

JAERI-Tech

96-018



円筒タンク液面傾斜に伴う幾何学的
バックリングの境界要素解析
(受託研究)

1996年5月

山根祐一・板垣正文・佐橋直樹*

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

本レポートは、日本原子力研究所が不定期に公刊している研究報告書です。
入手の問合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課(〒319-11 茨城県那珂郡東海村)あて、お申し越しください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター(〒319-11 茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内)で複写による実費頒布をおこなっております。

This report is issued irregularly.
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1996

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 (株)高野高速印刷

円筒タンク液面傾斜に伴う幾何学的バックリングの境界要素解析

日本原子力研究所東海研究所燃料サイクル安全工学部

山根 祐一・板垣 正文・佐橋 直樹*

(1996年4月5日受理)

円筒タンク液面傾斜に伴う幾何学的バックリングの変化を3次元境界要素法を用いて解析した。円筒形状において液面傾斜がバックリングに与える効果は円筒の直径 D と高さ H の比に依存する。閾値 $H/D \sim 0.454$ が存在し、 H/D がこれより大きい場合バックリングは液面傾斜とともに単調に増加する。 H/D がこれより小さい場合、バックリングは液面傾斜とともに単調に減少する。また、これに伴って反応度が増加する。定常臨界実験装置STACYの直径60cmの円筒タンクにおいては、液位が40cm以下では臨界にならないように運転される。この時、液面傾斜の効果は反応度を下げるように作用することが確認できた。また、このような様々な幾何形状でのバックリングの系統的な解析に境界要素法が有効であることがわかった。

この報告書は、電源開発促進対策特別会計法に基づく科学技術庁からの受託として行なった研究成果の一部である。

東海研究所：〒319-11 茨城県那珂郡東海村白方白根2-4

* (株)構造計画研究所

Boundary Element Analysis of the Geometric Buckling of
the Liquid Fuel with a Slant Surface in a Cylindrical Tank

Yuichi YAMANE, Masafumi ITAGAKI and Naoki SAHASHI *

Department of Fuel Cycle Safety Research
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken

(Received April 5, 1996)

The geometric buckling of the liquid fuel with a slant surface in a cylindrical tank has been investigated using the three-dimensional Boundary Element Method. The effect of the surface slant on the buckling depends on the ratio of the height H to the diameter D of the liquid fuel shape. The buckling increases with the increase in the surface slant angle, if the ratio H/D is larger than a threshold value, 0.454 and vice versa. Also, if H/D is smaller than this value, the reactivity increases with the increase in the slant angle. When the cylindrical tank which diameter is 60cm is used, the Static Experimental Critical Facility, STACY, is operated to be critical only for the solution level of more than 40cm. Under such condition, the surface slant decreases the reactivity. The Boundary Element Method is useful for extensive survey analyses of the buckling for various types of geometries.

Keywords : Boundary Element Method, Slant Surface, Neutron Diffusion Equation,
Geometrical Buckling, STACY

This work was carried out by the Japan Atomic Energy Research Institute (JAERI) under entrustment by the Science and Technology Agency (STA) of Japan.

* Kozo Keikaku Engineering Inc.

目 次

1. 序 言	1
2. 方 法	1
2.1 境界要素法による解析モデル	1
2.2 境界要素法による幾何学的バックリングの計算法	3
3. 結 果	4
3.1 傾きのない円筒に対する解析解と境界要素解の比較	4
3.2 液面傾斜時の液位高さの変化によるバックリングの変化	5
3.3 液面の傾斜角度の変化によるバックリングの変化	7
3.4 考 察	9
4. 結 言	9
参考文献	10
付 録	11

Contents

1. Introduction	1
2. Method	1
2.1 Modelling for Boundary Element Analyses	1
2.2 Buckling Calculation using Boundary Element Method	3
2. Results	4
3.1 Analytic and BEM Solutions for a Cylindrical Shape	4
3.2 Geometrical Bucklings for Various Heights	5
3.3 Geometrical Bucklings for Various Slant Angles	7
3.4 Discussion	9
4. Conclusion	9
References	10
Appendixes	11

1. 序 言

固体状燃料に比べて溶液状燃料はその幾何形状が容易に変わり得ることから、溶液燃料体系の臨界安全性を議論する際には幾何形状の変化に伴う反応度効果を定量的に評価しておくことが重要である。地震時や誤操作に伴って溶液タンクの液面が傾斜または動揺（スロッシング）した時に体系の幾何形状が変化し、条件によっては著しい臨界超過を引き起こす恐れのあることは良く知られている¹⁾。

臨界性に与える幾何形状の効果を示す指標として、従来より「幾何学的バックリング」が使われている。裸の体系に対する幾何学的バックリング B_g^2 は、ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + B_g^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

の最小固有値と定義されており、通常、中性子束分布 $\phi(\mathbf{r})$ には、体系の外挿境界で零とする境界条件が課せられている。臨界安全評価の対象となる体系の形状、寸法に対して幾何学的バックリングがわかれば、

$$B_m^2 = (\nu \Sigma_f - \Sigma_a) / D \quad (2)$$

で定義される材料バックリングと大小比較することにより、この体系が臨界超過か未臨界かを簡単に判定することができる。ここに、 $\nu \Sigma_f$ 、 Σ_a 及び D はそれぞれ中性子生成断面積、吸収断面積及び拡散係数である。

直方体、球、円柱などのいくつかの単純な幾何形状に対しては、幾何学的バックリングは簡単な数式で与えられている²⁾。しかし、タンク液面の動揺や傾斜の場合のような不規則または複雑な幾何形状に対する幾何学的バックリングは、対象ごとに数値計算に頼らざるをえない。

有限要素法が領域内の体積全体に数値計算用のメッシュを切らなければならないのに対して、境界要素法 (Boundary Element Method: BEM) は境界上のみメッシュを切ればよい。このため境界要素法は多くの幾何形状について系統的かつ効率的に解析を行なうのに適している。

本研究では、円筒形状のタンク内に溶液燃料が一定の高さまで満たされた体系を考える。このような体系において、

- (i) 液面が水平より傾いた場合に幾何学的バックリングに与える効果
- (ii) 円筒の直径と高さの比が傾斜によるバックリングの変化に与える効果

を検討する。また応用として、定常臨界実験装置 STACY の直径 60cm の炉心について検討する。

2. 方 法

2.1 境界要素法による解析モデル

扱う体系は以下のとおりである (Fig.1 参照)。直径 D が 60cm、高さ H が 10 ~ 100cm である円筒を考える。円筒の上端面を液面とし、液面が傾いた時その法線と円筒の軸とのなす

1. 序 言

固体状燃料に比べて溶液状燃料はその幾何形状が容易に変わり得ることから、溶液燃料体系の臨界安全性を議論する際には幾何形状の変化に伴う反応度効果を定量的に評価しておくことが重要である。地震時や誤操作に伴って溶液タンクの液面が傾斜または動揺（スロッシング）した時に体系の幾何形状が変化し、条件によっては著しい臨界超過を引き起こす恐れのあることは良く知られている¹⁾。

臨界性に与える幾何形状の効果を示す指標として、従来より「幾何学的バックリング」が使われている。裸の体系に対する幾何学的バックリング B_g^2 は、ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \phi(r) + B_g^2 \phi(r) = 0 \quad (1)$$

の最小固有値と定義されており、通常、中性子束分布 $\phi(r)$ には、体系の外挿境界で零とする境界条件が課せられている。臨界安全評価の対象となる体系の形状、寸法に対して幾何学的バックリングがわかれば、

$$B_m^2 = (\nu \Sigma_f - \Sigma_a) / D \quad (2)$$

で定義される材料バックリングと大小比較することにより、この体系が臨界超過か未臨界かを簡単に判定することができる。ここに、 $\nu \Sigma_f$ 、 Σ_a 及び D はそれぞれ中性子生成断面積、吸収断面積及び拡散係数である。

直方体、球、円柱などのいくつかの単純な幾何形状に対しては、幾何学的バックリングは簡単な数式で与えられている²⁾。しかし、タンク液面の動揺や傾斜の場合のような不規則または複雑な幾何形状に対する幾何学的バックリングは、対象ごとに数値計算に頼らざるをえない。

有限要素法が領域内の体積全体に数値計算用のメッシュを切らなければならないのに対して、境界要素法（Boundary Element Method: BEM）は境界上のみメッシュを切ればよい。このため境界要素法は多くの幾何形状について系統的かつ効率的に解析を行なうのに適している。

本研究では、円筒形状のタンク内に溶液燃料が一定の高さまで満たされた体系を考える。このような体系において、

- (i) 液面が水平より傾いた場合に幾何学的バックリングに与える効果
- (ii) 円筒の直径と高さの比が傾斜によるバックリングの変化に与える効果

を検討する。また応用として、定常臨界実験装置 STACY の直径 60cm の炉心について検討する。

2. 方 法

2.1 境界要素法による解析モデル

扱う体系は以下のとおりである（Fig.1 参照）。直径 D が 60cm、高さ H が 10～100cm である円筒を考える。円筒の上端面を液面とし、液面が傾いた時その法線と円筒の軸とのなす

角を θ とする。この時高さ H は傾いた面と円筒軸との交点から下端面までの距離とする。簡単のため、以下の議論では、中性子束分布の外挿距離は無視し、対象とする領域の全表面において中性子束零の境界条件が課せられているものとする。

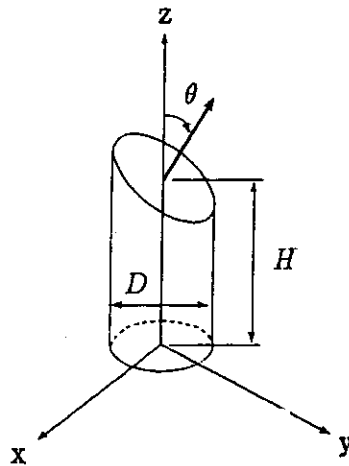


Fig. 1 液面傾斜を伴う円筒体系。 D : 直径 (cm)、 H : 高さ (cm)、 θ : 液面の傾き ($^{\circ}$)。

$\theta = 0^{\circ}$ の時、すなわち水平液面に対しては幾何学的バックリング Bg^2 は解析的に求めることができ

$$Bg^2 = \left(\frac{j_{0,0}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2; \quad R = D/2 \quad (3)$$

と表される²⁾。ここで、 $j_{0,0}$ (~ 2.405) は第一種零次ベッセル関数の零点である。液面が下端面と交わらない範囲で θ を変化させて ($\tan \theta < 2H/D$)、その時の Bg^2 の変化を数値計算によって求める。Fig.1 が示すように、計算される領域は液体の占める領域全体とした。この領域の体積は H と D を定めれば決り、傾き θ を変えても変化しない。そのため材料バックリング Bm^2 が変化しないので、計算で求められた幾何学的バックリング Bg^2 と比較することにより、液面の傾きにもなう反応度変化をとらえることができる。数値計算には原研で開発した3次元境界要素計算コードMRBEM³⁾⁴⁾を用いた(付録1参照)。

計算には 1/2 対称モデルを用いた。円筒軸を含む対称面で円筒を分割し片方の領域でのみ計算を行なうことにより、計算量を節約できた。境界要素については、一要素あたり 9 個の節点を持つ 2 次のアイソパラメトリック要素³⁾を採用した。Fig.2 に示すように、計算する領域の上下の面にはそれぞれ 6 要素を配し、円周方向(半円周)は 4 分割、軸方向は H の大きさに応じて 3~5 分割した。鏡像の考え方³⁾により、対称面には境界要素を設けなかった。

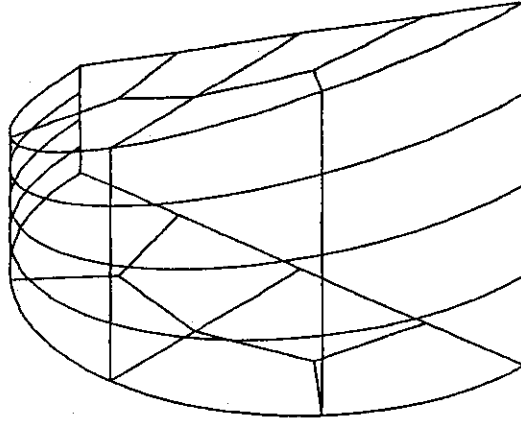


Fig. 2 計算で用いられた境界要素メッシュの例。

2.2 境界要素法による幾何学的バックリングの計算法

エネルギー1群の場合, MRBEMコードでは幾何学的バックリング Bg^2 は以下に示すように, 領域表面の中性子流を境界積分して求められる。

中性子源反復法⁵⁾の反復第 m 回目では, 幾何学的バックリングは定義より

$$[Bg^{(m)}]^2 = \frac{-\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)}(\mathbf{r}) d\Omega}{\int_{\Omega} \phi^{(m)}(\mathbf{r}) d\Omega} \quad (4)$$

と書かれる。ここで, 考えている円筒型形状の内部領域を Ω で表す。領域 Ω の境界を Γ で表すと, 分子に現れる領域積分はガウスの発散定理から

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)}(\mathbf{r}) d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \phi^{(m)}(\mathbf{r}) d\Gamma = -\int_{\Gamma} J^{(m)}(\mathbf{r}) d\Gamma / D; \quad J^{(m)} = -D \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial n} \quad (5)$$

のように中性子流の境界積分に書き直すことができる。ここで, $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ は $\nabla \phi$ の Γ 面の法線方向(外向きが正)の成分を表した。元の中性子拡散方程式にガウスの発散定理を適用すると, 式(4)の分母は, 中性子源反復の1回目では, 領域の体積を V として

$$\int_{\Omega} \phi^{(1)}(\mathbf{r}) d\Omega = \frac{S_0}{\Sigma_a} \cdot V - \frac{1}{\Sigma_a} \int_{\Gamma} J^{(1)}(\mathbf{r}) d\Gamma, \quad V = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{r}{3} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma, \quad (6)$$

反復の m 回目では

$$\int_{\Omega} \phi^{(m)}(\mathbf{r}) d\Omega = \frac{1}{\Sigma_a} \cdot \frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff}^{(m-1)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-1)}(\mathbf{r}) d\Omega - \frac{1}{\Sigma_a} \int_{\Gamma} J^{(m)}(\mathbf{r}) d\Gamma \quad (7)$$

の漸化式で与えられる。式(7)の右辺第1項の領域積分は $(m-1)$ 回で既知なので、式(6)より出発すれば、結局、バックリングは境界積分のみで表わされる。ここで、反復 m 回目で実効増倍率は、

$$k_{eff}^{(m)} = \begin{cases} \int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(1)}(r) d\Omega / (S_0 \cdot V) & (m=1), \\ \frac{\int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m)}(r) d\Omega}{\int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m-1)}(r) d\Omega / k_{eff}^{(m-1)}} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (8)$$

と計算される。なお、式(8)の意味するところは、

$$\int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m-1)} d\Omega / k_{eff}^{(m-1)} = \int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m)} d\Omega / k_{eff}^{(m)} \quad (9)$$

のように規格化されていることであるから、式(9)を式(7)に代入して

$$(\nu \Sigma_f / k_{eff}^{(m)} - \Sigma_a) \int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega = \int_{\Gamma} J^{(m)} d\Gamma \quad (10)$$

を得る。さらに式(5)を式(10)に適用すれば、

$$[Bg^{(m)}]^2 \equiv \frac{\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)} d\Omega}{\int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega} = \frac{\nu \Sigma_f / k_{eff}^{(m)} - \Sigma_a}{D} \quad (11)$$

となり、式(4)で定義した幾何学的バックリングは、式(8)で求められる $k_{eff}^{(m)}$ に基づいて

$$[Bg^{(m)}]^2 = \frac{\nu \Sigma_f / k_{eff}^{(m)} - \Sigma_a}{D} \quad (12)$$

として求めても全く等しい値となる。

3. 結 果

3.1 傾きのない円筒に対する解析解と境界要素解の比較

境界要素法による計算結果の信頼性を検証するために、傾きのない円筒体系についてMRBEMコードによる結果と解析解の値を比較した。Table 1に見られるように、両者は良い一致を示している。

Table 1 直径 D 、高さ H の円筒に対する幾何学的バックリングの境界要素解と解析解

$H(cm)$	$D(cm)$	境界要素解	解析解	相対誤差(%)
20	60	0.0311071	0.0310998	0.023
40	60	0.01260028	0.0125943	0.047
60	60	0.0091732	0.00916732	0.064
80	60	0.007973725	0.00796789	0.073
100	60	0.007418553	0.00741272	0.079

の漸化式で与えられる。式(7)の右辺第1項の領域積分は $(m-1)$ 回で既知なので、式(6)より出発すれば、結局、バックリングは境界積分のみで表わされる。ここで、反復 m 回目で実効増倍率は、

$$k_{eff}^{(m)} = \begin{cases} \int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(1)}(r) d\Omega / (S_0 \cdot V) & (m=1), \\ \frac{\int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m)}(r) d\Omega}{\int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m-1)}(r) d\Omega / k_{eff}^{(m-1)}} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (8)$$

と計算される。なお、式(8)の意味するところは、

$$\int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m-1)} d\Omega / k_{eff}^{(m-1)} = \int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m)} d\Omega / k_{eff}^{(m)} \quad (9)$$

のように規格化されていることであるから、式(9)を式(7)に代入して

$$(\nu \Sigma_f / k_{eff}^{(m)} - \Sigma_a) \int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega = \int_{\Gamma} J^{(m)} d\Gamma \quad (10)$$

を得る。さらに式(5)を式(10)に適用すれば、

$$[Bg^{(m)}]^2 \equiv \frac{\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)} d\Omega}{\int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega} = \frac{\nu \Sigma_f / k_{eff}^{(m)} - \Sigma_a}{D} \quad (11)$$

となり、式(4)で定義した幾何学的バックリングは、式(8)で求められる $k_{eff}^{(m)}$ に基づいて

$$[Bg^{(m)}]^2 = \frac{\nu \Sigma_f / k_{eff}^{(m)} - \Sigma_a}{D} \quad (12)$$

として求めても全く等しい値となる。

3. 結 果

3.1 傾きのない円筒に対する解析解と境界要素解の比較

境界要素法による計算結果の信頼性を検証するために、傾きのない円筒体系についてMRBEMコードによる結果と解析解の値を比較した。Table 1に見られるように、両者は良い一致を示している。

Table 1 直径 D 、高さ H の円筒に対する幾何学的バックリングの境界要素解と解析解

$H(cm)$	$D(cm)$	境界要素解	解析解	相対誤差(%)
20	60	0.0311071	0.0310998	0.023
40	60	0.01260028	0.0125943	0.047
60	60	0.0091732	0.00916732	0.064
80	60	0.007973725	0.00796789	0.073
100	60	0.007418553	0.00741272	0.079

3.2 液面傾斜時の液位高さの変化によるバックリングの変化

Fig.3 は、円筒の直径 D を 60cm に固定して液位高さ H を変えた時のバックリングの変化である。点線は $\theta = 0^\circ$ の解析解、 \diamond は $\theta = 15^\circ$ の数値計算結果を表している。 $H \sim 30\text{cm}$ 付近を境にして、液位が低く平たい形状（いわゆるバンケーキ型形状）では液面が水平の時と傾斜した時のバックリングの差が大きいことがわかる。これに対して、液位が高く細長い形状ではバックリングの差は小さい。 $\theta = 15^\circ$ の場合、平たい形状において液面が傾くと液体全体の形状が大きく変化し、洩れが小さくなるのに対して、細長い形状では液面が傾いても全体の形状はそれほど変わらないことによると理解される。

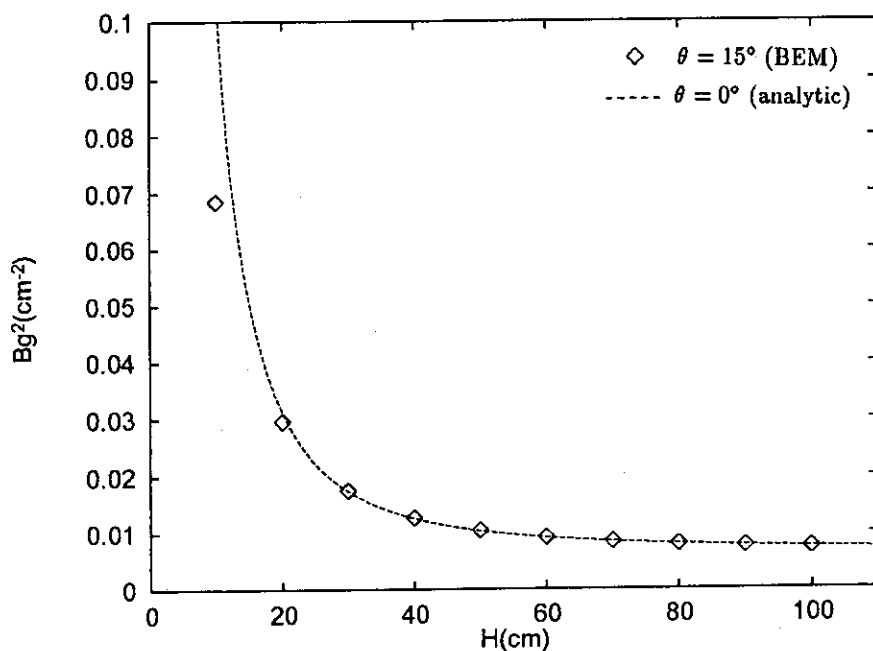


Fig. 3 $D = 60\text{cm}$ 、 $\theta = 15^\circ$ での液位高さ H と幾何学的バックリング Bg^2 の関係。

傾き θ をさらに大きくして ($\theta = 30^\circ$) 同様にバックリングを求めたのが Table 2 及び Fig.4 である。 $\theta = 15^\circ$ の場合と同じく、ある液位 (H_c とする) を閾値として、それよりも液位が低い場合 ($H < H_c$) バックリングが大幅に減少している。液位が高い場合 ($H > H_c$) にはわずかにバックリングが増加している。Table 2 より $H_c \sim 27.25\text{cm}$ である。

Table 2 $D = 60\text{cm}$ 、 $\theta = 30^\circ$ での液位高さ H と幾何学的バックリング Bg^2 の関係。

$H(\text{cm})$	$D(\text{cm})$	H/D 比	境界要素解	$\theta = 0^\circ$ の解析解
20	60	0.3333	0.027572	< 0.031100
24	60	0.4	0.022688	< 0.023561
26	60	0.4333	0.020774	< 0.021026
27	60	0.45	0.019921	< 0.019964
27.15	60	0.4525	0.019799	< 0.019815
27.2	60	0.4533	0.019758	< 0.019766
27.225	60	0.4538	0.019738	< 0.019742
27.25	60	0.4542	0.019718	0.019717
27.275	60	0.4546	0.019698	> 0.019693
27.5	60	0.4583	0.019519	> 0.019477
28	60	0.4667	0.019131	> 0.019015
30	60	0.5	0.017717	> 0.017392
40	60	0.6667	0.013045	> 0.012594

なお、Table 2 で $\theta = 0^\circ$ の時の幾何学的バックリングの解析解

$$Bg^2 = \left(\frac{j_{0,0}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2; R = D/2 \quad (3)$$

において、 $j_{0,0} = 2.4048255577$ (第一種ベッセル関数 $J_0(x)$ の零点⁶⁾) を用いた。

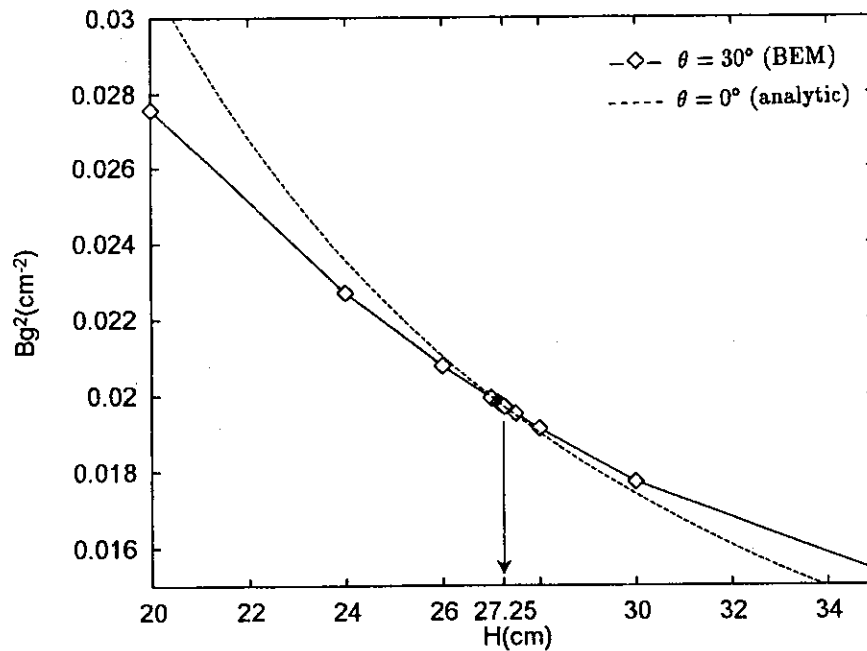


Fig. 4 $D = 60\text{cm}$ 、 $\theta = 30^\circ$ での液位高さ H と幾何学的バックリング Bg^2 との関係。

3.3 液面の傾斜角度の変化によるバックリングの変化

液位が閾高さ ($H_c = 27.25\text{cm}$) よりも低い場合と高い場合の2通りについて液面の傾き θ を変えて幾何学的バックリングを求めたのが Fig.5a 及び Fig.5b である。

液位が低い場合 ($H = 20\text{cm}$)、バックリングは液面の傾きとともに単調に減少する。これは中性子の洩れが、液面が傾くことによって小さくなることを意味している。このような体系が $\theta = 0^\circ$ で臨界に近い状態にあれば、液面が傾くことによって容易に臨界を超えることになる。

液位が高い場合 ($H = 60\text{cm}$)、液面の傾き θ に対してバックリングの変化は微小であるが、スケールを拡大した Fig.5b を見ると傾き θ とともに単調に増加する傾向を持っていることがわかる。つまり液位が十分に高ければ、液面の傾斜は中性子の洩れを大きくする効果を持っている。したがってこのような形状は平たい形状に比べてより安全である。

Fig.6 は液位 40cm で液面が大きく傾斜した場合まで計算した結果である。この場合もバックリングは θ とともに増大する傾向を持っている。STACYで用いられる直径 60cm の炉心タンクについては、液位 40cm 以下では臨界にならないように定められている。ここでは、少なくとも液位が 40cm 以上であれば、液面傾斜の効果が中性子の洩れを大きくすることによって反応度を下げるように作用することが確認できた。

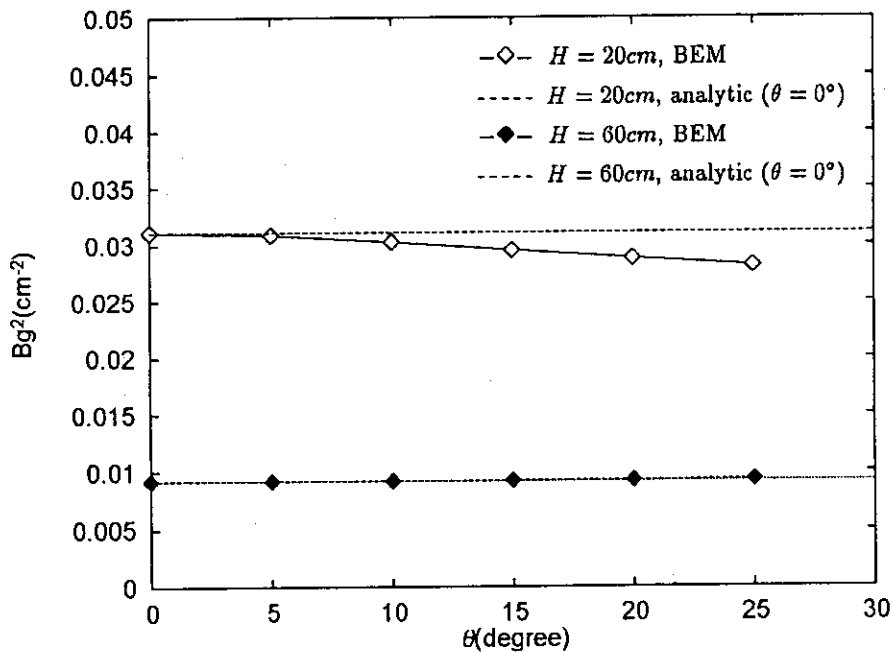


Fig. 5a $D = 60\text{cm}$ での液面の傾き θ と幾何学的バックリング Bg^2 との関係。

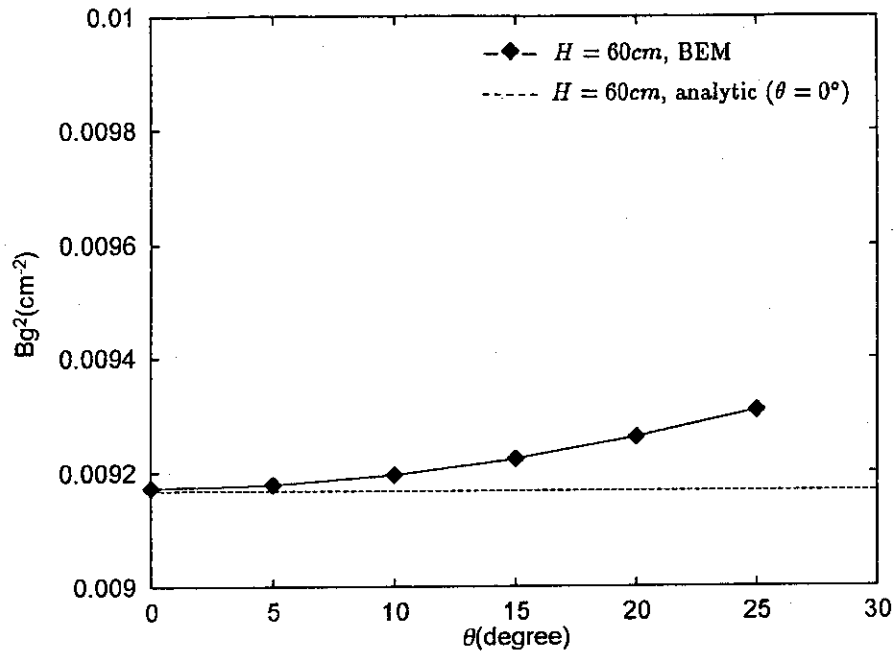


Fig. 5b Fig.5aで $H = 60\text{cm}$ のケースを y 軸が $0.009 \sim 0.01$ の範囲で描いたグラフ。

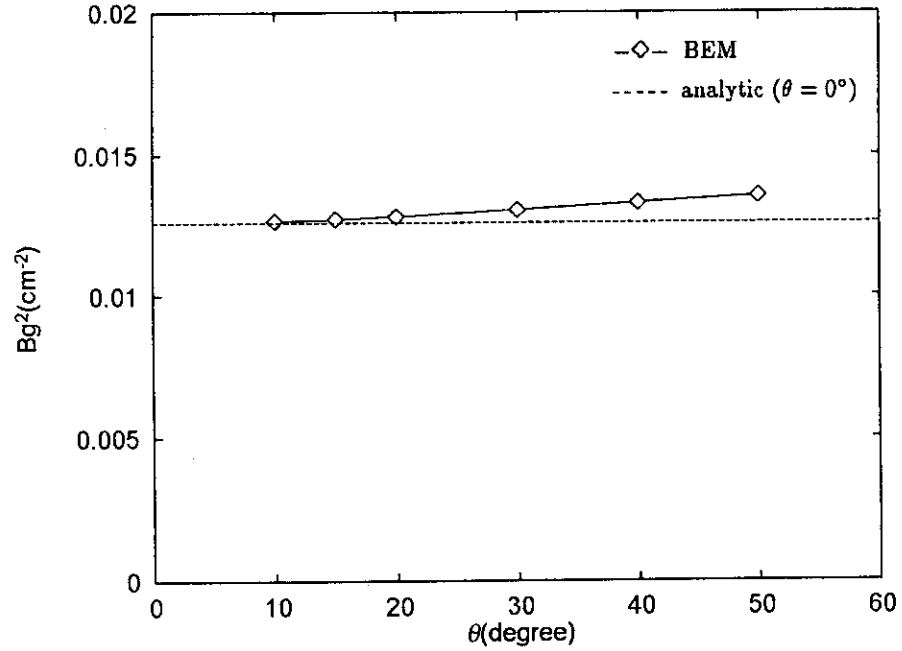


Fig. 6 $D = 60\text{cm}$ 、 $H = 40\text{cm}$ での液面の傾き θ と幾何学的バックリング Bg^2 との関係。

3.4 考察

これまでの議論は全て直径 60cm の円筒タンクに対する解析結果のみに基づいている。液面傾斜の効果が幾何学的バックリングを増加させるか減少させるかは形状の寸法の絶対的な大きさには依存しない。なぜなら、互いに相似で半径方向、高さ方向の寸法が各々、定数 α 倍異なる 2 つの形状についてはその中性子束分布は相似であり、一方の形状の幾何学的バックリングは他方のその $\frac{1}{\alpha^2}$ 倍となるのみだからである（付録 2 参照）。このため、液面傾斜の効果の閾値は体系の寸法の絶対値にはよらず、円筒の直径 D と高さ H の比だけで決まる。Table 2 の結果から、液面傾斜による反応度増減の閾値は $H/D \sim 0.454$ である。

4. 結 言

液面傾斜により幾何学的バックリングが減少するか増大するかの閾値は、円筒の直径 D と高さ H の比がおおよそ $H/D \sim 0.454$ であることがわかった。 H/D がこれより大きい場合、バックリングは液面傾斜とともに単調に増加する。 H/D が閾値より小さい場合、バックリングは液面傾斜とともに単調に減少する。また、通常運転条件下の定常臨界実験装置 STACY において液面傾斜の効果は反応度を下げるように作用することが確認できた。

このような系統的な解析に境界要素法が有効であることがわかった。種々の幾何形状に対する定常状態でのより詳しい解析及びスロッシング等の非定常状態についての解析が今後の課題である。

3.4 考察

これまでの議論は全て直径 60cm の円筒タンクに対する解析結果のみに基づいている。液面傾斜の効果が幾何学的バックリングを増加させるか減少させるかは形状の寸法の絶対的な大きさには依存しない。なぜなら、互いに相似で半径方向、高さ方向の寸法が各々、定数 α 倍異なる 2 つの形状についてはその中性子束分布は相似であり、一方の形状の幾何学的バックリングは他方のその $\frac{1}{\alpha^2}$ 倍となるのみだからである（付録 2 参照）。このため、液面傾斜の効果の閾値は体系の寸法の絶対値にはよらず、円筒の直径 D と高さ H の比だけで決まる。Table 2 の結果から、液面傾斜による反応度増減の閾値は $H/D \sim 0.454$ である。

4. 結 言

液面傾斜により幾何学的バックリングが減少するか増大するかの閾値は、円筒の直径 D と高さ H の比がおおよそ $H/D \sim 0.454$ であることがわかった。 H/D がこれより大きい場合、バックリングは液面傾斜とともに単調に増加する。 H/D が閾値より小さい場合、バックリングは液面傾斜とともに単調に減少する。また、通常運転条件下の定常臨界実験装置 STACY において液面傾斜の効果は反応度を下げないように作用することが確認できた。

このような系統的な解析に境界要素法が有効であることがわかった。種々の幾何形状に対する定常状態でのより詳しい解析及びスロッシング等の非定常状態についての解析が今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) Suzuki, T. and Miyoshi, Y. : "Measurements of Reactivity Effects Caused by Surface Waves Excited in Nuclear Fuel Systems Having a Free Surface", J. Nucl. Sci. Technol., Vol.23, No.9, pp.840-842 (September 1986).
- 2) Glasstone, S. and Edlund, M.C. : "The Elements of Nuclear Reactor Theory", Van Nostrand, New York (1952).
- 3) Itagaki, M. and Sahashi, N. : "Three-Dimensional Isoparametric Boundary Element Method for Solving Neutron Diffusion Equations", J. Nucl. Sci. Technol., Vol.33, No.1, pp.7-16 (January 1996).
- 4) Itagaki, M. and Sahashi, N. : "Three-Dimensional Multiple Reciprocity Boundary Element Method for One-Group Neutron Diffusion Eigenvalue Computations", J. Nucl. Sci. Technol., Vol.33, No.2, pp.101-109 (February 1996).
- 5) Wachspress, E.L. : "Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics", Prentice-Hall (1966).
- 6) Abramowitz, M. and Stegun, I.A. : "Handbook of Mathematical Functions", Dover (1965).

付 録

1. 境界要素法コードMRBEMの概要

MRBEMコードは、境界要素法を用いて3次元の中性子拡散方程式を解くことを目的として開発された計算コードで、

- アイソパラメトリック非適合要素を用いている。
- 多重相反法を用いることでソース項を境界積分化している。
- Wielandt の原点移動法を用いて中性子源反復と多重相反計算の収束を安定にし加速させている。

という3つの特徴を持っている。

中性子エネルギー1群モデルによる臨界計算の場合、中性子拡散方程式は

$$-D\nabla^2\phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a\phi(\mathbf{r}) = (\nu\Sigma_f/k_{eff})\phi(\mathbf{r}) \quad (\text{A1})$$

と書かれる。Wielandt 中性子源反復法を適用するためにこれを書き換えると、反復の第 m 回でこの式は

$$-D\nabla^2\phi^{(m)}(\mathbf{r}) + \tilde{\Sigma}_a\phi^{(m)}(\mathbf{r}) = S^{(m)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} S_0 = 1.0 & (m=1), \\ \nu\Sigma_f\phi^{(m-1)}(\mathbf{r})/\lambda^{(m-1)} & (m \geq 2), \end{cases} \quad (\text{A2})$$

$$\tilde{\Sigma}_a = \Sigma_a - \nu\Sigma_f/\lambda_e, \quad \frac{1}{\lambda^{(m-1)}} = \frac{1}{k_{eff}^{(m-1)}} - \frac{1}{\lambda_e}, \quad (\text{A3})$$

と書き直される。 λ_e は実効増倍率 k_{eff} の推定値である。この修正された拡散方程式 (A2) に対応する境界積分方程式は

$$DC_i\phi^{(m)}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \phi^{(m)}(\mathbf{r})J_i^{*(0)}(\mathbf{r})d\Gamma - \int_{\Gamma} J^{(m)}(\mathbf{r})\phi_i^{*(0)}(\mathbf{r})d\Gamma + Q_i^{(m)}(\mathbf{r}), \quad (\text{A4})$$

$$Q_i^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^{(m-1)}} \int_{\Omega} \nu\Sigma_f\phi^{(m-1)}(\mathbf{r})\phi_i^{*(0)}(\mathbf{r})d\Omega, \quad (\text{A5})$$

ここで、高次基本解 $\phi_i^{*(L)}(\mathbf{r})$ は、 $B_0^2 = -\tilde{\Sigma}_a/D$ として

$$\begin{cases} \nabla^2\phi_i^{*(L)}(\mathbf{r}) + B_0^2\phi_i^{*(L)}(\mathbf{r}) + \phi_i^{*(L-1)}(\mathbf{r}) = 0 & (L \geq 1), \\ \nabla^2\phi_i^{*(0)}(\mathbf{r}) + B_0^2\phi_i^{*(0)}(\mathbf{r}) + \delta_i = 0 & (L = 0), \end{cases} \quad (\text{A6})$$

を満たす無限大体系に対する解である。 i は特異点を表す。領域積分で定義されるソース項 $Q_i^{(m)}(\mathbf{r})$ は

$$Q_i^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{S_0}{DB_0^2} \left(DC_i - \int_{\Gamma} J_i^{*(0)}(\mathbf{r})d\Gamma \right) \quad (m=1), \quad (\text{A7})$$

$$Q_i^{(m)}(\mathbf{r}) = \sum_{L=1}^{m-1} \left(\prod_{s=1}^L \frac{\nu\Sigma_f}{D\lambda^{(m-s)}} \right) \left(\int_{\Gamma} \phi^{(m-L)}(\mathbf{r})J_i^{*(L)}(\mathbf{r})d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_i^{*(L)}(\mathbf{r})J^{(m-L)}(\mathbf{r})d\Gamma \right) + \left(\prod_{L=1}^{m-1} \frac{\nu\Sigma_f}{D\lambda^{(m-L)}} \right) \cdot Z_i^{(m-1)}(\mathbf{r}) \quad (m \geq 2), \quad (\text{A8})$$

のように境界積分化される。ここで

$$\begin{aligned} Z_i^{(m-1)}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{B_0^2} \left(Z_i^{(m-2)}(\mathbf{r}) - \frac{S_0}{D} \int_{\Gamma} J_i^{*(m-1)}(\mathbf{r}) d\Gamma \right) \quad (m \geq 2), \\ Z_i^{(0)}(\mathbf{r}) = Q^{(1)}(\mathbf{r}) &= -\frac{S_0}{DB_0^2} \left(DC_i - \int_{\Gamma} J_i^{*(0)}(\mathbf{r}) d\Gamma \right) \quad (m = 1), \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

である。

このため、境界積方程式 (A4) は領域表面の中性子束と中性子流のみで記述される。従って領域内部を一切メッシュ分割することなく、表面のみを離散化して中性子束 ϕ 、幾何学的バックリング Bg^2 といった物理量を計算できる。具体的な離散化の方法、境界上の節点における中性子束を全て求めた後に領域内部の任意点の中性子束を求める計算の流れ、実効増倍率や幾何学的バックリングの求め方の詳細は文献 3)4) に記されている。

2. 二つの相似な形状に対する幾何学的バックリング

互いに形状が相似である2つの領域 Ω_0 及び Ω_1 を考える。これらの領域はそれぞれが2つの異なった座標系 (x_0, y_0, z_0) 、 (x_1, y_1, z_1) で表されているとする。それぞれの領域において、幾何学的バックリング B_0^2 、 B_1^2 は中性子束分布 ϕ_0 、 ϕ_1 に対する以下の方程式

$$\nabla_0^2 \phi_0(x_0, y_0, z_0) + B_0^2 \phi_0(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad (\text{A10})$$

$$\nabla_1^2 \phi_1(x_1, y_1, z_1) + B_1^2 \phi_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \quad (\text{A11})$$

を満たすように定められる。2領域の形状の相似比が定数 α であるとする $x_1 = \alpha x_0, y_1 = \alpha y_0, z_1 = \alpha z_0$, とおくことにより、 ∇_1^2 は (x_0, y_0, z_0) 座標系で

$$\nabla_1^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial (\alpha x_0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (\alpha y_0)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (\alpha z_0)^2} \right) = \frac{1}{\alpha^2} \nabla_0^2 \quad (\text{A12})$$

のように書かれる。相似な形状に対しては中性子束分布が相似であることより、 C を定数として

$$\phi_1(\alpha x_0, \alpha y_0, \alpha z_0) = C \cdot \alpha \phi_0(x_0, y_0, z_0) \quad (\text{A13})$$

が成り立つから、これらを(A11)に代入して

$$\frac{1}{\alpha^2} \nabla_0^2 C \alpha \phi_0(x_0, y_0, z_0) + B_1^2 C \alpha \phi_0(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (\text{A14})$$

故に

$$\nabla_0^2 \phi_0(x_0, y_0, z_0) + \alpha^2 B_1^2 \phi_0(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (\text{A15})$$

(A10)との比較から

$$B_1^2 = \frac{1}{\alpha^2} B_0^2 \quad (\text{A16})$$

となる。

具体的な例として、高さ H_0 、直径 D_0 を持つ円筒のバックリングを B_0^2 、これと相似な高さ H_1 、直径 D_1 を持つ円筒のバックリングを B_1^2 とすれば、 $\alpha = H_1/H_0 = D_1/D_0$ なので式(A16)が成り立つ。さらに両円筒の上底が各々角度 θ だけ傾いた時、両円筒の形状は相似である。この時、両者のバックリングを \tilde{B}_0^2 、 \tilde{B}_1^2 とすれば、上記の考え方により、

$$\tilde{B}_1^2 = \frac{1}{\alpha^2} \tilde{B}_0^2 \quad (\text{A17})$$

が成り立つ。2つの円筒での H/D 比が一定なので、式(A16)が成り立ち、また上底の傾き θ が両円筒で等しいので式(A17)が成り立つから、式(A16)、(A17)を合わせて

$$\frac{\tilde{B}_1^2}{B_1^2} = \frac{\tilde{B}_0^2}{B_0^2} \quad (\text{A18})$$

が言える。すなわち、円筒タンクの液面傾斜がバックリングの変化に与える相対効果は寸法よりも形状、すなわち、 H/D 比で決まる。

3. データ

Fig.3、Fig.5、Fig.6 に示されたデータを以下にまとめて掲載する。

Table A1 (Fig.3 のデータ)

$H(cm)$	$D(cm)$	$\theta(^{\circ})$	$B^2(cm^{-2})$
10	60	15	0.0684993
20	60	15	0.0295338
30	60	15	0.0175011
40	60	15	0.0127256
50	60	15	0.0104601
60	60	15	0.0092243
70	60	15	0.0084796
80	60	15	0.0079970
90	60	15	0.0076667
100	60	15	0.0074308

Table A2 (Fig.5 のデータ)

$\theta(^{\circ})$	$D(cm)$	$B^2(cm^{-2})(H = 20cm)$	$B^2(cm^{-2})(H = 60cm)$
0	60	0.031107	0.0091732
5	60	0.030865	0.0091790
10	60	0.030266	0.0091963
15	60	0.029533	0.0092243
20	60	0.028806	0.0092623
25	60	0.028147	0.0093088

Table A3 (Fig.6 のデータ)

$\theta(^{\circ})$	$D(cm)$	$H(cm)$	$B^2(cm^{-2})$
0	60	40	0.0126003
10	60	40	0.0126573
15	60	40	0.0127256
20	60	40	0.0128162
30	60	40	0.0130446
40	60	40	0.0133003
50	60	40	0.0135437