



JAERI-Review

JP9950419

99-016



確率論的構造力学解析における 並列計算プログラムの基本設計

1999年6月

加治芳行・荒井長利・Wenwei GU*・中村 均*

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは、日本原子力研究所研究情報部研究情報課（〒319-1195 茨城県那珂郡東海村）あて、お申し越し下さい。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-1195 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内）で複写による実費領布を行っております。

This report is issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Research Information Division, Department of Intellectual Resources, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-1195, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1999
編集兼発行 日本原子力研究所

確率論的構造力学解析における並列計算プログラムの基本設計

日本原子力研究所計算科学技術推進センター

加治 芳行・荒井 長利^{*}・Wenwei GU^{*}・中村 均^{*}

(1999年5月25日受理)

本研究室では、「構造用脆性材料の微視的破壊力学及び確率論を用いた損傷評価法の開発」(原子力クロスオーバー研究)において、セラミックス製構造物の新たな構造信頼性評価解析法の開発を目的として、潜在欠陥に関する微視破壊力学をベースとする材料強度理論と連続体構造力学モデルとを融合させる、超並列計算システム対応の計算力学的手法を検討している。

本論文は、計算力学プログラムの基本設計のうち主な項目に関係している確率論的構造力学の原理、定式の基礎事項及び並列処理計算のプログラミング手法について調査し、概要をまとめたものである。

日本原子力研究所（東海駐在）：〒319-1195 茨城県那珂郡東海村白方白根2-4

⁺企画室

^{*}株式会社 CRC 総合研究所

Basic Design of Parallel Computational Program for Probabilistic Structural Analysis

Yoshiyuki KAJI, Taketoshi ARAI⁺, Wenwei GU* and Hitoshi NAKAMURA*

Center for Promotion of Computational Science and Engineering
(Tokai site)
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received May 25, 1999)

In our laboratory, for "development of damage evaluation method of structural brittle materials by microscopic fracture mechanics and probabilistic theory" (nuclear computational science cross-over research) we examine computational method related to super parallel computation system which is coupled with material strength theory based on microscopic fracture mechanics for latent cracks and continuum structural model to develop new structural reliability evaluation methods for ceramic structures.

This technical report is the review results regarding probabilistic structural mechanics theory, basic terms of formula and program methods of parallel computation which are related to principal terms in basic design of computational mechanics program.

Keywords: Probabilistic Structural Mechanics Theory, Microscopic Fracture Mechanics,
Parallel Computation, Computational Mechanics

⁺ Office of Planning

* CRC Research Institute Inc.

目 次

1. はじめに.....	1
2. 確率論的構造力学解析における並列計算プログラミングの概要	3
2.1 構造信頼性計算の定式と近似法.....	3
2.1.1 確率論的有限要素法（PFEM）	3
2.1.2 確率論的境界要素法（SBEM）	19
2.2 構造信頼性計算の並列処理手法.....	25
2.2.1 確率論的計算における並列処理.....	25
2.2.2 構造力学計算における並列処理.....	29
3. 問題別超並列処理計算プログラミング手法.....	33
3.1 マクロ確率過程の定式と解法.....	33
3.1.1 関連する確率の諸事項.....	33
3.1.2 モンテカルロシミュレーション（MCS）の定式と解法.....	42
3.2 ミクロ確率過程の定式と解法.....	44
3.2.1 均質化法.....	44
3.2.2 微細構造の不確定さを考慮した確率構造解析の定式化.....	45
3.3 並列化プログラミング.....	48
3.3.1 並列化ライブラリ	48
3.3.2 メッセージ・パッシング.....	49
4. まとめ.....	58
謝辞.....	58
参考文献.....	59

Contents

1. Introduction.....	1
2. Parallel Computational Program for Probabilistic Structural Analysis.....	3
2.1 Formula and Approximation Method of Structural Reliability Calculation.....	3
2.1.1 Probabilistic Finite Element Method (PFEM)	3
2.1.2 Stochastic Boundary Element Method (SBEM)	19
2.2 Parallelism in Probabilistic Structural Mechanics	25
2.2.1 Parallelism in Probabilistic Computations.....	25
2.2.2 Parallelism in Structural Mechanics.....	29
3. Super Parallel Computational Program Method.....	33
3.1 Formula and Solution of Macro Probability Process.....	33
3.1.1 Various Terms of Correlative Probability.....	33
3.1.2 Formula and Solution of Monte-Carlo Simulation (MCS)	42
3.2 Formula and Solution of Micro Probability Process.....	44
3.2.1 HomogenizedMethod.....	44
3.2.2 Formulation of Probabilistic Structural Analysis Considering Indeterminacy of Micro Structure.....	45
3.3 Parallel Programming.....	48
3.3.1 Parallelism Library.....	48
3.3.2 Message Passing.....	49
4. Summary.....	58
Acknowledgements.....	58
References.....	59

1. はじめに

今日エンジニアリングセラミックスをはじめセラミックス系複合材料は、構造部材としての工業機器及び生活機材としての利用が顕著である。原子力分野での構造材としては、主として黒鉛がガス冷却炉で実用化しており、セラミックスに関しても耐高温性、低放射化等の観点から近い将来利用の拡大が期待されている。

しかし従来のセラミックス製機器の応力解析評価は、完全な連続体力学モデルによっている。この取り扱いでは、材料の機械的性質の製造条件（微細組織の違い）による変化に関して、実験主義的な理解には限度があり、また中性子照射による熱機械的特性変化の全般的理解を困難にしている。さらに破損条件を含む機械的性質の統計的変動、また部材の主な荷重形式が著しい非一様応力分布を発生させるものであるため、従来の決定論的健全性評価の判定基準が保守的になりがちであり、使用条件での構造物の性能及び経済性を損ねる結果となっている。

このような問題認識に立って、脆性材料特有の材料現象と構造安全評価を行う革新的方法論の開発が本研究の基本的な技術目標である。

そこでミクロ的損傷（非可逆的な微視き裂の安定成長）とマクロ的損傷（巨視的き裂の発生と伝播による非線形弹性挙動）の相互関係を考慮する材料変形・破壊モデルの確立と構造物の健全性及び信頼性評価（限界応力状態等の損傷指標値を決定論的ないし確率論的にも考慮する）のための有限要素法連続体力学計算の並列計算処理による高度化をはかる上で、以下に示す研究課題が考えられる。

A: 有限要素解析要素技術

A-1: メッシュ生成法

A-2: 領域分割法と共役勾配法

A-3: 局所ズームアップ法

B: 破壊力学（決定論的）計算要素技術

B-1: 2次元または3次元き裂に対する応力拡大係数計算

（進展き裂、応力状態変化の効果等を考慮）

B-2: き裂進展シミュレーション

（微細組織非相似性、R曲線挙動、多軸応力場の効果等を考慮）

C: 確率論的微視破壊力学計算要素技術

C-1: 確率論的破壊基準（き裂寸法統計、多軸応力場、非一様応力の効果等を考慮）

C-2: 確率論的き裂伝播（モンテカルロ並列処理）解析

D: 確率計算要素技術（並列処理）

D-1: 乱数生成、ランダムサンプリング

D-2: 損傷評価指標（応答関数）の1次、2次モーメント

E: ミクロ／マクロ連成計算要素技術

E-1: 確率論的構成関係

(等価き裂の統計分布または連続体損傷関数法)

E-2: 時間依存ミクロ／マクロ特性改編

(領域改編及び有限要素改編)

F: オブジェクト指向プログラム要素技術

F-1: オブジェクトマネージメント

F-2: 計算要素技術のオブジェクト化

そこで本論文では、上記の計算力学に係わる計算プログラムの基本設計のうち、C～E の項目に関する確率論的構造力学の原理、定式の基礎的事項及び並列処理計算のプログラミング手法の概要について調査した結果について述べるものである。

2. 確率論的構造力学解析における並列計算プログラミングの概要⁽¹⁾

2.1 構造信頼性計算の定式と近似法

確率論的構造力学の問題では、構造の挙動、たとえば損傷度の累積確率分布を求めることが必要である。一般的に言えば、ある変数ベクトル X に対し、構造挙動 w がその関数 $g(x)$ である場合に、 w の累積確率分布を求める問題となる。

この構造挙動 w の関数 $g(x)$ が性能関数と呼ばれている。確率論的構造力学において、性能関数を求めるには構造問題の解析が必要不可欠となる。

変数ベクトル X は、問題のすべての変数を意味しているが、構造部材の寸法、材料特性データ、境界条件および荷重などがその例である。それらは、それぞれ確率変数である場合と確定変数である場合がある。

構造の挙動の累積確率分布は次式より求められる：

$$P[g(x) \leq y] \quad (2.1)$$

ここで P は確率を表わしている。

その確率分布を求めるには、さまざまな手法が提案されているが、すべてが次の 2 種類の基本手法に基づいている：

- ・偏微分解析法 (partial derivative analysis)
- ・擬似無作為抽出法 (pseudo-random sampling)

偏微分解析法には、1 次近似信頼性法 (FORM: First Order Reliability Methods)、2 次近似信頼性法 (SORM: Second Order Reliability Methods)、1 次近似 2 次モーメント法および 2 次近似 2 次モーメント法などがある。

擬似無作為抽出法には、モンテカルロシミュレーション (MCS: Monte-Carlo Simulation)、実験計画法などがある。

ここでは、1 次近似信頼性法 (FORM) に基づいた確率論的有限要素法 (PFEM: Probabilistic Finite Element Method) および確率論的境界要素法 (SBEM: Stochastic Boundary Element Method) について説明する。次の章で、モンテカルロシミュレーション (MCS) について説明する。

2.1.1 確率論的有限要素法 (PFEM)

(1) 線形問題の PFEM

ここでは、線形問題に適用するための、2 次摂動法を用いた確率論的有限要素法について説明する。2 次摂動法を用いることにより、確率線形方程式は、有限個数の 2 次までの決定論的な方程式に置き換えることができる。

单一場の変分原理または Galerkin の式を使うことにより、次に示す離散化線形運動方程式が得られる。

$$M\ddot{a}(b,t) + K(b)\dot{d}(b,t) = f(b,t) \quad (2.2)$$

ここで、 M および $K(b)$ はそれぞれ ($neq \times neq$) の質量および剛性マトリックス、 $\ddot{a}(b,t)$ 、 $\dot{d}(b,t)$ および $f(b,t)$ はそれぞれ ($neq \times neq$) の節点における加速度、変位および力ベクトル、 neq は方程式の数、 b は q 次元離散確率変数ベクトル、すなわち $b_i = b_i(x_i)$ であり、 x_i は空間座標ベクトルである。

質量は普通決定的な変数とみなされるが、剛性および外力の確率分布は一般化した共分散マトリックス $\{\text{Cov}(b_i, b_j), i, j=1, \dots, q\}$ により表わされる。ここで、剛性マトリックスが一般化勾配マトリックス $B(x)$ と材料挙動マトリックス $D(b, x)$ によって表わされることに注目する必要がある。

この式において、確率変数 b は、確率的な材料特性（たとえばヤング率）および確率的な荷重を表現することができる。

確率変数ベクトル b の平均値 \bar{b} に関するすべての確率関数を、テイラー級数により展開し、2 次までの項のみを残す。それが 2 次モーメント解析の確率論的有限要素法への応用の内容である。

具体的には、ある小さなパラメータ ξ に対し、確率変位関数 $d(b, t)$ は、2 次摂動法により、 b に関して次のように展開される：

$$d(b, t) = \bar{d}(t) + \xi \sum_{i=1}^q \bar{d}_{b_i}(t) \Delta b_i + \frac{1}{2} \xi^2 \sum_{i=1, j=1}^q \bar{d}_{b_i b_j}(t) \Delta b_i \Delta b_j \quad (2.3)$$

ここで、 $\bar{d}(t)$ 、 $\bar{d}_{b_i}(t)$ および $\bar{d}_{b_i b_j}(t)$ はそれぞれ平均変位 \bar{b} において、 b_i に対する変位の 1 次変分、および b_i と b_j に対する変位の 2 次変分である。また、 Δb_i は b_i の \bar{b}_i に対する 1 次変分である。

同じように、 $K(b)$ 、 $a(b, t)$ および $f(b, t)$ もそれぞれ 2 次摂動法により、 \bar{b}_i に関して展開される。確率関数 $d(b, t)$ 、 $K(b)$ 、 $a(b, t)$ および $f(b, t)$ の 2 次摂動式を式(2-2)に代入し、 ξ に関する 2 次までの項を集めると、次のような式が得られる：

定数項の式：

$$M\bar{a}(t) + \bar{K}\bar{d}(t) = \bar{f}(t) \quad (2.4)$$

1 次の式（各 Δb_i , $i=1, \dots, q$ について）：

$$M\bar{a}_{b_i}(t) + \bar{K}\bar{b}_{b_i}(t) = \bar{F}_{b_i}(\bar{d}, t) \quad (2.5)$$

ここで、

$$\overline{F}_{b_i}(\bar{d}, t) = \overline{f}_{b_i}(t) - \overline{K}_{b_i} \bar{d}(t) \quad (2.6)$$

2次の式 (i および j に対して 1 から q まで加算する)

$$M\overline{a}_2(t) + \overline{K}\overline{d}_2(t) = \overline{F}_2(\bar{d}, t) \quad (2.7)$$

ただし、

$$\overline{F}_2(\bar{d}, t) = \sum_{i,j=1}^q \left\{ \frac{1}{2} \overline{f}_{b_i b_j}(t) - \frac{1}{2} \overline{K}_{b_i b_j} \bar{d}(t) - \overline{K}_{b_i} \bar{d}_{b_j}(t) \right\} Cov(b_i, b_j) \quad (2.8)$$

$$\overline{a}_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q \overline{a}_{b_i b_j}(t) Cov(b_i, b_j) \quad (2.9)$$

$$\overline{d}_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q \overline{d}_{b_i b_j}(t) Cov(b_i, b_j) \quad (2.10)$$

式(2.4)から(2.10)までは、実質的に、剛性マトリックスをただ一つ作ればいいので、並列的に処理することができる。

(2) 非線形問題の PFEM

平衡方程式、領域および境界条件などに不確定性のある問題を扱うためには、3 領域の Hu-Washizu の変分原理を用いる PFEM を開発する。Hu-Washizu の変分原理を用いるには、ロッキング現象を取り除けることと、アワーグラスモードを抑えることといった別の利点もある。

適合式の 3 個の定常条件の解、構成式および平衡条件から、変位、ひずみおよび応力が得られる。それから、変位、ひずみおよび応力の期待値、自己共分散および相関性などといった統計量が求められる。

マトリックス表記法を用いると、ここで用いる非線形問題のための Hu-Washizu の変分原理 (HWVP: Hu-Washizu Variational Principle) は次のように書くことができる：

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \epsilon^T (\Psi - \sigma) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \sigma^T (\epsilon - \nabla u) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \delta (\nabla u)^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T F d\Omega - \int_{\partial\Omega_h} \delta u^T h d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし、 ϵ 、 σ および u はそれぞれひずみ、第一 Piola-Kirchhoff 応力および変位を表わす、独立的な確率場変数であり、 Ψ は変形勾配のある非線形関数であり、上付き文字 T は転置を表

わしている。

式(2.11)において、 Ω 、 $\partial\Omega_h$ 、 F 、 h および ∇u はそれぞれ領域、トラクション境界、体積力ベクトル、規定トラクションベクトルおよび変位勾配の非対称部分を表わしている。 δ は仮想量を意味している。

式(2.11)における面積分および体積積分は、パラメータ表示によって、それぞれ次のように表わすことができる：

$$d\Gamma = J_s dA \quad \text{および} \quad d\Omega = J_v dR \quad (2.12)$$

ただし、 J_s および J_v はそれぞれ面積および体積のヤコビアンを表わし、 R および A はそれぞれ参照領域および境界を示す。確率的な領域および境界は勾配因子(Gradient operator)およびヤコビアンの不確定さによって式に組み込まれている。

2 次摂動法の HWVP への応用は、確率場 $b(x)$ の平均値 $\bar{b}(x)$ に関するすべての確率関数を展開し、2 次までの項のみを残すことである。

すなわち、ある小さなパラメータ ξ (スケールは $b(x)$ の不確定さと同じ) に対し、確率関数 Ψ は、参照領域において、ある点 x で b に関して次のように展開される：

$$\Psi = \Psi^0 + \xi(\Psi' + C^0 \varepsilon') + \xi^2(\Psi'' + C' \varepsilon' + C^0 \varepsilon'') \quad (2.13)$$

ここで、上付きのゼロ、 (\cdot) および $(\cdot)''$ はそれぞれ b においての、確率関数の値、変分による 1 次変分および 2 次変分である。

式(2.13)の第 1 弾性テンソル C は次式で表わせる：

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial G_{ij} \partial G_{kl}} \quad (2.14)$$

ただし、 W はひずみエネルギー密度関数、 G は変形勾配である。

同じように、そのほかの確率関数 ε 、 σ 、 F 、 h 、 J_s 、 J_v 、 ∇u および $\delta(\nabla u)$ もそれぞれ 2 次摂動法により、展開される。これら確率関数の 2 次摂動式をすべて式(2.11)に代入し、 ξ に関する 2 次までの項を集めると、次のような非線形確率論的 HWVP の式が得られる：

定数項の変分原理：

$$\begin{aligned} & \int_R \delta \varepsilon^T (\Psi^0 - \sigma^0) J_v^0 dR - \int_R \delta \sigma^T (\varepsilon^0 - \nabla^0 u^0) J_v^0 dR \\ & + \int_R \delta (\nabla^0 u)^T \sigma^0 J_v^0 dR - \int_R \delta u^T F^0 J_v^0 dR - \int_{\partial R_h} \delta u^T h^0 J_s^0 dA = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

1次の変分原理（ ξ の項）：

$$\begin{aligned} & \int_R \delta \varepsilon^T \left[(C^0 \varepsilon' - \sigma') J_v^0 + \Psi' J_v^0 + (\Psi^0 - \sigma^0) J_v' \right] dR \\ & - \int_R \delta \sigma^T \left[(\varepsilon' - \nabla^0 u' - \nabla' u^0)^T J_v^0 + (\varepsilon^0 - \nabla^0 u^0) J_v' \right] dR \\ & + \int_R \left\{ [\delta(\nabla^0 u)^T \sigma' + \delta(\nabla' u)^T \sigma^0] J_v^0 + \delta(\nabla^0 u)^T \sigma^0 J_v' \right\} dR \\ & - \int_R \delta u^T (F' J_v^0 + F^0 J_v') dR - \int_{\partial R_h} \delta u^T (h' J_s^0 + h^0 J_s') dA = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

2次の変分原理（ ξ^2 の項）

$$\begin{aligned} & \int_R \delta \varepsilon^T \left[(C^0 \varepsilon'' - \sigma'') J_v^0 + (C' \varepsilon' + \Psi'') J_v^0 + (C^0 \varepsilon' + \Psi' - \sigma') J_v' + (\Psi^0 - \sigma^0) J_v'' \right] dR \\ & - \int_R \delta \sigma^T \left[(\varepsilon'' - \nabla^0 u'' - \nabla' u' - \nabla'' u^0)^T J_v^0 + (\varepsilon' - \nabla^0 u' - \nabla' u^0) J_v' + (\varepsilon^0 - \nabla^0 u^0) J_v'' \right] dR \\ & + \int_R \left\{ [\delta(\nabla^0 u)^T \sigma'' + \delta(\nabla' u)^T \sigma' + \delta(\nabla'' u)^T \sigma^0] J_v^0 \right. \\ & \left. + [\delta(\nabla^0 u)^T \sigma' + \delta(\nabla' u)^T \sigma^0] J_v' + \delta(\nabla^0 u)^T \sigma^0 J_v'' \right\} dR \\ & - \int_R \delta u^T (F'' J_v^0 + F' J_v' + F^0 J_v'') dR \\ & - \int_{\partial R_h} \delta u^T (h'' J_s^0 + h' J_s' + h^0 J_s'') dA = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

ここで注目すべきな点は、式(2.16)および(2.17)において（'）および（''）が付いているすべての確率関数は、一般的に、空間期待値および自己共分散を介して記述されていることである。したがって、変位場の通常の有限要素近似に加えて、確率場も q 個の形状関数で離散化される。有限要素近似と一致させるため、また離散化される確率場 $b(x)$ の精度を維持するためには、一般的に $b(x)$ および x の関数である確率関数 Ψ 、 C 、 F 、 h 、 J_s および J_v を、まず確率場と同じ q 個の形状関数で離散化させる。

たとえば、 C の有限要素近似は次のように与えられる：

$$C = C^0 + \xi C' + \xi^2 C'' \quad (2.18)$$

または

$$C = \sum_{l=1}^q \Phi_l(X) \left(C_l^0 + \xi C_l' + \xi^2 C_l'' \right) \quad (2.19)$$

ただし、 $\Phi_I(x)$ は q 個の形状関数、 C_I^0 は b で計算された C の第 I 番目節点の値、 C'_I は変分 Δb_i に起因する $C(x_i, b)$ の 1 次変分、また C''_I はその 2 次変分を表わしている。そのうち C'_I と C''_I は確率変数 $b(x)$ に関し展開され、それぞれ次のようになる：

$$C'_I = \sum_{i=1}^q \left(C'_I \right)_i \Delta b_i \quad (2.20)$$

$$C''_I = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^q \left(C''_I \right)_{ij} \Delta b_i \Delta b_j \quad (2.21)$$

この “1/2” という係数は、2 次テーラー級数展開と合わせるために入れられている。節点値 $(C'_I)_i$ および $(C''_I)_{ij}$ は偏微分するか、実際のデータに最小二乗法を適用することにより求められる。

ほかの確率関数についても、同じような定義が適用される。

与えられたすべての確率関数の近似を、定常、1 次および 2 次の確率論的 HWVP 式（式 (2.15)~(2.17)）に代入し、3 つの静定条件（ひずみ～変位関係、応力～ひずみ関係、平衡方程式）を用いれば、定常、1 次および 2 次方程式が得られる。定常方程式は繰り返し計算を必要とするが、1 次および 2 次方程式は線形である。定常、1 次および 2 次方程式の解が得られれば、変位、ひずみおよび応力の期待値および自己共分散が求められる。

固有値問題の手法を応用して確率変数を非相関正規分布に変換することにより、計算効率を向上させることができる。

(3) 脆性破壊および疲労の信頼性解析への PFEM の応用

欠陥を含む構造の信頼性解析は大きく分けて、次のような 2 種類の問題に分類できる：

- ・ 脆性材料の問題。これは材質の中に位置および方向が不確定的な欠陥を含む構造で、欠陥の存在に対する信頼性問題である。
- ・ 延性材料の問題。この問題は致命的な欠陥の進展による構造の破断である。

ここでは、脆性破壊および疲労き裂進展に対する信頼性を求めるために、確率論的有限要素法に 1 次近似信頼性手法を組み合わせた方法について述べる。まず、信頼性解析について簡単に述べた後、脆性破壊および疲労き裂進展問題に対するそれぞれの応用について説明する。

(a) 信頼性解析の手法

信頼性解析は、荷重、材料特性および幾何形状の不確定的な構造がある限界状態基準を満たすかどうかを判定するために使われる。

ここで、荷重、材料特性、部材の幾何形状およびき裂形状などの不確定さを q 次元の確率変数ベクトル $b = [b_1, \dots, b_q]^T$ で表わす。ある確率変数の信頼性問題は、性能関数 $g(b)$ によって記述さ

れる。性能関数 $g(b)$ は、構造システムが設計通りの機能を発揮する能力の連続統計測定である。システムの 3 つの状態、いわば限界状態面、破損状態および安全状態は、それぞれ以下のように定義される：

$$g(b) = 0, \quad g(b) < 0 \quad \text{及び} \quad g(b) > 0 \quad (2.22)$$

破損する確率は次に示す：

$$P_f = \int_{g(b) \leq 0} f_B(b) db \quad (2.23)$$

ただし、 $f_B(b)$ は b の多变量密度関数である。

式(2.23)には、2 つの難点がある。まず積分の領域 ($g(b) \leq 0$) が確率ベクトル b の陰関数である。次に確率変数の数が大きくなればなるほど、多重積分の標準的な数値積分が、極めて複雑になる。

式(2.23)を解くには、2 種類の方法——モンテカルロ法と 1 次近似または 2 次近似信頼性法のような破損面近似法が良く使われてきた。モンテカルロ法はごく一般的に使われているが、信頼性工学の主たる対象である小破損確率問題に対しては、非常に時間および費用のかかる手法である。1 次近似または 2 次近似信頼性法は、極端な破損確率分布（たとえば 0.0001 あるいは 0.9999）の場合には、より正確でかつ効率的であるが、実施がより複雑である。

1 次近似信頼性法では、標準正規空間において、限界状態の面は設計点での正接超平面によって表わされる。2 次近似信頼性法では、標準正規空間において、限界状態の面は設計点で正接する 2 次曲面になる。

標準正規空間の特性（軸対称でありかつ指數的な減衰特性）を利用するため、元の確率変数 b を一連の非相関な標準正規変数 r に写像するための変換を導入する。 r 空間においては、式(2.23)は次のようになる：

$$P_f = \int_{\bar{g}(b) \leq 0} (2\pi)^{-\frac{q}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} r^T r\right) dr \quad (2.24)$$

ただし、 $(\cdot)^T$ はベクトルまたはマトリックスの転置、 $\bar{g}(r)$ ($=g(b(r))$) は変換された r 空間ににおける性能関数である。

1 次近似信頼性法は式(2.24)を次のように近似的に解く：反復アルゴリズムにより、原点への距離が最小となる限界状態面上にある点 r^* を見つける。次に、設計点 r^* における限界状態面を次の式で与えられる超接平面に置き換える：

$$\tilde{g}(r) = \frac{\partial \tilde{g}(r)}{\partial r_i} (r_i - r_i^*) \quad (2.25)$$

この結果、式(2.24)の 1 次近似は次式で与えられる：

$$P_{f1} = \int_{\frac{\partial \tilde{g}(r)}{\partial r_i} (r_i - r_i^*) \leq 0} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} r' r\right) dr = \Phi(-\beta) \quad (2.26)$$

ここでの信頼性指標 β は次のように定義されている：

$$\beta = (r^{*'} r^*)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

ここでの $\Phi()$ は標準正規累積確率である。

破損面上の最も確率の高い点(r^*)を決定するステップは、信頼性解析における最も重要な事項である。一般的に、繰り返しおよび最適化の方法を作り、性能関数の勾配を計算する必要がある。

一つの解法としては、 r 空間において、次に示す最適化問題を解くことにより信頼性指標 β を求める：

$$\beta = \min(r^T r)^{\frac{1}{2}}, \quad g(r) = 0 \quad \text{の条件において} \quad (2.28)$$

最適化問題は、HL-RF 法、勾配投影法および改良 HL-RF 法など、いかなる一般非線形最適化アルゴリズムを用いても解くことができる。

破損面の第 2 次ティラー級数をベースにした 2 次近似信頼性法は Fiessler などによって開発されている。

(b) 脆性破壊問題の信頼性解析

き裂先端における応力特異性をモデル化するために、強化要素 (Enriched Element) が使われている。そのほかに、J-積分法およびハイブリッド要素などもある。強化要素法には、節点変位とともに、モード I および II の応力拡大係数 K_I および K_{II} が直接求められるという利点がある。これにより 1 次信頼性解析に必要な感度式の開発が簡単になる。

き裂先端を取り込む強化要素および連続の残り部分をモデル化する一般要素を組み合わせることにより、全域の有限要素方程式が得られる。変位方程式の数にモード I とモード II の応力拡大係数を加えた全域系は、[neq+2] 個の方程式からなる：

$$K(b)\delta(b) = f(b) \quad (2.29)$$

ただし、一般化変位 δ と一般化外力ベクトル f はそれぞれ次の通りである：

$$\delta(b) = \begin{Bmatrix} d(b) \\ \kappa(b) \end{Bmatrix} \quad \text{及び} \quad f(b) = \begin{Bmatrix} h(b) \\ \vartheta(b) \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

全域的な剛性マトリックスは、次式の通り：

$$K(b) = \begin{bmatrix} R(b) & C(b) \\ C(b)^T & E(b) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

式(2.29)~(2.31)では、 d および h はそれぞれ通常の変位および外力ベクトル、 R 、 E および C はそれぞれ、 $[neq \times neq]$ の通常の剛性マトリックス、 $[2 \times 2]$ の強化要素の剛性マトリックス、および $[neq \times 2]$ の一般要素と強化要素からなる組み合わせ剛性マトリックスである。式(2.30)のそのほかのサブマトリックスは次の通り：

$$K(b) = \begin{Bmatrix} K_I(b) \\ K_H(b) \end{Bmatrix} \quad \text{及び} \quad \vartheta(b) = \begin{Bmatrix} f_I(b) \\ f_H(b) \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

組み合わせモードの疲労基準に合わせるため、ここでは最大主応力基準を適用して相当するモード I の応力拡大係数を求める。したがって、組み合わせモードの性能関数は次のようになる：

$$g(b) = K_c - K_{eq} \quad (2.33)$$

この式は、相当モード I の応力拡大係数 K_{eq} がしきい値 K_c を超えると、破壊が起きることを意味している。周応力が最大となるき裂進展の方向は、次に示す：

$$Z(K, \theta) = \theta^T K = 0 \quad (2.34)$$

ただし、

$$\theta = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 3\cos\theta - 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

式(2.35)で、 θ は現在のき裂ラインより測定される。相当モード I の応力拡大係数と実際の応力拡大係数との関係は次のようになる：

$$\mathbf{K}_{eq} = \Phi^T \mathbf{K} \quad (2.36)$$

ただし、ここで

$$\Phi = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -3\sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

また θ は式(2.35)により求められる。モード I またはモード II のどちらかしかない場合には、式(2.33)は次のように書き換えられる：

$$g(b) = \mathbf{K}_c - \mathbf{K}_i, \quad i = I, II \quad (2.38)$$

ここの \mathbf{K}_c は次式に示す：

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{lc} \text{ (モード I)} \text{ または } \mathbf{K}_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{K}_{lc} \text{ (モード II)} \quad (2.39)$$

ただし、 K_{lc} は破壊非性である。

FORM で破壊の 1 次近似確率を計算するための信頼性指数は、制約数 1 (限界境界条件) の最適化問題を解くことによって求められる。ここからは、脆性破壊問題における最適化問題について述べる。

非線形計画法問題は、独立標準正規空間において、原点から限界面の距離を最小にする相関確率変数 $b = [b_1, \dots, b_q]^T$ および一般化変位 $\delta^T = [d^T, k^T]$ を決定することからなる。最小にするための係数が信頼性指数 β である (式(2.28)参照)。

ここでの最適化は、次に示す等式制約および不等式制約に従う：

$$K(b)\delta(b) = f(b) \quad (2.40)$$

$$g(b) \leq 0 \quad (2.41)$$

ここの等式制約は平衡方程式、不等式制約は最適化問題において、性能関数が限界状態面にあるという制約条件である。1 次近似信頼性法で破壊の 1 次近似確率を計算するための信頼性指数の決定は、臨界境界条件が一つである最適化問題を解くことになる。平衡方程式などの制約を定式に取り入れるために、ラグランジュの乗数法を用いる。

式(2.40)、(2.41)は、次に示す独立変数 b 、 δ 、 μ 、 λ および α のラグランジュ関数 L を確定することにより、Kuhn-Tucker 問題に変換される。

$$L(b, \delta, \mu, \lambda, \alpha) = r^T r + \mu^T [f - K\delta] + \lambda [g + \alpha^2] \quad (2.42)$$

ただし、 μ は平衡のためのラグランジュ乗数、 $\lambda \geq 0$ は不等式制約のためのラグランジュ乗数、 α は $g \leq 0$ を確保するためのスラック(slack)変数である。

式(2.42)を最小にするための、Kuhn-Tucker の必要条件は、独立変数 b 、 δ 、 μ 、 λ および α に関するラグランジュ関数の偏微分を 0 にすることで得られる。すなわち、

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial[r^T r]}{\partial b} + \mu^T \left\{ \frac{\partial}{\partial b} [f - K\delta] \right\} + \lambda \frac{\partial g}{\partial b} = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = -\mu^T K + \lambda \frac{\partial g}{\partial \delta} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = f - K\delta = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g + \alpha^2 = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 2\lambda\alpha = 0 \quad (2.47)$$

最適化を行うには、独立変数 b 、 δ 、 μ 、 $\lambda \geq 0$ および α に関する式(2.43)~(2.47)のそれぞれの解が必要である。そのなかで、式(2.45)は単純な平衡方程式であり、式(2.46)と(2.47)ではスラック変数 α を消去して単純化することができる。

ラグランジュ関数において、 δ と b は独立変数であるから（式(2.42)参照）、式(2.43)において第 2 項の b に関する偏微分関数は次のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial b} = [f - K\delta] = \frac{\partial f}{\partial b} - \frac{\partial K}{\partial b} \delta \quad (2.48)$$

この式の右辺を簡単にするため、第 1 次確率論的有限要素法の式を用いる。すなわち、

$$K \frac{\partial \delta}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial b} - \frac{\partial K}{\partial b} \delta \quad (2.49)$$

式(2.49)を式(2.48)に代入すると、次式が得られる：

$$\frac{\partial}{\partial b}[f - K\delta] = K \frac{\partial \delta}{\partial b} \quad (2.50)$$

この式の両辺に μ を乗じ、そして右辺に式(2.44)を代入すれば、次式が得られる：

$$\mu^T \frac{\partial}{\partial b}[f - K\delta] = \lambda \frac{\partial g}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial b} \quad (2.51)$$

この式では、 g が K のみの関数となっているため、さらに次のように書き直す：

$$\mu^T \frac{\partial}{\partial b}[f - K\delta] = \lambda \frac{\partial g}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial b} \quad (2.52)$$

式(2.52)を式(2.43)に代入すれば、最適化問題は最終的に次のようになる：

$$L^\beta + \lambda L^g = 0 \quad (2.53)$$

ただし、 $\lambda \geq 0$ 、かつ

$$L^g = \frac{\partial g}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial b} \quad (2.54)$$

$$L^\beta = \frac{\partial}{\partial b}[r^T r] \quad (2.55)$$

また、式(2.55)において、 $\partial[r^T r]/\partial b$ は、確率変数が正規分布か否かによって、それぞれ陽的にまたは有限差分法により計算される。応力拡大係数の感度、すなわち $\partial K/\partial b$ を解析する場合には、前述の確率論的有限要素法で実施することができる。

(c) 疲労き裂進展問題の信頼性解析

疲労き裂進展の問題も、制約最適化問題を解くことにより、1 次近似 2 次モーメント信頼性法 (FORM) を適用することができる。

疲労き裂進展に関する最も一般的な法則は、Paris と Erdogan⁽²⁾によって提案された、疲労寿命 T の形式で表わすモデルである：

$$T = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{D(\Delta K_{eq})^n} \quad (2.56)$$

ただし、 a_i と a_f はそれぞれき裂の初期長さと最終長さを表わし、 da は確率き裂経路を表わしている。D と n は材料パラメータであるが、荷重および環境効果の影響を受けることがある。 $\Delta K_{eq}(a)$ は相当モード I の応力拡大係数範囲である：

$$\Delta K_{eq} = K_{eq}^{\max} - K_{eq}^{\min} \quad (2.57)$$

この K_{eq}^{\min} と K_{eq}^{\max} はそれぞれ、繰り返し応力の最小値および最大値に対応する相当モード I の最小応力拡大係数と最大応力拡大係数である。相当モード I の最小応力拡大係数がゼロである場合、次式が得られる：

$$\Delta K_{eq} = K_{eq}^{\max} \equiv K_{eq} \quad (2.58)$$

き裂の方向は確率関数であり、材料特性、荷重履歴およびき裂経路に依存すると考えられる。したがって、各ステップごとに、この確率関数に反映されているき裂先端に関する統計量に、以前のき裂の長さおよび方向を組み合わせた上で、き裂の新たな形状および寸法を決めることになる。最大周方向応力基準に基づき、式(2.34)のき裂進展方向 $Z(k, \theta)$ も用いられる。脆性破壊の場合と異なり、疲労き裂進展の場合の性能関数は次式で与えられる：

$$g = T - T_s \quad (2.59)$$

ただし、 T_s は構造部材の供用寿命である。すなわち、疲労寿命が期待される供用寿命を下回る時、構造部材は破損する。性能関数はき裂長さの限界値によって表わすことができる。

1 次信頼性法による信頼性指数の計算は、制約最適化問題を解くことになるが、疲労き裂進展の最適化問題を記述するために、き裂方向の式 (2.34) をき裂経路に沿って、"npts" 個の点に離散化する。それぞれの離散点において、き裂方向は次式で与えられる：

$$Z_k = \theta_k^T K_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, npts \quad (2.60)$$

ここで、 K_k および θ_k はそれぞれ、 $\xi = \xi_k, k = 1, \dots, npts$ において計算された K および θ である。したがって、それぞれの離散点において、き裂経路が再計算され、き裂は次の離散点に向けて進展していく。

それぞれのき裂経路の離散点において、等式制約と不等式制約の両方が満たさなければならぬ。また、き裂方向の式(2.60)はラグランジュ関数に含まれていなければならない。独立変数

$b, \mu_1, \dots, \mu_{npts}, \delta_1, \dots, \delta_{npts}, \varphi_1, \dots, \varphi_{npts}, \theta_1, \dots, \theta_{npts}, \lambda$ および α に関するラグランジュ関数を定義すると、次式のようになる：

$$\begin{aligned} L(b, \mu_i, \delta_i, \varphi_i, \theta_i, \lambda, \alpha) \\ = r^T r + \sum_{i=1}^{npts} \mu_i^T [f_i - K_i \delta_i] + \sum_{k=1}^{npts} \varphi_k Z_k + \lambda \{T - T_s + \alpha^2\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

ここで、 μ_i は平衡のためのラグランジュ乗数、 φ_k はき裂方向式のためのラグランジュ乗数、 α は、 $g \leq 0$ および $\lambda \geq 0$ が不等式制約のためのラグランジュ乗数であることを確保するために、導入されたスラック変数である。

式(2.61)の必要条件、すなわち各独立変数に対する偏微分から、次の各式が得られる：

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} [r^T r] + \sum_{i=1}^{npts} \mu_i^T \frac{\partial}{\partial b} [f_i - K_i \delta_i] + \sum_{k=1}^{npts} \varphi_k (Z_k)_{,b} + \lambda T_{,b} = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i} = f_i - K_i \delta_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, npts, \quad i \text{ に対して加算しない} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_i} = -\mu_i^T K_i + \sum_{k=1}^{npts} \varphi_k (Z_k)_{,\delta_i} + \lambda T_{,\delta_i} = 0, \quad i=1, \dots, npts, \quad i \text{ に対して加算しない} \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = T - T_s + \alpha^2 = 0 \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 2\lambda\alpha = 0 \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = Z_i = 0 \quad i=1, \dots, npts, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = -\sum_{k=1}^{npts} \mu_k^T \frac{\partial K_k}{\partial \theta_i} \delta_k + \sum_{k=1}^{npts} \varphi_k (Z_k)_{,\theta_i} + \lambda T_{,\theta_i} = 0 \\ i=1, \dots, npts \end{aligned} \quad (2.68)$$

ここで、 $T_{,b}$ 、 $T_{,\delta_i}$ および $T_{,\theta_i}$ は、それぞれ、独立変数 b 、 δ_i および θ_i に関する、疲労寿命 T の偏微分である。 $(Z_k)_{,b}$ 、 $(Z_k)_{,\delta_i}$ および $(Z_k)_{,\theta_i}$ は、それぞれ、独立変数 b 、 δ_i および θ_i に関する、

き裂方向式 Z_k の偏微分である。

最適化するには、式(2.63)~(2.68)の b 、 μ_i 、 δ_i 、 α 、 $\lambda \geq 0$ 、 Φ_i および θ_i に関する解が必要である。式(2.67)は各離散点でのき裂方向であり、式(2.65)および(2.66)はスラック変数 α を消去することにより、 $\lambda + g = 0$ および $g \leq 0$ となる。よって、 $\lambda \geq 0$ が得られる。

ラグランジュ関数において δ_i および b は独立変数である（式(2.61)参照）ことから、式(2.62)の相関確率変数に関する平衡式の偏微分関数は、次のように表わされる：

$$\frac{\partial}{\partial b} [f_i - K_i \delta_i] = \frac{\partial f_i}{\partial b} - \frac{\partial K_i}{\partial b} \delta_i, \quad i=1 \dots, npts, \\ i \text{ に対して加算しない} \quad (2.69)$$

1次確率論的有限要素法方程式（2.1 参照）を用いて、この式の右辺が得られる：

$$K_i \frac{\partial \delta_i}{\partial b} = \frac{\partial f_i}{\partial b} - \frac{\partial K_i}{\partial b} \delta_i, \quad i=1 \dots, npts, \\ i \text{ に対して加算しない} \quad (2.70)$$

この式を式(2.69)に代入すると、次式が得られる：

$$\frac{\partial}{\partial b} [f_i - K_i \delta_i] = K_i \frac{\partial \delta_i}{\partial b}, \quad i=1 \dots, npts, \\ i \text{ に対して加算しない} \quad (2.71)$$

δ_i および θ_i がラグランジュ関数において独立変数であるため、式(2.64)および式(2.68)はそれぞれ次のようになる：

$$-\mu_i^T K_i + \varphi_i(Z_i)_{\delta_i} + \lambda T_{\delta_i} = 0, \quad i=1 \dots, npts, \\ i \text{ に対して加算しない} \quad (2.72)$$

$$-\mu_i^T \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i + \varphi_i(Z_i)_{\theta_i} + \lambda T_{\theta_i} = 0, \quad i=1 \dots, npts, \\ i \text{ に対して加算しない} \quad (2.73)$$

式(2.71)の両辺に μ_i^T をかけ、式(2.72)~(2.73)に代入すると、次式となる：

$$\mu_i^T \frac{\partial}{\partial b} [f_i - K_i \delta_i] = \lambda \left\{ \frac{T_{,\delta_i} K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i - T_{,\theta_i}}{(Z_i)_{,\theta_i} - (Z_i)_{,\delta_i} K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i} (Z_i)_{,\delta_i} + T_{,\delta_i} \right\} \frac{\partial \delta_i}{\partial b}$$

$i=1, \dots, npts,$ i に対して加算しない (2.74)

さらに T および Z_i が k_i , $i = 1, \dots, npts$ のみの関数であるので、次式となる：

$$\mu_i^T \frac{\partial}{\partial b} [f_i - K_i \delta_i] = \lambda \left\{ \frac{T_{,\delta_i} K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i - T_{,\theta_i}}{(Z_i)_{,\theta_i} - (Z_i)_{,\delta_i} K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i} (Z_i)_{,k_i} + T_{,k_i} \right\} \frac{\partial k_i}{\partial b}$$

$i=1, \dots, npts,$ i に対して加算しない (2.75)

式(2.73)および(2.75)を式(2.62)に代入すると、疲労き裂進展信頼性問題の最適化の最終形式は、次のように得られる：

$$L^\beta + \lambda L^g = 0 \quad (2.76)$$

ただし、

$$L^\beta = \frac{\partial}{\partial b} [r^T r] \quad (2.77)$$

$$L^g = \sum_{i=1}^{npts} \left\{ \frac{T_{,\delta_i} K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i - T_{,\theta_i}}{(Z_i)_{,\theta_i} - (Z_i)_{,\delta_i} K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i} (Z_i)_{,k_i} + T_{,k_i} \right\} \frac{\partial k_i}{\partial b}$$

$$+ \sum_{i=1}^{npts} \left\{ \frac{T_{,\delta_i} K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i - T_{,\theta_i}}{(Z_i)_{,\theta_i} - (Z_i)_{,\delta_i} K_i^{-1} \frac{\partial K_i}{\partial \theta_i} \delta_i} (Z_i)_b \right\} T_b \quad (2.78)$$

ここで、 $T_{,b}$ 、 $T_{,ki}$ 、 $T_{,\theta i}$ 、 $T_{,\delta i}$ 、 $(Z_i)_b$ 、 $(Z_i)_{,ki}$ 、 $(Z_i)_{,\theta i}$ 、 $(Z_i)_{,\delta i}$ は陽的に求められている⁽³⁾。応力拡大係数の感度 $\partial K_i / \partial b$ も確率論的有限要素法によって計算される。

2.1.2 確率論的境界要素法 (SBEM)

1次信頼性法に混合境界積分方程式法 (Mixed BIEs: Boundary Integral Equations) を組み合わせた確率論的境界要素法 (SBEM) が、曲線的疲労き裂成長の信頼性解析に適用される。

曲線的疲労き裂の経路は、主にセラミック、合成材料、あるいは多結晶合金などの新素材に特有の、非均質性に基づくものである。空隙、固形不純物および変形不純物などの微小欠陥が存在すると、成長しつつあるき裂先端での応力場が乱れ、き裂経路が曲がることになる。移動して行くき裂先端の特異性をモデル化するため、特異要素または強化要素とメッシュ再分割法と組み合わせた方法が開発されている⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾。しかし、疲労き裂と微小欠陥との弾性干渉を扱う複数疲労き裂、メッシュ再分割法はきわめて複雑である。対して、境界積分方程式法 (BIEs) は、き裂成長方向に沿って数少ない要素の追加により、き裂の延びをモデル化するため、メッシュ再分割の必要がほとんどの場合なくなる。

共面き裂がある場合、通常の変位 BIE 法は退化する現象がある。一方、構造の境界と成長するき裂が相互に結合または干渉するため、トラクション BIE 法だけで問題を解くには不十分である。したがって、変位 BIE 法とトラクション BIE を併用した混合 BIE 法が使われる。

(1) 多重結合領域の混合 BIE

遠隔荷重 t^* を受ける有限な線形弾性体があると仮定する。その弾性体は、一個の有限き裂を有し、外部境界 Γ_o と内部境界 Γ_i ($i = 1, 2, \dots, M$) で仕切られている。原点はき裂先端にあり、 y' 軸がき裂面 Γ_c に直交する直交局所座標系(x' , y')が用いられる。変位境界 Γ_u には変位成分 u_i^* が規定され、その他の境界 Γ_t にはトラクション成分 t_i^* が与えられている。内部境界における境界条件、 $\Gamma_I \equiv \sum_{i=1}^M \Gamma_i$ は、微小欠陥の特性に基づいて決められる⁽⁷⁾。

通常の変位 BIE⁽⁸⁾は内部境界と外部境界のどちらにも良く適用できる。 $\Gamma_i \cup \Gamma_o$ への BIE は次のようになる：

$$c_{ij} u_j(\zeta) = \int_{\eta + \Gamma_0} u_{ik}^*(\zeta; x) t_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\eta + \Gamma_0} t_{ik}^*(\zeta; x) u_k(x) d\Gamma(x) \\ - T_{in} \int_{\Gamma_c} t_{nk}^*(\zeta'; x') \Delta u_k'(x') d\Gamma(x') \quad , \quad \zeta \in \Gamma_i \cup \Gamma_o \quad (2.79)$$

ここで、記号 (\int) は Cauchy 積分の主値を示し、 $(')$ のついた量はすべて局所座標系で定義されている。 $t_k(x)$ と $u_k(x)$ はそれぞれ、全体座標系におけるトラクションと変位の成分である。 $t_{ik}^*(\zeta; x)$ と $u_{ik}^*(\zeta; x)$ はそれぞれ、ソースの点 ζ に i 番目の方向に単位集中力が加えられた場合、点 x での k 番目の方向におけるトラクションと変位である。これら自由空間のグリーン関数の陽的な表示は文献(8) に与えられている。

全体座標系から局所座標系への変換は次に示す変換マトリックス T (または T_{in}) により行われる：

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

係数マトリックス c_{ij} は境界の滑らかさに依存する。境界が滑らかである場合には、 $c_{ij}=(1/2)\delta_{ij}$ となる。 $\Delta u_m'(x')$ は局所座標系におけるき裂面上のき裂開口変位 (COD: Crack Opening Displacement) を示し、次式により示される：

$$\Delta u_m'(x') = u_m^+(x') - u_m^-(x') \quad (2.81)$$

ここで、 $u_m^+(x')$ と $u_m^-(x')$ はそれぞれ、上と下のき裂面上の変位成分である。COD の効果を表わす結合項は、通常の変位 BIE の場合と異なり、式(2.79)の第 3 項である。

変位 BIE だけでは、 $\Gamma_i \cup \Gamma_o$ 上の未知なトラクションと変位および、 Γ_c 上の COD からなるすべての未知量を求めるには、不十分である。共面き裂に対して変位 BIE が退化するため、 Γ_c 上のトラクション境界データに基づいたより高次の BIE を導入する。 Γ_c 上の規定トラクション境界条件を用いて、次のトラクション BIE が得られる：

$$\bar{t}_i(\zeta) = n_j \left\{ \int_{\eta + \Gamma_o} u_{ijk}^*(\zeta; x) t_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\eta + \Gamma_o} \psi_{ijk}^*(\zeta; x) u_k(x) d\Gamma(x) \right. \\ \left. - T_{in} T_{js} \int_{\Gamma_c} \psi'_{nk}^*(\zeta'; x') \Delta u_k'(x') d\Gamma(x') \right\}, \quad \zeta \in \Gamma_c^+ \quad (2.82)$$

ここで、記号 (\int) は発散積分の有限部分、 \bar{t}_i は上き裂面の規定トラクション成分、 $n_j = (\sin \theta_0, -\cos \theta_0)$ は全体座標系における Γ_c^+ に直交するベクトルの成分である。自由空間におけるグリーン関数 $u_{ijk}^*(\zeta; x)$ と $\psi_{ijk}^*(\zeta; x)$ は文献(7)に与えられている。

き裂先端の応力特異性を表わすため、応力拡大係数を取り入れた強化要素をき裂先端部に用いる：

$$\Delta u'_1(s) = \frac{2(1-\nu)}{\mu} \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{2as - s^2}, \\ \Delta u'_2(s) = \frac{2(1-\nu)}{\mu} \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{2as - s^2} \quad (2.83)$$

ここで、 s はき裂先端からの距離、 a はき裂の 1/2 長さ、 K_I と K_{II} はそれぞれモード I とモード II の応力拡大係数である。

混合 BIE (式(2.79)と式(2.82)) の数値計算は、まず、すべての境界、すなわち Γ_i 、 Γ_o および Γ_c を離散化しなければならない。境界 $\Gamma_i + \Gamma_o$ およびき裂面 Γ_c をそれぞれ NE 個と NC 個の要素に分割することにより、離散型の混合 BIE が次のように得られる：

$$c_{ij}u_j(\zeta) = \sum_{m=1}^{NE} [G_{ik}^m(\zeta; x_m) t_k^m - H_{ik}^m(\zeta; x_m) u_k^m] - \sum_{m=1}^{NC} Q_{ik}^m(\zeta'; x'_m) \Delta u_k'^m, \quad \zeta = x_1, x_2, \dots, x_{NE} \quad (2.84)$$

$$\bar{t}_j(\zeta) = n_j(\zeta) \left\{ \sum_{m=1}^{NE} [D_{ijk}^m(\zeta; x_m) t_k^m - S_{ijk}^m(\zeta; x_m) u_k^m] - \sum_{m=1}^{NC} R_{ijk}^m(\zeta'; x'_m) \Delta u_k'^m \right\}, \quad \zeta = x_1, x_2, \dots, x_{NC} \quad (2.85)$$

この係数マトリックス G_{ik}^m , H_{ik}^m , Q_{ik}^m , D_{ijk}^m , S_{ijk}^m および R_{ijk}^m は文献(7)に与えられている。

(2) 曲線的疲労き裂成長の FORM

一般相関の非正規分布確率変数 b に対し、1 次近似信頼性解析を行うには、次のような手順に沿うことになる。

- (i) Rosenblatt 変換⁽⁹⁾により、 b を非相関標準正規ベクトル r に変換する。
- (ii) 最も破損可能性の高い点（設計点）での平坦超平面により、 r 空間内で破損面を近似する。
- (iii) 原点から限界状態面への最小距離を計算することにより、信頼性指数 b を決定する。

設計点は限界状態関数（式(2.22)）とその勾配の反復計算を含む繰り返し最適化アルゴリズムによって計算される。速い収束を実現させるためには、応答の勾配を正確に計算する必要がある。

応答勾配または感度を確率論的有限要素法によって計算させることも可能であるが、ここでは、応答勾配の計算に確率論的境界要素法を使い、感度解析には直接微分法に応答面法を組み合わせた手法を用いる。

き裂の形状寸法 ($a_i, a_f, x_0, y_0, \theta_0$)、疲労パラメータ (D, n)、外部荷重 (τ) および欠陥の形状寸法 (x_c, y_c, r_c, p_i) が、 q 次元の確率ベクトル b によってモデル化されると、疲労問題の性能関数は式(2.59)によって与えられる。供用寿命は確率変数であるから、限界状態関数の勾配は応答感度によって次のように与えられる：

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} T(b, K_{eq}(b)) \quad (2.86)$$

この T は式(2.56)で得られる。応答勾配の計算を容易にするため、曲線き裂経路を局所座標系 ξ ($\xi \in [-1, +1]$) に写像する線形写像を適用する。写像関数は次式で定義する：

$$a = \frac{1}{2} [(a_f - a_i)\xi + (a_f + a_i)] \quad (2.87)$$

式(2.58)と式(2.87)を用いれば、式(2.56)は次のように書き換えられる：

$$T(b, K_{eq}(b)) = \int_{-1}^{+1} f(b, K_{eq}(b, \xi)) d\xi \quad (2.88)$$

ただし関数 f は次式で与えられる：

$$f(b, K_{eq}(b, \xi)) = \frac{J(b)}{D[K_{eq}(b, \xi)]^n} \quad (2.89)$$

このヤコビアン J は次のように定義する：

$$J(b) = \frac{1}{2} (a_f - a_i) \quad (2.90)$$

ここで注意しなければならないのは、関数 $K_{eq}(b, \xi)$ が混合 BIE (式(2.79)および(2.82)) を通じて、アルゴリズム形式によってしか表現できないことである。ここはまさに確率論的境界要素法になるため、混合 BIE と FORM が結合しているところである。

式(2.88)、(2.89)および(2.26)を用いれば、応答の全微分 ($\partial T / \partial b$) は次のように得られる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial b} = & \int_{-1}^{+1} \left[f_{,b} + f_{,K_{eq}} \left(K_{eq,K_I} \frac{\partial K_I(b, \xi)}{\partial b} + K_{eq,K_H} \frac{\partial K_H(b, \xi)}{\partial b} \right. \right. \\ & \left. \left. + K_{eq,\theta} \frac{\partial \theta(b, \xi)}{\partial b} \right) \right] d\xi \end{aligned} \quad (2.91)$$

ここで、 K_{eq,K_I} 、 K_{eq,K_H} および $K_{eq,\theta}$ は式(2.36)より、次のように求められる：

$$K_{eq,K_I} = \cos^3 \frac{\theta}{2} \quad (2.92)$$

$$K_{eq,K_H} = -3 \cos^3 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.93)$$

$$K_{eq,\theta} = \frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left[-\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} K_I + \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) K_H \right] \quad (2.94)$$

また、式(2.91)の $f_{,b}$ および $f_{,K_{eq}}$ はともに式(2.89)から陽的に求められ、次のようになる：

$$f_{,b} = \frac{1}{D(K_{eq})^n} \frac{\partial J}{\partial b} - \frac{J}{D^2(K_{eq})^n} \frac{\partial D}{\partial b} - \frac{J \ln(K_{eq})}{D(K_{eq})^n} \frac{\partial n}{\partial b} \quad (2.95)$$

$$f_{,K_{eq}} = -\frac{n J(K_{eq})^{-(n+1)}}{D} \quad (2.96)$$

式(2.91)には複雑な陽的な表示と陰関数の両方が含まれているので、応答感度を求めるには数值積分が必要となる。そのため、積分区間[-1, +1]をき裂成長のステップに対応して $N_{pts}-1$ 個の線要素に分割する。そして、台形公式を適用することにより、式(2.91)を次のように近似することができる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial b} = \sum_{n=1}^{N_{pts}} & \left[f_{,b} + f_{,K_{eq}} \left(K_{eq,K_I} \frac{\partial K_I(b, \xi)}{\partial b} + K_{eq,K_{II}} \frac{\partial K_{II}(b, \xi)}{\partial b} \right. \right. \\ & \left. \left. + K_{eq,\theta} \frac{\partial \theta(b, \xi)}{\partial b} \right) \right]_{\xi_n} W_n \end{aligned} \quad (2.97)$$

ただし、

$$\xi_n = -1 + 2(n-1)/(N_{pts}-1) \quad (2.98)$$

また、 W_n は積分の重みであり、次式によって求められる：

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{N_{pts}-1}, \quad n=1 \text{ または } n=N_{pts} \text{ の時,} \\ W_n &= \frac{2}{N_{pts}-1}, \quad \text{その他} \end{aligned} \quad (2.99)$$

式(2.97)において、 K_I 、 K_{II} および θ は b と ξ の両方の陰関数であるため、これらの偏微分、 $(\partial K_I / \partial b)$ 、 $(\partial K_{II} / \partial b)$ および $(\partial \theta / \partial b)$ の直接計算は、容易なことではない。しかし、式(2.97)でわかるように、曲線的疲労き裂成長の確率論的境界要素法の実施において、鍵となるステップは、3 つの偏微分、 $(\partial K_I / \partial b)$ 、 $(\partial K_{II} / \partial b)$ および $(\partial \theta / \partial b)$ のそれぞれの積分点での値を決定することである。前節によれば、混合 BIE 法を使えば、ある b の実現値において、関数 $K_I(\xi)$ 、 $K_{II}(\xi)$ および $\theta(\xi)$ が容易に生成される。そこで、各離散点 ξ_n ($n=1, 2, \dots, N_{pts}$) における偏微分 $(\partial K_I / \partial b)$ 、 $(\partial K_{II} / \partial b)$ および $(\partial \theta / \partial b)$ の値は、応答面手法^(10,11)を用いることにより求められる。

2 つのレベルを持つ各因子を用いた因子実験⁽¹²⁾とともに、 b に関する 1 次応答モデルが用いら

れる。 $K_I(b, \xi)$ 、 $K_{II}(b, \xi)$ および $\theta(b, \xi)$ は疲労パラメータ D と n に依存しないため、 K_I 、 K_{II} および θ における b は (q-2) 次元である。

混合 BIE 法に基づいた決定論的解法で、あらかじめ決められた因子シミュレーションに従い、 $2q-2$ 回の計算機によるシミュレーションが実施される。き裂経路の各離散点 $\xi_n (n=1, 2, \dots, N_{pts})$ ごとに、第 L 回繰り返し b_L の偏微分 $(\partial K_I(b, \xi_n) / \partial b)$ 、 $(\partial K_{II}(b, \xi_n) / \partial b)$ および $(\partial \theta(b, \xi_n) / \partial b)$ の履歴が求められる。これらの結果 $((\partial K_I(b, \xi_n) / \partial b), (\partial K_{II}(b, \xi_n) / \partial b)$ および $(\partial \theta(b, \xi_n) / \partial b), n = 1, 2, \dots, N_{pts}$ を式(2.97)に代入すると、 b_L で疲労寿命 T の確率ベクトル b に対する偏微分が求められる。

ある与えられる供用期間 T_s に対し、設計点 b^* の位置を決定するための反復アルゴリズム、設計点での偏微分値 $[\partial T / \partial b]_b$ 、および信頼性指数（または破壊確率）は、文献(13)にある。

2.2 構造信頼性計算の並列処理手法⁽¹⁴⁾

確率論的構造力学 (PSM: Probabilistic Structural Mechanics) 問題は、本来並列性を内在しており、この並列性が、この種の問題を並列処理の具体的研究に適したものにしている。本節では、この種の問題に内在する並列性の要因を探索することにする。

並列処理計算速度を最も効果的に向上させるために、PSM 問題における並列性を幾つかのレベルに分けて分析して行かねばならない。図 2.1 に巨視的スケールにおける 2 段階の並列性を図示する。上位段階の並列性は問題が持つ確率論的側面に起因するものであり、下位段階の並列性は問題が持つ構造力学的側面に起因するものである。更に、これらの巨視的スケールの並列性に加えて、微視的スケールの並列性には多くの段階がある。これら微視的な並列性の段階は、問題が持つ構造力学的側面による付加的なものであり、同時処理及びベクトル化を含んだものである。これらのこと、以下に詳細に述べることとする。

2.2.1 確率論的計算における並列処理

これまで述べてきた PSM の概要から、PSM 計算においては、幾つかの並列性に関する要因がある。主たる並列性の要因は、性能関数の多重評価から来るものである。それに加えて、相関変数の変換における Nataf 型変換は生来並列なものである。これは、相関係数の修正計算が、確率変数のどのようなペアに対しても、独立に行われるためである。従って、修正された相関係数マトリックスの各要素は、それぞれ並行に計算することができる。他の並列性の要因となるものは、よく使用されている PSM 法に特有なものであり、以下に述べる。

(1) 偏微分法

偏微分法における、偏微分計算に対しては性能関数(g 関数)の多重評価が必要となる(式(3-2))。性能関数は常に閉形式で利用できるとは限らないため、偏微分の計算は差分を用いて評価されるのが普通である。例えば、性能関数は特定要素の応力の式で表わされ、その応力は有限要素解析から求めなければならない。

各確率変数に関する性能関数の偏導関数は、イタレーション毎に評価されなければならない。従って、性能関数評価数は、確率変数の個数及びイタレーション回数に比例する。もし、両側差分が使われた場合、各偏微分の評価には 2 つの性能関数の評価が必要となる。一方、片側差分が使われた場合、各偏微分の評価には 1 つの性能関数の評価が必要であり、より簡便であるが、精度が落ちる。

イタレーションは逐次実行されるため、性能関数の評価に関しては、各イタレーション内のみで並列処理できる。従って、並列性の程度は確率変数の個数に関係する。確率変数の個数が増加するほど、全計算時間における並列処理のできる割合は増加することになる。もし、確率変数の個数がプロセッサ数に比してそれほど多くないとき、同一の演算において全てのプロセッサを無駄なく稼働させることは困難となる。これは次のような理由によるものである。

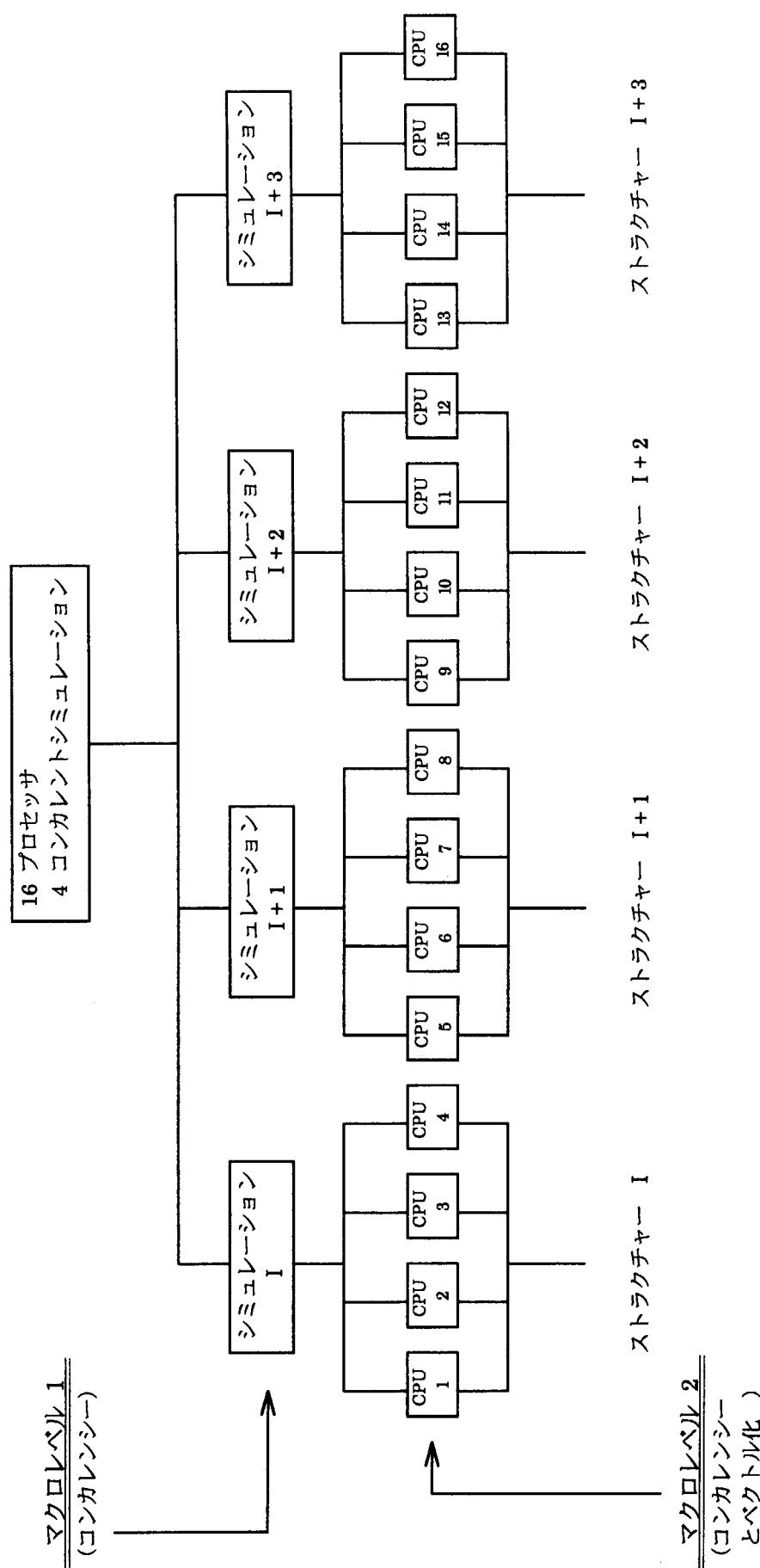


図 2.1 確率論的構造力学における複層化した並列性の適用例

- (i) 確率変数の個数がプロセッサ数に満たない。
- (ii) 個々の変数によって、偏微分に要する計算時間が異なる。
- (iii) 現イタレーションでの全ての偏微分評価が終了するまで、次のイタレーションを開始することができない。

従って、問題によっては、並列性の利点を生かせなくなり、計算効率を上げることが難しくなる。しかしながら、2次近似信頼性法を使用した場合、1イタレーション毎の性能関数の評価数は著しく増加し、これにより、並列性も増加することになる。従って、2次近似法は並列処理においてはより適した手法である。

偏微分法における並列性の要因が他に2つあり、計算速度向上に利用できる。これら2つの並列性は、異なる性能関数を評価する際、また、累積分布関数(CDF: Cumulative Distribution Function)を開発する際に生じる。

完全な CDF を開発する際、異なる応答レベルに対する非超過確率を計算しなければならない。これを図 2.2 に示す。ここで、異なる応答レベルに応じてプロセッサを異なるグループに割り付ける。各グループ内において、各プロセッサは異なる変数に対して差分評価を行う。このようにすると、並列性の度合は著しく増大し、プロセッサのアイドル時間を減少できる。

異なる性能関数が評価される例を挙げると、構造物の複数箇所における応力に対する CDF を評価する場合、異なる崩壊モードを評価しなければならない場合(応力、変形、安定規準に対する信頼性のデモンストレーション)等である。実際、これは多重応答レベル計算問題と同一とみなしてよい。また、多重プロセッサは各性能関数を解くために割り当てられる。

(2) モンテカルロシミュレーション

モンテカルロシミュレーションにおける並列性は、性能関数の繰り返し独立評価からくるものである。性能関数評価に求められる数は、応答分布に求められる精度により支配され、その数は 1000~10000 のオーダーである。もし、単に1次近似、2次近似の応答統計(平均、標準偏差)が求められるものならば、性能関数評価に求められる数はかなり減少するであろう(100 以下)。

偏微分法による CDF 及び他の性能関数の評価において生じる、他の並列性についてはここでは述べないでおく。モンテカルロシミュレーションにおける CDF に関して求められる付加的な仕事は無視し得る。必要なのは、シミュレーション中における各履歴毎に、要求される点に関する記録を保存しておく事のみである。同様に、異なる位置における応答記録により、構造物の異なる部分に対する応答 CDF を評価することもあり意味がない。例外は、多重崩壊モードを考慮しなければならない場合、もしくは、これらの崩壊モードが他の解析手法を必要とする場合である。例えば、構成要素の過応力、安定性、周波数シフト等のチェックである。

(3) 他の手法

PSM 問題に対する手法は他にも幾つか存在する。これらの手法も上記のような並列性を

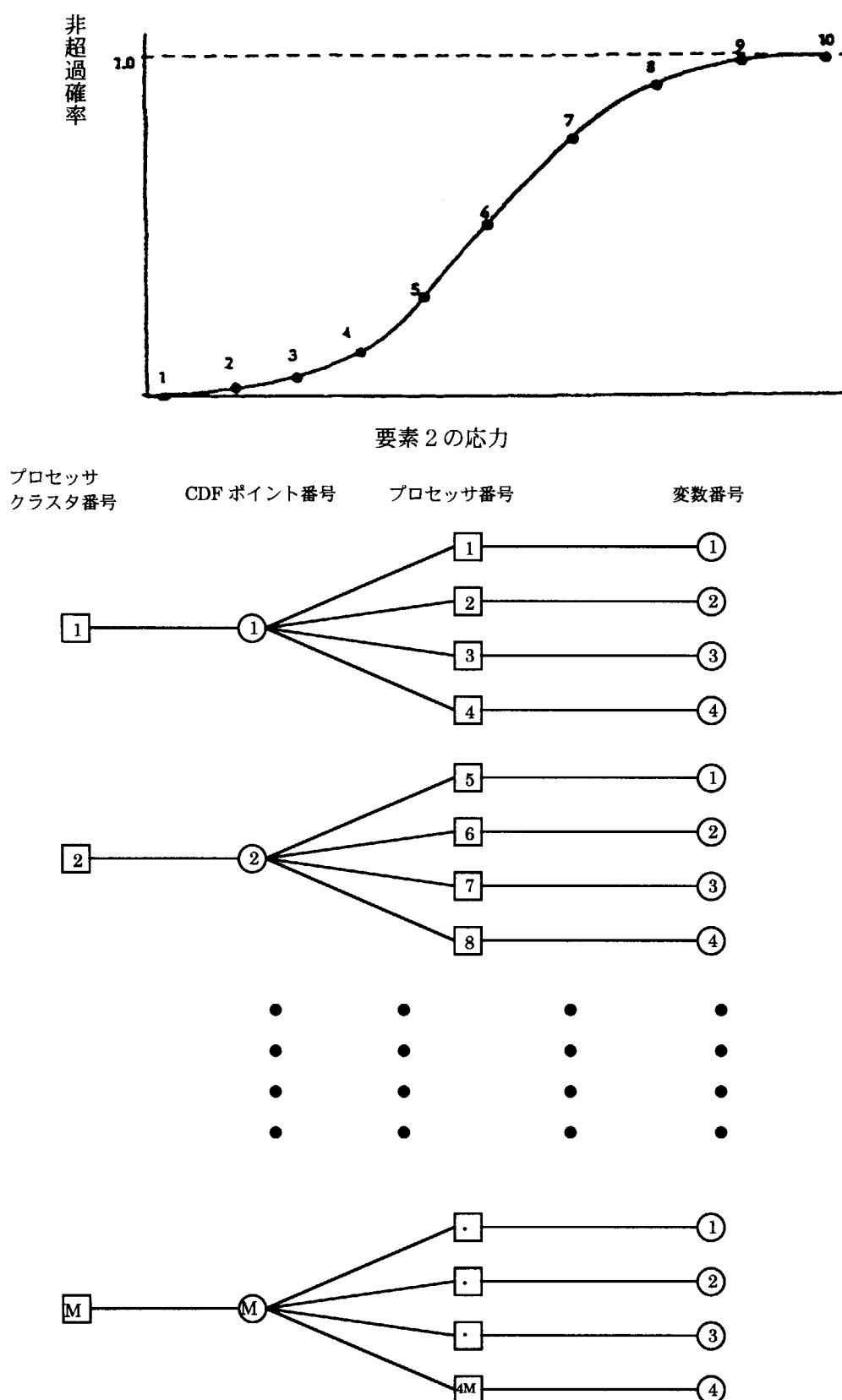


図 2.2 偏微分法に基づいた PSM 法に対する複層化並列性の利用

呈するが、その程度が異なる。分散の縮小処理を伴うモンテカルロシミュレーションでは、並列性の程度は減少する。それは、求められる性能関数評価数が減少するためである。しかしながら、それらの手法(例えば importance サンプリング)により、異なる性能関数が評価されなければならないような場合、異なるサンプリング手段、従って異なるシミュレーションを行わなければならぬ(偏微分法における多重性能関数に対して行ったような特別な工夫)。この場合、図 2.2 に示す並列処理は適切である(直接モンテカルロシミュレーションに対しては不適切である)。混合型の手法(応答曲面開発に使用されているサンプリング法、偏微分法、摸動法)に関しても、本質的にはこれまで述べてきた並列性を所有している。これらの手法による応答曲面の開発には、性能関数の多重評価が要求される。また、異なる性能関数を用いると、通常、異なる応答曲面の評価が必要となる。

2.2.2 構造力学計算における並列処理

構造力学計算においては、多くの並列性の要因が存在する。並列性を利用した技術開発はここ数年の数多くの研究の内の 1 課題であった。並列性を利用した構造力学計算手法の幾つかをここでは示すことにする。PSM 問題に対して、最適な並列処理を開発するためには、これらの手法をこれまで述べてきた手法と結合させることが必要であるように思われる。

構造力学問題を並列処理コンピューターで実行させる際、よく使われている手法、特に有限要素法による解析手法には基本的に次の 3 つの手法がある。

- (i)サブストラクチャー法
- (ii)領域分割法
- (iii)演算子分離法

(1) サブストラクチャー法

サブストラクチャー法は、しばらくの間有限要素解析でよく使われてきた⁽¹⁵⁾。この手法では、構造物を部分構造に分解し、スーパー要素の集合として解く方法であり、力と変位はスーパー要素あるいは部分構造の境界で一致する。サブストラクチャー法は大規模構造問題をより小規模あるいは処理しやすい問題(容量が制限されている場合、特に有効)として扱うため、また、ユニットで構成される構造問題へも利用できるように開発された。並列処理の適用は明らかである。独立したプロセッサは、独立した部分構造について機能し、またスーパー要素の作成に費やされる。スーパー要素が生成されると、それらを組み立てて、单一プロセッサあるいは multiple プロセッサ上で、演算子分離法により解かれる。サブストラクチャー法は PSM 問題の並列処理に適している。それは、concurrent 性能関数評価に要する容量が莫大であるためである。サブストラクチャー法による並列性と確率論的並列性の両並列性を利用すれば、大規模 PSM 問題をより処理しやすい問題とし、並列処理の効率を上げることができる。

(2) 領域分割法

領域分割は構造物が副領域へ分割されるという点で、サブストラクチャー法と類似な方法である。異なる点は、スーパー要素が生成されないという点と、実質上もとの構造物への組み立てを行わないという点である。更に、各副領域は独立した初期値／境界値問題として解かれる。領域分割の一例を図 2.3 に示す。ここでは、境界節点数を最小化し、各領域がバランスのとれた計算負担量となるように不規則 grid に分割している。副領域境界上の解は未知であるため、各副領域の解は、境界上の解が収束するまで、繰り返し計算されなければならない。本手法の並列処理における利点は、解を得るために、1 つのプロセッサ上で、構造全体を組み立てる必要がないことである。領域分割法に関する最近の話題は文献(16)に紹介してある。

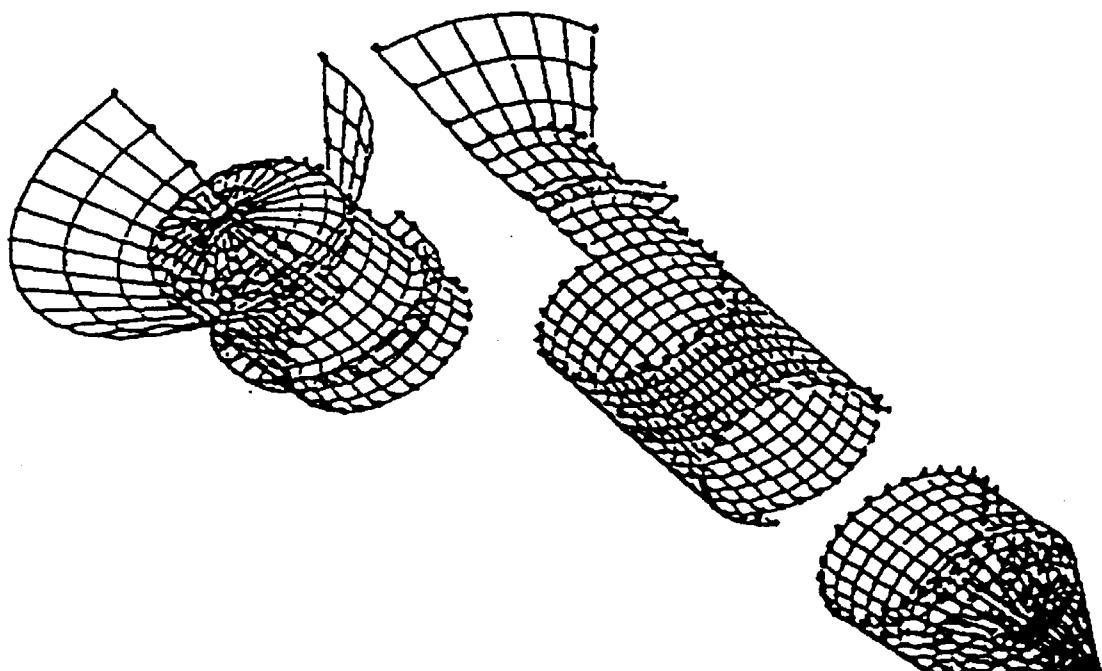


図 2.3 不規則グリッドを有する 3 つのサブ領域への分割⁽¹⁷⁾

(3) 演算子分離法

演算子分離法は、複合問題の解を幾つかのより単純な解へ縮小することである。従って、本質的にはどのような並列処理演算も、演算子分離法の形式をとる。この演算子分離法という単語は、元来、数値的分離手法に対して参照されており、物理的に意味を持たない場合でも参照される。

反復解法はその計算の中ではマトリックス乗法のみが必要であり、上述の手法の1つである(共役傾斜法)。一般的には反復解法は直接解法(ガウス消去法、コレスキーフィル)と比較すれば、速くはない。しかしながら、マトリックス乗法のみを必要とされているため、演算の限界は単純にプロセッサに依存していることになる。反復解法により構造方程式を解いていくが、そこでは初期推定値から出発し、収束するまで解は逐次更新されていく。これらの手法は、PSM問題に適しており、構造はわずかに変動した入力値を元に繰り返し解かれしていく。

直接解法を分解し、並列処理アーキテクチャへの適用に対しては、多くの手法を用いることができる。コレスキーフィルの最近の応用例として、Agarwalら⁽¹⁸⁾は Cray Y-MP 上の 8 プロセッサで、5~7 倍の計算速度の向上を達成した。

以上、本節をまとめると、PSM問題では確率論的計算及び構造力学的計算双方において、多くの並列性を内在しており、その並列性には様々な種類及び程度がある。確率論的計算における並列性の要因は、表 2.1 にまとめられている。また、よく使用されている PSM 法においては、その並列性は本来高レベルである。構造力学計算において並列性を利用する手法に関しては、最近の手法に関するものだけに留めておいた。また、並列性の付加的なレベルに関しては、その位置付けを与え、また並列 PSM アプリケーションにおいてどのように使用されるのかを示した。例えば、多くの構造アプリケーションにおいて、クラック進展問題の様に、質の異なるモデルリングは、構造の異なった部分に対して要求される。同様に、不確定性を取り扱う上でも異なったレベルの適用が要求される。異なる構造部分にそれぞれ専用のプロセッサを割り当てるここと、また不確定性に対する同様な処置は、並列処理計算における今後の課題である。

表 2.1 PSM 法における様々な並列性の要因

解析手法	perturbed 入力に対する性能 関数の繰り返し評価	多重 CDF 値	多重崩壊モード 解析	異なる抽出構 造応答ポイント
FORM / SORM	×	×	×	×
直接モンテカルロ法	×	×	× ^{注1)}	×
分散減衰付モンテカルロ法	×	×	×	×
混合法	×	×	×	×

注1) 異なる崩壊モードに対して異なる解析モデル、解析法が適用されるときのみ

3. 問題別超並列処理計算プログラミング手法

3.1 マクロ確率過程の定式と解法

3.1.1 関連する確率の諸事項

(1) ランダム変数列生成⁽¹⁴⁾

擬似的な乱数は、混合調和法（mixed congruential method⁽¹⁹⁾）によって、次式のように生成される：

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m \quad (3.1)$$

$$R_{n+1} = X_{n+1} / m \quad (3.2)$$

ここで X_i は当該シーケンス(ストリーム)の i 番目の乱数、 R_i は一様に分散する乱数の出力である。また、 a 、 c 、および m は、この乱数を可能な限りランダムにするように選ばれる。

直接的モンテカルロシミュレーションでは、性能関数は、試行間に依存性を持たずに計算される。ただし、乱数とスコアリングは違う。したがって、並列処理を実現可能にするためには、特別な工夫が必要となる。

式(3-1)および(3-2)から解るように、どの乱数の生成も、同じストリームで先に生成された乱数に依存せざるを得ない。多重プロセッサでこのような反復手順を同時に実行すれば、乱数シーケンスを重複させることにもなりかねない。この問題を回避し、並列的に独立する乱数ストリームを維持することができる乱数生成手法がいくつか考えられる。

有望な手法の一つは、シミュレーションループを実行する前に、すべての確率変数の集合をシミュレーションの試行数に等しい数だけ生成するというものである。しかし、実際の PSM 問題に用いるには、おそらく、一連の無作為標本の全部を記憶しておくのに必要なメモリが高価になり過ぎて、手が出せなくなるであろう。この事態に先手を打つための代案は、シミュレーションの一部の試行に対して試行ごとに確率変数を生成し、それらのシミュレーションを実行し、それから別の一組の確率変数を生成するというものである。このアプローチはメモリに対する要求をより現実的なものとするが、プロセッサを遊ばせることによるオーバーヘッドの増大という犠牲を伴う。

第二の手法には、別々のプロセッサで並行して乱数を生成するようにするため、シミュレーションの DO ループ内に乱数を生成する手続きが含まれる。Fox ら⁽²⁰⁾は、Frederickson⁽²¹⁾、Brown⁽²²⁾および Barkai⁽²³⁾の手法に基づいて、シリアルコンピュータで生成する場合とまったく同じ乱数のストリームを生成することになるアプローチを提出した。このアプローチに採用されているのは、調和的乱数ジェネレーター（congruentia1 random number generator）での、以下に示すような $n+k$ 番目と n 番目の乱数の間の基本的な関係である。

$$X_{n+k} = (AX_n + C) \bmod m \quad (3.3)$$

$$A = a^k \quad (3.4)$$

$$C = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1} = \frac{a^k - 1}{a - 1} \quad (3.5)$$

A と C の必要な計算は一回だけで、後に保存される点に注意されたい。そこで、NP 個のプロセッサがあるとすれば、各プロセッサで生成される乱数の、たとえば先頭の 3 個のシーケンスのリストは、次のように書ける（添字は、乱数シーケンス内の位置を表し、肩文字はプロセッサ番号を表す。Y はシリアルコンピュータで生成されるであろう 1 乱数である。）

$$\begin{aligned} X_0^{(0)} &= Y_0 \\ X_0^{(1)} &= (aY_0 + c) \bmod m = Y_1 \\ &\vdots \\ X_0^{(NP-1)} &= (aY_{NP-2} + c) \bmod m = Y_{NP-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} X_1^{(0)} &= Y_{0+NP} \\ X_1^{(1)} &= Y_{1+NP} \\ &\vdots \\ X_1^{(NP-1)} &= Y_{NP-1+NP} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} X_2^{(0)} &= Y_{0+2NP} \\ X_2^{(1)} &= Y_{1+2NP} \\ &\vdots \\ X_2^{(NP-1)} &= Y_{NP-1+2NP} \end{aligned} \quad (3.8)$$

NP=4 の場合で、この方法を図 3.1 に示した。この図に示すように、並列プロセッサは時間差スタート (staggered start) を用い、それから式 (3.3) を用いて蛙飛びする。先述のように、この方法は直列型の乱数ジェネレーターとまったく同じ乱数ストリームを生成し、モンテカルロシミュレーションの結果が再現性を有するので、有利である。

PSM 問題では、シミュレーションのヒストリーが異なれば実行に要する時間も違ってくる可能性がある。したがってヒストリーの始めで、あらゆる構造力学計算が開始される前に、すべての乱数を生成しておく必要がある。それにより、k 番目のヒストリーが始まるときには k - NP 番目のヒストリーの乱数がすでに生成されていることが保証される。k 番目のヒストリーの計算で k - NP 番目のヒストリーで使われる値が駄目になることが、構造力学計算でのローカル変数の利用により、確実に回避される。

これまでに開発され具体化してきた第三の手法は、プロセッサごとに独立の乱数ストリームを設けるというものである。プロセッサごとに別々の乱数ジェネレーターを用いて乱数の発端を生成する。

シミュレーションの試行プロセスを呼び出すと、その都度、まずはじめに Alliant のシステム・ライブラリ関数である LIB_PROCESSOR_NUMBER への関数呼び出しが実行される。この関数からは、当該試行に割り当てられるプロセッサ番号が返される。この番号は、このプロセッサが前回に生成した一組の乱数を取り出すのに使われ、また、次の二組の乱数の生成に使われる。これにより、シミュレーションの試行の同時並列プロセスにおける各プロセッサが、それぞれ自体の標本ストリームをピックアップし、それに対して作業することだけになる。すなわち、同時に並列処理される試行の間で同期をとる必要がなくなる。

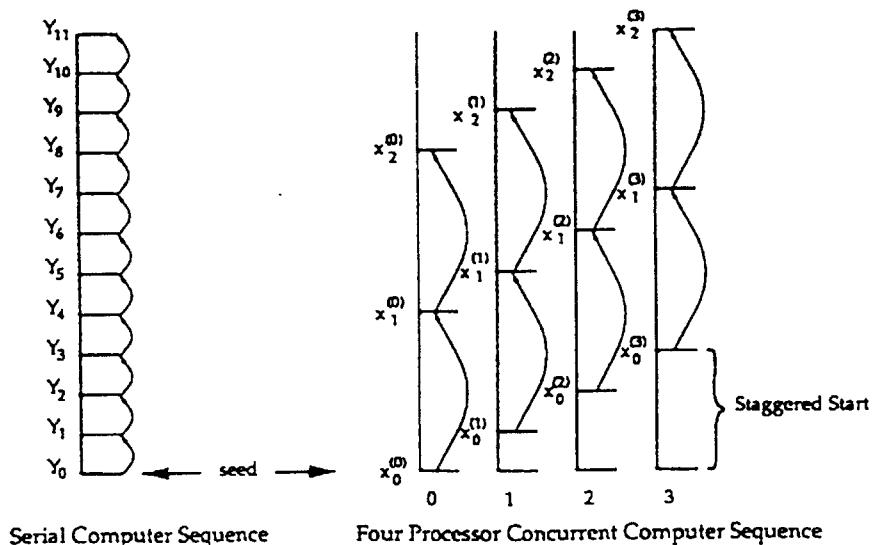


図 3.1 逐次型および並列型計算機上における同一の乱数系列生成の手法

先に述べたように、シミュレーション結果のスコアリングにも、シミュレーションの試行間に依存性がある。従来の順次処理アルゴリズムでは、シミュレーションループ内にキャリーアラウンド・スカラーを用いて、シミュレーションの各試行でのスコアリングのトラックを保持する。すなわち、シミュレーションの試行結果（0 が損傷なし、1 が損傷あり）の連続する合計がスコアリング変数に格納され、各ヒストリーの完了後に修正される。パラレルプロセッサでのこうした方法によるスコアリングは、異なるプロセッサが同時にスコアを更新しようとするかもしれないので、間違ったスコアに導きかねない。この問題を解決するには、乱数の生成に使ったものに似た手法（キャリーアラウンド・スカラー）を採用する。そこで、各プロセッサのスコアの合計が最終的なスコアとなる。

(2) 相関変数の処理⁽¹⁴⁾

X が相関係数行列 R の相関する標準正規変数である場合、 X を一組の独立標準正規変数 Z へ変換する方法が見つけられる。相関係数行列は、問題の入力変数ごとにデータの統計解析を行うことで得られる⁽²⁴⁾。そうした変換の一例を以下に示す。

$$z = T(x) = L^{-1}x \quad (3.9)$$

ここで、 L は、この相関係数行列の Cholesky 分解の下三角行列である。すなわち、 $R = LL^T$ 。したがって、標本ベクトル x が次のように生成される。

$$x = T^{-1}(z) = Lz = L[\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \Phi^{-1}(u_3), \dots, \Phi^{-1}(u_m)]^T \quad (3.10)$$

上述の手順が適用できるのは、正規分布変数についてのみである。正規分布でない確率変数から標本を生成するには、付加的変換が必要である。Rosenblatt 変換は、こうした変換法のひとつである^{(25),(26)}。ただし、この方法には、条件付き確率の計算が要求され、それはしばしば複雑である。他の変換法の中には Nataf⁽²⁷⁾が提案し、Liu と Der Xiureghian⁽²⁸⁾が手を加えた Nataf モデルという変換がある。実際のアプリケーションでは、この方がメリットが多い。

Nataf モデル変換では、まず以下のように、各々の確率変数に対して周辺変換を定義する。

$$z_i = \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)], \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.11)$$

故に、確率の変換原則に従って、 X の結合確率分布関数 (joint pdf) が次のように書ける。

$$f_x(x) = f_{x_1}(x_1)f_{x_2}(x_2)\cdots f_{x_m}(x_m) \frac{\phi_m(z, R')}{\phi(z_1)\phi(z_2)\cdots\phi(z_m)} \quad (3.12)$$

ここで $\Phi(*)$ は標準正規確率分布関数であり、 $\Phi_m(z, R')$ は標準正規変数 z の m 次元の結合確率分布関数で、その相関係数行列が R' である。 R' は修正した相関係数行列で、要素 ρ_{ij} は下式によって、元々の相関係数 ρ_{ij} から定義される。

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f_{x_i}(x_i) f_{x_j}(x_j) \frac{\phi_2(z_i, z_j, \rho'_{ij})}{\phi(z_i)\phi(z_j)} dx_i dx_j \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j \phi_2(z_i, z_j, \rho'_{ij}) dz_i dz_j \end{aligned} \quad (3.13)$$

式(3.13)を解くためには、与えられる ρ_{ij} の周辺分布の組ごとに、手順を反復する必要がある。

この計算を回避するため、幾つかのよく使われている分布について、実験式が開発されてきた⁽²⁸⁾。不定形の分布の場合、 z_i と z_j に関する $x_i x_j$ の打ち切り展開に基づいた方法も開発されている⁽²⁹⁾。ただし後者の場合、非線形の項が残っているとすれば、より高次の微分係数を計算し非線形代数方程式を解くのに依然として数値計算が必要である。

相関する非線形確率変数から、独立確率変数を抽出するための実際の手順は、次のようにまとめることができる。

i) もともとの相関係数行列 R を Nataf モデル変換により R' に変換する。

ii) Cholesky 分解 $R' = LL^T$ と式(3.12)を使って z_i の標本を生成する。

iii) 式(3.13)の逆変換を適用して、 x_i の標本を求める。

(3) 確率分布およびモーメント計算⁽³⁰⁾

構造応答の任意成分 y は、その系を構成するパラメータ x_1, x_2, \dots の値が与えられたとき定まるという意味から、少なくとも形式的に次のような関数表示ができよう：

$$y = g(x_1, x_2, \dots) \quad (3.14)$$

確率構造系とは、上式における x_1, x_2, \dots の一部または全部が、ある特性を有する確率変数 (random variable) であるとみなすことに他ならない。すなわち、確率変数の関数としての y の確率的特性を解析するという、確率論における 1 つの代表的な分野に帰着するのである。

(a) 客観的不確かさと主観的不確かさ

不確かさを定量的に表す手段として確率が用いられることは周知の通りである。確率の数学的定義には、次の 4 通りが知られる：

- (i) 公理的
- (ii) 相対度数 (relative frequency) 的
- (iii) 先駆 (あるいは古典) 的
- (iv) 主観的 (subjective)

工学的、あるいは構造信頼性的見地から、工学上問題となる不確かさは、次の 2 種の分類を行う：

- (A) 自然現象等に固有の変動によるもの
- (B) 情報・データや技術水準の不足によるもの

この両方に対して確率表示をとることが可能である。(A) についてはあまり説明を要しないであろうが、確率モデルへの置換を行なう段階で、大なり小なり (B) に起因する主観的な効果が混入することが避けられない事実を認識すべきである。(B) については、本来確定的なものも含めて、確信の程度を表す尺度として確率を導入しようとするものであり、これを主観確率 (subjective probability) と呼ぶ。主観確率は、Bayes の定理と組合せて、意志決定 (decision

making) のための手段として用いられることが多い。

客観的な確率を入力すれば、得られる出力は構造応答の客観的確率特性であり、主観確率を入力すれば、われわれの得るものは、構造応答値に対する確信の度合である。

(b) 確率変数の分布とモーメント

確率変数 X がある特定値 x 以下をとる確率、すなわち

$$P[X \leq x] \equiv F_x(x) \quad (3.15)$$

を x の関数とみると、これを X の確率分布関数 (probability distribution function) とよぶ。 $F_x(x)$ は 0 以上 1 以下の値をとる非減少関数である。 $F_x(x)$ が連続かつ微分可能であれば次式により与えられる $f_x(x)$ を X の確率密度関数 (probability density function) とよぶ。

$$\frac{dF_x(x)}{dx} \equiv f_x(x) \quad (3.16)$$

$F_x(x)$ の非減少性から、 $f_x(x)$ はいかなる x に対しても負値をとらない。また次のような関係が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \quad (3.17)$$

$$\int_{-\infty}^a f_x(x) dx = \int_{-\infty}^a dF_x(x) = F_x(a) - F_x(-\infty) = F_x(a) \quad (3.18)$$

$$\int_a^b f_x(x) dx = F_x(b) - F_x(a) = P[X \leq b] - P[X \leq a] = P[a \leq X \leq b] \quad (3.19)$$

(ただし、 $-\infty < a < b$)

以上を多変数、すなわち n 個の確率変数 $[X_1, X_2, \dots, X_n] = \mathbf{X}$ の場合に拡張すると、式 (3.15)、(3.16) は次式のように改められる。

$$P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n] \equiv F_x(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F_x(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f_x(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

$F_x(\mathbf{x})$ を結合確率分布関数 (joint probability distribution function) 、 $f_x(\mathbf{x})$ を結合確率密度関数 (joint probability density function) と呼ぶ。

(結合) 確率分布関数または(結合)確率密度関数は X や \mathbf{X} の確率特性を完全に規定するものであるが、特に多変数の場合、これらが現実に精度良く定められることは少なく、むしろモーメント(積率)の形で表示されることが多い。

モーメントとは1つまたは数個の確率変数のべきの期待値、例えば $E[X]$ 、 $E[X^2]$ 、 $E[X_i X_j]$ 、…などのことである。もちろん、 X の1次モーメント $E[X]$ は X の期待値(expectation; \bar{X} と表すことが多い)そのものであるが、この他に特に X の $E[X]$ まわりの2次モーメント(2次中心モーメント: second central moment) $E[(X - E[X])^2]$ を X の分散(variance; $Var[X]$ と表わす)と呼ぶ。

また、 X_i と X_j ($i \neq j$) の2次中心モーメント $E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$ を X_i と X_j の共分散(covariance; $Cov[X_i, X_j]$ と表す)とよび、バラツキや相関の大きさを表す尺度として用いる。なお、平均値(mean value)とは期待値と同義語であり、標準偏差(standard deviation)とは分散の平方根のことである。

以上に述べたように、一般に任意の次数のモーメントは確率分布から計算できるが、付加的な情報なしに有限次のモーメントから確率分布を定めることはできない。モーメントは2次のオーダー(分散・共分散)まで評価されることが多く、一般には3次、4次、…と高次になるほど、ある限られたデータに基づく推定の精度は低下する。

(c) 確率変数の関数の確率密度

最も厳密な取扱いを一般的に述べれば、次のようになる⁽³¹⁾。すなわち

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 = g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \vdots \\ Y_n = g_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

において、確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n (これを \mathbf{X} と表す) の結合確率密度関数(joint probability density function) $f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が与えられたとき、 y_1, y_2, \dots, y_n を実現値としての連立方程式

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

が唯一の実数解 x_1, x_2, \dots, x_n をもつなら、確率変数 \mathbf{Y} (= Y_1, Y_2, \dots, Y_n) の結合確率密度は次式により評価される。

$$f_y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{f_x(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\left| J\left(\frac{g_1, g_2, \dots, g_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right) \right|} \quad (3.24)$$

ただし

$$J\left(\frac{g_1, g_2, \dots, g_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right) = \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

以上では特に大文字 X_i, Y_i と小文字 x_i, y_i を、確率変数とその実現値の意味で区別している。また、変換のヤコビアン $J\left(\frac{g_1, g_2, \dots, g_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right)$ の成分 $\partial g_i / \partial x_j$ は、 (x_1, x_2, \dots, x_n) における偏微分値を意味する。もし連立方程式 (3.23) が 1 組以上の解をもつならば、式 (3.24) の右辺に、すべての解に対応する項を加えるものとし、また式 (3.23) が実数解をもたないなら $f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ とする。

Y_i の個数が m ($i=1, 2, \dots, m$) で、 X_i の個数 n より大きい場合には、 Y の確率密度関数は特異となる。またその逆 ($m < n$) の場合には、補助変数 $Y_{m+1} = X_{m+1}, Y_{m+2} = X_{m+2}, \dots, Y_n = X_n$ を導入し、上式 (3.24) を実行した後

$$\begin{aligned} f_{Y_1 Y_2 \dots Y_m}(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ = \iint_{(n-m)} \cdots \int f_{Y_1 Y_2 \dots Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) d y_{m+1} d y_{m+2} \cdots d y_n \end{aligned} \quad (3.26)$$

なる周辺分布 (marginal distribution) をとることにより、 (y_1, y_2, \dots, y_n) の結合確率密度が評価される。

(d) 1 次および 2 次近似法

次に近似的な手法のうちで代表的であり、また確率論的構造力学手法の基礎を与えるテイラーフェルムによる方法を述べる。すなわち、確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の関数として

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.27)$$

が与えられる場合、これを期待値 (expectation) のまわりでテイラー展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} Y &= g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}} (X_i - \bar{X}_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_{\bar{X}} (X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j) + \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\dot{\bar{X}}$ は微分を $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ で評価することを意味するが、それらの微分値が与えられるような滑らかな関数である場合に、本手法の適用範囲は限られる。

仮に右辺において第 2 項、すなわち X の 1 次項まで考慮すると、 Y の期待値 $E[Y]$ と分散 (variance) $Var[Y]$ は次のように与えられる。

$$E[Y] = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \quad (3.29)$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}} \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right)_{\bar{X}} Cov[X_i, X_j] \quad (3.30)$$

ここで、 $Cov[X_i, X_j]$ は $E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)]$ なる 2 次の期待値まわりのモーメント（中心モーメント）の意味であり、共分散 (covariance) と呼ばれる。これが 1 次近似法 (First Order Approximation) あるいは 1 次近似 2 次モーメント法である。

式 (3.28) において、さらに右辺第 3 項、すなわち X の 2 次項までを考慮すれば、次式が導かれる：

$$E[Y] = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_{\bar{X}} Cov[X_i, X_j] \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} Var[Y] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}} \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right)_{\bar{X}} Cov[X_i, X_j] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_j \partial X_k} \right)_{\bar{X}} E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)] \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_{\bar{X}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_k \partial X_l} \right)_{\bar{X}} \right. \\ &\quad \times E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)(X_l - \bar{X}_l)] \\ &\quad \left. - Cov[X_i, X_j]Cov[X_k, X_l] \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

これを2次近似法と呼ぶ。関数形が式(3.27)ではなく式(3.22)の形をとる時にも、それぞれの関数 g_1, g_2, \dots に対し同様の展開を行い、例えば Y_i と Y_j の共分散 $Cov[Y_i, Y_j]$ などを評価することができる。

3.1.2 モンテカルロシミュレーション (MCS) の定式と解法⁽¹⁴⁾

モンテカルロシミュレーションでは、性能関数は問題変数の異なる値に対して繰り返して解かれる。結果は式(2.1)で与えられる確率を評価するため保存される。数学的には、この確率は事象 $g(x) < 0$ の統計的期待値として評価され、次のように計算される。

$$P_g = \int_X I(g(x)) f_x(x) dx = E[I(g(x))] \quad (3.33)$$

ここで、 $I(\cdot)$ は指標関数であり、 $E(\cdot)$ は期待値(statistical mean)である。

指標関数 $I(\cdot)$ は、当該事象に従い定義される。例えば、事象 $g(x) < 0$ に対しては、 $g(x) < 0$ の時 $I(g(x) \leq 0) = 1$ 、それ以外の場合は 0 と定義される。

もし、密度関数 $f_x(x)$ が存在し、独立標本ベクトル x が生成されれば、 P_g は $I(g(x_i))$ の標本平均として計算される。すなわち、

$$P_g = \hat{P}_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(x_i)) \quad (3.34)$$

ここで、 N は標本の総数、 x_i は x の i 番目の標本ベクトルである。標本が有限であるため、評価値 \hat{P}_g 自体、不確定性を持っている。理論的には、この不確定性は、評価値の分散により、次のように定量化することができる。

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{P}_g) &= \frac{1}{N} \text{Var}(I(g(x))) \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N [I(g(x_i)) - \hat{P}_g]^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

変分係数あるいは \hat{P}_g の相対統計誤差は次式で表わせる。

$$\delta(\hat{P}_g) = \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{P}_g)}}{E[\hat{P}_g]} \quad (3.36)$$

式(3.36)は与えられた相対統計誤差に対して、必要な標本サイズを評価するのに用いられる。

従って、モンテカルロミュレーションでは以下のステップで計算する。

- i) 密度関数 $f_x(x)$ に基づいた標本変数を生成する。
- ii) 生成された標本変数を用いて、性能関数 $g(x)$ を評価する。
- iii) $I(g(x))$ を計算する。
- iv) 式(3.34)、(3.35)のように計算を実施する。

関数 g は確率変数の独立標本値に対して、繰り返し評価されなければならないから、計算は並行に実施することができる。すなわち、関数 g は異なる標本のセットを独立なプロセッサーで評価できる。本手法は、次章で述べるように並列プロセッサー上で演算できるため、以下に付加的な関連事項をもう少し述べておく。

もし、 X が独立確率変数($x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$)から構成されるとすると、標本変数は独立確率変数の限界分布関数 (marginal cdf) の直接逆演算により生成できる。

$$x_i = F_{x_i}^{-1}(u_i) \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (3.37)$$

ここで、 $F_{x_i}^{-1}(\cdot)$ は確率変数 x_i の分布関数の逆関数であり、 u_i は一様分布から生成された無作為数である。

一般性を失うことなく、すべての確率変数は標準化されるものと仮定してよい（ゼロ平均と単位偏差を持つ）。更に、もし全ての確率変数が正規分布からなるとすれば、式(3.37)は次のように書き換えられる。

$$x_i = \Phi^{-1}(u_i) \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (3.38)$$

ここで、 Φ^{-1} は標準正規分布関数の逆関数である。

3.2 ミクロ確率過程の定式と解法⁽³²⁾

3.2.1 均質化法

複合材料または微小欠陥を持つ材料等の微細構造を有する構造物においては、微細構造に不確定さが存在するため、より現実に即した評価を行うには、この不確定性を考慮した解析が必要である。Lion⁽³³⁾らにより理論的に構築された均質化法は、周期性を有する任意構造の材料特性を予測できる。また、全体構造物（巨視的構造）中の材料の微視的構造を考慮した、詳細な力学応答を効率よく計算できる理論としても注目されている^{(34),(35)}。

均質化法では図3.2に示すような周期性を持った微細構造からなる複合材料を解析対象としている。ここでは、微細構造の一周期にあたる単位セルの領域を直方体領域 $Y (= [0, y_1] \times [0, y_2] \times [0, y_3])$ と仮定しているため、この周期性を特に Y -周期性と呼ぶ。実際の複合材料の多くは、その微細構造に周期性を仮定できるものが少くない。また、仮に構造物の各部で微細構造が異なったとしても、場所ごとに異なる微細構造が分布していると仮定することにより、さらに多くの構造物を均質化法の解析対象とすることができます。

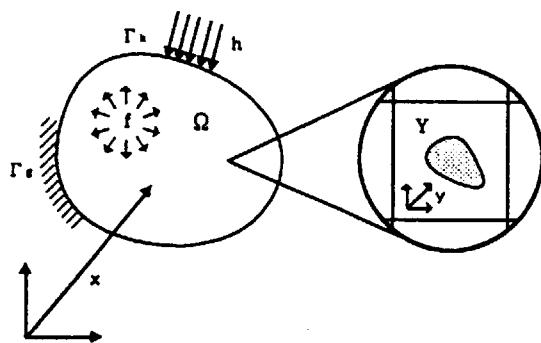


図 3.2 均質化法における全体構造と微細構造

まず、全体構造物を記述する巨視的な座標を x 、また、微細構造の単位セルを記述する座標を y とする。全体構造物と微細構造との大きさの比を表す ϵ を介して次式が成り立つ：

$$y = \frac{x}{\epsilon} \quad (3.39)$$

周期性を持つ微細構造からなる構造物の変位を、次式のように展開できると仮定する：

$$\begin{aligned} u^\epsilon &= u^0(x, y) + \epsilon u^1(x, y) + \dots \\ y &= \frac{x}{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.40)$$

上式を仮想仕事の原理に代入し、周期性を考慮することにより、微細構造とマクロ構造に関

する二つの仮想仕事の原理を導くことができる。

$$\int_Y D_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \frac{\partial v_i^l}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial v_i^l}{\partial y_j} dY \quad (3.41)$$

$$\int_{\Omega} D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial v_i^l}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) v_i^0 d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i v_i^0 d\Gamma \quad (3.42)$$

ここで、 f_i は物体力、 t_i は境界 Γ_i 上にあたえられるトラクション、 u は未知変位、 D_{ijkl}^H は単位セルの等価な弾性定数で、式(3.41)の解 χ を用いて次式で表わされる。

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY \quad (3.43)$$

さらに、微細構造の微視的な応力 σ_{ij}^e を次式で評価できる。

$$\sigma_{ij}^e = D_{ijmn} \left(\delta_{mk} \delta_{nl} - \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (3.44)$$

ここで、 δ_{mk} は Kronecker のデルタである。

3.2.2 微細構造の不確定さを考慮した確率構造解析の定式化

微細構造における構造諸元の変動を次式の形で与える：

$$\phi(y) = \bar{\phi}(y)(1 + \alpha(x, y)) \quad (3.45)$$

ここで、上付きのバーは期待値を、 $\alpha(x, y)$ は期待値 0 の確率変数を表わす。上式で表わされる微細構造の挙動は、均質化の理論により、等価な材料特性の変動として評価できる。したがって、1 次摂動法を用いると、 D_{ijkl}^H を D^H と書いて、次式の近似式が得られる：

$$D^H = \bar{D}^H + D_i^H \alpha \quad (3.46)$$

ここで、 D_i^H は D^H の一次変動率を表わす。

外力は確定的であるとし、1 次摂動法に基づく確率有限要素解析の手順により、マクロ構造における変位 u^0 の確定項 \bar{u}^0 および 1 次変動率 $\partial u^0 / \partial \alpha$ は次式を解くことで評価できる。

$$K^H u^0 = f^H \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial K^H}{\partial \alpha} u^0 + K^H \frac{\partial u^0}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.48)$$

ここで、 K^H は次式のマクロ構造における全体剛性マトリックスを表わす：

$$K^H = \sum_{n=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_n} B^T D^H B d\Omega \quad (3.49)$$

ここで、 N_{el} は要素総数、 B は離散化された微分演算子マトリックス、肩付きの T は転置をそれ表わす。

よって、1次変動率を u_I^0 で表わすと、マクロ構造の節点変位の変動は次式で表わすことができる：

$$u^0 = \bar{u}^0 + u_I^0 \alpha \quad (3.50)$$

さらに、マクロ構造の応力変動は次式で評価できる：

$$\sigma^0 = \bar{\sigma}^0 + \sigma_I^0 \alpha \quad (3.51)$$

上式の応力変動の1次近似式より、応力の期待値 $E[\sigma]$ および分散 $Var[\sigma]$ は1次近似2次モーメント法により、次式で評価できる。

$$E[\sigma] = \bar{\sigma} \quad (3.52)$$

$$Var[\sigma] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \text{diag}[\sigma_{IK}^0] \sigma_{II}^0 E[\alpha_k \alpha_l] \quad (3.53)$$

ここで、 $\text{diag}[A]$ はベクトル A を対角成分とする対角マトリックス、 $E[\alpha_k \alpha_l]$ は確率変数 α_k および α_l の2次モーメントである。

また、微細構造における応力変動の1次近似式も均質化の理論により、次式で評価することができる：

$$\sigma^\epsilon = \bar{\sigma}^\epsilon + \sigma_I^\epsilon \alpha \quad (3.54)$$

ここで、確定項は式(3.44)で表わされ、1次変動率は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}\sigma_i^\varepsilon = & \frac{\partial D_{ijmn}}{\partial \alpha} \left(\delta_{mk} \delta_{nl} - \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \\ & + D_{ijmn} \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \left(\delta_{mk} \delta_{nl} - \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.55)$$

3.3 並列化プログラミング

超並列コンピュータをより現実的なものとするためには、ハードウェアの開発はもとより、ソフトウェアの開発が非常に大きなウェートを占める。現状の開発手法や開発環境のもとで、超並列コンピュータ用のソフトウェアを開発するには、難点が多く、並列コンピュータ用ソフトウェア開発に関する知識及び技術が必要となる。そこで、並列処理用プログラムの開発支援ツール等の開発環境として、並列プログラミング言語、並列処理用ライブラリ、メッセージ・パッシング・ライブラリ、デバッガ、性能評価ツール、並列処理シミュレータ等が提供されている。また、超並列コンピュータの中には、統合化された並列プログラミング環境を提供しているものもある。

科学技術計算によく使用されている Fortran や C 等、逐次プログラミング言語はフォン・ノイマン型の逐次型コンピュータ仕様であるため、この逐次プログラミング言語を超並列コンピュータ上で作動させるためには特別の技術を要する。それは、逐次プログラミング言語ではプロセッサの割り当て、データの分散及び通信等が考慮されていないためである。逐次プログラミング言語から並列プログラミング言語（High Performance Fortran 等）へ移行させることも一方法ではあるが、現状では、科学技術計算を超並列コンピュータ上で行うためには、次のいずれかのライブラリー使用による方法が最適であろうと考えられる。

- 1) 超並列コンピュータ用並列処理ライブラリ
- 2) メッセージ・パッシング・ライブラリ

本節では、上記 2 種類のライブラリーについて述べることにする。

3.3.1 並列化ライブラリ

現状のプログラミング環境における並列処理において、プロセス生成、通信、同期、データの割り当て等の基本的な機能については、ライブラリ形式で提供されている。ユーザはプログラム内において、並列処理ライブラリ関数をシステムコールすることにより、基本的な並列処理を実行できる。また、上記の基本的な並列処理ライブラリのほかに、超並列コンピュータ用に最適化された科学技術計算ライブラリが提供されており、多くの超並列コンピュータはこれらの科学技術計算ライブラリをサポートしている。主な科学技術計算ライブラリを以下に示す。

- Libsci：数値計算用ライブラリ
- DXML：数値計算用ライブラリ
- NAG(Numerical Algorithms Group)：数値計算用ライブラリ
- IMSL：数値計算用ライブラリ
- ProSolver：一次方程式解法ライブラリ
- FFT：高速フーリエ変換用ライブラリ
- SEGlib：信号処理用ライブラリ

3.3.2 メッセージ・パッシング

メッセージパッシングは分散メモリー型並列処理環境において、並列に動作しているプログラム単位（タスクあるいはプロセス）間でデータをやりとりしながら進めていく処理方式を意味する。図3.3に示すように並列計算機（並列処理環境）は大きくわけて「共有メモリ型」と「分散メモリ型」に分類することができる。前者は、複数のプロセッサが同じメモリ空間を直接アクセスすることができるが、後者は各プロセッサごとにメモリ空間が別々になっているため、他のプロセスのメモリー上のデータを参照するためには、各プロセッサーが明示的にデータ転送処理を行う必要がある（ハードウェア的には分散メモリでも、使用者からは共有メモリに見えるようにした並列計算機もあるし、また共有メモリ計算機上であたかも分散メモリであるかのような処理を記述することもできる。）。このプロセッサー間のデータのやりとりのための処理をメッセージパッシングと呼ぶことにする。

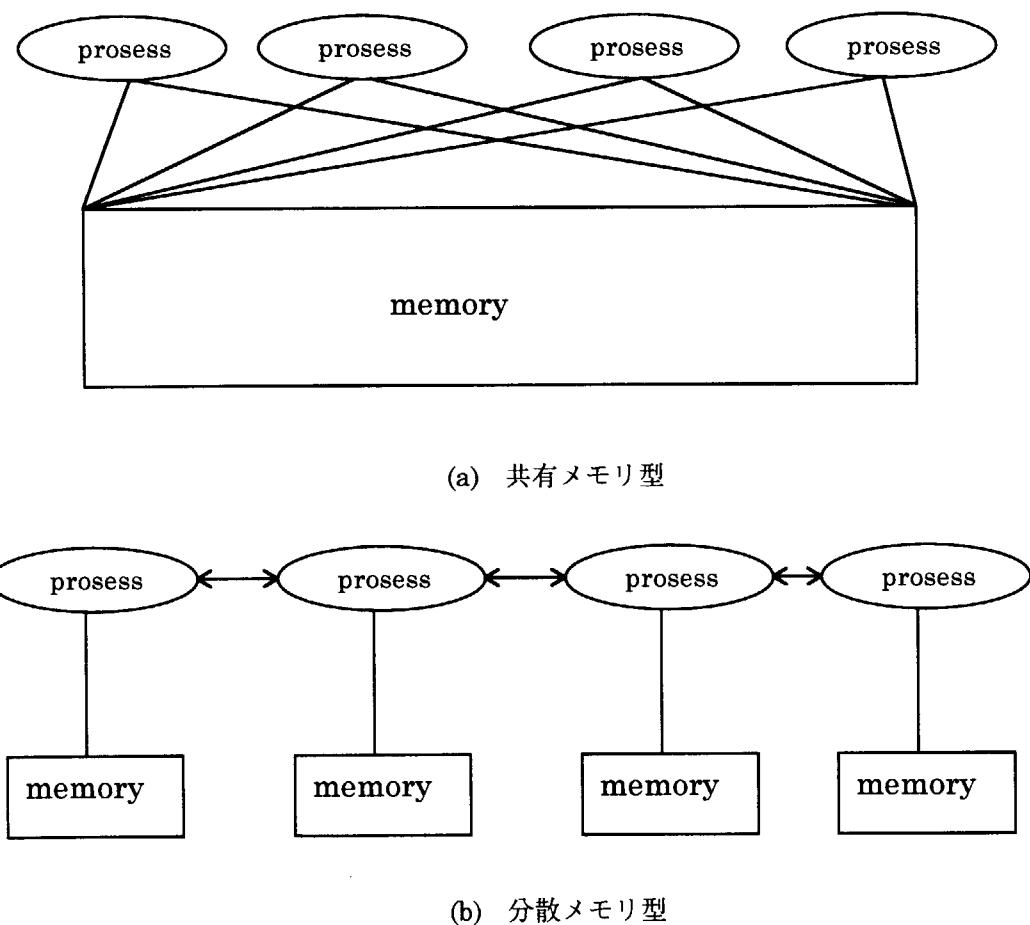


図3.3 並列計算機の2つのタイプ

分散メモリ型並列処理環境におけるメッセージパッシングによる並列処理という方式において、ユーザがプログラム内においてメッセージパッシングライブラリ関数をシステムコールするという形式がよくとられる。代表的なメッセージ・パッシング・ライブラリとして、PVM(Parallel Virtual Machine), Express1, Linda, P4 等が挙げられる。これらのライブラリは超並列コンピュータはもとより、ワークステーション等にも対応している。これらのうち PVM は他のインターフェースと比較すると、異なる機種が入り交じった環境への対応を考慮しており、対応しているマシンの種類が多いことが特徴である。並列計算機メーカーが自社のマシンに固有のインターフェースを用意している場合もあるが（IBM SP, 富士通 AP1000 等），PVM を利用できるかあるいは標準仕様とする方向にある。

このような状況から、アーキテクチャやプログラミング言語に依存しないメッセージパッシングによる並列処理記述の業界標準を目指してアメリカ及びヨーロッパの企業、機関が共同で作り上げた MPI (Message Passing Interface) という仕様もあり、実際のマシン上での実装も進められている。当面の動向としては、PVM と MPI が業界標準として並存するものと予測される。

(1) PVM^{(36),(37)}

PVM(Parallel Virtual Machine)は米国のオークリッジ国立研究所を中心に開発されたメッセージ・パッシング・ライブラリであり、ネットワークで接続された異機種の並列コンピュータ及び逐次型コンピュータを単一の大きな並列計算資源に統合するパッケージ・ソフトウェアである。PVM は多くの環境に対応しているため、プログラムの移植性がよく、また、FTP(File Transfer Protocol)や電子メール等で比較的容易に無料で入手できるため、先端科学分野における大規模計算用のソフトウェアとして世界中で広く利用されるようになってきている。

PVM のもとでは、逐次型コンピュータ、並列コンピュータ、ベクトル型コンピュータの集合をユーザが定義し、1つの大きな分散メモリ型コンピュータとして表わす。ここでは、この論理的な分散メモリ型コンピュータをバーチャルマシン(Virtual Machine)と呼ぶ。また、コンピュータの集合の要素1つ1つをホストと呼ぶ。PVM はバーチャルマシンにおいて、自動的にタスクを起動する機能を装備しており、タスク間の通信及び同期を実現する。タスクは PVM における計算の単位であり、UNIX におけるプロセスに類似したものである。タスクは通常 UNIX のプロセスにより実装されるが、必ずしもそうである必要はない。ユーザは C または Fortran によりアプリケーションを記述する。その際、ほぼ全ての分散メモリ型コンピュータで共通なメッセージパッシングライブラリを利用して並列化を行う。アプリケーションを構成する複数のタスクは協調して動作し、並列に計算を行う。PVM はアプリケーション、マシン、ネットワークレベルでの異機種間利用をサポートしており、アプリケーションを構成するタスクは問題に最も適したアーキテクチャを利用することができる。また、グラフィカル・ユーザ・インターフェースとして、HeNCE 及び XPVM が提供されている。以下では、Version 3を中心により詳しく述べていく。

PVM は、分散メモリ型並列計算機のような環境の構築及びその上でのメッセージパッキングの手段であり、複数マシンによる並列処理を実現するための実用的ソフトウェアである。PVM により複数マシンを単独あるいは異機種混合環境で一つの分散メモリ型仮想並列計算機として利用できる。PVM が対応している機種は非常に多く、代表的なワークステーション、スーパーコンピュータ等を挙げておく。

- シングルプロセッサ : SUN, HP, DEC, SGI, IBM 等のワークステーション
- ベクトルスーパーコンピュータ（シングル／マルチプロセッサ） : CRAY MP, CONVEX, SX3 等
- マルチプロセッサ : IBM SP1, CRAY T3D, Intel Paragon, nCUBE, CM5 等

従って、ある意味では PVM は機種の垣根を越えた共通の並列処理プログラム記述のためのインターフェース仕様とみなすこともできる。つまり、メッセージ・パッキングによる並列処理記述の標準仕様を提供するものであり、MIMD, SPMD, master/slave モデル等様々な並列処理を表現できる。

次に、PVM による並列処理の実現形態について述べる。複数のワークステーションで並列処理を行う場合、PVM のプロセス間のメッセージのやりとりは UNIX のプロセス間通信(socket) 及びネットワーク(TCP/IP) を介したリモートプロセス間通信で行われる。このような実現方法をとっているため通常の Ethernet では通信の負荷が大きくなり、細粒度の並列計算には向きのようであるが、並列計算機によってはマシンに固有のメッセージ通信ハードウェアを利用するようにして性能向上させた版を用意しているものもある (IBM の SP1 用に改良された PVMe 等)。

PVM ソフトウェアシステムでは複数のプログラム (タスク) がそれぞれのメモリを持ち、タスク間が通信を行いながら処理を進めていくという分散メモリ型並列処理を複数の計算機 (マルチプロセッサの計算機) 上で実現するものであり、PVM デーモンと PVM ユーザインターフェースライブラリという 2 つの要素から構成されている。

PVM デーモン (pvmd) は PVM の使用者 (マシンのユーザ ID) 每に各マシンに 1 個づつ常駐されなければならないプログラムであり、PVM 使用者のプログラムを構成するタスク間の通信、タスク制御等を行うものである (デーモンの例として sendmail が挙げられる。sendmail は UNIX システムに常駐し、メールの送信、受信を扱う。)。pvmd はユーザーのプログラムを開始する前に pvm コマンド (PVM コンソール) あるいはデーモンプログラム (pvmd) そのものによって起動されなければならない。PVM アプリケーションを実行する場合、ユーザは最初にどれか 1 つのコンピュータで pvmd を起動する。次にこの pvmd はユーザが定義したバーチャルマシンを構成する各コンピュータにおいて順次起動される。最後に、どれか 1 つのコンピュータに表示された UNIX プロンプトに対してコマンドを入力することにより、PVM アプリケーションを実行する。複数のユーザは、互いにコンピュータをオーバーラップさせてバーチャルマシンを構成でき、また、各ユーザは一人で複数の PVM アプリケーションを同時に実行することもできる。

PVMを利用するプログラムの各タスクは原則的には動作しているマシン（PVMでは各マシンをホストと呼ぶ）上の pvm_dと通信を行うことで、他のタスクと間接的に通信する（PVM3.2以降では各タスク同志が pvm_dを介さずに直接通信可能）。図3.4に示すように、プログラム上は、まず PVMとは独立に起動された一つのプログラム（タスク）から別のタスクを PVMライブラリのルーチンによって起動する形となる。しかし、PVM上では起動元のタスク（親タスク）とこれから起動されたタスク（子タスク）では原則同じ機能を持つことができ、ホスト／ノード（マスター／スレーブ）方式だけではなく様々な形式の並列処理が可能である。

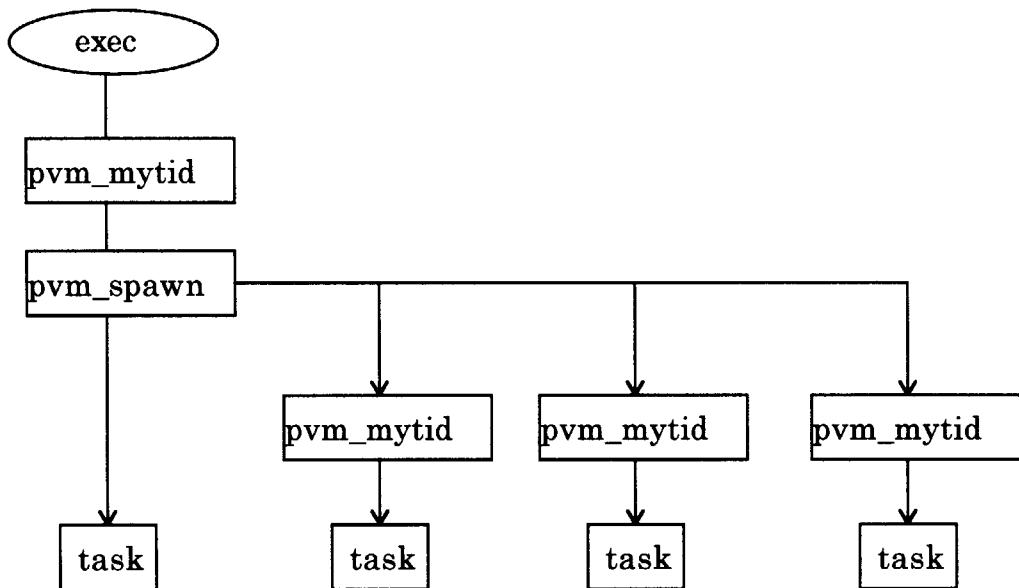


図3.4 PVM デーモン

一方、PVMユーザーインターフェースライブラリ（libpvm, libfpvm）は、PVMの使用者がプログラム中でPVMの機能を利用するため呼び出すことのできるサブプログラムライブラリであり、メッセージパッキング、プロセスの生成、タスクの協調、バーチャルマシンの再構成のためのルーチン等を提供する。C及びFortranの2つの言語に対応したライブラリが用意されている。従って、PVMによる並列プログラミングはPVMの提供するサブルーチンライブラリのルーチンまたは関数を呼び出すことで行う。これにより、並列に動作するタスクの生成やメッセージ送受信を行うことができる。主なライブラリールーチンの機能を以下に挙げておく。

- タスク制御（生成／消滅）
- タスク情報取得
- ユーザープログラムからのホストの追加／削除
- タスク間通信（メッセージ送信／受信、複数タスク同時通信）
- タスクグループ動作 — バリヤ同期、ブロードキャスト、縮約計算（タスク間の

データ総和、最大／最小値等、PVM3.3.3 より可能)

○ エラーメッセージ

具体的な例として、タスク間データ通信では、図 3.5 に示すようにメッセージバッファへのデータ蓄積及びそこからの取り出し操作を記述しなければならない。

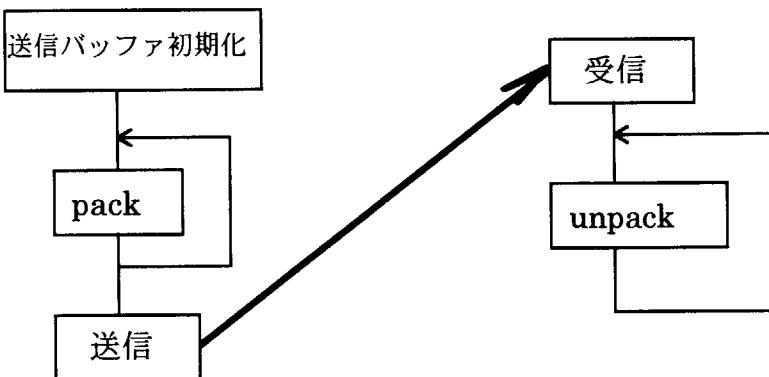


図 3.5 タスク間通信

最後に、実用的な観点から考えれば、複数のワークステーションを通常の Ethernet で結合したような環境では、マシン間のデータ通信によるオーバーヘッドが大きく、速度向上はあまり望めはしない。しかしながら、問題の種類によっては、例えばモンテカルロシミュレーションなどでは各並列タスクが手分けして、独立にサンプリングを行い、最後に結果を統合すればよいため、このような環境下においても並列処理はかなり効率的に行える。従って、高速なプロセッサ間通信が可能なハードウェアを装備した並列計算機を用いれば、PVM によって並列化したプログラムで実際に高速な並列処理を行うことが可能となるであろう。

(2) MPI⁽³⁸⁾

MPI (Message Passing Interface Standard) は、メッセージ・パッシングを用いたインターフェースの標準化である。MPI は、コンピュータのアーキテクチャやプログラミング言語に依存しないインターフェースの標準化であり、実用的で、移植性が高く、効果的で、柔軟なメッセージ・パッシングを行えるインターフェースの確立を目的とされている。

MPI は MPI Forum により運営されている。MPI Forum は 40 以上の組織が参加しており、1992 年 11 月より、メッセージ通信用の標準ライブラリセットの定義および検討がなされている。そこでは IBM T. J. Watson Research Center 及び Intel の NX/2, Express, nCUBE の Vertex, p4, PARMACS また、PVM, Zipcode, Chimp, Chameleon 及び PICL 等現存する各メッセージ・パッシング・システムのそれぞれの特徴を生かすように、開発が進められている。

MPI は、ライブラリ化の支援、及び並列計算機のアーキテクチャにあわせた最適化が可能で

あることが特徴である。つまり、十分なメッセージの区別方法により、ライブラリ化を可能とし、また数多くの通信用関数の装備により、計算機のアーキテクチャに合わせた最適な通信を可能としている。

メッセージ・パッシング・インターフェースの標準化を確立することによる主要な利点は移植性と利便性の向上にある。近い将来、各超並列コンピュータ上で MPI が使用可能になれば、MPI を用いたソフトウェアの開発により、ソフトウェアの移植性が高まることになる。

また、従来のメッセージ・パッシング・ライブラリでも並列処理計算は可能であるが、各計算機のアーキテクチャに合わせた最適化が必要となるため、通信のオーバーヘッド等により処理時間に問題が生じる。しかしながら、MPI の標準化により、各コンピュータ・メーカーのメッセージ・パッシング・ライブラリのインターフェースが MPI 仕様に最適化されれば、処理時間が向上することが予測される。

分散メモリのメッセージ通信環境下においては、より高水準なルーチンは、より低水準なメッセージ通信のルーチンの上に造られ、標準化による利点は明らかである。さらに、メッセージ・パッシング・インターフェースの標準化は、ベンダが MPI の実装を能率的に行なえるようにはっきりと限定されるベースセットのルーチンを供給、更にハードウェアサポートを供給することにより、スケーラビリティを高められる。

(a) MPI1 について

1992 年 11 月に発表された MPI1 (1994 年 5 月最終仕様発表) は、以下に示す既存のメッセージ・パッシング・ライブラリの機能をほぼ網羅しているが、集団通信ルーチンは含まれておらず、また、thread-safe でもなかった。

- 1 対 1 通信
- プロセス・グループ
- プロセス・トポロジー
- コレクティブ・オペレーション
- 言語インターフェース
- 環境の管理
- プロファイリング・インターフェース
- 通信コンテキスト

(b) MPI2 について

MPI2 に関するミーティングは既に始まっている。MPI2 に拡張可能な機能として、以下の項目が挙げられている。

- 入出力(I/O)
- アクティブメッセージ
- プロセスの起動

- 動的プロセス制御
- Remote store/access
- Fortran 90 および C++言語向けの枠組
- グラフィック
- 実時間対応

特に、入出力(I/O)に関しては、IBM Research と NASA Ames が共同で MPI-I/O の草案作りを行い、移植可能な並列入出力問題についての提案を行った。簡単に言うとこの案は、I/O 処理をメッセージ通信で置き換えるという考えに基づいている。つまり「ファイルに書く」ことは、「メッセージを送信する」ことを意味し、「ファイルから読む」ことは、「メッセージを受信する」ことを意味する。MPI-I/O は MPI に類似した入出力インターフェースを造れという命令を用意し、比較的広い効力を意図するものである。

(c) MPI の実装について

ここで、MPI の実装に関する資料をリストしておく。

会社およびベンダー

- Convex
- Cray
- Hewlett-Packard
- Hughes Aircraft
- IBM
- Intel
- KSR
- Meiko,
- Myricom (makers of high-performance network switches)
- NEC
- PALLAS (a German software company)
- Sun

大学および研究機関

- Argonne National Lab
- U.C. Berkeley
- University of Edinburgh
- University of Illinois
- Mississippi State
- Ohio Supercomputing Center
- Sandia National Lab.

- Australian National University (富士通 AP1000 上に実装)

現在 free で入手可能な実装リスト

- Argonne National Laboratory/Mississippi State University 版.
- Edinburgh Parallel Computing Centre 版 CHIMP anonymous ftp
- Mississippi State University 版 UNIFY (PVM を利用して作られた、MPI のサブセット版)
- Ohio Supercomputer Center 版 LAM (完全な MPI 標準実装で, UNIX WS クラスタ環境で動作する。)
- University of Nebraska at Omaha 版 WinMPI (WinMPI は MS-Windows 3.1 向けの実装である。)

プラットフォーム X 上の MPI のバージョン情報

- 1) MPICH は、並列計算機およびネットワーク接続の WS をサポートしている。

<<並列計算機>>

IBM SP1, SP2 (using various communication options) TMC CM-5 Intel Paragon, IPSC860, Touchstone Delta Ncube2 Meiko CS-2 Kendall Square KSR-1 and KSR-2 SGI and Sun Multiprocessors

<<ネットワーク接続の WS>>

Sun4 family running SunOS or Solaris Hewlett-Packard DEC 3000 and Alpha IBM RS/6000 family SGI Intel 386- or 486-based PC clones running the LINUX or FreeBSD OS

A third-party preliminary Parix implementation for Parsytec-PowerPC based machines (Parix 1.3) is being developed by Lutz Laemmer (laemmer@iib.bauwesen.th-darmstadt.de)

adi は、Parix1.3 上で、良好に動作しているが、T800-systems でも動作するかもしれない。

- 2) CHIMP がサポートする環境

Sun workstations running SunOS 4.1.x or Solaris 2.x SGIs with IRIX 4 or IRIX 5 IBM RS/6000 running AIX3.2 Sequent Symmetry DEC Alpha AXP running OSF1 Meiko Computing Surface with transputer, i860 or SPARC nodes

- 3) UNIFY は PVM の環境に依存している。
- 4) LAM は、ほとんどの UNIX システムをサポートしている。

Sun 4 (sparc), SunOS 4.1.3 Sun 4 (sparc), Solaris 2.3 SGI IRIX 4.0.5
IBM RS/6000, AIX v3r2 DEC AXP, OSF/1 V2.0 HP 9000/755, HP-UX 9.01

LAM を含んでいるベンダとしては i386 (and above), SCO 3.2 v4.2 がある。

- 5) WinMPI は MPICH をベースに Windows 3.1 で動作するが、Microsoft Visual C++ 1.5 が必要である。

MPI 周辺情報

MPI の周辺情報として、C++クラスライブラリには、MPI2 OOMPI, Para++等がある。

以上、並列化プログラミングに関する本節をまとめると以下のとおりになる。

コンピュータの能力を極力引き出すために、ハードウェア技術の発展のみに依存することなく、並列処理が普及してきているが、大規模な科学技術計算を並列処理環境下で行うことは未だに容易なことではなく、並列コンピュータ用ソフトウェア開発に関する知識及び技術が必要となる。並列処理を困難なものにしている主要な原因としては、科学技術計算でよく使用されている Fortran や C 等、逐次型プログラミング言語ではプロセッサの割り当て、データの分散及び通信等が考慮されていないことが挙げられる。そこで、並列処理プログラミングの開発環境を支援するツールとして、並列プログラミング言語、並列処理用ライブラリ、メッセージ・パッシング・ライブラリ、デバッガ、性能評価ツール、並列処理シミュレータ等が提供されており、更に、統合化された並列プログラミング環境をサポートしている超並列コンピュータもある。ユーザはこれらのツールを用いながらデータ分割や機能分割、負荷分散や通信などに関する分析、評価を行いつつ、並列処理プログラムの開発や最適化を行うことができる。最近では、コンピュータアーキテクチャやプログラミング言語に依存しない並列処理記述の業界標準を目指して、並列プログラミング言語における High Performance Fortran の標準化や、メッセージ・パッシング・ライブラリにおける MPI (Message Passing Interface) の標準化が進んでいる。

4.まとめ

2次摂動法に基づいた確率論的有限要素法(PFEM)について概説した。ここでは線形及び非線形問題に適用するために、単一場の変分原理及び3領域の Hu-Washizu の変分原理を用いた。さらに1次近似信頼性法を用いた PFEM を脆性破壊と疲労の信頼性解析に適用した。方法論としては、破壊確率を計算するために用いる最適化問題を解くことにより、信頼性指標を求めるものである。さらに1次信頼性法に混合境界積分方程式法を組み合わせた確率論的境界要素法(SBEM)を曲線的疲労き裂成長の信頼性解析に適用した結果について述べた。

次に確率論的計算における並列処理として、偏微分法、モンテカルロシミュレーション及びその他の方法について、また構造力学計算における並列処理として、サブストラクチャー法、領域分割法及び演算子分離法について概説した。

最後に問題別超並列処理計算プログラミング手法として、マクロ確率過程及びミクロ確率過程の定式化と解法について概説した。また科学技術計算を超並列コンピュータ上で行うために必要な並列化ライブラリとメッセージ・パッシング・ライブラリについても概説した。

謝 言

本論文は、著者が大洗研究所核熱利用研究部高温照射研究室に在籍中に行っていた「構造用脆性材料の微視的破壊力学及び確率論を用いた損傷評価法の開発」（原子力用計算科学クロスオーバー研究）の一環として行った研究成果の一部をとりまとめたものである。研究の実施及びとりまとめに際して、貴重なご助言とご教示をいただいた核熱利用研究部 武藤 康研究主幹、高温照射研究室 林 君夫室長並びに石原正博副主任研究員に謝意を表します。

参考文献

- (1) Belytschko, T. and Liu, W. K., "Probabilistic Finite Elements for Fatigue and Fracture Analysis", Final Report, NASA-CR-191246, 1992.
- (2) Paris, P. C. and Erdogan, F., "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws", J. Basic Eng. ASME, 85, pp. 528-534, 1963.
- (3) Besterfield, G. H., Liu, W. K., Lawrence, M. and Belytschko, T., "Fatigue Crack Growth Reliability by Probabilistic Finite Elements", Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 86, pp. 297-320, 1991.
- (4) Barsoum, R. S., "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics", Int. J. Numer. Methods Eng. 10, pp. 25-37, 1976.
- (5) Henshell, R. D. And Shaw, K. G., "Crack Tip Elements Are Unnecessary", Int. J. Numer. Methods Eng. 9, pp. 495-507, 1975.
- (6) Saouma, V. E., "An Automated Finite Element Procedure for Fatigue Crack Propagation Analysis", Engng. Fracture Mech. 20, pp. 321-333, 1984.
- (7) Lua, Y. J., Liu, W. K. and Belytschko, T., "Elastic Interactions of A Fatigue Crack with A Microdefect by The Mixed Boundary Integral Equation Method", Int. J. Numer. Methods Eng., 1992.
- (8) Telles, J. C. F., "The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems", Lecture Notes in Engineering, 1, Springer-Verlag, 1983.
- (9) Rosenblatt, M., "Remarks on A Multivariate Transformation", Annals of Mathematical Statistics. 23, pp. 470-472, 1952.
- (10) Faravelli, L., "A Response Surface Approach for Reliability Analysis", RILEM Symp. On Stoch. Meth. In Mat. And Struct. Eng., 1986.
- (11) Faravelli, L., "Response Surface Approach for Reliability Analysis", J. Eng. Mech. ASME 115, pp. 2763-2781, 1989.
- (12) Myers, R. H., "Response Surface Methodology", Allyn and Bacon Inc., Boston, 1971.
- (13) Lua, Y. J., Liu, W. K. and Belytschko, T., "Curvilinear Fatigue Crack Reliability Analysis by Stochastic Boundary Element Method", Int. J. Numer. Methods Eng., 1992.
- (14) Sues R. H., Chen H. C., Twisdale L. A. and Martin W. R., "Probabilistic Structural Mechanics Research for Parallel Processing Computers", NASA-CR-187162, 1991.
- (15) Przemieniecki, J. S., "Matrix Structural Analysis of Substructures", J. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol. 1, No. 1, 1963.
- (16) Chan, T. F., Glowinski, R., Periaux, J. And Widlund, O., "Domain Decomposition, Methods for Partial Differential Equations", SIAM, Philadelphia, PA, 1989.
- (17) Farhat, C. H., Felippa, C. A. and Park, K. C., "Implementation Aspects of Concurrent

- Finite Element Computations”, Parallel Computations and Their Impact on Mechanics, Proc. Winter Annual Meeting ASME, December 1987.
- (18) Agarwal, T. K., Storaasli, O. O. and Nguyen, D. T., “A Parallel-Vector Algorithm for Rapid Structural Analysis on High-Performance Computers”, Presented at the AIAA/ASME/ASCE/AHS 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Long Beach, California, April 2-4, 1990.
 - (19) Knuth, D. E., “Seminumerical Algorithms”, The Art of Computer Programming, Vol. 2, Addison-Wesley, Readung, MA, 1973.
 - (20) Fox, G. C., et al., “General Techniques and Regular Problems”, Solving Problems on Concurrent Processors, Vol. I, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
 - (21) Frederickson, P., Hiromoto, R., Jordan, T., Smith, B. And Warnock, T., “Pseudo-Random Trees in Monte Carlo”, Proc. Conf. On Monte Carlo Methods and Future Computer Architectures”, Brookhaven National Laboratory April 2-5, 1983.
 - (22) Brown, F. B., “Vectorized Monte Carlo Methods for Reactor Lattice Analysis”, Conf. On Monte Carlo Methods and Future Computer Architectures, Brookhaven National Laboratory, April 2-5, 1983.
 - (23) Barkai, D., Moriarity, K. J. M. and Rebbi, C., “A Highly Optimized Vectorized Code for Monte Carlo Simulations of SU(3) Lattice Gauge Theories”, Computer Physics Communications 32, p. 1, 1984.
 - (24) Sues, R. H. and Twisdale, L. A., “Probability-Based Design Factors”, DNA Manual for the Design of Hardened Underground Facilities, Chapter 8, ARA 5955, Draft Final, April 1988.
 - (25) Rosenblatt, M., “Remarks on a Multivariate Transformation”, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23, pp. 470-472, 1952.
 - (26) Hohenbichler, M. and Rackwitz, R., “Non-normal Dependent Vectors in Structural Safety”, J. Of Eng. Mech., ASCE 107(6), pp. 1227-1241, 1981.
 - (27) Nataf, A., “Determiniation des Distribution dont les Marges sont Donnees”, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 225, pp. 42-43, 1962.
 - (28) Liu, P-L. and Der Kiureghian, A., “Multivariate Distribution Models with Prescribed Marginals and Covariances”, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 1, No. 2, pp. 105-112, 1986.
 - (29) Wu, Y.-T., Burnside, O. H. and Cruse, T. A., “Probabilistic Methods for Structural Response Analysis”, Proc. Of Applied Mechanics and Engineering Sciences Conference, ASME/SES Summer Meeting, UC Berkeley, June 1988.
 - (1) 中桐, 久田 : 確率有限要素法入門, 培風館, 1985 年 5 月.
 - (31) Papoulis, A., Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill

- (1965). (邦訳, 平岡寛二他共訳, 工学のための応用確率論, 基礎編及び確率過程編, 東海大学出版会 (1970, 1972)).
- (32) 小石, 白鳥, 宮野: 微細構造のゆらぎを考慮した確率有限要素解析の定式化, 日本機械学会第8回計算力学講演会講演論文集, pp.57~58, 1995年11月.
- (33) Lions,J.L., Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control, , pp. 1-125, Science Press, 1981.
- (34) 小石, 加部, 機論, 59-561, A, pp. 1395-1400, 1993.
- (35) 小石, 加部, 機論, 61-587, A, pp. 1467-1472, 1995.
- (36) PVM3 ユーザーズガイド&リファレンスマニュアル日本語版(訳 村田英明), 1995年2月.
- (37) 佐々木誠: ワークステーション等の並列化ソフト PVM について, 伝熱数値解析における HPC 分科会—PVM について.
- (38) MPI Frequently Asked Questions.

This is a blank page.

国際単位系(SI)と換算表

表1 SI基本単位および補助単位

量	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
物質量	モル	mol
光度	カンデラ	cd
平面角	ラジアン	rad
立体角	ステラジアン	sr

表3 固有の名称をもつSI組立単位

量	名称	記号	他のSI単位による表現
周波数	ヘルツ	Hz	s ⁻¹
力	ニュートン	N	kg·m/s ²
圧力、応力 エネルギー、仕事、熱量	パスカル	Pa	N/m ²
工率、放射束	ジュール	J	N·m
電気量、電荷	ワット	W	J/s
電位、電圧、起電力	キーロン	C	A·s
電静容量	ボルト	V	W/A
電気抵抗	オーム	Ω	V/A
コンダクタンス	ジーメンス	S	A/V
磁束密度	ウェーバ	Wb	V·s
磁束密度	テスラ	T	Wb/m ²
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A
セルシウス温度	セルシウス度	°C	
光束度	ルーメン	lm	cd·sr
照度	ルクス	lx	lm/m ²
放射能	ベクレル	Bq	s ⁻¹
吸収線量	グレイ	Gy	J/kg
線量当量	シーベルト	Sv	J/kg

表2 SIと併用される単位

名 称	記 号
分、時、日	min, h, d
度、分、秒	°, ' , "
リットル	l, L
トントン	t
電子ボルト	eV
原子質量単位	u

$$1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ u} = 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

表4 SIと共に暫定的に維持される単位

名 称	記 号
オングストローム	Å
バーン	b
バール	bar
ガル	Gal
キュリー	Ci
レントゲン	R
ラド	rad
レム	rem

$$1 \text{ Å} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ b} = 100 \text{ fm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ bar} = 0.1 \text{ MPa} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2 = 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

$$1 \text{ R} = 2.58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$$

$$1 \text{ rad} = 1 \text{ cGy} = 10^{-2} \text{ Gy}$$

$$1 \text{ rem} = 1 \text{ cSv} = 10^{-2} \text{ Sv}$$

表5 SI接頭語

倍数	接頭語	記号
10 ⁻¹⁸	エクサ	E
10 ⁻¹⁵	ペタ	P
10 ⁻¹²	テラ	T
10 ⁻⁹	ギガ	G
10 ⁻⁶	メガ	M
10 ⁻³	キロ	k
10 ²	ヘクト	h
10 ¹	デカ	da
10 ⁻¹	デシ	d
10 ⁻²	センチ	c
10 ⁻³	ミリ	m
10 ⁻⁶	マイクロ	μ
10 ⁻⁹	ナノ	n
10 ⁻¹²	ピコ	p
10 ⁻¹⁵	フェムト	f
10 ⁻¹⁸	アト	a

(注)

- 表1～5は「国際単位系」第5版、国際度量衡局1985年刊行による。ただし、1eVおよび1uの値はCODATAの1986年推奨値によった。
- 表4には海里、ノット、アール、ヘクタールも含まれているが日常の単位なのでここでは省略した。
- barは、JISでは流体の圧力を表わす場合に限り表2のカテゴリーに分類されている。
- EC閣僚理事会指令ではbar、barnおよび「血圧の単位」mmHgを表2のカテゴリーに入れている。

換 算 表

力	N(=10 ⁵ dyn)	kgf	lbf
1	0.101972	0.224809	
9.80665	1	2.20462	
4.44822	0.453592	1	

$$\text{粘度 } 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}(N\cdot\text{s}/\text{m}^2) = 10 \text{ P(ポアズ)} (\text{g}/(\text{cm}\cdot\text{s}))$$

$$\text{動粘度 } 1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ St(ストーカス)} (\text{cm}^2/\text{s})$$

圧	MPa(=10 bar)	kgf/cm ²	atm	mmHg(Torr)	lbf/in ² (psi)
1	10.1972	9.86923	7.50062 × 10 ³	145.038	
力	0.0980665	1	0.967841	735.559	14.2233
0.101325	1.03323	1	760	14.6959	
1.33322 × 10 ⁻⁴	1.35951 × 10 ⁻³	1.31579 × 10 ⁻³	1	1.93368 × 10 ⁻²	
6.89476 × 10 ⁻³	7.03070 × 10 ⁻²	6.80460 × 10 ⁻²	51.7149	1	

エネルギー 仕事・熱量	J(=10 ⁷ erg)	kgf·m	kW·h	cal(計量法)	Btu	ft · lbf	eV	1 cal = 4.18605 J(計量法) = 4.184 J(熱化学) = 4.1855 J(15 °C) = 4.1868 J(国際蒸気表)
1	0.101972	2.77778 × 10 ⁻⁷	0.238889	9.47813 × 10 ⁻⁴	0.737562	6.24150 × 10 ¹⁸		
9.80665	1	2.72407 × 10 ⁻⁶	2.34270	9.29487 × 10 ⁻³	7.23301	6.12082 × 10 ¹⁹		
3.6 × 10 ⁶	3.67098 × 10 ⁵	1	8.59999 × 10 ⁵	3412.13	2.65522 × 10 ⁶	2.24694 × 10 ²⁵		
4.18605	0.426858	1.16279 × 10 ⁻⁶	1	3.96759 × 10 ⁻³	3.08747	2.61272 × 10 ¹⁹	仕事率 1 PS(仮馬力)	
1055.06	107.586	2.93072 × 10 ⁻⁴	252.042	1	778.172	6.58515 × 10 ²¹	= 75 kgf·m/s	
1.35582	0.138255	3.76616 × 10 ⁻⁷	0.323890	1.28506 × 10 ⁻³	1	8.46233 × 10 ¹⁸	= 735.499 W	
1.60218 × 10 ⁻¹⁹	1.63377 × 10 ⁻²⁰	4.45050 × 10 ⁻²⁶	3.82743 × 10 ⁻²⁰	1.51857 × 10 ⁻²²	1.18171 × 10 ⁻¹⁹	1		

放射能	Bq	Ci	吸収線量	Gy	rad
1	2.70270 × 10 ⁻¹¹	1	0.01	100	1

照 射 線 量	C/kg	R
1	3876	1

線量当量	Sv	rem
1	100	1

