有理面 $x_1$ における $\hat{B}$
BRAT2	-	R*8	有理面 $x_2$ における $\hat{B}$
NF	-	I	$d/dx(F^2)$ を RK 法で解くときの $x$ の点数
RRF	IAF	R*8	$d/dx(F^2)$ を RK 法で解くときの $x_j (j = 1, \dots, NF + 1)$
F	IAF	R*8	$F(x_j)$
FCITP	IAF	R*8	$F(x_j)$ の Spline 補間係数
FXT	IAF	R*8	$F(x_j)$ の Spline 補間の節点列
FVW	IAF*3+2	R*8	$F(x_j)$ の Spline 補間の作業領域
EPSLN1	-	R*8	$\epsilon_1$
EPSLN2	-	R*8	$\epsilon_2$
RLR1	-	R*8	$L_{R1}$
RLR2	-	R*8	$L_{R2}$
SINVR1	-	R*8	有理面 $x_1$ における $s^{-1}$
SINVR2	-	R*8	有理面 $x_2$ における $s^{-1}$
RKPAR1	-	R*8	有理面 $x_1$ における $k_{  }$
RKPAR2	-	R*8	有理面 $x_2$ における $k_{  }$
SGNKP1	-	R*8	有理面 $x_1$ における $\text{sgn}(k_{  })$
SGNKP2	-	R*8	有理面 $x_2$ における $\text{sgn}(k_{  })$
CF10	-	R*8	$f_{10}$
CF11	-	R*8	$f_{11}$
CF20	-	R*8	$f_{20}$
CF21	-	R*8	$f_{21}$
HATLMB	-	R*8	$\hat{\Lambda}$
DELT12	-	R*8	$\Delta_{12}$
DELT11	-	R*8	$\Delta_{11}$
DELT21	-	R*8	$\Delta_{21}$
DELT22	-	R*8	$\Delta_{22}$
HATOME	-	R*8	$\hat{\Omega}$
T21	-	R*8	$T_{21}$
HATT21	-	R*8	$\hat{T}_{21} = T_{21}/\epsilon_2$

変数名	配列	型	意味
SIGML1	-	R*8	$\sigma_{L1}$
SIGMR2	-	R*8	$\sigma_{R2}$
Z1R	-	R*8	$z_{1R}$
Z2L	-	R*8	$z_{2L}$
SIGMAM	4	R*8	行列 $\Sigma$
TDLTR	-	R*8	$\tilde{\Delta}_R$
TDLTLI	-	R*8	$\tilde{\Delta}_L^{-1}$
BMAT	(IAN2,IAN2)	C*16	行列 $B$
AMAT	(IAN2,IAN2)	C*16	行列 $A$
BINVRS	(IAN2,IAN2)	C*16	行列 $B^{-1}$
BINVA	(IAN2,IAN2)	C*16	行列 $B^{-1}A$
CWKBI1	(IAN2*IAN2)	C*16	行列 $B^{-1}$ を計算するときのワーク
JWKVW	(IAN2)	I	SUB DCEIG2 を使うときのワーク
RWKVW	(IAN2)	R*8	SUB DCEIG2 を使うときのワーク
CEVAL	(IAN2)	C*16	全固有値
CEVECN	(IAN2,IAN2)	C*16	全固有ベクトル
JMX1	-	I	正の固有値で1番大きい固有値の配列 NO
JMX2	-	I	正の固有値で2番めに大きい固有値の配列 NO
PHS00	-	R*8	$\Phi_1(z_1 = 0)/\Phi_2(z_2 = 0)$
IOFFST	-	I	行列 $A, B$ における $\Phi_1, \Psi_1$ または $\Phi_2, \Psi_2$ の先頭位置
EPSLDU	-	R*8	SUB CLDUCM の引数
MSIZE	-	I	対角行列1次元配列格納情報
NUB	11	I	対角行列1次元配列格納情報
NDIM	-	I	対角行列1次元配列格納情報
BMAT1	(IGADIA)	C*16	行列 $B$ の対角要素(逆ベキ法で解くとき使用)
AMAT1	(IGADIA)	C*16	行列 $A$ の対角要素(逆ベキ法で解くとき使用)
CEVAL1	-	C*16	固有値(逆ベキ法で解くとき使用)
CEVEC	(IGAN2)	C*16	固有ベクトル(逆ベキ法で解くとき使用)
CWKAB	(IGADIA)	C*16	逆ベキ法で解くとき使用するワーク
CWKVC1	(IGAN2)	C*16	逆ベキ法で解くとき使用するワーク
CWKVC2	(IGAN2)	C*16	逆ベキ法で解くとき使用するワーク
RSWK1	(IGAN2)	R*4	逆ベキ法で解くとき使用するワーク
ICPLFL	-	I	$\Phi_1, \Psi_1$ と $\Phi_2, \Psi_2$ のカップルフラグ = 0 のときカップルする = 1 のときカップルしない $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = 0$ 、有理面1枚とする
TSTSCL	-	R*8	$\Sigma_{12}, \Sigma_{21}$ にかけるスケール ICPLFL=0 のとき TSTSCL=1 ICPLFL=1 のとき TSTSCL=0

変数'BMAT'と'BMAT1'、'AMAT'と'AMAT1'、'BINVRS'と'CWKAB'はEQUIVALENCEしている。

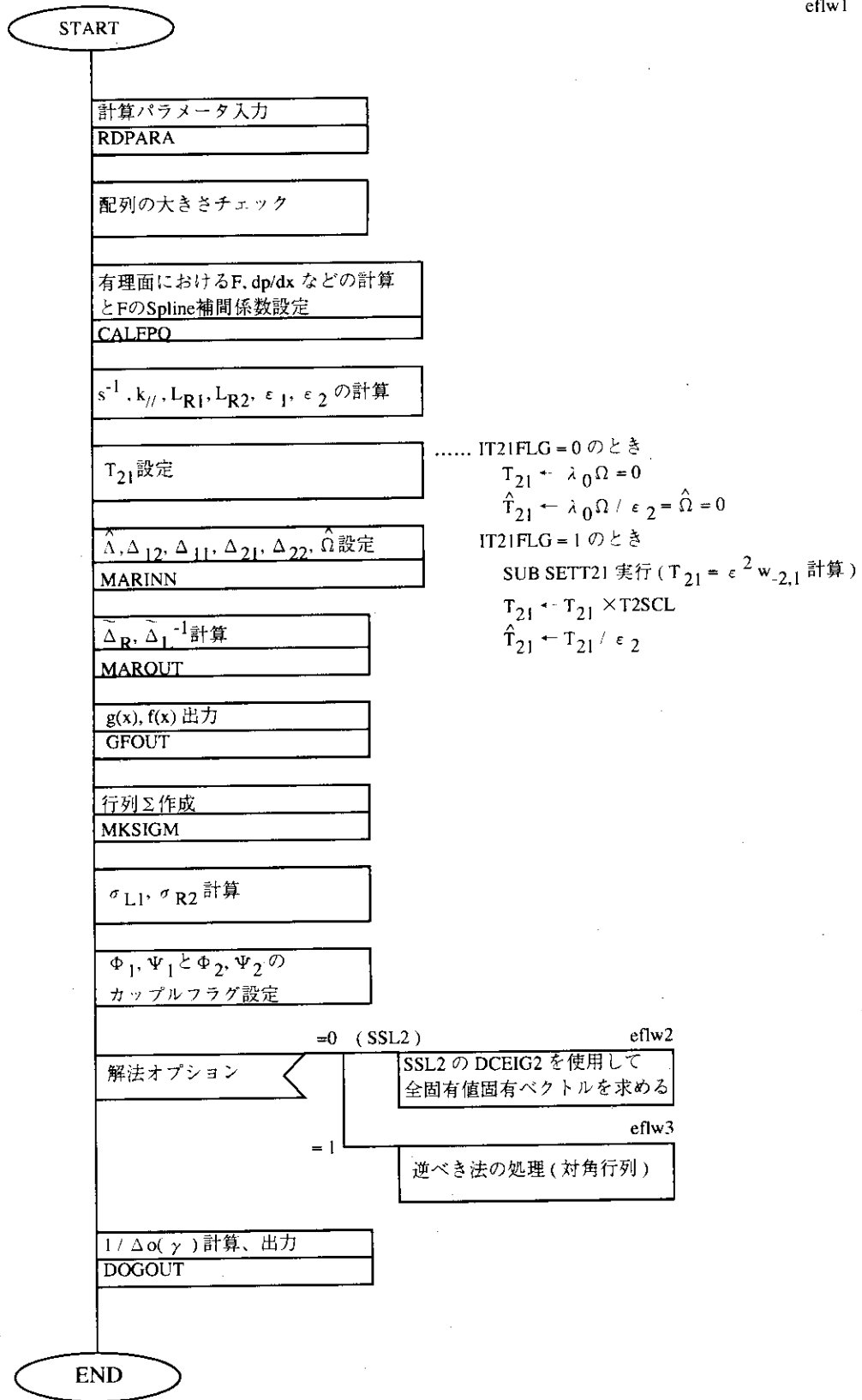
## 配列の大きさの定義

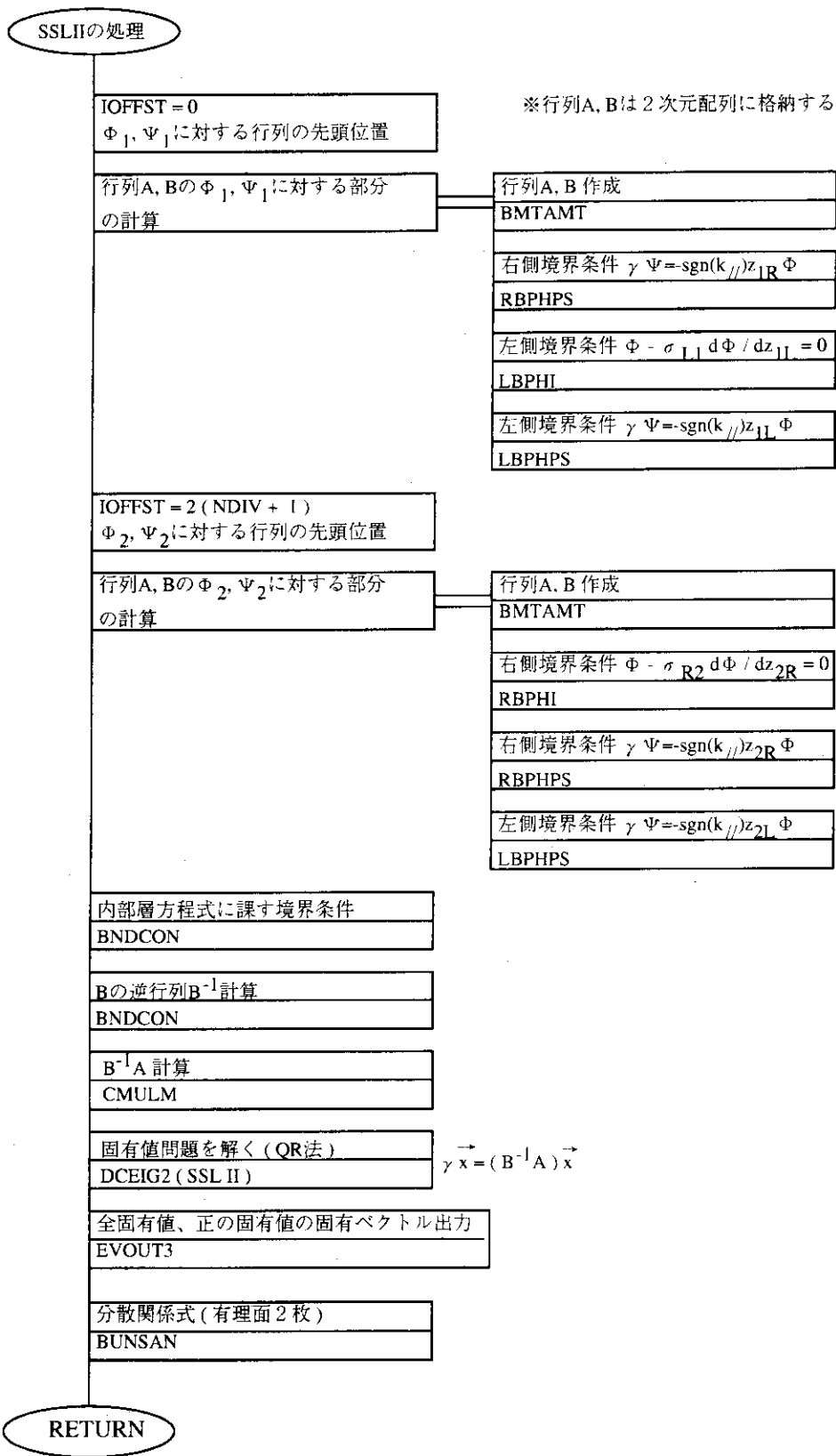
IAN	5001	$\geq \text{NDIV} + 1$	(NDIV : $z$ の分割数)
IAN2	804	$\geq 4 \cdot (\text{NDIV} + 1)$	(ISLOPT=0 のとき使う配列の大きさ)
IGADIA	180100	$\geq$ 行列 $A, B$ の対角要素数 (対角行列の幅は 9)	
		$\geq 9 \cdot 4 \cdot (\text{NDIV} + 1) - 20$	(ISLOPT=1 のとき使う配列の大きさ)
IGAN2	20004	$\geq 4 \cdot (\text{NDIV} + 1)$	(ISLOPT=1 のとき使う配列の大きさ)
IAF	501	$\geq d/dx(F^2)$ を RK 法で解くときの $x$ の点数	

$z$  の分割数は、ISLOPT=0 のときには 200 まで、ISLOPT=1 のときには 5000 までとしている。

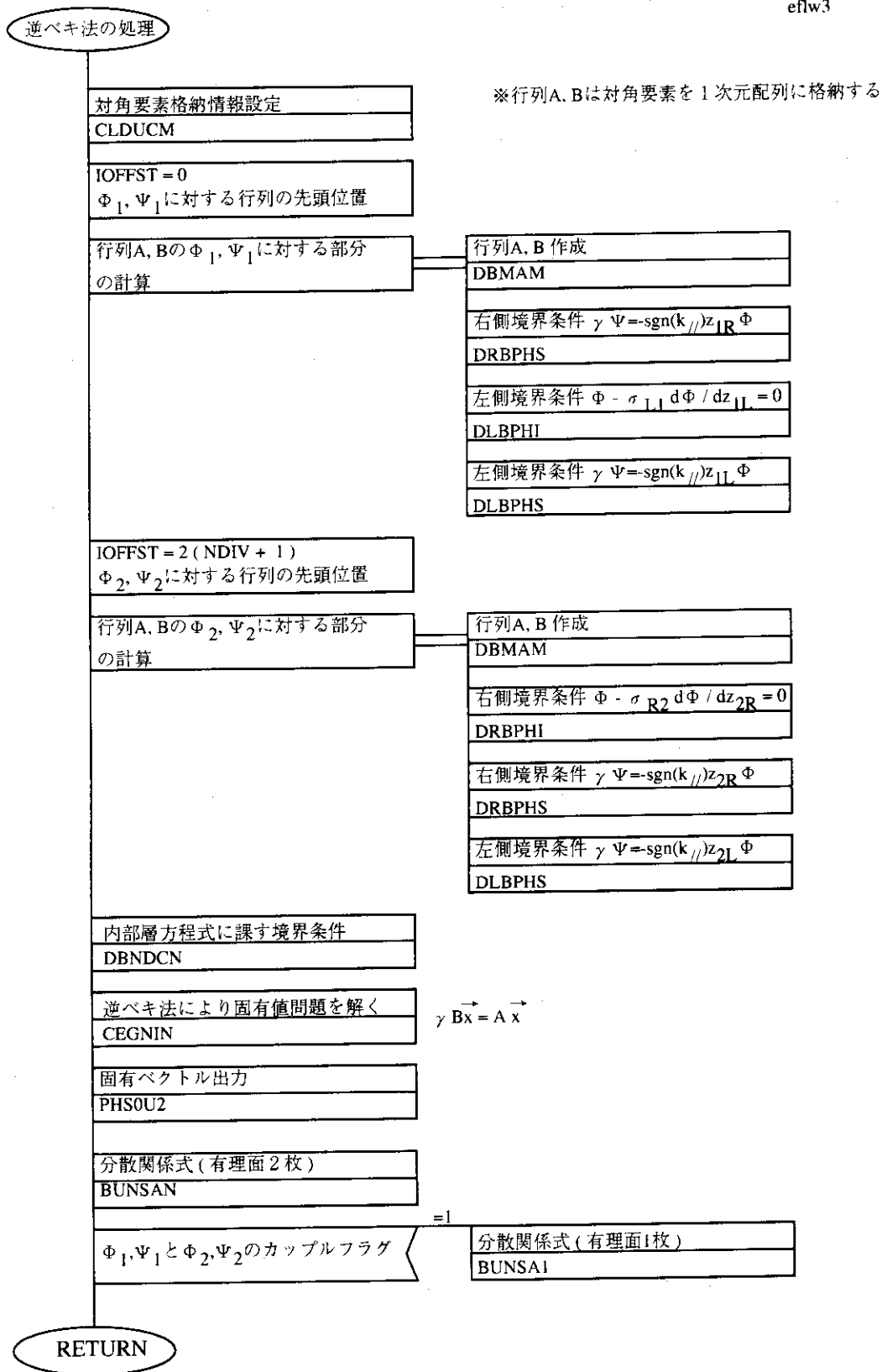
B.7 プログラム・フロー

eflw1









## B.8 実ベクトルへの変換

固有値 $\gamma$ が実数であっても、固有ベクトル $(\Phi_{1,j}, \Psi_{1,j}, \Phi_{2,j}, \Psi_{2,j})$  ( $j = 1, \dots, N+1$ ) は実ベクトルとは限らない。しかし、次のようにして $(\Phi_{1,j}, \Psi_{1,j}, \Phi_{2,j}, \Psi_{2,j})$  を実ベクトル $(\Phi_{1,new,j}, \Psi_{1,new,j}, \Phi_{2,new,j}, \Psi_{2,new,j})$  に変換することができる。 $|\text{Re}\Phi_1|_{\max}$  となる $\Phi_{1,l}$  ( $l \neq 1, l \neq N+1$ ) と  $|\text{Re}\Phi_2|_{\max}$  となる $\Phi_{2,l}$  ( $l \neq 1, l \neq N+1$ ) で大きい方を $\Phi_{J,l}$  とする。

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}\Phi_{J,l}}{\text{Re}\Phi_{J,l}}$$

となる $\delta$ を求めて、位相 $\exp(-i\delta)$ を固有ベクトル $(\Phi_{1,j}, \Psi_{1,j}, \Phi_{2,j}, \Psi_{2,j})$  にかけて

$$\Phi_{1,new} = \Phi_1 \exp(-i\delta) = (\text{Re}\Phi_1)_{new} + i(\text{Im}\Phi_1)_{new} \quad (\text{B.1})$$

$$(\text{Re}\Phi_1)_{new} = \text{Re}\Phi_1 \cos \delta + \text{Im}\Phi_1 \sin \delta \quad (\text{B.2})$$

$$(\text{Im}\Phi_1)_{new} = \text{Im}\Phi_1 \cos \delta - \text{Re}\Phi_1 \sin \delta \quad (\text{B.3})$$

$$\Psi_{1,new} = \Psi_1 \exp(-i\delta) = (\text{Re}\Psi_1)_{new} + i(\text{Im}\Psi_1)_{new} \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{Re}\Psi_1)_{new} = \text{Re}\Psi_1 \cos \delta + \text{Im}\Psi_1 \sin \delta \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{Im}\Psi_1)_{new} = \text{Im}\Psi_1 \cos \delta - \text{Re}\Psi_1 \sin \delta \quad (\text{B.6})$$

および

$$\Phi_{2,new} = \Phi_2 \exp(-i\delta) = (\text{Re}\Phi_2)_{new} + i(\text{Im}\Phi_2)_{new} \quad (\text{B.7})$$

$$(\text{Re}\Phi_2)_{new} = \text{Re}\Phi_2 \cos \delta + \text{Im}\Phi_2 \sin \delta \quad (\text{B.8})$$

$$(\text{Im}\Phi_2)_{new} = \text{Im}\Phi_2 \cos \delta - \text{Re}\Phi_2 \sin \delta \quad (\text{B.9})$$

$$\Psi_{2,new} = \Psi_2 \exp(-i\delta) = (\text{Re}\Psi_2)_{new} + i(\text{Im}\Psi_2)_{new} \quad (\text{B.10})$$

$$(\text{Re}\Psi_2)_{new} = \text{Re}\Psi_2 \cos \delta + \text{Im}\Psi_2 \sin \delta \quad (\text{B.11})$$

$$(\text{Im}\Psi_2)_{new} = \text{Im}\Psi_2 \cos \delta - \text{Re}\Psi_2 \sin \delta \quad (\text{B.12})$$

を得る。ここで添字 $j$ は省略した。そして、 $\text{Re}\Phi_{J,\max} = 1$ となるように

$$\Phi_{1,new} = \Phi_{1,new} / \text{Re}\Phi_{J,new,l} \quad (\text{B.13})$$

$$\Psi_{1,new} = \Psi_{1,new} / \text{Re}\Phi_{J,new,l} \quad (\text{B.14})$$

$$\Phi_{2,new} = \Phi_{2,new} / \text{Re}\Phi_{J,new,l} \quad (\text{B.15})$$

$$\Psi_{2,new} = \Psi_{2,new} / \text{Re}\Phi_{J,new,l} \quad (\text{B.16})$$

とすると、 $(\Phi_{1,new,j}, \Psi_{1,new,j}, \Phi_{2,new,j}, \Psi_{2,new,j})$  は $\Phi_{J,new,j}$ の最大値が1である実ベクトルに変換される。