

JAERI-Research
97-084



境界付き固有関数展開による
トカマク・プラズマ電流分布の可同定性検討

1997年11月

栗原研一

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越してください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1997

編集兼発行 日本原子力研究所
印 刷 いばらき印刷(株)

境界付き固有関数展開によるトカマク・プラズマ電流分布の可同定性検討

日本原子力研究所那珂研究所核融合装置試験部

栗原 研一

(1997年10月23日受理)

トカマク型核融合装置における軸対称平衡プラズマの制御特性上で最も基本的なプラズマの電流分布を、外部の電磁気計測信号だけから同定できるかどうかについては、数値解析上非適切問題となることが知られている。既存の実験データ解析では電流分布を表す関数形（電流及び圧力の2種類の磁気面関数）を予め決めておくなどの制約条件を課して非適切性を回避し、プラズマ電流分布を再構築してきた。この逆問題に対して、電磁気計測信号だけからの原理的な可同定性、精度の良否と必要な計測値、非適切性の回避の仕方、等を明確にすることを目的に、解析的解法である「境界付き固有関数展開解法」を考案した。また、可同定性の有無は、ある関数系の独立性と関係していることを示し、計算方法を提示した。さらに「境界付き固有関数展開解法」に基づく逆問題の解法時に発生する非適切性の回避のために必要な、プラズマ内部の平衡状態から導かれる制約条件及び大規模な不等式制約条件を導出した。本報告書では、これら一連の検討結果を記述する。

A Study on Current Density Distribution Reproduction by
Bounded-Eigenfunction Expansion for a Tokamak Plasma

Kenichi KURIHARA

Department of Fusion Facilities
Naka Fusion Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Naka-machi, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received October 23, 1997)

Plasma current density distribution is one of the most important controlled variables to determine plasma performance of energy confinement and stability in a tokamak. However, its reproduction by using magnetic measurements solely is recognized to yield an ill-posed problem. A method to presume the formulas giving profiles of plasma pressure and current has been adopted to regularize the ill-posedness, and hence it has been reported the current density distribution can be reproduced as a solution of Grad-Shafranov equation within a certain accuracy. In order to investigate its strict reproducibility from magnetic measurements in this inverse problem, a new method of "bounded-eigenfunction expansion" is introduced, and it was found that the reproducibility directly corresponds to the independence of a series of the special function. The results from various investigations in an aspect of applied mathematics concerning this inverse problem are presented in detail.

Keywords: Tokamak, Plasma Equilibrium, Plasma Current Density Distribution,
Axisymmetric Structure, Reproducibility, Identification of Current Density,
Ill-posedness, Plasma Control, Fredholm Integral Equation of the First Kind,
"Bounded-Eigenfunction Expansion" Method, Inverse Problem

目 次

1. はじめに	1
2. トカマクプラズマ電流分布同定問題	2
2.1 問題設定と基礎方程式	2
2.2 境界付き固有関数展開法	3
2.3 固有関数の数値計算法	6
2.4 TCR固有関数の性質	8
2.5 プラズマ電流分布の再現具合	10
3. 可同定性の検討	12
3.1 解析的可同定性の検討	12
3.2 数値的可同定性の検討 — 「境界独立性」	13
3.3 少数制約条件下での同定結果	13
4. 境界条件・物理的制約条件の考え方	16
4.1 電磁気計測信号に基づく境界条件等	16
4.2 物理的制約条件 — プラズマ内部の関係式	17
5. 結論と今後の課題	19
謝 辞	20
参考文献	20
付録 固有値分布とTCR固有関数	21

Contents

1. Introduction	1
2. A New Method of Current Density Distribution Reproduction	2
2.1 A Problem of Concern and its Basic Equation of an Integral Form	2
2.2 Current Distribution Reproduction with Bounded-Eigenfunction Expansion	3
2.3 Arithmetic Procedures to Compose the Bounded-Eigenfunctions	6
2.4 Some Peculiarities of the TCR Eigenfunctions	8
2.5 Examples of the Reproducibility by the TCR Eigenfunctions	10
3. Reproducibility Study	12
3.1 Analytical Approach	12
3.2 Numerical Approach — “Boundary Independency”	13
3.3 Results under a Few Constraints on a Solution	13
4. Survey of the Constraints	16
4.1 Boundary Conditions Given by the Measurements	16
4.2 Constraints on the Basis of Plasma Equilibrium — The Relations of Internal Variables	17
5. Concluding Remarks and the Remaining Problems	19
Acknowledgments	20
References	20
Appendix An Example of an Eigen Value Distribution and a TCR Eigenfunction	21

1. はじめに

トカマク型核融合装置は、トロイダル磁場とプラズマ電流が作る磁場とで閉じ込め磁場を構成することに最大の特徴がある。そのプラズマ電流は、まず通常プラズマ外部の磁束変化により誘起された電場が、中性気体中に電子雪崩現象を起こさせることにより立ち上げられる。ごく短時間の自己組織化の結果として、初期の非等方導電率分布とそれに従うプラズマ電流分布が形成される。さらに電場の変化や中性粒子加熱、高周波加熱等の外部からのエネルギー注入により、直接或は導電率変化の結果としてプラズマ電流分布が変化する。これまでのJT-60を始めとする実験から、このプラズマ電流分布が、位置形状と共にプラズマの安定性及びエネルギー閉じ込め性能に極めて強く関係していることが知られている。

一方トカマク・プラズマを制御という観点で見た時、軸対称性と力の平衡状態が成立しているプラズマを対象に、位置形状制御及びプラズマ電流制御が、ポロイダル磁場コイルを用いて実験上許容出来る精度で実施出来るようになってきている。しかし、ここでの被制御パラメータは、位置形状の場合で幾何学的な中心位置等のマクロ的な代表値であり、プラズマ電流の場合もトロイダル方向（トラス周回方向）に流れる電流の合計値1点であり、どちらも分布量を制御している訳ではない。これらのプラズマ性能に与える影響の重要性を考えれば、きめ細かい位置形状と電流分布の制御を今後実行することが要求される。

この制御を行う前提として、それら分布パラメータの高精度での検出が必要となることは言うまでもない。位置形状、即ちプラズマ最外殻磁気面の断面形状・位置は、外部に置かれた電磁気計測検出器だけで原理的に厳密に同定可能であることが示されている[1]。従って、適切な種類と数の計測器を設置することで高精度検出は可能である。一方、プラズマ電流分布、或はプラズマ近傍の導体に流れる電流の分布を外部に設置した電磁気計測検出器によって検出可能かどうか、については必ずしも明確では無い。これら内部の状態を外部の情報から同定または推定する問題は逆問題と呼ばれ、色々な分野で研究が進められている段階である。プラズマ(や導体)の電流分布を、外部の電磁気計測だけから同定できるかどうかについては、一般的には数値解析上非適切(ill-posed)問題となることが知られている。

これまでの実験データ解析では、非適切性を回避するために、プラズマ電流分布を推定している関数形(電流及び圧力の2種類の磁気面関数)を予め決めておく*などの制約条件を課して、ある程度限られた範囲のプラズマ電流分布を持つGrad-Shafranov方程式の解(即ち平衡解)を推定している。しかし、関数形を仮定することによって分布の自由度が制限され、正確に同定出来ない場合も存在する。最近では、Motional Stark効果(MSE)を利用してプラズマ断面中のポロイダル磁場分布即ちプラズマ電流分布を直接計測する方法(MSE法)も行われ始めた。未だ制御に使用できるほど信頼性は高くないが、計算法の改善等で将来制御用に使用出来るようになるかもしれない。プラズマから発する光を計測するこのMSE法には、そこで用いるセンサーが中性子の存在する場での特性変化を十分小さく出来るか、という課題が存在する。核融合炉に於いても適用可能なセンサーとして現時点で考えられる電磁気計測検出器に比較すると、MSE法のセンサ

* 例えばプラズマ電流を $j = (\beta_p \cdot \frac{I}{R} + (1 - \beta_p) \cdot \frac{R}{I}) \cdot g(x)$, $x = (\psi - \psi_p) / (\psi_{max} - \psi_p)$ と置き、 $g(x)$ の関数形も規定して自由度を低くし、その関数 $g(x)$ を求める方法、等。 ψ_p は、プラズマ表面での磁束関数。

一の耐放射線性については検討を要するであろう。

このような背景から、電流分布を外部の電磁気計測（磁場センサー）だけから同定することが可能なのか、可能であるとしたらどのような方法が考えられるのか、といった点について検討した。2章では、プラズマ電流分布同定問題の定式化とその解析的な解法に基づく境界付き固有関数展開法を提案する。3章では、それを用いて可同定性の検討を行う。4章では、プラズマ内部状態に関して境界条件及び物理的な制約条件について述べ、最後にまとめを行う。

2. トカマクプラズマ電流分布同定問題

本章では、まず問題設定と基礎方程式を明確にした後、本報告の中心課題である境界付き固有関数展開法の提案を行う。

2.1 問題設定と基礎方程式

電流分布と磁場との関係を規定する定常場のMaxwell方程式

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

が基礎となる方程式である。ベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} を導入して、 $\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$ と変形し、さらにトカマクの軸対称性を考慮すると、磁場のスカラー・ポテンシャル関数「磁束関数」 ϕ とトロイダル方向の電流密度 j との関係を表わす次式が得られる[1]。

$$\text{div}[(\text{grad } \phi)/r^2] = -\mu_0 j/r \quad (2)$$

ϕ : 磁束関数 ($\equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}\omega$, $\mathbf{A}\omega$: \mathbf{A} のトロイダル方向成分)、 r : 対称軸からの距離。

この式を次式の軸対称トロイダル電流場のGreen関数 $G(x, y)$, $\mathbf{x} \equiv (r_x, z_x)$, $\mathbf{y} \equiv (r_y, z_y)$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv G(r_x, z_x, r_y, z_y) \equiv \frac{4}{k} \sqrt{r_x r_y} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right\} \quad (3)$$

$K(k)$, $E(k)$: 第1種及び第2種完全楕円積分, $k^2 \equiv 4r_x r_y / \{(r_x + r_y)^2 + (z_x - z_y)^2\}$

を導入して、恒等式を用いて変形すると次式が得られる[1]。

$$\sigma \cdot \phi(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega_p} [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{grad } \phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}) \cdot \text{grad } G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \cdot \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{y})}{r_y^2} = \int_{\Omega_p} \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \frac{dV(\mathbf{y})}{r_y} \quad (4)$$

$\sigma \equiv \{ 8\pi^2(\mathbf{x} \subset \Omega_p), 4\pi^2(\mathbf{x} \subset \partial\Omega_p), 0(\mathbf{x} \subset (\Omega_p + \partial\Omega_p) \text{以外}) \}$, Ω_p : 電流源領域, $\partial\Omega_p$: 境界。

ここで、 Ω_p をプラズマ、境界 $\partial\Omega_p$ をプラズマ最外殻磁気面、とすれば、電流密度分布と磁束関数との関係が、積分方程式形式で表現出来た。この式から、今考えている問題に存在する幾つかの興味深い性質を読み取ることが出来る。

まず、第2項は、境界上での面積分（プラズマ軸対称系では線積分に変換）になるが、 \mathbf{x} は観測点として如何なる場所でも取り得る。また、この項は境界値が与えられた後はプラズマ内部、外部の全領域で確定している関数である。

さてこの \mathbf{x} を置く領域毎に考える。プラズマ中に観測点が置けた場合には、左辺第2項は確定であるが、第1項の磁束関数の値をプラズマ中で与える必要がある。磁束関数は、トロイダル磁場のポテンシャル関数と見做せる。出発点のMaxwell方程式(1)では、磁場 \mathbf{B} はrot演算子が作用した形式であったが、それに軸対称性仮定とそこでのGreen関数を用いることにより、式(4)が得ら

一の耐放射線性については検討を要するであろう。

このような背景から、電流分布を外部の電磁気計測（磁場センサー）だけから同定することが可能なのか、可能であるとしたらどのような方法が考えられるのか、といった点について検討した。2章では、プラズマ電流分布同定問題の定式化とその解析的な解法に基づく境界付き固有関数展開法を提案する。3章では、それを用いて可同定性の検討を行う。4章では、プラズマ内部状態に関して境界条件及び物理的な制約条件について述べ、最後にまとめを行う。

2. トカマクプラズマ電流分布同定問題

本章では、まず問題設定と基礎方程式を明確にした後、本報告の中心課題である境界付き固有関数展開法の提案を行う。

2.1 問題設定と基礎方程式

電流分布と磁場との関係を規定する定常場のMaxwell方程式

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

が基礎となる方程式である。ベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} を導入して、 $\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$ と変形し、さらにトカマクの軸対称性を考慮すると、磁場のスカラー・ポテンシャル関数「磁束関数」 ϕ とトロイダル方向の電流密度 j との関係を表わす次式が得られる[1]。

$$\text{div}[(\text{grad } \phi)/r^2] = -\mu_0 j/r \quad (2)$$

ϕ : 磁束関数 ($\equiv r \cdot A_\omega$, A_ω : \mathbf{A} のトロイダル方向成分)、 r : 対称軸からの距離。

この式を次式の軸対称トロイダル電流場のGreen関数 $G(x, y)$, $\mathbf{x} \equiv (r_x, z_x)$, $\mathbf{y} \equiv (r_y, z_y)$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv G(r_x, z_x, r_y, z_y) \equiv \frac{4}{k} \sqrt{r_x r_y} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right\} \quad (3)$$

$K(k)$, $E(k)$: 第1種及び第2種完全楕円積分, $k^2 \equiv 4 r_x r_y / \{ (r_x + r_y)^2 + (z_x - z_y)^2 \}$

を導入して、恒等式を用いて変形すると次式が得られる[1]。

$$\sigma \cdot \phi(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega_p} [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{grad } \phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}) \cdot \text{grad } G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \cdot \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{y})}{r_y^2} = \int_{\Omega_p} \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \frac{dV(\mathbf{y})}{r_y} \quad (4)$$

$\sigma \equiv \{ 8\pi^2 (\mathbf{x} \subset \Omega_p), 4\pi^2 (\mathbf{x} \subset \partial\Omega_p), 0 (\mathbf{x} \subset (\Omega_p + \partial\Omega_p) \text{ 以外}) \}$, Ω_p : 電流源領域, $\partial\Omega_p$: 境界。

ここで、 Ω_p をプラズマ、境界 $\partial\Omega_p$ をプラズマ最外殻磁気面、とすれば、電流密度分布と磁束関数との関係が、積分方程式形式で表現出来た。この式から、今考えている問題に存在する幾つかの興味深い性質を読み取ることが出来る。

まず、第2項は、境界上での面積分（プラズマ軸対称系では線積分に変換）になるが、 \mathbf{x} は観測点として如何なる場所でも取り得る。また、この項は境界値が与えられた後はプラズマ内部、外部の全領域で確定している関数である。

さてこの \mathbf{x} を置く領域毎に考える。プラズマ中に観測点が置けた場合には、左辺第2項は確定であるが、第1項の磁束関数の値をプラズマ中で与える必要がある。磁束関数は、ポロイダル磁場のポテンシャル関数と見做せる。出発点のMaxwell方程式(1)では、磁場 \mathbf{B} はrot演算子が作用した形式であったが、それに軸対称性仮定とそこでのGreen関数を用いることにより、式(4)が得ら

れ実質的な逆演算 rot^{-1} がなされたことと等価となっている。

一方、プラズマ外部に観測点 \mathbf{x} を置いた場合には、左辺第1項は消え確定関数である左辺第2項だけが残る。これにより、解くべき問題の基礎方程式が得られる。式(3)の右辺の体積積分を、被積分関数である電流密度の軸対称性の仮定の下に、 $dV(\mathbf{y}) = 2\pi r_y \cdot dS(\mathbf{y})$ の関係式が成立し、面積分には書き換えられる。

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_p} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{y}) \quad (5)$$

$$2\pi\mu_0 f(\mathbf{x}) = \sigma \cdot \phi(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega_p} [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{grad}\phi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y}) \cdot \text{grad}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \cdot \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{y})}{r_y^2}$$

なお、変数 \mathbf{x} の領域は $\mathbf{x} \in \overline{\Omega_p}$ であるので $\sigma=0$ となり、上記関数 f の定義式右辺第1項は0である。

結局解くべき問題を言い換えると、「積分方程式(5)に於いて、左辺の領域 $\mathbf{x} \in \overline{\Omega_p}$ で定義された関数を与えて、右辺の被積分関数に含まれる関数 \mathbf{j} を求めること」である。この積分方程式は、分類から第1種Fredholm型積分方程式に属している。しかし、積分方程式に関する多くの古典的解析例と異なる点は、

- ・ 式(5)の右辺の定積分領域と左辺の関数の変数領域が一致しないだけでなく、全く共通領域を持たない点、及び
 - ・ 式(3)で定義されるGreen関数の性質から、対称特異積分核を持つ積分方程式である点、
- の2点である。

この積分方程式を解くための具体方法として、1章で述べたように力の平衡状態の式、

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \text{grad } p \quad (6)$$

とMaxwell方程式(式(1))とから変形された、Grad-Shafranov(G-S)方程式を用いる方法が採られてきた。G-S方程式は式(2)の右辺として、次の2つの未知の磁気面関数 I, p を含む式を用いる[2]。

$$-\frac{\mu_0 \mathbf{j}}{r} = -\frac{\mu_0^2}{2r^2} \frac{dI^2}{d\phi} - \mu_0 \frac{dp}{d\phi} \quad (7)$$

ここで I は、プラズマ電流がドーナツ中を周回しながら且つ中心軸の回りを螺旋状に流れることにより発生するトロイダル磁場に関係した磁気面関数で、プラズマ中の螺旋電流にとって見ればポテンシャル関数のような意味を持つ。また、 p は圧力分布を表わす磁気面関数である。

この2関数として適当な関数形を仮定して、その関数形の未知パラメータを求める方法が行われている。しかし、電流分布に関する事前情報が全く無い場合に、1つの関数形を与えてピーク(peaked)分布からホロー(凹型, hollow)分布まで正しく同定することは出来ていない[3]。

また、ここで可同定性を含めて考察しようとする時、出来るだけ解析的に問題解法に取り組むことが厳密性を保持するために必要となる。そこで、式(5)の第1種Fredholm型積分方程式の解析的解法[4]に基づく解法を次に提案する。

2.2 境界付き固有関数展開法

問題の第1種Fredholm型積分方程式は、前述の2点で特異な方程式である。この特異性は回避することが可能であるのかどうか、またその時、これまでの数理解析の議論がそのまま利用することが出来るのかどうか、について検討を試みる。

まず第2点の対称特異積分核(不連続核)については、これまでの解析で、特異性の度合によっては通常の連続核と同様にFredholm交代定理が適用出来る場合のあることが知られている。

この条件とは、特異点である分母の零点近傍でのGreen関数の性質に依存し、一般に下に示す式(8)の右辺の関数形で表わせることが必要である[4]。なお、 $H(x, y)$ は連続対称核である。

$$G(x, y) \equiv \frac{H(x, y)}{|x-y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2} \quad (8)$$

一方、今問題にしているGreen関数(式(3))は、2点間の距離が十分近い場合には以下のようになる。

$$|G(x, y)| \rightarrow \left| 2r_x \cdot \left(\log \frac{8r_x}{|x-y|} - 2 \right) \right| < \frac{|H(x, y)|}{|x-y|^v}, \quad v > 0 \quad (9)$$

この右辺の不等式が成立するので、 v の値として $v < 1/2$ なる範囲を取る。これによりこのGreen関数の特異性は、式(8)に示された特異性の条件に適合する。従って、通常の連続核のFredholm交代定理に付随するこれまでの様々な解析や議論がそのまま適用出来ることが判明した。

次に第1点の特異な問題、即ち積分方程式の積分領域と条件関数の変数領域が一致しない場合については、外部観測による内部推定を行うという問題設定そのものであり、むしろ前提として考えるべきであろう。次章で再度触れることとする。

それでは、もし第1点の特異性が無かった場合には議論はどのように展開出来るであろうか。これまでの古典解析で、第1種Fredholm型積分方程式の解は、限られた場合を除いて存在しないことが知られている。しかし、対称特異積分核の場合には、この限られた場合に属していると思われるが、数学的な議論を待つまでもなく、物理的に実在している系を対象にしていることを考えると解は存在することは自明である。

ここで置いた、積分領域と観測関数の変数領域とが等しいという仮定を物理的な表現に変え、
「空間的に電流密度が分布している系で、電流の流れる空間のあらゆる点で磁場が計測出来る」ことに対応している。

さて方程式(5)が一般に解ける場合には、形式的には以下の手順となることが知られている[4]。まず式(5)に関する斉次方程式

$$\Psi(x) = \lambda \cdot \int_{\Omega_p} G(x, y) \cdot \Psi(y) dS_y \quad (10)$$

の解を求める。ただし、 $x \in \Omega_p$ 。これは積分核の性質により、有限個から無限個までの固有値 λ_i を持ち、それぞれの固有値 λ_i に対応して固有関数列 Ψ_i が定義される。この関数 Ψ_i を用いて式(5)の左辺の関数 $f(x)$ が以下の形式で表現出来るのであるなら、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \cdot \Psi_i(x) \quad (11)$$

式(5)の解は次式で表現出来る。

$$j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i \cdot \Psi_i(x) \quad (12)$$

実際には電流中の磁場が与えられないので、以上の定式化はここで考えている問題が想定している現実とは異なるが、形式的ながらも重要なことを示している。即ち、電流分布を構成するための基本関数が、斉次方程式(10)の固有値問題の解として導くことが出来る点である。このことはGreen関数と領域が与えられること、言い換えれば場の作用の仕方と幾何学的な配置が決まれば、場を作り出している源を表現する基本関数系列が確定することを意味している。実際今考えている逆問題は時間的には静的であるので、空間的幾何学構造は既に確定していることになる。ここでもし基本関数列が計算出来れば、他の境界条件から式(11)及び(12)の計数 β_i の値が求まるかどうかは次の問題となる。

ところで、この基本関数（固有関数）についてここで少し考えてみる。良く知られている古典的なLaplace演算子が入った偏微分方程式の解析的解法として、直交座標系と等角写像関係にある座標系（円柱、球、円環、他無限個存在）に変換した後、各座標変数に変数分離して常微分方程式に置き換えて解く方法が、古くから知られている。初めて導いた人の名を冠した、Bessel関数、Legendre関数、等の特殊関数が知られている。

これらを用いた解法の特徴は、座標系の持つ幾何学的形状（座標変数を固定したときの特徴的な図形のこと。例えばDescartes座標系では正方形、極座標系では円。）と解析対象の形状とを一致或いは似か寄らせて、固有関数の比較的低位項の範囲で形状を表現出来るようにする点にある。従って、境界条件の考慮を座標軸の形を変えて対応しようとした訳である。

この時得られた特殊関数の適用範囲は極めて広く、高速の電子計算機が普通に使用出来るようになるまで偏微分方程式解析の中心であった。電子計算機が無ければ、解析解を特殊関数の数表を用いて計算することが唯一の数値計算であったからである。これまでは静的な場（Laplace方程式、Poisson方程式）や動的な場（拡散方程式、波動方程式）の境界値問題の解析解に多く使用されてきている。その後目覚ましい電子計算機の進歩により、解析的手法に換わって、方程式をそのまま差分方程式化して、空間的には離散化（要素化）して直接解析する方法が主流となってきている。しかし、数理解析で問題の本質を理解しようとする時、或いは計算精度及び計算速度の改善のため、また差分化離散化解析の有効性の評価のためにも、解析解やそこに至るまでの考え方は、論理の外挿性の利点も付加され、その重要性は変わっていない。

さて、これら固有関数の展開形式で解を構成する場合には、線形結合係数を決定しなければならない。これまで通常順問題（方程式中の場の源を表現する部分に値を与え、その作用の結果を計算する問題）では、境界条件、初期条件、外部から作用する変数の時間変化の仕方から係数を規定する。既に幾何学的構造は固有関数により確定しているので、時間変化の構造を係数に持たせる、いわゆる定数変化法と呼ばれる方法がそれである。順問題解法時は、基となった方程式から導かれる係数に関する常微分方程式を解いて、係数の解析解を求める。

さて一方の逆問題の場合には、各種計測条件からこの係数を求めることが要求される。多くの場合には、非適切性回避のために先見的に与えられる各種制約条件を考慮することも必要になるので、問題毎に検討することになる。

このような古典的数理解析上の背景を再認識した上で、今プラズマ等の電流分布同定を考えた時、前述のBessel、Legendre関数といった特殊関数に類するものが導出出来れば、トカマク装置体系の数理解析上有用であろうことは容易に想像出来る。そのような関数を「トロイダル電流表現関数（Toroidal Current Representation (TCR)関数）」と名付けることにすると、このTCR関数は、式(10)の固有関数列として計算出来、それが必要な性質を具備していることが次節で示される。

特にこの固有関数列は、従来の特殊関数と異なり、座標変数で境界が規定されるのではなく、指定した任意の境界で規定された関数である。このような境界付き固有関数とも言える特殊関数を逆問題に適用することをここで新たに提案することにする。

さて逆問題で一般に解が存在し計算出来るのかどうか、単純な場合を考えることにする。円柱体系でもし中心軸に沿って軸対称に電流が流れている場合、外部の磁場を測っても内部の電流分布は判らず逆問題の一意解は存在しない。この逆問題では、Green関数がlog（対数）形式の場合には、中心軸方向に流れる軸対称電流の径方向分布は、分布の違いによる外部の磁場への

影響はlog関数の性質のために全く現われず、総電流のみが意味を持つ。勿論このような体系の場合でも一方の順問題としては、一意解は存在している。

従って、一般に逆問題の解が一意に求まる保証は無く、ここで問題にしているシステムの可同定性については別途議論することになる。そこで次にそのTCR関数を求める方法を示す。

2.3 固有関数の数値計算法

ここではTCR関数を具体的に求めることを検討する。TCR関数は、次の積分方程式（(10)式の再記）の固有関数として計算する。変数領域は $x \subset \Omega_p$ とし、この Ω_p はプラズマ領域を考える。

$$\Psi(x) = \lambda \int_{\Omega_p} G(x, y) \cdot \Psi(y) dS_y \quad (13)$$

Green関数は解析的に与えられているが、領域は様々なプラズマ形状であることを考えると、この解き方として数値的な解法を考える。要素の大きさを十分小さく取れば、解析解と同一になるであろうことは容易に想像出来る。

単純化としてトカマク体系を軸対称とし、領域 Ω_p を要素分割して各要素間の関係式に変換する。i番目の要素中での関数 $\Psi(x)$ の代表値 $\Psi(x_i)$ とする。この結果、(13)式は近似的に次式となる。

$$\Psi(x_i) = \lambda \sum_{j=1}^{N_m} \left[\Psi(x_j) \cdot \int_{\Omega_j} G(x_i, x_j) \cdot dS_j \right] \quad (14)$$

ここで、 N_m ：領域 Ω_p 中の要素分割数、 Ω_j ：それぞれの要素分割領域 ($j=1, 2, \dots, N_m$)。また、要素分割 Ω_j 内の計算代表点の座標を円柱座標系で $x_j = (r_j, z_j)$ と表す。

この式を異なる要素の代表点 x_i の N_m 個分作り、行列方程式を構成すると次のようになる。

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{M}) \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{I} \equiv$ a unit matrix $\in R^{N_m \times N_m}$, $\mathbf{M} \equiv [M_{ij}] \in R^{N_m \times N_m}$, $M_{ij} \equiv \int_{\Omega_j} G(x_i, x_j) \cdot dS_j$, $\mathbf{f} \equiv [\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_{N_m})]^T \in R^{N_m \times 1}$ である。

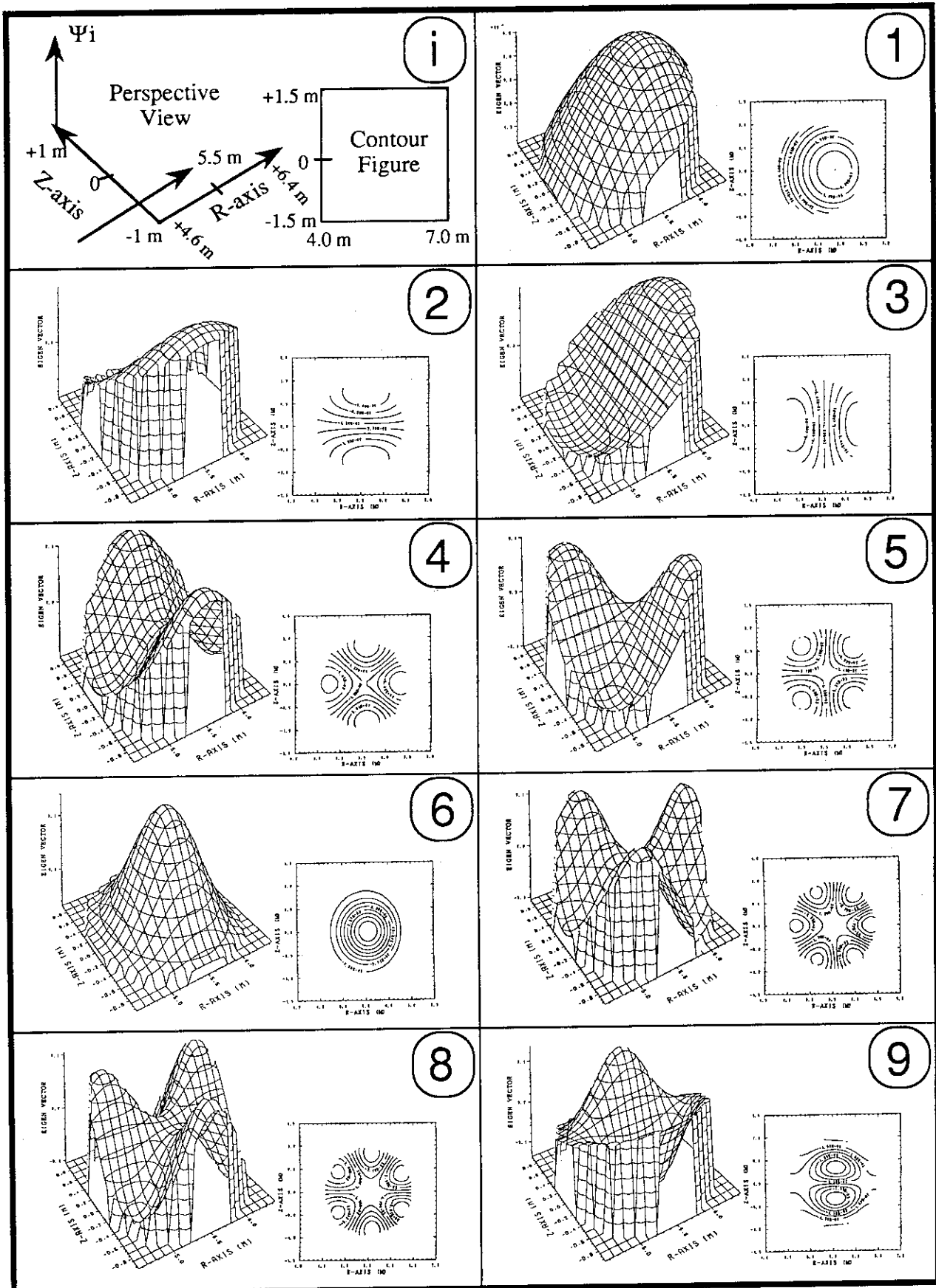
この(15)式は、行列 \mathbf{M} の固有値問題そのものである。汎用の固有値と固有ベクトルを求めるプログラムを用いて、領域内の全代表点の固有関数値(TCR関数、 Ψ_i)が求まる。

単純化のために、要素は1辺10cmの正方形として、要素プラズマの断面形状が円形の場合のTCR関数を第2.1図に示す。ここでは固有値の大きい順に、対応する固有関数を1次から9次まで表示している。この図を見ると、一般的な多重極展開と類似しており[5]、第1次の関数に単一極モード、第2,3次に双極子のsin及びcosモード、第4,5次に4重極子のcos及びsinモード、第6次には、再び単一極モードが現われる。第7,8次には6重極子のcos及びsinモード、第9次には、少し内側の双極子のsinモードという具合である。

特徴的なことは、領域境界表面で電流分布の等高線が閉じている固有関数が少ない点である。第6次の固有関数などは珍しい例である。このように、様々な電流分布パターンがこれにより表現出来ることが、この図から想像出来る。

要素分割してこのようにTCR関数が得られたが、興味深い点はその個数とパターンとの関係である。計算された固有関数の数は、離散化の関係で固有ベクトルの要素数、即ち要素分割数で決まる。即ち細かくすればするほど多くの固有値と固有関数が得られる。多くの要素分割の固有関数は、少ない要素分割の場合の固有関数に対して、どのパターンの部分が増加しているのか調べてみると、少ない要素分割の場合の最も小さい固有値の最後に追加される形で増加して

いることが判った。従って、主要な固有関数は少ない分割数でも得られる。

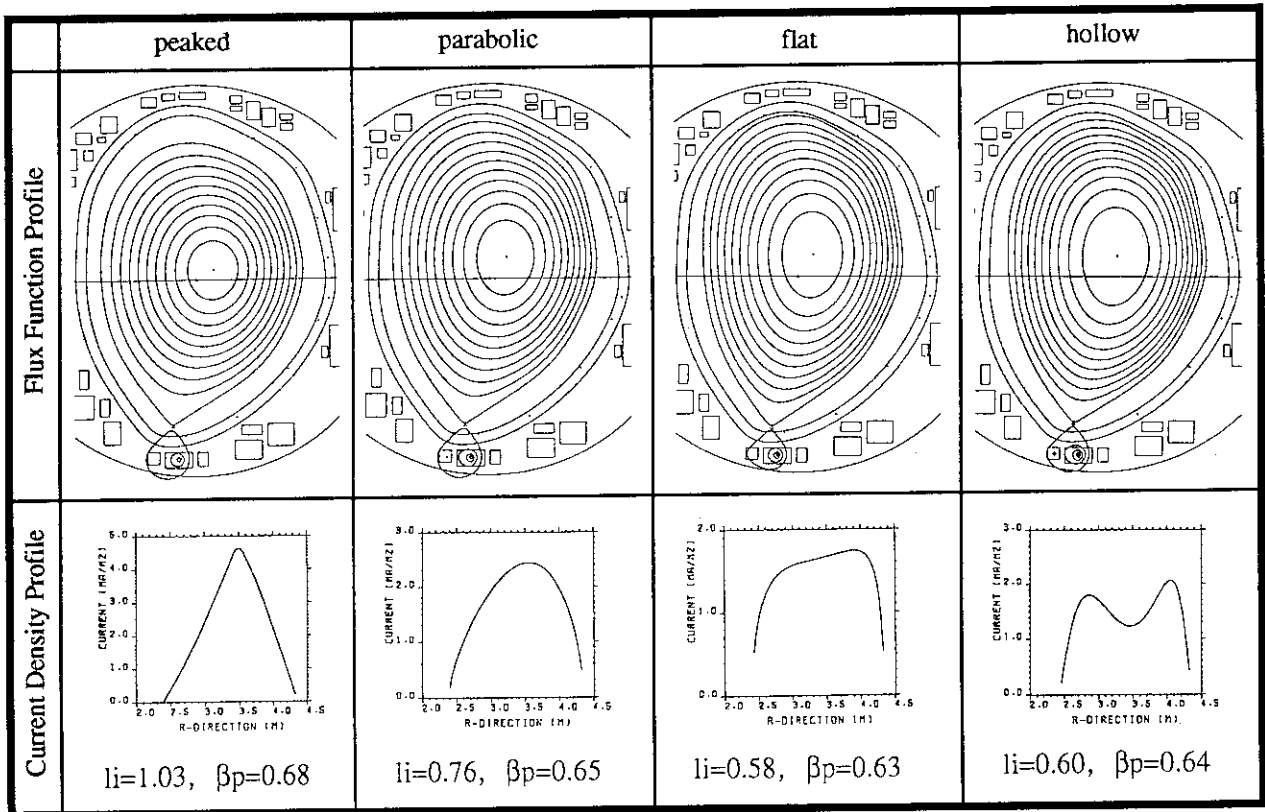


第2.1図 トロイダル軸対称電流表現関数の例 (断面形状が円の場合 (1次→9次))

2.4 TCR固有関数の性質

前節で積分方程式の固有関数としてTCR関数が数値的に得られた。ここでは、その性質について調べることにする。基本方針としては、出来るだけ解析的に行うが、困難な場合には数値的に行うこととした。また、得られた固有関数が正しくプラズマ電流を表現し得るかどうかについて、電流分布を与えた場合に、その電流分布を固有関数展開の結果として表現出来るのか確認することとする。

数値的に確認計算を行う場合や後で同定計算を行う場合等には、具体的な解析対象が必要になる。そこで、試験対象として平衡プラズマ解析コードを用いて臨界プラズマ試験装置JT-60の体系の平衡プラズマを作成した。第2.2図に試験対象とした4種類の特徴的な電流分布パターン持つ平衡配位を示す。尖塔型 (peaked)、放物型 (parabolic)、平坦型 (flat)、凹型 (hollow)の4種類の電流分布を選んだ。



第2.2図 試験用のJT-60平衡計算データ

この各試験対象のプラズマ領域それぞれに異なるTCR関数 (TCR固有関数) 系列が存在する。この中の代表として、parabolic分布の場合の固有値分布、及びTCR固有関数の等高線図を付録に示す。ここではこのTCR固有関数の性質に関しては、①直交性、②ノルム、③面積分値、の3点について調べることにする。

①直交性

異なるTCR固有関数同士の積の積分が、0であれば直交していると言える。今ここで2種類の互いに異なる固有値λ, μに対応する固有関数φ, ψを考える。当然定義から以下が成立する。

$$\phi(x) = \lambda \int G(x,y) \phi(y) dSy, \quad \psi(x) = \mu \int G(x,y) \psi(y) dSy \quad (16)$$

今、 $\int \phi(x) \cdot \psi(x) dSx$ の値を計算する。

$$\int \phi(x) \cdot \psi(x) dSx = \int \phi(x) \cdot \left\{ \mu \int G(x,y) \psi(y) dSy \right\} dSx = \mu \int \psi(y) \cdot \left\{ \int G(x,y) \phi(x) dSx \right\} dSy = \lambda^{-1} \mu \int \psi(y) \cdot \phi(y) dSy$$

ここで、定義から $\lambda \neq \mu$ より、 $\lambda^{-1} \mu \neq 1$ 。従って、上の式が成立するには、 $\int \phi(x) \cdot \psi(x) dSx = 0$ 。

このように直交性は解析的に保証されていることが判明した。

②ノルム

異なるTCR固有関数同士の積の積分値は0であることが判ったので、各TCR固有関数の2乗の積分値（ノルムの2乗）のみが値を持つことになる。

$$|\Psi_i|^2 \equiv \int_{\Omega_p} |\Psi_i(y)|^2 \cdot dS(y) \tag{17}$$

そこで、この積分値の具体的な値を計算する。解析的に計算することは可能かもしれないが、ここで導出したTCR固有関数は、境界形状に依存した固有関数であるため、関数そのものを解析的に表現することは困難である。そこで数値的に計算することとする。領域形状や次数に依存するのかが重要な観点である。プラズマ領域 Ω_p として、第2.2図の4つの平衡配位を使用する。また、それぞれの領域を、5cmの正方形の要素で分割し、要素数は、それぞれ以下の表のとおりである。

第2.1表 試験用平衡配位における領域内分割要素数

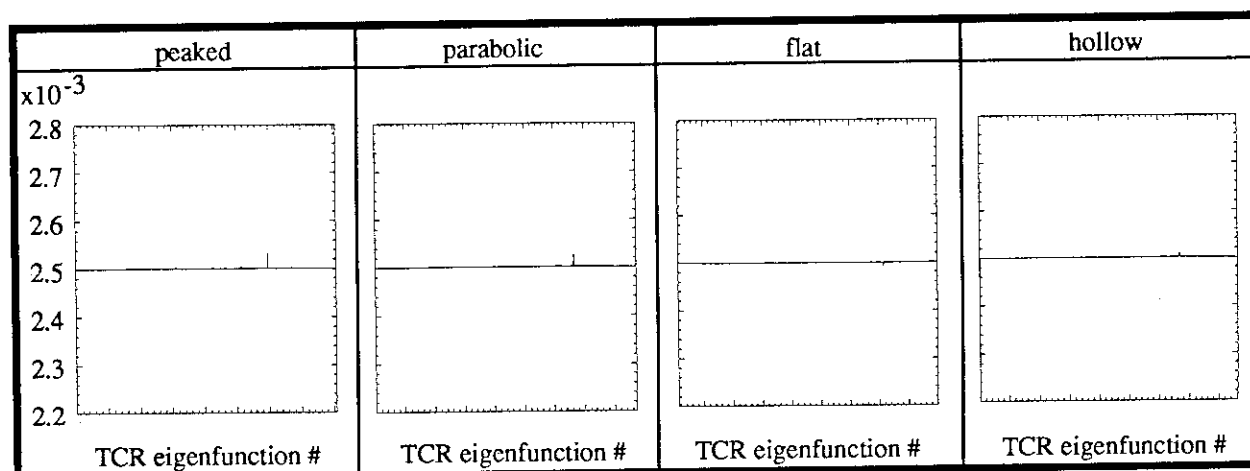
profile pattern	peaked	parabolic	flat	hollow
No. of elements	1616	1744	1773	1725

以上の4パターンのそれぞれについて式(17)を計算した結果を第2.3図に示す。どのパターンも若干の数値誤差と思われる数点の飛びが見られるが、全パターンのほぼ全次数について、ノルムの値として一定値0.05 ($\approx \sqrt{0.0025}$) 程度であることが判った。このように、TCR固有関数の次数、領域の違いとは無関係に一定値であることは、行列の固有値、固有ベクトルを求めるプログラムに依存している可能性もある。

以上の直交性、ノルム計算をまとめて以下の形式で書く。

$$\int_{\Omega_p} \Psi_i(y) \Psi_j(y) dS(y) = k \delta_{ij}, \quad k = 0.0025 \tag{18}$$

ここで、 δ_{ij} はKronecker記号 ($i=j$ のとき1、 $i \neq j$ のとき0) である。



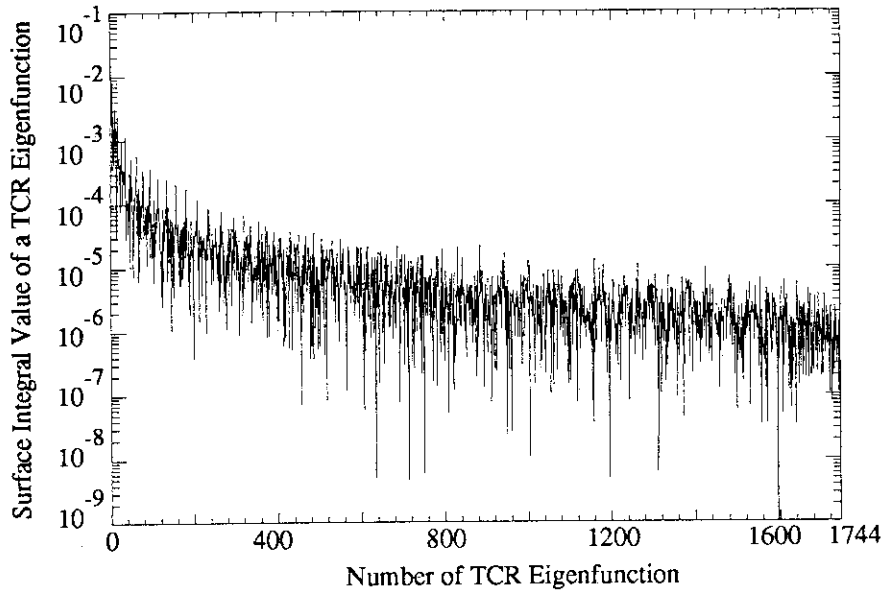
第2.3図 ノルムの2乗値（領域及び次数依存性が無いことが判る）

③面積分値

以降の解析で使用するTCR固有関数が表現するプラズマ電流成分（定義は以下）、

$$A_i \equiv \int_{\Omega_p} \Psi_i(y) dS(y) \tag{19}$$

について計算を行う。この値の絶対値の次数に対する分布を、parabolic分布について第2.4図に示す。他の電流分布パターン毎の違いは、付録を参照のこと。



第2.4図 TCR固有関数の面積分値分布例（各関数の電流値）

2.5 プラズマ電流分布の再現具合

付録に示したように、ダイバータ配位プラズマのTCR固有関数分布は、第2.1図に示した円形断面の場合に比べ大分複雑な構造を示している。これらを用いてプラズマ電流分布が再現出来ることが前記のとおり理論的には保証されている筈である。そこで、その再現具合を確認するため、電流分布が既知として、TCR固有関数展開の有限項数の係数を求め、その項数で計算されるプラズマ電流分布と最初に与えた電流分布を比較することとした。

項数は最大1600個程度まで取ることは可能であるが、それらの結合係数を求めることを考えると、少ない項数で電流分布が再現出来ることが良い訳である。ここでは、TCR固有関数の固有値の大きい方から順に50、100、200、500個使用した場合の再現具合を、各分布パターンそれぞれについて第2.5図に示す。

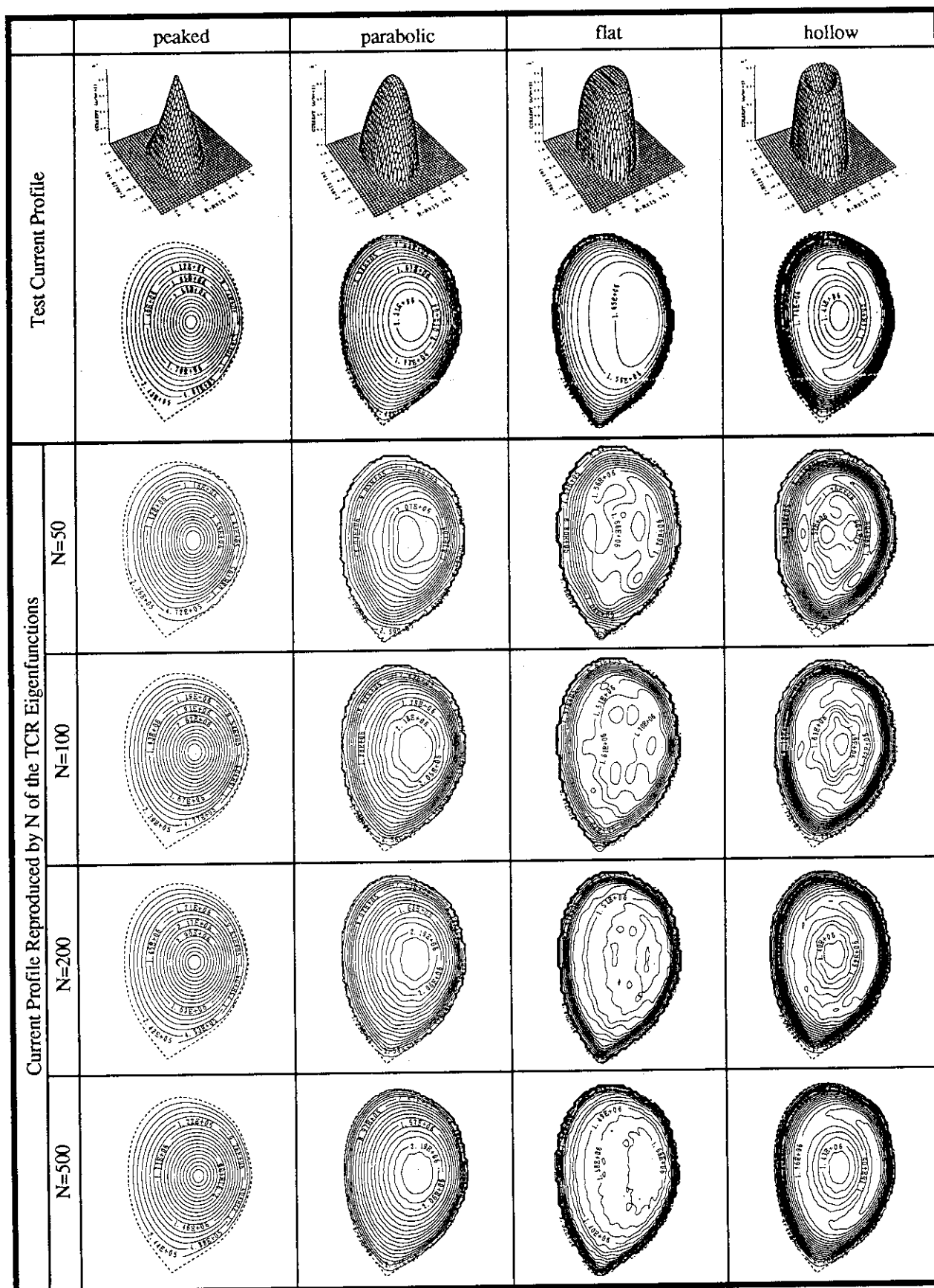
計算方法は以下のとおりである。まず、再現する電流分布を下式とおく。

$$j_{rep}(x) \equiv \sum_{m=1}^{N_c} \alpha_m \Psi_m(x) \tag{20}$$

N_c は、使用するTCR固有関数 Ψ_m の種類数である。ここでは、 $N_c=50, 100, 200, 500$ である。上式中の α_m は、次の式で与えられる。 j_{given} は、既知の電流分布、 $|\Psi_m|^2$ は、ノルムの2乗である。

$$\alpha_m = \left\{ \int_{\Omega_p} j_{given}(y) \Psi_m(y) dS \right\} \div |\Psi_m|^2 \tag{21}$$

第2.5図の上を示した与えたテスト分布を再現する項数は、分布により異なり、Peaked分布の場合には少数のTCR固有関数で再現出来るが、一方flat分布の場合には200個程度は再現するために必要である。従って、同定問題の解法時には約200個の未知数を決定することが要求される。



第2.5図 TCR固有関数を用いた電流分布の再現具合
 (固有値の絶対値の大きい方から順に50、100、200、500個使用した場合の比較)

3. 可同定性の検討

前章では、電流分布を与えた場合にはTCR固有関数により電流分布が精度良く展開（表現）出来ることを示した。ここでは、電流領域外部の電磁気的情報（磁場、磁束、総電流等）から電流分布が同定出来るかどうか検討を行う。まず、解析的に検討を加えた後、境界条件を与えて数値的に可同定かどうか検討を行う。最後に少数の境界条件下で、少数のTCR固有関数を用いた場合どの程度まで再現出来るかを述べる。

3.1 解析的可同定性の検討

問題設定を再確認すると、変数 x の領域は $x \in \overline{\Omega_p}$ （プラズマ外部）の場合に、以下の式の被積分関数中の j を求めることである。

$$f(x) = \int_{\Omega_p} G(x, y) \cdot j(y) \cdot dS(y) \quad (22)$$

無限遠を含む外部の領域での分布条件 $f(x)$ を与えて、プラズマ領域 Ω_p 内部で電流分布を構成するTCR固有関数展開の係数を求める際、内部TCR固有関数の外部への応答関数が、外部領域で互いに独立（或はさらに理想的には直交）であれば、解析的に係数が求まる。この言わば「外部独立性」の有無が可同定性の可否を決定する。

この問題設定を少し式を用いて規定する。ここでの $f(x)$ は Ω_p の外側全領域で与えられている。一方のTCR固有関数 Ψ_m は領域 Ω_p でのみ定義されているので、関数 Ψ_m のGreen関数を介した外部領域 $\overline{\Omega_p}$ への応答関数を Π_i として定義する。

$$\Pi_i(x) \equiv \lambda_i \int_{\Omega_p} G(x, y) \cdot \Psi_i(y) \cdot dS_y, \quad x \in \overline{\Omega_p} \quad (23)$$

今、電流分布を、 $j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i \Psi_i(x)$ と表現すれば、(22)式は次のように書き換えられる。

$$f(x) = \int_{\Omega_p} \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i \beta_i \Psi_i(y) \cdot G(x, y) \cdot dS(y), \quad x \in \overline{\Omega_p} \quad (24)$$

式(23)を用いて整理すれば、次式が得られる。

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_c} \beta_i \Pi_i(x), \quad x \in \overline{\Omega_p} \quad (25)$$

さてこのように、形式的に等式が得られたので、この式の両辺と Π_j との積をとって、領域 $\overline{\Omega_p}$ で積分すると次式が得られる。

$$\int_{\overline{\Omega_p}} f(x) \Pi_j(x) dS(x) = \sum_{i=1}^{N_c} \beta_i \int_{\overline{\Omega_p}} \Pi_i(x) \Pi_j(x) dS(x) \quad (26)$$

この式でもし関数 Π_j が互いに独立直交性が高ければ、即ち次の直交性があれば、 k を定数として

$$\int_{\overline{\Omega_p}} \Pi_i(x) \Pi_j(x) dS(x) = k \delta_{ij} \quad (27)$$

というように表現出来、未定係数を外部領域の既知量から計算出来ることになる。

プラズマ領域の境界上に x があるとき、 $\Pi_j(x) = \Psi_j(x)$ である。領域 Ω_p 内の全領域積分ではTCR固有関数 Ψ_j は互いに直交しているのが独立と言えるが、境界だけでの等式条件で $\Pi_j(x)$ の独立性を解析的に示すことは難しい。これについては、次節で調べる。

従って、以上の検討から、可同定性の解析的検証の仕方は、式(27)の左辺を (i, j) 要素として持

つ行列を構成し、その階数が行列の大きさと等しいことを確認することである。当然有限の行列で調べるといふ点では数値的になるが、 i, j 共に使用するTCR固有関数の個数程度（約200）まで大きくとって調べれば十分な情報が得られると考えられる。

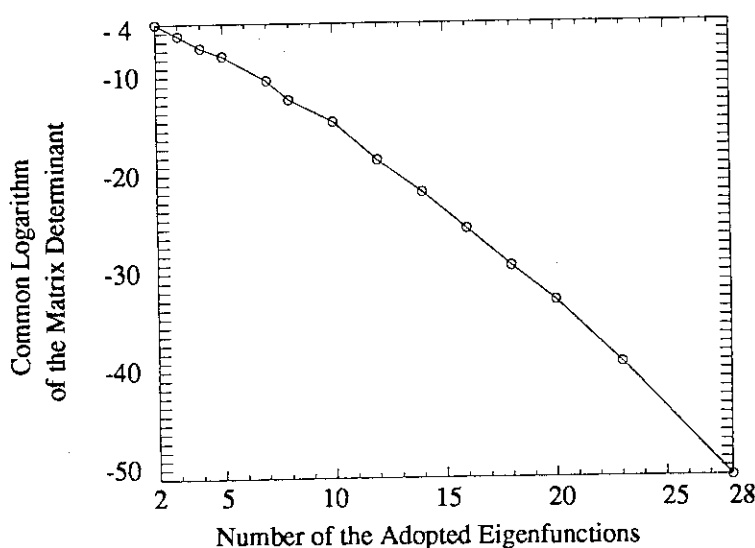
また、この(26)式を用いて、線形結合係数を外部領域での積分から求める方法では、計測点の数と使用するTCR固有関数の数（即ち未知数の数）の大小関係（計測点の数>未知数の数）は必ずしも必要無い点は注意を要する。これはFourier級数展開の類似で明らかであるが、外部全領域で既知関数の多項式展開を行うことに対応しており、原理的には無限項まで使用することが出来る。

3.2 数値的可同定性の検討 ---- 「境界独立性」

プラズマ領域の境界でのTCR固有関数同士の独立性が高ければ、境界条件からTCR固有関数の係数が最小 2 乗法の意味において計算出来ることになる。そこで、この点について以下の方法で調べてみる。

まずTCR固有関数について、それぞれプラズマ境界 $\partial\Omega_p$ 上で使用する固有関数の個数と同数の離散点での値を計算する。1種類のTCR固有関数に対して、行列の1行分の要素を生成する。このようにして正方行列を構成し、階数または行列式の値を計算するなどして、互いの独立性を判定する。この方法は、各TCR固有関数の境界上での数値的な1次独立性の強弱により、「境界独立性」を検査する方法である。境界条件だけの制約条件で解法を考えた時、実際の計算に極めて対応した方法と言える。

第3.1図に、行列の常用対数値を縦軸にとったグラフを示す。この図から明らかなようにTCR固有関数の数を増やすにつれ、著しく独立性が低下してくることが判る。この図から見る限りでは、先に必要とされた100-200といったTCR固有関数の個数の自由度を境界条件だけから規定して同定へと向かう手法は採用出来ない可能性が高いことが判った。



第3.1図 TCR固有関数の境界独立性（固有関数の次数の増加で独立性は低下する。）

3.3 少数制約条件下での同定結果

ここでは、TCR固有関数を絞って電流分布を同定した場合の結果について述べる。同定のアル

ゴリズムは、通常の最小2乗法（以下）である。

TCR固有関数として N_a 個選び、領域境界上での離散サンプル点として N_b 個選ぶ。この時(11)式の近似式である次式が成立する。

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_a} \beta_i \cdot \Psi_i(x) \quad (28)$$

この式を N_b 点分作ることにより、以下の行列方程式が与えられる。

$$\begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_b}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1(x_1) & \Psi_2(x_1) & \cdots & \Psi_{N_a}(x_1) \\ \Psi_1(x_2) & \Psi_2(x_2) & \cdots & \Psi_{N_a}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1(x_{N_b}) & \Psi_2(x_{N_b}) & \cdots & \Psi_{N_a}(x_{N_b}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N_a} \end{bmatrix} \equiv F \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N_a} \end{bmatrix} \quad (29)$$

これを解いて、未定線形結合係数 β の最小2乗解は以下となる。右肩の t は、転置行列を意味。

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N_a} \end{bmatrix} = (F^t \cdot F)^{-1} \cdot F^t \cdot \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_b}) \end{bmatrix} \quad (30)$$

以上は、境界表面で磁束値が与えられた場合の解の形式を書いたが、磁場（磁束の勾配）の境界条件、電流の連続性条件、総電流値の条件等を加えた場合についても、次元の減少はあるが、同様の議論が適用出来る。

ここで計算例として先の電流分布を変えた4パターンの平衡データの各ケースについて、50点の外部磁場計測値を与え、そのデータを基に電流分布、磁束分布を同定した。

処理手順は以下のとおりである。

- ①まずプラズマ最外殻磁気面形状を同定し、プラズマ領域の境界条件を計算。
- ②この時のプラズマ領域に於ける固有関数列を計算。
- ③境界条件を適用して、(30)式よりTCR固有関数の線形結合係数を求め、磁束関数・電流分布を計算。

この計算で使用したTCR固有関数の種類は、固有値の大きい方から順に10個（付録に示すTCR固有関数の最初の10個）選んだ。

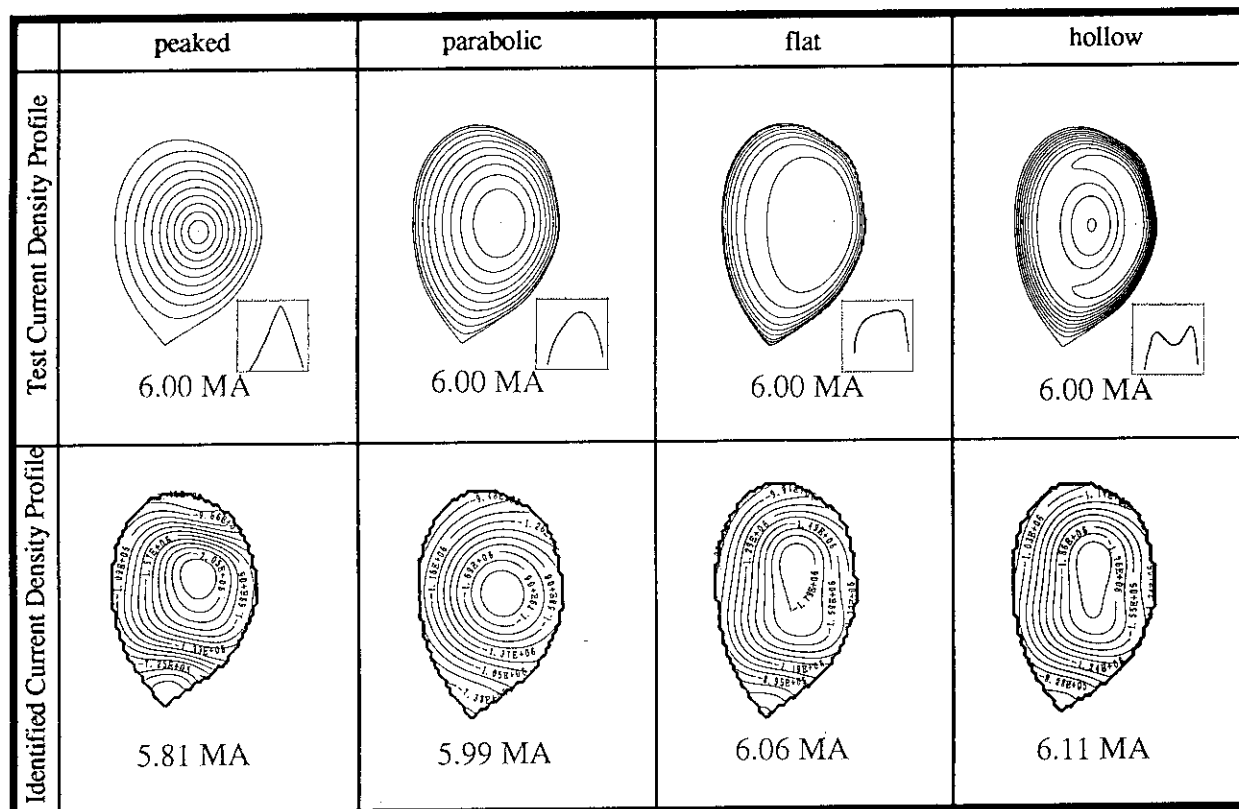
境界条件としては4種類を選んだ。即ち、

- (1)全プラズマ電流値が、電磁気計測で与えられた電流値であること、
- (2)電流密度が境界で0であること、
- (3)磁束値が境界で連続であること、
- (4)磁場(磁束密度)が境界で連続であること、

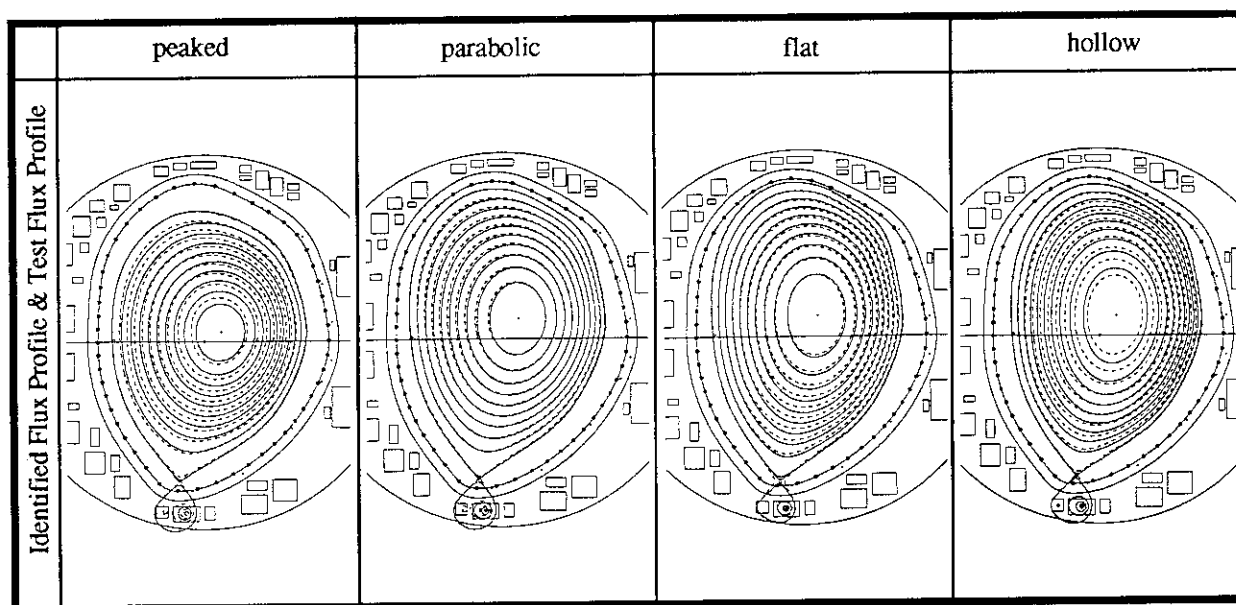
の4点である。

同定した電流分布結果を第3.2図に、また磁束分布結果を第3.3図に示す。2.5節の議論から予想されたとおり、使用したTCR固有関数の個数が少なく、電流分布を再現出来る程ではない。しかし一方磁束分布は、式(2)から判るように電流分布の違いに対して感度が小さいため、parabolic分布の場合では比較的良く一致するものの、hollow分布等では大きくずれが見られる。当然TCR固有関数を増加させて、電流分布を正しく同定することが必要である。しかし、Green関

数の幾何学的性質と境界形状とで決まるTCR固有関数と境界条件だけから、内部に関する制約条件を付加せずに、この程度までプラズマ電流分布の同定が可能であることが判る。これはさらなる条件の付加、或いは3.1節の方法により、より精度の良い同定への可能性を示唆していると言える。



第3.2図 電流分布同定結果 (上：試験電流分布、下：電流分布同定結果)



第3.3図 磁束分布同定結果 (実線：試験電流分布、破線：磁束分布同定結果)

4. 境界条件・物理的制約条件の考え方

ここでは、電磁気計測信号から与えられる境界条件や制約条件及び物理的に与えられる内部制約条件を数式で規定、整理しておく。

最小2乗等の最適化の意味で解を求めることを想定した場合、条件の考慮の仕方は、(a)過剰な条件として評価関数の一部に組み込み、近似的に等式を成立させる方法、(b)絶対的な制約条件として組み込み未知数を減らして、厳密に等式を成立させる方法、(c)絶対的な制約条件ではあるが不等式を成立させる方法、の3種類存在する。そこで、ここでは(a)、(b)、(c)それぞれを「過剰条件」、「絶対等式条件」、「絶対不等式条件」として示した。勿論(a)と(b)の分類に関し、その条件をどちらに分類するかは確定的なものではなく、ここでは参考的な意味を持つ。

プラズマ領域については、力学的平衡が成立しているという事実から、強い制約条件が存在している。そのために電流分布の自由度は相当に制限を受けていることが想像出来る。そこで制約条件を、電磁氣的諸量を用いて表現することとする。

4.1 電磁気計測信号に基づく境界条件等

電磁気計測信号から位置形状を厳密に同定出来ることから、プラズマ領域の境界から外側の磁場、磁束は厳密に判っているとする。これを前提に、以下に各条件を箇条書きする。

①全電流値の整合性 (絶対条件)

$$I_p = \int_{\Omega_p} \mathbf{j}(y) \cdot d\mathbf{S}_y = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i \int_{\Omega_p} \Psi_i(y) dS = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i A_i \quad (31)$$

ここで、 $A_i \equiv \int_{\Omega_p} [\Psi_i(y)] dS$.

②電流密度の連続性 (過剰条件)

$$\mathbf{j}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i \nabla \Psi_i(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega_p) \quad (32)$$

③磁束の境界条件 (過剰条件)

$$\frac{C(x)}{2\pi\mu_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Psi_i(x), \quad (x \in \partial\Omega_p) \quad (33)$$

ここで、 $C(x) \equiv \sigma \cdot \phi(x) + \int_{\partial\Omega_p} [G(x,y) \cdot \text{grad}\phi(y) - \phi(y) \cdot \text{grad}G(x,y)] \cdot \frac{d\mathbf{S}(y)}{r_y^2}$

④磁束密度の境界条件 (過剰条件)

$$\left. \frac{\text{grad}\{C(x)\}}{2\pi\mu_0} \right|_{x \rightarrow \partial\Omega_p} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \left. \text{grad}\{\Psi_i(x)\} \right|_{x \rightarrow \partial\Omega_p} \quad (x \in \partial\Omega_p) \quad (34)$$

左辺は境界 $\partial\Omega_p$ の外側から近づけ、右辺は $\partial\Omega_p$ の内側から近づけてgradを計算する。

⑤jの勾配の境界条件 ((近似)過剰条件)

$$\text{grad } \mathbf{j}(x) \cdot \mathbf{s}(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega_p) \quad (35)$$

ここで、 \mathbf{s} は与えられたプラズマ境界線の線素ベクトルである。ただし、X点の近傍だけは避けることとする。

①は計測データから作られる条件であるが、整合性は絶対であるので1個の絶対条件とする。
 ②、③、④、⑤は、計測データから作られる条件であり、しかも過剰な数の条件式を構成出来ることから、等号は近似等号として考慮し辺々の差を2乗して評価関数(最小2乗法)とする。
 以上から、まず評価関数として最小2乗法に組み込む条件として以下を考える。

条件② $\sum_{i=1}^{NE} \lambda_i \beta_i \Psi_i(x) \approx 0$ NJ点($\partial\Omega_p$ 上)で式を作る。

条件③ $\frac{C(x)}{2\pi\mu_0} \approx \sum_{i=1}^{NE} \beta_i \Psi_i(x)$ NG点($\partial\Omega_p$ 上)で式を作る。

条件④ $\frac{\text{grad}\{C(x)\}}{2\pi\mu_0} \approx \sum_{i=1}^{NE} \beta_i \text{grad}\{\Psi_i(x)\}$ NB点($\partial\Omega_p$ 上)で式を作る。

条件⑤ $s \cdot \sum_{i=1}^{NE} \lambda_i \beta_i \text{grad}\{\Psi_i(x)\} = 0$ NS点($\partial\Omega_p$ 上)で式を作る。

ここで、 $NG + NJ + 2 \cdot NB + NS \geq NE$ 、 NE は使用しているTCR固有関数の数、 λ_i は固有値である。
 1個の絶対制約条件として以下を考慮する。

条件① $I_p \approx \sum_{i=1}^{NE} \lambda_i \beta_i A_i$

ここまでの条件式から行う最小2乗法を記述する。これらの関係式を統一的に行列1次方程式に書くと3.3節と同様に、以下となる。

$$g = F \cdot \beta \tag{36}$$

ここで、 g は計測データ、 β は求めるべき変数、 F は理想状況での変数と計測データとの対応行列。異なる物理量を1つの評価関数で取り扱うので、重み付き最小2乗法となり、評価関数は次式となる。

$$J(\beta) \equiv (g - F \cdot \beta) \cdot W \cdot (g - F \cdot \beta) = (g \cdot W \cdot g - 2 \cdot (g \cdot W \cdot F) \beta + \beta \cdot (F \cdot W \cdot F) \cdot \beta) \tag{37}$$

ここで、 W は、荷重度を規定する行列で対角行列とする。 $g - F\beta$ の行と W の行とは対応しているので、単位変換やオーダー調整など設定する。

4.2 物理的制約条件 ---- プラズマ内部の関係式

プラズマ領域については、自明の絶対的制約条件と力学的平衡が成立しているという事実から発生する強い制約条件とが存在している。

まず、自明の絶対的制約条件として次式が与えられる。

①領域 Ω_p の電流密度が至るところ正であること(絶対不等式条件)

$$j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i \Psi_i(x) > 0 \quad (x \in \Omega_p) \tag{38}$$

使用するTCR固有関数は、有限個であるので、以下となる。

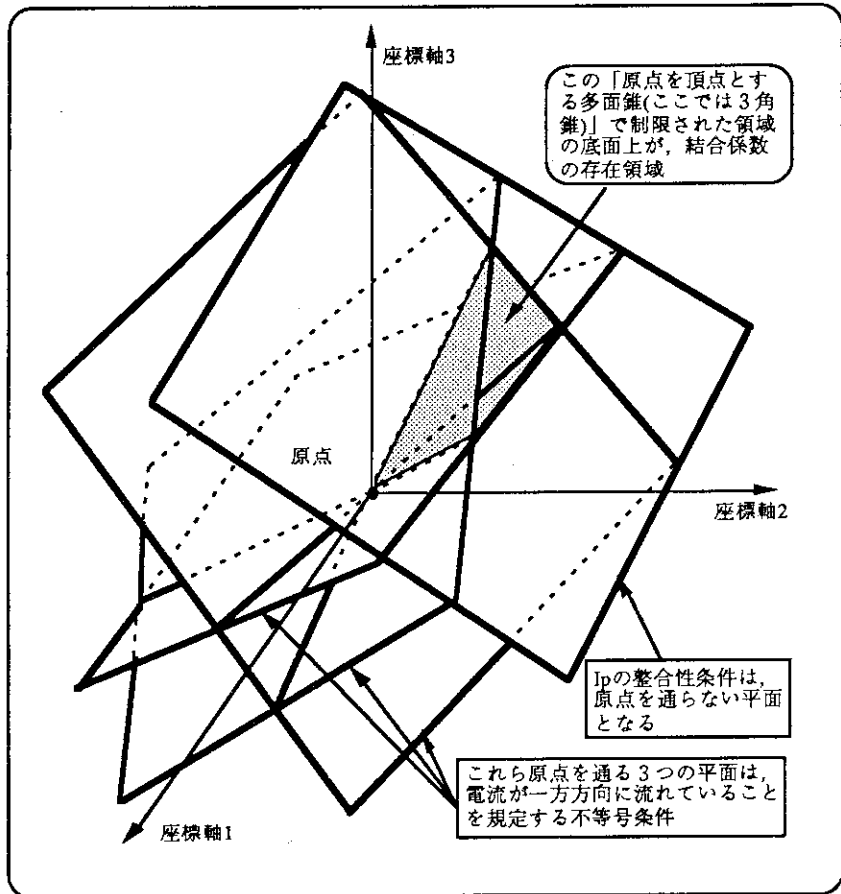
条件① $\sum_{i=1}^{NE} \lambda_i \beta_i \Psi_i(x) > 0$ NM点(Ω_p の全要素代表点)で式を作る。

ここで、 $NM \doteq 2000 \gg NE$ である。

この条件式は、探索領域を規定することになる。数が大規模であるが、超空間に於いて原点を通る凸多面体領域を構成することは明確である。 I_p の整合性条件は原点を通らない超平面であるので、この条件式は、 I_p の整合性条件の超平面上に探索領域を作ることになる。このイメー

ジを第4.1図に示す。

これまでの2次計画法では、等式不等式制約条件を考慮して極値問題が解かれるが、考慮の仕方としては、不等式に新たな変数を導入して等式化し、その新たな変数も極値をとるように極点を探索するやり方を探る[6]。従って、膨大な数の不等式制約条件が存在する場合、その式の数分だけ変数が増えることになり、探索に膨大な時間を必要としてしまうという問題点がある。従って、大規模不等式領域の決定方法の確立は、今後の重要解決課題である。



第4.1図 不等式制約条件の超平面で囲まれた探索領域の概念図

②プラズマ領域での電流分布の整合条件（絶対等式条件）

プラズマは、制御を行う時間スケール（100μs程度以上）では、常に力の平衡状態と見做せる。その場合、電磁力とプラズマ圧力が釣り合っており、次式（式(6)の再記）が成立している。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \text{grad } p \tag{39}$$

この式から今の問題で同定している電流分布 \mathbf{j} や磁束関数 ϕ の関係式を導く必要がある。この式の右辺の圧力分布については、プラズマ密度分布、及び温度分布に依存した量であるため、電磁気計測量から求めることや今考えている変数の結合で表現することは不可能である。そこで、この右辺の持つgradient構造（rot演算に対して恒等的に0となる構造）に着目して両辺のrotをとり、次式を出発点とする。

$$\text{rot}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{40}$$

この式と $\mu_0 \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$ の2式を用いて、ベクトル解析の手法で各種変形を行うと、次式が得られる。

$$\frac{r^3}{B_r} \left\{ B_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{j}}{r} \right) + B_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{j}}{r} \right) \right\} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial \phi} (r B_t)^2 \tag{41}$$

ここで、 $B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z}$, $B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$, $r B_t = I(\phi)$ である。 B_r, B_z はポロイダル磁場、 B_t はトロイダル磁場、 I は磁気面関数（磁束の関数）である。右辺が磁気面関数であることから、左辺も磁気面関数である。従って、「左辺の関数は、磁束関数と等高線が一致する」という制約条件を示していることになる。

さらに、この(41)式の中括弧の中は、「ポロイダル磁場 (=磁束の勾配)」と「電流密度を主半径で割った量の勾配」の内積となっている。これに係数 (r^2/Br) との積が磁気面関数になっている訳である。この制約条件は平衡状態であれば、プラズマ内部では磁束の勾配と電流密度の勾配とのベクトル同士がある関係を有していることを規定する条件である。Maxwell方程式では、電流分布が磁束分布に与える影響は小さかったが、この平衡条件ではその磁束分布に電流分布が大きく影響を受けることになる。

しかも、1章で述べた各種人工的な条件と異なり、物理的に自然に成立している条件であるので、同定出来る電流分布の範囲を狭めることはない点は、大きな利点である。

実際にテスト平衡データについて、左辺を計算して、磁束関数分布と重ね描きを行い、確かに磁束関数と等高線が同じであることを確認した。

さて、自然な条件で、かなり自由度を下げられる可能性を持つ条件ではあるが、この制約条件式の同定アルゴリズムへの組み込みには若干の困難が予想される。これは、TCR固有関数の線形結合係数である未知変数 β (式(11)右辺) に対して式が非線形となっているからである。ポロイダル磁場にもプラズマ電流にも β が線形に入り、それらの積は β にとって2乗となる。このことは、もとの平衡の式 (式(39)) からの当然の帰結とも言える。また、磁気面関数と等高線を一致させることを、具体的な計算アルゴリズムで実現する点が、今後の検討課題として残る。

5. 結論と今後の課題

トカマク・プラズマの内部を流れる電流分布は同定可能かどうか。可能であるとしたらどのように解を求めればよいか。このような基本的な疑問に答える目的で、トロイダル電流場に於ける境界付き固有関数 (TCR固有関数) を導入して検討を加えた。その検討の結果を以下にまとめる。

- (1) TCR固有関数により、プラズマ電流分布が表現出来ることを示した。
- (2) TCR固有関数は、広い自由度を持ち、直交関数系列である等、解析上有用な性質を持っていることを示した。
- (3) トカマク・プラズマの解析的な可同定性は、TCR固有関数を用いて表現される関数系列の独立性の有無に依存していることを示し、独立性検査法を提示した。
- (4) 境界条件だけからの最小2乗解法による電流分布同定は、TCR固有関数の持つ大きい自由度を制限する条件が不十分であり、且つ境界線上でのTCR固有関数の数値的な独立性が低く、同定結果は不良であった。
- (5) TCR固有関数の自由度を抑えるためのプラズマ内部制約条件を導出した。
- (6) 同様に自由度を抑えるための大規模不等式制約条件を明確にした。

以上の検討の結果、今後の課題として以下が挙げられる。

- (a) TCR固有関数を用いて表現される関数系列の独立性検査法を具体的に実施し、可同定性の可否を確認する。
- (b) プラズマ内部制約条件は、非線形の式であるために単純な組み込みは難しく、この考慮の

さらに、この(41)式の中括弧の中は、「トロイダル磁場 (=磁束の勾配)」と「電流密度を主半径で割った量の勾配」の内積となっている。これに係数 (r^2/Bz) との積が磁気面関数になっている訳である。この制約条件は平衡状態であれば、プラズマ内部では磁束の勾配と電流密度の勾配とのベクトル同士がある関係を有していることを規定する条件である。Maxwell方程式では、電流分布が磁束分布に与える影響は小さかったが、この平衡条件ではその磁束分布に電流分布が大きく影響を受けることになる。

しかも、1章で述べた各種人工的な条件と異なり、物理的に自然に成立している条件であるので、同定出来る電流分布の範囲を狭めることはない点は、大きな利点である。

実際にテスト平衡データについて、左辺を計算して、磁束関数分布と重ね描きを行い、確かに磁束関数と等高線が同じであることを確認した。

さて、自然な条件で、かなり自由度を下げられる可能性を持つ条件ではあるが、この制約条件式の同定アルゴリズムへの組み込みには若干の困難が予想される。これは、TCR固有関数の線形結合係数である未知変数 β (式(11)右辺) に対して式が非線形となっているからである。トロイダル磁場にもプラズマ電流にも β が線形に入り、それらの積は β にとって2乗となる。このことは、もとの平衡の式 (式(39)) からの当然の帰結とも言える。また、磁気面関数と等高線を一致させることを、具体的な計算アルゴリズムで実現する点が、今後の検討課題として残る。

5. 結論と今後の課題

トカマク・プラズマの内部を流れる電流分布は同定可能かどうか。可能であるとしたらどのように解を求めればよいか。このような基本的な疑問に答える目的で、トロイダル電流場に於ける境界付き固有関数 (TCR固有関数) を導入して検討を加えた。その検討の結果を以下にまとめる。

- (1) TCR固有関数により、プラズマ電流分布が表現出来ることを示した。
- (2) TCR固有関数は、広い自由度を持ち、直交関数系列である等、解析上有用な性質を持っていることを示した。
- (3) トカマク・プラズマの解析的な可同定性は、TCR固有関数を用いて表現される関数系列の独立性の有無に依存していることを示し、独立性検査法を提示した。
- (4) 境界条件だけからの最小2乗解法による電流分布同定は、TCR固有関数の持つ大きい自由度を制限する条件が不十分であり、且つ境界線上でのTCR固有関数の数値的な独立性が低く、同定結果は不良であった。
- (5) TCR固有関数の自由度を抑えるためのプラズマ内部制約条件を導出した。
- (6) 同様に自由度を抑えるための大規模不等式制約条件を明確にした。

以上の検討の結果、今後の課題として以下が挙げられる。

- (a) TCR固有関数を用いて表現される関数系列の独立性検査法を具体的に実施し、可同定性の可否を確認する。
- (b) プラズマ内部制約条件は、非線形の式であるために単純な組み込みは難しく、この考慮の

仕方を検討する。

(c) 大規模不等式制約条件の考慮の仕方についても具体的なアルゴリズムは今後の課題である。

また、これまではTCR固有関数を逆問題のための基本構成関数として取り扱ってきた。定数変化法を応用すれば、TCR固有関数展開法は順問題への適用の可能性も持っている。従って、幾何学形状が決まったトロイダル軸対称である対象、例えば真空容器や受動導体等を通る電流についても、TCR関数を使用出来る可能性があり、順・逆問題の統合によるプラズマ制御の一層の高度化への展開も今後の大きな課題として位置付けられる。

謝 辞

本研究開発に対し有益な助言を賜った日本原子力研究所JT-60第1試験室長 木村豊秋博士、及び、研究開発への支援を賜った核融合装置試験部長 船橋昭昌博士、同次長 清水正亜博士に心から感謝申し上げます。

参 考 文 献

- [1] Kurihara, K., "Tokamak Plasma Shape Identification on the Basis of Boundary Integral Equations," Nuclear Fusion, Vol.33, No.3, pp.399-412 (1993)
- [2] 例えば、内田岱二郎・井上信幸、「核融合とプラズマの制御」、東京大学出版会 (1986)
- [3] 例えば、次の4論文等。
辻俊二、他、「磁場測定に基づくJT-60のMHD平衡解析法」、JAERI-M 86-006 (1986)
Kuznetsov, Yu. K. et al., "Possibility of determining equilibrium plasma current and pressure profiles in a tokamak from magnetic measurements," Sov. J. Plasma Phys., Vol.13 (1987), No. 2, pp.75-80
Vabishchevich, P. N. et al., "Reconstruction of the longitudinal current density in a tokamak from magnetic measurements," Sov. J. Plasma Phys., Vol.14 (1988), No. 11, pp.759-764
Lao, L. L. et al., "Equilibrium analysis of current profiles in tokamaks," GA-A19668 (1989)
- [4] 吉田耕作、「積分方程式論」、岩波書店 (1973)
Bitsadze, A. V., "Integral Equations of the First Kind," World Scientific Publishing Co. Ltd. (1995)
- [5] Kurihara, K., "Improvement of the Tokamak Plasma Shape Identification with a Legendre-Fourier Expansion of the Vacuum Poloidal Flux Function," Fusion Technology, Vol.21, pp.334-349 (1992)
- [6] 大野豊、他、「数値計算ハンドブック」、オーム社、pp.831-838 (1990)

仕方を検討する。

(c) 大規模不等式制約条件の考慮の仕方についても具体的なアルゴリズムは今後の課題である。

また、これまではTCR固有関数を逆問題のための基本構成関数として取り扱ってきた。定数変化法を応用すれば、TCR固有関数展開法は順問題への適用の可能性も持っている。従って、幾何学形状が決まったトロイダル軸対称である対象、例えば真空容器や受動導体等を通る電流についても、TCR関数を使用出来る可能性があり、順・逆問題の統合によるプラズマ制御の一層の高度化への展開も今後の大きな課題として位置付けられる。

謝 辞

本研究開発に対し有益な助言を賜った日本原子力研究所JT-60第1試験室長 木村豊秋博士、及び、研究開発への支援を賜った核融合装置試験部長 船橋昭昌博士、同次長 清水正亜博士に心から感謝申し上げます。

参 考 文 献

- [1] Kurihara, K., "Tokamak Plasma Shape Identification on the Basis of Boundary Integral Equations," Nuclear Fusion, Vol.33, No.3, pp.399-412 (1993)
- [2] 例えば、内田岱二郎・井上信幸、「核融合とプラズマの制御」、東京大学出版会 (1986)
- [3] 例えば、次の4論文等。
辻俊二、他、「磁場測定に基づくJT-60のMHD平衡解析法」、JAERI-M 86-006 (1986)
Kuznetsov, Yu. K. et al., "Possibility of determining equilibrium plasma current and pressure profiles in a tokamak from magnetic measurements," Sov. J. Plasma Phys., Vol.13 (1987), No. 2, pp.75-80
Vabishchevich, P. N. et al., "Reconstruction of the longitudinal current density in a tokamak from magnetic measurements," Sov. J. Plasma Phys., Vol.14 (1988), No. 11, pp.759-764
Lao, L. L. et al., "Equilibrium analysis of current profiles in tokamaks," GA-A19668 (1989)
- [4] 吉田耕作、「積分方程式論」、岩波書店 (1973)
Bitsadze, A. V., "Integral Equations of the First Kind," World Scientific Publishing Co. Ltd. (1995)
- [5] Kurihara, K., "Improvement of the Tokamak Plasma Shape Identification with a Legendre-Fourier Expansion of the Vacuum Poloidal Flux Function," Fusion Technology, Vol.21, pp.334-349 (1992)
- [6] 大野豊、他、「数値計算ハンドブック」、オーム社、pp.831-838 (1990)

仕方を検討する。

(c) 大規模不等式制約条件の考慮の仕方についても具体的なアルゴリズムは今後の課題である。

また、これまではTCR固有関数を逆問題のための基本構成関数として取り扱ってきた。定数変化法を応用すれば、TCR固有関数展開法は順問題への適用の可能性も持っている。従って、幾何学形状が決まったトロイダル軸対称である対象、例えば真空容器や受動導体等を通る電流についても、TCR関数を使用出来る可能性があり、順・逆問題の統合によるプラズマ制御の一層の高度化への展開も今後の大きな課題として位置付けられる。

謝 辞

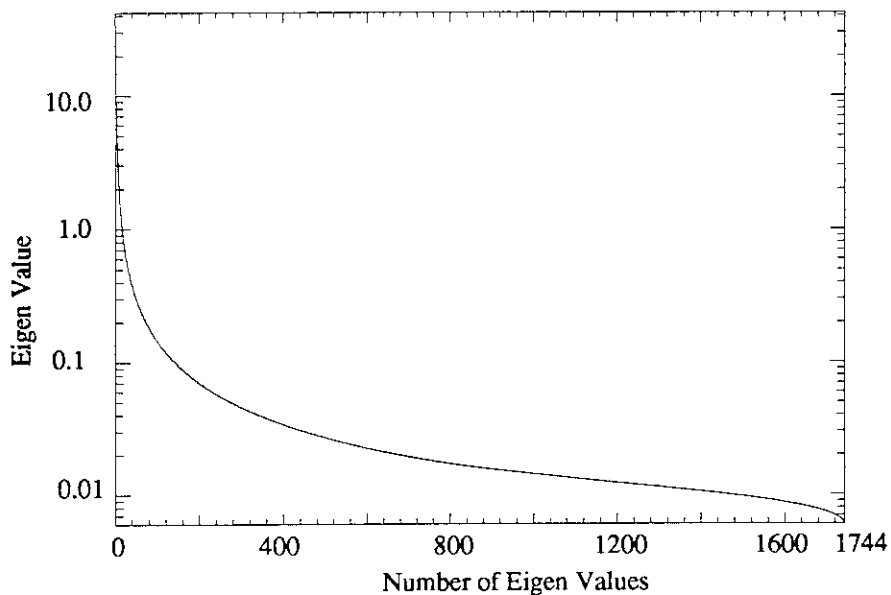
本研究開発に対し有益な助言を賜った日本原子力研究所JT-60第1試験室長 木村豊秋博士、及び、研究開発への支援を賜った核融合装置試験部長 船橋昭昌博士、同次長 清水正亜博士に心から感謝申し上げます。

参 考 文 献

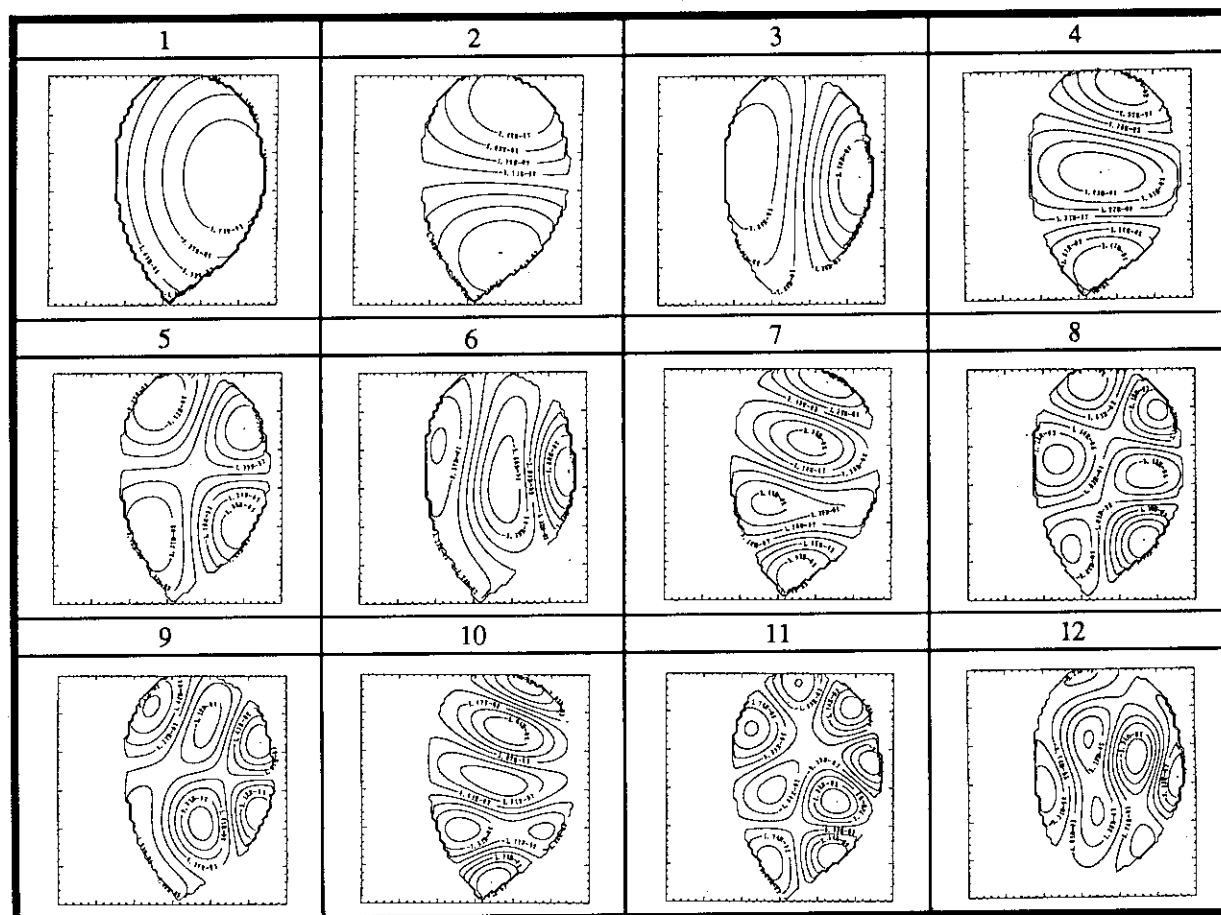
- [1] Kurihara, K., "Tokamak Plasma Shape Identification on the Basis of Boundary Integral Equations," Nuclear Fusion, Vol.33, No.3, pp.399-412 (1993)
- [2] 例えば、内田岱二郎・井上信幸、「核融合とプラズマの制御」、東京大学出版会 (1986)
- [3] 例えば、次の4論文等。
辻俊二、他、「磁場測定に基づくJT-60のMHD平衡解析法」、JAERI-M 86-006 (1986)
Kuznetsov, Yu. K. et al., "Possibility of determining equilibrium plasma current and pressure profiles in a tokamak from magnetic measurements," Sov. J. Plasma Phys., Vol.13 (1987), No. 2, pp.75-80
Vabishchevich, P. N. et al., "Reconstruction of the longitudinal current density in a tokamak from magnetic measurements," Sov. J. Plasma Phys., Vol.14 (1988), No. 11, pp.759-764
Lao, L. L. et al., "Equilibrium analysis of current profiles in tokamaks," GA-A19668 (1989)
- [4] 吉田耕作、「積分方程式論」、岩波書店 (1973)
Bitsadze, A. V., "Integral Equations of the First Kind," World Scientific Publishing Co. Ltd. (1995)
- [5] Kurihara, K., "Improvement of the Tokamak Plasma Shape Identification with a Legendre-Fourier Expansion of the Vacuum Poloidal Flux Function," Fusion Technology, Vol.21, pp.334-349 (1992)
- [6] 大野豊、他、「数値計算ハンドブック」、オーム社、pp.831-838 (1990)

付 録： 固有値分布とTCR固有関数

本文中で使用した試験対象のプラズマ領域が異なるので、それぞれ異なるTCR関数（TCR固有関数）系列が存在する。この中の代表として、parabolic分布の場合の固有値分布、及びTCR固有関数の等高線図を以下に示す。



第付1図 固有値分布例



第付2図 TCR固有関数の等高線図例（1次→12次）