

JAERI-Research
97-019



非線形ポテンシャル透過の1例
— 多価透過率とモード・ジャンプ —

1997年3月

田中正俊*

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問い合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1997

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 いばらき印刷(株)

非線形ポテンシャル透過の1例
—多価透過率とモード・ジャンプ—

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部

田中 正俊*

(1997年2月5日受理)

簡単な非線形・1次元ポテンシャルの定常透過問題を考え、入射強度あるいは非線形項の大きさがある臨界値をこえたとき、透過率が一意的に決らず多値になることを示した。安定性解析によると透過モードのジャンプ、またヒステレシス現象がおりうる。

An Example of Nonlinear Potential Transmission
—Multi-valued Transmission and Mode-jump—

Masatoshi TANAKA*

Department of Fusion Plasma Research
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received February 5, 1997)

A simple, may the simplest, example is presented of nonlinear one-dimensional potentials, which yields multi-valued steady transmission coefficients when the flux of incident particles, or the magnitude of nonlinear terms, exceeds a certain critical value. Stability analysis of steady solutions reveals the possibility of mode-jump or hysteresis.

Keywords : Potential Transmission, Tunnel Effect, Nonlinear Effect, Mode Jump, Hysterisis

* Invited Researcher (Ibaraki University)

目 次

1. はじめに	1
2. 多価の定常透過率	1
3. 安定性の検討	3
4. おわりに	5
参考文献	5
付 録	6

Contents

1. Introduction	1
2. Multiple Transmission Rate in Steady State	1
3. Stability Analysis	3
4. Conclusion	5
References	5
Appendix	6

1. はじめに

マイクロエレクトロニクスの進歩とともに、トンネル効果、マイクロな世界のポテンシャル透過の研究が多面的な展開を見せている。¹⁾ しかし物理的リアリティを欠くためか、非線形効果の検討はみあたらない。ここでは極めて簡単な非線形ポテンシャル（波動関数に依存するポテンシャル）の透過問題を考える。定常・1次元の例題にすぎないが、入射ビームの強度がある臨界値をこえると、1)ポテンシャル透過率が一意的に定まらない（多価になる）、定常解の安定性を検討すると、2)透過モードのジャンプ、またヒステレシス現象が期待される、以上のことを示す。いずれも典型的な非線形効果として、非線形振動子の強制振動で古くから知られている典型的な非線形効果である。

2. 多価の定常透過率

定常・1次元のポテンシャル透過問題を考える。座標 x 、ポテンシャル V をそれぞれ $(2mE)^{1/2}/\hbar$ 、 E で規格化し（ E は入射粒子のエネルギー、他は慣用）、あらためて x 、 V とかくと、波動関数 u に対するシュレディンガー方程式は

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (1 - V) u = 0 \quad (1)$$

とかける。非線形ポテンシャルの例として V をつぎのようにとる。

$$V = (\alpha + \beta |u(x)|^2) \delta(x). \quad (2)$$

ここで α 、 β は実定数、 $\delta(x)$ はデルタ関数、第2項が非線形項。このポテンシャルはもちろん物理的リアリティを欠いており、また特殊（デルタ関数）であるが、多価の定常透過率をよく導く恐らく最も簡単な例であろう。

粒子が $x = -\infty$ から入射するとして、 $x \neq 0$ での(1)の解を

$$u = \begin{cases} Ae^{ix} + Be^{-ix}, & x < 0, \\ Ce^{ix}, & x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

とかく。A、B、Cは複数量定数で入射波、反射波、透過波の振幅。

(3)の解を $x = 0$ で接続すると、A、B、C間の関係式がえられる。

$$A + B = C,$$

$$A - B = C + i(\alpha + \beta |C|^2)C.$$

下の式の第2項は、 V が $\delta(x)$ を含むため、 du/dx がジャンプすることを示している。2つの式を加え、 C で割って絶対値の2乗をつくると、透過率 $T = |C/A|^2$ に対する次の方程式がえられる。

1. はじめに

マイクロエレクトロニクスの進歩とともに、トンネル効果、マイクロな世界のポテンシャル透過の研究が多面的な展開を見せている。¹⁾ しかし物理的リアリティを欠くためか、非線形効果の検討はみあたらない。ここでは極めて簡単な非線形ポテンシャル（波動関数に依存するポテンシャル）の透過問題を考える。定常・1次元の例題にすぎないが、入射ビームの強度がある臨界値をこえると、1)ポテンシャル透過率が一意的に定まらない（多価になる）、定常解の安定性を検討すると、2)透過モードのジャンプ、またヒステシス現象が期待される、以上のことを示す。いずれも典型的な非線形効果として、非線形振動子の強制振動で古くから知られている典型的な非線形効果である。

2. 多価の定常透過率

定常・1次元のポテンシャル透過問題を考える。座標 x 、ポテンシャル V をそれぞれ $(2mE)^{1/2}/\hbar$ 、 E で規格化し（ E は入射粒子のエネルギー、他は慣用）、あらためて x 、 V とかくと、波動関数 u に対するシュレディンガー方程式は

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (1 - V) u = 0 \quad (1)$$

とかける。非線形ポテンシャルの例として V をつぎのようにとる。

$$V = (\alpha + \beta |u(x)|^2) \delta(x). \quad (2)$$

ここで α 、 β は実定数、 $\delta(x)$ はデルタ関数、第2項が非線形項。このポテンシャルはもちろん物理的リアリティを欠いており、また特殊（デルタ関数）であるが、多価の定常透過率をよく導く恐らく最も簡単な例であろう。

粒子が $x = -\infty$ から入射するとして、 $x \neq 0$ での(1)の解を

$$u = \begin{cases} Ae^{ix} + Be^{-ix}, & x < 0, \\ Ce^{ix}, & x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

とかく。A、B、Cは複数定数で入射波、反射波、透過波の振幅。

(3)の解を $x = 0$ で接続すると、A、B、C間の関係式がえられる。

$$A + B = C,$$

$$A - B = C + i(\alpha + \beta |C|^2)C.$$

下の式の第2項は、 V が $\delta(x)$ を含むため、 du/dx がジャンプすることを示している。2つの式を加え、 C で割って絶対値の2乗をつくると、透過率 $T = |C/A|^2$ に対する次の方程式がえられる。

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(\alpha + \beta |A|^2 T)^2} \quad (4)$$

ポテンシャルの非線形項の大きさを表わす β と入射強度 $|A|^2$ は積の形で入っているので、以下まとめて β とかく。

(4)にもとづいて検討を進めるまえに、2点ほど注意しておく。第1は線形ポテンシャル $V = V(x)$ ($V(x)$ は x の与えられた関数)のばあいとの違いである。このばあいにも $x = \pm\infty$ の解の接続条件は(3)の形である。ただし左辺はそのままであるが、右辺は C に比例(係数は $V(x)$ で決まる)。したがって(4)の右辺に T は現われず、 T は(4)によって一意的に確定する。

第2に(4)が x^3 の非線形項をもつ振動子の共鳴曲線を思い出させることである。 T は振動強度 $|x|^2$ に対応することは自然である。ただし $|A|^2$ とドライバー強度 $|x_0|^2$ の入り方はちがう。 $|x_0|^2$ は分母に現われず、分子に1に代って現われる。 $|x_0|^2$ が臨界値をこえると、古くから知られているように、 $|x|^2$ が一意的に決らず、モードジャンプ、ヒステレシス現象がおこることはよく知られている。

β を固定すると、(4)は T と α の関係(以下透過率曲線とよぶ)を定める。ただちにわかるように $0 < T < 1$ 、とくに $\beta = 0$ のときの透過率曲線は、ピーク $T = 1$ (完全透過)、 $\alpha = 0$ に関し左右対象なベル形。 β が増加すると左に($\alpha < 0$ の方向に)傾く(ピークは $\alpha = -\beta$ で $T = 1$)。逆に $\beta < 0$ とすると右に傾く。以下 $\beta > 0$ とする。

透過率曲線の様子を調べるのに、(4)を α について整理するのが便利である(T について整理すると3次方程式)。結果は2次方程式

$$T\alpha^2 + 2\beta T^2\alpha + \beta^2 T^3 + 4(T-1) = 0 \quad (5)$$

で、その根

$$\alpha = \alpha_{\pm}(T) = -\beta T \pm 2 \sqrt{\frac{1}{T} - 1} \quad (6)$$

は透過率曲線を $\alpha = -\beta$ 、 $T = 1$ の点で2分したときの2つの分枝、それぞれ右側、左側の分枝を表わす。 $\alpha_{\pm}(T)$ の1階、2階微分はそれぞれ

$$\alpha'_{\pm} = -\beta \pm \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T} - 1}} \quad (7a)$$

$$\alpha''_{\pm} = \pm \frac{4T-3}{2T^4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{T} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (7b)$$

まず α_{+} 分枝を考える。(6a)から β と無関係に α'_{+} は負定符号、すなわち α_{+} は T について単調減少で、 $\alpha (> -\beta)$ をきめると任意の β に対して α_{+} 分枝上の対応する T が一意的に定まる。

一方 α_- 分枝上の α_- の符号は β の大小による。 β が十分小さいときは正定符号であるが、 β が大きいと定符号になりえない。正定符号から不定符号にうつる、すなわち単調増大であった α_- 分枝が最大、最小を持つようになる β の臨界値 β_c は、変曲点の条件 $\alpha'_-(T) = \alpha''_-(T) = 0$ から決まる。

$$\beta_c = \frac{16}{3\sqrt{3}} \quad (8)$$

なお臨界点は $T_c = 3/4$ 、 $\alpha_c = -2\sqrt{3}$ 。以上のことから、 $\beta < \beta_c$ のときには α を決めると α_- 分枝上に T が一意的に定まるが、 $\beta > \beta_c$ のときは、与えられた α に対して T として 3 つの異なる値 $T_- < T_0 < T_+$ が定まる、すなわち T は α の 3 価の関数となる領域が存在するようになる。3 つの値のうち、 T_- 、 T_0 はつねに α_- 分枝上においてそれぞれ $\alpha'_-(T_-) > 0$ 、 $\alpha'_-(T_0) < 0$ であるが、 T_+ は β がある値をこえると α_+ 分枝上にあつて (いずれにしても $\alpha'_+(T_+)$ 、 $\alpha''_+(T_+) > 0$)。

補足として、 $T_0 = 4/3$ のときの T_{\pm} の表式を求めておく。(4) に $\alpha = \alpha_-(3/4) = -(3/4)(\beta + \beta_c/2)$ を代入し、 T について整理した 3 次元から因子 $(T - 3/4)$ を消すと

$$\beta^2 T^2 - \frac{3}{4}\beta(\beta + \beta_c)T + \frac{9}{64}\beta_c^2 = 0$$

この根が T_{\pm} である。すなわち

$$T_{\pm} = \frac{3}{8\beta} [\beta + \beta_c \pm \sqrt{(\beta - \beta_c)(\beta + 3\beta_c)}]$$

$\beta > 3\beta_c/2$ のとき T_+ は α_+ 分枝上にくる。

3. 安定性の検討

前節で示したように、(2) のポテンシャルの定常透過率は $\beta > \beta_c$ のとき α に関して 3 価となる。この 3 つの定常解が実現するものかどうか安定性を検討しよう。そのために非定常問題を考えなければならない。

非定常波動関数 $\Psi(x, t)$ を

$$\Psi(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} (u(x) + \xi(x, t)),$$

とし、またポテンシャルは(2)で $u(x) \rightarrow |\Psi(x, t)|^2$ としたものとする。 $\xi \equiv 0$ の定常解はすでに求められている。シュレディンガー方程式を ξ について線形化すると、 ξ は次の方程式をみたす。

一方 α_- 分枝上の α_- の符号は β の大小による。 β が十分小さいときは正定符号であるが、 β が大きいと定符号になりえない。正定符号から不定符号にうつる、すなわち単調増大であった α_- 分枝が最大、最小を持つようになる β の臨界値 β_c は、変曲点の条件 $\alpha'_-(T) = \alpha''_-(T) = 0$ から決まる。

$$\beta_c = \frac{16}{3\sqrt{3}} \quad (8)$$

なお臨界点は $T_c = 3/4$ 、 $\alpha_c = -2\sqrt{3}$ 。以上のことから、 $\beta < \beta_c$ のときには α を決めると α_- 分枝上に T が一意的に定まるが、 $\beta > \beta_c$ のときは、与えられた α に対して T として 3 つの異なる値 $T_- < T_0 < T_+$ が定まる、すなわち T は α の 3 価の関数となる領域が存在するようになる。3 つの値のうち、 T_- 、 T_0 はつねに α_- 分枝上にあつてそれぞれ $\alpha'_-(T_-) > 0$ 、 $\alpha'_-(T_0) < 0$ であるが、 T_+ は β がある値をこえると α_+ 分枝上にあつて (いずれにしても $\alpha'_+(T_+)$ 、 $\alpha''_+(T_+) > 0$)。

補足として、 $T_0 = 4/3$ のときの T_{\pm} の表式を求めておく。(4) に $\alpha = \alpha_-(3/4) = -(3/4)(\beta + \beta_c/2)$ を代入し、 T について整理した 3 次元から因子 $(T - 3/4)$ を消すと

$$\beta^2 T^2 - \frac{3}{4}\beta(\beta + \beta_c)T + \frac{9}{64}\beta_c^2 = 0$$

この根が T_{\pm} である。すなわち

$$T_{\pm} = \frac{3}{8\beta} [\beta + \beta_c \pm \sqrt{(\beta - \beta_c)(\beta + 3\beta_c)}]$$

$\beta > 3\beta_c/2$ のとき T_+ は α_+ 分枝上にくる。

3. 安定性の検討

前節で示したように、(2) のポテンシャルの定常透過率は $\beta > \beta_c$ のとき α に関して 3 価となる。この 3 つの定常解が実現するものかどうか安定性を検討しよう。そのために非定常問題を考えなければならない。

非定常波動関数 $\Psi(x, t)$ を

$$\Psi(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} (u(x) + \xi(x, t)),$$

とし、またポテンシャルは(2)で $u(x) \rightarrow |\Psi(x, t)|^2$ としたものとする。 $\xi \equiv 0$ の定常解はすでに求められている。シュレディンガー方程式を ξ について線形化すると、 ξ は次の方程式をみたす。

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \xi + i \frac{\partial \xi}{\partial t} = (f \xi + g \xi^*) \delta(x). \quad (9)$$

ここで

$$f = \alpha + 2\beta |u(0)|^2, \quad g = \beta u^2(0). \quad (10)$$

なお時間 t は \hbar/E で規格化しあらためて t とかいた。

(9)の解を次の形

$$\xi = \xi(x)e^{-\gamma t}, \quad \gamma > 0, \quad (11)$$

に仮定する。(9)に代入して直ちにわかるように $x \neq 0$ での $\xi(x)$ の基本解は $\exp(\pm ikx)$ 、ただし $k = \sqrt{1 + i\gamma}$ 、 $x = \pm\infty$ で $\xi(x) \rightarrow 0$ となるものをもって

$$\xi(x) = \begin{cases} be^{-ikx}, & x < 0, \\ ce^{ikx}, & x > 0, \end{cases}$$

がえられる。ここで b, c は複素定数。 $x = 0$ でこの2つの解を(9)によって接続すると、振幅 $b (= c)$ に対する方程式は

$$(2k + if)b + igb^* = 0,$$

となる。したがって

$$D = \begin{vmatrix} 2k + if, & ig \\ -ig^*, & 2k^* - if \end{vmatrix} \neq 0$$

であれば $b = c = 0$ 、(11)の形の増大解は存在しない。すなわち行列式 D が定符号であれば定常解は安定である。

安定性が問題となるのは定常透過率が3価になるときである。以下簡単のため、 β が β_0 より少し大きいばかりのみ考える。このとき3つの定常解はいずれも α_- 、分枝上にある。 $\alpha = \alpha_-$ 、また(10)を代入すると

$$D = 4(|k|^2 - 1) + 4(\alpha_- + 2\beta T)^2 - \beta^2 T^2 + 4(\alpha_- + 2\beta T)\text{Im } k. \quad (12)$$

ここで $\text{Im } k > 0$ は k の虚数部。第1項は明らかに正。最後の項は β が β_0 を少しこえたばかりには正 ($\beta = \beta_0$ 、 $T = T_0$ のとき $(8/\sqrt{3})\text{Im } k > 0$)。最後に第3項、第4項を変形する。(6)、(7)を用いると

$$\alpha_- + 2\beta T = -\alpha'_- T + \frac{2T-1}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T} - 1}},$$

$$\beta T = -\alpha'_- T + \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T} - 1}}.$$

2乗して差をとると

$$(\alpha_- + 2\beta T)^2 - \beta^2 T^2 = 4\alpha_- T \sqrt{\frac{1}{T} - 1} - 4 \quad .$$

(12)に代入して

$$D = 4[(|k|^2 - 1) + \alpha_- T \sqrt{\frac{1}{T} - 1} + (\alpha_- + 2\beta T)\text{Im } k]. \quad (13)$$

となる。これから中間の透過率 ($\alpha_- < 0$) はDが不定符号で不安定、大小2つの透過率 ($\alpha_- > 0$) は (少なくとも臨界点近くでは) Dは正定符号、したがって安定ということになる。

4. おわりに

推測も含めてまとめる。

- (1) 簡単な非線形ポテンシャル(2)の定常透過率は、非線形項の大きさあるいは入射波の強度がある値をこえたとき、一意的に定まらない (3価となる)。
- (2) 大小の2つの透過率は安定 (T_- については少なくとも臨界点の近くで) 中間は不安定。その結果非線形振動子でよく知られていることと平行に、透過モードのジャンプやヒステリシスがおこりうる。
- (3) δ 関数ポテンシャルはいかにも特異であるが、 du/dx のジャンプは運動量のジャンプ、ある意味で散乱を表わすが、透過率の多価性には本質的ではないと思われる。多価性を導くのは非線形性で、非線形項のとり方次第で3価以外のばあいもあるのでないか。なお(4)の右辺の分母がTの8次式になる例を付録に示す。ポテンシャルが本文の例と同様 $|u|^2$ であるためか、Tは3価になるだけのようである。
- (4) 可能な定常解がすべて不安定ということがありうるのか。カオス的になることがあるのか。
- (5) なお非線形媒質中のスカラー波の定常・1次元伝搬でも同様であることは明らか。

参考文献

- 1) 例えば R.C. Ashoori, "Electrons in Artificial Atoms", Nature, 379, 413-419 (1996), 竹内、御子柴 (編) "トンネル現象の物理と応用" (培風館、1990)。

2乗して差をとると

$$(\alpha_- + 2\beta T)^2 - \beta^2 T^2 = 4\alpha'_- T \sqrt{\frac{1}{T} - 1} - 4 \quad .$$

(12)に代入して

$$D = 4[(|k|^2 - 1) + \alpha'_- T \sqrt{\frac{1}{T} - 1} + (\alpha_- + 2\beta T)\text{Im } k]. \quad (13)$$

となる。これから中間の透過率 ($\alpha'_- < 0$) はDが不定符号で不安定、大小2つの透過率 ($\alpha'_- > 0$) は (少なくとも臨界点近くでは) Dは正定符号、したがって安定ということになる。

4. おわりに

推測も含めてまとめる。

- (1) 簡単な非線形ポテンシャル(2)の定常透過率は、非線形項の大きさあるいは入射波の強度がある値をこえたとき、一意的に定まらない (3価となる)。
- (2) 大小の2つの透過率は安定 (T_- については少なくとも臨界点の近くで) 中間は不安定。その結果非線形振動子でよく知られていることと平行に、透過モードのジャンプやヒステリシスがおこりうる。
- (3) δ 関数ポテンシャルはいかにも特異であるが、 du/dx のジャンプは運動量のジャンプ、ある意味で散乱を表わすが、透過率の多価性には本質的ではないと思われる。多価性を導くのは非線形性で、非線形項のとり方次第で3価以外のばあいもあるのでないか。なお(4)の右辺の分母がTの8次式になる例を付録に示す。ポテンシャルが本文の例と同様 $|u|^2$ であるためか、Tは3価になるだけのようなのである。
- (4) 可能な定常解がすべて不安定ということがありうるのか。カオス的になることがあるのか。
- (5) なお非線形媒質中のスカラー波の定常・1次元伝搬でも同様であることは明らか。

参考文献

- 1) 例えば R.C. Ashoori, "Electrons in Artificial Atoms", Nature, 379, 413-419 (1996), 竹内、御子柴 (編) "トンネル現象の物理と応用" (培風館、1990)。

2乗して差をとると

$$(\alpha_- + 2\beta T)^2 - \beta^2 T^2 = 4\alpha_- T \sqrt{\frac{1}{T} - 1} - 4 \quad .$$

(12)に代入して

$$D = 4[(|k|^2 - 1) + \alpha_- T \sqrt{\frac{1}{T} - 1} + (\alpha_- + 2\beta T)\text{Im } k]. \quad (13)$$

となる。これから中間の透過率 ($\alpha_- < 0$) はDが不定符号で不安定、大小2つの透過率 ($\alpha_- > 0$) は (少なくとも臨界点近くでは) Dは正定符号、したがって安定ということになる。

4. おわりに

推測も含めてまとめる。

- (1) 簡単な非線形ポテンシャル(2)の定常透過率は、非線形項の大きさあるいは入射波の強度がある値をこえたとき、一意的に定らない (3値となる)。
- (2) 大小の2つの透過率は安定 (T_- については少なくとも臨界点の近くで) 中間は不安定。その結果非線形振動子でよく知られていることと平行に、透過モードのジャンプやヒステレシスがおりうる。
- (3) δ 関数ポテンシャルはいかにも特異であるが、 du/dx のジャンプは運動量のジャンプ、ある意味で散乱を表わすが、透過率の多価性には本質的ではないと思われる。多価性を導くのは非線形性で、非線形項のとり方次第で3値以外のばあいもあるのでないか。なお(4)の右辺の分母がTの8次式になる例を付録に示す。ポテンシャルが本文の例と同様 $|u|^2$ であるためか、Tは3値になるだけのようである。
- (4) 可能な定常解がすべて不安定ということがありうるのか。カオス的になることがあるのか。
- (5) なお非線形媒質中のスカラー波の定常・1次元伝搬でも同様であることは明らか。

参考文献

- 1) 例えば R.C. Ashoori, "Electrons in Artificial Atoms", *Nature*, 379, 413-419 (1996), 竹内、御子柴 (編) "トンネル現象の物理と応用" (培風館、1990)。

付録 もう1つの例

ポテンシャルをつぎのようにとる。

$$V = \alpha |u(x)|^2 [\delta(x) + \delta(x-d)] \quad (A1)$$

$x = 0$ での接続条件をマトリクの形にかくと

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha |u(0)|^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0+) \end{pmatrix}$$

$x = d$ でも同様。 $0 < x < d$ は自由伝播で、両端の u 、 u' の関係をマトリクスでかくと、

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos d & -\sin d \\ \sin d & \cos d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(d) \\ u'(d-) \end{pmatrix}.$$

一方、

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B \\ i(A-B) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(d) \\ u'(d-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C e^{id} \\ iC e^{id} \end{pmatrix}$$

これから

$$\begin{pmatrix} A+B \\ i(A-B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha |A+B|^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos d & -\sin d \\ \sin d & \cos d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha |C|^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C e^{id} \\ iC e^{id} \end{pmatrix}$$

マトリクスの積を計算して

$$A+B = C e^{id} [\cos d + \alpha |C|^2 \sin d - i \sin d]$$

$$A-B = C e^{id} [\cos d + \alpha |A+B|^2 \sin d - i \{\sin d - \alpha |C|^2 \cos d - \alpha |A+B|^2, (\cos d + \alpha |C|^2 \sin d)\}] \quad (A2)$$

2つの式を加え、右辺に残る $A+B$ に第1式を代入すると、 B が消去される。両辺を C で割って、絶対値の2乗をつくると、透過率 $T = |C/A|^2$ をきめる次の形の方程式がえられる。

$$T = \frac{1}{F(\alpha T)} \quad (A3)$$

ただし $F(x)$ は $x = \alpha T$ の8次式(なお $\alpha |A|^2$ をあらためて α とかいた)。(A3)の解で $0 < T \leq 1$ をみだし、かつ $R = |B/A|^2$ (反射率)を計算して $R+T=1$ を確認できたものが求めるものである。もちろん数値計算によるが、ポテンシャルの間隔 d の関数として T が3価になるケースがあった。例として $\alpha = 1$ および $\alpha = 5$ のときの透過率曲線を図にしめす。後者のばあい d のある範囲で T は3価になる。

(A3)の8次式 $F(x)$ の係数を念のため与えておく。

$$F(x) = a_8x^8 + a_7x^7 + \dots + a_0$$

$$a_8 = \frac{1}{4} \sin^6 d$$

$$a_7 = \frac{3}{2} \sin^5 d \cos d$$

$$a_6 = \frac{3}{4} \sin^4 d (1 + 4\cos^2 d)$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \sin^3 d \cos d (7 + 4\cos^2 d)$$

$$a_4 = \frac{1}{4} \sin^2 d (1 + 20\cos^2 d)$$

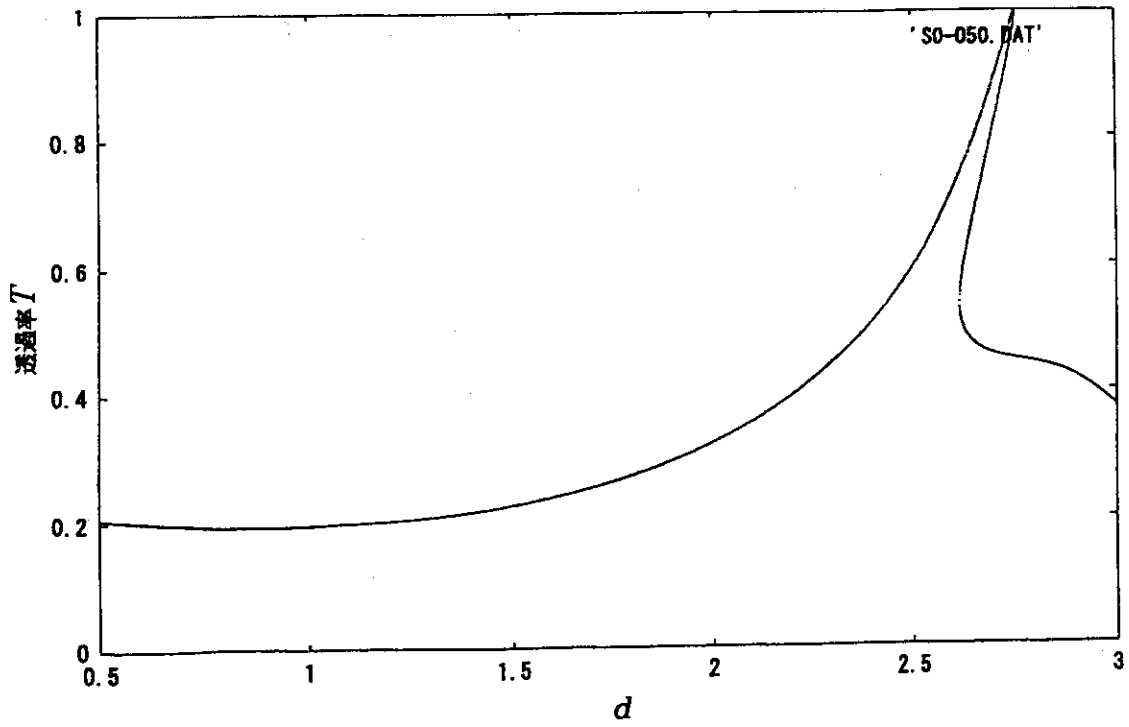
$$a_3 = \frac{1}{4} \sin d \cos d (1 + 2\cos^2 d)$$

$$a_2 = \cos^2 d$$

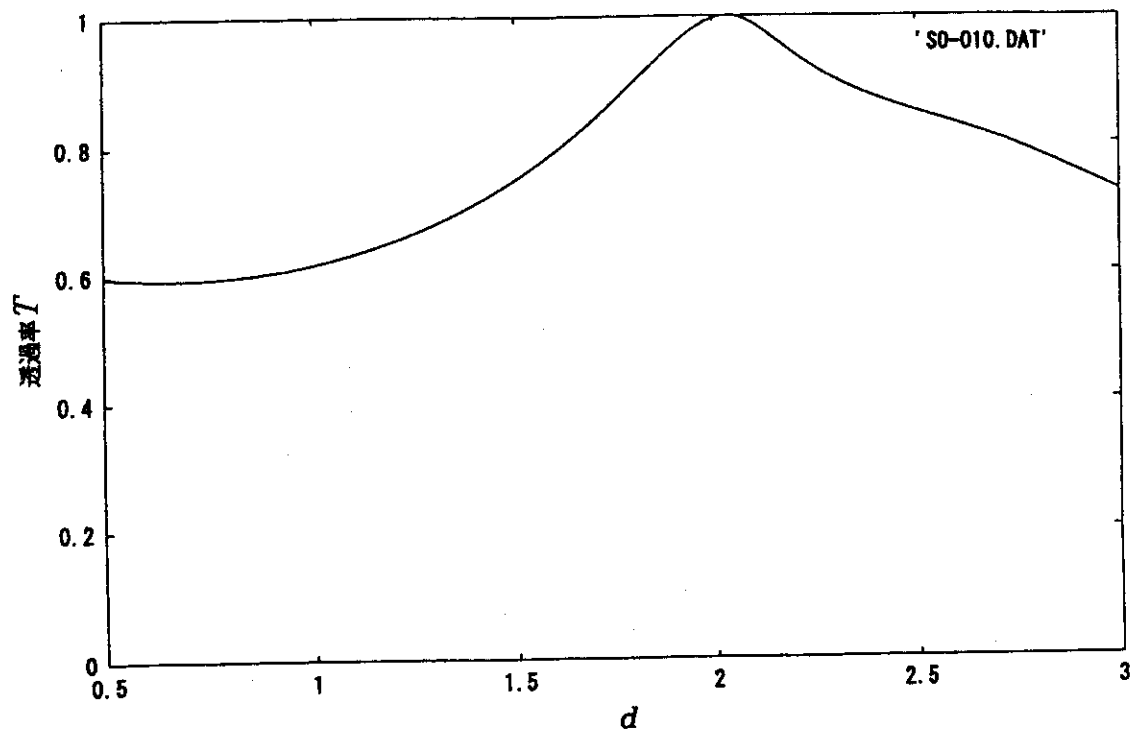
$$a_1 = 0$$

$$a_0 = 1$$

なお (A1) のポテンシャルが3価の透過率をもつことには、船木茂人（現在助川電気）、瀬寄泰弘（現在サイゼリア）の両氏の平成7年度卒業研究で共鳴トンネル効果の勉強をしていたときに気付いた。



$\alpha = 5$ の時の透過率



$\alpha = 1$ の時の透過率