

JAERI-Research

97-034



負磁気シア配位における  
抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論 (II)  
—Newcomb方程式の大域解—

1997年5月

徳田伸二・渡邊朋子\*

日本原子力研究所  
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。

入手の問合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1997

編集兼発行 日本原子力研究所  
印 刷 (株)原子力資料サービス

負磁気シア配位における抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論 (II)

- Newcomb方程式の大域解 -

日本原子力研究所那珂研究所炉心プラズマ研究部

徳田 伸二・渡邊 朋子\*

(1997年4月2日受理)

2枚の有理面にはさまれた外部領域における Newcomb方程式の大域解および接続データの数値計算法を述べる。この接続データから各有理面のまわりの内部層方程式に対する境界条件が決定され、境界条件自身は $2 \times 2$ 行列(境界行列)で表される。この大域解の変更(すなわち解のうち無限エネルギー部分の変更)にともなう接続データの変換則を導き、それから境界行列の不変性を証明した。また、テスト計算によりこの数値計算法の妥当性を検証した。

Theory of Asymptotic Matching  
for Resistive Magnetohydrodynamic Stability  
in a Negative Magnetic Shear Configuration (II)  
—Global Solution of the Newcomb Equation—

Shinji TOKUDA and Tomoko WATANABE\*

Department of Fusion Plasma Research  
Naka Fusion Research Establishment  
Japan Atomic Energy Research Institute  
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received April 2, 1997)

A numerical method is proposed to compute the global solutions and matching data for the Newcomb equation in the outer region between two rational surfaces. From the matching data, the boundary conditions expressed by a  $2 \times 2$  matrix (boundary matrix) are determined for the two inner layer equations around each rational surface. A transformation law for the matching data is derived on changing the global solutions (changing the infinite energy parts in the solutions), and the uniqueness of the boundary matrix is proved. The validity of the numerical method proposed is confirmed by numerical experiments.

Keywords: Resistive MHD Stability, Negative Shear Configuration, Tokamak, Rational Surface, Newcomb Equation, Global Solution, Matching Data, Inner-layer Equation, Eigenvalue Problem, Boundary Value Problem

---

\* Research Organization for Information Science & Technology

## 目 次

1. 序 論	1
2. 負磁気シア配位での Newcomb方程式の大域解	2
3. 接続問題を境界値問題に変換すること	4
4. 変分原理および接続データ $\Delta_{jk}$ の計算公式	8
5. 内部層方程式に対する境界条件	10
6. 大きい解の再定義の影響	11
6.1 境界行列 $\Sigma$ の変換則	11
6.2 接続行列 $T$ の変換則	14
6.3 [定理1]の証明	15
7. 解の変換の効果	17
8. テスト計算結果	20
8.1 $m/n = 1/1$ の例	20
8.2 $m/n = 3/1$ の例	21
9. 要約と議論	23
謝 辞	23
参考文献	23
付録A 簡単な例題： $m=1$ モードに対する接続行列	48
A.1 臨界安定な場合	48
A.2 $O(\epsilon^2)$ の補正	51

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Global Solution of the Newcomb Equation in a Negative Magnetic Shear Configuration .....	2
3. Transformation of the Connection Problem into the Boundary Value Problem .....	4
4. Variational Principle and Formula for Matchig Data $\Delta_{jk}$ .....	8
5. Boundary Condition for Inner-layer Equation .....	10
6. Effects of Redefinition of Big Solution .....	11
6.1 Transformation Law of Boundary Matrix $\Sigma$ .....	11
6.2 Transformation Law of Connection Matrix $T$ .....	14
6.3 Proof of Proposition [1] .....	15
7. Effects of Transformation of the Solution .....	17
8. Numerical Experiments .....	20
8.1 Case for $m/n = 1/1$ .....	20
8.2 Case for $m/n = 3/1$ .....	21
9. Summary and Discussions .....	23
Acknowledgments .....	23
References .....	23
Appendix A Examples : Connection Matrix for $m/n = 1/1$ Mode .....	48
A.1 Marginally Stable Case .....	48
A.2 $O(\epsilon^2)$ Correction .....	51

# 1 序 論

我々は負磁気シア配位における抵抗性磁気流体力学 (抵抗性 MHD) 安定性を漸近接続法を用いて解析する理論を文献 [1] に報告した。そこでは、2枚の有理面にはさまれた理想 MHD 領域 (外部領域) の接続データが与えられたとき、各有理面のまわりの内部層方程式は接続データから作られる境界条件を通じて結合した境界値問題および固有値問題になることを示した。文献 [1] では、また、この問題が文献 [2] で提案した差分解法によって数値的に安定に解けることを数値実験によって検証した。

本報告書では、前回の報告に引続き、負磁気シア配位における抵抗性 MHD 安定性解析に必要な接続データの数値計算法について述べる。接続データの計算には2枚の有理面 (確定特異点) にはさまれた Newcomb 方程式の2つの1次独立な大域解を構成することが必要である。大域解は各有理面で大きい解 (自乗可積でない解) と小さい解 (自乗可積な解) との重ね合わせで表現され、その混合比が接続データである。そして、内部層方程式に対する境界条件はこの接続データから作られ、境界条件自身は  $2 \times 2$  の行列 (以下、境界行列と呼ぶ) で与えられる。大域解の構成には任意性があり、異なる大域解 (2つの1次独立な Newcomb 方程式の解からなる) は互いに線形結合の関係にある。そのため、大域解を変更すると必然的に接続データも変化する。一方、内部層方程式の解が物理の問題として一意的であるためには、任意の大域解をもとに作られる境界行列は同一でなければならない。

本報告書の第2章では、負磁気シア配位での Newcomb 方程式の大域解の構成問題が数学的には一方の確定特異点のまわりの局所解を他方の確定特異点まで解析接続する接続問題であることを示し、第3章で接続問題を数値解法 (有限要素法) の適用できる境界値問題に変換する。この変換には Newcomb 方程式に付随する固有値問題が重要な役割を果たす。そして帰着する境界値問題は制約条件付きの境界値問題である。これに対する変分原理を第4章で述べ、既に開発済の外部領域接続データ計算コード MARGID[3] が大幅な変更なしに拡張できることを示す。また、得られた境界値問題の解から接続データを求める積分公式を与える。第5章で数値計算から得られた接続データをもとにして作られる内部層方程式に対する境界条件が  $2 \times 2$  行列 (境界行列) として表されることを示し、第6章で境界行列および接続行列の不変性を証明する。これは本報告書で提案する方法の妥当性を保証する上で重要である。また、Newcomb 方程式の解を変換したときの接続データの変換則が応用上必要になる。その変換則を第7章で与える。第8章では以上の定式化に基づいた数値計算のテストと定式化の検証を行なう。第9章は本研究の要約と議論にあてられる。なお、テスト計算との比較に用いる  $m = 1$  モードの接続行列の解析的な結果を付録 A に述べる。

## 2 負磁気シア配位での Newcomb 方程式の大域解

円柱プラズマにおける Newcomb 方程式は

$$\mathcal{L}\xi \equiv \frac{d}{dx} \left[ f(x) \frac{d}{dx} (x\xi(x)) \right] - \frac{g(x)}{x} \xi(x) = 0, \quad x \in (0, a) \quad (2.1)$$

$$f(x) = xF^2 \left( \frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right)^2 \frac{m^2}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \quad (2.2)$$

$$g(x) = xF^2 \left[ A + N + E + \left( \frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right) M_1 + M_2 \right] \quad (2.3)$$

で与えられる [3]。ここで各係数は

$$A = \left( \frac{m}{q} - n \right)^2 \quad (2.4)$$

$$N = \left( \frac{2}{q} \right)^2 \frac{m^2}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \quad (2.5)$$

$$E = \frac{2/q^2}{1 + \epsilon^2 x^2/q^2} \left\{ \frac{x}{F^2} \frac{dp}{dx} - \left( 2 - \frac{x}{q} \frac{dq}{dx} \right) \right\} \quad (2.6)$$

$$M_1 = \frac{2x}{q} \frac{m^2}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \left\{ \frac{1}{q} \frac{dq}{dx} + \frac{2n^2 \epsilon^2 x}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{F^2} \frac{2}{1 + \epsilon^2 x^2/q^2} \left[ \frac{dp}{dx} + \left( \frac{\epsilon F x}{q} \right)^2 \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{q} \frac{dq}{dx} \right) \right] \right\} \quad (2.7)$$

$$M_2 = \frac{2x}{q} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \frac{m^2}{m^2 + n^2 \epsilon^2 x^2} \quad (2.8)$$

であり、記号は文献 [3] に従う。ただし、独立変数  $x$  の区間は  $0 \leq x \leq 1$  であり、図 2.1 に示されるように点  $x_1, x_2$  が有理面で、 $0 < x_1 < x_2 < 1$  とする。このような配位では方程式 (2.1) の大域解として 3 種類の解  $\xi_L(x)$ 、 $\xi_R(x)$  および  $\xi(x)$  が存在する。そのうち、左側および右側の解  $\xi_L(x)$ 、 $\xi_R(x)$  は

$$\xi_L(x) \neq 0, \quad x < x_1, \quad \xi_L(x) \equiv 0, \quad x > x_1 \quad (2.9)$$

$$\xi_R(x) \neq 0, \quad x > x_2, \quad \xi_R(x) \equiv 0, \quad x < x_2 \quad (2.10)$$

であり、それらの構成法は 1 枚有理面の場合と同じである。一方、 $\xi(x)$  は、2 枚の有理面にはさまれた区間  $(x_1, x_2)$  でのみ非ゼロで他の区間では恒等的にゼロである：

$$\xi(x) \neq 0, \quad x_1 < x < x_2, \quad \xi(x) \equiv 0, \quad x < x_1 \quad \text{or} \quad x > x_2 \quad (2.11)$$

また、大域解  $\xi(x)$  は両端  $x_1, x_2$  で大きい解を含むことができる。 $x_1$  の近傍  $(x_1, x_1 + \rho_1)$  ( $\rho_1 > 0$ ) での Newcomb 方程式の 2 つの 1 次独立な解を  $\xi^{(b)}(x)$ 、 $\xi^{(s)}(x)$  とおく。 $\xi^{(b)}(x)$  は  $x = x_1$  で大きい解、 $\xi^{(s)}(x)$  は小さい解であり、ともに  $x = x_1$  のまわりで



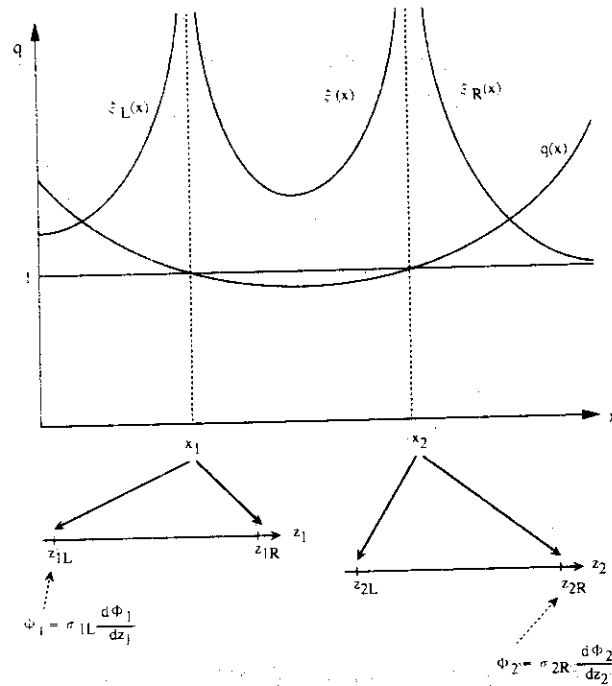


図 2.1:

負磁気シア配位での2枚有理面問題。 $x_1, x_2$ は有理面である(図では $q = 1$ )。 $\xi_L(x)$ は $x < x_1$ でのみ、 $\xi_R(x)$ は $x > x_1$ でのみ非ゼロ、また、 $\xi(x)$ は2枚の有理面 $x_1, x_2$ にはさまれた区間でのみ非ゼロである。

局所的に Frobenius 級数で表現される。ただし、 $\xi^{(b)}(x)$ は $x = x_1$ で小さい解を含んでもよい。同様に、 $x_2$ の近傍 $(x_2 - \rho_2, x_2)$ ( $\rho_2 > 0$ )で Frobenius 級数で表現される Newcomb 方程式の1次独立な解(局所解)を $\zeta^{(b)}(x), \zeta^{(s)}(x)$ で表す。

次に、点 $x_1$ のまわりの局所解 $\xi^{(b)}(x), \xi^{(s)}(x)$ を点 $x_2$ まで解析接続する。解析接続して得られた関数を $y_1(x), y_2(x)$ とおくと、それらは Newcomb 方程式の大域解であり、 $x \in (x_1, x_1 + \rho_1)$ のとき

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= \xi^{(b)}(x) \\ y_2(x) &= \xi^{(s)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

である。一方、 $\zeta^{(b)}(x), \zeta^{(s)}(x)$ は区間 $(x_2 - \rho_2, x_2)$ における Newcomb 方程式の1次独立な解であるので、 $y_j(x)$ ( $j = 1, 2$ )は $x \in (x_2 - \rho_2, x_2)$ で

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= T_{11}\zeta^{(b)}(x) + T_{12}\zeta^{(s)}(x) \\ y_2(x) &= T_{21}\zeta^{(b)}(x) + T_{22}\zeta^{(s)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

と表される。そして各定数 $T_{jk}$ から作られる行列

$$T = (T_{jk}) \quad (2.14)$$

は点  $x_1$  での局所解  $\xi^{(b)}(x)$ 、 $\xi^{(s)}(x)$  と点  $x_2$  での局所解  $\zeta^{(b)}(x)$ 、 $\zeta^{(s)}(x)$  とをつなぐ接続行列である [4]。したがって、2 枚有理面のある場合の Newcomb 方程式の大域解を求めるということは接続行列  $T$  を求めることである。

大域解  $\xi(x)$  は、 $c_1$ 、 $c_2$  を任意定数として

$$\xi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (2.15)$$

で表される。(2.13) 式で特に

$$T_{21} = 0 \quad (2.16)$$

の場合を考えると、これは Newcomb 方程式  $\mathcal{L}\xi = 0$  が自明でない、自乗可積な大域解をもつことを意味する。すなわち

$$\text{命題} : T_{21} = 0 \Leftrightarrow \text{臨界安定な場合} \quad (2.17)$$

が成立する。

### 3 接続問題を境界値問題に変換すること

文献 [3] に従い、Newcomb 方程式に随伴する固有値問題を

$$\mathcal{L}\xi(x) = -\lambda\rho(x)\xi(x) \quad (3.1)$$

とする。ここで、重み関数  $\rho(x)$  は  $x = x_1, x_2$  で

$$\rho(x) = \rho_0(x - x_j)^2 + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

と展開できるものとする。固有値問題 (3.1) の固有関数のうち、 $\xi_0(x) \neq 0$ 、 $x_1 < x < x_2$  で、かつ、絶対値最小の固有値  $\lambda_0$  に属する固有関数を  $\xi_0(x)$  とする。第 2 章の議論に基づき、 $x = x_1$  で大きい Newcomb 方程式の解を

$$\xi_1(x) = \hat{\xi}^{(b)}(x) + \Lambda \hat{\zeta}^{(b)}(x) + \eta(x) \quad (3.3)$$

と表す。ここで、無限エネルギー部分  $\hat{\xi}^{(b)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}^{(b)}(x)$  は、それぞれ

$$\hat{\xi}^{(b)}(x) = (x - x_1)^{-1/2 - \mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (3.4)$$

$$\hat{\zeta}^{(b)}(x) = (x_2 - x)^{-1/2 - \mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (3.5)$$

で、かつ

$$\hat{\xi}^{(b)}(x) \equiv 0, \quad x > x_1 + \epsilon_1, \quad \epsilon_1 > 0 \quad (3.6)$$

$$\hat{\zeta}^{(b)}(x) \equiv 0, \quad x < x_2 - \epsilon_2, \quad \epsilon_2 > 0 \quad (3.7)$$

さらに、 $\hat{\xi}^{(b)}$  と  $\hat{\zeta}^{(b)}$  は重ならないとする。すなわち

$$\{x | \hat{\xi}^{(b)} \neq 0\} \cap \{x | \hat{\zeta}^{(b)} \neq 0\} = \text{空集合} \quad (3.8)$$

は点  $x_1$  での局所解  $\xi^{(b)}(x)$ 、 $\xi^{(s)}(x)$  と点  $x_2$  での局所解  $\zeta^{(b)}(x)$ 、 $\zeta^{(s)}(x)$  とをつなぐ接続行列である [4]。したがって、2 枚有理面のある場合の Newcomb 方程式の大域解を求めるということは接続行列  $T$  を求めることである。

大域解  $\xi(x)$  は、 $c_1$ 、 $c_2$  を任意定数として

$$\xi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (2.15)$$

で表される。(2.13) 式で特に

$$T_{21} = 0 \quad (2.16)$$

の場合を考えると、これは Newcomb 方程式  $\mathcal{L}\xi = 0$  が自明でない、自乗可積な大域解をもつことを意味する。すなわち

$$\text{命題} : T_{21} = 0 \Leftrightarrow \text{臨界安定な場合} \quad (2.17)$$

が成立する。

### 3 接続問題を境界値問題に変換すること

文献 [3] に従い、Newcomb 方程式に随伴する固有値問題を

$$\mathcal{L}\xi(x) = -\lambda\rho(x)\xi(x) \quad (3.1)$$

とする。ここで、重み関数  $\rho(x)$  は  $x = x_1, x_2$  で

$$\rho(x) = \rho_0(x - x_j)^2 + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

と展開できるものとする。固有値問題 (3.1) の固有関数のうち、 $\xi_0(x) \neq 0$ 、 $x_1 < x < x_2$  で、かつ、絶対値最小の固有値  $\lambda_0$  に属する固有関数を  $\xi_0(x)$  とする。第 2 章の議論に基づき、 $x = x_1$  で大きい Newcomb 方程式の解を

$$\xi_1(x) = \hat{\xi}^{(b)}(x) + \Lambda \hat{\zeta}^{(b)}(x) + \eta(x) \quad (3.3)$$

と表す。ここで、無限エネルギー部分  $\hat{\xi}^{(b)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}^{(b)}(x)$  は、それぞれ

$$\hat{\xi}^{(b)}(x) = (x - x_1)^{-1/2 - \mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (3.4)$$

$$\hat{\zeta}^{(b)}(x) = (x_2 - x)^{-1/2 - \mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (3.5)$$

で、かつ

$$\hat{\xi}^{(b)}(x) \equiv 0, \quad x > x_1 + \epsilon_1, \quad \epsilon_1 > 0 \quad (3.6)$$

$$\hat{\zeta}^{(b)}(x) \equiv 0, \quad x < x_2 - \epsilon_2, \quad \epsilon_2 > 0 \quad (3.7)$$

さらに、 $\hat{\xi}^{(b)}$  と  $\hat{\zeta}^{(b)}$  は重ならないとする。すなわち

$$\{x | \hat{\xi}^{(b)} \neq 0\} \cap \{x | \hat{\zeta}^{(b)} \neq 0\} = \text{空集合} \quad (3.8)$$

実際的には、無限エネルギー部分は大きい解の Frobenius 級数を有限項で打ち切った関数をもとに作られる [3]。また、 $\eta(x)$  は  $x_1 \leq x \leq x_2$  で自乗可積であり (有限エネルギー部分)、 $\Lambda$  はこれから決める未定定数である。 $\xi_1(x)$  は Newcomb 方程式  $\mathcal{L}\xi_1(x) = 0$  を大域的に満たすので、未知関数  $\eta(x)$  は境界値問題

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\eta(x) &= -(\mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) - \Lambda(\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \\ \eta(x) &\text{は } x = x_1, x_2 \text{ で small} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

の解である。

(3.3) 式における未定定数  $\Lambda$  は次の考察によって決定することができる。すなわち、(3.3) 式で表現される無限エネルギー部分  $\hat{\xi}^{(b)}(x)$  は同時に  $x = x_1$  で小さい局所解も含むことができ、それゆえ、 $\eta(x)$  には任意性がある。そこで、未定定数  $\Lambda$  を調整して、条件

$$\eta(x) \text{ は } \xi_0(x) \text{ に直交する。}$$

すなわち

$$(\xi_0, \rho\eta) = 0 \quad (3.10)$$

を課することができる。このとき

$$(\xi_0, \mathcal{L}\eta) = -\lambda_0(\rho\xi_0, \eta) = 0 \quad (3.11)$$

より、可解条件

$$\Lambda(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) = -(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) \quad (3.12)$$

を得、これより未定定数  $\Lambda$  が

$$\Lambda = -\frac{(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)})}{(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)})} \quad (3.13)$$

で決定される。(3.13) 式で与えられる  $\Lambda$  に対して境界値問題 (3.9) は一意的に解ける。特に、演算子  $\mathcal{L}$  が特異であっても、すなわち、臨界安定な場合でも、一意的に解ける。

境界値問題 (3.9) の解は自乗可積であるので、 $x_1$  および  $x_2$  の近傍における  $\eta(x)$  の挙動は

$$\eta(x) \rightarrow \Delta_{11}(x - x_1)^{-1/2 + \mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (3.14)$$

$$\eta(x) \rightarrow \Delta_{12}(x_2 - x)^{-1/2 + \mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (3.15)$$

で与えられる。ここで、 $\Delta_{11}$ 、 $\Delta_{12}$  は定数である。

次に、 $x = x_1$  で小さい Newcomb 方程式の解を

$$\xi_2(x) = \xi_0(x) + \lambda_0\zeta(x) + \lambda_0\Omega\hat{\zeta}^{(b)}(x) \quad (3.16)$$

とおく。ここで  $\zeta(x)$  は  $x_1 < x < x_2$  で自乗可積で、かつ  $\xi_0(x)$  に直交する。

$$(\xi_0, \rho\zeta) = 0 \quad (3.17)$$

方程式  $\mathcal{L}\xi_2(x) = 0$  より、 $\zeta(x)$  に対する方程式

$$\mathcal{L}\zeta(x) = \rho\xi_0(x) - \Omega(\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \quad (3.18)$$

を得る。そして、可解条件より、未定定数 $\Omega$ は

$$\Omega = \frac{\|\xi_0\|^2}{(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)})}, \quad \|\xi_0\|^2 \equiv (\xi_0, \rho\xi_0) \quad (3.19)$$

より決定される [3]。境界値問題 (3.18) は一意的に解け、有限エネルギー部分

$$\zeta_f(x) = \xi_0(x) + \lambda_0\zeta(x) \quad (3.20)$$

の  $x_1$  および  $x_2$  における挙動は、それぞれ

$$\zeta_f(x) \rightarrow \Delta_{21}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} + \dots, \quad x \rightarrow x_1 \quad (3.21)$$

$$\zeta_f(x) \rightarrow \Delta_{22}(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + \dots, \quad x \rightarrow x_2 \quad (3.22)$$

で与えられる。ここで  $\Delta_{21}$ 、 $\Delta_{22}$  は定数である。

以下、定数  $\Lambda$ 、 $\Omega$ 、 $\Delta_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ) を接続データと呼ぶ。接続データが得られると、次のようにして接続行列  $T = (T_{jk})$  を求めることができる。(2.12)、(2.13) 式を満たす大域解  $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$  は

$$y_1(x) = \hat{\xi}^{(b)}(x) + T_{11}\hat{\zeta}^{(b)}(x) + \zeta_T(x) \quad (3.23)$$

$$y_2(x) = T_{21}\hat{\zeta}^{(b)}(x) + \xi_T(x) \quad (3.24)$$

によって構成できる。ただし、関数  $\zeta_T(x)$ 、 $\xi_T(x)$  は自乗可積であり、 $x \rightarrow x_1$  で

$$\zeta_T(x) \rightarrow 0 \cdot (x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \quad (3.25)$$

$$\xi_T(x) \rightarrow (x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \quad (3.26)$$

を満足するものとする。したがって、残りの接続行列要素  $T_{11}$ 、 $T_{22}$  は関数  $\zeta_T(x)$ 、 $\xi_T(x)$  の  $x \rightarrow x_2$  における挙動

$$\zeta_T(x) \rightarrow T_{12}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \quad (3.27)$$

$$\xi_T(x) \rightarrow T_{22}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \quad (3.28)$$

より求めることができる。このような大域解  $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$  は (3.3) および (3.16) 式で作られる解  $\xi_1(x)$ 、 $\xi_2(x)$  から構成することができる。すなわち、 $U_{11}$ 、 $U_{21}$ 、 $U_{22}$  を定数として、関数関係

$$y_1(x) = U_{11}\xi_1(x) + U_{21}\xi_2(x) \quad (3.29)$$

$$y_2(x) = U_{22}\xi_2(x) \quad (3.30)$$

が成立する。

(3.30) 式において、 $x \rightarrow x_1$ とおくと

$$y_2(x) \rightarrow (x - x_1)^{-1/2+\mu_1}, \quad \xi_2(x) \rightarrow \Delta_{21}(x - x_1)^{-1/2+\mu_1} \quad (3.31)$$

より

$$U_{22} = \frac{1}{\Delta_{21}} \quad (3.32)$$

を得る。そして、 $x \rightarrow x_2$ のとき

$$y_2(x) \rightarrow T_{21}(x_2 - x)^{-1/2-\mu_2} + T_{22}(x_2 - x)^{-1/2+\mu_2} \quad (3.33)$$

$$\xi_2(x) \rightarrow \lambda_0 \Omega (x_2 - x)^{-1/2-\mu_2} + \Delta_{22}(x_2 - x)^{-1/2+\mu_2} \quad (3.34)$$

であるので

$$T_{21} = U_{22} \lambda_0 \Omega = \frac{\lambda_0 \Omega}{\Delta_{21}}, \quad T_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{21}} \quad (3.35)$$

である。次に、(3.29) 式で、 $x \rightarrow x_1$ とおくと

$$y_1(x) \rightarrow (x - x_1)^{-1/2-\mu_1} + 0 \cdot (x - x_1)^{-1/2+\mu_1} \quad (3.36)$$

一方

$$\xi_1(x) \rightarrow (x - x_1)^{-1/2-\mu_1} + \Delta_{11}(x - x_1)^{-1/2+\mu_1} \quad (3.37)$$

$$\xi_2(x) \rightarrow \Delta_{21}(x - x_1)^{-1/2+\mu_1} \quad (3.38)$$

より

$$U_{11} = 1, \quad U_{11} \Delta_{11} + U_{21} \Delta_{21} = 0 \quad (3.39)$$

すなわち

$$U_{21} = -\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{21}}, \quad U_{11} = 1 \quad (3.40)$$

である。このとき、 $x \rightarrow x_2$ で

$$y_1(x) = T_{11}(x_2 - x)^{-1/2-\mu_2} + T_{12}(x_2 - x)^{-1/2+\mu_2} \quad (3.41)$$

$$\xi_1(x) \rightarrow \Lambda(x_2 - x)^{-1/2-\mu_2} + \Delta_{12}(x_2 - x)^{-1/2+\mu_2} \quad (3.42)$$

$$\xi_2(x) \rightarrow \lambda_0 \Omega (x_2 - x)^{-1/2-\mu_2} + \Delta_{22}(x_2 - x)^{-1/2+\mu_2} \quad (3.43)$$

より

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \Lambda + U_{21}(\lambda_0 \Omega) = \Lambda - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{21}} \lambda_0 \Omega \\ T_{12} &= \Delta_{12} + U_{22} \Delta_{22} = \Delta_{12} - \frac{\Delta_{11} \Delta_{22}}{\Delta_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

を得る。臨界安定 ( $\lambda_0 = 0$ ) の場合、 $T_{21} = 0$  であること、また (3.44) 式より  $T_{11} = \Lambda$  が成立することが分かる。また、(3.20) および (3.21) 式より、一般に  $\Delta_{21} \neq 0$  である。

## 4 変分原理および接続データ $\Delta_{jk}$ の計算公式

境界値問題 (3.9) および (3.18) の数値解法には、対応する変分原理を導き、有限要素法を採用する。次の2次の汎関数

$$\mathcal{F}[\eta; \nu] \equiv W[\eta] + 2(\eta, h) + 2\nu(\eta, \rho\xi_0) \quad (4.1)$$

$$W[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \left[ f(x) \left( \frac{d\eta}{dx} \right)^2 + g(x)\eta^2 \right] dx \quad (4.2)$$

を考える。ここで、定数  $\nu$  は Lagrange の未定定数、関数  $h(x)$  は (3.9) および (3.18) 式に対応して、それぞれ

$$h(x) = -(\mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) - \Lambda(\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \quad (4.3)$$

および

$$h(x) = \rho(x)\xi_0(x) - \Omega(\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \quad (4.4)$$

で与えられる。「端点  $x_1, x_2$  で  $\eta(x)$  は自由」という条件で未知関数  $\eta$  および未定定数  $\nu$  について汎関数  $\mathcal{F}[\eta; \nu]$  を停留にすると、Euler-Lagrange 方程式

$$\mathcal{L}\eta(x) - \nu\rho(x)\xi_0(x) = h(x) \quad (4.5)$$

$$(\rho\xi_0, \eta) = 0 \quad (4.6)$$

を得る。 $h(x)$  は可解条件  $(\rho\xi_0, h) = 0$  を満たすので連立方程式 (4.5)、(4.6) は

$$\nu = 0 \quad (4.7)$$

を解にもち、したがって、この連立方程式はもとの境界値問題と同値である [3]。そこで、(4.1) 式の変分問題について有限要素法を適用する。

接続データ  $\Delta_{11}$ 、 $\Delta_{12}$  は次の積分公式で与えられる [3]。

$$\Delta_{11} = -\frac{1}{2f_{10}\mu_1} \left[ (\hat{\xi}^{(b)}, \mathcal{L}\eta) - (\eta, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) \right] \quad (4.8)$$

$$\Delta_{12} = -\frac{1}{2f_{20}\mu_2} \left[ (\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\eta) - (\eta, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \right] \quad (4.9)$$

(4.8)、(4.9) 式の右辺の  $\mathcal{L}\eta$  に (3.9) 式を使うと

$$(\hat{\xi}^{(b)}, \mathcal{L}\eta) = -(\hat{\xi}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) - \Lambda(\hat{\xi}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \quad (4.10)$$

$$(\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\eta) = -(\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) - \Lambda(\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \quad (4.11)$$

を得る。しかるに、関数  $\hat{\xi}^{(b)}$  と  $\hat{\zeta}^{(b)}$  が重ならないので、結局、接続データ  $\Delta_{11}$ 、 $\Delta_{12}$  の計算公式として

$$\Delta_{11} = \frac{1}{2f_{10}\mu_1} \left[ (\hat{\xi}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) + (\eta, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) \right] \quad (4.12)$$

$$\Delta_{12} = \frac{1}{2f_{20}\mu_2} \left[ \Lambda(\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) + (\eta, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \right] \quad (4.13)$$

を得る。同様に、(3.20) 式で与えられる  $\zeta_f(x)$  に対して積分公式を適用して

$$\Delta_{21} = -\frac{1}{2f_{10}\mu_1} \left[ (\hat{\xi}^{(b)}, \mathcal{L}\zeta_f) - (\zeta_f, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) \right] \quad (4.14)$$

$$\Delta_{22} = -\frac{1}{2f_{20}\mu_2} \left[ (\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\zeta_f) - (\zeta_f, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \right] \quad (4.15)$$

を得る。ここで

$$\mathcal{L}\zeta_f = -\lambda_0\rho\xi_0 + \lambda_0\mathcal{L}\zeta = -\lambda_0\Omega(\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \quad (4.16)$$

を使うと

$$(\hat{\xi}^{(b)}, \mathcal{L}\zeta_f) = -\lambda_0\Omega(\hat{\xi}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) = 0 \quad (4.17)$$

$$(\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\zeta_f) = -\lambda_0\Omega(\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \quad (4.18)$$

より、接続データ  $\Delta_{21}$ 、 $\Delta_{22}$  は

$$\Delta_{21} = \frac{1}{2f_{10}\mu_1} (\zeta_f, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) \quad (4.19)$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{2f_{20}\mu_2} \left[ \lambda_0\Omega(\hat{\zeta}^{(b)}, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) + (\zeta_f, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) \right] \quad (4.20)$$

で与えられる。



## 5 内部層方程式に対する境界条件

前章(3.23)、(3.24)式を使えば、文献[2]の方法を拡張して有理面  $x = x_1$  および  $x = x_2$  の近傍における内部層方程式の境界条件を設定できる。独立変数を

$$x - x_1 = \epsilon_1 z_1, \quad \epsilon_1 = S_1^{-1/3} L_{R1}, \quad L_{R1} = |k_{||}(x_1)|^{-1/3} \quad (5.1)$$

$$x - x_2 = \epsilon_2 z_2, \quad \epsilon_2 = S_2^{-1/3} L_{R2}, \quad L_{R2} = |k_{||}(x_2)|^{-1/3} \quad (5.2)$$

と引き伸ばす。ここで、 $S_1$ 、 $S_2$  は各有理面における磁気レイノズル数、また、 $k_{||}(x)$  は振動の磁力線に平衡な波数であり  $d/dx(1/q)$  に比例する [2]。

文献[2]の方法にしたがい、静電ポテンシャル  $\varphi_1(z_1)$ 、 $\varphi_2(z_2)$  の境界条件を導く。(3.23)、(3.24)式より  $\varphi_1(z_1)$ 、 $\varphi_2(z_2)$  に対する漸近条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) \sim & c_1 \epsilon_1^{-1/2-\mu_1} z_1^{-1/2-\mu_1} \\ & + \epsilon_1^{-1/2+\mu_1} (c_1 \Delta_{11} + c_2 \Delta_{21}) z_1^{-1/2+\mu_1}, \quad z_1 \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (5.3)$$

および

$$\begin{aligned} \varphi_2(z_2) \sim & \epsilon_2^{-1/2-\mu_2} (c_1 \Lambda + c_2 \lambda_0 \Omega) |z_2|^{-1/2-\mu_2} \\ & + \epsilon_2^{-1/2+\mu_2} (c_1 \Delta_{12} + c_2 \Delta_{22}) |z_2|^{-1/2+\mu_2}, \quad z_2 \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (5.4)$$

(5.3)、(5.4)式は行列形式で

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \sim B \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \epsilon_1^{-1/2-\mu_1} z_1^{-1/2-\mu_1} + \tilde{\Delta}_{11} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ B_{12} &= \tilde{\Delta}_{21} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ B_{21} &= \hat{\Lambda} |z_2|^{-1/2-\mu_2} + \hat{\Delta}_{12} |z_2|^{-1/2+\mu_2} \\ B_{22} &= \hat{\Omega} |z_2|^{-1/2-\mu_2} + \hat{\Delta}_{22} |z_2|^{-1/2+\mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

と表される。ここで

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Delta}_{11} &= \epsilon_1^{-1/2+\mu_1} \Delta_{11}, \quad \tilde{\Delta}_{21} = \epsilon_1^{-1/2+\mu_1} \Delta_{21} \\ \hat{\Lambda} &= \epsilon_2^{-1/2-\mu_2} \Lambda, \quad \hat{\Omega} = \epsilon_2^{-1/2-\mu_2} \lambda_0 \Omega \\ \hat{\Delta}_{12} &= \epsilon_2^{-1/2+\mu_2} \Delta_{12}, \quad \hat{\Delta}_{22} = \epsilon_2^{-1/2+\mu_2} \Delta_{22} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

である。次に、(5.5)式を微分して

$$\begin{pmatrix} z_1 \frac{d\varphi_1}{dz_1} \\ z_2 \frac{d\varphi_2}{dz_2} \end{pmatrix} \sim \Gamma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11} &= -(1/2 + \mu_1)\epsilon_1^{-1/2-\mu_1} z_1^{-1/2-\mu_1} + (-1/2 + \mu_1)\tilde{\Delta}_{11} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ \Gamma_{12} &= (-1/2 + \mu_1)\tilde{\Delta}_{21} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ \Gamma_{21} &= -(1/2 + \mu_2)\hat{\Lambda}|z_2|^{-1/2-\mu_2} + (-1/2 + \mu_2)\tilde{\Delta}_{12}|z_2|^{-1/2+\mu_2} \\ \Gamma_{22} &= -(1/2 + \mu_2)\hat{\Omega}|z_2|^{-1/2-\mu_2} + (-1/2 + \mu_2)\tilde{\Delta}_{22}|z_2|^{-1/2+\mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

を得る。(5.5) 式より  $(c_1, c_2)$  を消去して、境界条件

$$\begin{pmatrix} z_1 \frac{d\varphi_1}{dz_1} \\ z_2 \frac{d\varphi_2}{dz_2} \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\Sigma = \Gamma B^{-1} \quad (5.11)$$

が導かれる。以下、行列  $\Sigma$  を「境界行列」と呼ぶことにする。境界行列  $\Sigma$  の非対角要素は Newcomb 方程式の解の大域性を反映している。

ここで、次のことに注意すべきである。すなわち、(3.3) および (3.16) 式における無限エネルギー部分の定義には任意性がある。たとえば、 $0 < \mu < 1/2$  のとき、無限エネルギー部分の定義に大きい解の Frobenius 級数の第 1 項で打ち切った関数を用いることができ、また、第 2 項で打ち切った関数でもよい。無限エネルギー部分の定義が異なると、それに対応して得られた接続データ  $\Omega$ 、 $\Lambda$ 、 $\Delta_{jk}$  の値は必然的に異なる。しかし、どの接続データを使っても、それから計算される境界行列  $\Sigma$  は同一であるべきである。この境界行列の不変性は (3.35)、(3.44) 式で与えられる接続行列  $T = (T_{jk})$  の不変性から間接的に証明される。実際、不変な接続行列  $T$  をもとにして境界行列  $\Sigma$  を作ることができる。次章で、無限エネルギー部分の定義の変更がもたらす接続データの変化を求め、境界行列  $\Sigma$  の不変性を直接証明する。また、応用上重要な大きい解を再定義したときの境界行列  $\Sigma$  の変換則も求める。

## 6 大きい解の再定義の影響

### 6.1 境界行列 $\Sigma$ の変換則

無限エネルギー部分  $\hat{\xi}^{(b)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}^{(b)}(x)$  を  $\hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x)$  へ

$$\hat{\xi}^{(b)}(x) = \hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \delta\hat{\xi}(x) \quad (6.1)$$

$$\hat{\zeta}^{(b)}(x) = \hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \delta\hat{\zeta}(x) \quad (6.2)$$

のように変換したときの (3.3)、(3.16) 式を

$$\xi_{1,\text{new}} = \hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \bar{\Lambda}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \eta_{\text{new}}(x) \quad (6.3)$$

$$\xi_{2,\text{new}} = \xi_0 + \lambda_0\zeta_{\text{new}}(x) + \lambda_0\bar{\Omega}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) \quad (6.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11} &= -(1/2 + \mu_1)\epsilon_1^{-1/2-\mu_1} z_1^{-1/2-\mu_1} + (-1/2 + \mu_1)\tilde{\Delta}_{11} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ \Gamma_{12} &= (-1/2 + \mu_1)\tilde{\Delta}_{21} z_1^{-1/2+\mu_1} \\ \Gamma_{21} &= -(1/2 + \mu_2)\hat{\Lambda}|z_2|^{-1/2-\mu_2} + (-1/2 + \mu_2)\tilde{\Delta}_{12}|z_2|^{-1/2+\mu_2} \\ \Gamma_{22} &= -(1/2 + \mu_2)\hat{\Omega}|z_2|^{-1/2-\mu_2} + (-1/2 + \mu_2)\tilde{\Delta}_{22}|z_2|^{-1/2+\mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

を得る。(5.5) 式より  $(c_1, c_2)$  を消去して、境界条件

$$\begin{pmatrix} z_1 \frac{d\varphi_1}{dz_1} \\ z_2 \frac{d\varphi_2}{dz_2} \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\Sigma = \Gamma B^{-1} \quad (5.11)$$

が導かれる。以下、行列  $\Sigma$  を「境界行列」と呼ぶことにする。境界行列  $\Sigma$  の非対角要素は Newcomb 方程式の解の大域性を反映している。

ここで、次のことに注意すべきである。すなわち、(3.3) および (3.16) 式における無限エネルギー部分の定義には任意性がある。たとえば、 $0 < \mu < 1/2$  のとき、無限エネルギー部分の定義に大きい解の Frobenius 級数の第 1 項で打ち切った関数を用いることができ、また、第 2 項で打ち切った関数でもよい。無限エネルギー部分の定義が異なると、それに対応して得られた接続データ  $\Omega$ 、 $\Lambda$ 、 $\Delta_{jk}$  の値は必然的に異なる。しかし、どの接続データを使っても、それから計算される境界行列  $\Sigma$  は同一であるべきである。この境界行列の不変性は (3.35)、(3.44) 式で与えられる接続行列  $T = (T_{jk})$  の不変性から間接的に証明される。実際、不変な接続行列  $T$  をもとにして境界行列  $\Sigma$  を作ることができる。次章で、無限エネルギー部分の定義の変更がもたらす接続データの変化を求め、境界行列  $\Sigma$  の不変性を直接証明する。また、応用上重要な大きい解を再定義したときの境界行列  $\Sigma$  の変換則も求める。

## 6 大きい解の再定義の影響

### 6.1 境界行列 $\Sigma$ の変換則

無限エネルギー部分  $\hat{\xi}^{(b)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}^{(b)}(x)$  を  $\hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x)$  へ

$$\hat{\xi}^{(b)}(x) = \hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \delta\hat{\xi}(x) \quad (6.1)$$

$$\hat{\zeta}^{(b)}(x) = \hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \delta\hat{\zeta}(x) \quad (6.2)$$

のように変換したときの (3.3)、(3.16) 式を

$$\xi_{1.\text{new}} = \hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \bar{\Lambda}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \eta_{\text{new}}(x) \quad (6.3)$$

$$\xi_{2.\text{new}} = \xi_0 + \lambda_0\zeta_{\text{new}}(x) + \lambda_0\bar{\Omega}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) \quad (6.4)$$

とする。しかし、無限エネルギー部分を変更しても、 $\xi_{1,\text{new}}(x)$ 、 $\xi_{2,\text{new}}(x)$  は Newcomb 方程式の解であるので、それらは、もとの  $\xi_1(x)$ 、 $\xi_2(x)$  と 1 次従属な関係にある。これを利用して、無限エネルギー部分の定義の変更によって接続データが変化しても境界行列  $\Sigma$  は不変であることを示すことができる。(6.1)、(6.2) 式における新旧の無限エネルギー部分の差  $\delta\hat{\xi}(x)$ 、 $\delta\hat{\zeta}(x)$  は自乗可積である。以下の議論では、それらを固有関数  $\xi_0$  の方向と垂直な方向に分解することが重要な役割をはたす。

$$\delta\hat{\xi}(x) = \epsilon_\xi \xi_0(x) + \delta\xi_\perp(x), \quad (\rho\xi_0, \delta\xi_\perp) = 0 \quad (6.5)$$

$$\delta\hat{\zeta}(x) = \epsilon_\zeta \xi_0(x) + \delta\zeta_\perp(x), \quad (\rho\xi_0, \delta\zeta_\perp) = 0 \quad (6.6)$$

ここで、定数  $\epsilon_\xi$ 、 $\epsilon_\zeta$  は

$$\epsilon_\xi = \frac{(\rho\xi_0, \delta\hat{\xi})}{\|\xi_0\|^2}, \quad \epsilon_\zeta = \frac{(\rho\xi_0, \delta\hat{\zeta})}{\|\xi_0\|^2} \quad (6.7)$$

で与えられる。このとき、次の定理が成り立つ (証明は 6.3 節で示す)。

• 定理 1 :

$\xi_{j,\text{new}}(x)$  と  $\xi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) および接続データ  $\bar{\Lambda}$ 、 $\bar{\Omega}$  と  $\Lambda$ 、 $\Omega$  との間には次の関係式

$$(\xi_{1,\text{new}}(x), \xi_{2,\text{new}}(x)) = (\xi_1(x), \xi_2(x))S \quad (6.8)$$

$$(\bar{\Lambda}, \lambda_0\bar{\Omega}) = (\Lambda, \lambda_0\Omega)S \quad (6.9)$$

が成立する。ここで、 $2 \times 2$  行列  $S$  は

$$\left. \begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \\ S_{21} &= -(\epsilon_\xi + \bar{\Lambda}\epsilon_\zeta), \quad S_{22} = 1 - \lambda_0\epsilon_\zeta\bar{\Omega} \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

で与えられる。

この定理から、臨界安定 ( $\lambda_0 = 0$ ) の場合

$$\bar{\Lambda} = \Lambda \quad (6.11)$$

であることがわかる。実際、 $\lambda_0 = 0$  の場合、 $\mathcal{L}\delta\hat{\xi}(x) = \mathcal{L}\delta\xi_\perp(x)$  となるので、 $(\xi_0, \mathcal{L}\delta\xi_\perp) = (\mathcal{L}\xi_0, \delta\xi_\perp) = 0$  である。

さて、 $\eta_{\text{new}}(x)$  および  $\zeta_{\text{new}}(x)$  から求められる接続データを  $\bar{\Delta}_{jk}$  とし

$$\delta\hat{\xi}(x) = o(\xi^s(x)), \quad x \rightarrow x_1 \quad (6.12)$$

および

$$\delta\hat{\zeta}(x) = o(\zeta^s(x)), \quad x \rightarrow x_2 \quad (6.13)$$

とする。このとき、(6.8)式から

$$\begin{pmatrix} \bar{\Delta}_{11} & \bar{\Delta}_{21} \\ \bar{\Delta}_{12} & \bar{\Delta}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix} S \quad (6.14)$$

を得る ( $\Delta_{jk}$ の現れ方に注意)。 (6.9) および (6.14) 式より、接続データ  $\bar{\Lambda}$ 、 $\bar{\Omega}$ 、 $\bar{\Delta}_{jk}$  から求めた (5.6)、(5.9) 式における行列  $\bar{B}$ 、 $\bar{\Gamma}$  と  $\Lambda$ 、 $\Omega$ 、 $\Delta_{jk}$  から求めた行列  $B$ 、 $\Gamma$  とは

$$\bar{B} = BS, \quad \bar{\Gamma} = \Gamma S \quad (6.15)$$

の関係が成立する。これより、境界行列  $\Sigma$  の変換則

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Gamma}(\bar{B})^{-1} = \Gamma S(BS)^{-1} = \Gamma S S^{-1} B^{-1} = \Sigma \quad (6.16)$$

を得る。したがって、次の基本的結果を得る。

● 定理 2 :

新旧の大きい解の差  $\delta\hat{\xi}(x)$ 、 $\delta\hat{\zeta}(x)$  が条件 (6.12)、(6.13) を満足するとき、境界行列は不変である。

Suydam index  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  が  $1/2$  に近いとき、大きい解の Frobenius 級数と小さい解の Frobenius 級数の 1 次独立性が悪くなるため、無限エネルギー部分を

$$\left. \begin{aligned} \hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x) &= \hat{\xi}^{(b)}(x) + s_1 \hat{\xi}^{(s)}(x) \\ \hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) &= \hat{\zeta}^{(b)}(x) + s_2 \hat{\zeta}^{(s)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

と再定義する必要がある [3]。ここで、 $\hat{\xi}^{(b)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}^{(b)}(x)$  は大きい解の Frobenius 級数を第 2 項で打ち切って作った関数、 $\hat{\xi}^{(s)}(x)$ 、 $\hat{\zeta}^{(s)}(x)$  は小さい解の Frobenius 級数を第 1 項で打ち切って作った関数である。また、定数  $s_1$ 、 $s_2$  は

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{g_{11} - \alpha_1(\alpha_1 + 2)f_{11}}{2(\alpha_1 + 1)f_{10}}, & \alpha_1 &= -\frac{1}{2} - \mu_1 \\ s_2 &= \frac{g_{21} - \alpha_2(\alpha_2 + 2)f_{21}}{2(\alpha_2 + 1)f_{20}}, & \alpha_2 &= -\frac{1}{2} - \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

であり、各係数  $g_{jk}$  は  $g(x)$  の  $x = x_1$  および  $x = x_2$  でのまわりの Taylor 展開係数である。

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= g_{10} + g_{11}(x - x_1) + \cdots \\ g(x) &= g_{20} + g_{21}(x - x_2) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

(6.17) 式に従って無限エネルギー部分を再定義した場合、それらから作られる大域解は、 $x \rightarrow x_1$  で

$$\left. \begin{aligned} \xi_{1,\text{new}}(x) &\rightarrow (x - x_1)^{-1/2 - \mu_1} + (\bar{\Delta}_{11} + s_1)(x - x_1)^{-1/2 + \mu_1} \\ \xi_{2,\text{new}}(x) &\rightarrow \bar{\Delta}_{21}(x - x_1)^{-1/2 + \mu_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

$x \rightarrow x_2$  で

$$\left. \begin{aligned} \xi_{1,\text{new}}(x) &\rightarrow \bar{\Lambda}(x_2 - x)^{-1/2-\mu_2} + (\bar{\Delta}_{12} + s_2 \bar{\Lambda})(x_2 - x)^{-1/2+\mu_2} \\ \xi_{2,\text{new}}(x) &\rightarrow \lambda_0 \bar{\Omega}(x_2 - x)^{-1/2-\mu_2} + (\bar{\Delta}_{22} + \lambda_0 \bar{\Omega} s_2)(x_2 - x)^{-1/2+\mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

である。したがって、接続データ  $\bar{\Lambda}$ 、 $\bar{\Omega}$ 、 $\bar{\Delta}_{jk}$  と  $\Lambda$ 、 $\Omega$ 、 $\Delta_{jk}$  との間には

$$(\bar{\Lambda}, \lambda_0 \bar{\Omega}) = (\Lambda, \lambda_0 \Omega) S \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_{11} & \bar{\Delta}_{21} \\ \bar{\Delta}_{12} & \bar{\Delta}_{22} \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda & \lambda_0 \Omega \end{pmatrix} \right\} S \\ &\equiv \begin{pmatrix} \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{21} \\ \hat{\Delta}_{12} & \hat{\Delta}_{22} \end{pmatrix} S \end{aligned} \quad (6.23)$$

の関係式が成立する。これから、 $\bar{\Lambda}$ 、 $\bar{\Omega}$ 、 $\bar{\Delta}_{jk}$  から行列  $\bar{B}$ 、 $\bar{\Gamma}$  を作ると

$$\bar{B} = \hat{B} S, \quad \bar{\Gamma} = \hat{\Gamma} S \quad (6.24)$$

を得る。ここで  $\hat{B}$ 、 $\hat{\Gamma}$  は  $\Lambda$ 、 $\Omega$  および (6.23) 式で与えられる  $\hat{\Delta}_{jk}$  で作った行列である。これより、境界行列  $\hat{\Sigma}$  として、関係式

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Gamma} \hat{B}^{-1} \quad (6.25)$$

を得る。この場合は、境界行列の不変性は成立しない。そのため、外部解の再定義に対応して内部層方程式の解の漸近形も再定義する必要がある。

## 6.2 接続行列 $T$ の変換則

すでに述べたように、接続行列  $T$  の定義より、無限エネルギー部分を再定義しても新旧の差が有理面の近傍で  $o(\xi^{(s)})$ 、 $o(\zeta^{(s)})$  のとき、接続行列  $T$  は不変である。しかしながら、無限エネルギー部分が (6.17) 式に従って再定義されると、それは小さい解の一部が大きい解へ配分されることを意味しているので、接続行列  $\hat{T}$  はもとの行列  $T$  とは異なる。しかし

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1(x) &= \hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \bar{T}_{11} \hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) + \zeta_{T,\text{new}}(x) \\ \bar{y}_2(x) &= \zeta_{T,\text{new}}(x) + \bar{T}_{21} \hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

は、 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$  と線形関係式

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1(x) &= c_{11} y_1(x) + c_{12} y_2(x) \\ \bar{y}_2(x) &= c_{21} y_1(x) + c_{22} y_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

にあるので、これを利用して  $T$  の変換則を求めることができる。ここで、 $\zeta_{T,\text{new}}(x)$ 、 $\xi_{T,\text{new}}(x)$  は条件、 $x \rightarrow x_1$  で

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{T,\text{new}}(x) &\rightarrow 0 \cdot (x - x_1)^{-1/2+\mu_1} \\ \xi_{T,\text{new}}(x) &\rightarrow (x - x_1)^{-1/2+\mu_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

を満たす。したがって、 $x \rightarrow x_1$ で

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1(x) &\rightarrow (x-x_1)^{-1/2-\mu_1} + s_1(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \\ \bar{y}_2(x) &\rightarrow (x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

一方

$$\left. \begin{aligned} c_{11}y_1(x) + c_{12}y_2(x) &\rightarrow c_{11}(x-x_1)^{-1/2-\mu_1} + c_{12}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \\ c_{21}y_1(x) + c_{22}y_2(x) &\rightarrow c_{21}(x-x_1)^{-1/2-\mu_1} + c_{22}(x-x_1)^{-1/2+\mu_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

であるので、係数  $c_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ) として

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= 1, & c_{12} &= s_1 \\ c_{21} &= 0, & c_{22} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

を得る。これより、 $x \rightarrow x_2$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_1(x) &= \bar{T}_{11}(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + (\bar{T}_{12} + s_2\bar{T}_{11})(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \\ \bar{y}_2(x) &= \bar{T}_{21}(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + (\bar{T}_{22} + s_2\bar{T}_{21})(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

である。一方、(6.31)式より

$$\left. \begin{aligned} c_{11}y_1(x) + c_{12}y_2(x) &\rightarrow (T_{11} + s_2T_{21})(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} \\ &\quad + (T_{12} + s_1T_{22})(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \\ c_{21}y_1(x) + c_{22}y_2(x) &\rightarrow T_{21}(x_2-x)^{-1/2-\mu_2} + T_{22}(x_2-x)^{-1/2+\mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

であるので、行列  $T$  の変換則

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{11} &= T_{11} + s_1T_{21} \\ \bar{T}_{12} &= (T_{12} + s_1T_{22}) - s_2\bar{T}_{11} \\ \bar{T}_{21} &= T_{21} \\ \bar{T}_{22} &= T_{22} - s_2T_{21} \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

を得る。

### 6.3 [定理 1] の証明

(6.4)式における  $\zeta_{\text{new}}(x)$  の満たすべき方程式は

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\zeta_{\text{new}}(x) &= \rho(x)\xi_0(x) - \bar{\Omega}(\mathcal{L}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x)) \\ (\rho\xi_0, \zeta_{\text{new}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

である。 $\zeta(x)$  に対する方程式 (3.18) の右辺第 2 項に (6.1) 式と (6.5) 式を使うと

$$\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x) = \mathcal{L}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x) - \lambda_0\epsilon_\zeta\rho(x)\xi_0(x) + \mathcal{L}\delta\zeta_\perp(x) \quad (6.36)$$

より

$$(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x)) = (\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x)) - \lambda_0 \epsilon_\zeta \|\xi_0\|^2 \quad (6.37)$$

を得る。ここで、 $(\xi_0, \mathcal{L}\delta\zeta_\perp) = 0$  を用いた。したがって、方程式 (6.35) の可解条件は

$$\|\xi_0\|^2 - \Omega [(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}) - \lambda_0 \epsilon_\zeta \|\xi_0\|^2] = 0 \quad (6.38)$$

となる。一方、 $\bar{\Omega}$  は (3.13) 式より

$$\|\xi_0\|^2 - \bar{\Omega}(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}) = 0 \quad (6.39)$$

で与えられるので、接続データ  $\Omega$  と  $\bar{\Omega}$  との間の変換則

$$\bar{\Omega} = S_{22}\Omega \quad (6.40)$$

$$S_{22} = 1 - \lambda_0 \epsilon_\zeta \bar{\Omega} \quad (6.41)$$

を得る。次に、解  $\zeta(x)$  と  $\zeta_{\text{new}}(x)$  との差を求める。方程式 (6.35) の右辺第 2 項に (6.2)、(6.40) 式を使うと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\zeta_{\text{new}}(x) &= S_{22}[\rho(x)\xi_0(x) - \Omega\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}] + \bar{\Omega}\mathcal{L}\delta\zeta_\perp(x) \\ &= S_{22}\mathcal{L}\zeta(x) + \bar{\Omega}\mathcal{L}\delta\zeta_\perp(x) \end{aligned} \quad (6.42)$$

ここで、 $\zeta_{\text{new}}(x)$ 、 $\zeta(x)$  および  $\delta\zeta_\perp(x)$  は自乗可積であり、かつ作用素  $\mathcal{L}$  は特異でないとしているので (もし、特異であれば  $\lambda_0 = 0$  であるので  $\xi_2(x) = \xi_{2,\text{new}}(x) = \xi_0(x)$  である)、(6.42) 式で  $\mathcal{L}$  をはずすことができ

$$\zeta_{\text{new}}(x) = S_{22}\zeta(x) + \bar{\Omega}\delta\zeta_\perp(x) \quad (6.43)$$

および

$$\begin{aligned} \zeta_{f,\text{new}}(x) &= \xi_0(x) + \lambda_0\zeta_{\text{new}}(x) \\ &= S_{22}\zeta_f(x) + \lambda_0\bar{\Omega}\delta\zeta(x) \end{aligned} \quad (6.44)$$

が成立する。これを (6.4) 式に用いて

$$\xi_{2,\text{new}}(x) = S_{22}\xi_2(x) \quad (6.45)$$

を得る。次に、 $\eta_{\text{new}}(x)$  に対する方程式

$$\mathcal{L}\eta_{\text{new}}(x) = -(\mathcal{L}\hat{\xi}_{\text{new}}^{(b)}(x)) - \bar{\Lambda}(\mathcal{L}\hat{\zeta}_{\text{new}}^{(b)}(x)) \quad (6.46)$$

の右辺に (6.1)、(6.2) 式および (6.5)、(6.6) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\eta_{\text{new}}(x) &= -[\mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}(x) + \lambda_0 \epsilon_\xi \rho(x)\xi_0(x) - \mathcal{L}\delta\xi_\perp(x)] \\ &\quad - \bar{\Lambda}[\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x) + \lambda_0 \epsilon_\zeta \rho(x)\xi_0(x) - \mathcal{L}\delta\eta_\perp(x)] \end{aligned} \quad (6.47)$$



を得る。この方程式の可解条件は

$$-(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) - \bar{\Lambda}(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) - \lambda_0(\epsilon_\xi + \bar{\Lambda}\epsilon_\zeta)\|\xi_0\|^2 = 0 \quad (6.48)$$

であるので、接続データ  $\Lambda_{\text{new}}$  の変換則として

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + S_{21}(\lambda_0\Omega) \quad (6.49)$$

$$S_{21} = -(\epsilon_\xi + \bar{\Lambda}\epsilon_\zeta) \quad (6.50)$$

を得る。ここで、 $\eta_{\text{new}}(x)$  と  $\eta(x)$  との関係を求めるため、(6.47) 式の右辺に、(6.49) 式および

$$-\mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}(x) = \mathcal{L}\eta(x) + \Lambda\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x) \quad (6.51)$$

を使うと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\eta_{\text{new}}(x) &= \mathcal{L}\eta(x) + \lambda_0 S_{21}(\rho(x)\xi_0(x) - \Omega\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x)) \\ &\quad + \mathcal{L}(\delta\xi_\perp(x) + \bar{\Lambda}\delta\eta_\perp(x)) \end{aligned} \quad (6.52)$$

を得る。したがって、(3.18) 式より

$$\mathcal{L}\eta_{\text{new}}(x) = \mathcal{L}\{\eta(x) + \lambda_0 S_{21}\zeta(x) + \delta\xi_\perp(x) + \bar{\Lambda}\delta\eta_\perp(x)\} \quad (6.53)$$

が成立する。ここで、再び作用素  $\mathcal{L}$  をはずすことができ

$$\eta_{\text{new}}(x) = \eta(x) + \lambda_0 S_{21}\zeta(x) + \delta\xi_\perp(x) + \bar{\Lambda}\delta\eta_\perp(x) \quad (6.54)$$

を得る。これを (6.3) 式に使うと

$$\begin{aligned} \xi_{1,\text{new}}(x) &= \hat{\xi}^{(b)}(x) - \delta\hat{\xi}(x) + (\Lambda + \lambda_0 S_{21}\Omega)(\hat{\zeta}^{(b)}(x) - \delta\hat{\zeta}(x)) \\ &\quad + \eta(x) + \lambda_0 S_{21}\zeta(x) + \delta\xi_\perp(x) + \Lambda_{\text{new}}\delta\eta_\perp(x) \\ &= \xi_1(x) + S_{21}\xi_2(x) \end{aligned} \quad (6.55)$$

## 7 解の変換の効果

前章までに述べた定式化に基づき、MARG1D コードを負磁気シア配位へ拡張する。しかしながら、MARG1D コードは  $Y(x) = x\xi(x)$  に対する Newcomb 方程式 (2.1) を解いて、 $Y(x)$  について接続データ  $(\hat{\Lambda}, \hat{\Omega}, \hat{\Delta}_{jk})$  を求める。一方、(5.11) 式で与えられる内部層方程式に関する境界行列  $\Sigma$  は、 $\xi(x)$  についての接続データをもとにして計算する。したがって、解を  $\xi(x)$  から  $Y(x)$  に変換したときの接続データの変換則を求める必要が生じる。 $Y(x)$  に対する  $x = x_1$  における大きい解と小さい解をそれぞれ、 $\Xi^{(b)}(x)$ 、 $\Xi^{(s)}(x)$  とおき、 $x = x_2$  における  $Y(x)$  の大きい解と小さい解をそれぞれ、 $Z^{(b)}(x)$ 、 $Z^{(s)}(x)$  とおくと、 $2\mu_1 \neq \text{整数}$  かつ  $2\mu_2 \neq \text{整数}$  であれば  $\Xi^{(b)}(x)$ 、 $Z^{(b)}(x)$  は  $\xi^{(b)}(x)$ 、 $\zeta^{(b)}(x)$  に比例して小さい解が混じることはない [3]。

を得る。この方程式の可解条件は

$$-(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}) - \bar{\Lambda}(\xi_0, \mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}) - \lambda_0(\epsilon_\xi + \bar{\Lambda}\epsilon_\zeta)\|\xi_0\|^2 = 0 \quad (6.48)$$

であるので、接続データ  $\Lambda_{\text{new}}$  の変換則として

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + S_{21}(\lambda_0\Omega) \quad (6.49)$$

$$S_{21} = -(\epsilon_\xi + \bar{\Lambda}\epsilon_\zeta) \quad (6.50)$$

を得る。ここで、 $\eta_{\text{new}}(x)$  と  $\eta(x)$  との関係を求めるため、(6.47) 式の右辺に、(6.49) 式および

$$-\mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}(x) = \mathcal{L}\eta(x) + \Lambda\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x) \quad (6.51)$$

を使うと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\eta_{\text{new}}(x) &= \mathcal{L}\eta(x) + \lambda_0 S_{21}(\rho(x)\xi_0(x) - \Omega\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x)) \\ &\quad + \mathcal{L}(\delta\xi_\perp(x) + \bar{\Lambda}\delta\eta_\perp(x)) \end{aligned} \quad (6.52)$$

を得る。したがって、(3.18) 式より

$$\mathcal{L}\eta_{\text{new}}(x) = \mathcal{L}\{\eta(x) + \lambda_0 S_{21}\zeta(x) + \delta\xi_\perp(x) + \bar{\Lambda}\delta\eta_\perp(x)\} \quad (6.53)$$

が成立する。ここで、再び作用素  $\mathcal{L}$  をはずすことができ

$$\eta_{\text{new}}(x) = \eta(x) + \lambda_0 S_{21}\zeta(x) + \delta\xi_\perp(x) + \bar{\Lambda}\delta\eta_\perp(x) \quad (6.54)$$

を得る。これを (6.3) 式に使うと

$$\begin{aligned} \xi_{1,\text{new}}(x) &= \hat{\xi}^{(b)}(x) - \delta\hat{\xi}(x) + (\Lambda + \lambda_0 S_{21}\Omega)(\hat{\zeta}^{(b)}(x) - \delta\hat{\zeta}(x)) \\ &\quad + \eta(x) + \lambda_0 S_{21}\zeta(x) + \delta\xi_\perp(x) + \Lambda_{\text{new}}\delta\eta_\perp(x) \\ &= \xi_1(x) + S_{21}\xi_2(x) \end{aligned} \quad (6.55)$$

## 7 解の変換の効果

前章までに述べた定式化に基づき、MARG1D コードを負磁気シア配位へ拡張する。しかしながら、MARG1D コードは  $Y(x) = x\xi(x)$  に対する Newcomb 方程式 (2.1) を解いて、 $Y(x)$  について接続データ  $(\hat{\Lambda}, \hat{\Omega}, \hat{\Delta}_{jk})$  を求める。一方、(5.11) 式で与えられる内部層方程式に関する境界行列  $\Sigma$  は、 $\xi(x)$  についての接続データをもとにして計算する。したがって、解を  $\xi(x)$  から  $Y(x)$  に変換したときの接続データの変換則を求める必要が生じる。 $Y(x)$  に対する  $x = x_1$  における大きい解と小さい解をそれぞれ、 $\Xi^{(b)}(x)$ 、 $\Xi^{(s)}(x)$  とおき、 $x = x_2$  における  $Y(x)$  の大きい解と小さい解をそれぞれ、 $Z^{(b)}(x)$ 、 $Z^{(s)}(x)$  とおくと、 $2\mu_1 \neq \text{整数}$  かつ  $2\mu_2 \neq \text{整数}$  であれば  $\Xi^{(b)}(x)$ 、 $Z^{(b)}(x)$  は  $\xi^{(b)}(x)$ 、 $\zeta^{(b)}(x)$  に比例して小さい解が混じることはない [3]。

次に、 $x = x_1$ における Suydam 指数 $\mu_1$ が $\mu_1 = 1/2$ の場合を考える。このとき

$$\xi^{(b)} = \frac{1}{x-x_1} + \alpha \log(x-x_1) [1 + P(x-x_1)] + Q(x-x_1) \quad (7.1)$$

$$\xi^{(s)} = 1 + R(x-x_1) \quad (7.2)$$

と表される。ここで $t$ のべき級数 $P(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ は定数項を含まない。したがって

$$x\xi^{(b)} = x_1 \left\{ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x-x_1} + \alpha \log(x-x_1) [1 + \tilde{P}(x-x_1)] + \tilde{Q}(x-x_1) \right\} \quad (7.3)$$

$$x\xi^{(s)} = x_1 \{1 + \tilde{R}(x-x_1)\} \quad (7.4)$$

を得る。ここで、 $\tilde{P}(t)$ 、 $\tilde{Q}(t)$ 、 $\tilde{R}(t)$ も定数項を含まない $t$ のべき級数である。これより、関係式

$$x\xi^{(b)} = x_1 \left[ \Xi^{(b)}(x) + \frac{1}{x_1} \Xi^{(s)}(x) \right] \quad (7.5)$$

$$x\xi^{(s)} = x_1 \Xi^{(s)}(x) \quad (7.6)$$

を得る。同様にして、 $\mu_2 = 1/2$ の場合、関係式

$$x\zeta^{(b)} = x_2 \left[ Z^{(b)}(x) + \frac{1}{x_2} Z^{(s)}(x) \right] \quad (7.7)$$

$$x\zeta^{(s)} = x_2 Z^{(s)}(x) \quad (7.8)$$

が成立する。そこで、 $\mu_1 = \mu_2 = 1/2$ の場合について、 $Y(x)$ に対する Newcomb 方程式の2つの1次独立な大域解を

$$Y_1(x) = \hat{\Xi}^{(b)}(x) + \hat{\Lambda} Z^{(b)}(x) + \hat{\eta}(x) \quad (7.9)$$

$$Y_2(x) = \hat{\zeta}_f + \lambda_0 \hat{\Omega} Z^{(b)}(x) \quad (7.10)$$

とおき、 $x \rightarrow x_1$ のとき

$$Y_1(x) \rightarrow \Xi^{(b)}(x) + \hat{\Delta}_{11} \Xi^{(s)}(x) \quad (7.11)$$

$$Y_2(x) \rightarrow \hat{\Delta}_{21} \Xi^{(s)}(x) \quad (7.12)$$

とする。一方

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \frac{x}{x_1} \xi_1(x) = \frac{x}{x_1} \left[ \hat{\xi}^{(b)}(x) + \hat{\Lambda} \hat{\zeta}^{(b)}(x) + \hat{\eta}(x) \right] \\ &\rightarrow \frac{x}{x_1} \left[ \xi^{(b)}(x) + \Delta_{11} \xi^{(s)}(x) \right] \\ &= \left( \Xi^{(b)}(x) + \frac{1}{x_1} \Xi^{(s)}(x) \right) + \Delta_{11} \Xi^{(s)}(x) \\ &= \Xi^{(b)}(x) + \left( \Delta_{11} + \frac{1}{x_1} \right) \Xi^{(s)}(x) \end{aligned} \quad (7.13)$$

および

$$Y_2(x) = \frac{x}{x_1} \xi_2(x) \rightarrow \frac{x}{x_1} \Delta_{21} \xi^{(s)} = \Delta_{21} \Xi^{(s)}(x) \quad (7.14)$$

であるので

$$\hat{\Delta}_{11} = \Delta_{11} + \frac{1}{x_1} \quad (7.15)$$

$$\hat{\Delta}_{21} = \Delta_{21} \quad (7.16)$$

を得る。次に、 $x \rightarrow x_2$  のとき

$$Y_1(x) \rightarrow \hat{\Lambda} Z^{(b)}(x) + \Delta_{12} Z^{(s)}(x) \quad (7.17)$$

$$Y_2(x) \rightarrow \lambda_0 \hat{\Omega} Z^{(b)}(x) + \hat{\Delta}_{22} Z^{(s)}(x) \quad (7.18)$$

また

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_1} \xi_1(x) &\rightarrow \frac{x}{x_1} \left[ \Lambda \zeta^{(b)}(x) + \Delta_{12} \zeta^{(s)}(x) \right] \\ &= \frac{x_2}{x_1} \Lambda Z^{(b)}(x) + \frac{x_2}{x_1} \left( \Delta_{12} + \frac{\Lambda}{x_2} \right) \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} x \xi_2(x) &\rightarrow \frac{x}{x_1} \left[ \lambda_0 \Omega \zeta^{(b)}(x) + \Delta_{22} \zeta^{(s)}(x) \right] \quad x \rightarrow x_2 \\ &= \frac{x_2}{x_1} \left\{ \lambda_0 \Omega Z^{(b)}(x) + \left( \Delta_{22} + \frac{\lambda_0 \Omega}{x_2} \right) Z^{(s)}(x) \right\} \end{aligned} \quad (7.20)$$

であるので

$$\hat{\Lambda} = \frac{x_2}{x_1} \Lambda, \quad \hat{\Delta}_{12} = \frac{x_2}{x_1} \left( \Delta_{12} + \frac{\Lambda}{x_2} \right) \quad (7.21)$$

$$\hat{\Omega} = \frac{x_2}{x_1} \Omega, \quad \hat{\Delta}_{22} = \frac{x_2}{x_1} \left( \Delta_{22} + \frac{\lambda_0 \Omega}{x_2} \right) \quad (7.22)$$

を得る。以上をまとめると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\Delta}_{11} & \hat{\Delta}_{21} \\ \hat{\Delta}_{12} & \hat{\Delta}_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2/x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \delta_{2\mu_1,1}/x_1 & 0 \\ \delta_{2\mu_2,1}/x_1 \cdot \Lambda & \delta_{2\mu_2,1} \lambda_0 \Omega / x_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.23)$$

を得る。ここで

$$\delta_{2\mu_1,1} = \begin{cases} 1, & 2\mu_1 = 1 \\ 0, & 2\mu_1 \neq 1 \end{cases} \quad (7.24)$$

および

$$\delta_{2\mu_2,1} = \begin{cases} 1, & 2\mu_2 = 1 \\ 0, & 2\mu_2 \neq 1 \end{cases} \quad (7.25)$$

である。

## 8 テスト計算結果

テスト計算として負磁気シア配位での  $m/n = 1/1$  および  $3/1$  モードについて接続行列  $T$  および境界行列  $\Sigma$  を MARG1D コードで求めた。最終的に必要なのは境界行列  $\Sigma$  であるので、接続データ  $(\Lambda, \Omega, \Delta_{jk})$  より行列  $\Sigma$  に注目する。また、接続行列  $T$  は変換則 (不変性) の検証を行う上で重要な量である。 $m/n = 1/1$  モードについては固有値および接続行列  $T$  の理論式があるので、数値計算結果を理論値と比較することによりコードの検証ができる。また、数値解の真値への収束性も調べることができる。応用上興味があるのは  $m \geq 2$  モードであるが、固有値、接続行列の理論式はないので、数値計算結果の妥当性を直接検証することができない。そこで、大きい解 (無限エネルギー部分) の定義の変更に伴う接続行列および境界行列の変換則 (不変性) が数値的に成立するのかを調べるによりコードの検証を行う。また、それらのグリッド数に対する収束性も調べる。

### 8.1 $m/n = 1/1$ の例

図 8.1、8.2 にテスト計算に用いる  $q(x)$  と  $dp/dx$  を示す。ここで  $x < 0.6$  のとき  $dp/dx = 0$  であり、また用いたパラメータは以下の通りである。

$$\begin{aligned} q_0 &= 0.8, & a_L &= 2.0, & a_R &= 2.5, & q_r &= 1.0, \\ x_1 &= 0.4, & x_2 &= 0.8, \\ \mu_1 &= 0.5, & \mu_2 &= 0.49749372 \end{aligned}$$

すなわち、 $x < x_1$  で  $m/n = 1/1$  モードは理想 MHD 的に安定であり、 $x_1 < x < x_2$  では不安定であるようにパラメータを設定した。以下、グリッドはすべて一様分布である。また、大きい解は再定義 ( $x_1$  では  $\log$  関数使用) している。

図 8.3 は  $n_L = 640$ 、 $n_M = 640$ 、 $n_R = 320$  のときの数値計算から求めた固有関数  $\xi_L(x)$ 、 $\xi_0(x)$ 、 $\xi_R(x)$  を示す。なお、アスペクト比  $\epsilon = 0.1$  である。 $n_L$  は  $0 \leq x \leq x_1$ 、 $n_M$  は  $x_1 \leq x \leq x_2$ 、 $n_R$  は  $x_2 \leq x \leq 1$  のグリッド数である。固有値を以下に示す。計算結果は理論値とよく一致している。

	$\lambda_L$	$\lambda_M$	$\lambda_R$
計算値	$4.7993224e-02$	$-0.20983930$	$227.18717$
理論値	$4.7996050e-02$	$-0.20930833$	

また、 $\lambda_L > 0$  は  $x < x_1$  でこのモードは安定であること、 $\lambda_M < 0$  は  $x_1 < x < x_2$  で不安定であることを示している。また、 $x > x_2$  では安定である。

図 8.4、図 8.5 は解  $\zeta(x)$ 、 $\eta(x)$  を、図 8.6、図 8.7 は  $\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x)$  および  $\mathcal{L}\hat{\eta}^{(b)}(x)$  を示す ( $\epsilon = 0.1$ )。

図 8.8~図 8.11 は接続行列  $T_{jk}$  の  $\epsilon$  依存性を示す ( $n_M = 1600$ )。「○」印および「●」印は、それぞれ、数値計算から求めた接続行列および理論値を表す。 $\epsilon \rightarrow 0$  とともに数値計算結果と理論値はよく一致する。 $\epsilon = 0.05$  の場合の値を以下に示す。

	$T_{11}$	$T_{12}$	$T_{21}$	$T_{22}$
$n_M = 1600$	$-7.8318950e - 02$	$-18.048632$	$-1.1809635e - 04$	$0.99947376$
理論値	$-8.0095962e - 02$	$-18.186674$	$-7.5394591e - 05$	$1.0002349$

図 8.12、図 8.13 に固有値のグリッド数依存性を、図 8.14、図 8.15 に接続行列  $T_{jk}$  の、図 8.16、図 8.17 に境界行列  $\Sigma_{jk}$  のグリッド数依存性を、それぞれ、示す ( $\epsilon = 0.1$ )。すべてのグリッド数に対して逆自乗収束性を示す。また、以下に示すように境界行列の数値計算結果と理論値とはよく一致している。

	$\Sigma_{11}$	$\Sigma_{12}$	$\Sigma_{21}$	$\Sigma_{22}$
$n_M = 1600$	$-0.2279861$	$0.2280826$	$0.1994372e - 01$	$-0.1970057e - 01$
理論値	$-0.2258757$	$0.2248776$	$0.1935920e - 01$	$-0.2177993e - 01$

境界行列  $\Sigma$  の非対角要素も対角要素も同じオーダーの値をもっている。これは、 $m/n = 1/1$  モードについて、2枚の有理面が強く結合していることを意味する。また、行列  $\Sigma$  の理論値は接続行列  $T$  の理論値から計算され、 $\Sigma$  の数値計算は接続データ  $\Lambda$ 、 $\Omega$ 、 $\Delta_{jk}$  から計算されていることに注意。これは境界行列  $\Sigma$  の不変性を確認している。

## 8.2 $m/n = 3/1$ の例

図 8.18、8.19 に  $m/n = 3/1$  のテスト計算に用いる  $q(x)$  と  $dp/dx$  を示す。また、用いたパラメータは以下の通りである。

$$\begin{aligned} q_0 &= 2.8, & a_L &= 2.0, & a_R &= 2.5, & q_r &= 3.0, \\ x_1 &= 0.4, & x_2 &= 0.8, & \epsilon &= 0.2 \\ \mu_1 &= \mu_2 = 0.48989795 \end{aligned}$$

なお、グリッドは前の例と同じく一様分布である。

図 8.20 は  $n_L = n_M = 640$ 、 $n_R = 320$  のときの固有関数  $\xi_L(x)$ 、 $\xi_0(x)$ 、 $\xi_R(x)$  を示し、固有値はそれぞれ

$$\lambda_L = 4.1352342, \quad \lambda_M = 1.3724241, \quad \lambda_R = 27.793000$$

である。

図 8.21~図 8.23 は解  $\zeta(x)$ 、図 8.24~図 8.26 は  $\eta(x)$  で、それぞれ、大きい解を第 1 項で、および、第 2 項で打ち切った場合と、再定義した場合を示す。また、それぞれの場合について、 $\mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}(x)$  を図 8.27 および図 8.28 (拡大図) に、 $\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x)$  を図 8.29 および図 8.30 (拡大図) を示す。各図において、実線は大きい解を第 1 項で打ち切った場合を、点線は第 2 項で打ち切った場合を、1 点鎖線は大きい解を再定義した場合を示す。拡大図から分かるように第 2 項まで取った場合、 $\mathcal{L}\hat{\xi}^{(b)}(x)$  の  $x_1$  近傍での挙動は第 1 項で打ち切った場合より滑らかであるが、大局的には大きく変動する。図 8.30 から  $\mathcal{L}\hat{\zeta}^{(b)}(x)$  についても同様であることが分かる。このことが図 8.21 および図

8.22に示される $\zeta(x)$ の挙動と図8.24および図8.25に示される $\eta(x)$ の挙動に現れるとともに後で示す接続データ $T_{jk}$ や境界行列のグリッド数に対する収束性に反映する。

図8.31、図8.32は固有値のグリッド数依存性を示す。すべて各区間における第1固有値であるので収束性が良い。 $n_L = n_M = 1600$ 、 $n_R = 800$ のときの固有値は

$$\lambda_L = 4.1352358, \quad \lambda_M = 1.3724254, \quad \lambda_R = 27.792982$$

となる。図8.33~図8.36は接続行列 $\bar{T}_{jk}$ のグリッド数依存性を示す((6.34)式の補正をしている)。各図において、実線は大きい解を第1項で打ち切った場合を、点線は第2項で打ち切った場合を、1点鎖線は大きい解を再定義した場合を示す。大きい解の選び方によらず共通の値へ逆自乗収束をする。しかし、大きい解を第2項で打ち切った場合の収束性は他の場合に比べて悪い。これは、図8.28、図8.30で述べた理由による。 $n_M = 1600$ のときの値を以下に示す。

	$\bar{T}_{11}$	$\bar{T}_{12}$	$\bar{T}_{21}$	$\bar{T}_{22}$
第1項	-1.2041651	-27.679785	$6.7423534e-02$	1.8172467
第2項	-1.1512288	-26.099873	$6.7424537e-02$	1.8083007
再定義	-1.2041576	-27.677388	$6.7423685e-02$	1.8171272

なお、この結果は接続行列の不変性および変換則(6.34)の正しさを確認している。

図8.37~図8.40は境界行列 $\Sigma_{jk}$ のグリッド数依存性を示す。各図において、実線は大きい解を第1項で打ち切った場合を、点線は第2項で打ち切った場合を、1点鎖線は大きい解を再定義した場合を示す。 $\Sigma_{jk}$ は逆自乗的に共通の値へ収束する。ただし、大きい解を第2項で打ち切った場合の収束性は悪い。 $n_M = 1600$ のとき、それらは

	$\Sigma_{11}$	$\Sigma_{12}$	$\Sigma_{21}$	$\Sigma_{22}$
第1項	$0.1786427e-02$	$-0.1424974e-02$	$-0.1235227e-03$	$-0.2922579e-01$
第2項	$0.1761258e-02$	$-0.1422702e-02$	$-0.1233257e-03$	$-0.2923611e-01$

である。これは、境界行列の不変性に関する定理2を確認している。大きい解を再定義した場合も境界行列 $\bar{\Sigma}_{jk}$ は逆自乗収束する。 $n_M = 1600$ のとき

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{11} &= -0.2288391, & \bar{\Sigma}_{12} &= 0.2040061 \\ \bar{\Sigma}_{21} &= 0.1768410e-01, & \bar{\Sigma}_{22} &= -0.1755142 \end{aligned}$$

となる。この例でも2枚の有理面は強く結合している。

次に、左側( $x < x_1$ )および右側( $x > x_2$ )の接続データ $\bar{\Delta}_L$ 、 $\bar{\Delta}_R$ のグリッド数依存性を図8.41および図8.42に示す。ここで記号「 $\bar{\quad}$ 」は $Y = x\xi(x)$ に対する接続データから $Y = \xi(x)$ に対する接続データへ変換されていることを示す。結果は接続データの逆自乗収束性をよく表している。

## 9 要約と議論

負磁気シア配位における抵抗性 MHD 安定性の解析理論に関する前回の報告に引続き、本報告書では 2 枚の有理面には含まれた外部領域における Newcomb 方程式の大域解の構成法および接続データの数値計算法を述べた。また、接続データから作られる境界行列および接続行列が、大きい解 (無限エネルギー部分) の変更に対して不変であることの証明を与えた。これは本報告書で示した定式化の妥当性を示す。また、テスト計算から、この不変性を確認するとともに解析結果との比較から数値計算法の検証を行なった。

文献 [1] から [3] および本報告書で行なった一連の研究は抵抗性 MHD 安定性の漸近接続法による解析を数値解法として確固とした理論的裏付けのある境界値問題、固有値問題として定式化することが主たる目標であった。たとえば、よく使われる射撃法 (シューティング法) はこの問題の解法としては不安定な方法である。また、2 枚有理面問題に対して射撃法が実際的な方法とは考えられず、境界値問題および固有値問題として扱うことが必須であろう。

## 謝 辞

本研究の遂行にあたり、始終激励していただきました安積正史炉心プラズマ研究部次長、平山俊雄プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 徳田伸二, 渡邊朋子, 負磁気シア配位における抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論, JAERI-Research 96-057 (1996).
- [2] 徳田伸二, 渡邊朋子, 抵抗性磁気流体力学安定性解析における線形内部層方程式の差分解法, JAERI-Research 96-044 (1996).
- [3] 徳田伸二, 渡邊朋子, MARG1D : 1次元外部領域接続データコード, JAERI-Data/Code 95-011 (1995).
- [4] 福原満洲雄, 常微分方程式 第2版, 岩波書店, (1980).



## 9 要約と議論

負磁気シア配位における抵抗性 MHD 安定性の解析理論に関する前回の報告に引続き、本報告書では2枚の有理面にはさまれた外部領域における Newcomb 方程式の大域解の構成法および接続データの数値計算法を述べた。また、接続データから作られる境界行列および接続行列が、大きい解(無限エネルギー部分)の変更に対して不変であることの証明を与えた。これは本報告書で示した定式化の妥当性を示す。また、テスト計算から、この不変性を確認するとともに解析結果との比較から数値計算法の検証を行なった。

文献 [1] から [3] および本報告書で行なった一連の研究は抵抗性 MHD 安定性の漸近接続法による解析を数値解法として確固とした理論的裏付けのある境界値問題、固有値問題として定式化することが主たる目標であった。たとえば、よく使われる射撃法(シューティング法)はこの問題の解法としては不安定な方法である。また、2枚有理面問題に対して射撃法が実際的な方法とは考えられず、境界値問題および固有値問題として扱うことが必須であろう。

## 謝 辞

本研究の遂行にあたり、始終激励していただきました安積正史炉心プラズマ研究部次長、平山俊雄プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 徳田伸二, 渡邊朋子, 負磁気シア配位における抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論, JAERI-Research 96-057 (1996).
- [2] 徳田伸二, 渡邊朋子, 抵抗性磁気流体力学安定性解析における線形内部層方程式の差分解法, JAERI-Research 96-044 (1996).
- [3] 徳田伸二, 渡邊朋子, MARG1D : 1次元外部領域接続データコード, JAERI-Data/Code 95-011 (1995).
- [4] 福原満洲雄, 常微分方程式 第2版, 岩波書店, (1980).

## 9 要約と議論

負磁気シア配位における抵抗性 MHD 安定性の解析理論に関する前回の報告に引続き、本報告書では2枚の有理面には含まれた外部領域における Newcomb 方程式の大域解の構成法および接続データの数値計算法を述べた。また、接続データから作られる境界行列および接続行列が、大きい解(無限エネルギー部分)の変更に対して不変であることの証明を与えた。これは本報告書で示した定式化の妥当性を示す。また、テスト計算から、この不変性を確認するとともに解析結果との比較から数値計算法の検証を行なった。

文献 [1] から [3] および本報告書で行なった一連の研究は抵抗性 MHD 安定性の漸近接続法による解析を数値解法として確固とした理論的裏付けのある境界値問題、固有値問題として定式化することが主たる目標であった。たとえば、よく使われる射撃法(シューティング法)はこの問題の解法としては不安定な方法である。また、2枚有理面問題に対して射撃法が実際的な方法とは考えられず、境界値問題および固有値問題として扱うことが必須であろう。

## 謝 辞

本研究の遂行にあたり、始終激励していただきました安積正史炉心プラズマ研究部次長、平山俊雄プラズマ理論研究室室長に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] 徳田伸二, 渡邊朋子, 負磁気シア配位における抵抗性磁気流体力学安定性の漸近接続理論, JAERI-Research 96-057 (1996).
- [2] 徳田伸二, 渡邊朋子, 抵抗性磁気流体力学安定性解析における線形内部層方程式の差分解法, JAERI-Research 96-044 (1996).
- [3] 徳田伸二, 渡邊朋子, MARG1D : 1次元外部領域接続データコード, JAERI-Data/Code 95-011 (1995).
- [4] 福原満洲雄, 常微分方程式 第2版, 岩波書店, (1980).

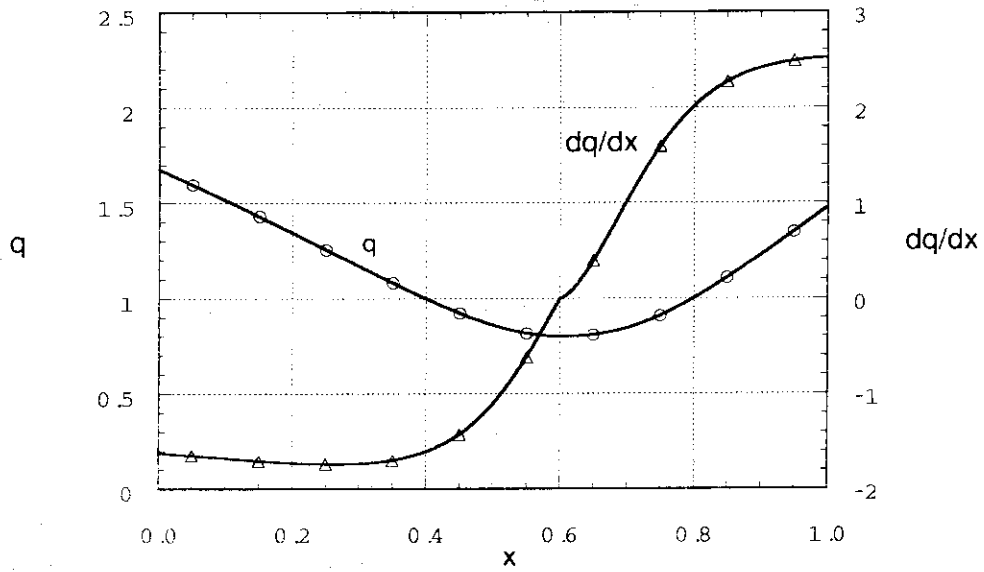


図 8.1: テスト計算に用いる  $q$  分布。パラメータは次の通り:  $q_0 = 0.8$ ,  $a_L = 2.0$ ,  $a_R = 2.5$ ,  $q_r = 1.0$ ,  $x_1 = 0.4$ ,  $x_2 = 0.8$

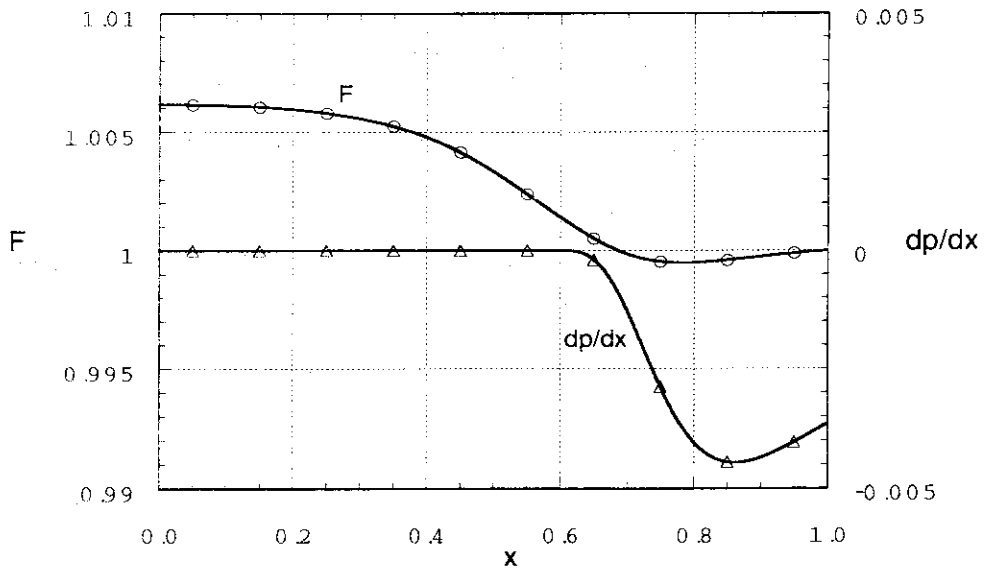


図 8.2: テスト計算に用いる圧力勾配  $dp/dx$ 。  $\epsilon = 0.1$ ,  $\mu_1 = 0.5$ ,  $\mu_2 = 0.49749372$ 、  
また、 $x < 0.6$  では  $dp/dx = 0$  である。

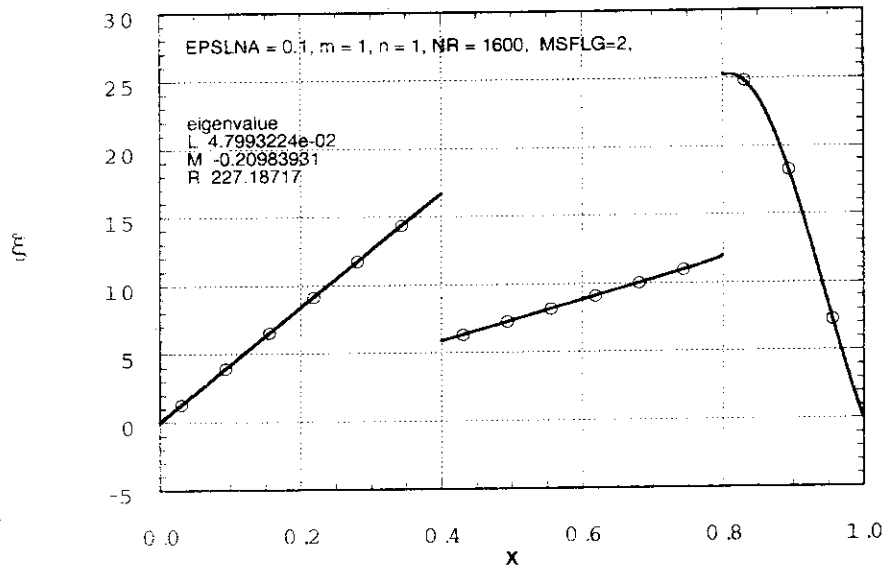


図 8.3:  $n_L = 640$ 、 $n_M = 640$ 、 $n_R = 320$  のときの固有関数。以下に示すように、数値計算結果と理論値との一致はよい。

	$\lambda_L$	$\lambda_M$	$\lambda_R$
NR = 1600	4.7993224e - 02	-0.20983930	227.18717
理論値	4.7996050e - 02	-0.20930833	

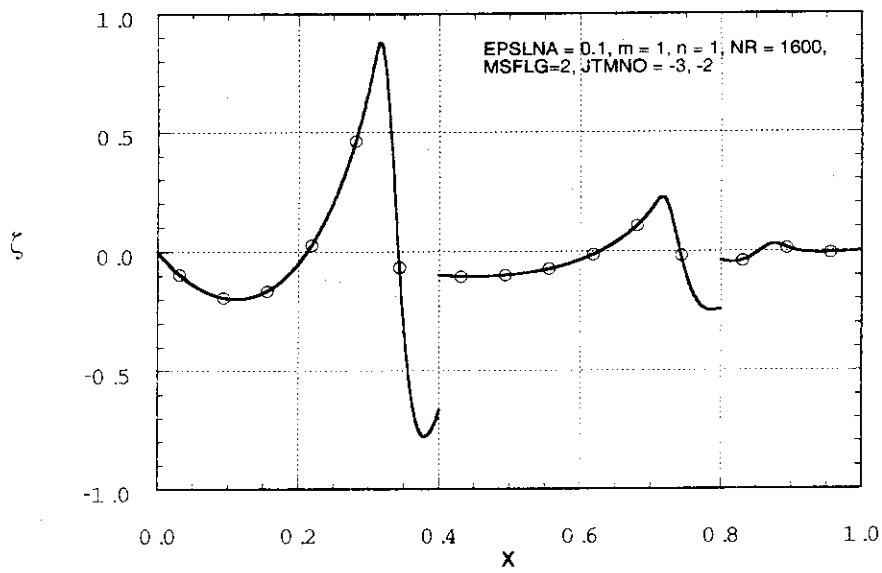


図 8.4: 大きい解を再定義 ( $x_1$ では log関数使用) したときの解 $\zeta(x)$ 。

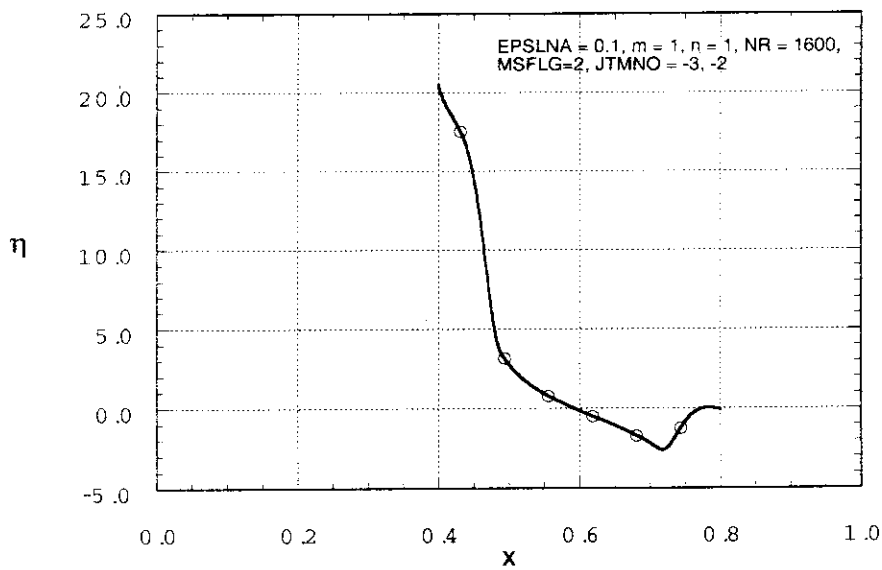


図 8.5: 大きい解を再定義 ( $x_1$ では log関数使用) したときの解 $\eta(x)$ 。

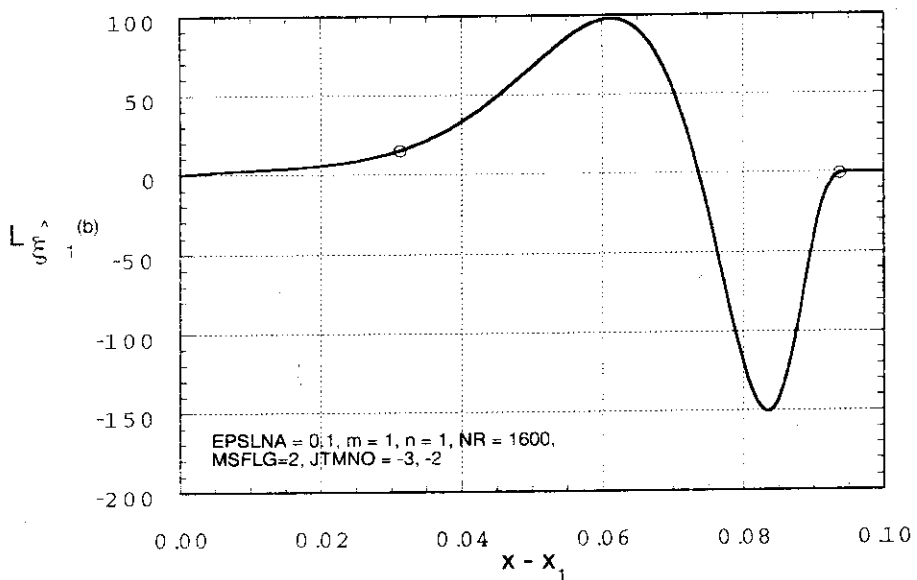


図 8.6: 大きい解を再定義 ( $x_1$ では log関数使用) したときの  $\mathcal{L}\hat{\xi}^b(x)$ 。

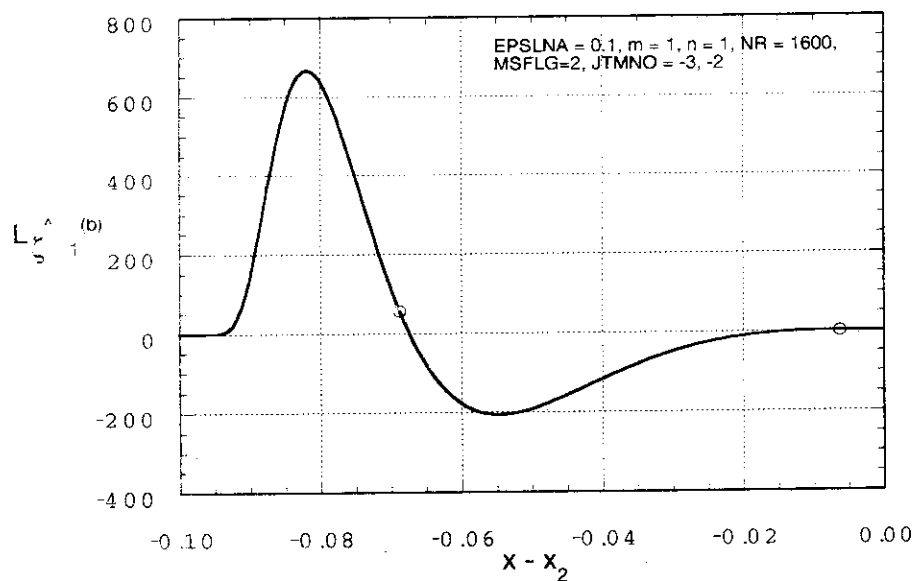


図 8.7: 大きい解を再定義 ( $x_1$ では log関数使用) したときの  $\mathcal{L}\hat{\zeta}^b(x)$ 。

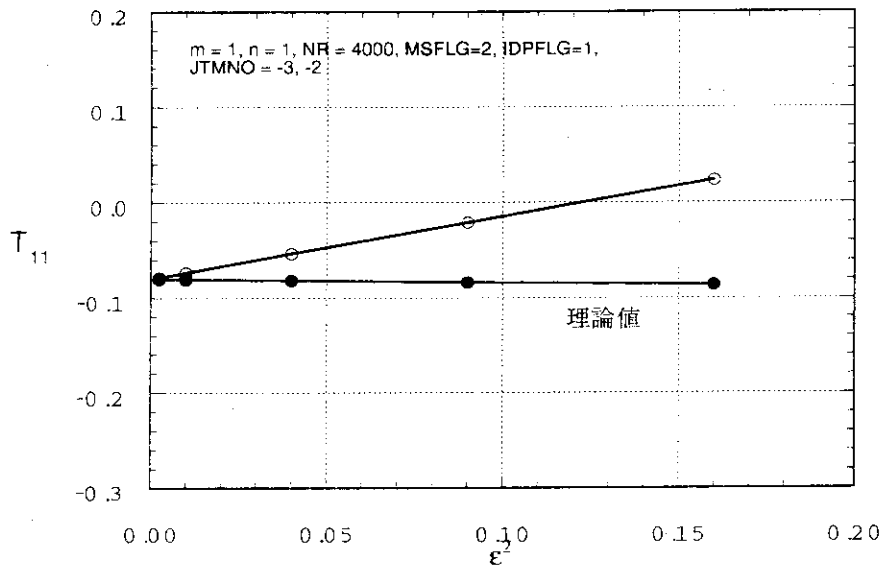


図 8.8: 接続行列  $T_{11}$  の  $\epsilon$  依存性 ( $n_M = 1600$ )。  $\epsilon \rightarrow 0$  とともに数値計算結果 (○印) と理論値 (●印) は一致する。  $\epsilon = 0.05$  の場合の値を以下に示す。

	$T_{11}$	$T_{12}$	$T_{21}$	$T_{22}$
$n_M = 1600$	$-7.8318950e-02$	$-18.048632$	$-1.1809635e-04$	$0.99947376$
理論値	$-8.0095962e-02$	$-18.186674$	$-7.5394591e-05$	$1.0002349$

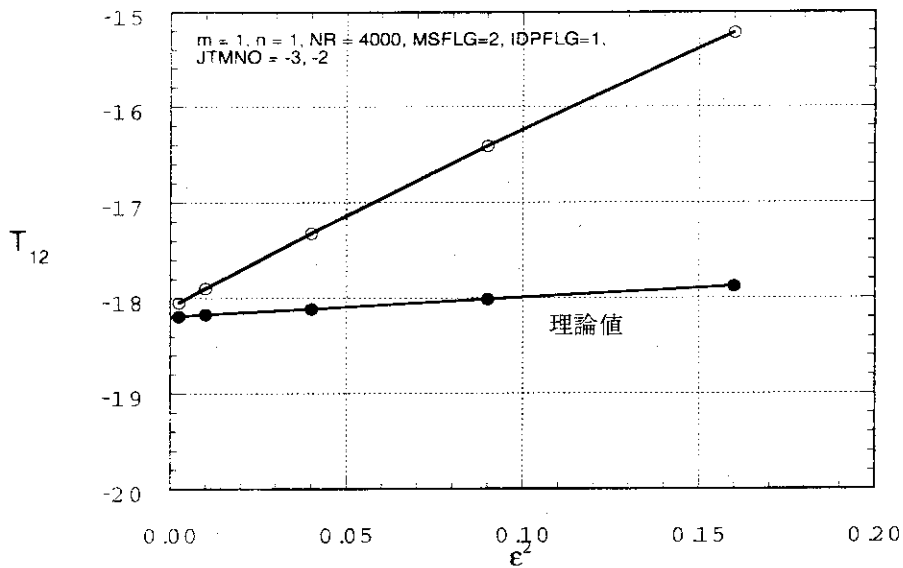


図 8.9: 接続行列  $T_{12}$  の  $\epsilon$  依存性 ( $n_M = 1600$ )。

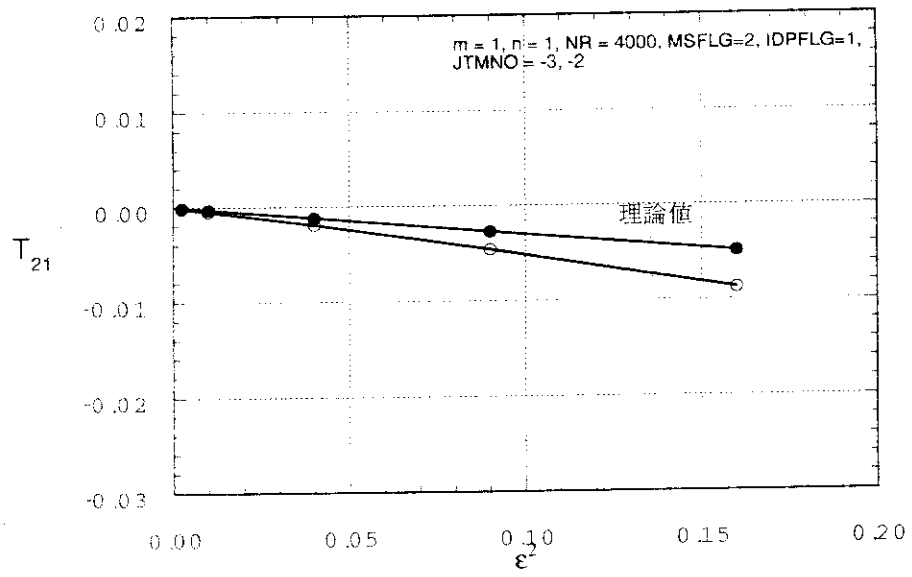


図 8.10: 接続行列  $T_{21}$  の  $\epsilon$  依存性 ( $n_M = 1600$ )。

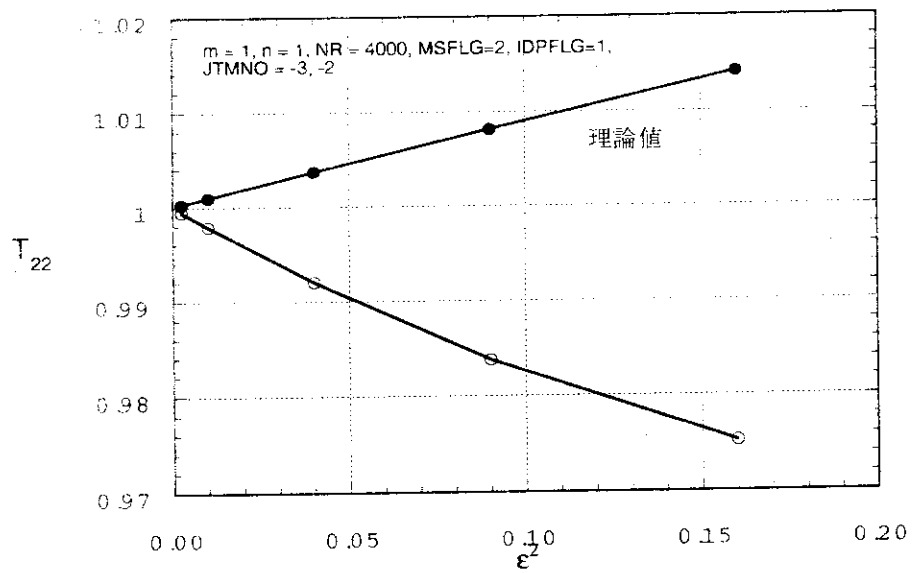


図 8.11: 接続行列  $T_{22}$  の  $\epsilon$  依存性 ( $n_M = 1600$ )。



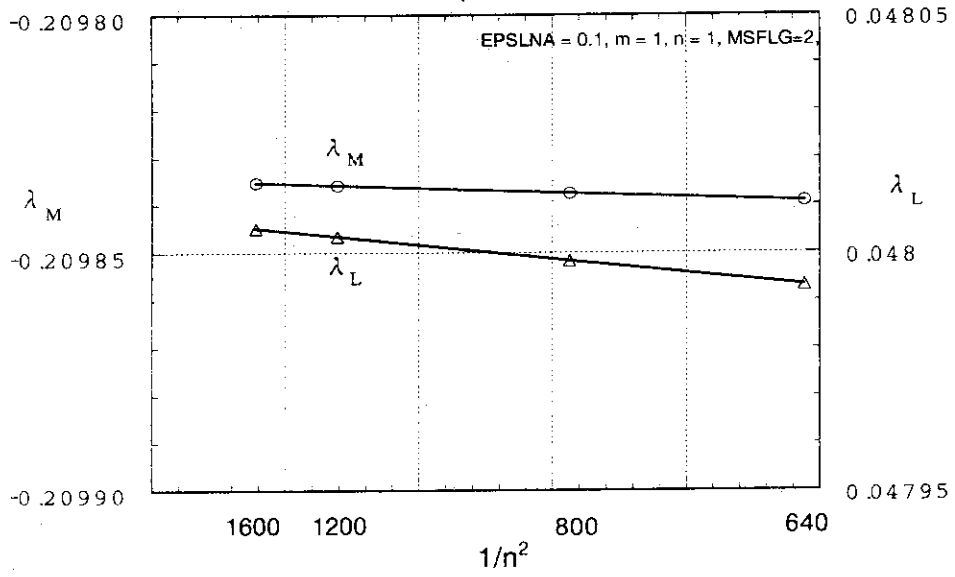


図 8.12: 固有値 $\lambda_L$ 、 $\lambda_M$ のグリッド数依存性。

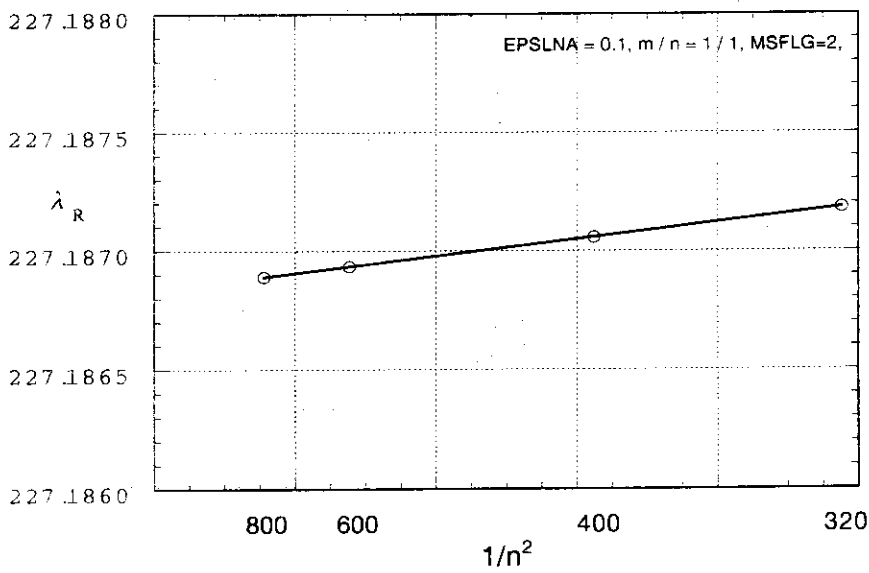


図 8.13: 固有値 $\lambda_R$ のグリッド数依存性。

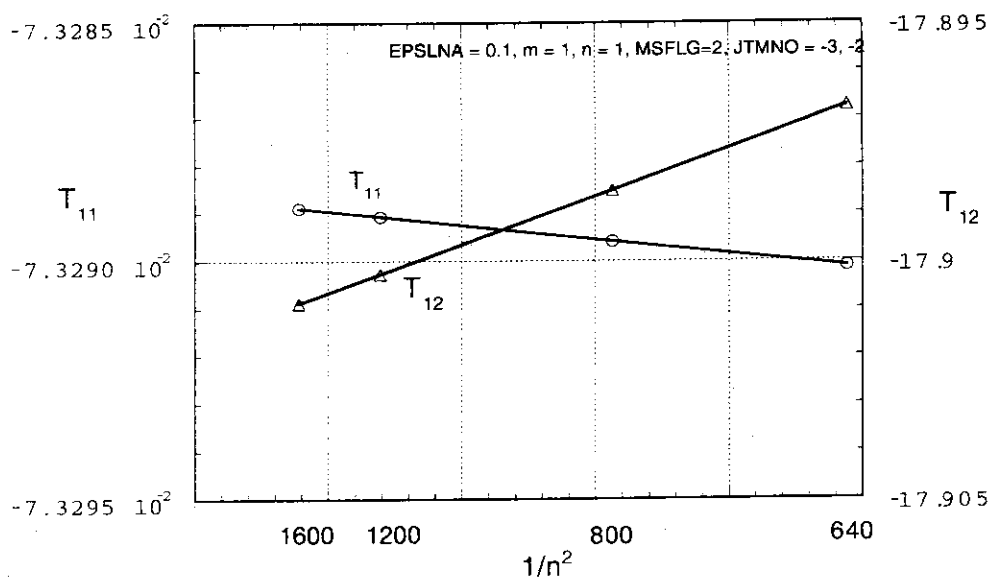


図 8.14: 接続行列  $T_{11}, T_{12}$  のグリッド数依存性。

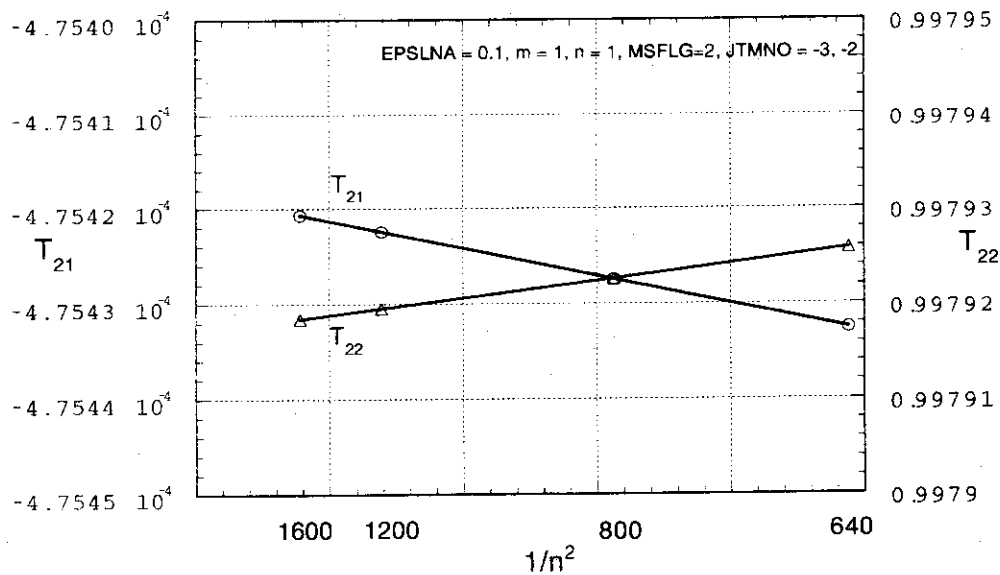


図 8.15: 接続行列  $T_{21}, T_{22}$  のグリッド数依存性。

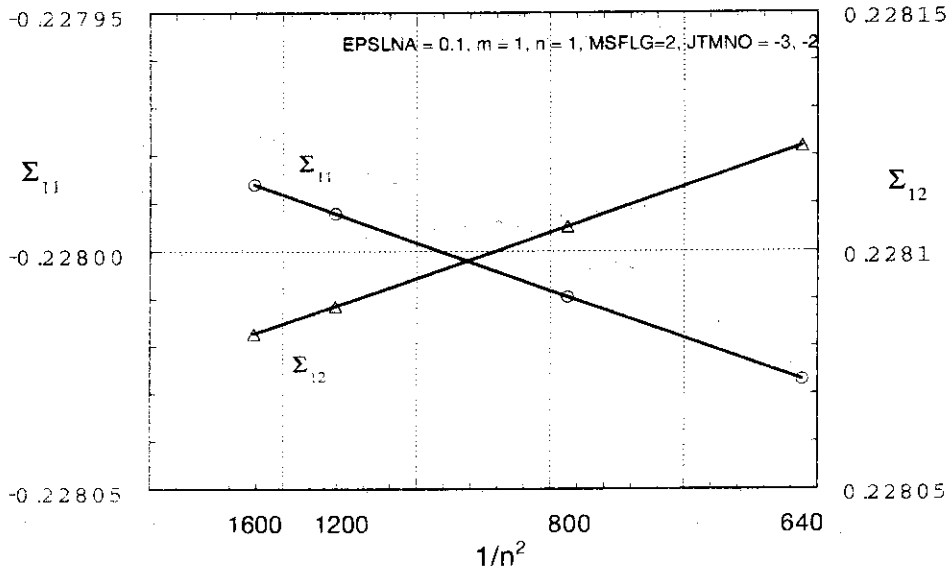


図 8.16: 境界行列 $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}$ のグリッド数依存性。 $n_M = 1600$  のときの値を以下に示す。数値計算で求めた境界行列と理論値との一致はよい。

	$\Sigma_{11}$	$\Sigma_{12}$	$\Sigma_{21}$	$\Sigma_{22}$
$n_M = 1600$	-0.2279861	0.2280826	$0.1994372e - 01$	$-0.1970057e - 01$
理論値	-0.2258757	0.2248776	$0.1935920e - 01$	$-0.2177993e - 01$

$m/n = 1/1$  モードの例では、境界行列の対角要素と非対角要素は同じオーダーであり、これは2枚の有理面が強く結合していることを意味している。

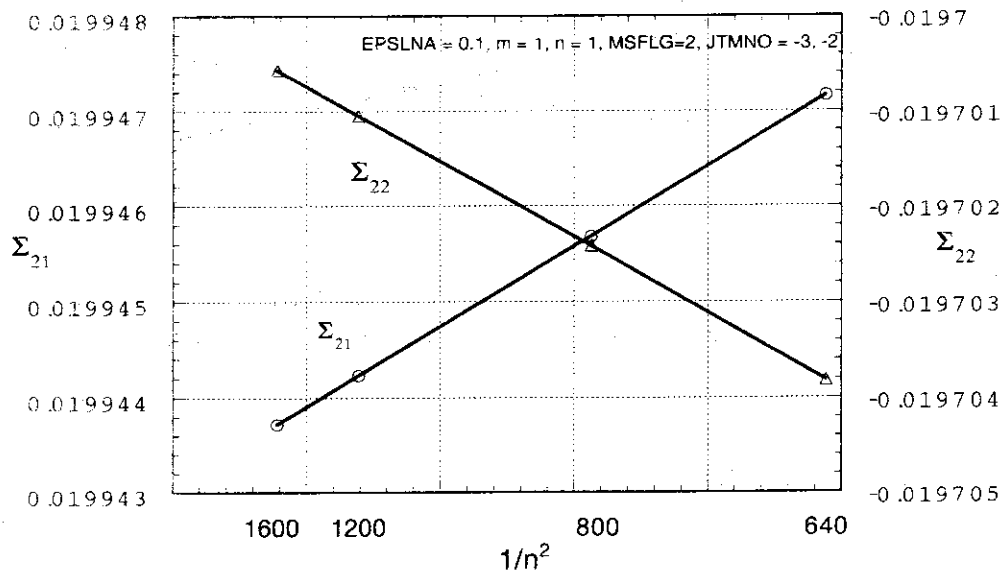


図 8.17: 境界行列 $\Sigma_{21}, \Sigma_{22}$ のグリッド数依存性。

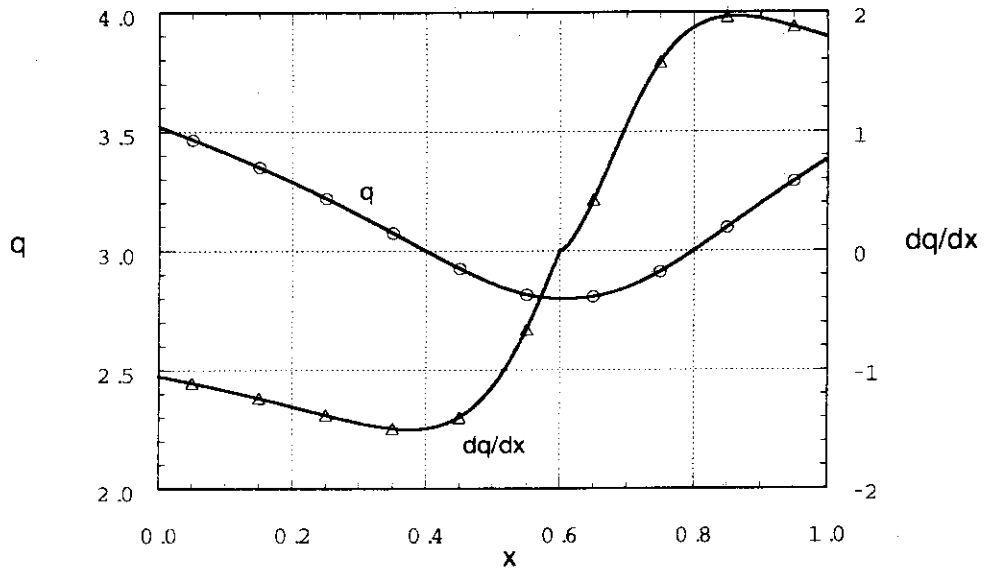


図 8.18: テスト計算に用いる  $q$  分布。パラメータは次の通り:  $q_0 = 2.8$ ,  $a_L = 2.0$ ,  $a_R = 2.5$ ,  $q_r = 3.0$ ,  $x_1 = 0.4$ ,  $x_2 = 0.8$

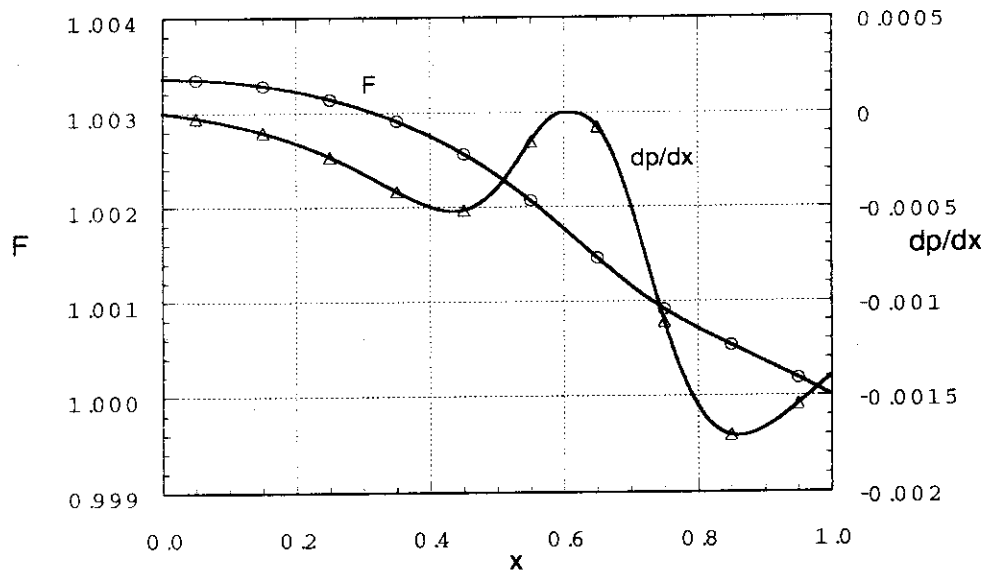


図 8.19: テスト計算に用いる圧力勾配  $dp/dx$ 。  $\epsilon = 0.2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.48989795$ 。

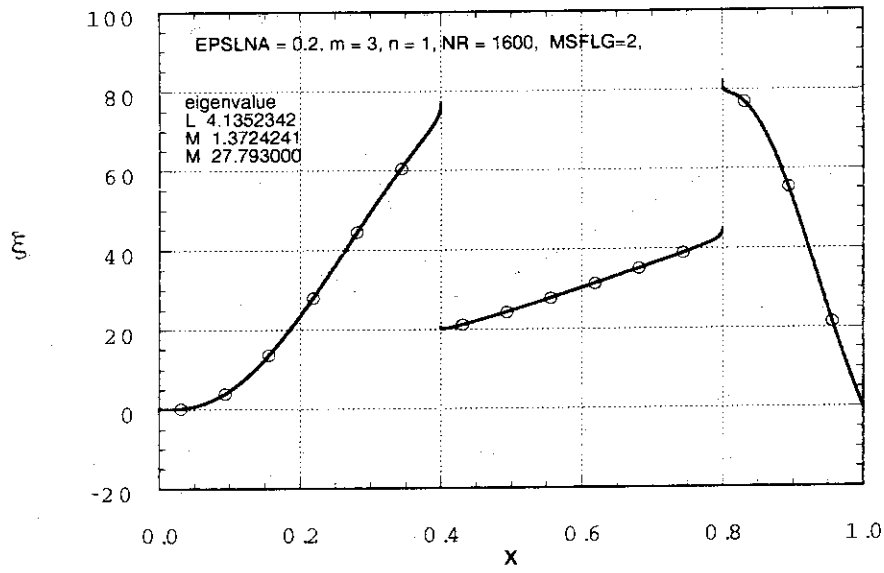


図 8.20:  $n_L = 640$ 、 $n_M = 640$ 、 $n_R = 320$  のときの固有関数。固有値はそれぞれ、  
 $\lambda_L = 4.1352342$ 、 $\lambda_M = 1.3724241$ 、 $\lambda_R = 27.793000$ 。

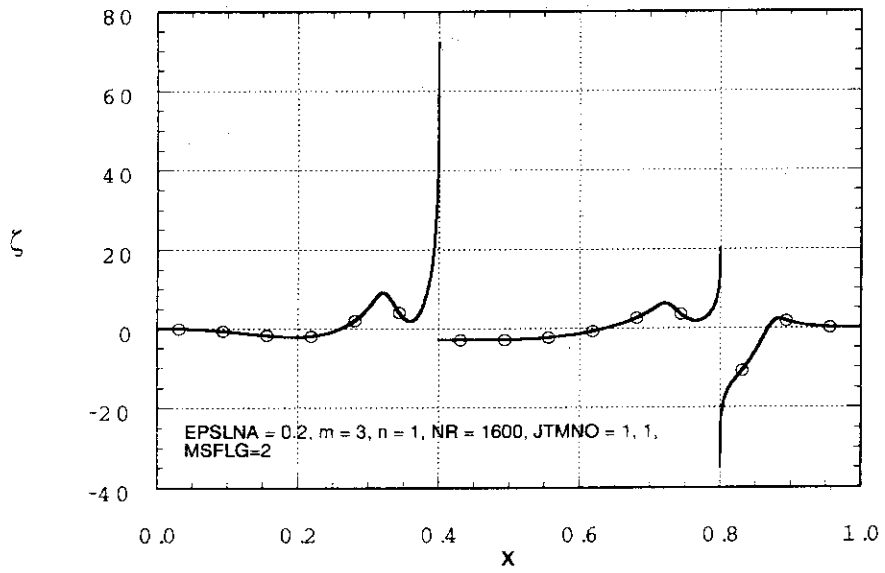


図 8.21: 大きい解を第1項までとしたときの解 $\zeta(x)$ 。

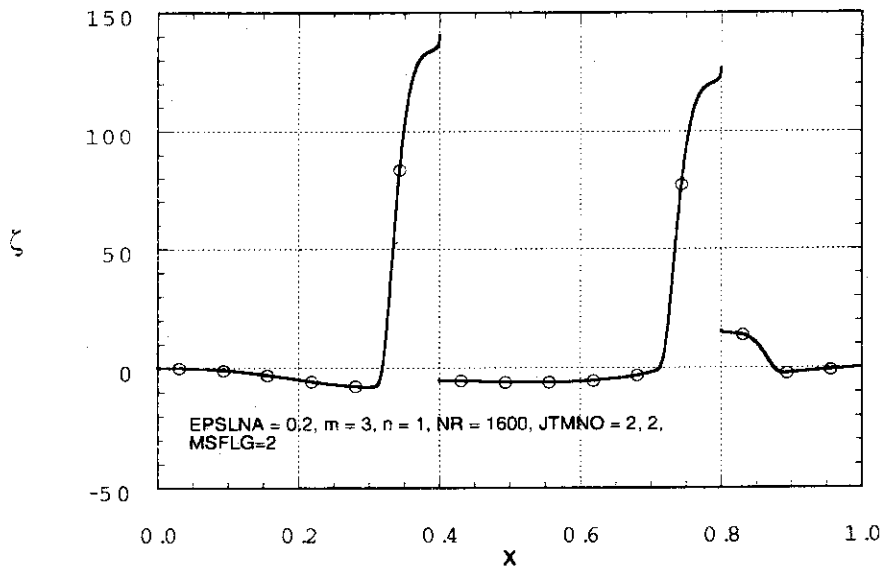


図 8.22: 大きい解を第2項までとしたときの解 $\zeta(x)$ 。

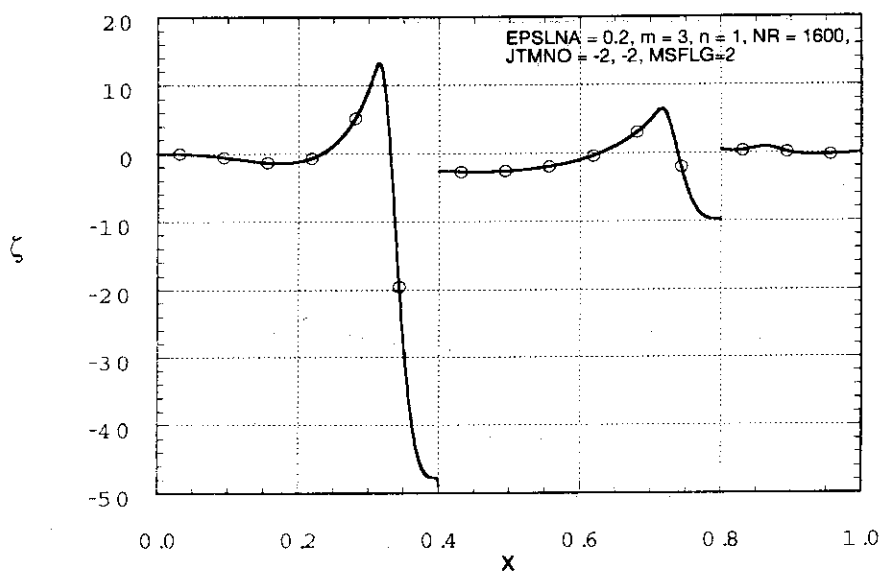


図 8.23: 大きい解を再定義したときの解 $\zeta(x)$ 。

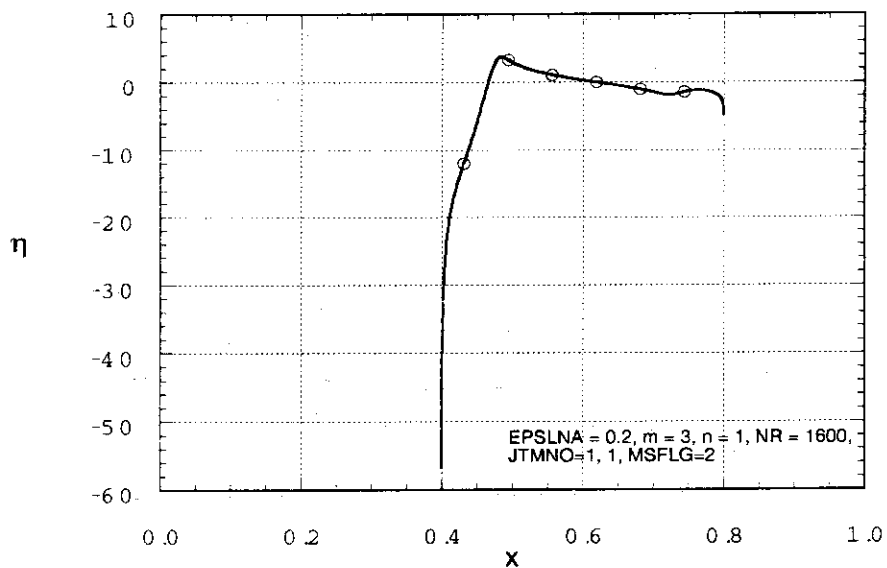


図 8.24: 大きい解を第1項までとしたときの解 $\eta(x)$ 。

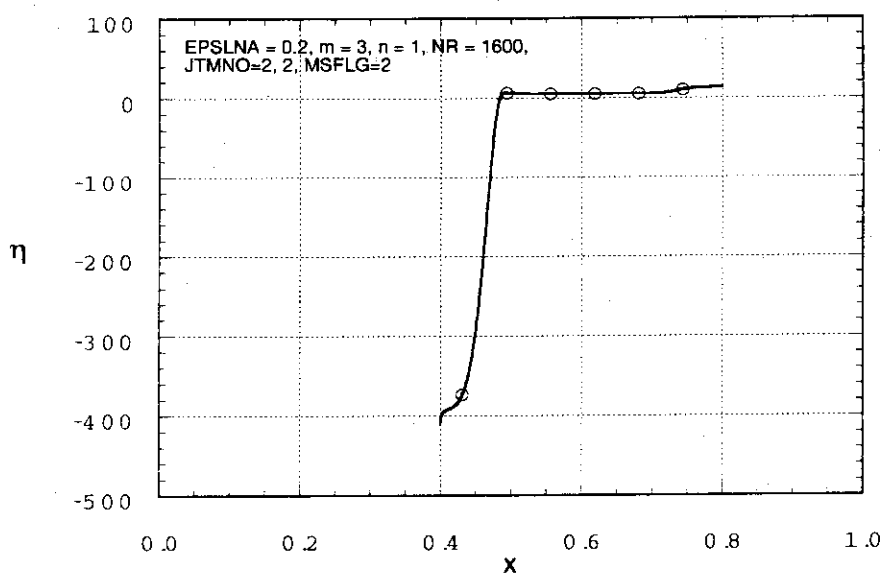


図 8.25: 大きい解を第2項までとしたときの解 $\eta(x)$ 。

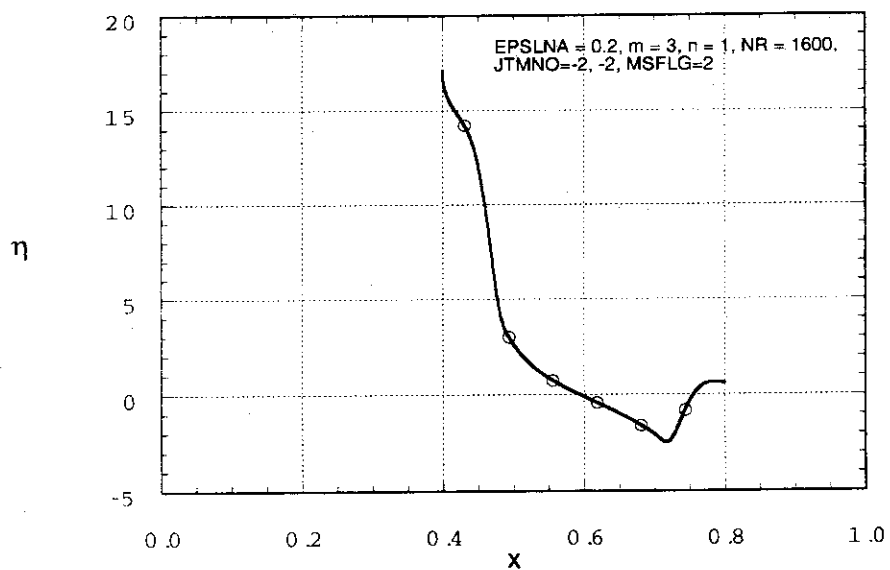


図 8.26: 大きい解を再定義したときの解 $\eta(x)$ 。



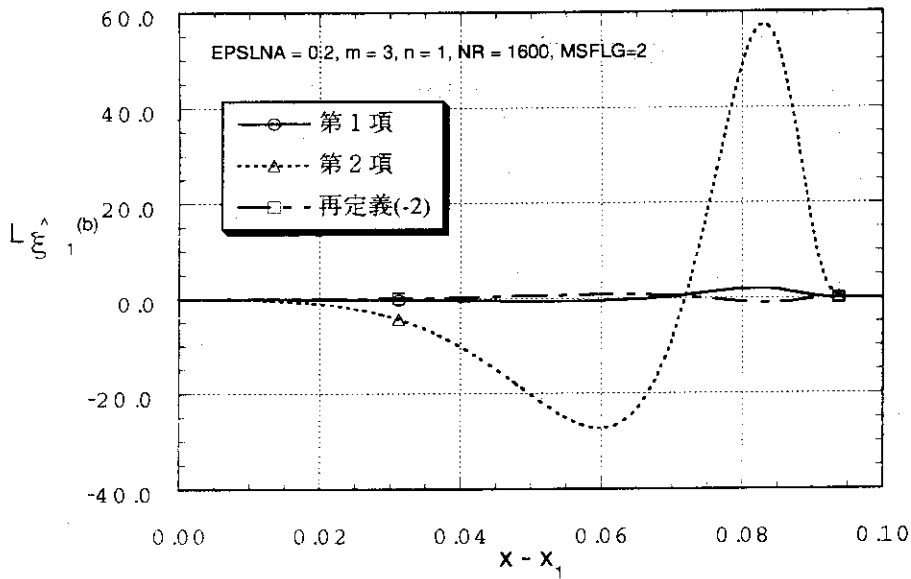


図 8.27:  $\mathcal{L}\hat{\xi}^b(x)$ 。実線および点線はそれぞれ、大きい解を第1項で、第2項で打ち切った場合で、一点鎖線は大きい解を再定義した場合である。

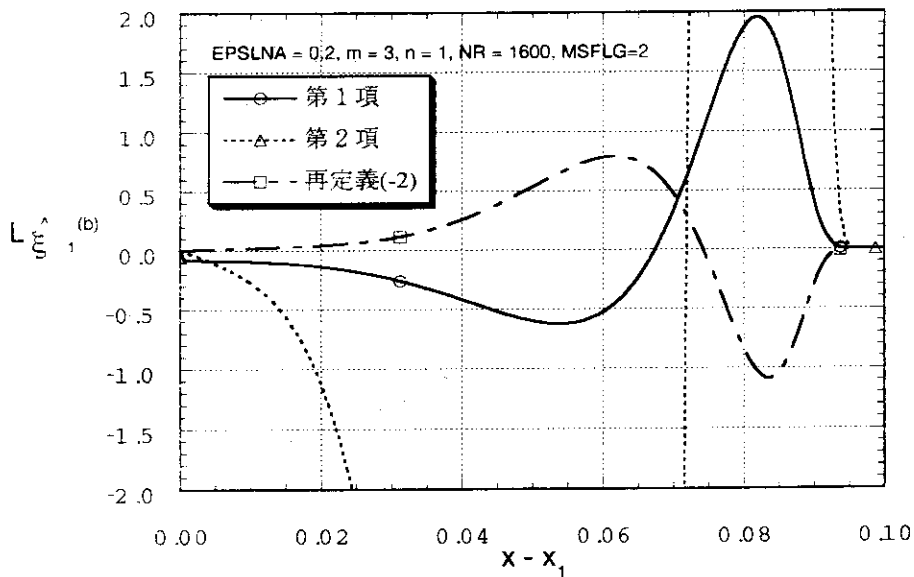


図 8.28: 図 8.27 の拡大図。大きい解を第2項で打ち切った場合の  $\mathcal{L}\hat{\xi}^b(x)$  (点線) は、第1項で打ち切った場合(実線)に較べて  $x_1$  の近傍での挙動は滑らかであるが、大局的には大きく変動する。大きい解を再定義すると、 $x_1$  の近傍で滑らかで、かつ、大局的な変動も小さくなる。

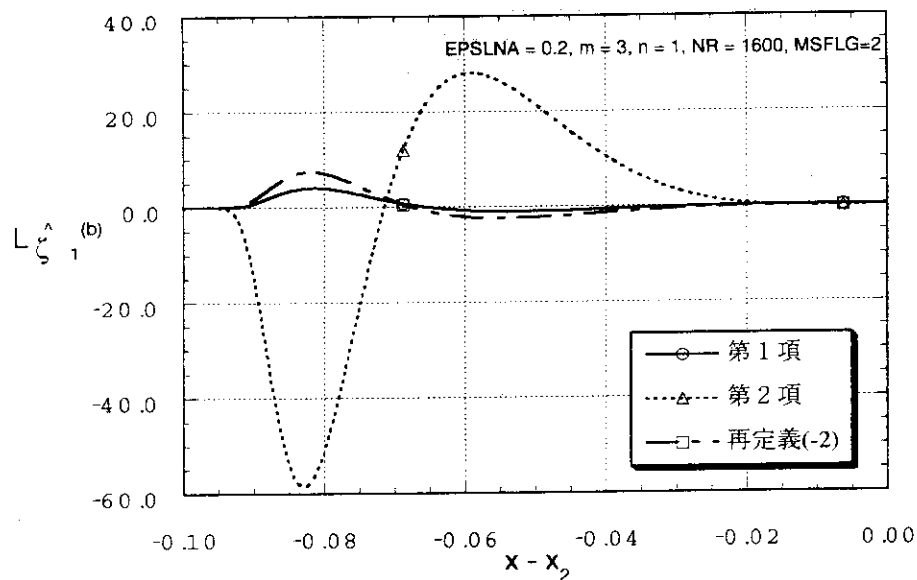


図 8.29:  $\mathcal{L}_{\zeta_1}^{\wedge(b)}(x)$ 。記号の意味は図 8.27 に同じ。

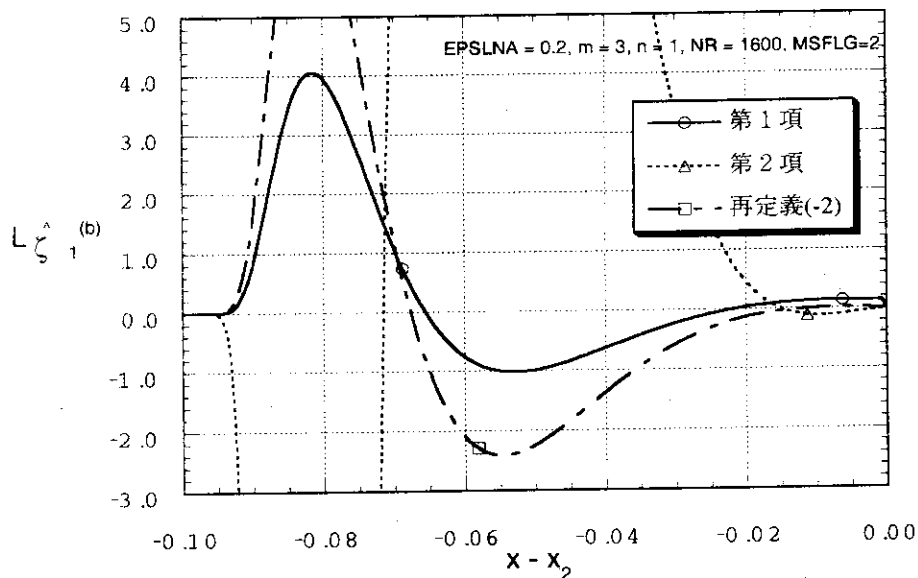


図 8.30: 図 8.29 の拡大図。大きい解を第2項で打ち切った場合の  $\mathcal{L}_{\zeta_1}^{\wedge(b)}(x)$  (点線) は、第1項で打ち切った場合(実線)に較べて  $x_2$  の近傍での挙動は滑らかであるが、大局的には大きく変動する。大きい解を再定義すると、 $x_2$  の近傍で滑らかで、かつ、大局的な変動も小さくなる。

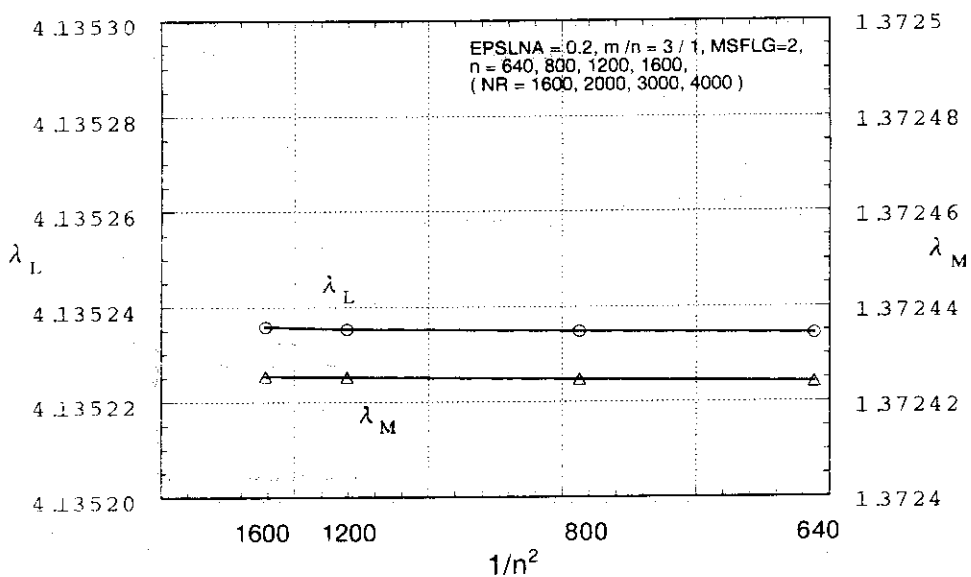


図 8.31: 固有値 $\lambda_L$ 、 $\lambda_R$ のグリッド数依存性。 $n_L = n_M = 1600$  のときの固有値は $\lambda_L = 4.1352358$ ,  $\lambda_M = 1.3724254$ 。

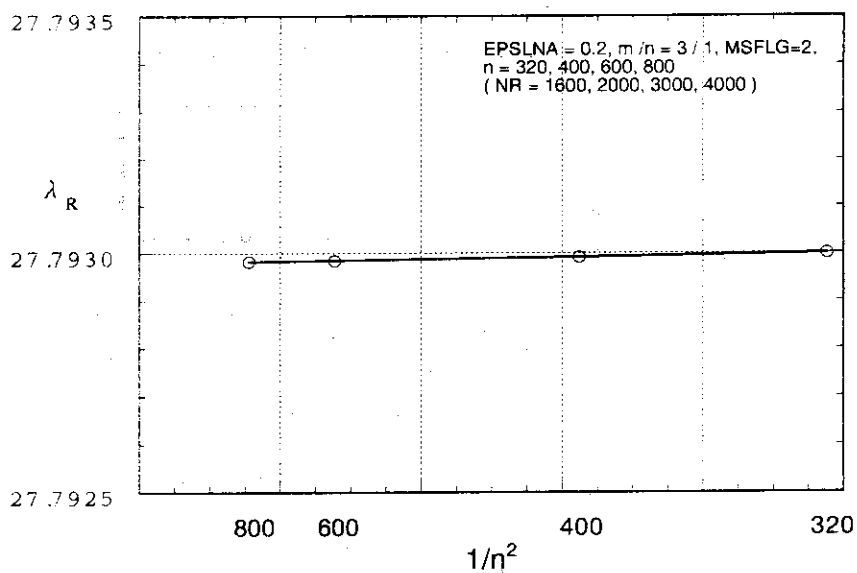


図 8.32: 固有値 $\lambda_R$ のグリッド数依存性。 $n_R = 800$  のときの固有値は $\lambda_R = 27.792982$ 。

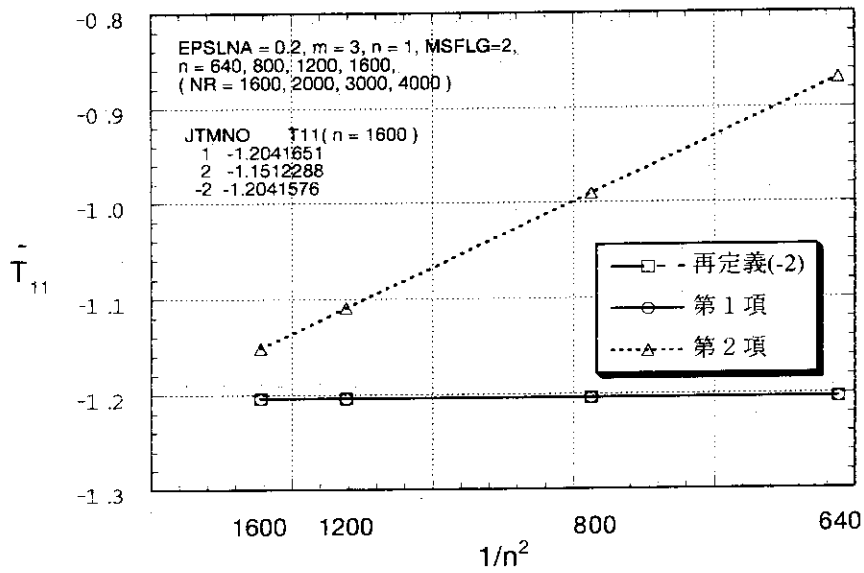


図 8.33: 接続行列  $T_{11}$  のグリッド数依存性。  
 実線は大きい解を第1項で打ち切った場合を、点線は第2項で打ち切った場合を、  
 1点鎖線は大きい解を再定義した場合を示す。大きい解の選び方によらず共通の値  
 へ逆自乗収束をする(接続行列は(6.34)式の補正をしている)。しかし、大きい解を  
 第2項で打ち切った場合の収束性は他の場合に比べて悪い。これは、図 8.6、図 8.7  
 で述べた理由による。 $n_M = 1600$  のときの値を以下に示す。

	$T_{11}$	$T_{12}$	$T_{21}$	$T_{22}$
第1項	-1.2041651	-27.679785	6.7423534e-02	1.8172467
第2項	-1.1512288	-26.099873	6.7424537e-02	1.8083007
再定義	-1.2041576	-27.677388	6.7423685e-02	1.8171272

なお、この結果は接続行列の不変性および変換則(6.34)の正しさを確認している。

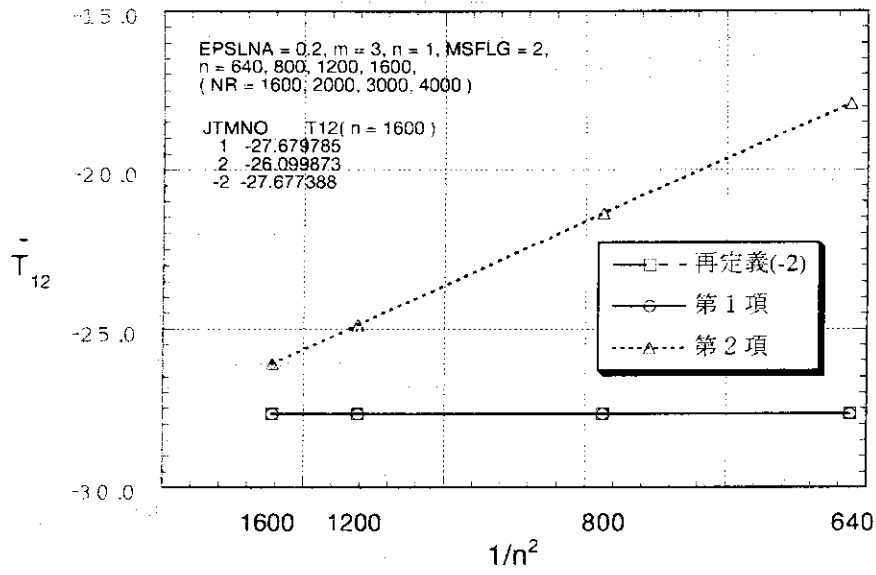


図 8.34: 接続行列 $T_{12}$ のグリッド数依存性。記号の意味は図 8.33 に同じ。

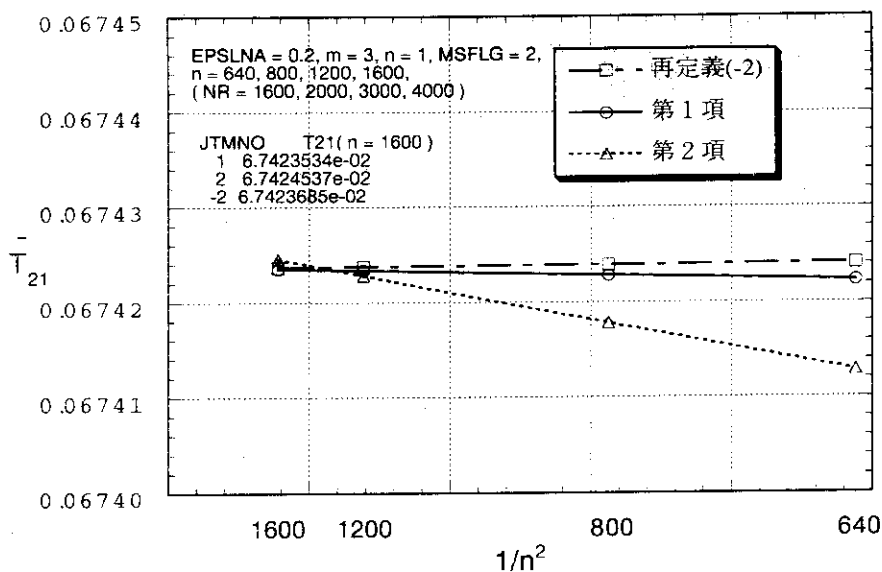


図 8.35: 接続行列 $\bar{T}_{21}$ のグリッド数依存性。記号の意味は図 8.33 に同じ。

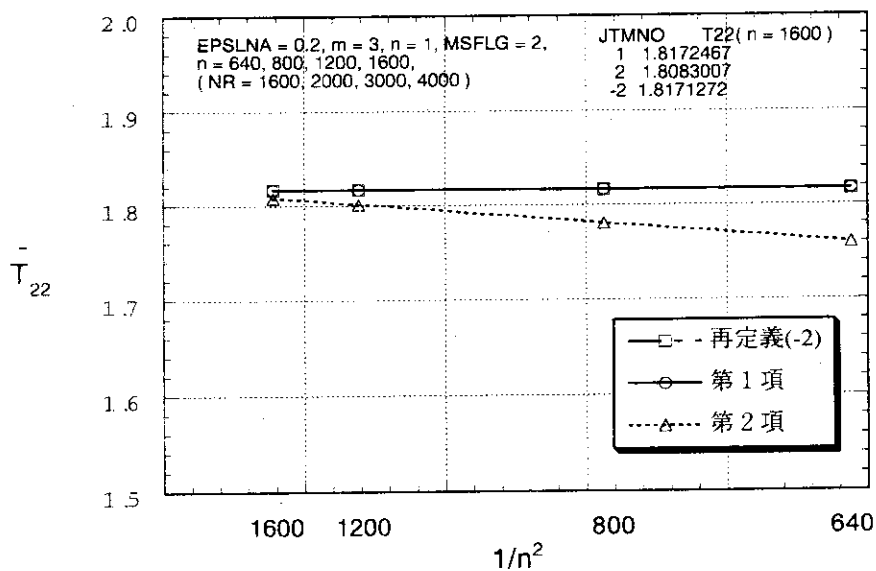


図 8.36: 接続行列 $\bar{T}_{22}$ のグリッド数依存性。記号の意味は図 8.33 に同じ。

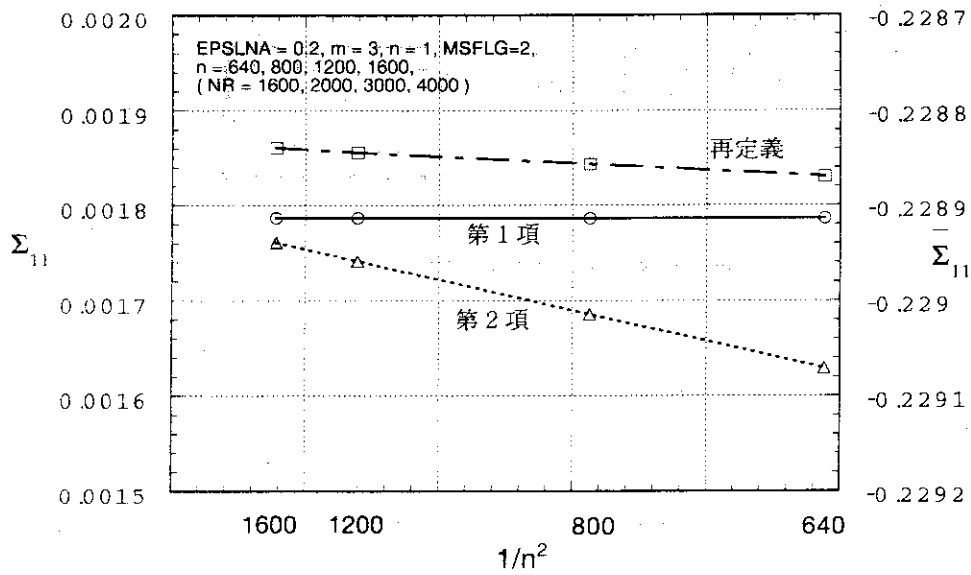


図 8.37: 境界行列 $\Sigma_{11}$ のグリッド数依存性。実線は大きい解を第1項で打ち切った場合を、点線は第2項で打ち切った場合を、一点鎖線は大きい解を再定義した場合を示す。 $\Sigma_{jk}$ は逆自乗的に共通の値へ収束する。ただし、大きい解を第2項で打ち切った場合の収束性は悪い。 $n_M = 1600$ のとき、それらは

	$\Sigma_{11}$	$\Sigma_{12}$	$\Sigma_{21}$	$\Sigma_{22}$
第1項	$0.1786427e-02$	$-0.1424974e-02$	$-0.1235227e-03$	$-0.2922579e-01$
第2項	$0.1761258e-02$	$-0.1422702e-02$	$-0.1233257e-03$	$-0.2923611e-01$

である。これは、境界行列の不変性に関する定理2を確認している。大きい解を再定義した場合も境界行列 $\bar{\Sigma}_{jk}$ は逆自乗収束する。 $n_M = 1600$ のとき

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{11} &= -0.2288391, & \bar{\Sigma}_{12} &= 0.2040061 \\ \bar{\Sigma}_{21} &= 0.1768410e-01, & \bar{\Sigma}_{22} &= -0.1755142 \end{aligned}$$

となる。この例でも2枚の有理面は強く結合している。

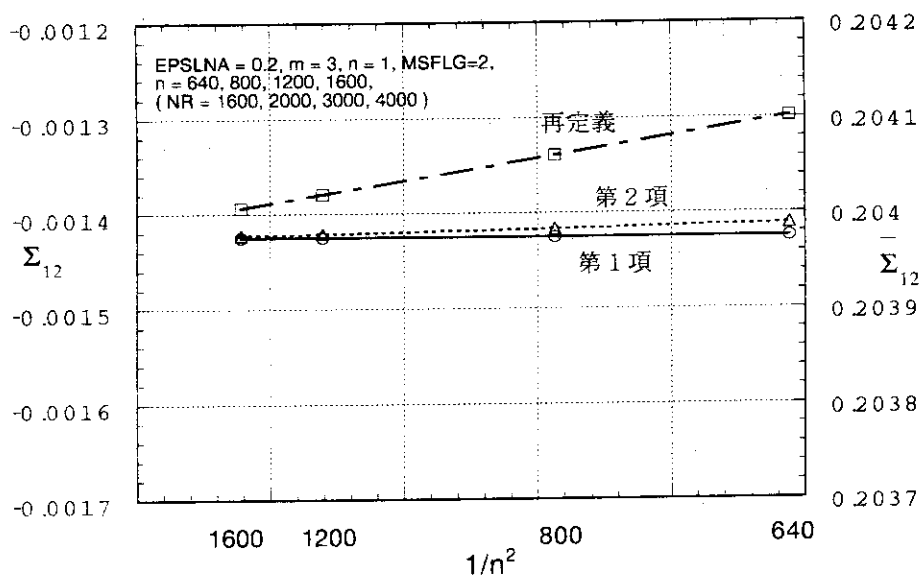


図 8.38: 境界行列 $\Sigma_{12}$ のグリッド数依存性。記号の意味は図 8.37 に同じ。

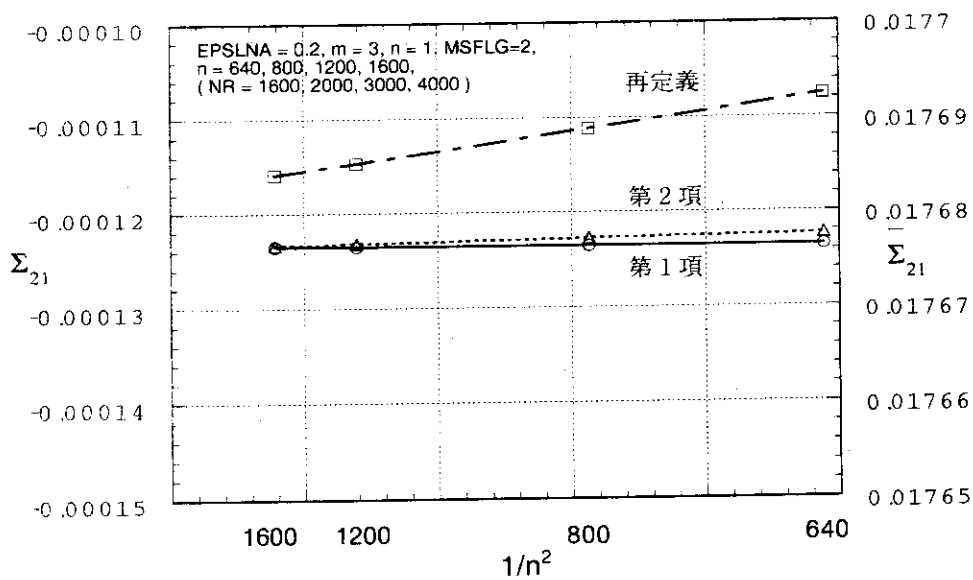


図 8.39: 境界行列 $\Sigma_{21}$ のグリッド数依存性。記号の意味は図 8.37 に同じ。



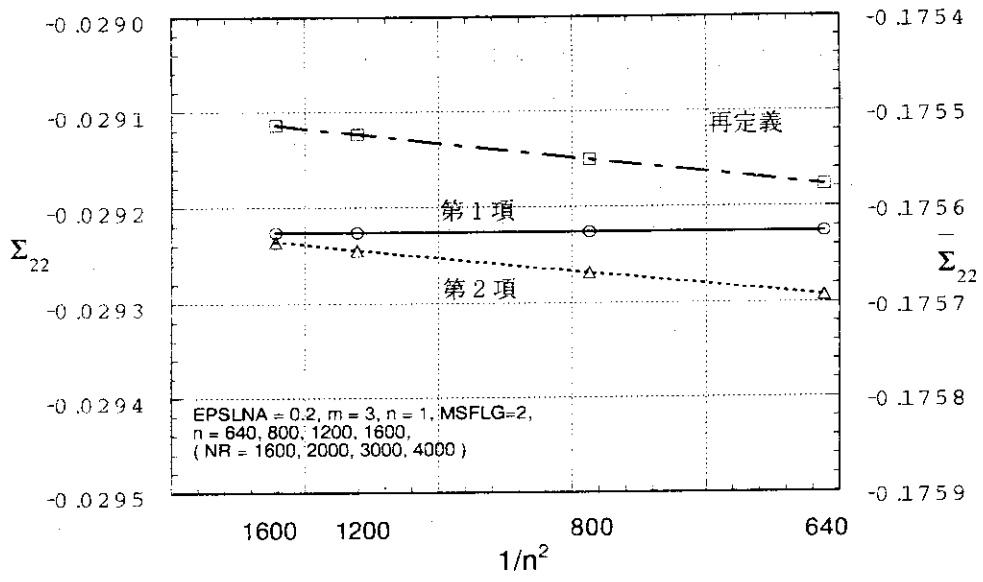


図 8.40: 境界行列 $\Sigma_{22}$ のグリッド数依存性。記号の意味は図 8.37 に同じ。

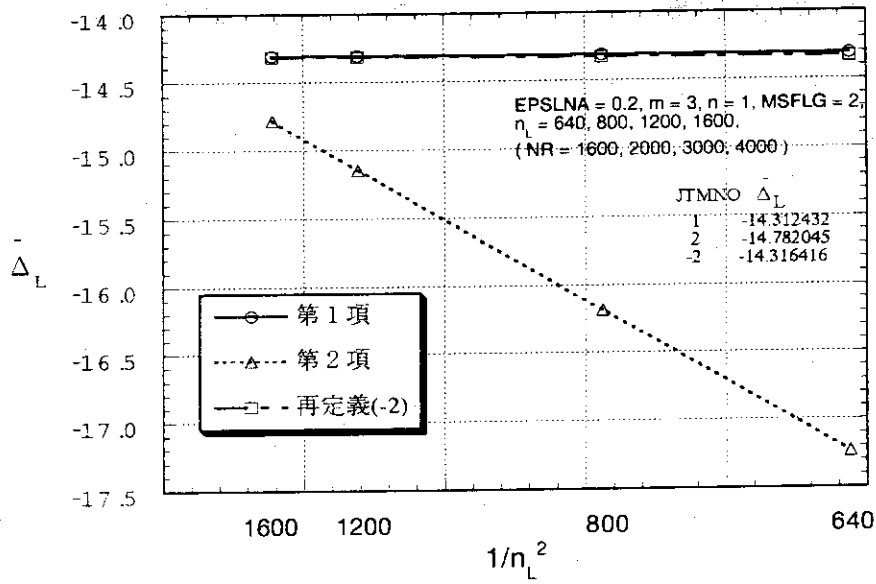


図 8.41: 左側 ( $x < x_1$ ) の接続データ  $\bar{\Delta}_L$  のグリッド数依存性。記号の意味は図 8.37 に同じ。

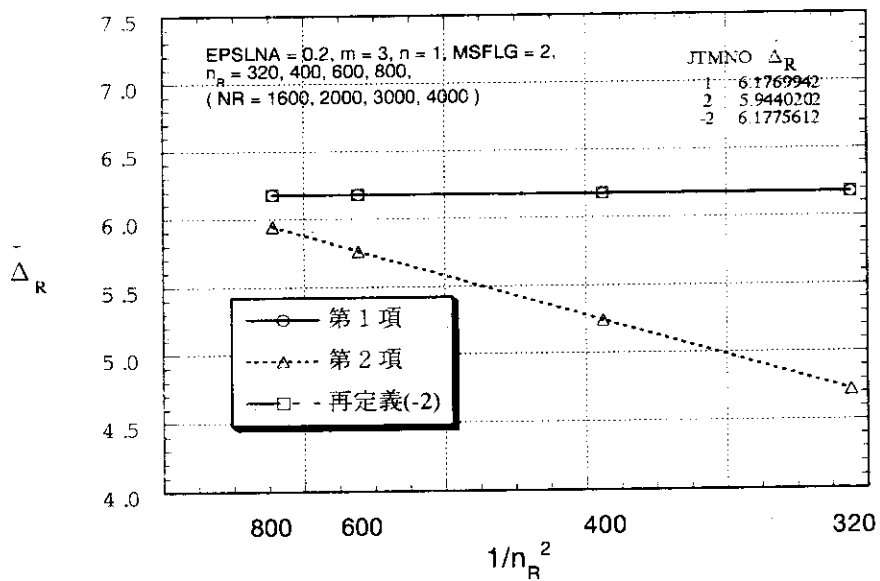


図 8.42: 右側 ( $x > x_2$ ) の接続データ  $\bar{\Delta}_R$  のグリッド数依存性。記号の意味は図 8.37 に同じ。

## 付録A 簡単な例題: $m = 1$ モードに対する接続行列

$m = n = 1$  の場合、Newcomb 方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( f(x) \frac{d\xi}{dx} \right) - \epsilon^2 g(x) \xi(x) &= 0 \\ f(x) &= \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} - 1 \right)^2 \\ g(x) &= \frac{2x^2}{1 + \epsilon^2 x^2} \left[ \frac{1}{\epsilon^2} \frac{dp}{dx} \right] \\ &\quad + F^2 \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} - 1 \right) \left[ \left( \frac{1}{q} - 1 \right) - \frac{2}{1 + \epsilon^2 x^2} \left( \frac{1}{q} + 1 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

で与えられる。この方程式は  $\epsilon^2$  について逐次的に解けるので前章の結果 (2.13) 式を確認することができる。また、この例題の結果は、後のテスト計算に用いる。

### A.1 臨界安定な場合

方程式 (A.1) で臨界安定な場合は

$$\mathcal{L}\xi = \frac{d}{dx} \left[ f(x) \frac{d\xi}{dx} \right] = 0 \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで、関数  $f(x)$  は  $x = x_1$  および  $x = x_2$  のまわりで、それぞれ

$$f(x) = f_{10}(x - x_1)^2 + f_{11}(x - x_1)^3 + \dots \quad (\text{A.3})$$

および

$$f(x) = f_{20}(x - x_2)^2 + f_{21}(x - x_2)^3 + \dots \quad (\text{A.4})$$

と展開される。ここで

$$\begin{aligned} f_{10} &= \frac{x_1^3}{1 + \epsilon^2 x_1^2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \right]_{x=x_1}^2 \\ &= \frac{x_1^3}{1 + \epsilon^2 x_1^2} \left( \frac{dq}{dx} \right)^2 \frac{1}{q(x_1)^4} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$f_{11} = \left( a(x_1)b(x_1) + \frac{db}{dx} \Big|_{x=x_1} \right) \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \right]_{x=x_1}^2 \quad (\text{A.6})$$

$$a(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{q} \right) / \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$b(x) = \frac{x^3}{1 + \epsilon^2 x^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{3x^2}{1 + \epsilon^2 x^2} - 2\epsilon^2 \frac{x^4}{(1 + \epsilon^2 x^2)^2} \quad (\text{A.9})$$

$$f_{20} = \frac{x_2^3}{1 + \epsilon^2 x_2^2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \right]_{x=x_2}^2 \quad (\text{A.10})$$

$$f_{21} = \left( a(x_2)b(x_2) + \frac{db}{dx} \Big|_{x=x_2} \right) \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) \right]_{x=x_2}^2 \quad (\text{A.11})$$

である。(A.2) 式の自乗可積な解は

$$\xi(x) \equiv 1 \quad (\text{A.12})$$

であり、もう1つの解は

$$\xi(x) = - \int_x^{x_0} \frac{dz}{f(z)} + c \quad (\text{A.13})$$

で与えられる。ここで、 $c$ は定数、 $x_0 = (x_1 + x_2)/2$ である。定数 $c$ は $x = x_1$ のまわりで $\xi(x)$ が「大きい解」だけを含む条件から決めることができる。まず、(A.13)式において、 $1/f(x)$ は $h_1(x)$ を $x = x_1$ で解析的な関数として

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{(x-x_1)^2} \left[ 1 - \frac{f_{11}}{f_{10}}(x-x_1) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \frac{1}{x-x_1} + h_1(x) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

と表せるので

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dz}{f(z)} &= - \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x-x_1} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log(x-x_1) + w_1(x) \\ &\quad + \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log(x_0-x_1) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$w_1(x) = \int_{x_0}^x h_1(z) dz \quad (\text{A.16})$$

を得る。任意定数 $c$ を

$$w_1(x_1) + \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log(x_0-x_1) + c = 0 \quad (\text{A.17})$$

となるように、すなわち

$$c = - \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x_0-x_1} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log|x_0-x_1| + \int_{x_1}^{x_0} h_1(z) dz \quad (\text{A.18})$$

と選ぶ。このとき、(A.13)式は

$$\xi(x) = - \int_x^{x_0} \frac{dz}{f(z)} + c \quad (\text{A.19})$$

$$\rightarrow - \frac{1}{f_{10}} \frac{1}{x-x_1} - \frac{f_{11}}{(f_{10})^2} \log(x-x_1), \quad x \rightarrow x_1 \quad (\text{A.20})$$

となり、大きい解だけを含む。log関数の出現は大きい解が再定義されていることに  
対応している [3]。次に大域解 (A.19) の  $x \rightarrow x_2$ での挙動を調べる。 $x \rightarrow x_2$ では、  
 $1/f(x)$ は

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{(x-x_2)^2} - \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \frac{1}{x-x_2} + h_2(x) \quad (\text{A.21})$$

と展開できる。ここで  $h_2(x)$  は  $x = x_2$ で解析的である。これを (A.19) 式に代入して

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \frac{1}{f_{20}} \int_{x_0}^x \frac{dz}{(z-x_2)^2} - \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \int_{x_0}^x \frac{dz}{z-x_2} \\ &+ \int_{x_0}^x h_2(z) dz + c \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

すなわち

$$\begin{aligned} \xi(x) &= -\frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x_0-x_2} - \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log|x-x_2| + \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log|x_2-x_0| \\ &+ \int_{x_0}^x h_2(z) dz + c \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

したがって、 $x \rightarrow x_2$ のとき

$$\xi(x) \rightarrow \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x_2-x} - \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log|x-x_2| + d \quad (\text{A.24})$$

$$d = \frac{1}{f_{20}} \frac{1}{x_0-x_2} + \frac{f_{21}}{(f_{20})^2} \log|x_2-x_0| + \int_{x_0}^{x_2} h_2(z) dz + c \quad (\text{A.25})$$

を得る。すなわち、 $x \rightarrow x_2$ では第2章で述べたように  $\xi(x)$  は大きい解と小さい解が  
混合する。以上をまとめると

$$y_1(x) \rightarrow \frac{1}{x-x_1} + \dots \quad (\text{A.26})$$

となる解は

$$y_1(x) = -f_{10}\xi(x) \quad (\text{A.27})$$

で与えられる。このとき  $x \rightarrow x_2$ で

$$y_2(x) = -\frac{f_{10}}{f_{20}} \frac{1}{x_2-x} - f_{10}d + \dots \quad (\text{A.28})$$

である。方程式 (A.2) のもう1つの1次独立な解は

$$y_2(x) \equiv 1 \quad (\text{A.29})$$

である。これから、臨界安定な Newcomb 方程式の解

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (\text{A.30})$$

は、 $x \rightarrow x_1$ で

$$y(x) \rightarrow \frac{c_1}{x - x_1} + c_2 \quad (\text{A.31})$$

$x \rightarrow x_2$ で

$$y(x) \rightarrow \frac{c_1 \Lambda}{x_2 - x} + (c_1 \Delta_{12} + c_2) \quad (\text{A.32})$$

であり、係数 $\Lambda$ 、 $\Delta_{12}$ は

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= -\frac{f_{10}}{f_{20}} \\ \Delta_{12} &= -f_{10}d \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.33})$$

で与えられる。(A.5)および(A.10)式で示されているように係数 $f_{10}$ 、 $f_{20}$ は各有理面における磁気シアの自乗に比例するので、有理面 $x_2$ における大きい解と有理面 $x_1$ における大きい解の比は $x_1$ における磁気シアの自乗と $x_2$ における磁気シアの自乗の比(の符号を替えたもの)に比例することが分かる。

## A.2 $O(\epsilon^2)$ の補正

次に、(A.2)式で $\epsilon^2 g(x)$ を残した場合を考える( $g(x)$ は(A.1)式で与えられている)。 $\epsilon^2 \neq 0$ 、 $\epsilon^2 \ll 1$ に対して方程式(2.1)の解で $x = x_1$ で自乗可積な解 $\xi(x)$ を逐次近似で解いて解(A.12)の $O(\epsilon^2)$ の補正を求める。このとき、その補正は大きい解を含むことが示される。

まず、小さい解の $O(\epsilon^2)$ の補正を求めておく。有理面 $x_1$ におけるSuydam indexは

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{4\epsilon^2 g(x_1)}{f_{10}} \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\epsilon^2 g(x_1)}{f_{10}} + \dots \right) \quad (\text{A.34})$$

であるので、 $x = x_1$ における小さい解は、 $O(\epsilon^2)$ の範囲で

$$(x - x_1)^{\epsilon^2 g(x_1)/f_{10}} = 1 + \epsilon^2 \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) + \dots \quad (\text{A.35})$$

で表される。同様にして、 $x = x_2$ における小さい解も

$$(x_2 - x)^{\epsilon^2 g(x_2)/f_{20}} = 1 + \epsilon^2 \frac{g(x_2)}{f_{20}} \log(x_2 - x) + \dots \quad (\text{A.36})$$

と表される。

さて、 $x = x_1$ で自乗可積な解を

$$\xi(x) = 1 + \epsilon^2 \eta(x) \quad (\text{A.37})$$

とおくと、(2.1)式から、 $\eta(x)$ の従う方程式は

$$\frac{d}{dx} \left( f(x) \frac{d\eta}{dx} \right) = g(x) \quad (\text{A.38})$$

である。 $\eta(x)$  は  $x = x_1$  で小さい解だから、正則条件

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad (\text{A.39})$$

を満たす。これより

$$f(x) \frac{d\eta}{dx} = w_1(x) \quad (\text{A.40})$$

$$w_1(x) = \int_{x_1}^x g(y) dy = w_{10}(x - x_1) + \dots \quad (\text{A.41})$$

$$w_{10} = \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=x_1} = g(x_1) \quad (\text{A.42})$$

および

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{w_1(x)}{f(x)} \quad (\text{A.43})$$

を得る。 $x \rightarrow x_1$  では

$$\frac{w_1(x)}{f(x)} \rightarrow \frac{w_{10}(x - x_1) + \dots}{f_{10}(x - x_1)^2 + \dots} = \frac{w_{10}}{f_{10}} \frac{1}{(x - x_1)} + h_1(x) \quad (\text{A.44})$$

である ( $h_1(x)$  は  $x = x_1$  で解析的) ので、(A.43) 式を積分して、 $\eta(x)$  として

$$\eta(x) = \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) + \left[ \int_{x_0}^x h_1(y) dy - \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x_0 - x_1) + \alpha_1 \right] \quad (\text{A.45})$$

を得る。ここで、 $x_0$  は  $x_1 < x_0 < x_2$  なる任意の点、 $\alpha_1$  は任意定数である。 $x \rightarrow x_1$  のとき、 $\xi(x)$  が  $O(\epsilon^2)$  の補正を持つ小さい解 (A.35) 式に近づく条件より、定数  $\alpha_1$  が決定され、それは

$$\alpha_1 - \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x_0 - x_1) = \int_{x_1}^{x_0} h_1(x) dx \quad (\text{A.46})$$

である。これを (A.45) 式に使うと、 $\eta(x)$  として

$$\eta(x) = \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) + \int_{x_1}^x h_1(y) dy \quad (\text{A.47})$$

を得る。次に関数  $\eta(x)$  の  $x \rightarrow x_2$  での挙動を求める。

$$h_1(x) = \frac{w_1(x)}{f(x)} - \frac{w_{10}}{f_{10}} \frac{1}{x - x_1} \quad (\text{A.48})$$

は、 $x \rightarrow x_2$  で  $(x_2 - x)^{-2}$  のように発散する。 $x_0 = (x_1 + x_2)/2$  とおくと、 $x_0 < x < x_2$  に対しては

$$\eta(x) = \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x - x_1) + \int_{x_1}^{x_0} h_1(x) dx + \int_{x_0}^x h_1(y) dy \quad (\text{A.49})$$

である。 $x = x_2$ のまわりで

$$\frac{w_1(x)}{f(x)} = \frac{w_{-2,1}}{(x-x_2)^2} + \frac{w_{-1,1}}{x-x_2} + \dots \quad (\text{A.50})$$

と展開でき、係数  $w_{-2,1}$ 、 $w_{-1,1}$  は

$$\left. \begin{aligned} w_{-2,1} &= \frac{w_1(x_2)}{f_{20}}, & w_{-1,1} &= \frac{1}{f_{20}} \left( \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=x_2} - \frac{f_{21}}{f_{20}} w_1(x_2) \right) \\ w_1(x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx, & \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=x_2} &= g(x_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.51})$$

で与えられる。したがって

$$h_1(x) = \frac{w_{-2,1}}{(x-x_2)^2} + \frac{w_{-1,1}}{x-x_2} + w_{1r}(x) \quad (\text{A.52})$$

であり、 $w_{1r}(x)$  は  $x = x_2$  で解析的である。これを積分して

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x h_1(y) dy &= w_{-2,1} \int_{x_0}^x \frac{dy}{(y-x_2)^2} + w_{-1,1} \int_{x_0}^x \frac{dy}{y-x_2} + \int_{x_0}^x w_{1r}(y) dy \\ &= -w_{-2,1} \frac{2}{x_2-x_1} + w_{-1,1} \log \left( \frac{x_2-x_1}{2} \right) + \int_{x_0}^{x_2} w_{1r}(x) dx \\ &\quad + w_{-2,1} \frac{1}{x_2-x} - w_{-1,1} \log(x_2-x) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

以上より、 $x \rightarrow x_2$  で

$$\begin{aligned} \xi(x) &= 1 + \epsilon^2 \left[ \alpha_{22} + \beta_{21} \frac{1}{x_2-x} \right] \\ &= T_{21} \zeta^{(b)}(x) + T_{22} \zeta^{(s)}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

とおいたとき、係数  $\alpha_{22}$ 、 $\beta_{21}$  の表式として

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= \frac{g(x_1)}{f_{10}} \log(x_2-x_1) + \int_{x_1}^{x_0} h_1(x) dx \\ &\quad - w_{-2,1} \frac{2}{x_2-x_1} + w_{-1,1} \log \left( \frac{x_2-x_1}{2} \right) + \int_{x_0}^{x_2} w_{1r}(y) dy \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\beta_{21} = w_{-2,1} = \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx / f_{20} \quad (\text{A.56})$$

を得る。以上をまとめると  $m = n = 1$  モードに対する接続行列は

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \Lambda = -f_{10}/f_{20}, & T_{12} &= -f_{10}d \\ T_{21} &= \epsilon^2 \beta_{21}, & T_{22} &= 1 + \epsilon^2 \alpha_{22} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.57})$$

で与えられる。係数  $T_{21}$  は区間  $(x_1, x_2)$  におけるポテンシャル・エネルギーと有理面  $x_2$  における磁気シアとの比で与えられ、これは1枚有理面の場合と事情が同じである。