

分置

ガス巻込みに関する流動数値解析  
－有限要素法の適用性評価－  
(核燃料サイクル開発機構 契約業務報告書)  
(研究報告)

2005年7月

電力中央研究所

本資料の全部または一部を複写・複製・転載する場合は、下記にお問い合わせください。

〒319-1184 茨城県那珂郡東海村村松4番地49

核燃料サイクル開発機構

技術展開部 技術協力課

電話：029-282-1122 (代表)

ファックス：029-282-7980

電子メール：[jserv@jnc.go.jp](mailto:jserv@jnc.go.jp)

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to :

Technical Cooperation Section,

Technology Management Division,

Japan Nuclear Cycle Development Institute

4-49 Muramatsu, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki 319-1184, Japan

© 核燃料サイクル開発機構 (Japan Nuclear Cycle Development Institute)  
2005

## ガス巻込みに関する流動数値解析

### -有限要素法の適用性評価-

江口 譲\*

#### 要 旨

本研究は、ナトリウム冷却高速炉の炉容器内自由表面でのカバーガス巻込み現象を予測するための流動解析手法の評価に関するものであり、特に、有限要素法の先進的手法の一つである弱形式に基づくマルチスケール法（VMS 法）を調査した。調査では、電力中央研究所で開発した非 VMS 乱流解析コード SMART-fem と VMS 乱流解析コード MISTRAL を用いてガス巻込みを伴う 2 種類の流動問題を解析し、各数値モデルの適合性と解析コードの現象再現性を評価した。

まず、円筒容器内の旋回流（ベンチマーク問題）を対象とした VMS 解析結果と H15 年度に実施した非 VMS 解析結果から、以下の知見を得た。

- (1) VMS 法を用いた解析では、渦近傍の急峻な流速変化を非 VMS に比べて精度良く再現でき、周方向流速のピーク値は概ね 2 倍となるが、何れの方法でも実験値と比べると小さい。
- (2) 渦強度の目安となる第 2 不変量分布を VMS 法で計算したところ、その半値幅（第 2 不変量の最小値の 1/2 となる渦半径）は非 VMS 法で得られるものと大きな差異はない（窪み深さの評価量も非 VMS 法のもの同程度となる）ことが判明した。
- (3) 第 2 不変量がゼロとなる渦半径は、VMS 法で得られるものが、非 VMS 法で得られるものに比べると妥当な値となるが、この渦半径から計算される窪み深さの評価量は、実験値に対して非保守的な結果となる。

さらに、H16 年度から実施中の開水路吸込み流（詳細実験問題）を対象とした非 VMS 解析から、以下の知見を得た。

- (4) メッシュ分割が不足している領域では波長  $2\Delta x$  の流速振動が発生するので、適正な流動評価を行うには適切なメッシュ分割が必要となる。
- (5) 第 2 不変量分布は渦発生が予測される中心部分で負となり、その周囲が正となることが示され、この分布特性は円筒容器内の旋回流（ベンチマーク問題）で見られたものと整合する。

今後は、開水路吸込み流（詳細実験問題）の解析結果を非定常特性に着目して分析し、準定常的な円筒容器内の旋回流（ベンチマーク問題）との相違を明らかにするとともに、開水路吸込み流（詳細実験問題）などの非定常渦問題に対する VMS 法の適用性を検討する必要があるものと考えられる。

---

\* (財) 電力中央研究所 地球工学研究所 流体科学領域 上席研究員

# Study on CFD Approach for Gas Entrainment Phenomenon - Evaluation of Applicability of Finite Element Flow Analysis -

Yuzuru EGUCHI<sup>1</sup>

## ABSTRACT

The report is concerned with the evaluation of applicability of numerical modelling methods for the prediction of gas entrainment in an upper plenum of a sodium-cooled fast breeder reactor (FBR). Special attention was paid to applicability of variational multiscale (VMS) modelling in the context of the Finite Element Method. Two flow problems, which were experimentally shown to induce gas entrainment, are solved by a VMS code (MISTRAL). First, computing a benchmark problem of a gas entrainment swirl flow in a cylindrical vessel has led to the following results ;

- (1) the VMS solution is able to resolve the precise vortex core structure more accurately than the non-VMS solution computed by SMART-fem. The circumferential velocity obtained from VMS computation rises almost double in comparison with the non-VMS solution, though it still underestimates the experimental values.
- (2) the half-value radius of the negative region of the second invariant of velocity gradient matches well between the VMS solution and non-VMS solution.
- (3) the negative/positive boundary of the second invariant of velocity gradient obtained from the VMS solution is closer to the vortex core radius observed in the experiment than that of the non-VMS solution, though the vortex dip length computed from the VMS result is shorter than the experimental value.

Second, computing a benchmark problem of open channel flow with a square pillar and downstream suction pipe has led to the following results;

- (4)  $2\Delta x$ -type spatial oscillation was observed due to lack of mesh subdivisions.
- (5) the distributional profile of the second invariant of velocity gradient is similar to that of the first problem (swirl flow in a cylindrical vessel), characterized by a strong negative region surrounded by a weak positive region.

As a possible future plan, it may be necessary to analyze more precisely the features of unsteady vortices obtained in the second benchmark problem and to identify the difference (if any) from the steady vortex of the first benchmark problem. Furthermore, it may be useful to explore a more suitable computational condition for MISTRAL code in application to the second benchmark problem to obtain more accurate and stable solutions.

---

1: Senior Research Engineer

Fluid Dynamics Sector, Civil Engineering Research Laboratory  
CRIEPI (The Central Research Institute of Electric Power Industry)  
Abiko 1646, Abiko-shi, Chiba-ken, 270-1194 JAPAN

## &lt; 目 次 &gt;

第1章 緒言	1
1. 1 研究の背景と目的	1
1. 2 本報告書の範囲	1
1.2.1 解析モデルの構築	1
1.2.2 ベンチマーク問題による検証解析	1
1.2.3 詳細実験解析	1
第2章 解析モデルの構築	2
2. 1 基礎方程式と境界条件	2
2. 2 弱形式マルチスケール(VMS)法	4
2.2.1 VMS の基本概念	4
2.2.2 有限要素法ベースの VMS	7
2.2.3 数値解析法	12
2. 3 VMS 法における境界モデル	19
2.3.1 壁モデル	19
2.3.2 入口モデル	19
2.3.3 出口モデル	19
2.3.4 自由表面モデル	20
第3章 ベンチマーク問題による検証解析	21
3. 1 解析条件	21
3. 2 解析結果	21
3.2.1 流速分布	22
3.2.2 圧力分布	22
3.2.3 第2不変量分布	23
3. 3 考察	23
3.3.1 解析結果の精度	23
3.3.2 自由表面での窪み深さ評価	24
第4章 詳細実験解析	26
4. 1 解析条件	26
4. 2 解析結果	27
4.3.1 流速分布と時刻歴	27
4.3.2 圧力分布	28
4.3.3 第2不変量分布	28
第5章 結言	29
参考文献	30

## 図表リスト

### 第2章

表 2.1	予測子/多重修正子法による時間積分アルゴリズム	18
図 2.1	マルチスケール有限要素 (VMS) の概念	32
図 2.2	流速の内挿関数 (a) 大スケール流速 (b) 小スケール流速	33
図 2.3	圧力近似の一例 (a) 大スケール圧力 (b) 小スケール圧力	34

### 第3章

図 3.1	ベンチマーク問題の仕様 (JNC 殿より提示)	35
図 3.2	解析モデルと有限要素分割	36
図 3.3	自由表面での大スケール流速	37
図 3.4	表面での小スケール流速	38
図 3.5	表面での流速ベクトル (SMART-fem の解析結果)	39
図 3.6	$z = 0.15$ [m] での大スケール流速	40
図 3.7	$z = 0.15$ [m] での小スケール流速	41
図 3.8	$z = 0.15$ [m] での流速ベクトル (SMART-fem の解析結果)	42
図 3.9	$x = 0$ [m] での流速分布 (a) 大スケール流速 (b) 小スケール流	43
図 3.10	$y = 0$ [m] での流速分布 (a) 大スケール流速 (b) 小スケール流速	44
図 3.11	縦断面での流速分布 (SMART-fem の解析結果) (a) $x = 0$ 断面 (b) $y = 0$ 断面	45
図 3.12	$z = 0.5$ [m] での圧力分布 (a) 大スケール圧力 (b) 小スケール圧力	46
図 3.13	$z = 0.5$ [m] での圧力分布 (SMART-fem の解析結果)	47
図 3.14	$z = 0.15$ [m] での圧力分布 (a) 大スケール圧力 (b) 小スケール圧力	48
図 3.15	$z = 0.15$ [m] での圧力分布 (SMART-fem の解析結果)	49
図 3.16	$x = 0$ [m] での圧力分布 (a) 大スケール圧力 (b) 小スケール圧力	50
図 3.17	$y = 0$ [m] での圧力分布 (a) 大スケール圧力 (b) 小スケール圧力	51
図 3.18	縦断面での圧力分布 (SMART-fem の解析結果) (a) $x = 0$ 断面 (b) $y = 0$ 断面	52
図 3.19	表面での第 2 不変量 (a) 狭バンド表示 (b) 広バンド表示	53
図 3.20	自由表面での第 2 不変量 (SMART-fem の解析結果)	54
図 3.21	第 2 不変量 (ゼロ近傍) の分布	55
図 3.22	第 2 不変量 (ゼロ近傍) の分布 (SMART-fem の解析結果)	56
図 3.23 (a)	$z = 0.15$ [m] での流速分布の比較 ( $x$ 断面)	57
図 3.23 (b)	$z = 0.15$ [m] での流速分布の比較 ( $y$ 断面)	58
図 3.24 (a)	自由表面と $z = 0.15$ [m] での流速分布の比較 ( $x$ 断面)	59
図 3.24 (b)	自由表面と $z = 0.15$ [m] での流速分布の比較 ( $y$ 断面)	60
図 3.25 (a)	自由表面と $z = 0.15$ [m] での流速分布の比較	61

	(x 断面、SMART-fem の解析結果)	
図 3. 25 (b)	自由表面と $z=0.15$ [m]での流速分布の比較	62
	(y 断面、SMART-fem の解析結果)	
図 3. 26	Burgers 伸長渦モデルの第 2 不変量分布	63
図 3. 27 (a)	自由表面 $x$ 断面での第 2 不変量分布	64
図 3. 27 (b)	自由表面 $y$ 断面での第 2 不変量分布	65
<b>第4章</b>		
図 4. 1	詳細実験解析の対象と解析範囲(JNC 殿より提示)	66
図 4. 2	メッシュ分割( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$ [mm])	67
図 4. 3	吸込み管のモデル化	68
図 4. 4	実験での流速測定点	69
図 4. 5 (a)	入口近傍流速分布	70
図 4. 5 (b)	$y=0.08$ [m]での主流方向流速分布	71
図 4. 6 (a)	測定点 A, B, C における主流方向流速の時刻歴	72
図 4. 6 (b)	主流方向流速のパワースペクトル	73
図 4. 7	自由表面の流速ベクトル分布	74
図 4. 8	自由表面の圧力分布	75
図 4. 9	等圧力面の分布	76
図 4. 10 (a)	上面(自由表面)からみた第2不変量分布	77
図 4. 10 (b)	下面(水路底部)からみた第2不変量分布	78
図 4. 10 (c)	第2不変量(ゼロ近傍)の分布	79

## 記号表

		[MKS 単位]
$C_s$	: Smagorinsky 定数	[-]
$g$	: 重力加速度	[m/sec <sup>2</sup> ]
$n_i$	: 外向きの単位法線成分	[-]
$p$	: 密度で除した圧力 (静水圧を引いたもの)	[m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]
$S_{ij}$	: ひずみ速度テンソル	[1/sec]
$t$	: 時刻	[sec]
$u_i$	: 流速	[m/sec]
$w_k$	: Navier-Stoke 式に対する重み関数	[-]
$q$	: 非圧縮条件に対する重み関数	[-]
$x_i$	: 座標	[m]
ギリシャ文字		
$\delta_{ij}$	: Kronecker のデルタ	[-]
$\Delta$	: フィルター幅	[m]
$\nu$	: 流体の動粘性係数	[m <sup>2</sup> /sec]
$\nu_{SGS}$	: SGS 粘性	[m <sup>2</sup> /sec]
$\chi_i$	: 密度で除した擬似応力ベクトル	[m <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup> ]
$\rho$	: 流体の密度	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\Gamma$	: 流体境界	
$\Omega$	: 流体領域	
演算子など		
$(\bar{\quad})$	: 大スケール量	
$(\tilde{\quad})$	: 小スケール量	
$(\hat{\quad})$	: 解像不可量	
$(\dot{\quad})$ または $(\quad)_{,t}$	: 時間偏微分	
$(\quad)_{,i}$	: 空間偏微分	
添え字		
$i, j, k$ など	: 座標軸方向	



## 第1章 緒言

### 1.1 研究の背景と目的

高速炉の実用化に向けての実用化戦略調査研究（核燃料サイクル開発機構で実施）では、様々なプラント候補概念が検討されているが、その最有力候補のひとつと考えられるナトリウム冷却炉設計では、従来設計に比べて原子炉容器のコンパクト化が進められている。このため、冷却材流速の増大による自由表面からのカバーガスの巻き込みが、安全性や運転性に影響する可能性があり、プラント成立性を評価する上での重要な事象となっている<sup>(1)</sup>。

本研究では、ナトリウム冷却高速炉の炉容器内自由表面からのカバーガス巻き込み現象を評価するための流動解析手法を検討し、ガス巻き込み判定手法に寄与しうる適切な数値解析手法を抽出することを目的とする。

### 1.2 本報告書の範囲

上記の目的のため、昨年度から検討しているベンチマーク問題<sup>(2)</sup>や別途実施が計画されている実験を対象とした数値流動解析を行い、乱流モデルの適合性や解析コードの現象再現性を確認する。なお、ここでは複雑形状問題への適用性に優れた有限要素法による数値流動解析手法に注目して、以下の項目を実施することとする。

#### 1.2.1 解析モデルの構築

気液界面におけるガス巻き込みに関連する流動現象の解明やその評価に適用可能な解析手法として、弱形式マルチスケール手法（VMS）による流動数値解析法を調査し、有限要素法をベースとしたVMS解析手法の構築を行なう。

#### 1.2.2 ベンチマーク問題による検証解析

VMS有限要素法を用いて、ベンチマーク問題（既存のガス巻き込み実験データ1ケース）の解析を実施する。これによりVMS解析手法の検証を行なうとともに、モデルの精度評価を実施し、それらの利点・欠点を明らかにする。また、解析メッシュ設定や境界条件など、ガス巻き込みに関連する流動解析に適切な解析条件を明らかにする。

#### 1.2.3 詳細実験解析

ガス巻き込み詳細計測実験（別途実施）の解析を、非VMSの有限要素法をベースとした解析手法を用いて実施する。ここでは、特に非定常性に注目して解析手法の評価を行なうとともに、精度評価により手法の利点・欠点を明確にする。また、渦の評価の目安となるパラメータの感度についても確認する。

## 第2章 解析モデルの構築

### 2.1 基礎方程式と境界条件

平成15年度のガス巻込み研究ワーキンググループ（以下、WGと略す）の検討結果の一つとして、自由表面変形を考慮した場合と考慮しない場合の解析から得られた流速分布や自由表面変形量（考慮しない場合は渦中心での圧力降下ヘッド）の比較から、その影響は顕著ではないとの見通しがある。つまり、ガス巻込みが発生する可能性がある流動現象を実用的な解析コードで評価するには、自由表面の変形は必ずしも考慮しなくても良いとの見通しがある。そこで、ここでの解析モデルでは自由表面の変形を考慮しないことを前提として、基礎式と境界条件を設定する。

アルゴンガス空間を上部（+z方向）に有するナトリウム自由表面流は非圧縮粘性Newton流体と仮定できるので、質量保存式および運動量保存式（Navier-Stokes式）はそれぞれ以下のように記述できる。

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,t} + (u_j u_i)_j + p_{,i} - \nu u_{i,jj} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ただし、 $u_i$ は流速ベクトル、 $p$ は流体密度 $\rho$ で除した圧力（静水圧 $-\rho g z$ を引いた圧力）、 $\nu$ は流体の動粘性係数、 $\Omega$ は流体領域、添え字 $(,t)$ は時間偏微分、 $(,j)$ などは空間偏微分を表す。また、添え字 $i$ などは $i=1 \rightarrow x, 2 \rightarrow y, 3 \rightarrow z$ の座標を表し、同じ記号が重複して用いられている場合にはEinsteinの総和規約が適用されるものとする。自由表面の変形はないものと仮定しているため、運動学的境界条件は考慮する必要がない。一方、力学的な境界条件としては、以下の流速指定境界条件と擬似応力指定境界条件を考える。

$$u_i = u_i^{BC} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3)$$

$$\chi_i = \chi_i^{BC} \quad \text{on } \Gamma_\chi \quad (4)$$

ただし、密度で除した擬似応力 $\chi_i$ は以下のように定義する。

$$\chi_i = (-p \delta_{ij} + \nu u_{i,j}) n_j \quad (5)$$

ここで、 $n_i$ は単位法線ベクトル（液体から気体への向き）を表す。

通常の数値解析法（渦法などのメッシュ・フリー法以外の方法）においては、有限長のメッシュを用いて流れの分布を表現する。乱流やガス巻込み渦のように流速や圧力が空間的に激しく変化する場合は、解像が不可能なSGS(subgrid scale)成分が発生するので、これを何らかの方法でモデル化する必要がある。この方法の一つとして空間平

均に基づく LES (Large Eddy Simulation) 法が差分法・スペクトル法・有限要素法などで盛んに研究されてきた。この方法では、「小さな渦の特性は流れに依存せず、普遍的なモデル化が可能である」とする前提に立ち、SGS 成分以上のスケール (大きな渦) のみを解析する。LES の基礎方程式ではモデル化が必要な SGS 応力が現れるが、その最も基礎的なモデルとして Smagorinsky モデルが最初に提案され、その後、相似モデルや混合モデルが提案されている。ただし、Smagorinsky モデルなどを用いた LES 解析では以下の欠点を有することが指摘されている。

- ① Smagorinsky モデルなどに現れる定数は唯一つのみであるが、壁近傍では人為的な調整が必要となる。また、剥離などを伴う一般的な流れではモデルの普遍性が保証されない。
- ② 変数に空間平均と空間微分の操作を行う場合、その順序が結果に影響するので (可換性がないので)、LES 法の基礎式自体が一般には成立しない。(無限領域で平均化半径一定のフィルターを用いる場合のみ成立)

①に関しては、Smagorinsky 定数  $C_s=0.17$  が一様等方性乱流では Kolmogorov の-5/3 則から半理論的に導出できるが、非等方性乱流ではこれまでのところ提案されていない。例えば、壁近傍の層流的な粘性底層では SGS 粘性は過剰 (余計) な散逸を発生させるので、Smagorinsky 定数などを人為的に低減させてこれを排除する方法 (例えば以下のような Van Driest 型の補正係数) が通常必要となる。

$$\zeta = 1 - \exp(-y^+/25) \quad (6)$$

$$\zeta = \sqrt{1 - \exp\{-(y^+/25)^3\}} \quad (7)$$

上式中の  $y^+$  は壁からの距離  $y$  の無次元数で、密度で除した壁面剪断応力  $\tau_{\text{wall}}$  から算出される摩擦速度  $u_\tau = (\tau_{\text{wall}})^{0.5}$  を用いて  $y^+ = u_\tau y / \nu$  で定義される。

Smagorinsky 定数などを自動的に調整する方法として Dynamic LES 法<sup>(3)</sup>が提案されているが、負の SGS 粘性が発生する場合があります空間平均化やクリッピングが必要となる。②の可換性誤差についてはこれまで無視しうるほど小さいとされてきたが<sup>(4)</sup>、式の導出に誤りがあることが Berselli and John<sup>(5)</sup>によって指摘されている。また、本著者も仮想的な 2次元流れに対して可換性誤差を数値的に評価し、壁や流れの出入口などの解析領域境界で可換性誤差が顕著になることを示している<sup>(6)</sup>。この可換性誤差を小さくするような手法<sup>(7)</sup>も提案されているが、これらの対策は普遍性・実用性があるとは言いがたい。

このような欠点があるにもかかわらず、現在の実用 LES 解析では Smagorinsky モデルが最も広く使用されているのが実状である。

以上の LES 乱流モデルの現状を背景として、以下では、Smagorinsky モデルの解析精度を向上させることを目的とした VMS 法 (Variational Multiscale Method: 弱形式を利用したマルチスケール法) について説明する。

## 2. 2 弱形式マルチスケール (VMS) 法

弱形式とは基礎方程式 (偏微分方程式) に重み関数を乗じて領域積分した式であり、スペクトル法や有限要素法は重み関数 (および内挿関数) としてそれぞれ三角関数や要素内基底関数を用いる弱形式法の一つである。基礎方程式 (強形式) の解は全領域各点での成立が要求されるのに対し、弱形式の解では領域積分 (空間平均) した式を満たせばよく、成立条件が緩和された“制約が弱い”方程式を意味する。従って、三角関数や低次関数の組み合わせでも弱形式を満たすことができる。この弱形式を用いると、空間離散化 (数値モデル化) のみならず、空間フィルタリング (物理モデル化) を同時に行える利点があり、可換性誤差を生じない空間フィルタリング (乱流モデル化) が可能となる。特に、重み関数および内挿関数に複数の波数 (スケール) を有する関数を用いると、異なるスケールの弱形式 (離散式) が得られるため、各式に適切な乱流モデルを独立に与えることができる。つまり、乱流モデル化の柔軟性が高まり、乱流解析の高精度化が可能となる。以下では、弱形式に基づくマルチスケール法 (VMS: Variational Multiscale) の基本概念と具体的な有限要素式の導出過程を説明する。また、電力中央研究所で開発したマルチスケール有限要素乱流解析コード MISTRAL で採用している数値計算手法について説明する。

### 2.2.1 VMS の基本概念

弱形式に基づくマルチスケール法 (VMS: Variational Multiscale) は Hughes ら<sup>(8)</sup> が提案し、等方性乱流やチャンネル流れに対して有効であることを示している<sup>(9)-(12)</sup>。VMS 法の理論的背景・物理的な意味については Collis<sup>(13)</sup> が分かり易く説明しているので、Collis の理論展開に従い、VMS の基本概念を説明することにする。

まず、数値解が 2 つのスケール (または 2 グループのスケール) で分離できると仮定し、基礎方程式の厳密解 (流速  $u_i$ 、圧力  $p$ ) を以下のように 3 つのスケールに分離する。

$$u_i = \bar{u}_i + \tilde{u}_i + \hat{u}_i \quad (8)$$

$$p = \bar{p} + \tilde{p} + \hat{p} \quad (9)$$

ここで  $(\bar{u}_i, \bar{p})$  は大スケールの解像可能な数値解、 $(\tilde{u}_i, \tilde{p})$  は小スケールの解像可能な数値解、 $(\hat{u}_i, \hat{p})$  はその他の解像不可能な成分とする。例えば、大スケールの数値解を 1 次関数で、小スケールの数値解を 2 次関数で内挿すると仮定すると、スケール分離は模式的に図 2.1 のようになる。また、内挿関数として三角関数を用いるスペクトル法では大スケールの解はある波数以下の解の集合、小スケールの解はある波数以上の解の集合と考えても良い。式(8)、(9)を非圧縮性の条件と NS 方程式に代入し、重み関数  $(q, w_i)$  を乗じて全領域で積分すると、以下のような各方程式の弱形式が得られる。

$$\int_{\Omega} q (\bar{u}_{i,l} + \tilde{u}_{i,l} + \hat{u}_{i,l}) d\Omega = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} w_k \{ \dot{\hat{u}}_i + \dot{\hat{u}}_i + \dot{\hat{u}}_i + (\bar{u}_j + \tilde{u}_j + \hat{u}_j)(\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j} + \hat{u}_{i,j}) - f_i \} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} w_{ki} (\bar{p} + \tilde{p} + \hat{p}) d\Omega + \int_{\Omega} w_{kj} v (\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j} + \hat{u}_{i,j}) d\Omega \\
& = \int_{\Gamma_N} w_k \chi_i^{BC} d\Gamma \quad (11)
\end{aligned}$$

ここで、重み関数( $q, w_k$ )として大スケール (波数が小さい) 重み関数( $\bar{q}, \bar{w}_k$ )を選択し、さらに大スケールの重み関数でフィルタリングした SGS 成分は無視しうるほど小さいとする乱流モデル (クロージャー・モデル) を導入すると、以下のように解像不可能な成分( $\hat{u}_i, \hat{p}$ )に係わる各項はゼロとなる。

$$\int_{\Omega} \bar{q} \hat{u}_{i,i} d\Omega = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{w}_k \{ \dot{\hat{u}}_i + (\bar{u}_j + \tilde{u}_j) \hat{u}_{i,j} + \hat{u}_j (\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j}) + \hat{u}_{i,j} \hat{u}_j \} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \bar{w}_{ki} \hat{p} d\Omega + \int_{\Omega} \bar{w}_{kj} v \hat{u}_{i,j} d\Omega = 0 \quad (13)
\end{aligned}$$

式(13)の左辺第一積分中の第2, 3項の空間微分はクロス応力項を、第4項の空間微分はレイノルズ応力項などを弱形式のレベルでゼロとするクロージャー・モデルに相当する。

同様に、重み関数( $q, w_k$ )として小スケール (波数が大きい) 重み関数( $\tilde{q}, \tilde{w}_k$ )を選択し、クロージャー・モデルとして非圧縮性の条件式での解像不可能な成分( $\hat{u}_i, \hat{p}$ )に係わる項をゼロとする乱流モデルを導入するとともに、NS式でのみ SGS 成分の影響を Smagorinsky モデルなどの拡散型の乱流モデルでモデル化できると仮定する。つまり、

$$\int_{\Omega} \tilde{q} \hat{u}_{i,i} d\Omega = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \tilde{w}_k \{ \dot{\hat{u}}_i + (\bar{u}_j + \tilde{u}_j) \hat{u}_{i,j} + \hat{u}_j (\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j}) + \hat{u}_{i,j} \hat{u}_j \} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \tilde{w}_{ki} \hat{p} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{w}_{kj} v \hat{u}_{i,j} d\Omega = - \int_{\Omega} \tilde{w}_k v_{SGS} \tilde{u}_{i,jj} d\Omega \quad (15)
\end{aligned}$$

以上の大スケール乱流モデル式(12), (13)と小スケール乱流モデル式(14), (15)を導入すると以下のような解像成分のみから成る大スケールと小スケールの弱形式が得られる。

大スケール式

(非圧縮性の条件)

$$\int_{\Omega} \bar{q} (\bar{u}_{i,i} + \tilde{u}_{i,i}) d\Omega = 0 \quad (16)$$

(NS式)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{w}_k \{ \dot{\bar{u}}_i + \dot{\tilde{u}}_i + (\bar{u}_j + \tilde{u}_j)(\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j}) - f_i \} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \bar{w}_{ki} (\bar{p} + \tilde{p}) d\Omega + \nu \int_{\Omega} \bar{w}_{kj} (\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j}) d\Omega = \int_{\Gamma_{\chi}} \bar{w}_k \chi_i^{BC} d\Gamma \quad (17) \end{aligned}$$

小スケール式

(非圧縮性の条件)

$$\int_{\Omega} \tilde{q} (\bar{u}_{i,i} + \tilde{u}_{i,i}) d\Omega = 0 \quad (18)$$

(NS式)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{w}_k \{ \dot{\bar{u}}_i + \dot{\tilde{u}}_i + (\bar{u}_j + \tilde{u}_j)(\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j}) - f_i \} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \tilde{w}_{ki} (\bar{p} + \tilde{p}) d\Omega + \nu \int_{\Omega} \tilde{w}_{kj} (\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j}) d\Omega \\ & + \nu_{SGS} \int_{\Omega} \tilde{w}_{kj} \tilde{u}_{i,j} d\Omega - \nu_{SGS} \int_{\Gamma} \tilde{w}_k \tilde{u}_{i,j} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_{\chi}} \tilde{w}_k \chi_i^{BC} d\Gamma \quad (19) \end{aligned}$$

このように VMS 法では離散式の段階でスケール分離されているため、スケール毎に適切な SGS クロージャー・モデル (物理モデル) を導入することが可能となる。このスケール毎のモデル化のメリットは先に述べた①の欠点 (乱流定数の人為的調整が必要) が解決できる点にあり、その仕組みは以下のように説明される。

まず、小スケール式(18), (19)を変形して、大スケール項のみを右辺に移項させると、以下のようなになる。

$$\int_{\Omega} \tilde{q} \tilde{u}_{i,i} d\Omega = - \int_{\Omega} \tilde{q} \bar{u}_{i,i} d\Omega \quad (18')$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{w}_k \{ \dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_j \bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_j \tilde{u}_{i,j} \} d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{w}_{ki} \tilde{p} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{w}_{kj} \nu \tilde{u}_{i,j} d\Omega \\ & + \nu_{SGS} \int_{\Omega} \tilde{w}_{kj} \tilde{u}_{i,j} d\Omega - \nu_{SGS} \int_{\Gamma} \tilde{w}_k \tilde{u}_{i,j} n_j d\Gamma \\ & = - \int_{\Omega} \tilde{w}_k (\dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \bar{p}_{,i} - \nu \bar{u}_{i,j,j} - f_i) d\Omega \quad (19') \end{aligned}$$

これらの式の右辺は大スケール変数に関する基礎式自身の弱形式であるので、大スケール変数のみで解像できる場合は右辺はほぼゼロに等しくなる。従って、この場合の小スケール式の解は概ね  $(\tilde{q}_i, \tilde{w}_k) = (0, 0)$  となることが期待できる。これを大スケール式(16), (17)に代入すると通常の（乱流モデルを含まない）大スケール変数のみに関する弱形式が得られる。つまり、大スケール変数のみで流れが近似できていれば、余計な SGS 応力は発生しないことになり、シングルスケールの LES モデルに比べてモデルの性能が優れていることが分かる。

SGS 動粘性係数  $\nu_{SGS}$  は解析者によって設定するものであるが、本研究では最も広く使用されている以下の Smagorinsky モデルを利用する（Smagorinsky モデル以外のモデルも考えられるがここでは簡単のため Smagorinsky モデルを利用する）。

$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 |\overline{S}_{ij}| \quad (20)$$

ここで、 $|\overline{S}_{ij}| = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}$  は大スケール流速に基づく歪みテンソル  $\overline{S}_{ij} = 0.5(\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i})$  で評価されるスカラー量であるが、代案として小スケール流速に基づく歪みテンソルを用いることも考えられる。フィルター幅  $\Delta$  には各要素の代表幅を用いることとする。また、Smagorinsky 定数  $C_s$  は空間的にも一定とし、従来の LES 法で用いられている減衰関数による調整（人為的操作）は行わない。

### 2.2.2 有限要素法ベースの VMS

電力中央研究所で開発したマルチスケール有限要素乱流解析コード MISTRAL<sup>(14),(15)</sup>では、メッシュ作成を単純化するためにシンプルな内挿関数（有限要素）の組み合わせを採用している。具体的には、大スケールの流速  $\overline{u}_i$  の内挿は、要素境界で連続な要素内 1 次関数  $\Phi_A$  で近似する。ここで、 $A$  は六面体の角に配置された節点の番号で  $A = 1, 2, \dots, N_n$ （全節点数）の値をとる。つまり、

$$\overline{u}_i = \sum_{A=1}^{N_n} \Phi_A \overline{u}_{iA} \quad (21)$$

例えば、 $2 \times 2$ （2次元正方形要素）の要素分割の中央節点における大スケールの流速の内挿関数は図 2.2(a)に示すようなものとなる。

小スケールの流速  $\tilde{u}_i$  の内挿は 2 次のバブル関数  $\vartheta_{A'}$  を用いて以下のように近似する。

$$\tilde{u}_i = \sum_{A'=1}^{N_e} \vartheta_{A'} \tilde{u}_{iA'} \quad (22)$$

ここで、 $A'$  はバブル関数に関する節点の番号であり、 $A' = 1, 2, \dots, N_e$ （全要素数）の値をとる。2 次のバブル関数は要素境界でゼロ、要素中心で 1 をとる関数であり、2

×2 (2次元正方形要素) の要素分割でのバブル関数の形状は図 2.2(b)に示すものとなる。また、各内挿関数の具体的な式は各要素で定義される局所座標  $(\xi, \eta, \zeta)$  (ただし、 $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ ) を用いて以下のように表される。

$$\Phi_\alpha = (1 + \xi_\alpha \xi)(1 + \eta_\alpha \eta)(1 + \zeta_\alpha \zeta) / 8 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 8) \quad (23)$$

$$\vartheta_{\alpha'} = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2) \quad (\alpha' = 1) \quad (24)$$

ここで、 $\xi_\alpha, \eta_\alpha$  および  $\zeta_\alpha$  は局所節点番号  $\alpha$  に応じて +1 または -1 の値をとる。また、 $\alpha'$  はバブル関数の局所節点番号 ( $\alpha' = 1$ ) である。

一方、大スケールの圧力  $\bar{p}$  は要素境界で非連続な要素内一定関数  $\Psi_{A'}$  ( $A' = 1, 2, \dots, N_e$ ) で近似し、小スケールの圧力  $\tilde{p}$  は要素境界で非連続な非適合要素内 1 次関数  $\Xi_{A'(k)}$  ( $A' = 1, 2, \dots, N_e; k = 1, 2, 3$ ) で近似する。つまり、

$$\bar{p} = \sum_{A'=1}^{N_e} \Psi_{A'} \bar{p}_{A'} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \sum_{A'=1}^{N_e} (\Xi_{A'(1)} \tilde{p}_{A'(1)} + \Xi_{A'(2)} \tilde{p}_{A'(2)} + \Xi_{A'(3)} \tilde{p}_{A'(3)}) \\ &= \sum_{A'=1}^{N_e} \Xi_{A'(k)} \tilde{p}_{A'(k)} \end{aligned} \quad (26)$$

例えば、 $2 \times 2$  (2次元正方形要素) の要素分割の場合の大スケールの圧力  $\bar{p}$  と小スケールの圧力  $\tilde{p}$  は図 2.3(a) および (b) に示す様なものとなる。

各内挿関数は各要素で定義される局所座標  $(\xi, \eta, \zeta)$  を用いて以下のように表される。

$$\Psi_\alpha = 1 \quad (27)$$

$$\Xi_{\alpha'(1)} = \xi, \quad \Xi_{\alpha'(2)} = \eta, \quad \Xi_{\alpha'(3)} = \zeta \quad (28a)-(28c)$$

ここで、 $\Psi_{A'}$  および  $\Xi_{A'(k)}$  は当該要素以外ではゼロとなるので、圧力解は非連続関数となる。

ところで、以上の流速と圧力の内挿関数の組み合わせは Stokes 流れで唯一の解が存在する保証がないこと (Bab'uska-Brezzi 条件を満たさないこと) が知られている。そこで、以下のように正則化のための付加項  $J(q, p)$  および  $H(q)H(p)$  を非圧縮性の条件式(10)に加える<sup>(16),(17)</sup>。

$$\int_{\Omega} q u_{i,i} d\Omega + J(q, p) + H(q)H(p) = 0 \quad (29)$$

なお、双線型  $J(q, p)$  および  $H(q)H(p)$  は以下で定義されるものである。



$$J(q, p) = \beta \sum_{i=1}^{i=N_s} h_i \int_{\Gamma_i} [q][p] d\Gamma \quad (30)$$

$$H(q)H(p) = \lambda \int_{\Omega} q d\Omega \int_{\Omega} p d\Omega \quad (31)$$

ここで、 $\beta$ および $\lambda$ は正のパラメータを表し、 $N_s$ は当該要素に隣接する要素の数を、 $\Gamma_i$ は隣接要素との境界面を、 $h_i$ はその代表長さを表す。また、カッコ[\*]は当該要素での\*の値と隣の要素での\*の値の差（非連続関数のジャンプ量）を表す。圧力ジャンプ項 $J(q,p)$ はHughesら<sup>(18)</sup>によって考案されたものであり、低次要素で問題となるチェッカー・ボード型の圧力振動を抑制する効果がある。また、静水圧モード抑制項 $H(q)H(p)$ は本著者<sup>(16),(17)</sup>が考案したものであり、全境界流速指定などの場合に発生する圧力の不確定性を排除することができる。

いま、解像不可成分に係わる項をゼロとするクロージャー・モデルを導入すると、以下のような解像成分のみから成る大小スケールの弱形式が得られる。

$$\int_{\Omega} \bar{q} (\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j}) d\Omega + \mathcal{J}(\bar{q}, \bar{p} + \tilde{p}) + H(\bar{q}) H(\bar{p} + \tilde{p}) = 0 \quad (32)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{q} (\bar{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j}) d\Omega + \mathcal{J}(\tilde{q}, \bar{p} + \tilde{p}) + H(\tilde{q}) H(\bar{p} + \tilde{p}) = 0 \quad (33)$$

弱形式(17), (19), (32), (33)に有限要素近似式(21), (22), (25), (26)を代入すると、以下のようなマルチスケール有限要素式の行列方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 + \mathbf{H} & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}'_3 & \mathbf{J}'_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_1 & \mathbf{M}'_2 \\ \mathbf{M}'_3 & \mathbf{M}'_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{U}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{U}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_1(\bar{\mathbf{U}}) & \mathbf{A}'_2(\bar{\mathbf{U}}) \\ \mathbf{A}'_3(\bar{\mathbf{U}}) & \mathbf{A}'_4(\bar{\mathbf{U}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_1(\tilde{\mathbf{U}}) & \mathbf{A}'_2(\tilde{\mathbf{U}}) \\ \mathbf{A}'_3(\tilde{\mathbf{U}}) & \mathbf{A}'_4(\tilde{\mathbf{U}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}' & \mathbf{Q}' \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \nu \mathbf{D}'_1 & \nu \mathbf{D}'_2 \\ \nu \mathbf{D}'_3 & (\nu + \nu_{SGS}) \mathbf{D}'_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (35) \end{aligned}$$

ここで、縦ベクトル $\{\bar{\mathbf{U}}^T, \tilde{\mathbf{U}}^T\}^T$ は大スケールおよび小スケールからなる節点流速ベクトルを、縦ベクトル $\{\bar{\mathbf{P}}^T, \tilde{\mathbf{P}}^T\}^T$ は同様の節点圧力ベクトルを表す。この導出過程でバブル関数の特性（要素境界でゼロ）を利用して以下の関係を用いている。

$$\int_{\Omega} \tilde{w}_{k,i} \bar{p} \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \tilde{w}_k \bar{p} n_i \, d\Gamma = 0 \quad (36)$$

$$\int_{\Omega} \bar{q} \tilde{u}_{i,i} \, d\Omega = - \int_{\Gamma} \bar{q} \tilde{u}_i n_i \, d\Gamma = 0 \quad (37)$$

$$\int_{\Gamma} \tilde{w}_k \chi_i^{BC} \, d\Gamma = 0 \quad (38)$$

また、小スケール圧力  $\bar{p}$  の内挿関数が局所座標系では奇関数で表されるので、その要素内積分である  $H(\bar{q})$  および  $H(\bar{p})$  はゼロと近似した。

行列方程式 (34), (35) 中に現れる行列 ( )' は  $3 \times 3$  または  $3 \times 1$  のブロック行列を表し、以下で定義されるものである。ただし、添え字 ( $3N_n \times 3N_n$ ) などは行列の次元を表す。ただし、(X×Y) は  $i=1$  で ( $3N_n \times 3N_n$ )、 $i=2$  で ( $3N_n \times 3N_e$ )、 $i=3$  で ( $3N_e \times 3N_n$ )、 $i=4$  で ( $3N_e \times 3N_e$ ) をとるものとする。

$$\mathbf{M}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_i \end{bmatrix}_{(X \times Y)} \quad (39)$$

$$\mathbf{A}'_i(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \end{bmatrix}_{(X \times Y)} \quad (40)$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 \end{bmatrix}_{(3N_n \times N_e)} \quad (41)$$

$$\mathbf{D}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_i \end{bmatrix}_{(X \times Y)} \quad (42)$$

$$\mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix}_{(3N_n \times 3N_e)} \quad (43)$$

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix}_{(3N_e \times 3N_e)} \quad (44)$$

$$\mathbf{J}'_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{31} \\ \mathbf{J}_{32} \\ \mathbf{J}_{33} \end{bmatrix}_{(3N_e \times N_e)} \quad (45)$$

$$\mathbf{J}'_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{41} \\ \mathbf{J}_{42} \\ \mathbf{J}_{43} \end{bmatrix}_{(3N_e \times 3N_e)} \quad (46)$$

また、各行列の成分は全体化演算子 $A^e$ を用いて以下のように定義されるものである。

$$M_1 = A^e \int_{\Omega^e} \Phi_\alpha \Phi_\beta \, d\Omega \quad (47a), \quad M_2 = A^e \int_{\Omega^e} \Phi_\alpha \vartheta_{\beta'} \, d\Omega \quad (47b)$$

$$M_3 = A^e \int_{\Omega^e} \vartheta_{\alpha'} \Phi_\beta \, d\Omega \quad (47c), \quad M_4 = A^e \int_{\Omega^e} \vartheta_{\alpha'} \vartheta_{\beta'} \, d\Omega \quad (47d)$$

$$A_1(\bar{U}) = A^e \int_{\Omega^e} (\bar{u}_{j\gamma} \Phi_\gamma) \Phi_\alpha \Phi_{\beta,j} \, d\Omega \quad (48a)$$

$$A_1(\tilde{U}) = A^e \int_{\Omega^e} (\tilde{u}_{j\gamma} \vartheta_{\gamma'}) \Phi_\alpha \Phi_{\beta,j} \, d\Omega \quad (48b)$$

$$A_2(\bar{U}) = A^e \int_{\Omega^e} (\bar{u}_{j\gamma} \Phi_\gamma) \Phi_\alpha \vartheta_{\beta',j} \, d\Omega \quad (48c)$$

$$A_2(\tilde{U}) = A^e \int_{\Omega^e} (\tilde{u}_{j\gamma} \vartheta_{\gamma'}) \Phi_\alpha \vartheta_{\beta',j} \, d\Omega \quad (48d)$$

$$A_3(\bar{U}) = A^e \int_{\Omega^e} (\bar{u}_{j\gamma} \Phi_\gamma) \vartheta_{\alpha'} \Phi_{\beta,j} \, d\Omega \quad (48e)$$

$$A_3(\tilde{U}) = A^e \int_{\Omega^e} (\tilde{u}_{j\gamma} \vartheta_{\gamma'}) \vartheta_{\alpha'} \Phi_{\beta,j} \, d\Omega \quad (48f)$$

$$A_4(\bar{U}) = A^e \int_{\Omega^e} (\bar{u}_{j\gamma} \Phi_\gamma) \vartheta_{\alpha'} \vartheta_{\beta',j} \, d\Omega \quad (48g)$$

$$A_4(\tilde{U}) = A^e \int_{\Omega^e} (\tilde{u}_{j\gamma} \vartheta_{\gamma'}) \vartheta_{\alpha'} \vartheta_{\beta',j} \, d\Omega \quad (48h)$$

$$D_1 = A^e \int_{\Omega^e} \Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,j} \, d\Omega \quad (49a) \quad D_2 = A^e \int_{\Omega^e} \Phi_{\alpha,j} \vartheta_{\beta',j} \, d\Omega \quad (49b)$$

$$D_3 = A^e \int_{\Omega^e} \vartheta_{\alpha',j} \Phi_{\beta,j} \, d\Omega \quad (49c) \quad D_4 = A^e \int_{\Omega^e} \vartheta_{\alpha',j} \vartheta_{\beta',j} \, d\Omega \quad (49d)$$

$$C_i = A^e \int_{\Omega^e} \Phi_{\alpha,i} \Psi_{\beta'} \, d\Omega \quad (50)$$

$$Q_{ij} = A^e \int_{\Omega^e} \Phi_{\alpha,i} \Xi_{\beta'} \, d\Omega \quad (51)$$

$$R_{ij} = A^e \int_{\Omega^e} \vartheta_{\alpha,i} \Xi_{\beta'} \, d\Omega \quad (52)$$

また、行列  $J_1, J_2, J_3, J_4, H$  は行列単独で記述することが困難なので、ベクトルの積としての定義を以下に示す。

$$[\mathbf{J}_1]\{\bar{\mathbf{P}}\} = \beta A^e \sum_{i=1}^{i=N_s^e} h_i \Gamma_i (\bar{p}_e - \bar{p}_i) \quad (53a)$$

$$[\mathbf{J}_2]\{\tilde{\mathbf{P}}\} = \beta A^e \sum_{i=1}^{i=N_s^e} h_i \int_{\Gamma_i} (\Xi_{e(l)} \tilde{p}_{e(l)} - \Xi_{i(k)} \tilde{p}_{i(k)}) d\Gamma \quad (53b)$$

$$[\mathbf{J}_3]\{\bar{\mathbf{P}}\} = \beta A^e \sum_{i=1}^{i=N_s^e} h_i \int_{\Gamma_i} \Xi_{e(j)} (\bar{p}_e - \bar{p}_i) d\Gamma \quad (53c)$$

$$[\mathbf{J}_4]\{\tilde{\mathbf{P}}\} = \beta A^e \sum_{i=1}^{i=N_s^e} h_i \int_{\Gamma_i} \Xi_{e(j)} (\Xi_{e(l)} \tilde{p}_{e(l)} - \Xi_{i(k)} \tilde{p}_{i(k)}) d\Gamma \quad (53d)$$

$$[\mathbf{H}]\{\bar{\mathbf{P}}\} = \lambda A^e \Omega_e \sum_{i=1}^{i=N_s^e} \Omega_i \bar{p}_i \quad (54)$$

式(53a)-(53d)で  $N_s^e$  は要素  $e$  に接する隣接要素の数を、 $\Gamma_i$  は接合面の面積を、 $\bar{p}_e$  は要素  $e$  の大スケール圧力を、 $\bar{p}_i$  は隣接要素  $i$  の大スケール圧力を、 $\Xi_{e(j)} \tilde{p}_{e(l)}$  ( $j$  で総和を取る) は要素  $e$  の小スケール圧力を、 $\Xi_{i(k)} \tilde{p}_{i(k)}$  ( $k$  で総和を取る) は隣接要素  $i$  の小スケール圧力を、 $\Omega_e$  は要素  $e$  の体積を表す。

また、右辺ベクトル  $\bar{\mathbf{F}} = \{\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2 \ \mathbf{X}_3\}^T$  の成分は以下のように定義される。

$$\mathbf{X}_i = A^e \int_{\Gamma} \Phi_\beta \chi_i^{BC} d\Gamma \quad (55)$$

以上の要素行列ならびに右辺ベクトルの評価には棚橋<sup>(19)</sup>の離散ナブラ法を用いている。例えば、対流行列  $\mathbf{A}_1(\bar{\mathbf{U}})$  の要素行列  $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$  は離散ナブラ手法では以下のように近似される。

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \int u_j \Phi_\alpha \Phi_{\beta j} dx_1 dx_2 dx_3 \approx J_e U_{je} \langle \mathbf{g}^j \rangle_e \int \Phi_\alpha \Phi_{\beta \xi_j} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (56)$$

ここで、 $J_e$  : 要素平均ヤコビアン行列式、 $U_{je}$  : 要素平均流速、 $\langle \mathbf{g}^j \rangle_e$  : 要素平均基底ベクトル ( $\mathbf{g}^j = \nabla \xi_j$ ) を表す。このように近似すると物理空間の要素行列は全要素共通の計算空間での要素行列と各要素固有のヤコビアン行列式および基底ベクトルの積で表すことが可能となり、行列の記憶に必要な主記憶容量を大幅に低減させることができる。

### 2.2.3 数値解析法

式(35)の時間積分法としては Brooks and Hughes<sup>(20)</sup>が提案した予測子/多重修正子法(陽解法)を用いる。この方法では質量行列の逆行列の計算を避けるために質量行列の対角化(集中化)が必要となるので、MISTRAL では本著者が考案した複合質量行列集中化法(CMML: compound mass matrix lumping)を実装している。また、マルチ

スケール圧力 Poisson 方程式を導出して非圧縮性の条件を満たしている。これらの数値解析技法について、以下の(1)~(3)節で説明する。

### (1) 複合質量行列集中化法

マルチスケール有限要素法で現れる質量行列は式 (35)に見られるように大スケールと小スケールの内挿関数の積に起因する4種類の質量行列  $\mathbf{M}_1 \sim \mathbf{M}_4$  が連成しており、以下のような線型方程式を解く必要がある。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{U}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{U}}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{U}}_n, \tilde{\mathbf{U}}_n) \\ \tilde{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{U}}_n, \tilde{\mathbf{U}}_n) \end{Bmatrix} \quad (57)$$

ここで  $\bar{\mathbf{b}}$  および  $\tilde{\mathbf{b}}$  は既知の流速  $\bar{\mathbf{U}}_n$ 、 $\tilde{\mathbf{U}}_n$  から計算される右辺ベクトルである。いま、質量行列  $\mathbf{M}_4$  の行列要素がバブル関数同士の積を空間積分したものであることに着目すると、質量行列  $\mathbf{M}_4$  は対角行列となるので、容易かつ厳密に大スケール加速度  $\dot{\bar{\mathbf{U}}}$  のみに関する線型方程式を導出することができる。

$$(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_4^{-1} \mathbf{M}_3) \dot{\bar{\mathbf{U}}} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_4^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \quad (58)$$

ここで、左辺の行列  $(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_4^{-1} \mathbf{M}_3)$  を  $\mathbf{L}$  と定義し、質量行列の逆行列の計算を避けるために質量行列  $\mathbf{L}$  の対角化を行うと、大スケール加速度  $\dot{\bar{\mathbf{U}}}$  は以下のように容易に求められる。

$$\dot{\bar{\mathbf{U}}} = \underline{\mathbf{L}}^{-1} (\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_4^{-1} \tilde{\mathbf{b}}) \quad (59)$$

ここで、 $\underline{\mathbf{L}}$  は行列  $\mathbf{L}$  の対角化 (集中化) 行列を表す。対角化手法としては行要素総和法を用いた。小スケール加速度  $\dot{\tilde{\mathbf{U}}}$  は式(57)より、以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{U}}} &= \mathbf{M}_4^{-1} (\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{M}_3 \dot{\bar{\mathbf{U}}}) \\ &= \mathbf{M}_4^{-1} \{ \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{M}_3 \underline{\mathbf{L}}^{-1} (\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_4^{-1} \tilde{\mathbf{b}}) \} \end{aligned} \quad (60)$$

### (2) 流速補正法

予測子/多重修正子法の時間積分の途中で得られる流速 (増分) または加速度 (増分) は非圧縮性の条件を満たさないため、これを満たすように補正する必要がある。この

方法を説明するために、まず NS 式を以下のように加速度項、圧力勾配項、その他の 3 種類に分類する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}'_1 & \mathbf{M}'_2 \\ \mathbf{M}'_3 & \mathbf{M}'_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{U}}) \\ \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{U}}) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}' & \mathbf{Q}' \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} \quad (61)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{a}} \equiv \dot{\bar{\mathbf{U}}}$ 、 $\tilde{\mathbf{a}} \equiv \dot{\tilde{\mathbf{U}}}$  はそれぞれ大スケール、小スケールの加速度を、 $\bar{\mathbf{f}}$ 、 $\tilde{\mathbf{f}}$  は対流項、拡散項、外力などを含む大スケール、小スケールの既知の右辺ベクトルとする。いま、非圧縮性の条件を満たすために、加速度と圧力の増分量 ( $\Delta\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\Delta\tilde{\mathbf{a}}$ ,  $\Delta\bar{\mathbf{P}}$ ,  $\Delta\tilde{\mathbf{P}}$ ) で補正することになると、式(61)は以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_1 & \mathbf{M}'_2 \\ \mathbf{M}'_3 & \mathbf{M}'_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{\mathbf{a}}^k \\ \Delta\tilde{\mathbf{a}}^k \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}' & \mathbf{Q}' \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{\mathbf{P}}^k \\ \Delta\tilde{\mathbf{P}}^k \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{U}}^k, \tilde{\mathbf{U}}^k) \\ \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{U}}^k, \tilde{\mathbf{U}}^k) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_1 & \mathbf{M}'_2 \\ \mathbf{M}'_3 & \mathbf{M}'_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}}^k \\ \tilde{\mathbf{a}}^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}' & \mathbf{Q}' \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}}^k \\ \tilde{\mathbf{P}}^k \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^* \\ \tilde{\mathbf{f}}^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

ここで、各変数ベクトルの添え字  $k$  は多重修正ループの繰り返し番号を表し、右辺は既知量であるので、まとめて  $\{\bar{\mathbf{f}}^{*T}, \tilde{\mathbf{f}}^{*T}\}^T$  で表す。式(62)に前節で説明した CMML 技法を適用して、未知加速度増分について解くと以下の式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\mathbf{a}}^k & = \mathbf{G}\mathbf{L}^{-1} \{\bar{\mathbf{f}}^* + \mathbf{C}'\Delta\bar{\mathbf{P}}^k + \mathbf{Q}'\Delta\tilde{\mathbf{P}}^k - \mathbf{M}'_2\mathbf{M}'_4^{-1}(\tilde{\mathbf{f}}^* + \mathbf{R}'\Delta\tilde{\mathbf{P}}^k)\} \\ & \equiv \mathbf{f}^*_L + \mathbf{C}_L\Delta\bar{\mathbf{P}}^k + \mathbf{Q}_L\Delta\tilde{\mathbf{P}}^k \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\mathbf{a}}^k & = \mathbf{M}'_4{}^{-1}(\tilde{\mathbf{f}}^* + \mathbf{R}'\Delta\tilde{\mathbf{P}}^k - \mathbf{M}'_3\Delta\bar{\mathbf{a}}^k) \\ & = \mathbf{M}'_4{}^{-1}\{\tilde{\mathbf{f}}^* + \mathbf{R}'\Delta\tilde{\mathbf{P}}^k - \mathbf{M}'_3(\mathbf{f}^*_L + \mathbf{C}_L\Delta\bar{\mathbf{P}}^k + \mathbf{Q}_L\Delta\tilde{\mathbf{P}}^k)\} \\ & \equiv \mathbf{f}^*_S + \mathbf{C}_S\Delta\bar{\mathbf{P}}^k + \mathbf{Q}_S\Delta\tilde{\mathbf{P}}^k \end{aligned} \quad (64)$$

ここで、大スケールの未知加速度増分式(63)の右辺では行列  $\mathbf{G}$  を左から乗じているが、これは著者が考案した流速境界条件を課すための全体行列であり、以下のように定義されるものである。

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{H} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (65)$$

ここで、 $\mathbf{O}$  はゼロ行列（第 1 行第 1 列の小行列  $\mathbf{O}$  は流速完全指定境界の節点の 3 倍の次元）で、 $\mathbf{E}$  は単位行列（流速境界条件が課せられていない自由節点の 3 倍の次元）を表す。また、 $\mathbf{H}$  は自由表面や鈍角コーナー部などのスリップ面上の節点数  $K$ （各 2 自由度）の 3 倍の次元を、 $\mathbf{W}$  は鋭角コーナー部のスリップ線上の節点数  $J$ （各 1 自由度）の 3 倍の次元を有する行列であり、以下のように表される。

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{H}_2 & \cdot & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{H}_K \end{pmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W}_2 & \cdot & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{W}_J \end{pmatrix} \quad (66), (67)$$

上の行列中の  $\mathbf{H}_k (k=1,2,\dots,K)$ ,  $\mathbf{W}_j (j=1,2,\dots,J)$  で表される行列要素は節点  $k$  または  $j$  に関する  $3 \times 3$  の行列であり、以下で定義される。

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} 1-n_x^2 & -n_y n_x & -n_z n_x \\ -n_x n_y & 1-n_y^2 & -n_z n_y \\ -n_x n_z & -n_y n_z & 1-n_z^2 \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{H}_j^A \mathbf{H}_j^B \quad (69)$$

ここで、式(68)の  $\mathbf{H}_k$  は  $(n_x, n_y, n_z)$  を単位法線ベクトルとする面で二次元的にスリップする条件を課すための行列であり、式(69)の  $\mathbf{W}_j$  は鋭角の角部（面 A および面 B の交線で定義される稜線）で一次的にスリップする条件を課すための行列である。なお、スリップ面での単位法線ベクトル  $(n_x, n_y, n_z)$  は、スリップ面での質量保存が満足されるように以下の式で求める。

$$\mathbf{n}_k = \frac{\sum_{m(k)=1}^{m(k)=M(k)} S_{m(k)} \mathbf{n}_{m(k)}}{\left| \sum_{m(k)=1}^{m(k)=M(k)} S_{m(k)} \mathbf{n}_{m(k)} \right|} \quad (70)$$

ここで、 $M(k)$  は節点  $k$  を共有する要素面の数を、 $S_{m(k)}$  は節点  $k$  を共有する要素の面  $m(k)$  の面積を、 $\mathbf{n}_{m(k)}$  はその面上での単位法線ベクトルを、 $|\cdot|$  はベクトルの長さを表

す。また、式(63), (64)中の各行列やベクトルは以下で定義されるものである。

$$\underline{\mathbf{L}}' = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{L}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{L}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{L}} \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbf{f}_L^* = \mathbf{G}\underline{\mathbf{L}}'^{-1} (\bar{\mathbf{f}}^* - \mathbf{M}'_2\mathbf{M}'_4^{-1}\tilde{\mathbf{f}}^*) \quad (72)$$

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{G}\underline{\mathbf{L}}'^{-1} \mathbf{C}' \quad (73)$$

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{G}\underline{\mathbf{L}}'^{-1} (\mathbf{Q}' - \mathbf{M}'_2\mathbf{M}'_4^{-1}\mathbf{R}') \quad (74)$$

$$\mathbf{f}_S^* = \mathbf{M}'_4^{-1} \{ \tilde{\mathbf{f}}^* - \mathbf{M}'_3\mathbf{G}\underline{\mathbf{L}}'^{-1} (\bar{\mathbf{f}}^* - \mathbf{M}'_2\mathbf{M}'_4^{-1}\tilde{\mathbf{f}}^*) \} \quad (75)$$

$$\mathbf{C}_S = -\mathbf{M}'_4^{-1}\mathbf{M}'_3\mathbf{G}\underline{\mathbf{L}}'^{-1} \mathbf{C}' \quad (76)$$

$$\mathbf{Q}_S = \mathbf{M}'_4^{-1} \{ \mathbf{R}' - \mathbf{M}'_3\mathbf{G}\underline{\mathbf{L}}'^{-1} (\mathbf{Q}' - \mathbf{M}'_2\mathbf{M}'_4^{-1}\mathbf{R}') \} \quad (77)$$

ところで、多重修正子ループの更新後の流速は両スケールともに  $\mathbf{U}^k + \gamma\Delta t\mathbf{a}^k$  の形で求められるが、これが非圧縮性の条件を満たすことが必要である。この条件は正則化項を加えて、以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}'^T & \mathbf{R}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}^k + \gamma\Delta t\Delta\bar{\mathbf{a}}^k \\ \tilde{\mathbf{U}}^k + \gamma\Delta t\Delta\tilde{\mathbf{a}}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 + \mathbf{H} & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}'_3 & \mathbf{J}'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}^k + \Delta\bar{\mathbf{P}}^k \\ \tilde{\mathbf{P}}^k + \Delta\tilde{\mathbf{P}}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (78)$$

ここで、 $\Delta t$ ,  $\gamma$ はそれぞれ時間ステップ幅、時間積分パラメータを表す。式(63)および(64)を式(78)に代入すると、以下のマルチスケール圧力 Poisson 方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{C}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}'^T & \mathbf{R}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L & \mathbf{Q}_L \\ \mathbf{C}_S & \mathbf{Q}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\mathbf{P}}^k \\ \Delta\tilde{\mathbf{P}}^k \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 + \mathbf{H} & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}'_3 & \mathbf{J}'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\mathbf{P}}^k \\ \Delta\tilde{\mathbf{P}}^k \end{bmatrix} \\ & = -\frac{1}{\gamma\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{C}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}'^T & \mathbf{R}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}^k + \gamma\Delta t\mathbf{f}_L^* \\ \tilde{\mathbf{U}}^k + \gamma\Delta t\mathbf{f}_S^* \end{bmatrix} - \frac{1}{\gamma\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 + \mathbf{H} & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}'_3 & \mathbf{J}'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}^k \\ \tilde{\mathbf{P}}^k \end{bmatrix} \quad (79) \end{aligned}$$

この行列は PCG 法 (対角スケーリングで前処理した共役勾配法) で解くことができ、大スケールと小スケールの圧力を同時に得られる。これを式(63), (64)に代入すると加速度増分が求められ、非圧縮性を満たす各スケールの流速  $\mathbf{U}^k + \gamma\Delta t\mathbf{a}^k$  が得られる。



### (3) 圧力補正法

非圧縮性の条件をほぼ満足する時間ステップ(n+1)における流速  $\bar{U}_{n+1} + \tilde{U}_{n+1}$  は前節で説明したような方法で得ることができるが、前節で得られた圧力は流速を補正するために調整されたものであり、元の NS 方程式と整合するとは限らない。これを解決するため、Stevens ら<sup>(21)</sup>, Almgren ら<sup>(22)</sup>, Gresho ら<sup>(23)</sup>と同様の考え方で、以下のような圧力補正を行う。まず、時間ステップ(n+1)における圧力を  $\bar{P}_{n+1} + \tilde{P}_{n+1}$  とすると時間ステップ(n+1)における加速度の大スケール成分と小スケール成分はそれぞれ以下のように近似できる。

$$\begin{aligned} \bar{a}_{n+1} &= \mathbf{GL}'^{-1} [\bar{\mathbf{f}}(\bar{U}_{n+1}, \tilde{U}_{n+1}) + \mathbf{C}'\bar{\mathbf{P}}_{n+1} + \mathbf{Q}'\tilde{\mathbf{P}}_{n+1} - \mathbf{M}'_2\mathbf{M}'_4^{-1} \{\bar{\mathbf{f}}(\bar{U}_{n+1}, \tilde{U}_{n+1}) + \mathbf{R}'\tilde{\mathbf{P}}_{n+1}\}] \\ &\equiv \mathbf{f}_{n+1,L} + \mathbf{C}_L\bar{\mathbf{P}}_{n+1} + \mathbf{Q}_L\tilde{\mathbf{P}}_{n+1} \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n+1} &= \mathbf{M}'_4^{-1} \{\tilde{\mathbf{f}}(\bar{U}_{n+1}, \tilde{U}_{n+1}) + \mathbf{R}'\tilde{\mathbf{P}}_{n+1} - \mathbf{M}'_3\bar{a}_{n+1}\} \\ &= \mathbf{M}'_4^{-1} \{\tilde{\mathbf{f}}(\bar{U}_{n+1}, \tilde{U}_{n+1}) + \mathbf{R}'\tilde{\mathbf{P}}_{n+1} - \mathbf{M}'_3(\mathbf{f}_{n+1,L} + \mathbf{C}_L\bar{\mathbf{P}}_{n+1} + \mathbf{Q}_L\tilde{\mathbf{P}}_{n+1})\} \\ &\equiv \mathbf{f}_{n+1,S} + \mathbf{C}_S\bar{\mathbf{P}}_{n+1} + \mathbf{Q}_S\tilde{\mathbf{P}}_{n+1} \end{aligned} \quad (81)$$

この加速度は非圧縮性の条件を時間微分した式を満足する必要があるので、正則化項を加えると以下の条件が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}'^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}'^T & \mathbf{R}'^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_{n+1} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 + \mathbf{H} & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}'_3 & \mathbf{J}'_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{n+1} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (82)$$

ここで、 $\tau$ は時間スケールを表し、本コードでは $\gamma\Delta t$ としている。式(80)および(81)を式(82)に代入すると、以下のマルチスケール圧力 Poisson 式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}'^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}'^T & \mathbf{R}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L & \mathbf{Q}_L \\ \mathbf{C}_S & \mathbf{Q}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{n+1} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 + \mathbf{H} & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}'_3 & \mathbf{J}'_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{n+1} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C}'^T & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}'^T & \mathbf{R}'^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{n+1,L} \\ \mathbf{f}_{n+1,S} \end{Bmatrix} \quad (83)$$

この線型方程式も PCG 法によって解くことができ、NS 式で整合する圧力および加速度を得ることができる。

これらの技法を用いた時間積分アルゴリズムの全体を表 2.1 にまとめて示す。

表 2.1 予測子/多重修正子法による時間積分アルゴリズム

[O] 初期化フェーズ		
1	時刻 $t$ と時間ステップ $n$ のゼロクリア	$t=0, n=0$
2	初期流速条件の設定	$\bar{U}(0)=\bar{U}_0, \tilde{U}(0)=0$
3	初期圧力の計算：式(83)など	$\bar{P}(0)=\bar{P}_0, \tilde{P}(0)=\tilde{P}_0$
4	初期加速度の計算：式(80)-(81)	$\bar{a}(0)=\bar{a}_0, \tilde{a}(0)=\tilde{a}_0$
[I] 予測子フェーズ		
1	修正ループカウンタ $k$ のゼロクリア	$k=0$
2	時間ステップ $(n+1)$ の値の予測	$\bar{U}^k = \bar{U}(n) + \Delta t(1-\gamma)\bar{a}(n),$ $\tilde{U}^k = \tilde{U}(n) + \Delta t(1-\gamma)\tilde{a}(n),$ $\bar{a}^k=0, \tilde{a}^k=0, \bar{P}^k=\bar{P}(n), \tilde{P}^k=\tilde{P}(n)$
[II] 多重修正子フェーズ		
1	加速度増分の計算：式(62)	$\Delta\bar{a}^{*k} = \bar{f}^*, \Delta\tilde{a}^{*k} = \tilde{f}^*$
2a	<u>if</u> $(k+1) < k_{max}$ , <u>then</u>	$\Delta\bar{a}^k = \Delta\bar{a}^{*k}, \Delta\tilde{a}^k = \Delta\tilde{a}^{*k}$
2b	流速の更新	$\bar{U}^{k+1} = \bar{U}^k + \gamma\Delta t\Delta\bar{a}^k, \tilde{U}^{k+1} = \tilde{U}^k + \gamma\Delta t\Delta\tilde{a}^k$
2c	加速度の更新	$\bar{a}^{k+1} = \bar{a}^k + \Delta\bar{a}^k, \tilde{a}^{k+1} = \tilde{a}^k + \Delta\tilde{a}^k$
2d		$k=k+1$ とし、[II]へ戻る
3a	<u>else</u>	式(79)を解き $\Delta\bar{P}^k, \Delta\tilde{P}^k$ を得る
3b	圧力の更新	$\bar{P}^{k+1} = \bar{P}^k + \Delta\bar{P}^k, \tilde{P}^{k+1} = \tilde{P}^k + \Delta\tilde{P}^k$
3c	流速の更新	$\bar{U}^{k+1} = \bar{U}^k + \gamma\Delta t\Delta\bar{a}^k, \tilde{U}^{k+1} = \tilde{U}^k + \gamma\Delta t\Delta\tilde{a}^k$
3d	圧力、加速度の補正	式(83)を解き $\bar{P}^{k+1}, \tilde{P}^{k+1}$ を補正する。 式(80),(81)により $\bar{a}^{k+1}, \tilde{a}^{k+1}$ を得る。
3e	時間積分の前進	時間を $t=t+\Delta t$ とし、次ステップの値を定義する。 $\bar{U}(n+1)=\bar{U}^{k+1}, \bar{a}(n+1)=\bar{a}^{k+1}, \bar{P}(n+1)=\bar{P}^{k+1},$ $\tilde{U}(n+1)=\tilde{U}^{k+1}, \tilde{a}(n+1)=\tilde{a}^{k+1}, \tilde{P}(n+1)=\tilde{P}^{k+1}$ 時間積分続行なら $n=n+1$ として、[I]へ戻る
	<u>end if</u>	

## 2. 3 VMS 法における境界モデル

境界条件は、方程式の解析スキームや乱流モデルと同様に解析結果に大きな影響を与える要因であり、より合理的な設定が必要となる。そこで、本節では VMS 法における壁面・出入口・自由表面での境界条件のモデル化について説明する。

### 2.3.1 壁モデル

静止した壁面上では流速は流体粘性のためにゼロとなるので、境界層を解像できる程度に壁近傍に詳細メッシュを配置し、ノースリップ条件（流速ゼロ）とする方法が最も汎用性が高いと考えられる。この場合、小スケール流速は要素境界で常にゼロであるので、壁を含めたすべての流体境界でゼロとなる（境界条件として指定する必要はない）。つまり、大スケール流速のみを壁でゼロとすれば良いことになる。

$$\bar{u}_i|_A=0 \quad (A \text{ は壁上の節点}) \quad (84)$$

ただし、高い Re 数の問題では非常に多くのメッシュを壁近傍に配置する必要があり、計算コストの点では問題となる場合も考えられる。この場合、VMS 解析においても  $k$ - $\varepsilon$  解析と同様に壁面剪断応力（壁に垂直な流速はゼロ）を通して壁をモデル化する方法も考えられるが、現状では壁近傍流速（大スケール）と壁面剪断応力を関係付ける普遍的な経験式は考案されていないようである。

### 2.3.2 入口モデル

壁と同様に入口部においても、小スケール流速は入口部で常にゼロとなる（境界条件として指定する必要はない）。つまり、大スケール流速のみを入口で与えれば良いことになる。実際の流れでは解析上の入口部の上流にも流れは存在し、そこでの流速は完全に定常ではないが、ここでは定常と仮定し、以下のような境界条件を与えることにする。

$$\bar{u}_i|_A = \bar{u}_i^{\text{in}} \quad (85)$$

ここで、 $A$  は入口部の節点、 $\bar{u}_i^{\text{in}}$  は節点  $A$  の流速入口境界条件を表す。

### 2.3.3 出口モデル

数値解析では有限領域を解析対象とするため、実際には存在しない仮想的な出口に対する適切なモデル化が必要となる。有限要素法を用いた流れ解析では、式(5)で定義される擬似応力（密度で除したもの）が境界条件としての利用性が高いことが経験的に知られている。この理由から、ここでの有限要素法 LES 解析においても、式(4)で与えられる擬似応力の境界条件（離散化したもの）を出口面を構成する要素面  $s$  において用いることにする。つまり、

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{X}_s^{\text{out}} \quad (86)$$

ここで、 $\mathbf{X}_s$ は出口面の要素面  $s$  における擬似応力ベクトル $\{\chi_i\}$ を表す。 $\mathbf{X}_s^{\text{out}}$ としてはゼロ ( $\mathbf{X}_s^{\text{out}}=0$ ) を用いる場合が多いが、出口部での逆流が激しくなり数値的な不安定に至る場合は以下を用いることとする<sup>(24)</sup>。

$$(\mathbf{X}_s^{\text{out}}, \mathbf{n}_s) = -\alpha (\mathbf{u}_s, \mathbf{n}_s) \quad (87a)$$

$$(\mathbf{X}_s^{\text{out}}, \boldsymbol{\tau}_s^1) = 0, (\mathbf{X}_s^{\text{out}}, \boldsymbol{\tau}_s^2) = 0 \quad (87b)$$

ここで、 $(, )$ はベクトルの内積を、 $\alpha$ は比例定数を意味し、 $\mathbf{n}_s$ は出口面の要素面  $s$  における単位法線ベクトルを、 $\mathbf{u}_s$ は要素面  $s$  における流速ベクトルを表す。また、 $\boldsymbol{\tau}_s^1, \boldsymbol{\tau}_s^2$ は出口面の要素面  $s$  上での2つの直交する接線ベクトルを表す。

#### 2.3.4 自由表面モデル

平成15年度のガス巻込みWGの検討結果<sup>(2)</sup>によると、ガス巻込みが発生する可能性がある流動現象評価には、自由表面の変形は必ずしも考慮しなくても良いとの見通しがある。そこで、ここでの解析モデルでは自由表面の変形を考慮しないものとする。具体的には、自由表面はスリップ壁とみなして以下の条件を与えることとする。

$$(\mathbf{u}_A, \mathbf{n}_A) = 0 \quad (88a)$$

$$(\mathbf{X}_s, \boldsymbol{\tau}_s^1) = 0, (\mathbf{X}_s, \boldsymbol{\tau}_s^2) = 0 \quad (88b)$$

ここで、 $\mathbf{u}_A$ は節点  $A$  における流速ベクトルを、 $\mathbf{n}_A$ は節点  $A$  における単位法線ベクトルを表す。また、 $\mathbf{X}_s$ は自由表面(要素面  $s$ ) における擬似応力ベクトル $\{\chi_i\}$ を、 $\boldsymbol{\tau}_s^1, \boldsymbol{\tau}_s^2$ は自由表面での2つの直交する接線ベクトルを表す。

### 第3章 ベンチマーク問題による検証解析

#### 3.1 解析条件

円筒容器体系におけるベンチマーク問題は、図 3.1 に示す直径 0.4[m]の円筒内旋回流体系で実施し、H15 年度に実施した SMART-fem 解析（非 VMS 解析）に加えて、H16 年度は MISTRAL コードによる VMS 解析を実施した。MISTRAL コードによる解析では SMART-fem 解析と同一の有限要素分割（図 3.2 に示すもの）を用いた。即ち、入口部の助走区間(円筒外周と接する部分で 0.25[m])と出口部の緩和区間(円筒底部より 0.16[m])を設けた水位 0.5[m]の円筒容器内を要素数 263,694 の 6 面体有限要素で分割したものである。大スケール流速に関する節点数は 277,169 となる。

境界条件としては、以下のように物体壁面でノンスリップ、自由表面でスリップとし、出口面で擬似応力条件(87)を用いた。

$$\text{(入口)} \quad u_1 = -0.04167 \text{ [m/sec]}, u_2 = u_3 = 0 \text{ [m/sec]}$$

$$\text{(壁)} \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0 \text{ [m/sec]}$$

$$\text{(自由表面)} \quad \chi_1 = \chi_2 = 0 \text{ [m}^2\text{/sec}^2\text{]}, u_3 = 0 \text{ [m/sec]}$$

$$\text{(出口)} \quad \chi_1 = \chi_2 = 0 \text{ [m}^2\text{/sec}^2\text{]}, \chi_3 = -\alpha u_3 \text{ [m}^2\text{/sec}^2\text{]} (\alpha = 1 \text{ [m/sec]})$$

入口面では実験での平均流速 (0.04167[m/sec]) に固定しているが、入口部のメッシュ分割が 8 要素（線形近似）であり両端は壁で流速ゼロとなるので、流量条件は実験での流量の 7/8 に低減している。また、出口面で擬似応力をゼロとするとこの部分の逆流が進展して、数値的な不安定が発生することが確認されたので、逆流を抑制するような抵抗力が作用するように境界条件(87)を用いた。なお、比例係数 $\alpha=1$  [m/sec]は特に最適化をした値ではない。

Smagorinsky 定数  $C_s$  としては昨年度の SMART-fem 解析と同様に 0.1 を用いた。

初期条件としては、SMART-fem 解析の最終時刻（時刻 400 [sec]：十分に準定常状態と判断した時間）の流速・圧力を MISTRAL 解析の大スケール量として与え、小スケール量はすべてゼロを与えた。時間刻み $\Delta t$ を $5 \times 10^{-3}$  [sec]、動粘性係数を $1 \times 10^{-6}$  [m<sup>2</sup>/sec]に設定して準定常状態となった時刻 430sec まで(約 30[sec]間の)時間積分を進めた。

また、正則化パラメータは $\lambda=0$ ,  $\beta=1/h_j^2$ を用いた。ここで、 $h_j$ は平均メッシュサイズで $h_j=(\Omega/N_e)^{1/3}=6.3 \times 10^{-3}$  [m]とした。（ $\Omega$ は解析領域の全体積）

#### 3.2 解析結果

解析結果として、時間積分の最終時刻における値（瞬時値）を以下に示す。なお、時間平均操作などのデータ処理は SMART-fem の結果を含めて行っていない。

### 3.2.1 流速分布

自由表面( $z=0.5$  [m])での大スケール流速ベクトルを図 3.3 に、小スケール流速ベクトルを図 3.4 に示す。また、参考として昨年度 SMART-fem コードにより解析を実施した結果を図 3.5 に示す。円筒中心( $x,y$ )=(0,0)[m]に対して、MISTRAL コードの解析結果の表面での渦中心は( $x,y$ )=(0.034,-0.023) [m]となっており、SMART-fem コードの解析結果( $x,y$ )=(0.014,-0.010) [m]に比べて偏心率が大きな結果となっている。また、小スケール流速ベクトルは渦中心付近に有意な値が発生しており、大スケール流速のみでは解像できないことを示している。

$z=0.15$  での大スケール流速ベクトルを図 3.6 に、小スケール流速ベクトルを図 3.7 に示す。また、SMART-fem コードにより解析を実施した結果を図 3.8 に示す。昨年度の SMART-fem コードの解析結果による渦中心( $x,y$ )=(0.008,-0.004) [m]に比べて MISTRAL コードの解析結果の渦中心は( $x,y$ )=(0.017,-0.002) [m]となっており、 $x$  座標に関しては偏心率が大きな結果となっている。また、渦周辺の周方向流速の最大値は MISTRAL コードの解析結果が SMART-fem コードの解析結果よりも大きくなっている。定量的な実験結果との比較は 3.3.1 節で考察する。

$x=0$  での大スケール流速ベクトルと小スケール流速ベクトルを図 3.9(a)および(b)に、 $y=0$  での同様の図を図 3.10(a)および(b)に示す。小スケール流速ベクトルは渦中心付近や出口管内で大きな値が発生しており、これらの部分では大スケール流速のみでは十分に解像できないことを示している。また、参考として昨年度の SMART-fem コードの  $x=0$  と  $y=0$  での流速ベクトルを図 3.11(a)および(b)に示す。渦中心が異なるので直接的な比較は困難であるが、昨年度の SMART-fem コードの流速ベクトルに比べると、MISTRAL コードの解析結果の方が空間振動が少ない傾向にある。

### 3.2.2 圧力分布

自由表面( $z=0.5$  [m])での大スケール圧力と小スケール圧力を図 3.12(a)(b)に示す。大スケール圧力は各要素内で一定値をとるが、コンタ図作成には不便であるので、最小 2 乗法で節点値に割り振った値で作図している。また、小スケール圧力は式 (26) のように各要素内の局所座標の線型和で与えられるので、その係数成分 ( $\tilde{p}_{e(1)}$ ,  $\tilde{p}_{e(2)}$ ,  $\tilde{p}_{e(3)}$ ) をベクトルとして示している。また、SMART-fem コードにより解析を実施した同様の結果を図 3.13 に示す。昨年度の SMART-fem コードの解析結果に比べて MISTRAL コードの解析結果の圧力分布は渦中心でシャープなものとなっている。また、小スケール圧力ベクトルは渦中心付近に有意な値が発生しており、大スケール圧力のみでは解像できないことを示している。

$z=0.15$ [m]での大スケール圧力と小スケール圧力を図 3.14(a)(b)に先と同様の作図方法で示す。これらの分布では自由表面( $z=0.5$  [m])での大スケール圧力と小スケール圧力分布と顕著な相違は見られない。また、SMART-fem コードにより解析を実施した同様の結果を図 3.15 に示す。昨年度の SMART-fem コードの解析結果に比べて

MISTRAL コードの解析結果の圧力分布は渦中心でシャープなものとなっている。

$x=0$  での大スケール圧力と小スケール圧力を図 3.16(a)および(b)に、 $y=0$  での同様の図を図 3.17(a)および(b)に示す。小スケール圧力ベクトルは渦中心付近や出口管内で大きな値が発生しており、大スケール圧力のみでは解像できないことを示している。また、参考として昨年度の SMART-fem コードの  $x=0$  と  $y=0$  での圧力を図 3.18(a)および(b)に示す。渦中心からの相対的な断面位置が異なるため直接的な比較は困難であるが、昨年度の SMART-fem コードの圧力に比べると、MISTRAL コードの解析結果が圧力分布がシャープな傾向にある。

### 3.2.3 第 2 不変量分布

昨年度の検討結果<sup>(2)</sup>によると、以下で定義される第 2 不変量  $\Pi$  の分布は渦同定に有効であることが示されている。

$$\Pi = (S_{ij} S_{ij} - \Omega_{ij} \Omega_{ij}) \quad (89)$$

ここで、 $[S_{ij}]$  および  $[\Omega_{ij}]$  は  $2[S_{ij}] = [u_{ij} + u_{ji}]$ ,  $2[\Omega_{ij}] = [u_{ij} - u_{ji}]$  で定義される歪みテンソルおよび回転テンソルを表す。なお、非圧縮性流体に対しては  $-\Pi$  は密度で除した圧力  $p$  のラプラシアンと常に等しく、第 2 不変量  $\Pi$  が負でその絶対値が大きい場合、圧力は極小となるりうることを示している。

$$\nabla^2 p = -\Pi \quad (90)$$

自由表面 ( $z=0.5$  [m]) での第 2 不変量  $\Pi$  の分布を図 3.19(a), (b) に示す。また、SMART-fem コードにより解析を実施した同様の結果を図 3.20 に示す。カラースケールが同一の図 3.19(a) と図 3.20 を比較すると、SMART-fem コードの解析結果に比べて MISTRAL コードの解析結果の第 2 不変量分布は渦中心で極めてシャープなものとなっている。定量的な比較は 3.3.2 節で考察する。

また、MISTRAL コードで得られた解析領域全体での第 2 不変量  $\Pi$  の分布を図 3.21 に、SMART-fem コードにより得られた結果を図 3.22 に示す。第 2 不変量  $\Pi$  の分布の構造は両者ともに同様であるが、渦中心では MISTRAL コードの結果では第 2 不変量ゼロの領域に空白域が見られる。これは SMART-fem コードの結果では渦中心近傍で第 2 不変量がゼロ近傍となる領域が広いのに対して、MISTRAL コードの結果では第 2 不変量がゼロ近傍となる領域が極めて狭いことに因る。

## 3. 3 考察

### 3.3.1 解析結果の精度

MISTRAL コードで得られた解析結果の精度を評価するため、守屋<sup>(25)</sup>のレーザー・ドップラー流速計を用いた実験結果と比較する。ただし、実験結果は 60 [sec] または 90 [sec] の時間平均であるのに対し、ここでの解析結果は空間平均の瞬時値である点に注意を要する。底部から 0.15[m] の水平断面 ( $z=0.15$  [m]) での周方向流速を実験結果と

比較すると、図 3.23(a)および(b)を得る。この図では SMART-fem コードにより得られた結果も併せてプロットしており、SMART-fem コードでは半径 0.03m 程度以下で実験結果との大きな不一致がみられるが、MISTRAL コードでは不一致の範囲が半径 0.01m 程度以下に限定される。つまり、MISTRAL コードで得られた解析結果が SMART-fem コードで得られた結果よりも実験値に近いことが分かる。特に、渦中心付近の流速分布が急激に変化する領域の精度は窪み深さの評価に大きな影響を与える可能性があるため、MISTRAL コードでの評価が有利となるが、流速のピーク値は MISTRAL コードでも十分には再現されているとは言い難い。

以上の傾向が  $z=0.15$ [m]の断面のみならず自由表面でも当てはまることを示すために、MISTRAL コードで得られた自由表面での周方向流速分布 ( $x=0.034$ [m]および  $y=-0.023$ [m]の断面) を図 3.24(a)および(b)に、SMART-fem コードで得られた自由表面での周方向流速分布 ( $x=0.014$ [m]および  $y=-0.010$ [m]の断面) を図 3.25(a)および(b)に示す。これらの図から周方向流速分布は深さにあまり依存しないことが分かる。

### 3.3.2 自由表面での窪み深さ評価

本節では、数値流動解析で得られた結果から自由表面での窪み深さ（渦中心の窪み量、ガスコア長さ）を推定する。推定法としては Eguchi ら<sup>(26)</sup>が提案している第 2 不変量の分布に基づく方法を用いることにする。その前提条件は、渦の周方向流速  $u_\theta(r)$  は式(91)に示すような Burgers の伸長渦モデルで表現できると仮定するものである。

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \right\} \quad (91)$$

ここでは、 $\Gamma$ は渦周りの循環を、 $r_0$ は粘性コア半径を表す。さらに、半径方向の圧力勾配は遠心力に等しいとの仮定を用いると、以下の式が導出される。

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{1}{R^3} \left\{ 1 - \exp(-R^2) \right\}^2 \quad (92)$$

ここで、無次元半径  $R$  と無次元圧力  $P$  はそれぞれ以下で定義される。

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad P = \frac{P}{(\Gamma/2\pi r_0)^2} \quad (93a, b)$$

第 2 不変量が圧力のラプラシアン（の逆符号）に等しいとする関係式と式(92)を用いると、無次元の第 2 不変量は無次元半径  $R$  の関数として以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \Pi &= -\nabla^2 P = -\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial R} \\ &= -\frac{2}{R^4} \left[ 2R^2 \left\{ 1 - \exp(-R^2) \right\} \exp(-R^2) - \left\{ 1 - \exp(-R^2) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (94)$$



この関係を図示すると図 3.26 のようになり、無次元の第 2 不変量がゼロとなる半径  $r_1$  と最小値の 1/2 となる半値幅  $r_2$  は以下のように定義される。

$$r_1 / r_0 = 1.12 \quad (95)$$

$$r_2 / r_0 = 0.57 \quad (96)$$

Eguchi ら<sup>(26)</sup>が提案している方法では数値解析結果から第 2 不変量分布を計算し、その半値幅  $r_2$  を求め、式(96)によって粘性コア半径  $r_0$  を計算する。図 3.27(a)および(b)に  $x=0$  および  $y=0$  での第 2 不変量分布を示す。この図から半値幅  $r_2$  を求めると MISTRAL コード・SMART-fem コード共に  $r_2=7[\text{mm}]$ 程度となり、さらに式(96)によって粘性コア半径  $r_0$  を計算すると  $r_0=12[\text{mm}]$ 程度となる。

一方、渦中心での圧力降下量は式(92)を積分することにより求められるので、それに対応する窪み深さは以下で与えられる。

$$L = \frac{p(\infty) - p(0)}{g} = \frac{\ln 2}{g} \left( \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2 \quad (97)$$

$\Gamma/2\pi$ は入口平均流速( $U_{in}=0.04167$  [m/sec]) と入口部中心一円筒容器中心のアーム長 ( $L_d=0.2-0.04/2=0.18$  [m])の積で与えられるとすると、 $\Gamma/2\pi=U_{in} \times L_d=7.5 \times 10^{-3}$  [m<sup>2</sup>/sec]となり、これを粘性コア半径  $r_0$  の値 ( $r_0=12[\text{mm}]$ ) と共に式(97)に代入すると窪み深さが  $L=0.03$  [m]として得られる。これは守屋の実験結果  $L=0.11$  [m]よりも小さく、非保守的な結果となる。

なお、第 2 不変量がゼロとなる半径  $r_1$  から粘性コア半径  $r_0$  を計算する方法も考えられるが、SMART-fem コードの結果では第 2 不変量がゼロとなる領域が拡散しており (半径  $r_1$  を一意に決定することが困難)、SMART-fem コードの結果を利用する場合は好ましくない。一方、MISTRAL コードの結果から得られる第 2 不変量ゼロの半径  $r_1$  は明確に定義可能で SMART-fem コードの結果よりも小さい傾向にある。ただし、式(95)より計算できる MISTRAL コードの粘性コア半径  $r_0$  の値は先のもの (半値幅を用いて得られるもの) とほぼ同様であり、半径  $r_1$  を用いても窪み深さ評価の精度向上には寄与しない。

## 第4章 詳細実験解析

### 4.1 解析条件

解析対象は、図 4.1 に示す開水路内に一辺 50[mm]の四角柱と一辺 20[mm]の四角吸込み管（管内断面は 10[mm]角）を有する流れであり、東京大学・岡本教授の設備で実験が進められているものである。WGでは解析領域として吸込み管から上流・下流に 200[mm]をとり、標準的なメッシュサイズを 5[mm]とすることが決められたので、ここでは SMART-fem コードを用いて図 4.2 の有限要素分割（節点数 100,260; 要素数 92,680）を対象として解析を実施した。

境界条件としては、以下のように物体壁面でノンスリップ、自由表面でスリップとした。また、出口面で擬似応力をゼロとするとこの部分の逆流が進展して、数値的な不安定が発生することが確認されたので、逆流を抑制するような抵抗力が作用するように境界条件(87)を出口条件として用いた。

$$\text{(入口)} \quad u_2=0.1[\text{m/sec}], u_1=u_3=0 [\text{m/sec}]$$

$$\text{(壁)} \quad u_1=u_2=u_3=0 [\text{m/sec}]$$

$$\text{(自由表面)} \quad \chi_1=\chi_2=0 [\text{m}^2/\text{sec}^2], u_3=0 [\text{m/sec}]$$

$$\text{(出口)} \quad \chi_1=\chi_3=0 [\text{m}^2/\text{sec}^2], \chi_2=-\alpha u_2 [\text{m}^2/\text{sec}^2] (\alpha=1[\text{m/sec}])$$

$$\text{(吸込み管)} \quad u_3=-U^{\text{pipe}}[\text{m/sec}] \text{ (図 4.3)}, u_1=u_2=0 [\text{m/sec}]$$

なお、出口条件における比例係数 $\alpha=1 [\text{m/sec}]$ は特に最適化をした値ではない。また、吸込み管での境界条件は吸込み流量が規定値 ( $4 \times 10^{-4} [\text{m}^3/\text{sec}]$ ) となるように吸込み管内側の節点を含めて図 4.3 のように流速指定境界条件として与えた。

動粘性係数を  $1 \times 10^{-6} [\text{m}^2/\text{sec}]$  に、Smagorinsky 定数  $C_s$  を 0.1 に設定し、初期条件として一様流速・ゼロ圧力を与え、時間刻み  $\Delta t = 1 \times 10^{-3} [\text{sec}]$  を用いて準定常状態となった時刻 25[sec]まで時間積分を進めた。なお、正則化パラメータとしては $\lambda=0, \beta=0.1/h_f^2$  ( $h_f$  は平均メッシュサイズ;  $h_f=(\Omega/N_e)^{1/3}=5 \times 10^{-3} [\text{m}]$ ) を用いた。

## 4. 2 解析結果

以下の解析結果は、特に断りがない限り時間積分の最終時刻における値（瞬時値）を示す。（時間平均操作などのデータ処理は行っていない。）

### 4.2.1 流速分布と時刻歴

図 4.4 に示す角柱上流側の U1-U3 での流速分布（主流方向）と角柱下流側の A, B, C での流速時刻歴（主流方向）の出力が WG で合意されており、原点を入口面底部の中央に置き、主流方向を+y に、高さ方向を+z にとると、それぞれの座標は単位を[mm]として以下のようなになる。

$$\begin{aligned} U1 &= (x, 80, 10) & U2 &= (x, 80, 75) & U3 &= (x, 80, 140) \\ A &= (25, 175, 125) & B &= (0, 175, 125) & C &= (0, 220, 125) \end{aligned}$$

U1-U3 での流速分布（主流方向）の結果を図 4.5(a),(b)に、また、A, B, C での時刻 25[sec]から時刻 45[sec]までの流速時刻歴（主流方向）を図 4.6(a)に、そのパワースペクトル分布を図 4.6(b)に示す。図 4.5 に示す U1-U3 での流速分布を見ると、四角柱部近傍で主流流速に振動が発生していることが分かる。この流速ベクトルの振動は、解法上の問題ではなく、四角柱角部の圧力・流速の急激な変化を解像するにはメッシュ分割が不十分である（粗い）ことによるものと考えられる。このような振動はメッシュ細分化によって回避できることが知られている。<sup>(27)</sup>

一方、図 4.6(a)に示す A, B, C での流速時刻歴（主流方向）より、点 B での変動が他の 2 点よりも大きく、大きな逆流が 2.5[sec](=0.4[Hz])程度のあまり明確ではない周期で発生している。点 A および C での変動が点 B よりも小さい理由は、点 A および C は物体の後流中心に位置し、物体から剥離した渦が直接通過しないことによるものと考えられる。また、図 4.6(b)に示すパワースペクトル分布からは点 B のピーク周波数は  $f = 0.45$ [Hz]で、角柱幅と入口流速をそれぞれ代表長さ  $D$  と代表流速  $U$  として、周波数を無次元数（ストロハル数  $St$ ) に換算すると以下のようなになる。

$$St = fD/U = 0.45 \text{ [Hz]} \times 0.05 \text{ [m]} / 0.1 \text{ [m/sec]} = 0.225$$

このストロハル数は文献値の  $St = 0.13 \sim 0.14$  程度<sup>(28)-(29)</sup>よりも大きいことが、この理由はこの四角柱が狭い流路に置かれていることによる閉塞効果によるものと考えられる。例えば、代表流速として四角柱位置での平均流速  $U' = 0.133$  [m/sec]を用いると、文献値に近づく。

$$St = fD/U' = 0.45 \text{ [Hz]} \times 0.05 \text{ [m]} / 0.133 \text{ [m/sec]} = 0.17$$

自由表面における流速ベクトルを図 4.7 に示す。角柱部の上流で波長  $2\Delta x$  の流速振動が発生していることが分かる。また、吸込み部付近の流れは複雑化しており、吸込み管がない場合に予想される明確な Karmann 渦列は見られない。

#### 4.2.2 圧力分布

自由表面における圧力分布を図 4.8 に示す。角柱部の上流で高い圧力が、吸込み管近傍で低い圧力が見られる。また、図 4.9 に示す 3 つの圧力等値面より、吸込み部付近で圧力が顕著に低下し、その分布は非常に複雑な構造となっていることが分かる。

流速ベクトルの振動が見られた四角柱角部近傍では圧力振動は見られていないが、ここで表示した圧力は要素圧力を節点圧力に割り振ったものであり、チェッカー・ボード型の要素圧力振動はこの処理によって潜在化する傾向にあるので、要素圧力には振動が発生している可能性がある。

#### 4.2.3 第 2 不変量分布

本解析結果における渦構造を把握するため、式(89)で定義される第 2 不変量を計算した。これまでの解析では渦中心で第 2 不変量は負となり、渦周辺では正となることが示されている。本解析結果でもそのような傾向が維持されるかを調べるために、正・ゼロ・負の 3 つの等値面で第 2 不変量を表示したものを図 4.10(a), (b) に示す。また、正・負の等値面を個別に表示したものを図 4.10(c) に示す。これらの図から負の等値面は吸い込み管直上で見られ、その周りを囲むように正の等値面が存在していることが分かる。これらの分布特性は前節の容器内旋回流で見られたものと整合する。

## 第5章 結言

本研究では、ナトリウム冷却高速炉の炉容器内自由表面でのカバーガス巻込み現象に関する流動特性を予測することを最終目標として、有限要素法の先進的手法の一つである弱形式に基づくマルチスケール法（VMS法）を調査した。調査では、電力中央研究所で開発した非VMS乱流解析コード SMART-fem と VMS乱流解析コード MISTRAL を用いてガス巻込みを伴う2種類の流動問題を解析し、各数値モデルの適合性と解析コードの現象再現性を評価した。

まず、円筒容器内の旋回流（ベンチマーク問題）を対象としたVMS解析結果と昨年度実施した非VMS解析結果から、以下の知見を得た。

- (1) VMS法を用いた解析では、渦近傍の急峻な流速変化を非VMSに比べて精度良く再現でき、周方向流速のピーク値は概ね2倍となるが、何れの方法でも実験値と比べると小さい。精度向上の要因としては、小スケールの導入による解像度アップの効果（2次要素による流速場模擬性の向上）と乱流モデルの改善の2つがあると考えられる。
- (2) 渦強度の目安となる第2不変量分布をVMS法で計算したところ、その半値幅（第2不変量の最小値の1/2となる渦半径）は非VMS法で得られるものと大きな差異はない（窪み深さの評価量も非VMS法のもの同程度となる）ことが判明した。
- (3) 第2不変量がゼロとなる渦半径は、VMS法で得られるものが、非VMS法で得られるものに比べると妥当な値となるが、この渦半径から計算される窪み深さの評価量は、実験値に対して非保守的な結果となる。

さらに、今年度から実施中の開水路吸込み流（詳細実験問題）を対象とした非VMS解析から、以下の知見を得た。

- (4) メッシュ分割が不足している領域では波長  $2\Delta x$  の流速振動が発生するので、適正な流動評価を行うには適切なメッシュ分割が必要となる。
- (5) 第2不変量分布は渦発生が予測される中心部分で負となり、その周囲が正となることが示され、この分布特性は円筒容器内の旋回流（ベンチマーク問題）で見られたものと整合する。

今後は、開水路吸込み流（詳細実験問題）の解析結果を非定常特性に着目して分析し、準定常的な円筒容器内の旋回流（ベンチマーク問題）との相違を明らかにするとともに、開水路吸込み流（詳細実験問題）などの非定常渦問題に対するVMS法の適用性を検討する必要があるものと考えられる。

また、窪み深さの評価値が実験に比べて非保守的な値となるため、これを補正するための手法の考案が必要である。

## 参考文献

- (1) 大島 宏之 : “高速増殖炉におけるガス巻込み研究の現状”, 混相流, 17 巻, 3 号, pp.251-258, (2003)
- (2) 江口 譲 : “ガス巻込み現象数値解析に関する研究”, JNC 委託研究レポート J9400 204-005, (2004)
- (3) M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W. H. Cabot : “A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model”, *Physics of Fluids A*, **3**, pp.1760-1765, (1991)
- (4) C. Fureby and G. Tabor : “Mathematical and physical constraints on large-eddy simulations”, *Theoretical and Computational Fluids Dynamics*, **9**, pp.85-102, (1997)
- (5) L. C. Berselli and V. John : “On the comparison of a commutation error and the Reynolds stress tensor for flows obeying a wall law”, Preprint 18, University of Pisa, Department of Applied Mathematics, (2004)
- (6) 江口 譲 : “LES 方程式における可換性誤差の数値的評価”, 第 17 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, A6-1, (2003)
- (7) M. Iovieno and D. Tordella : “Variable scale filtered Navier-Stokes equations: A new procedure to deal with the associated commutation error”, *Physics of Fluids*, **15**, pp.1926-1936, (2003)
- (8) T.J.R. Hughes, L. Mazzei and K.E. Jansen : “Large eddy simulation and the variational multiscale method”, *Computing Visualization Science*, **3**, pp. 47-59, (2000)
- (9) T.J.R. Hughes, L. Mazzei and A.A. Oberai : “The multiscale formulation of large eddy simulation: Decay of homogeneous isotropic turbulence”, *Physics of Fluids*, **13**, pp.505-512, (2001)
- (10) T.J.R. Hughes, A.A. Oberai and L. Mazzei : “Large eddy simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method”, *Physics of Fluids*, **13**, pp.1784-1799, (2001)
- (11) J. Holmen, T.J.R. Hughes, A.A. Oberai and N. Wells : “Sensitivity of the scale partition for variational multiscale large-eddy simulation of channel flow”, *Physics of Fluids*, **16**, pp.824-827, (2004)
- (12) T.J.R. Hughes, N. Wells and A.A. Wray : “Energy transfers and spectral eddy viscosity in large-eddy simulations of homogeneous isotropic turbulence: Comparison of dynamic Smagorinsky and multiscale models over a range of discretizations”, *Physics of Fluids*, **16**, pp.4044-4052, (2004)
- (13) S. Collis : “Monitoring unresolved scales in multiscale turbulence modeling”, *Physics of Fluids*, **13**, pp.1800-1806, (2001)
- (14) 江口 譲 : “マルチスケール熱流動解析コード MISTRAL の開発”, 日本原子力学会「春の年会」, J 58, vol. II, p.484, (2003)
- (15) 江口 譲 : “マルチスケール LES 熱流動解析コード MISTRAL の開発”, 電力中央研

研究所 研究報告 U03036, (2004)

- (16) Y. Eguchi : “A new positive-definite regularization of incompressible Navier-Stokes equations discretized with Q1/P0 finite element”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **41**, pp.881-904, (2003)
- (17) 江口 譲 : “密閉容器内非圧縮流れ解析における静水圧モード抑制法の提案”, 日本原子力学会「秋の大会」, L30, vol. II, p.355, (2002)
- (18) T.J.R. Hughes and L.P. Franca : “A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **65**, pp. 85-96, (1987)
- (19) 棚橋 : “流れの有限要素法解析 I”, 朝倉書店, (1997)
- (20) A.N. Brooks and T.J.R Hughes : “Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **32**, pp. 199-259, (1982)
- (21) D.E. Stevens, S.T. Chan and P.M. Gresho : “An approximate projection method for incompressible flow”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **40**, pp.1303-1325, (2002)
- (22) A.S. Almgren, J.B. Bell and W. Crutchfield : “Approximate projection methods: Part 1. inviscid analysis”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **22**, pp.1139-1159, (2000)
- (23) P.M. Gresho, S.T. Chan, R.L. Lee and C.D. Upson : “A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations. Part 1: Theory”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **4**, pp.557-598, (1984)
- (24) V. John : “Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equations –numerical tests and aspects of the implementation”, *J. Computational and Applied Mathematics*, **147**, pp.287-300, (2002)
- (25) 守屋 祥一 : “自由表面渦のガス巻込み発生限界に及ぼす模型縮尺効果”, 電力中央研究所 研究報告 U97073, (1998)
- (26) Y. Eguchi, H. Ohshima, T. Sakai and A. Yamaguchi : “Large-Eddy Simulation of Gas Entrainment Vortex and Applicability Analysis of Possible Criterion Parameters for LMFBR Design”, in *Proc. of Fourth Japan-Korea Symposium on Nuclear Thermal Hydraulics and Safety (NTHAS4)*, Sapporo, Japan , November 28-December 1, pp.163-170, (2004)
- (27) P.M. Gresho and R.L. Lee : “Don’t suppress the wiggles – they’re telling you something!”, in *Finite element methods for convection dominated flows*, AMD Vol.34, T.J.R. Hughes (eds), ASME: New York, pp. 37-61, (1979)
- (28) A. Okajima : “Strouhal Numbers of Rectangular Cylinders”, *J. Fluid Mech.* **123**, pp.379-398, (1982)
- (29) D.A. Lyn and W. Rodi : “The flapping shear layer formed by flow separation from the forward corner of a square cylinder”, *J. Fluid Mech.*, **267**, pp.353-376, (1994)

解 = 大スケール+小スケール+解像不可

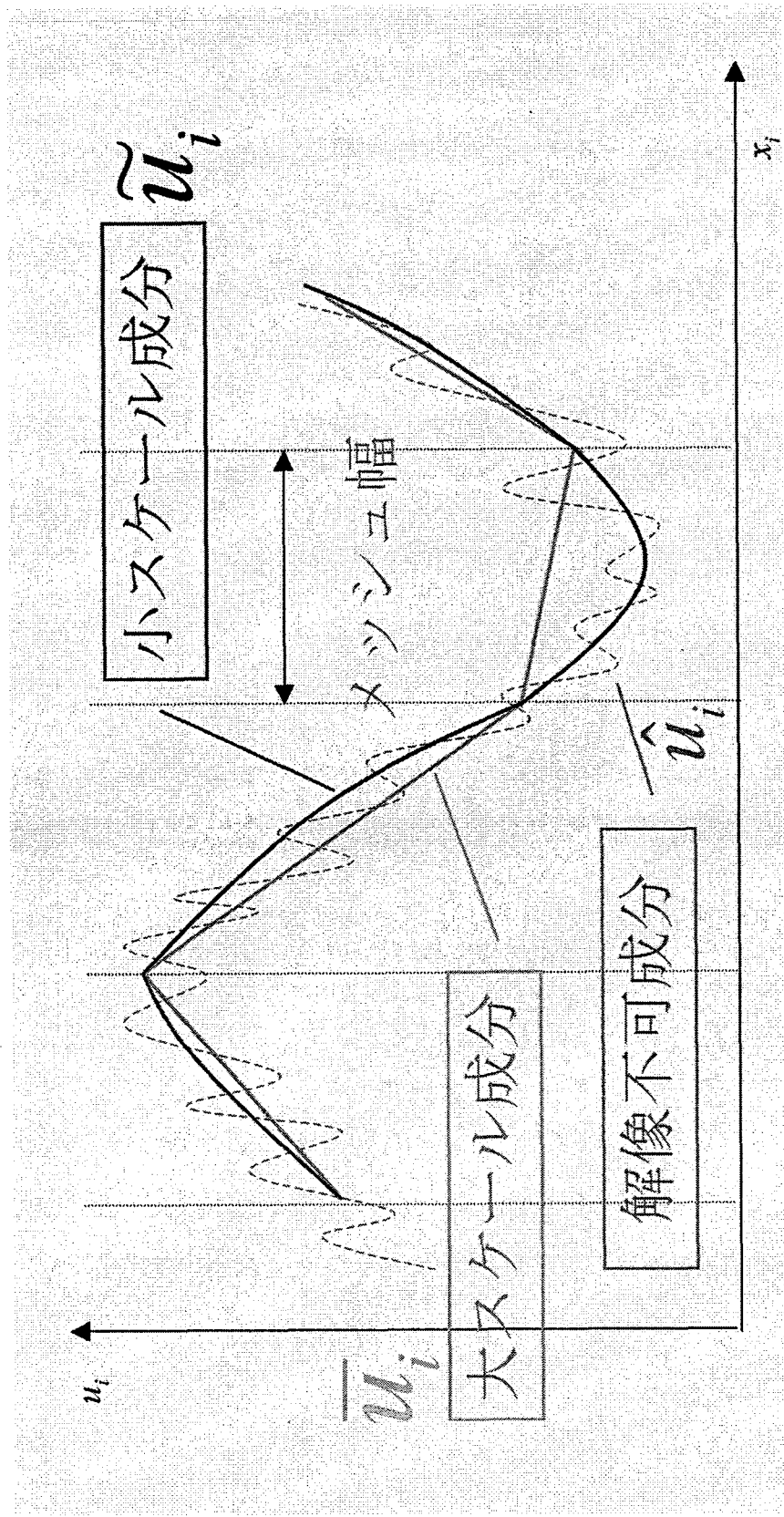
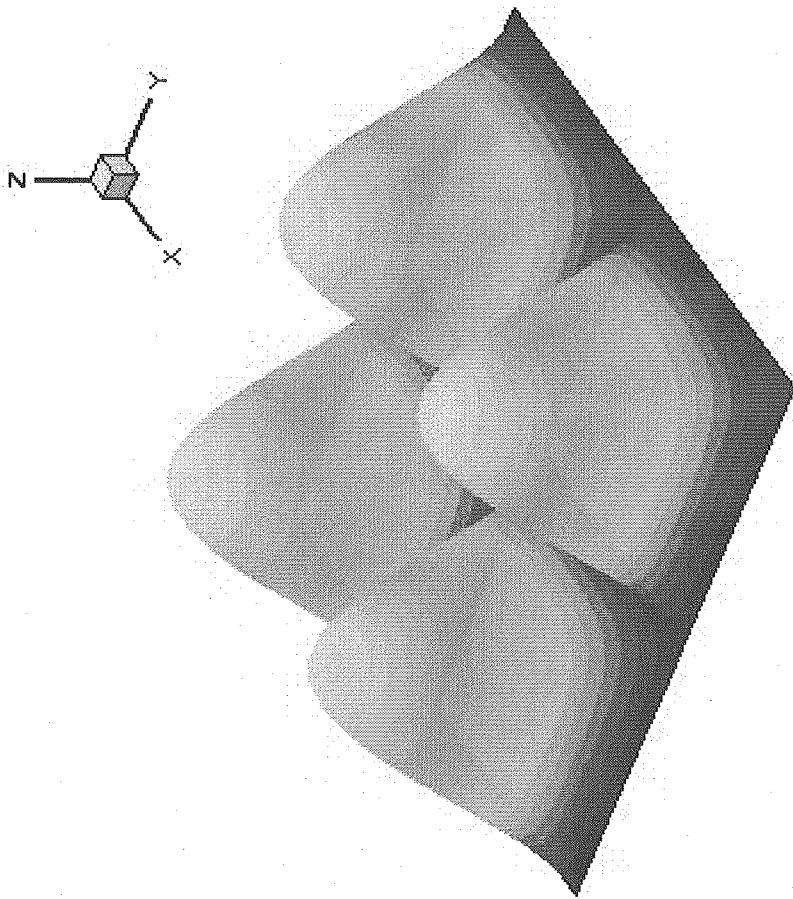
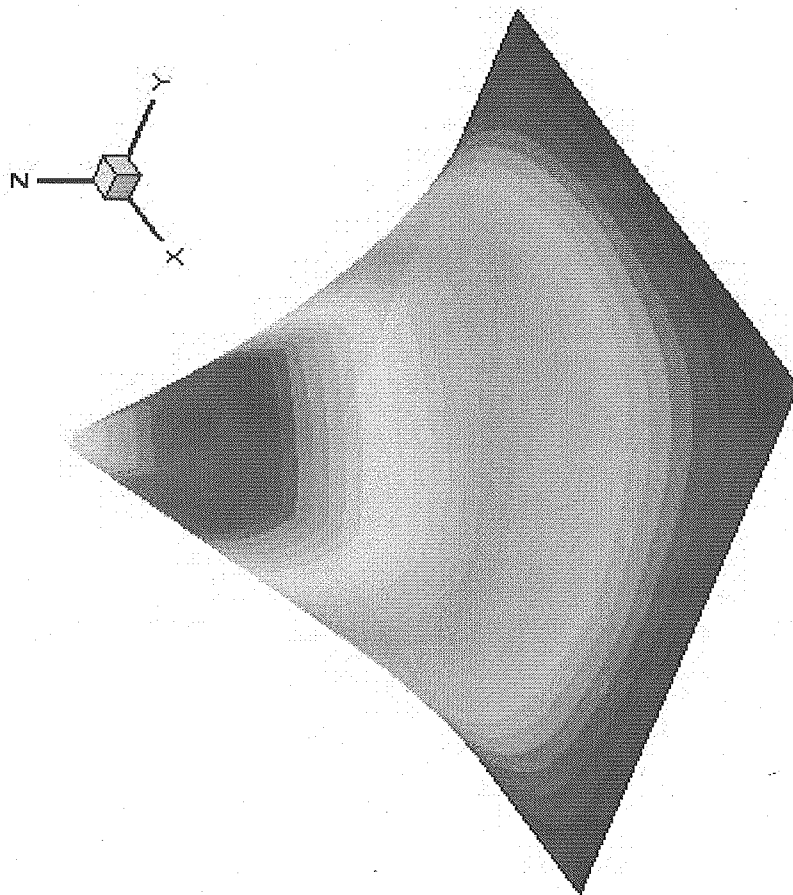


図2.1 マルチスケール有限要素 (VMS) の概念



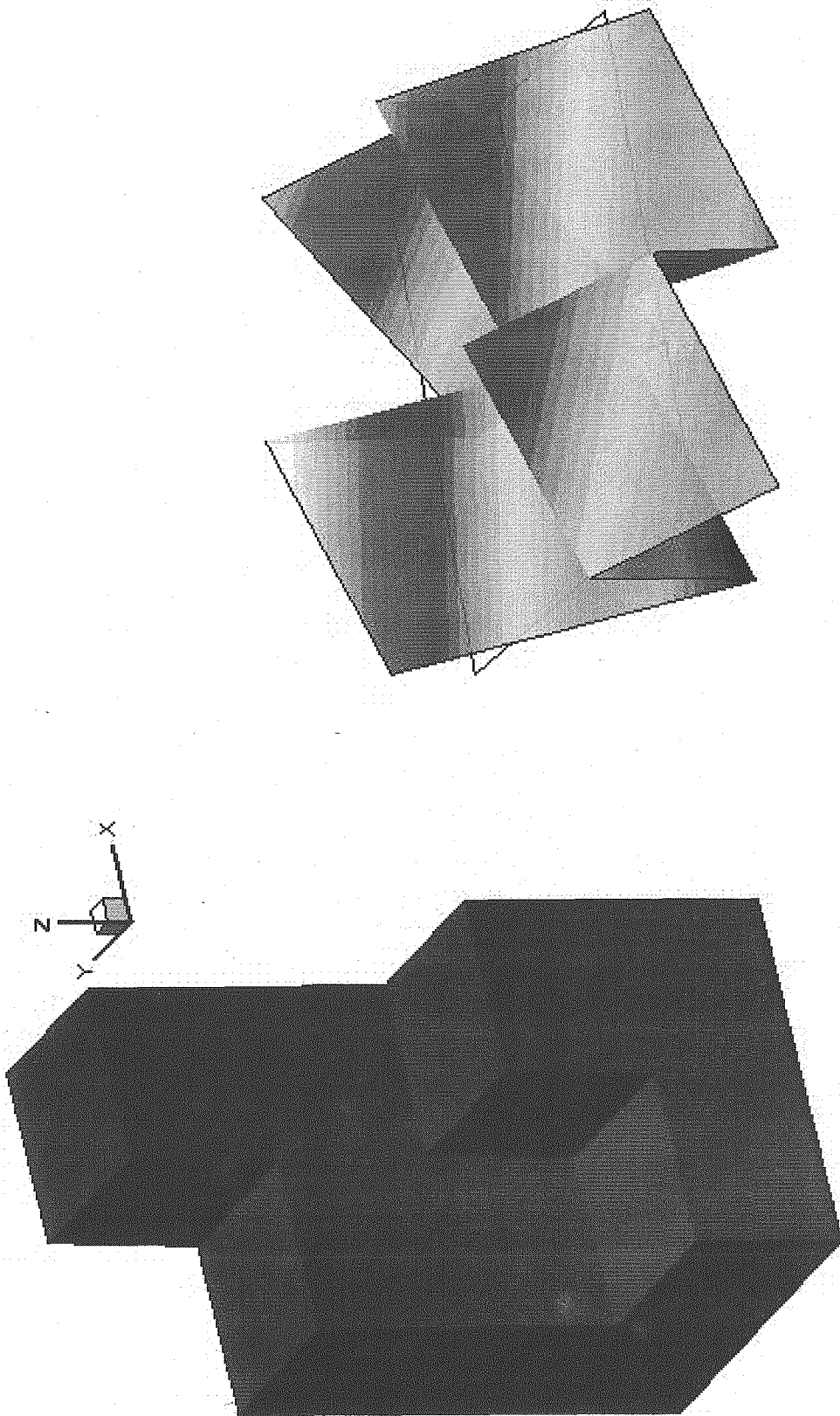


(b) 小スケール流速



(a) 大スケール流速

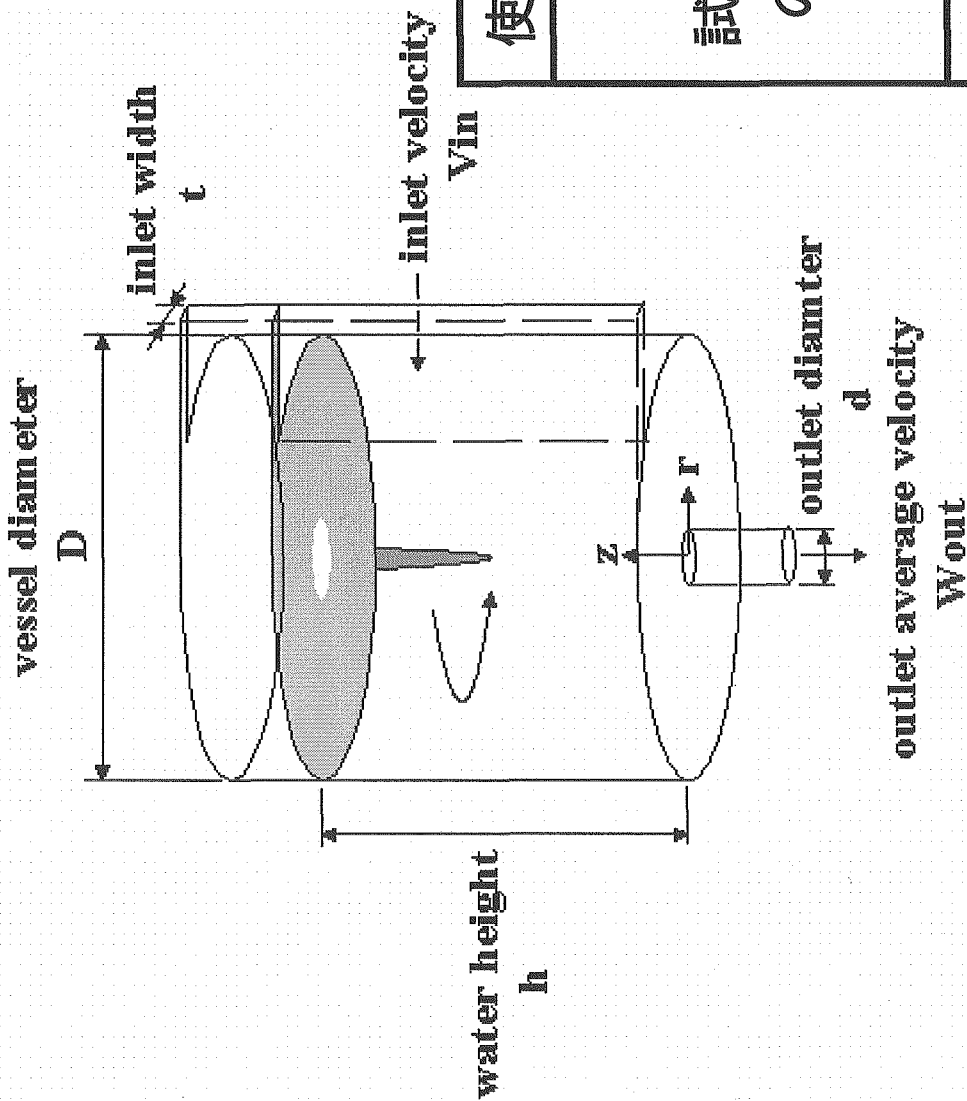
図2.2 流速の内挿関数



(a) 大スケール圧力

(b) 小スケール圧力

図2.3 圧力近似の一例



使用流体	水		
試験容器 の寸法	容器径 $D$	0.40 m	
	入口幅 $t$	0.04 m	
	出口径 $d$	0.05 m	
流入口	液面高さ $h$	0.50 m	
	$V_{in} = 0.04167 \text{ m/s}$ 一様流入条件		

図3.1 ベンチマーク問題の仕様 (JNC殿より提示)

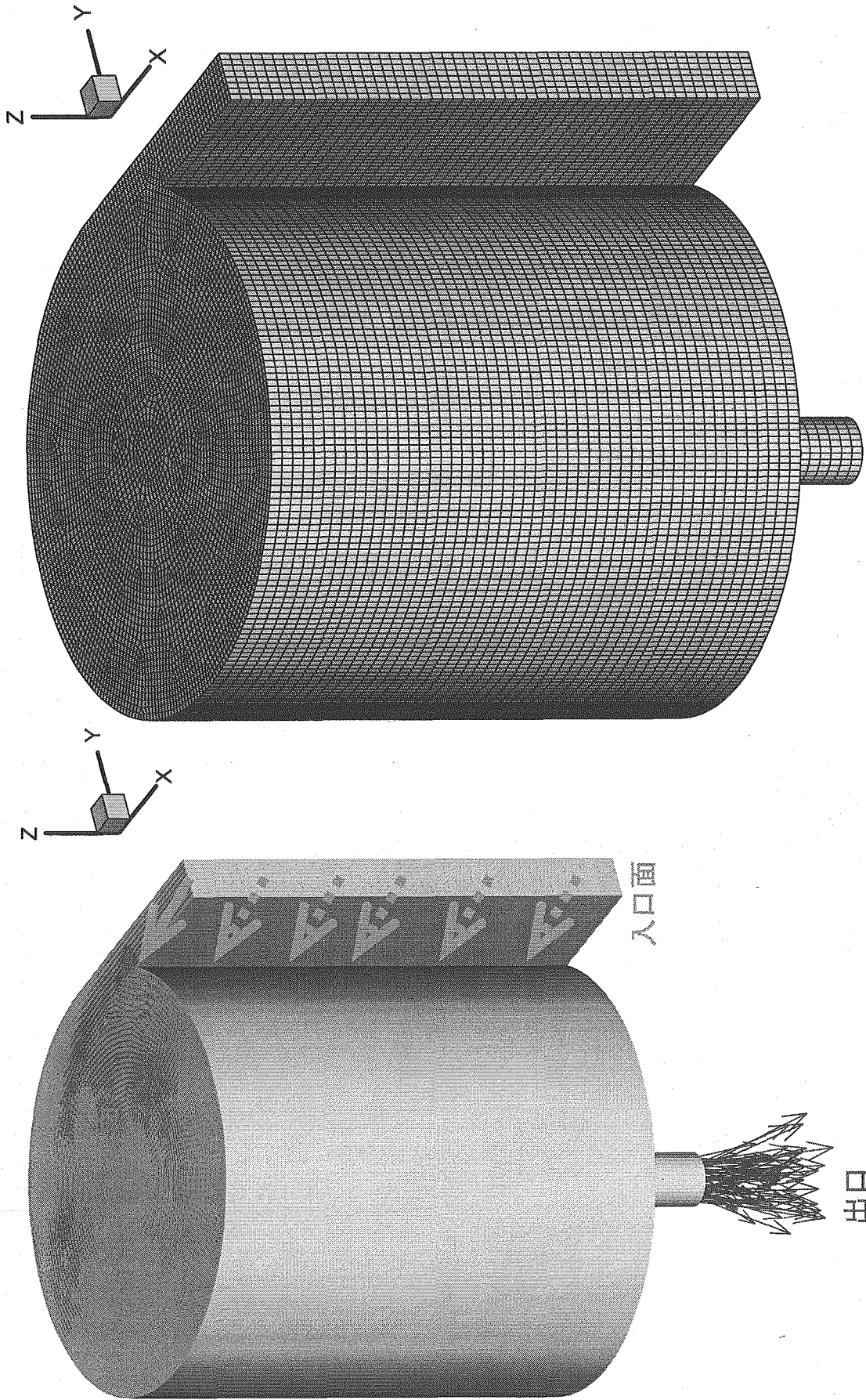


图3.2 解析モデルと有限要素分割

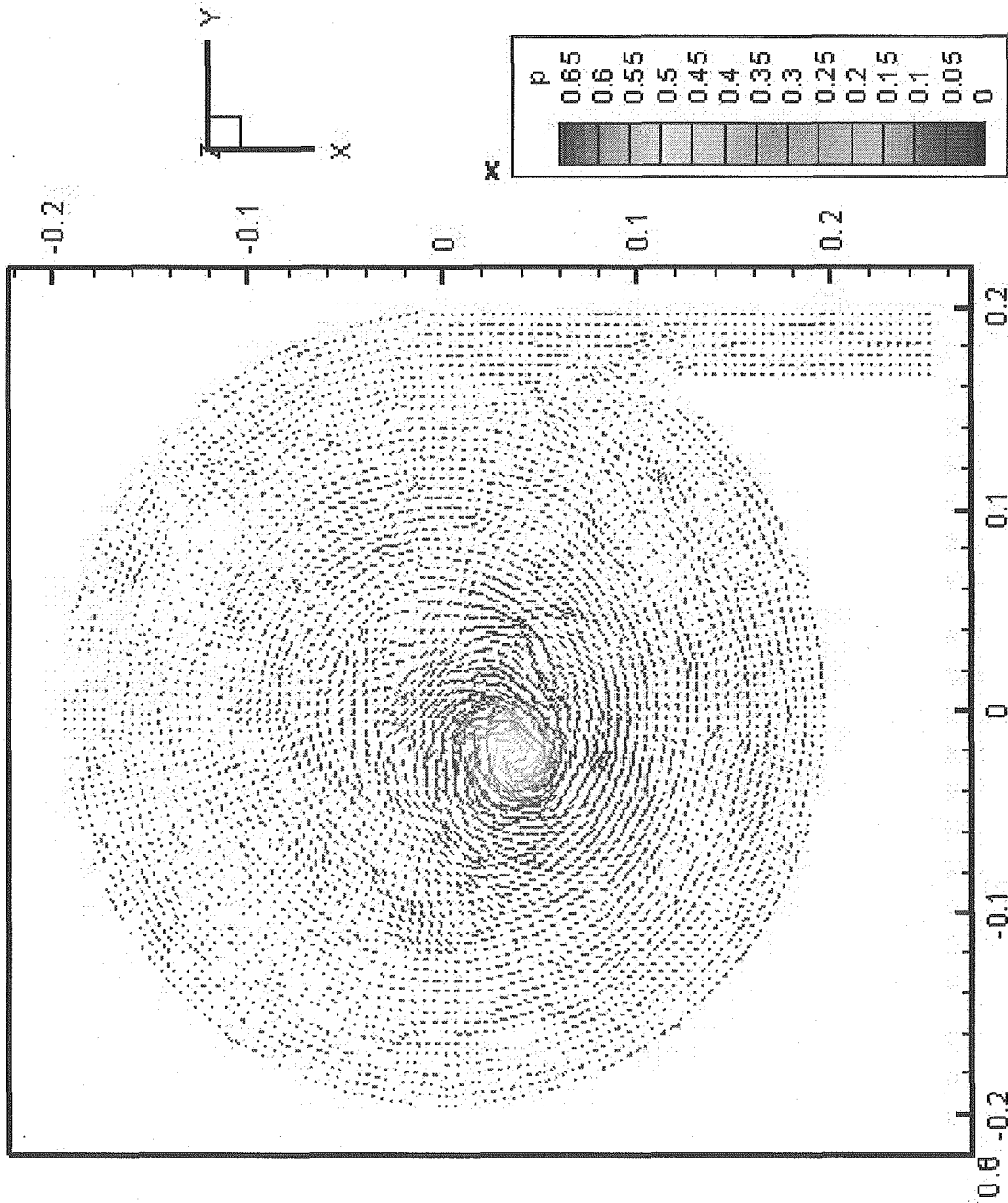


図3.3 自由表面での大スケール流速

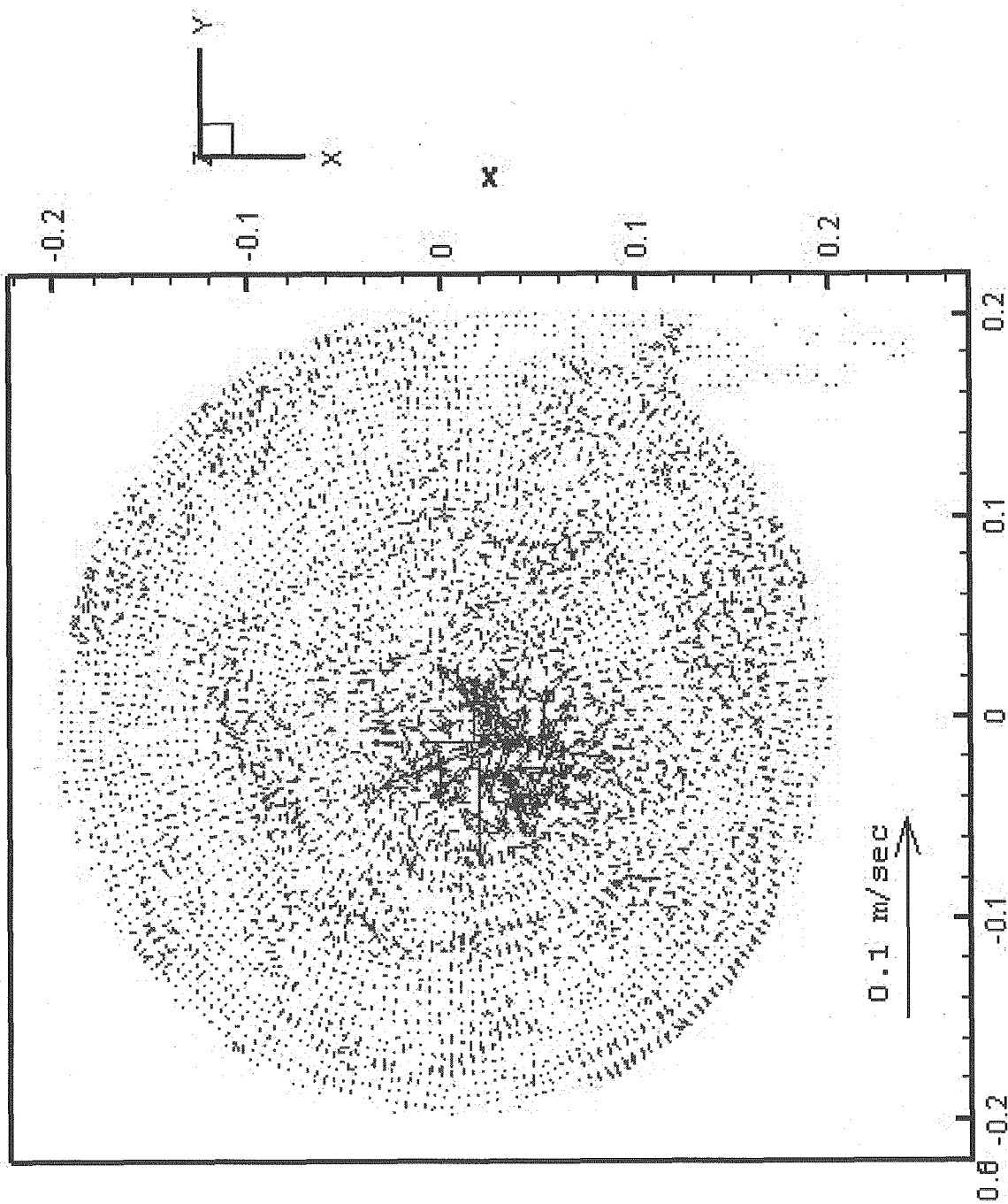


図3.4 表面での小スケール流速

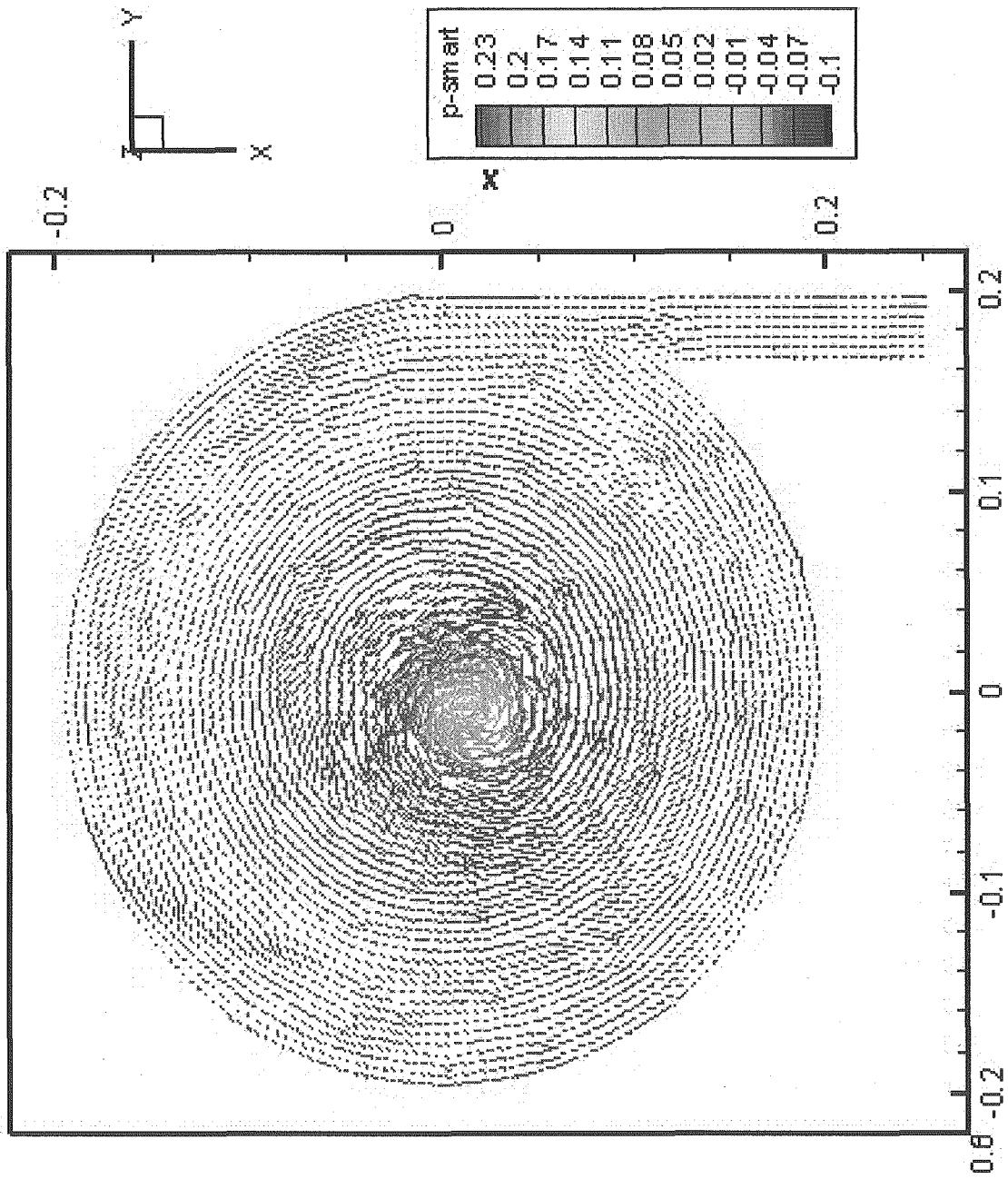


図3.5 表面での流速ベクトル (SMART-femの解析結果)

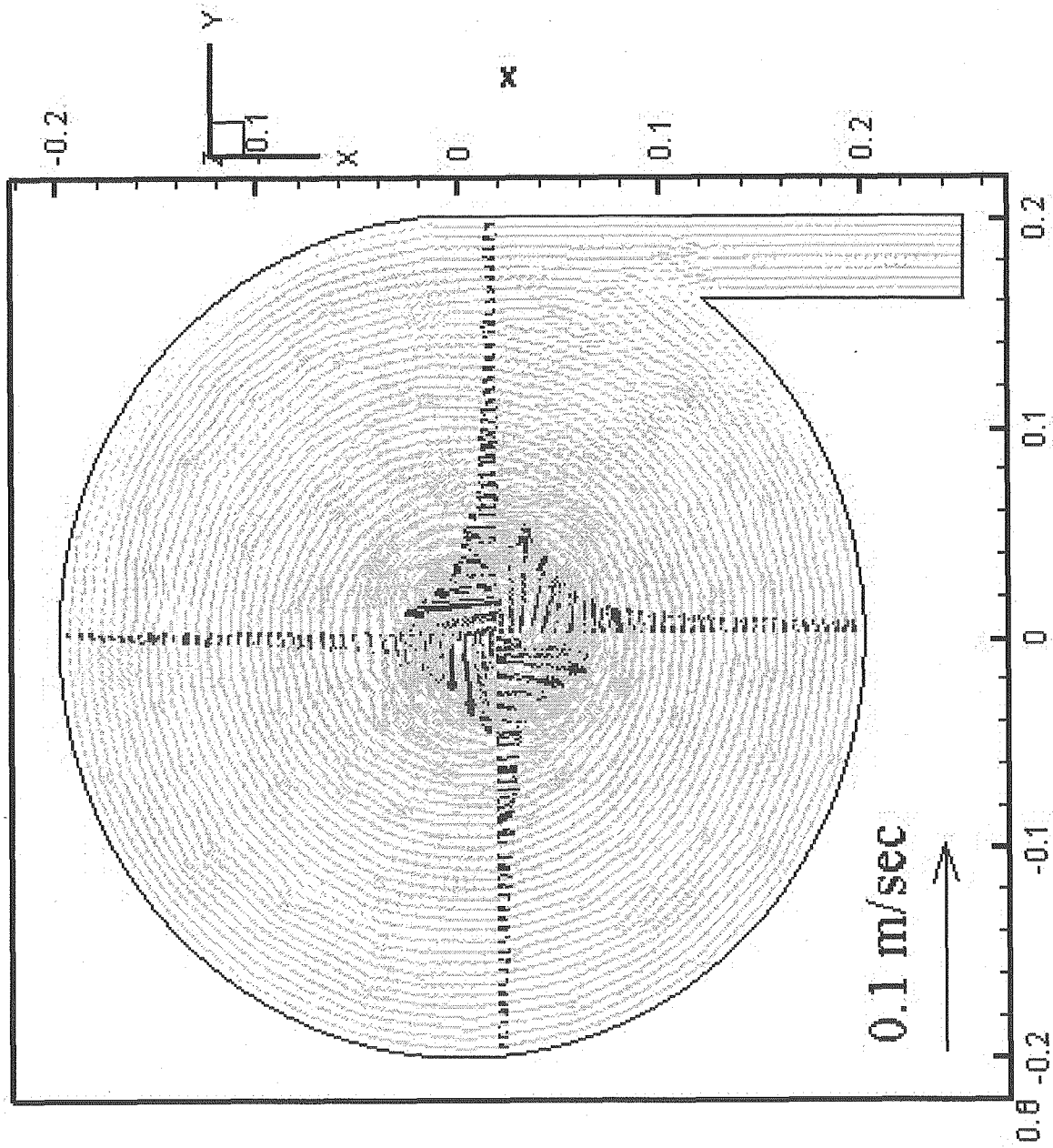


図3.6  $z=0.15$ [m]での大スケール流速



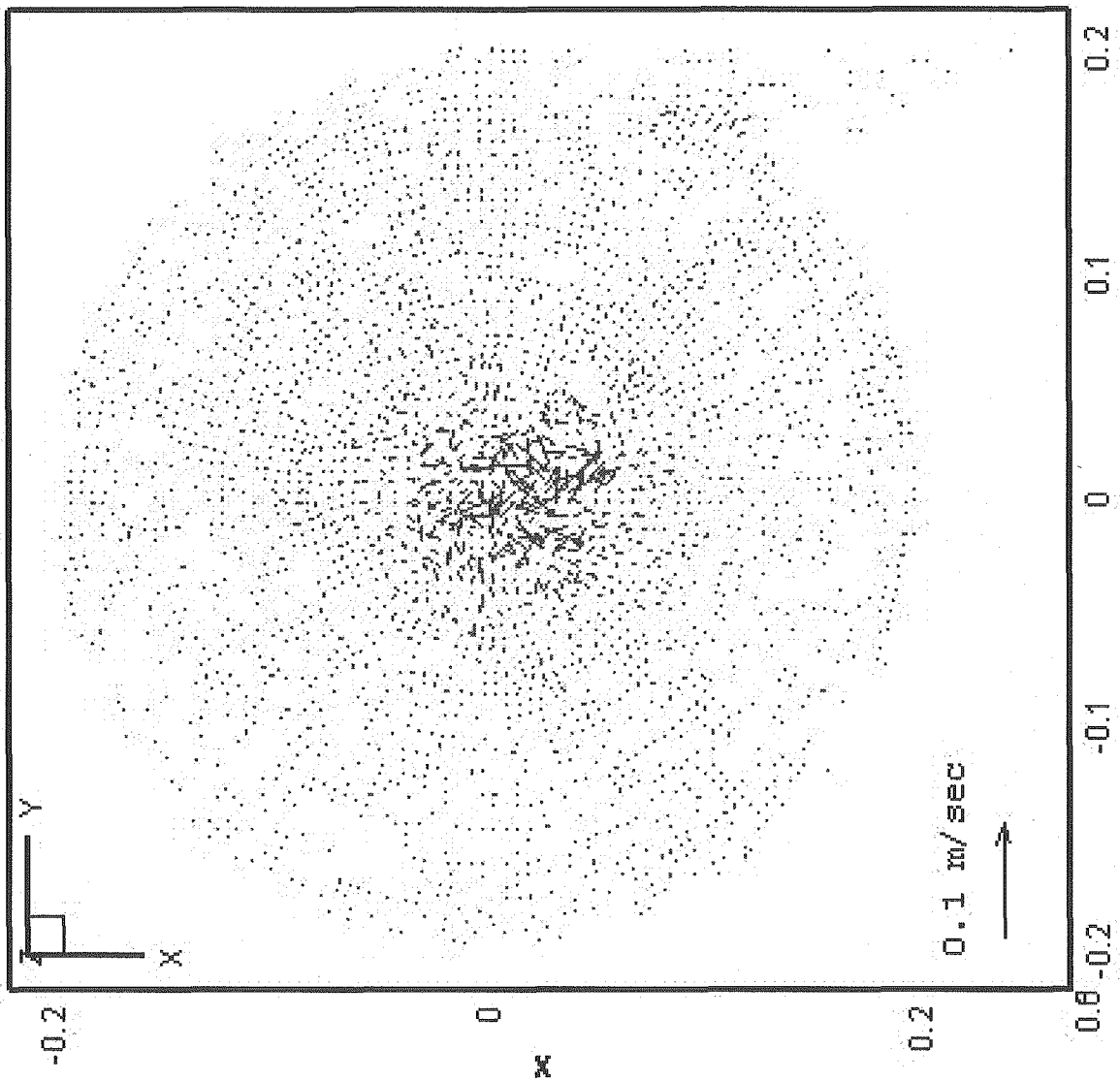


図3.7  $z=0.15$ [m]での小スケール流速

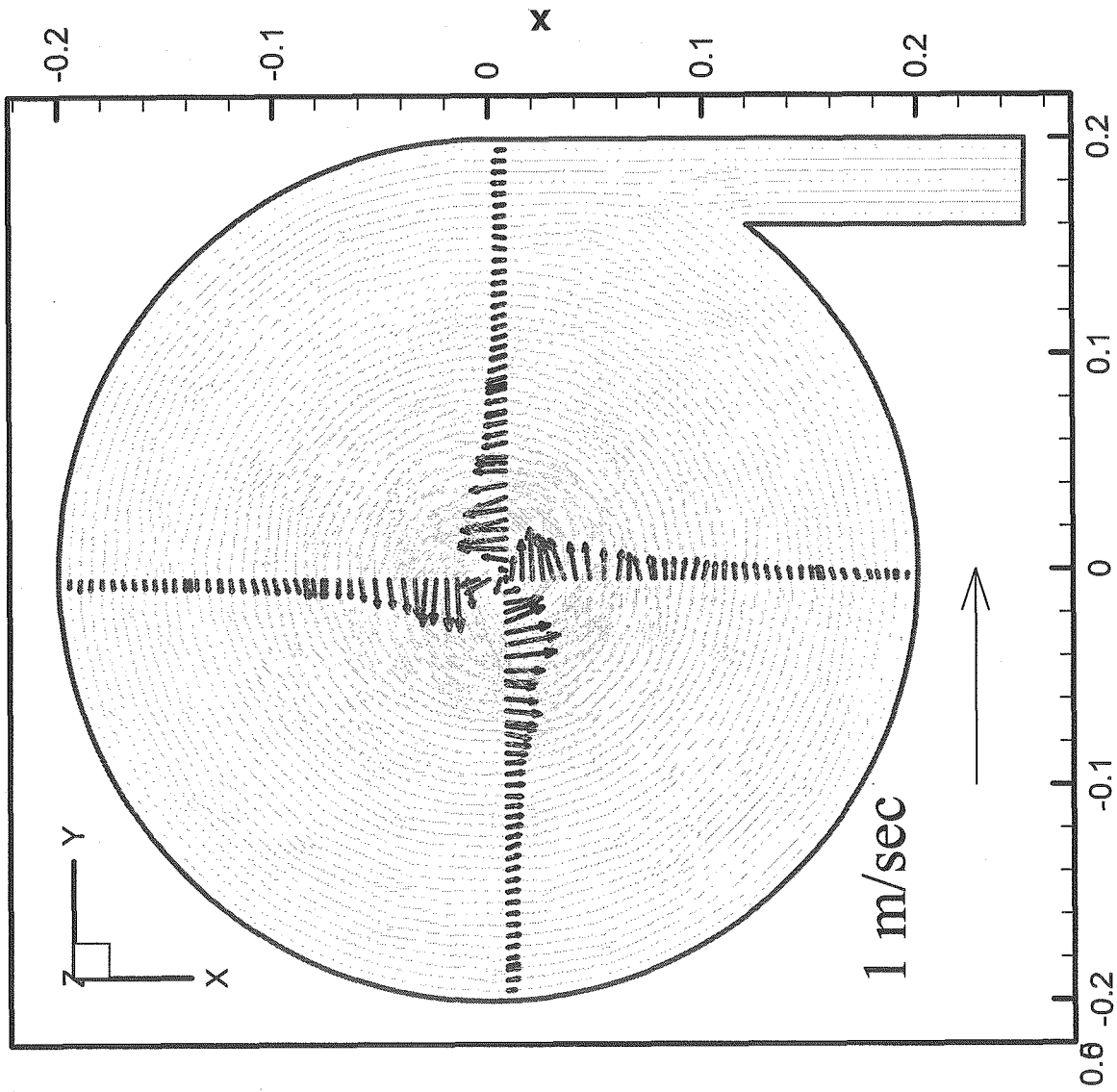
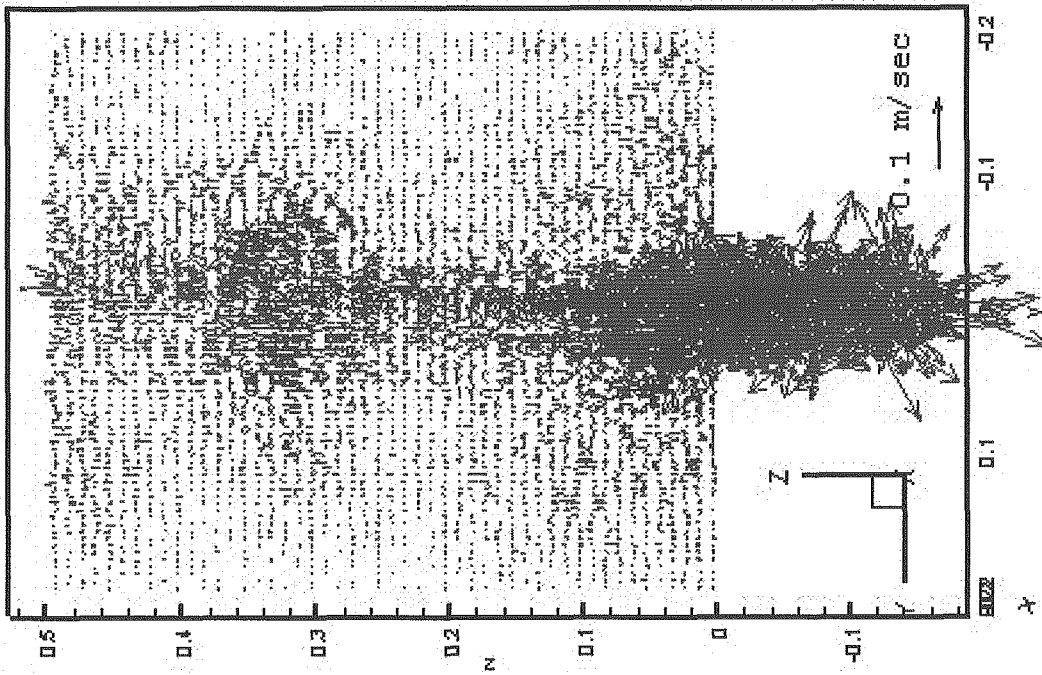
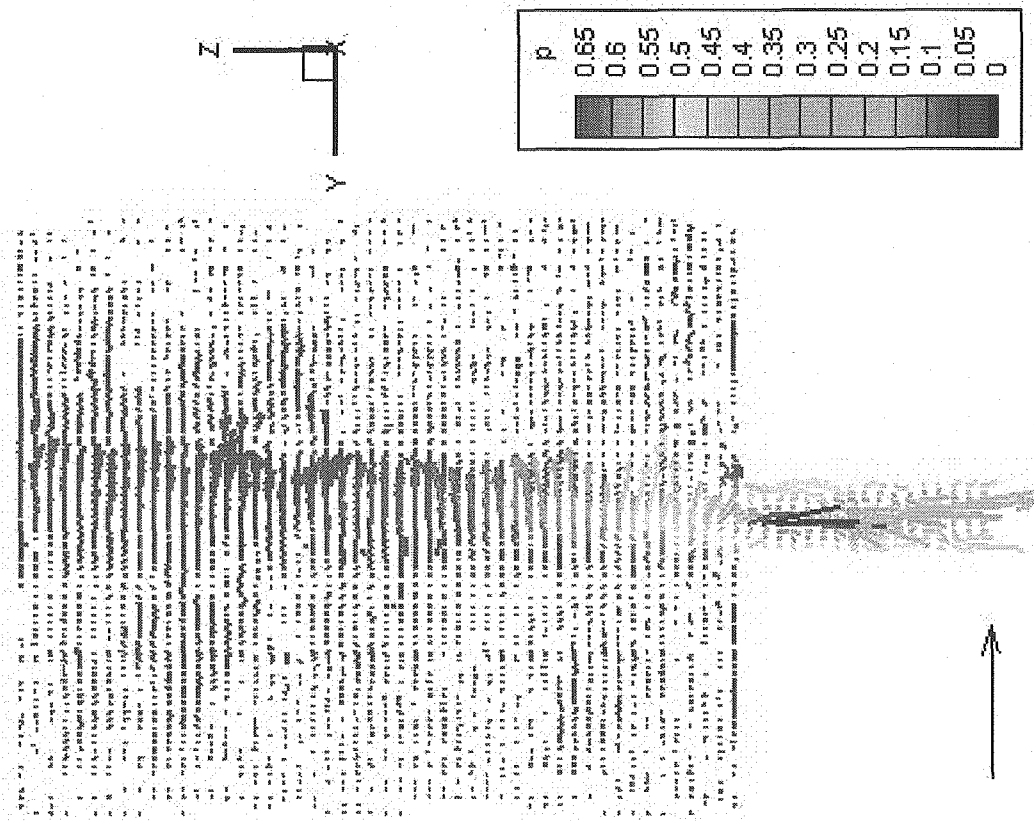


図3.8  $z=0.15$ [m]での流速ベクトル ( SMART-femの解析結果)

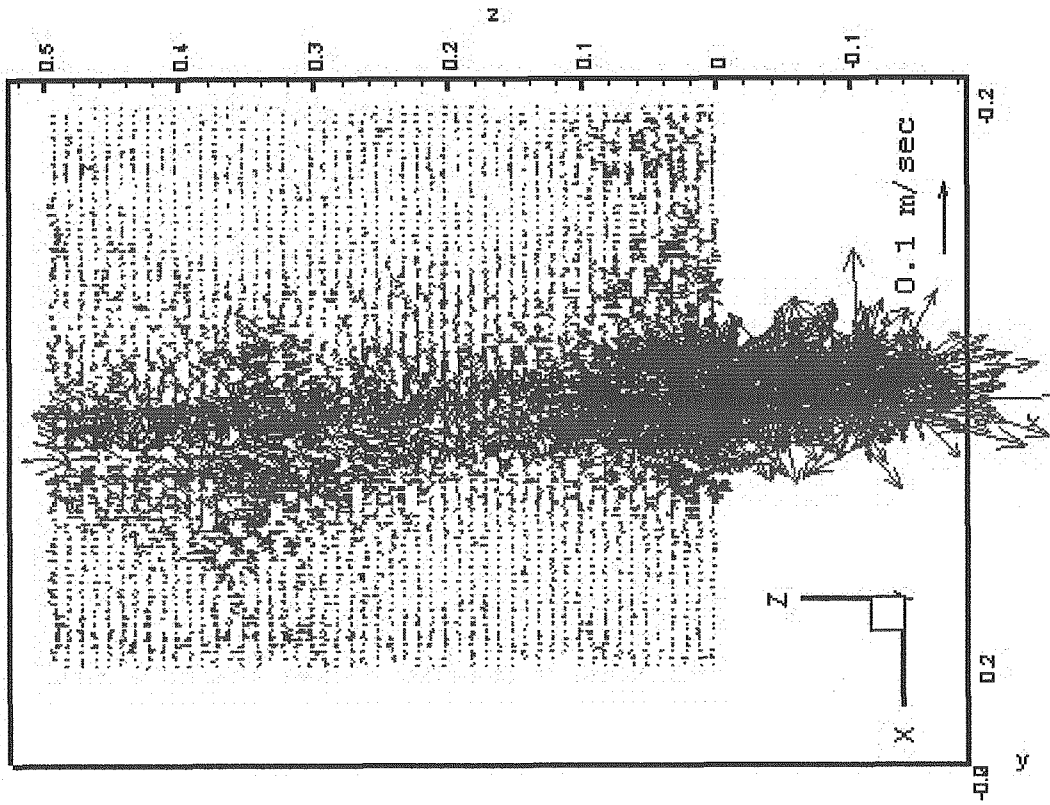


(b) 小スケール流速

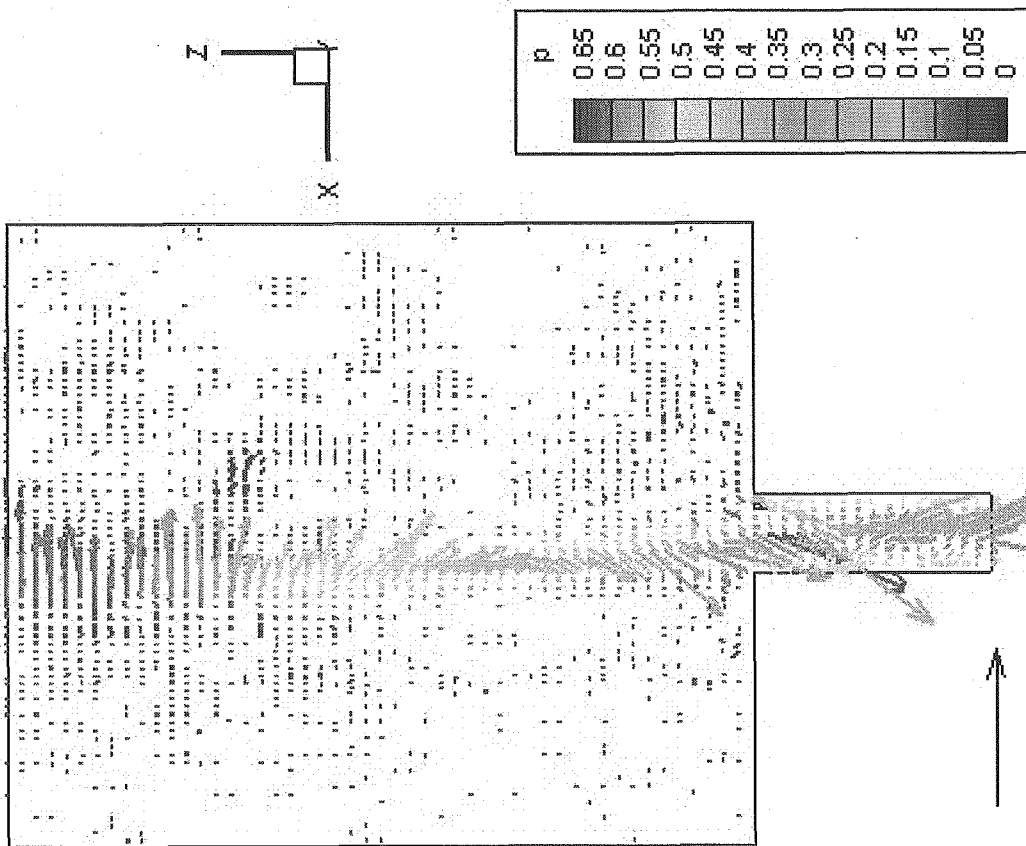


(a) 大スケール流速

図3.9 x=0[m]での流速分布

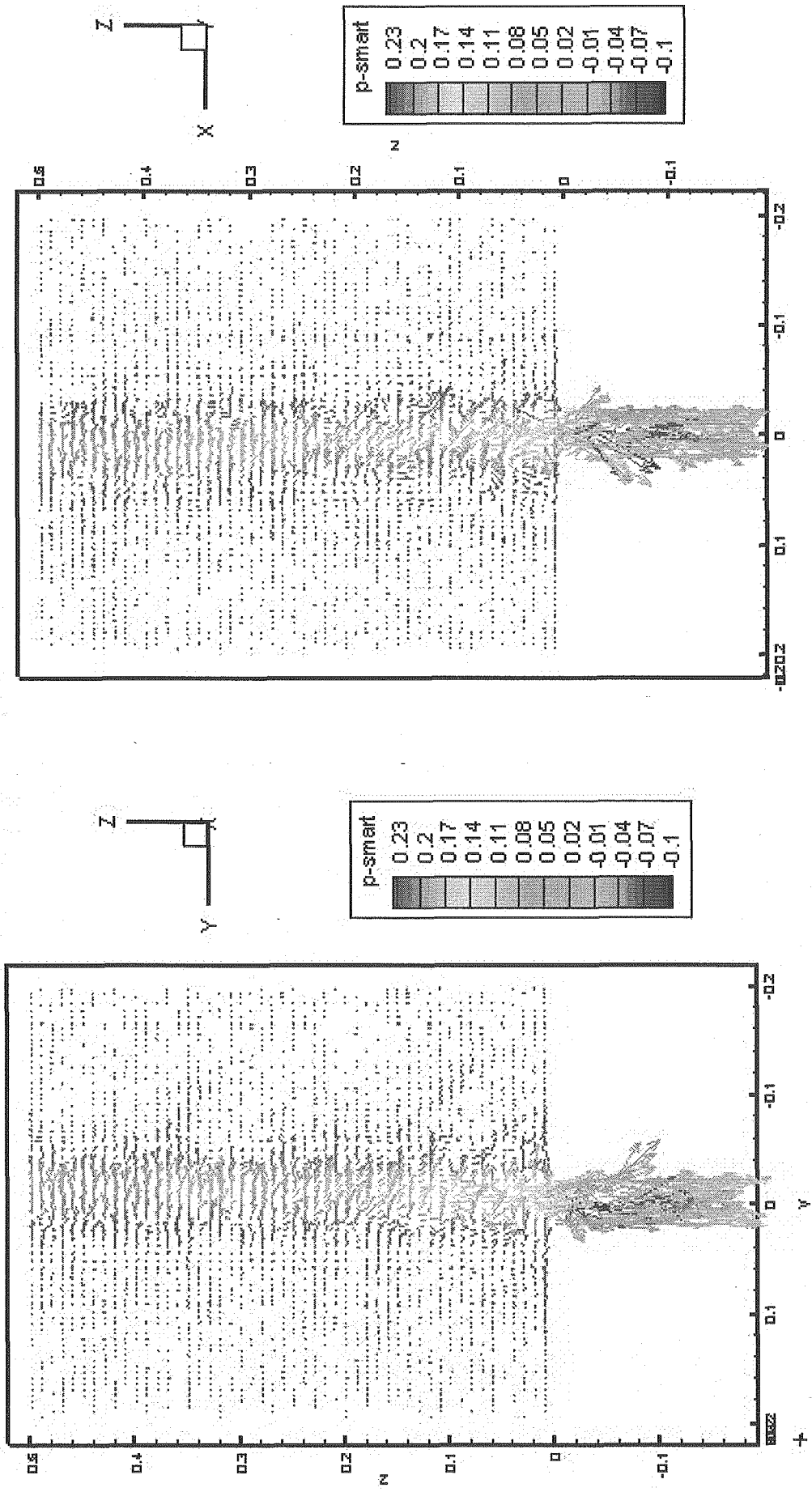


(b) 小スケール流速



(a) 大スケール流速

図3.10  $y=0$ [m]での流速分布



(a) x=0断面

(b) y=0断面

図3.11 縦断面での流速分布 (SMART-femの解析結果)

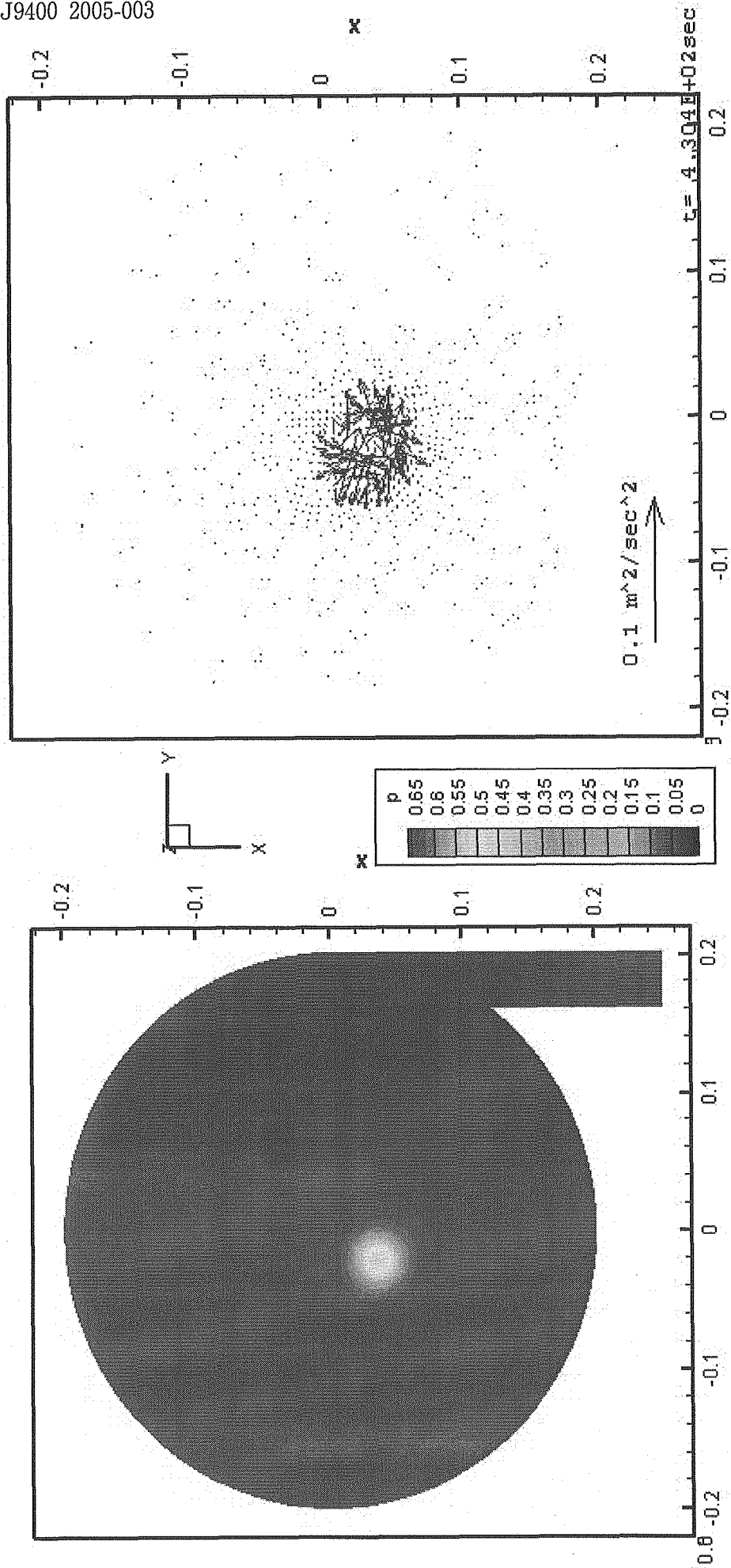


図3.12  $z=0.5[m]$ での圧力分布

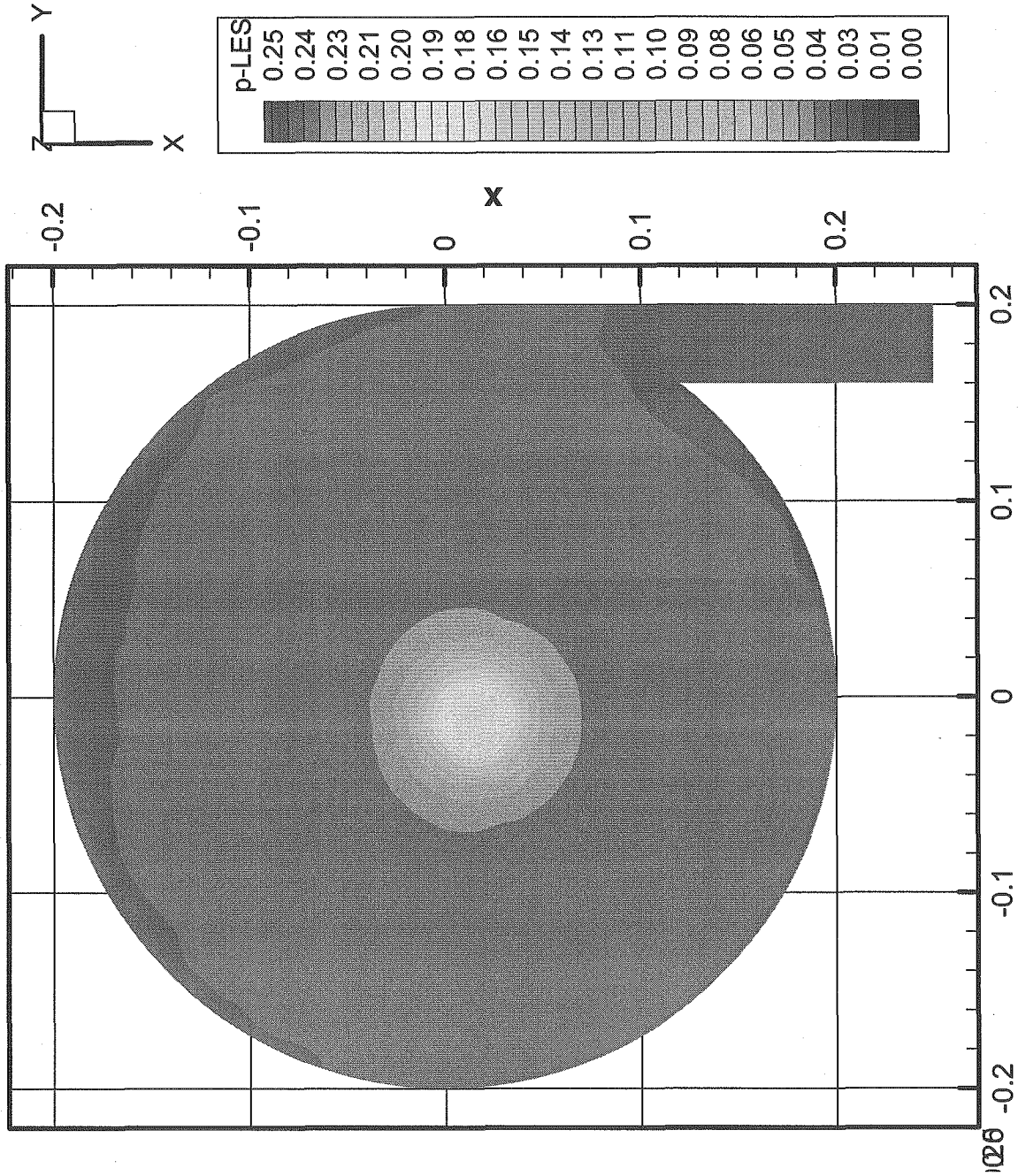
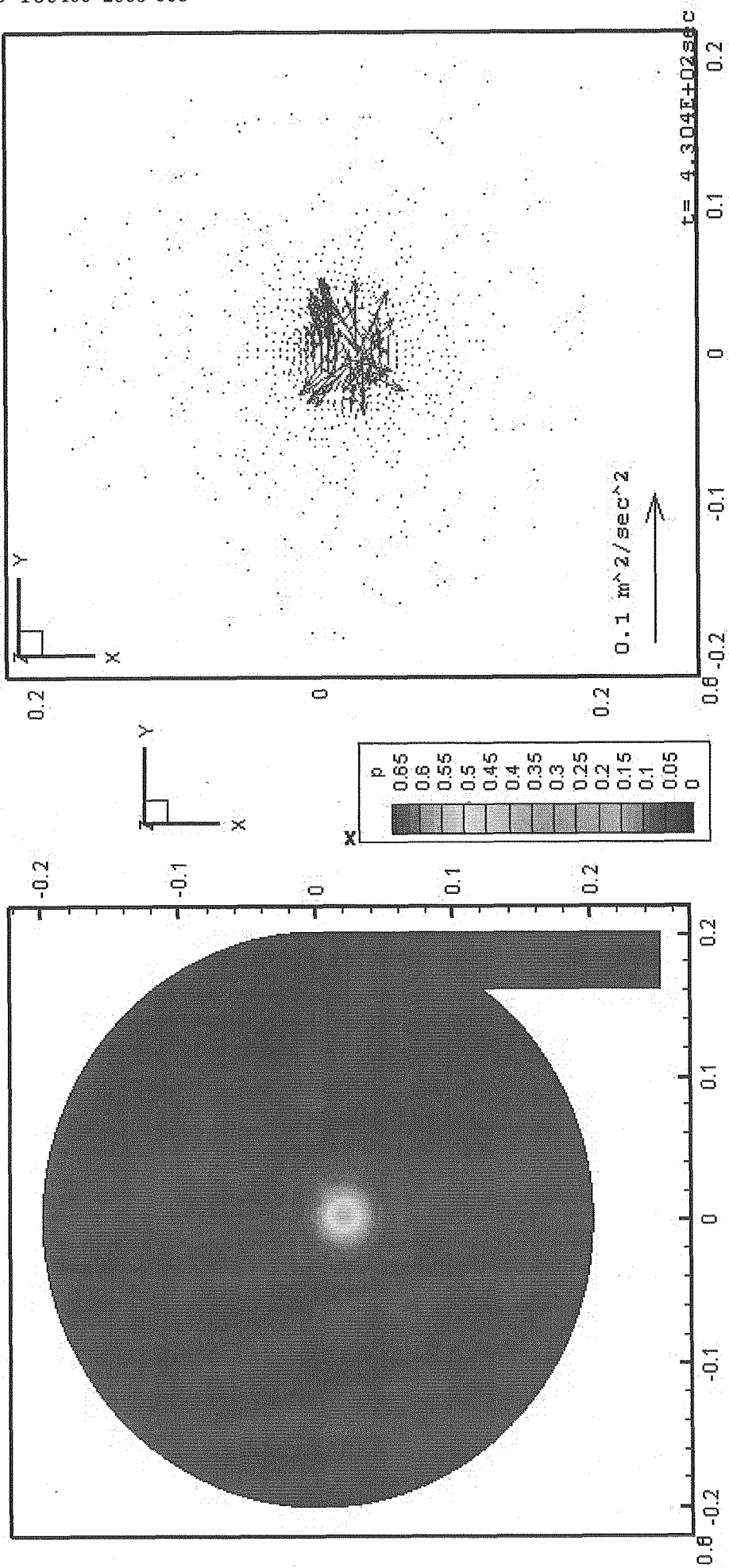


図3.13  $z=0.5[m]$ での圧力分布(SMART-femの解析結果)



(b) 小スケール圧力

(a) 大スケール圧力

図3.14  $z=0.15[\text{m}]$ での圧力分布



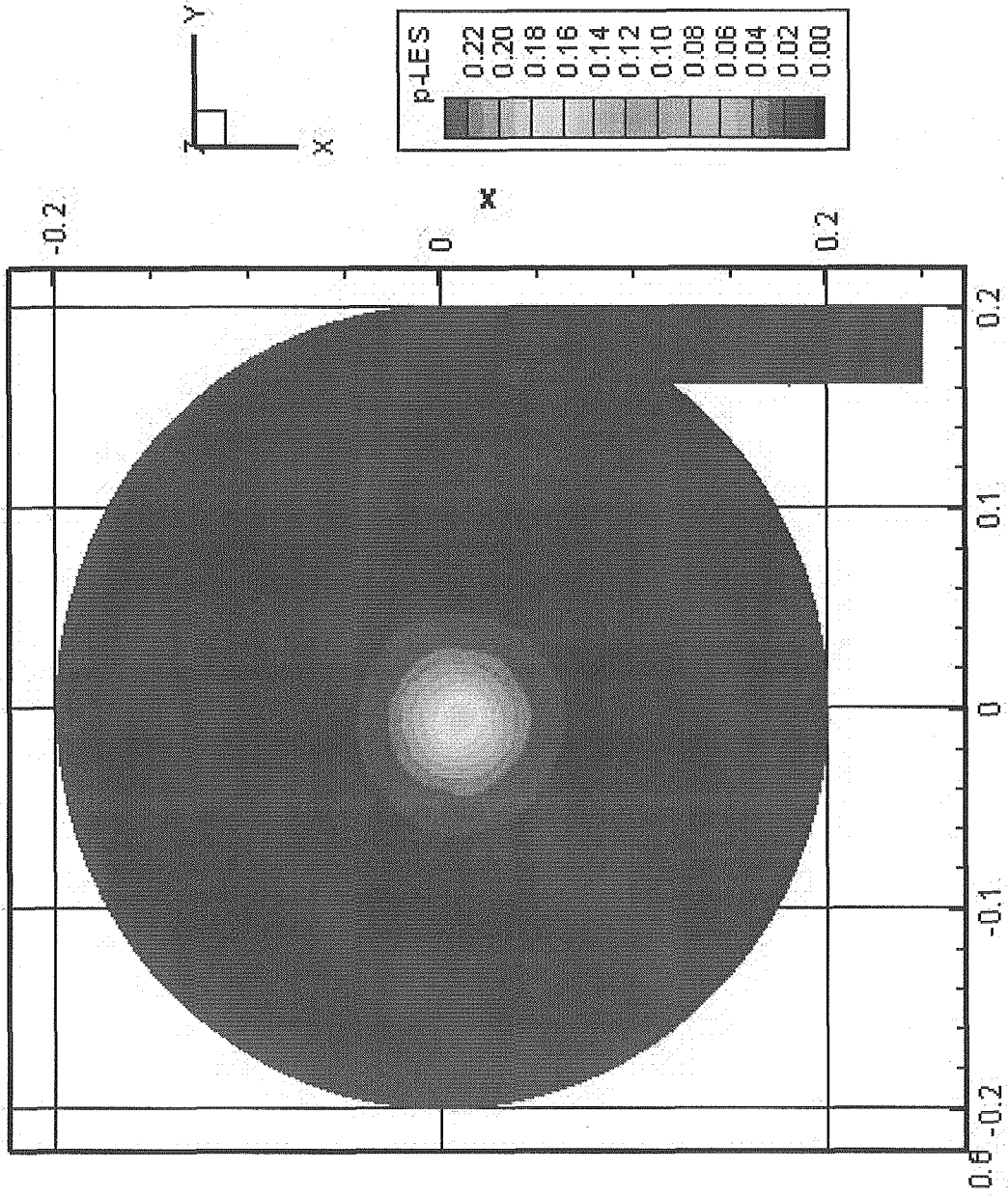
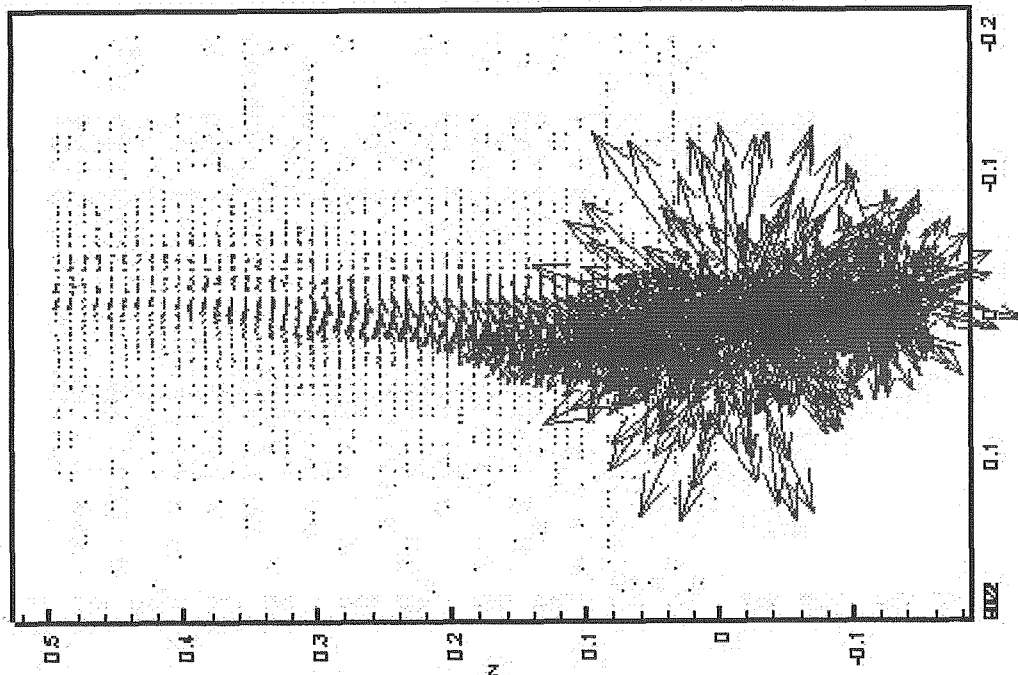
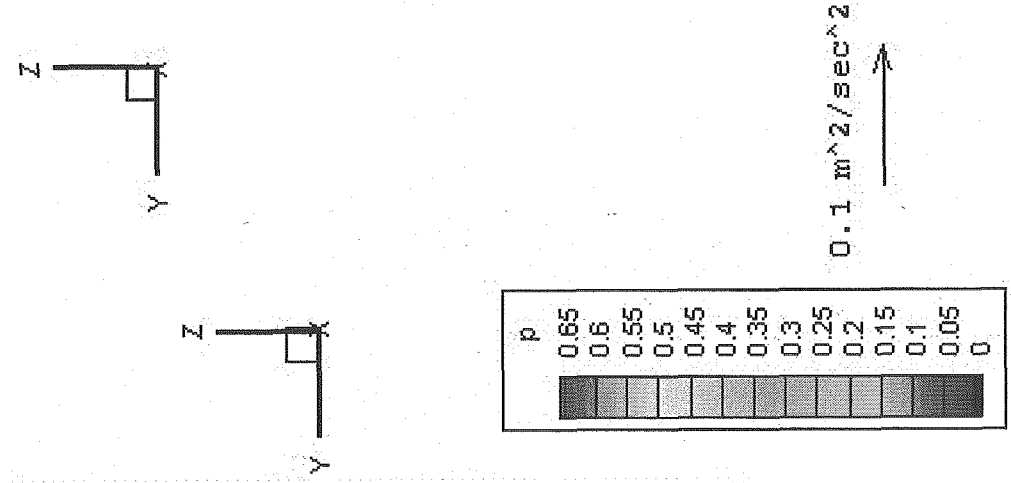


図3.15  $z=0.15[m]$ での圧力分布(SMART-femの解析結果)

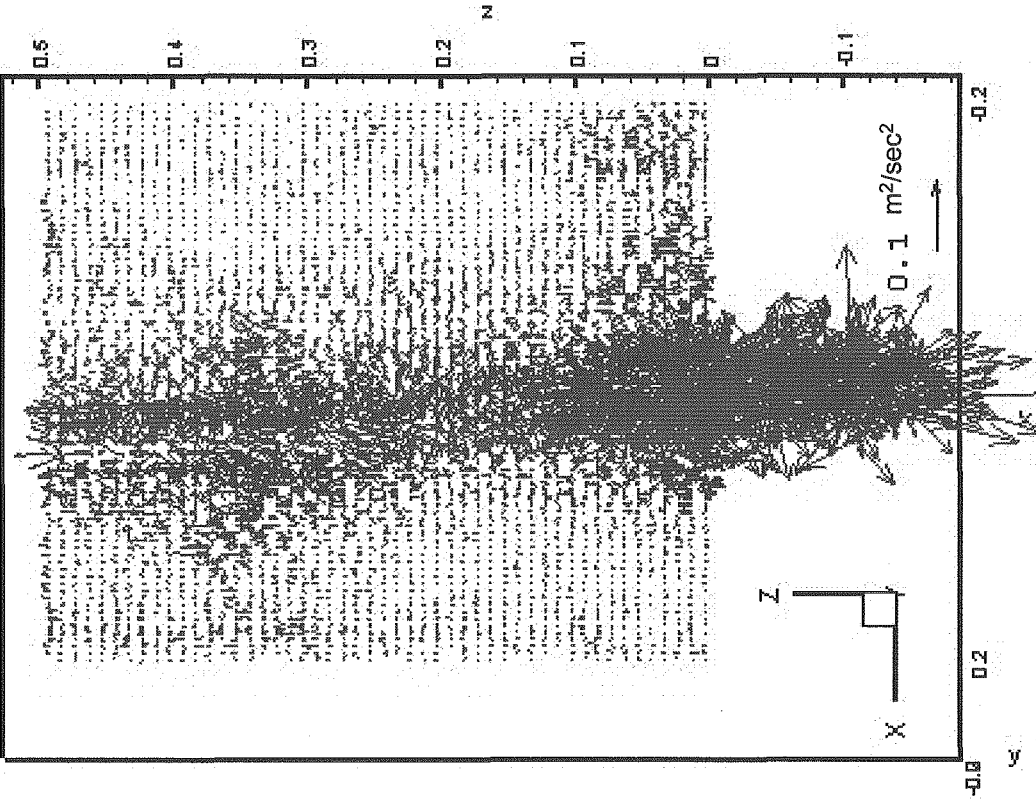


(b) 小スケール圧力

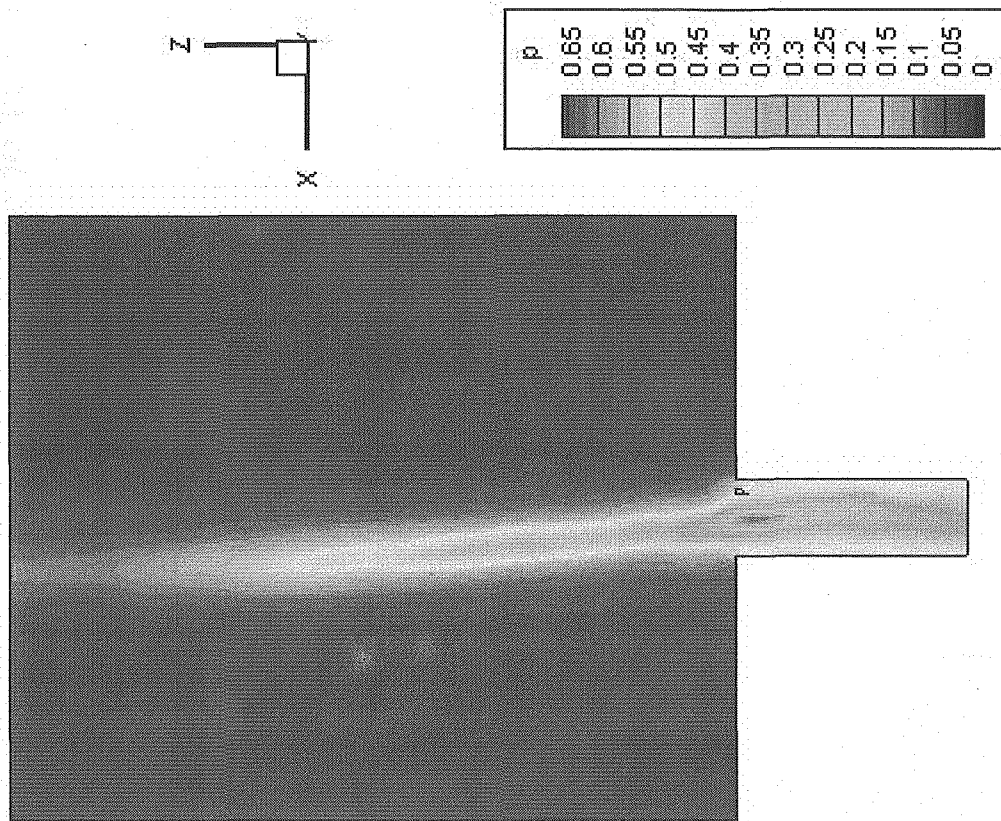


(a) 大スケール圧力

図3.16  $x=0[m]$ での圧力分布

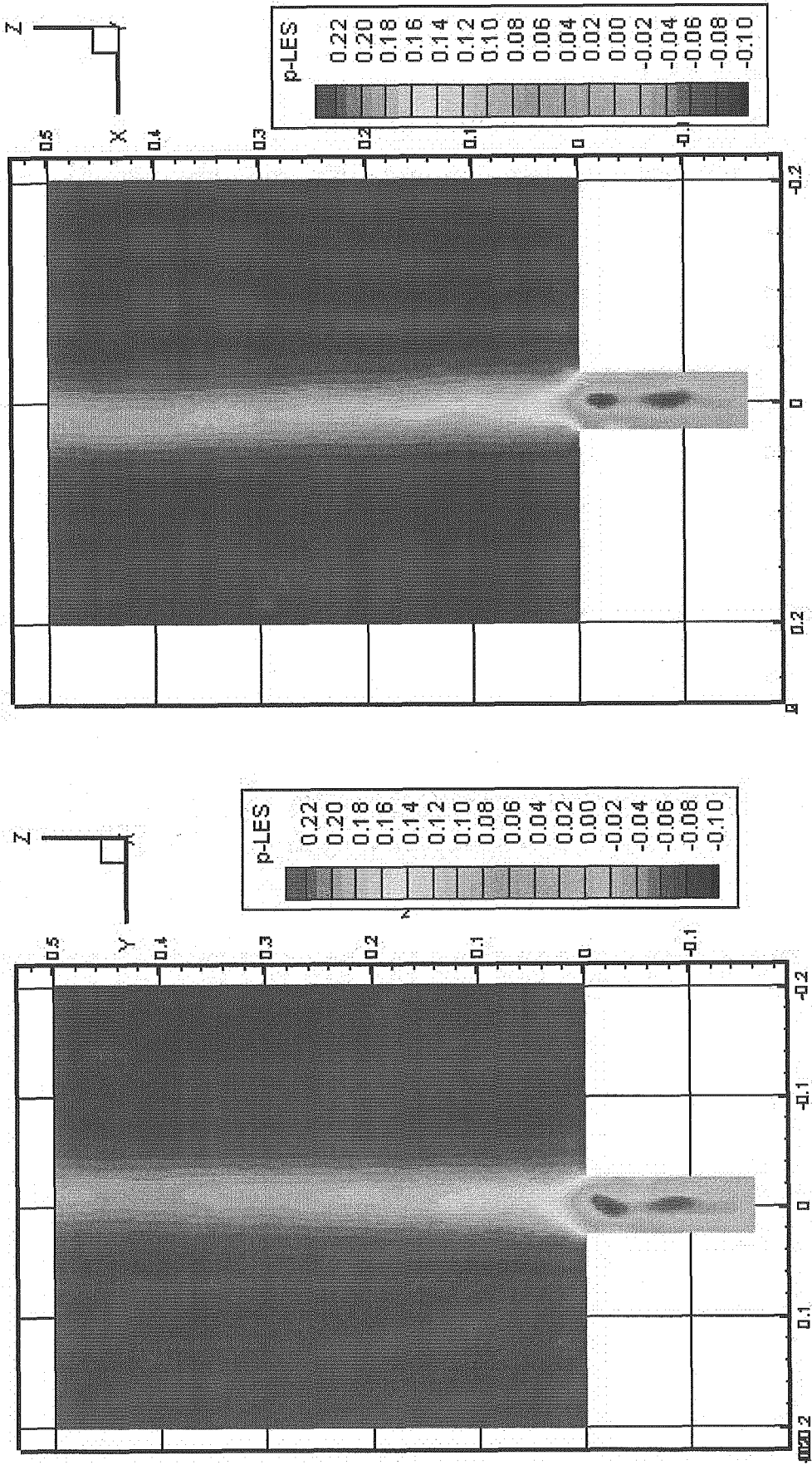


(b) 小スケール圧力



(a) 大スケール圧力

図3.17 y=0[m]での圧力分布



(a) x=0断面 (b) y=0断面

図3.18 縦断面での圧力分布 (SMART-femの解析結果)

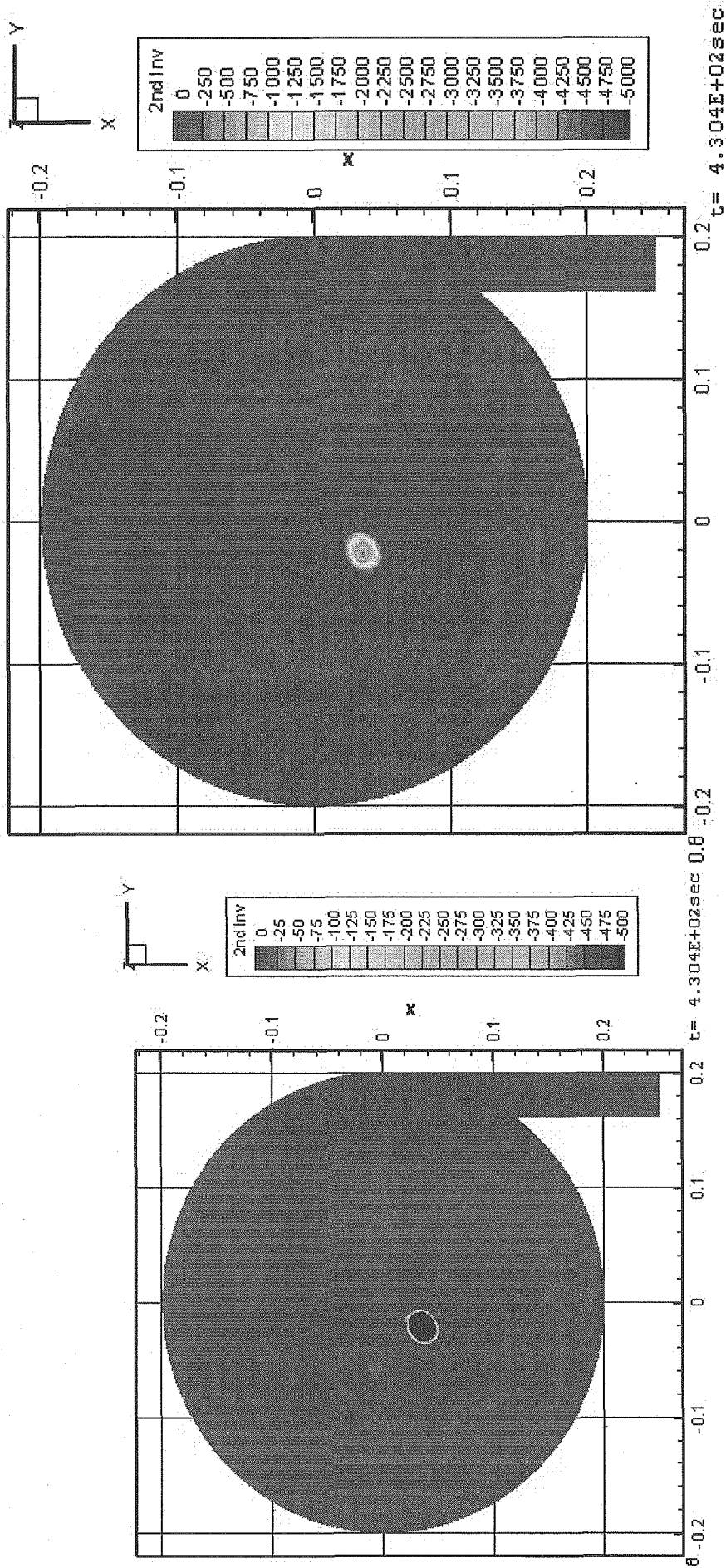


図3.19 表面での第2不変量

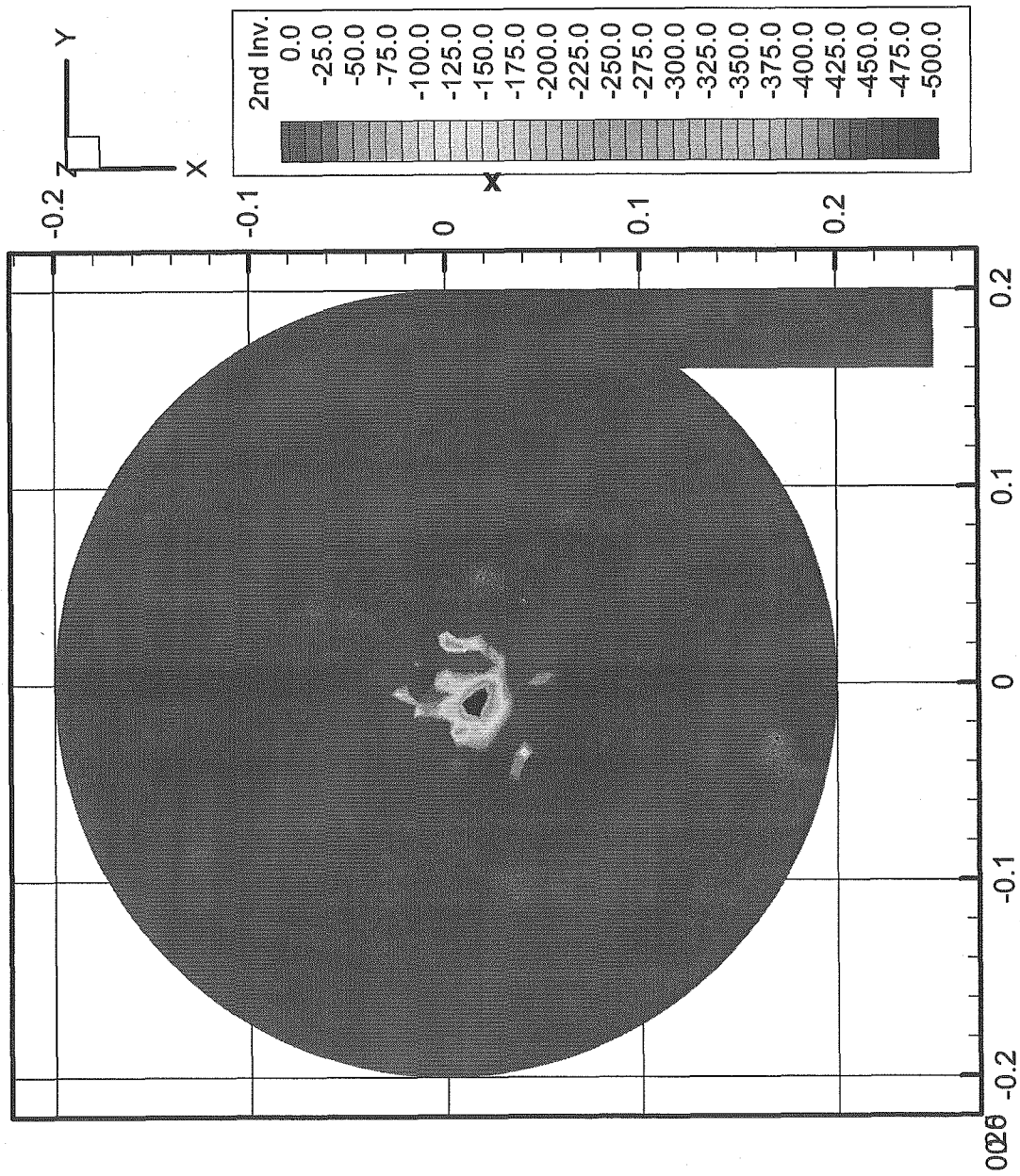
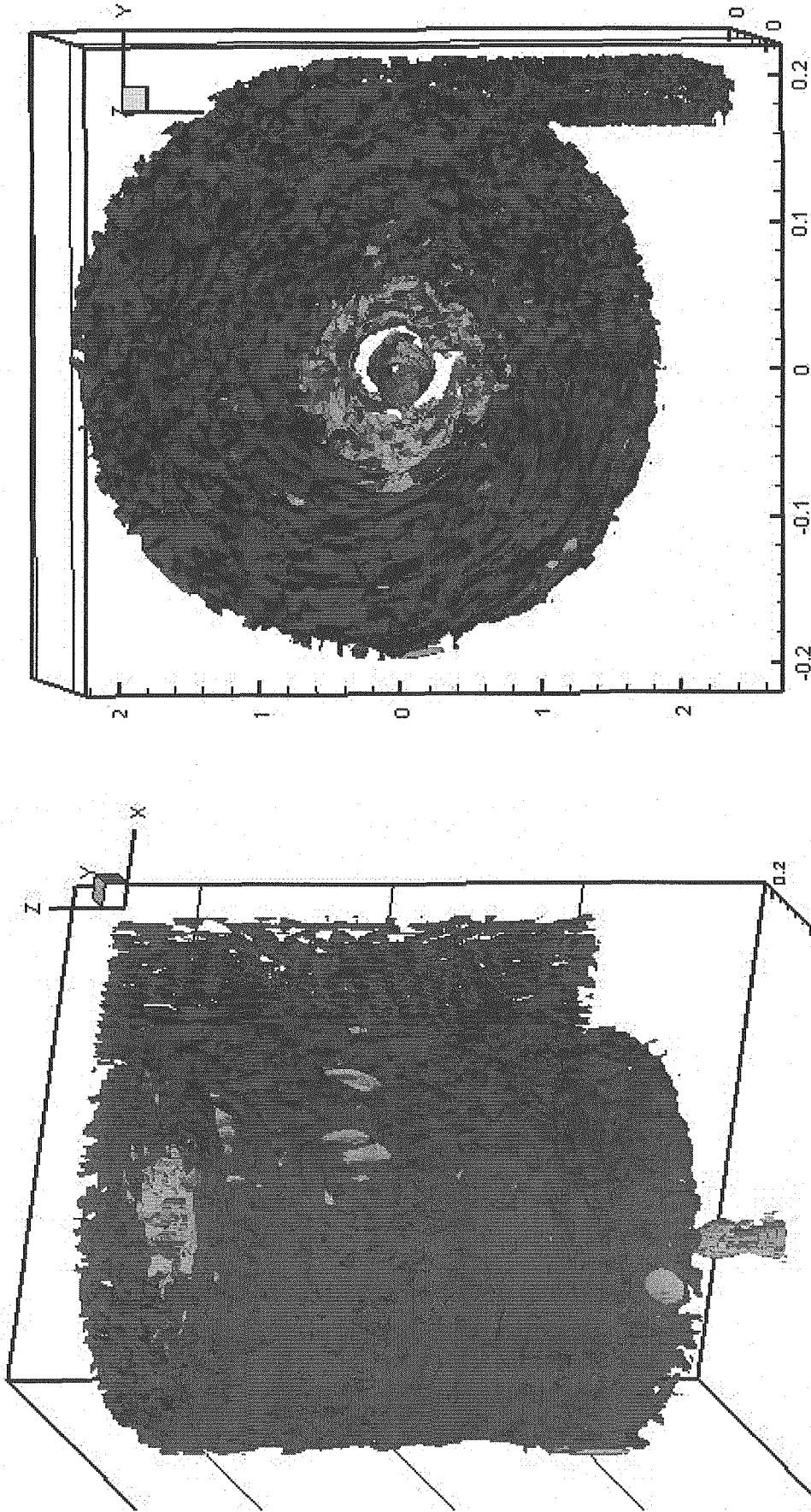
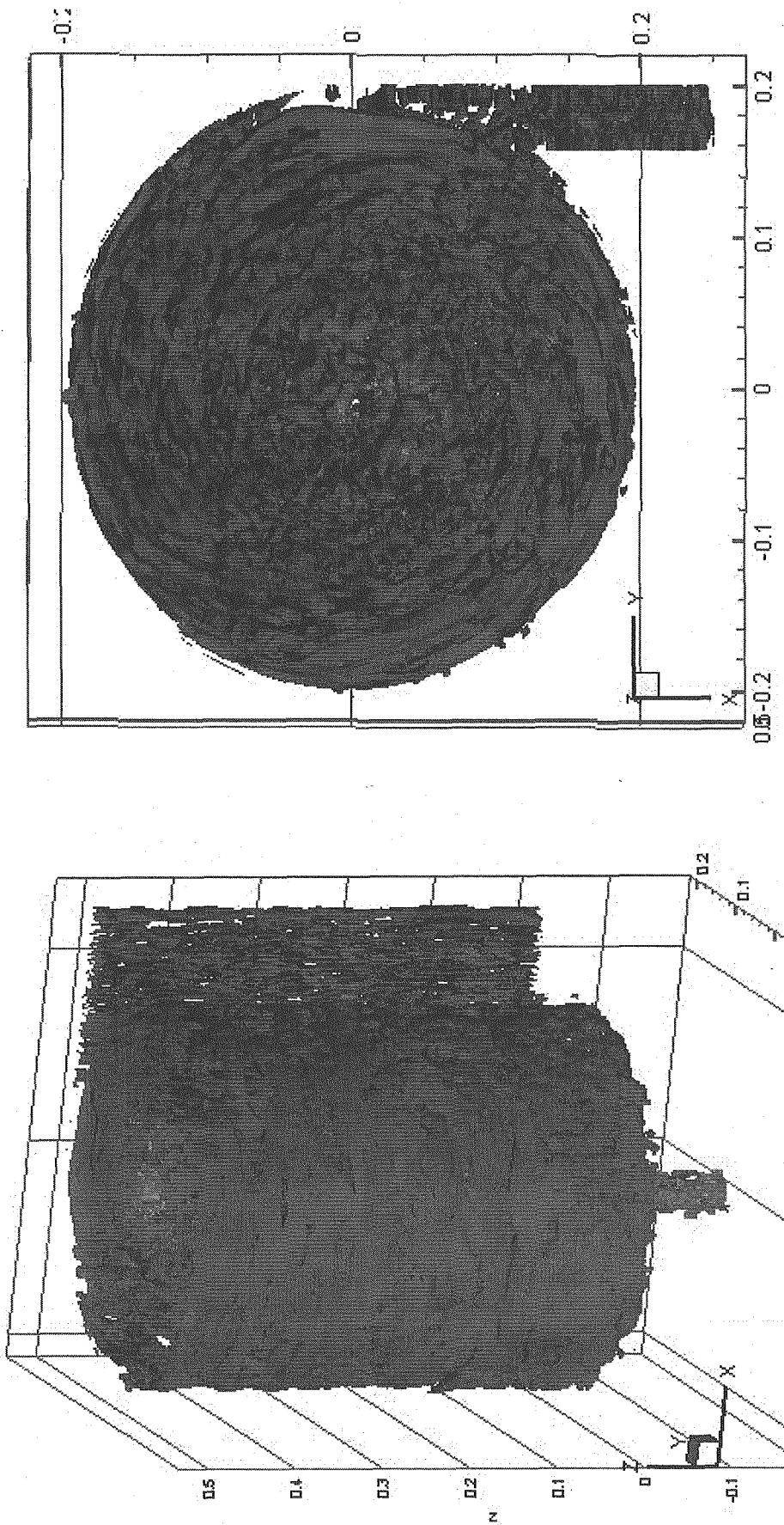


図3.20 自由表面での第2不変量 (SMART-femの解析結果)



$\Pi=10$ (purple), 0(gray), -10(green)

図3.21 第2不変量(ゼロ近傍)の分布



$\Pi=10$ (purple), 0(gray), -10(green)

図3.22 第2不変量(ゼロ近傍)の分布 (SMART-femの解析結果)



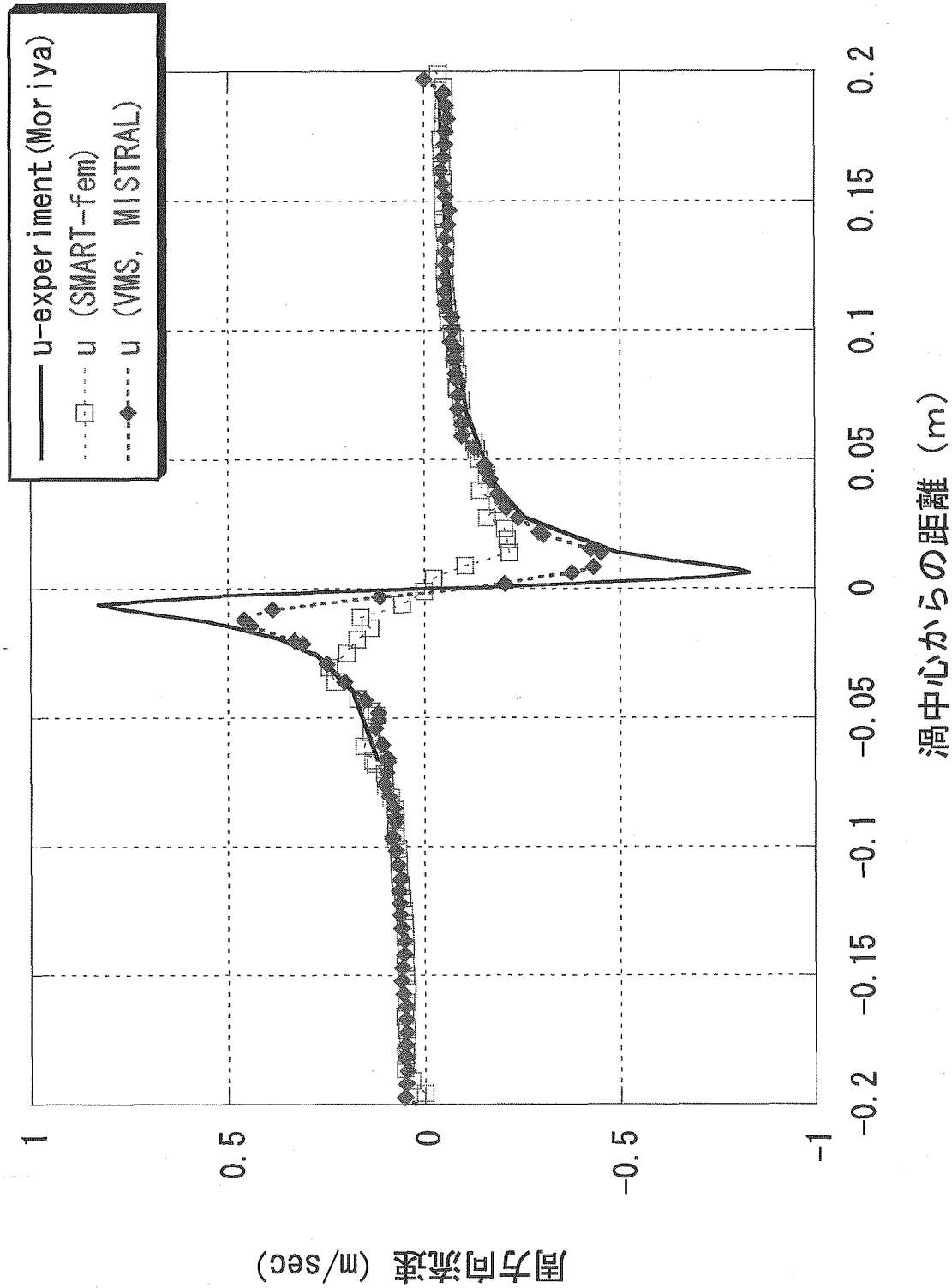
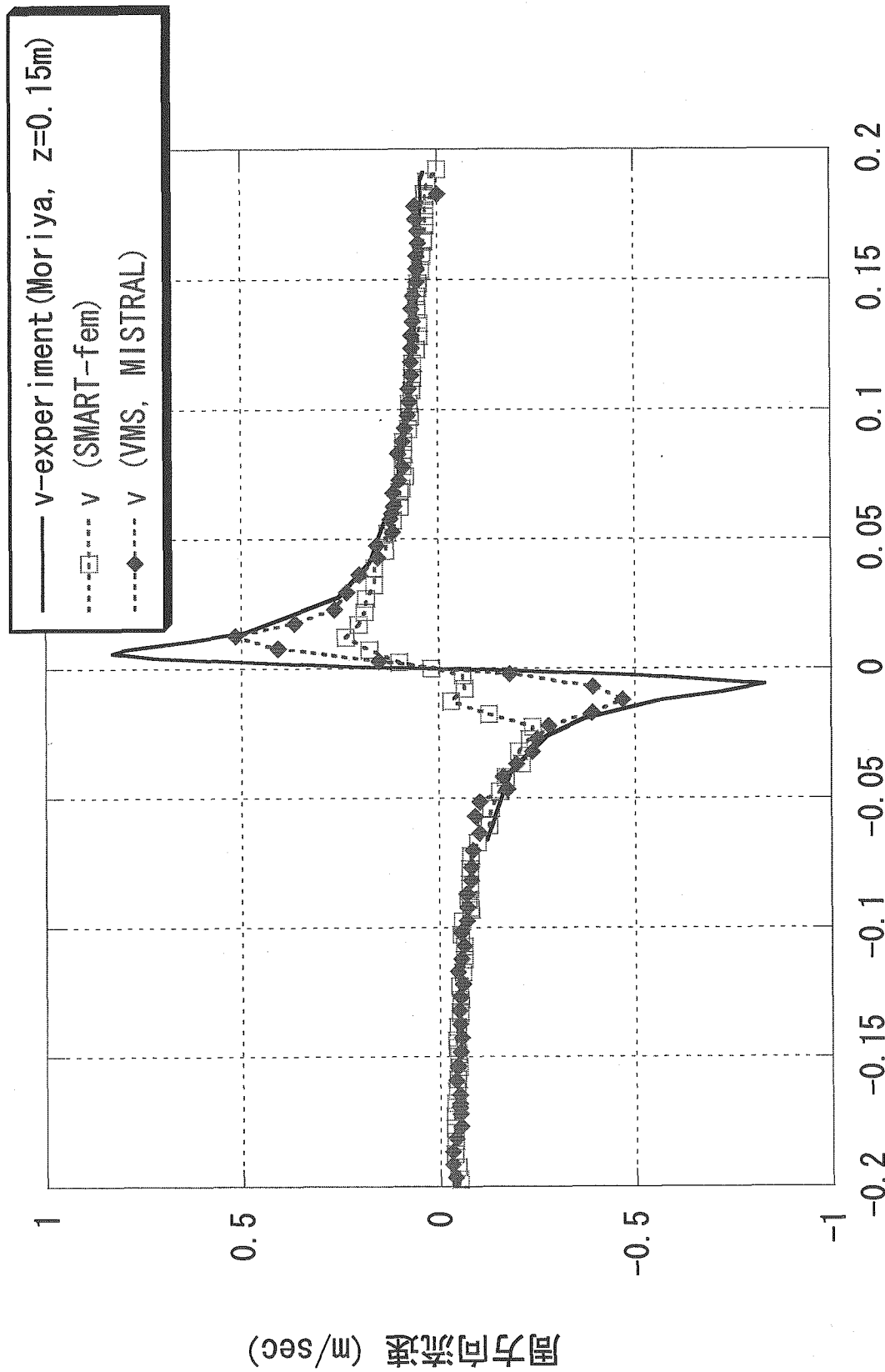


図3.23 (a)  $z=0.15$ [m]での流速分布の比較(x断面)



渦中心からの距離 (m)

図3.23 (b) z=0.15[m]での流速分布の比較(y断面)

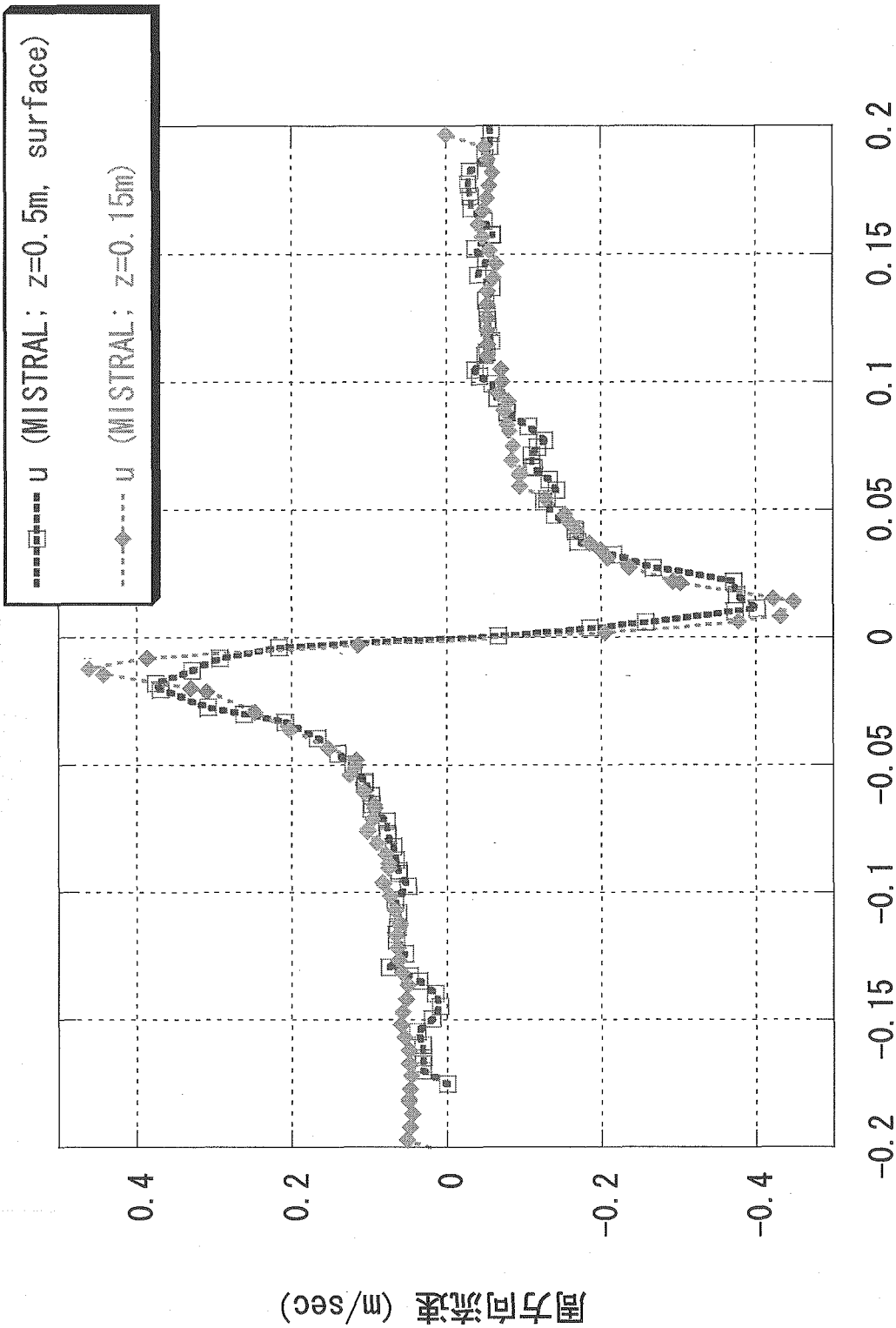


図3.24 (a) 自由表面とz=0.15[m]での流速分布の比較(x断面)

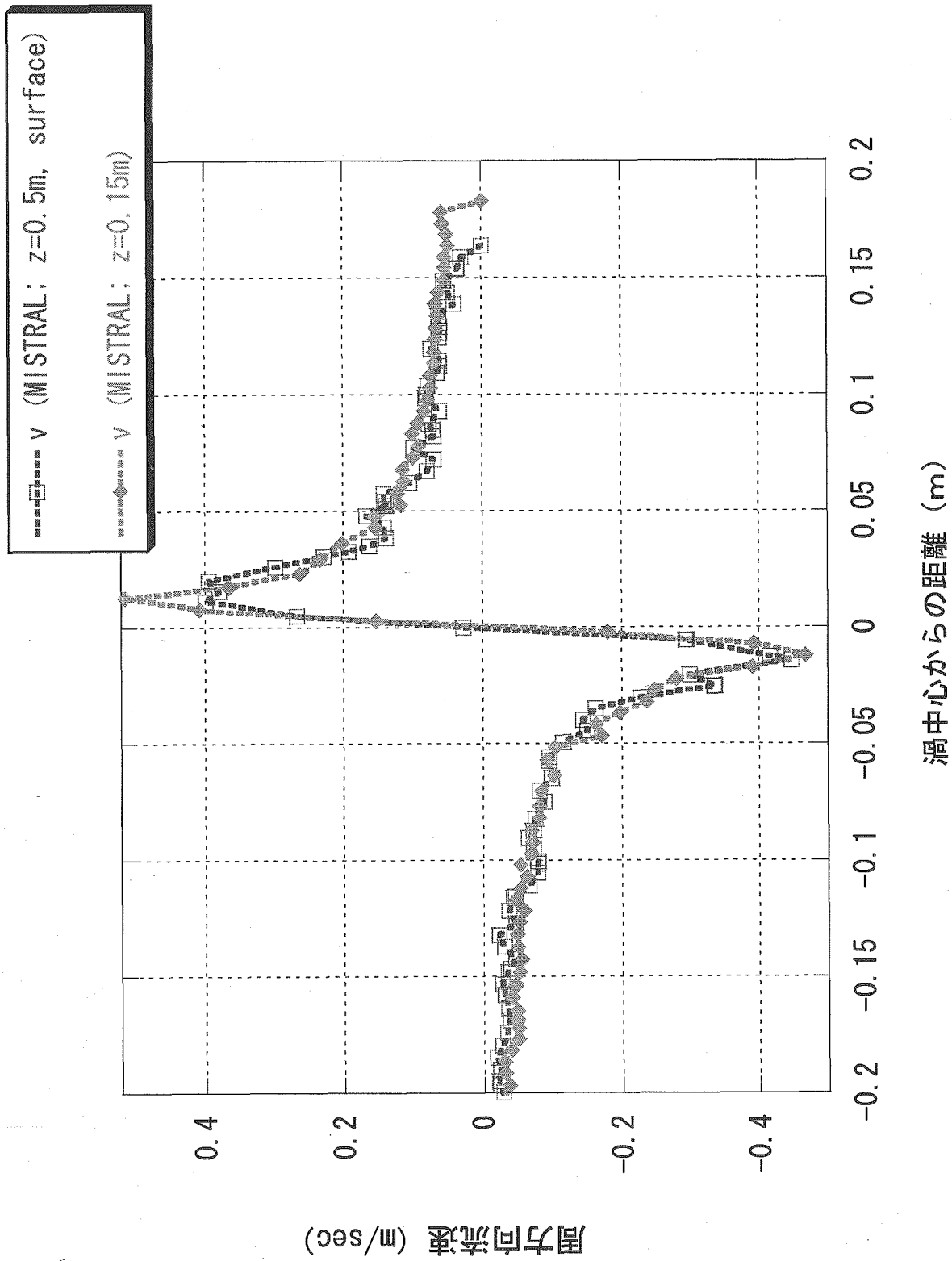


図3.24 (b) 自由表面とz=0.15[m]での流速分布の比較(y断面)

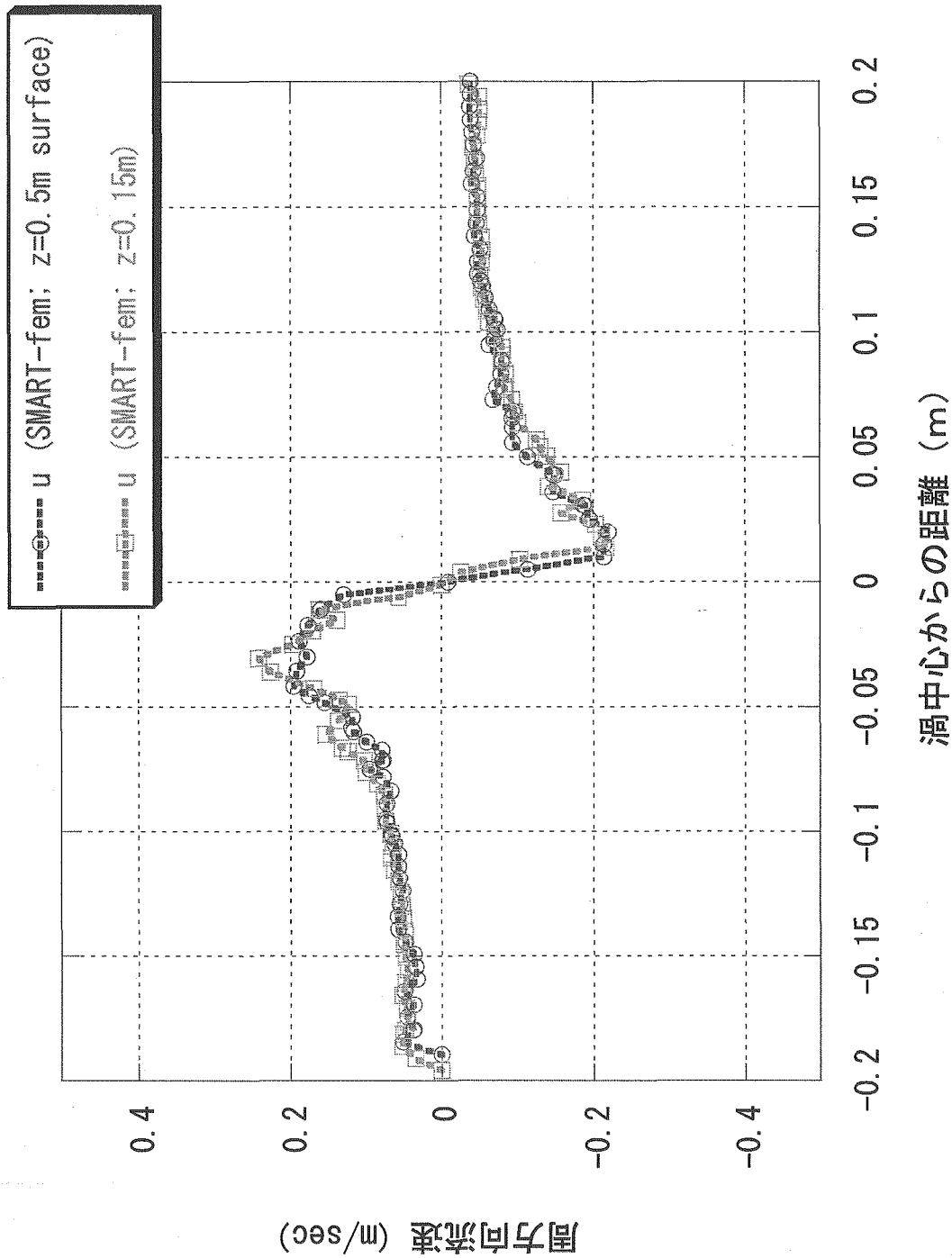


図3.25 (a) 自由表面と $z=0.15[m]$ での流速分布の比較(x断面、SMART-femの解析結果)

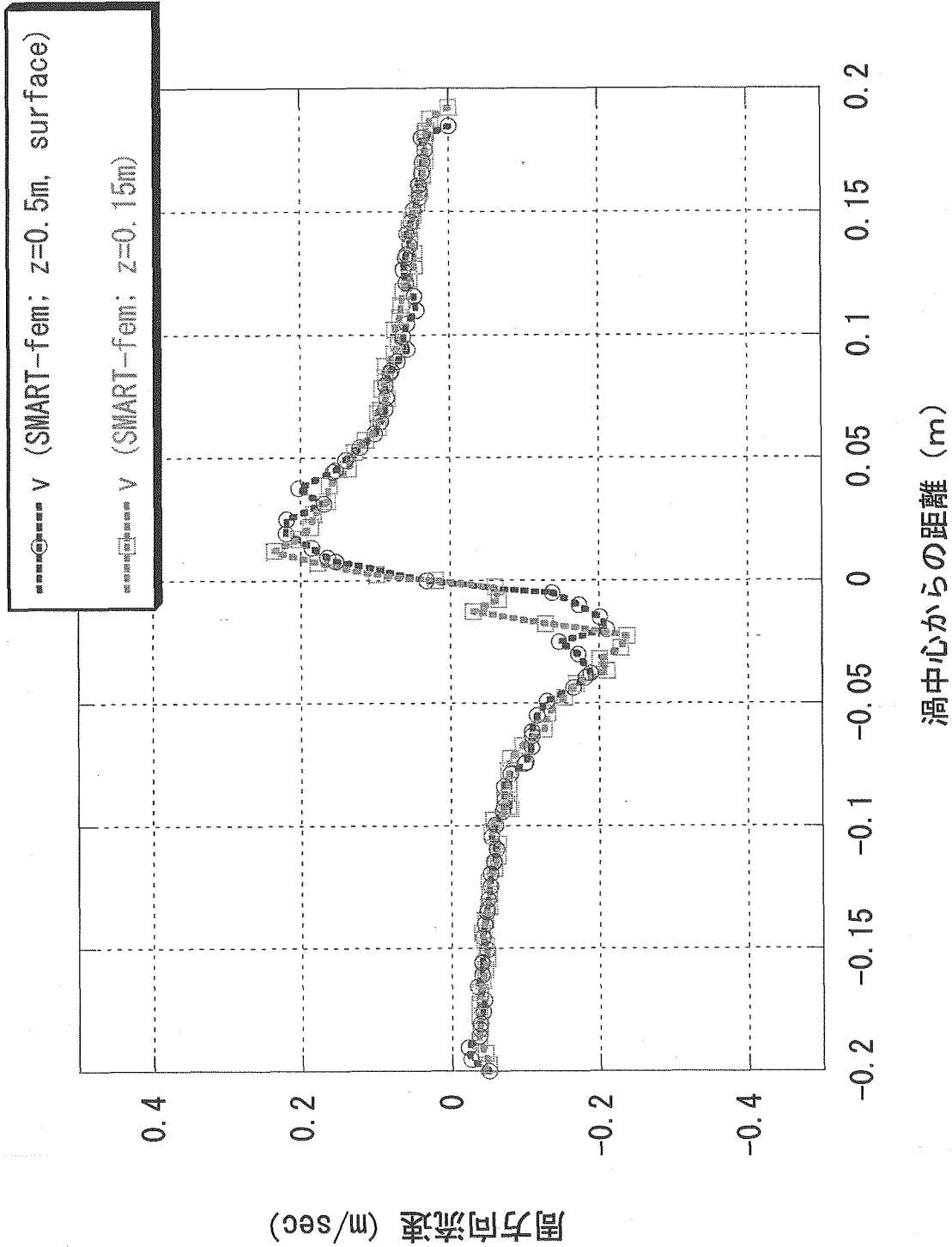


図3.25(b) 自由表面とz=0.15[m]での流速分布の比較(y断面、SMART-femの解析結果)

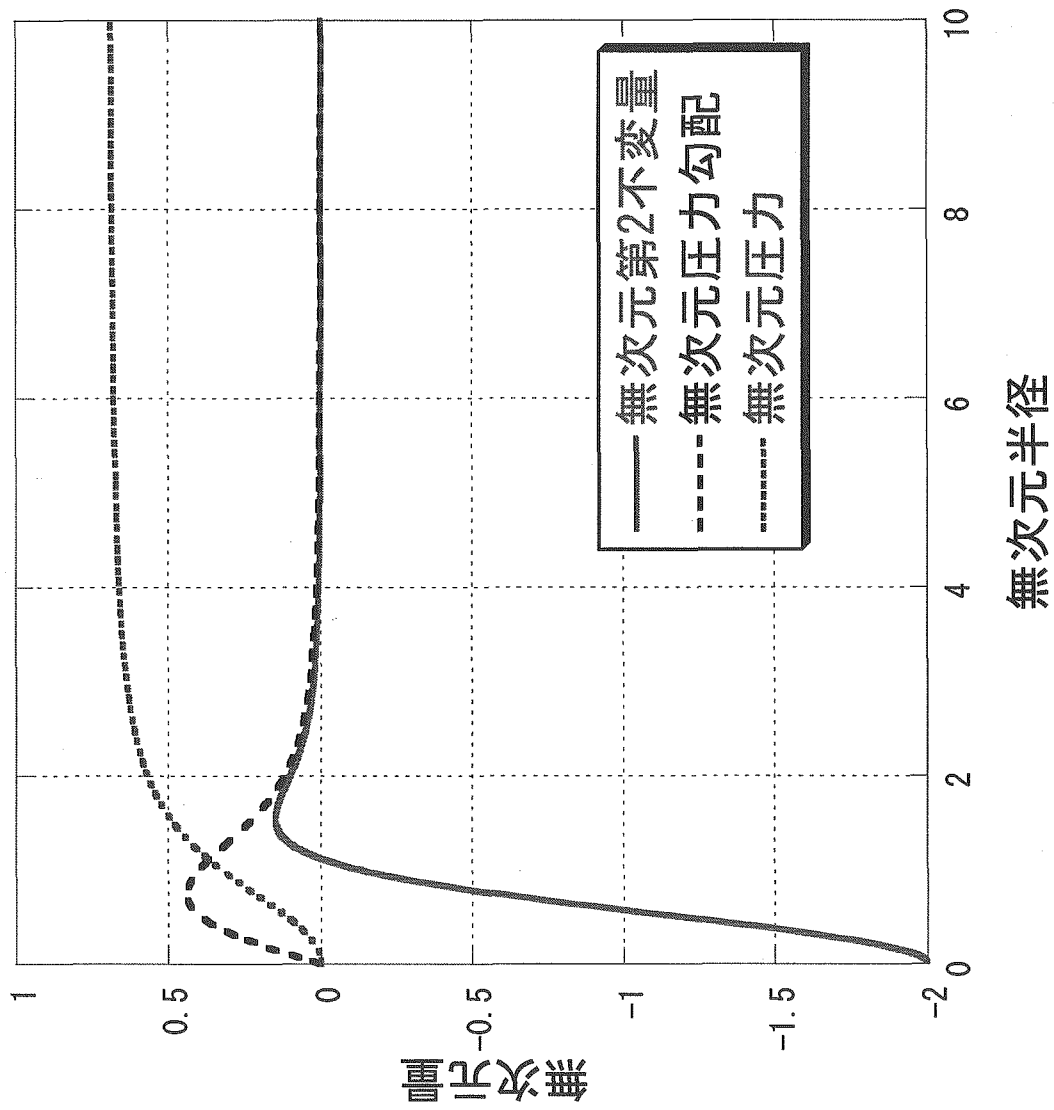
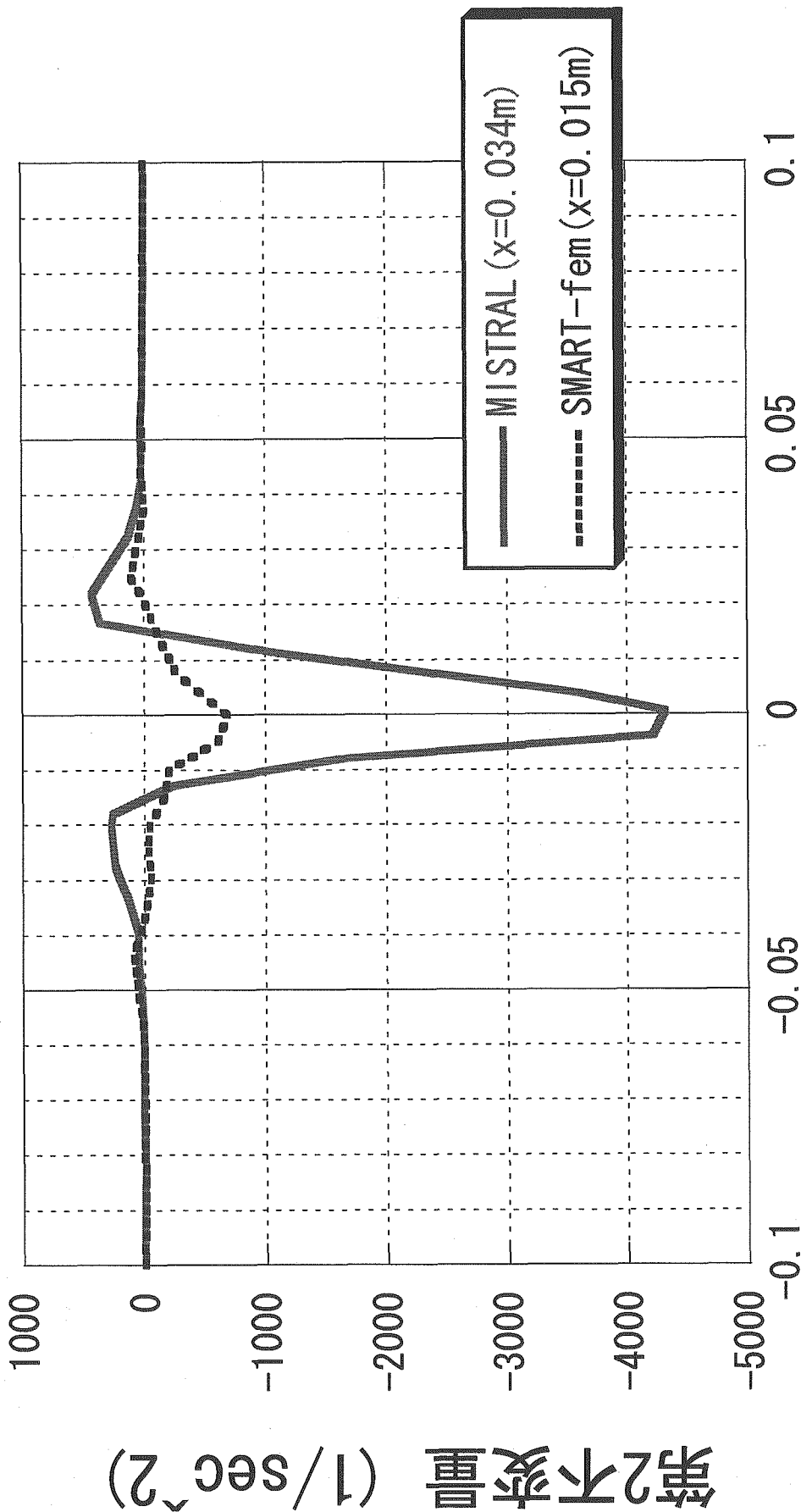


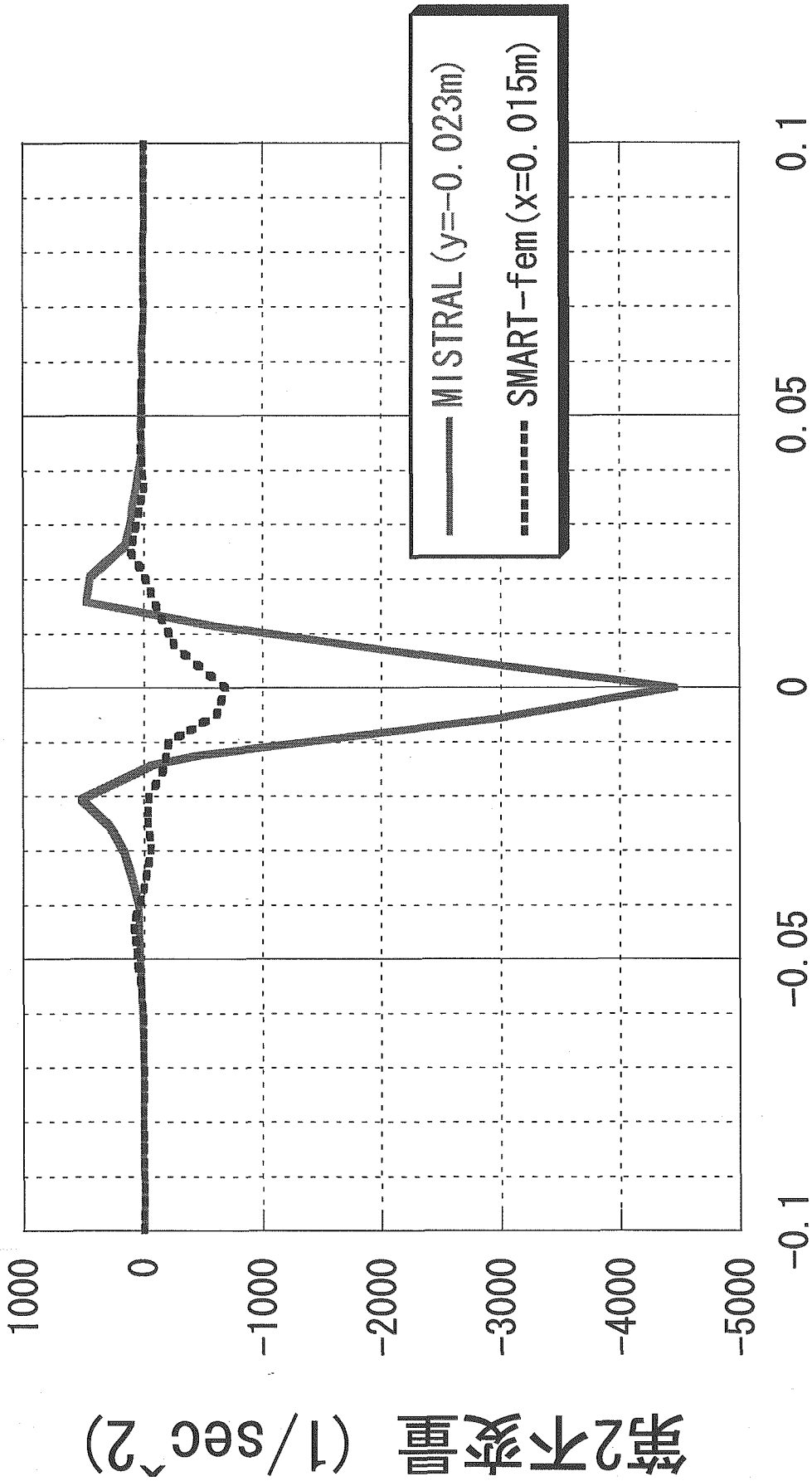
図3.26 Burgers伸長渦モデルの第2不変量分布



### 渦中心からの距離 (m)

図3.27(a) 自由表面断面での第2不変量分布





渦中心からの距離 (m)

図3.27 (b) 自由表面y断面での第2不変量分布

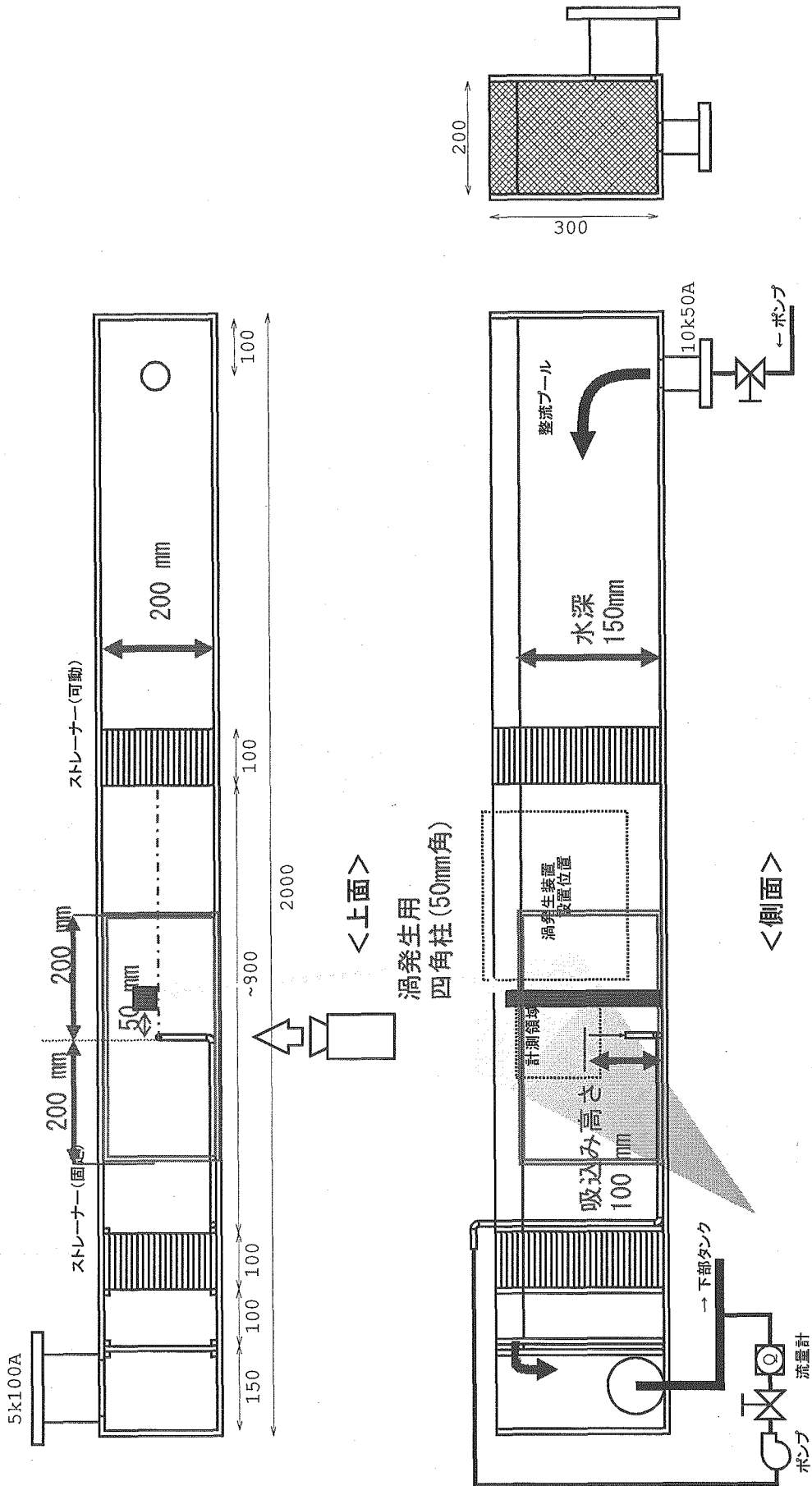


図4.1 詳細実験解析の対象と解析範囲(JNC殿より提示)



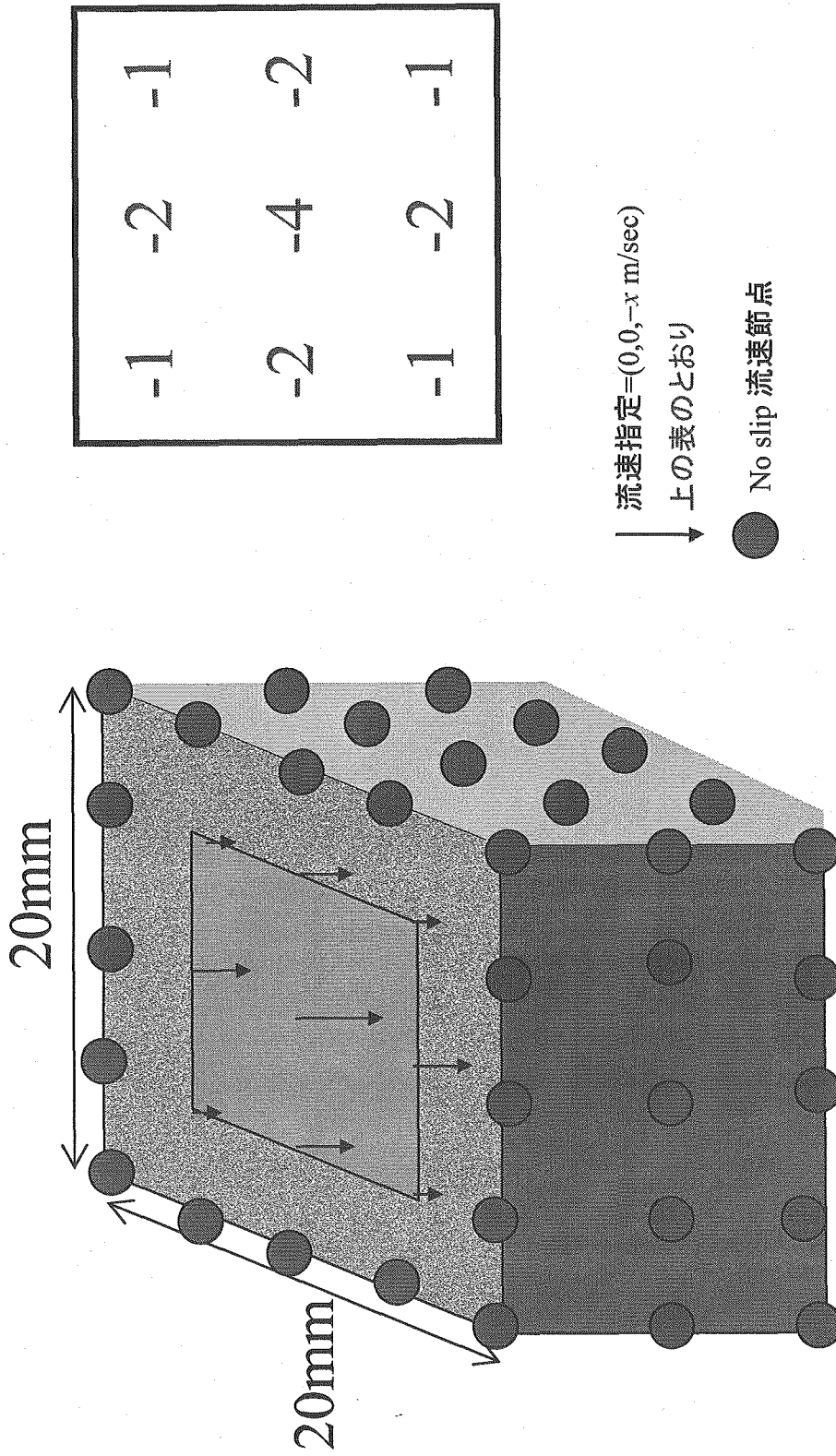
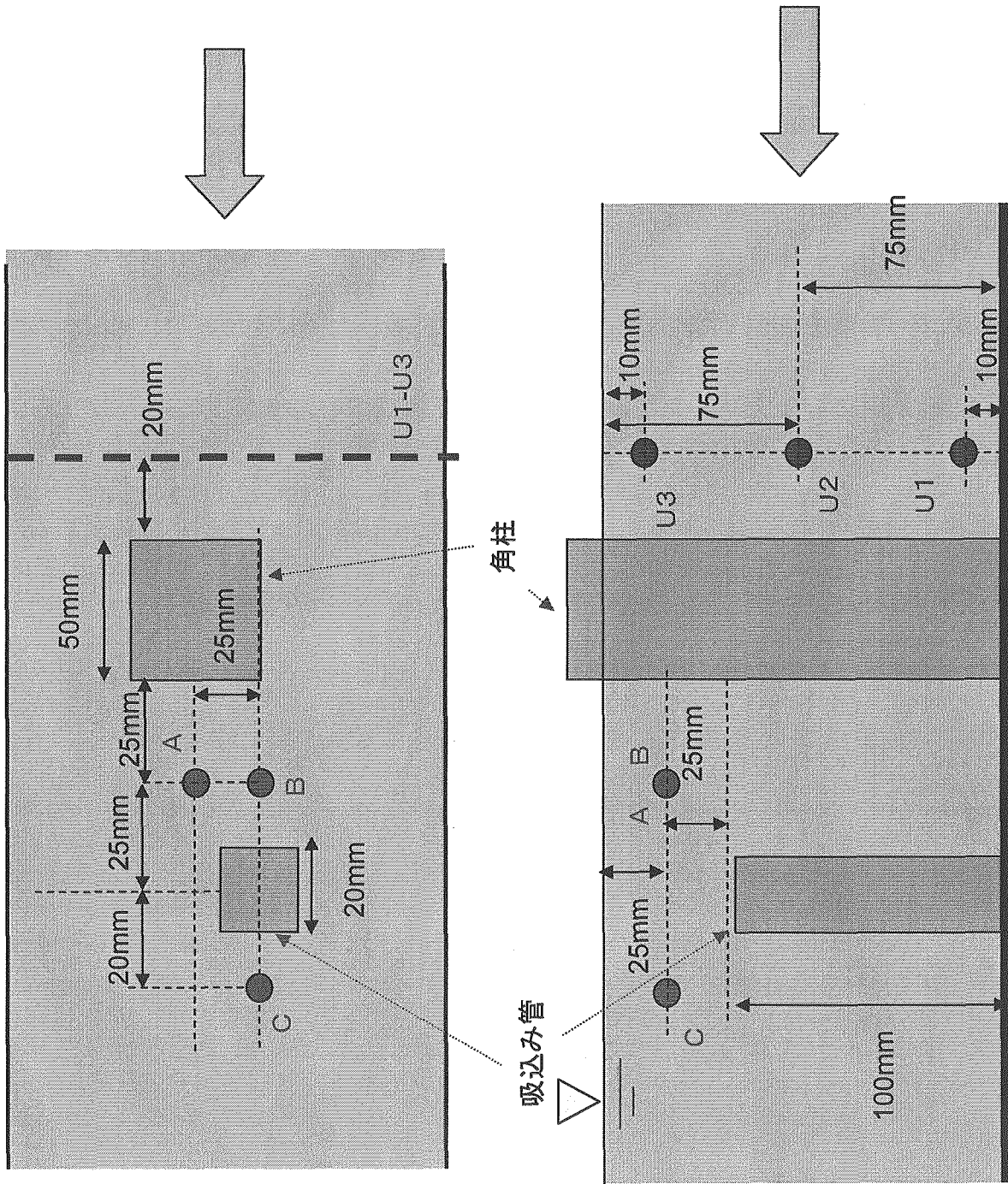


図4.3 吸込み管のモデル化



<水平面>

● 流速変化計測

● 平均流速計測

<垂直面>

図4.4 実験での流速測定点

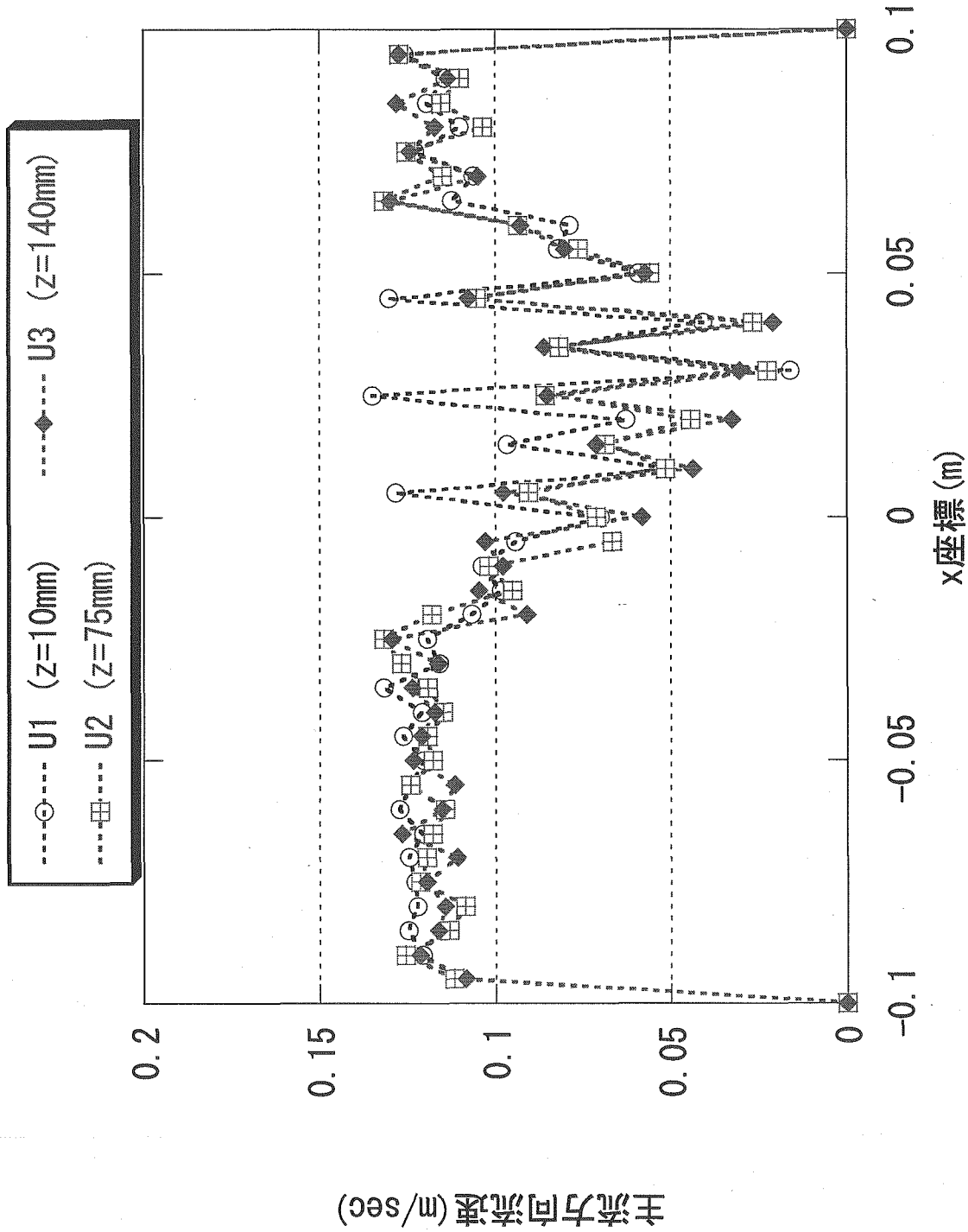


图4.5(a) 入口近傍流速分布

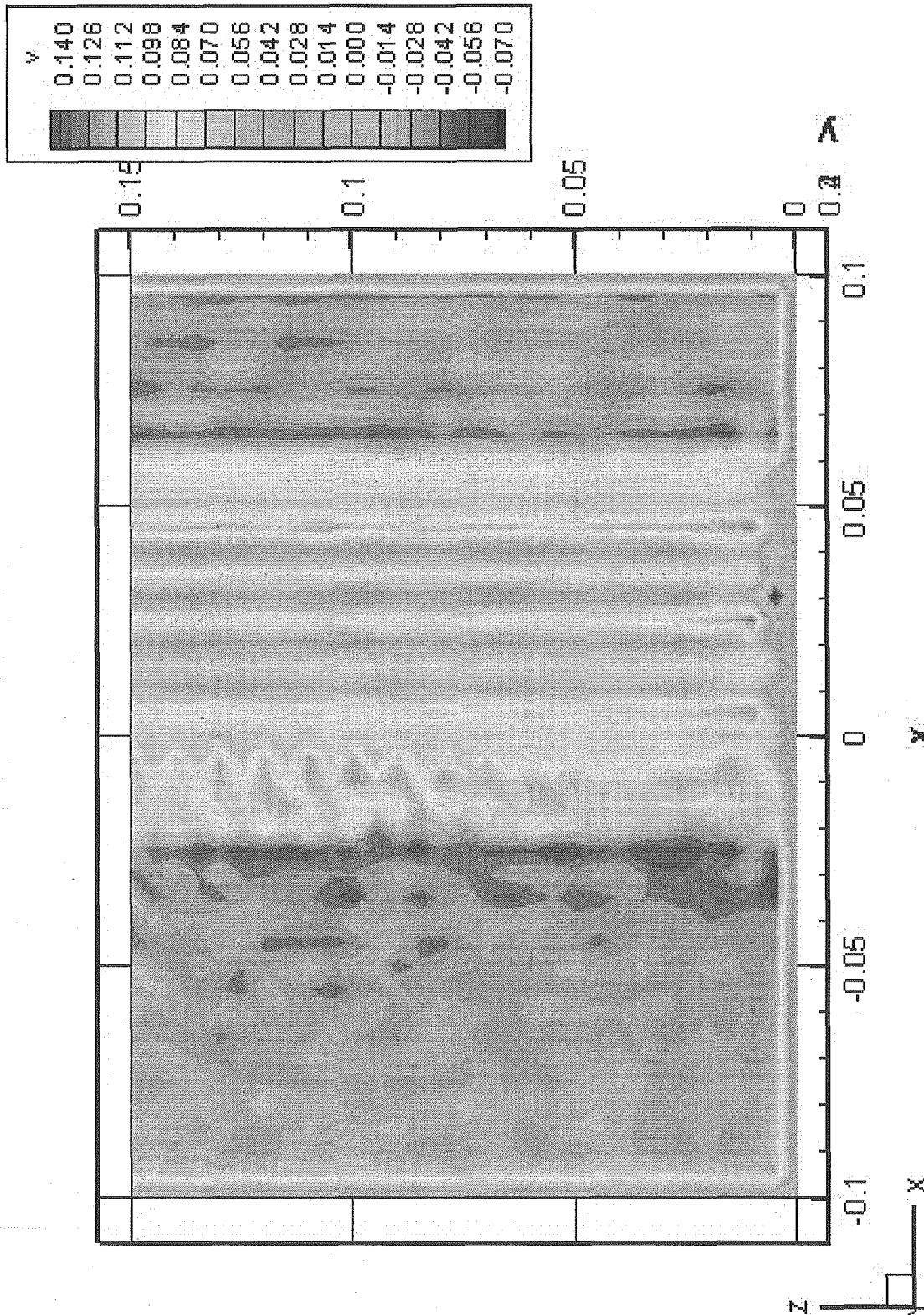


図4.5(b)  $y=0.08$ [m]での主流方向流速分布

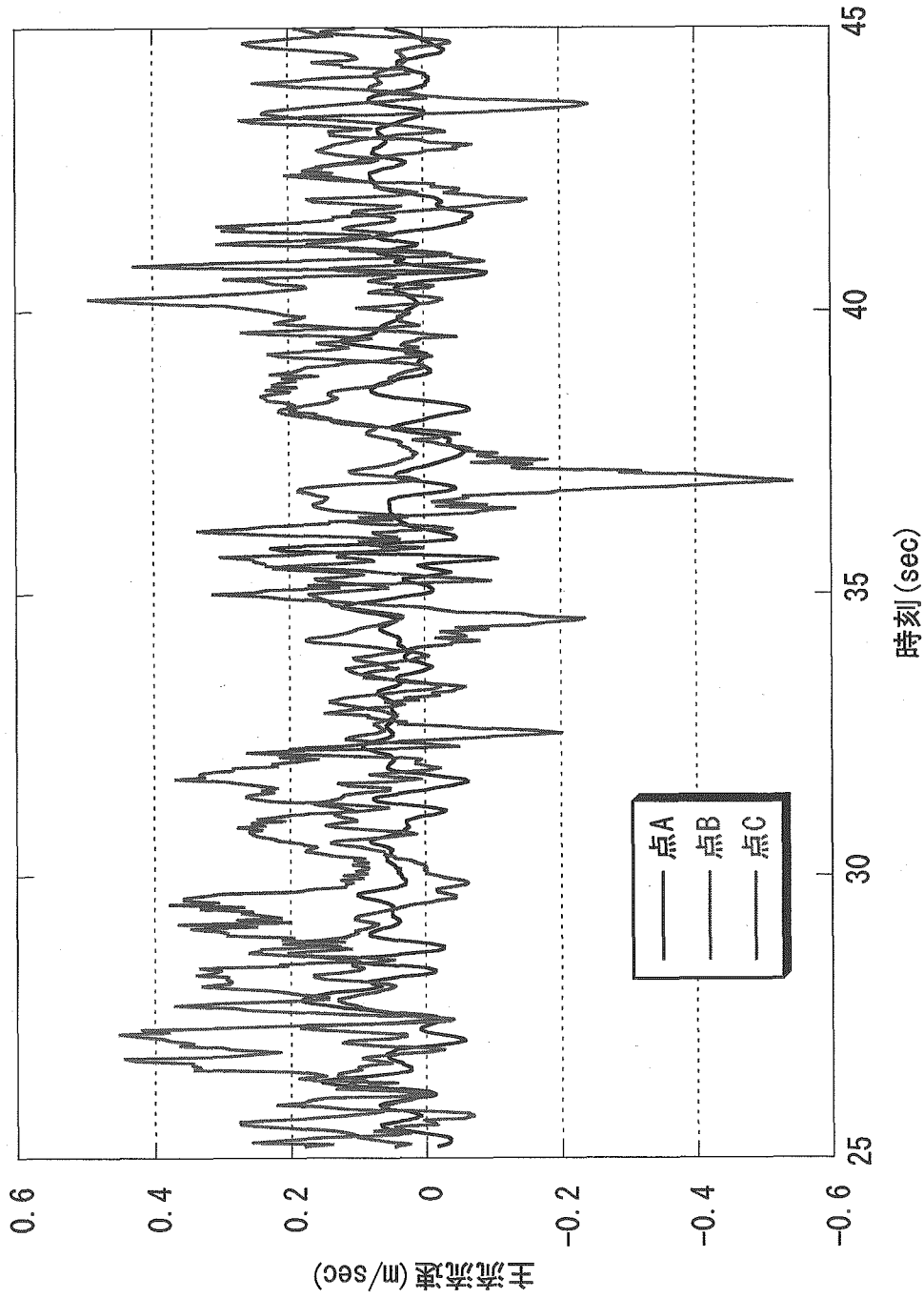


图4.6(a) 測定点A, B, Cにおける主流方向流速の時刻歴



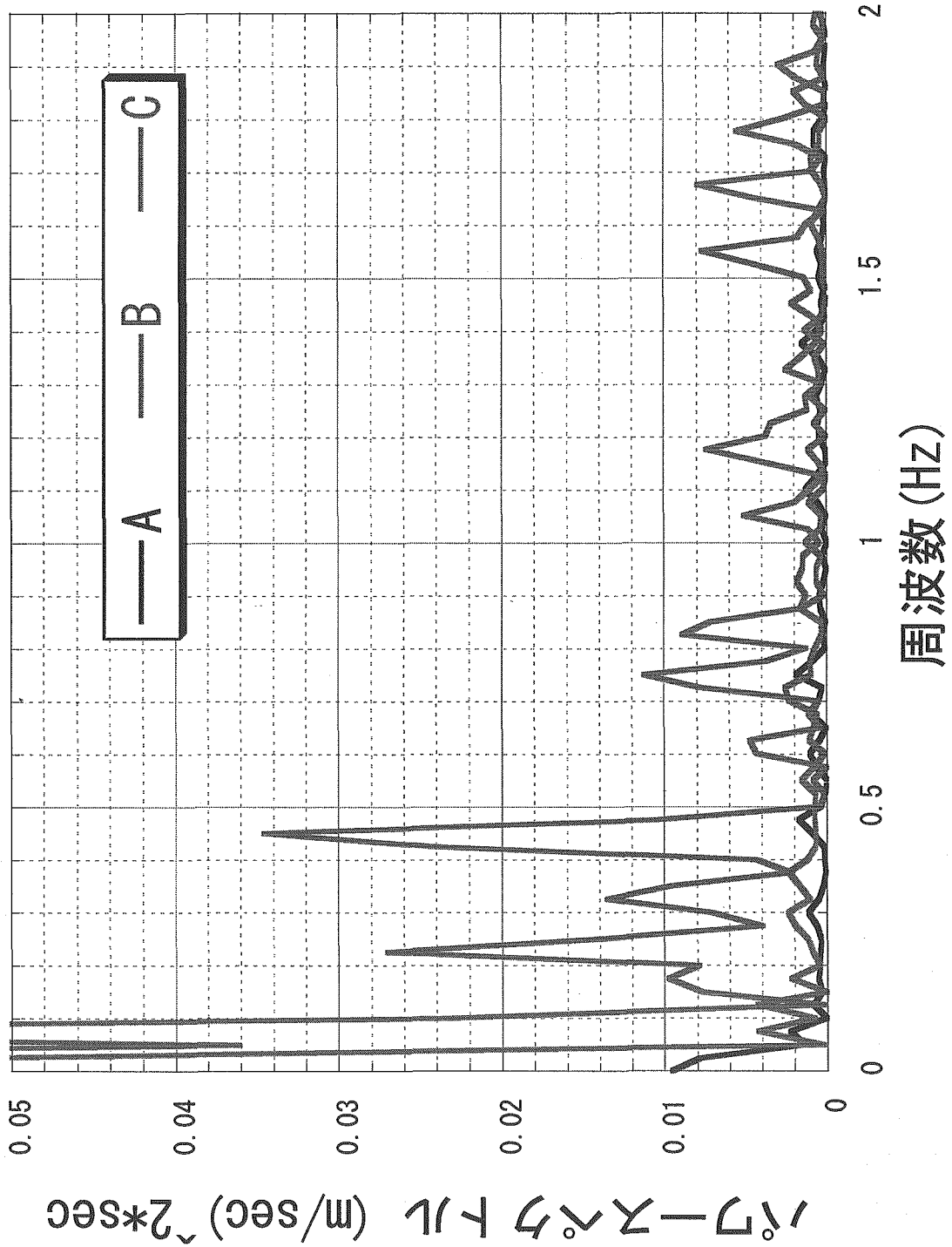


図4.6(b) 主流方向流速のパワースペクトル

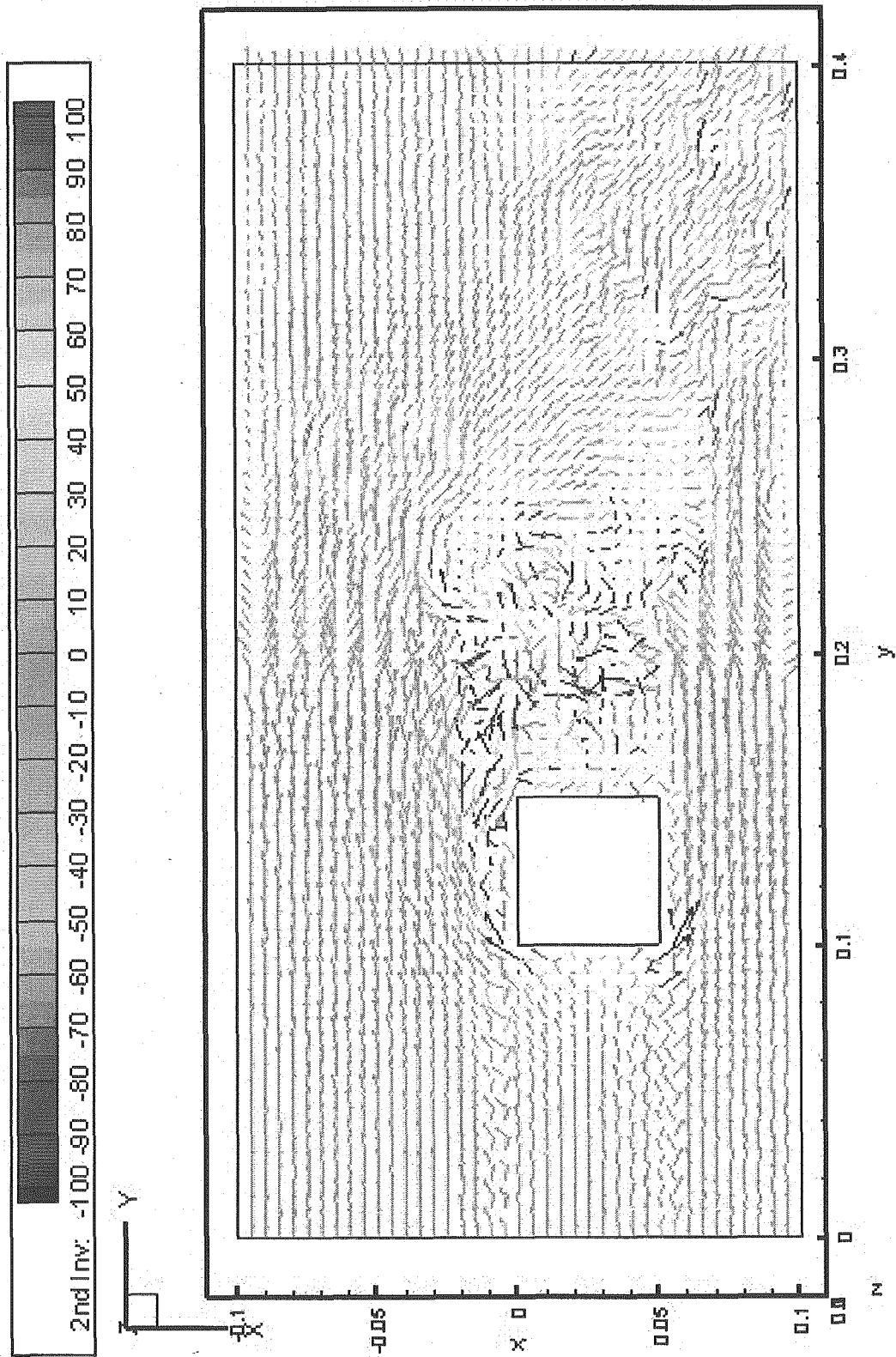


図4.7 自由表面の流速ベクトル分布

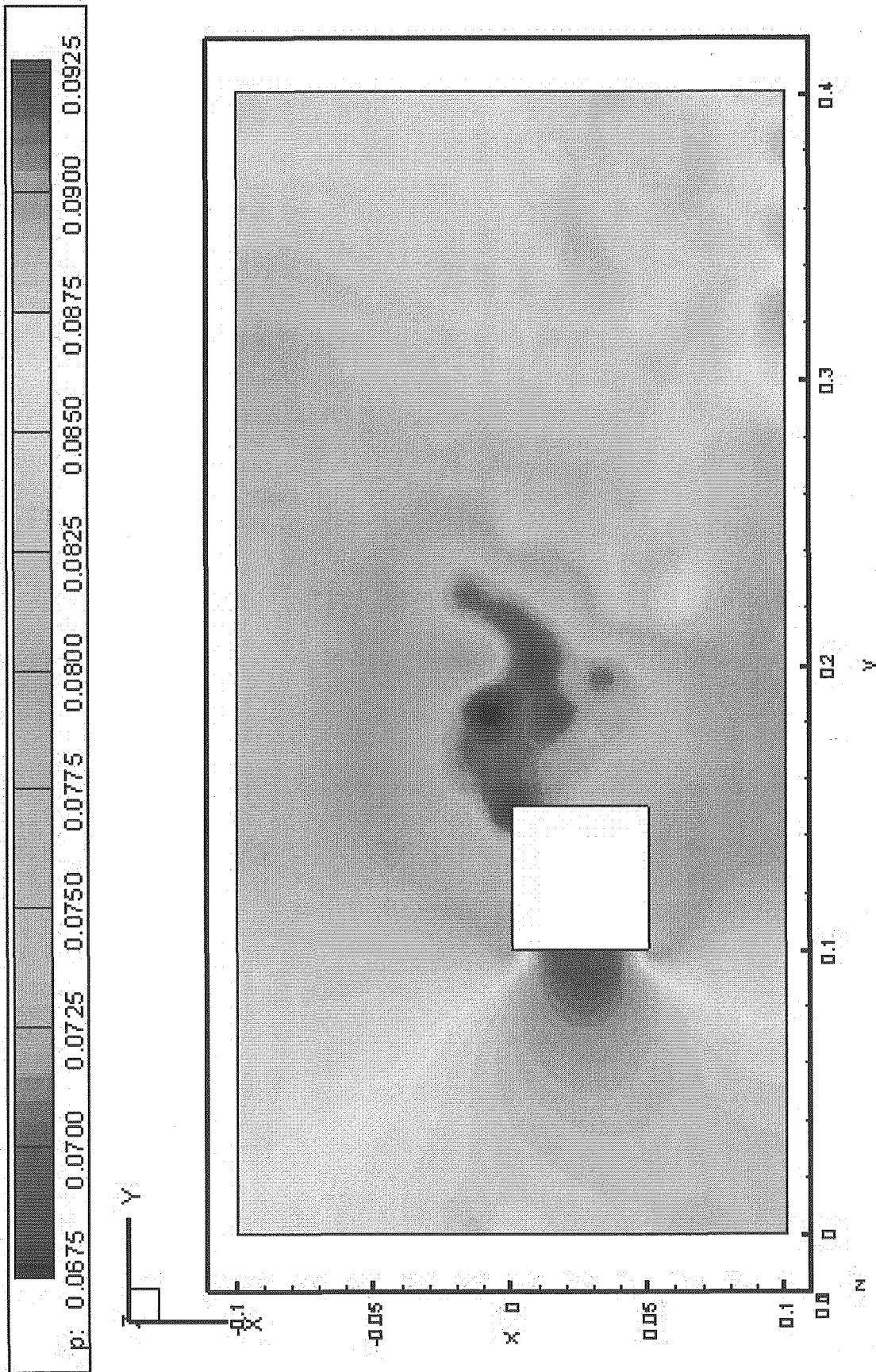
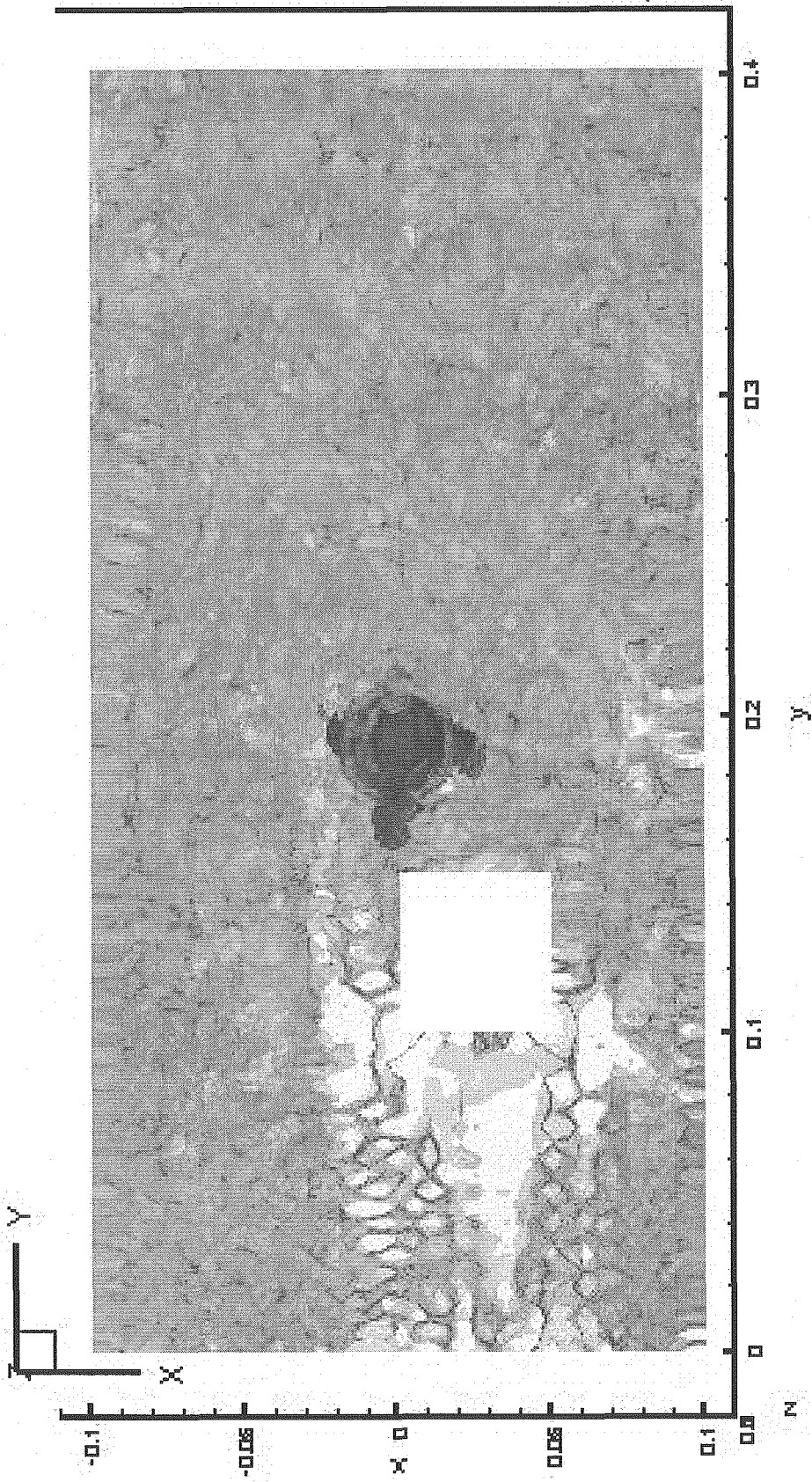


図4.8 自由表面の圧力分布



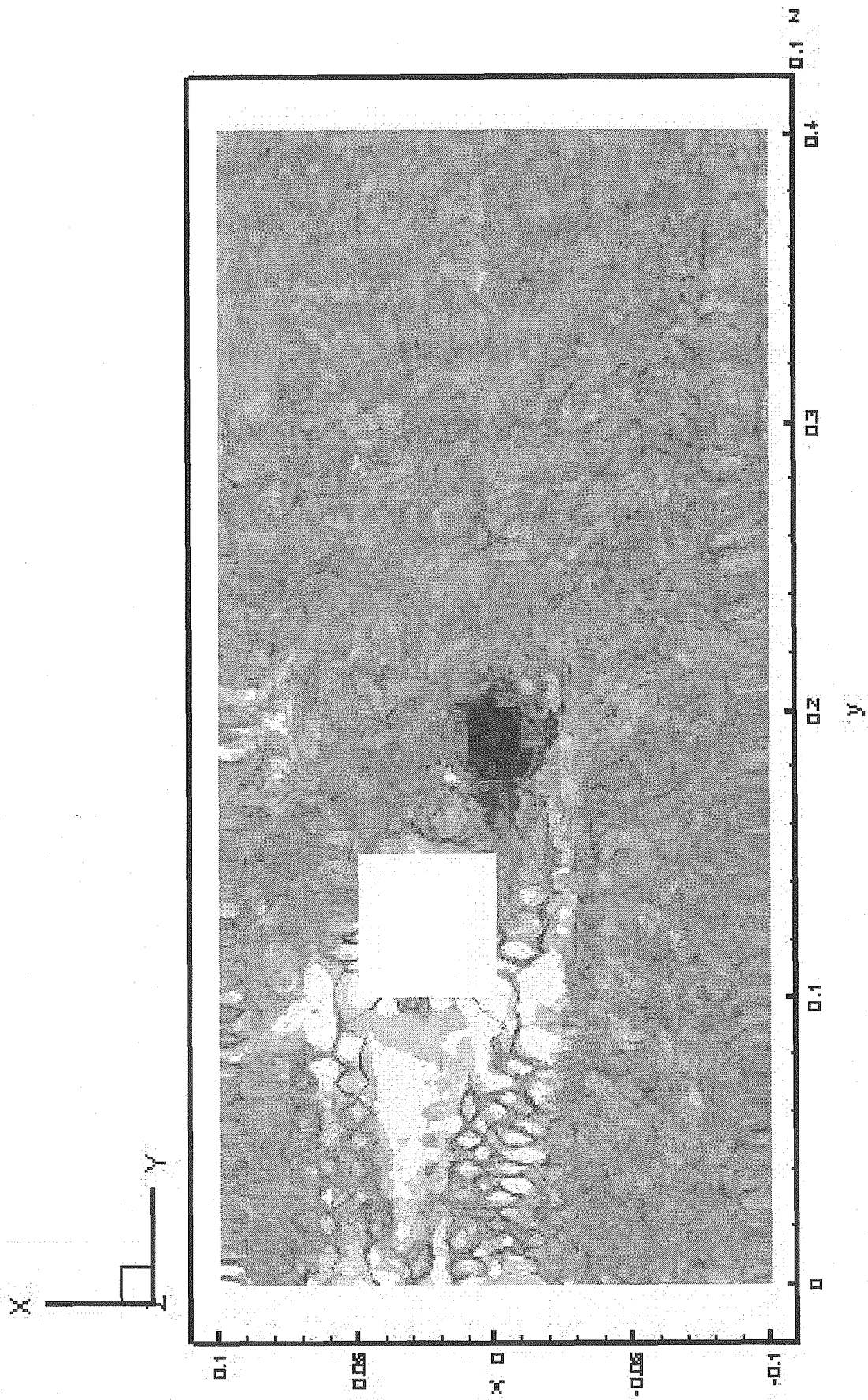
$p=0.8$  (orange),  $0.7$  (purple),  $-0.1$  (blue)

図4.9 等圧力面の分布



2nd Inv. = 2000 (red), 0 (green), -2000 (blue)

图4.10(a) 上面(自由表面)からみた第2不変量分布



2nd Inv. = 2000 (red), 0 (green), -2000 (blue)

図4.10(b) 下面(水路底部)からみた第2不変量分布

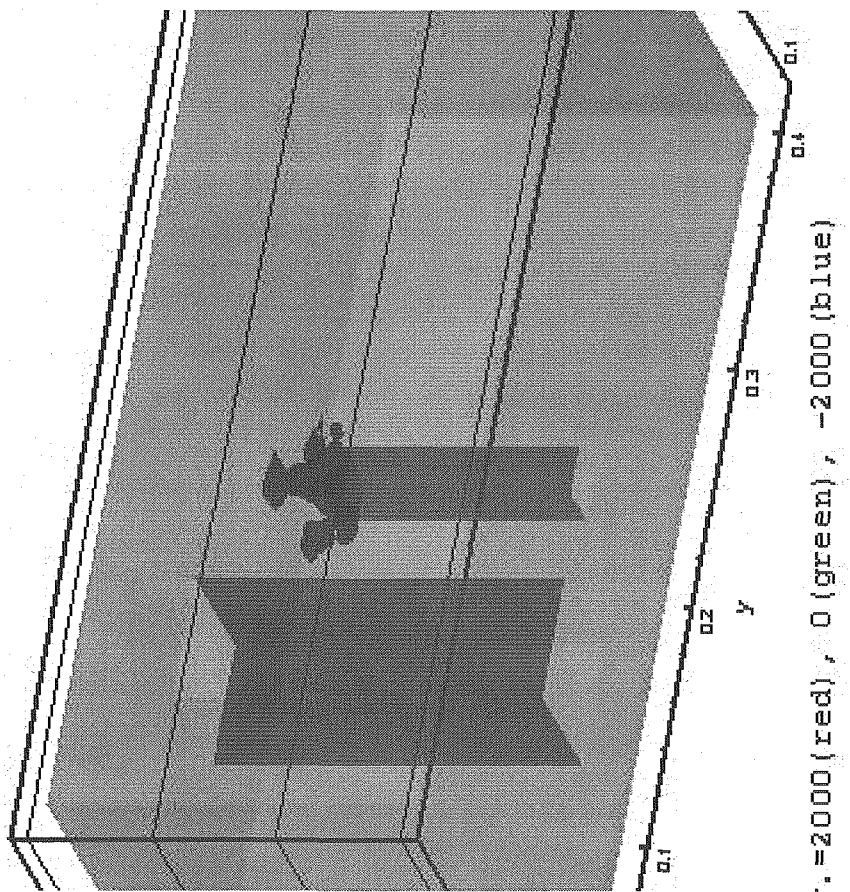
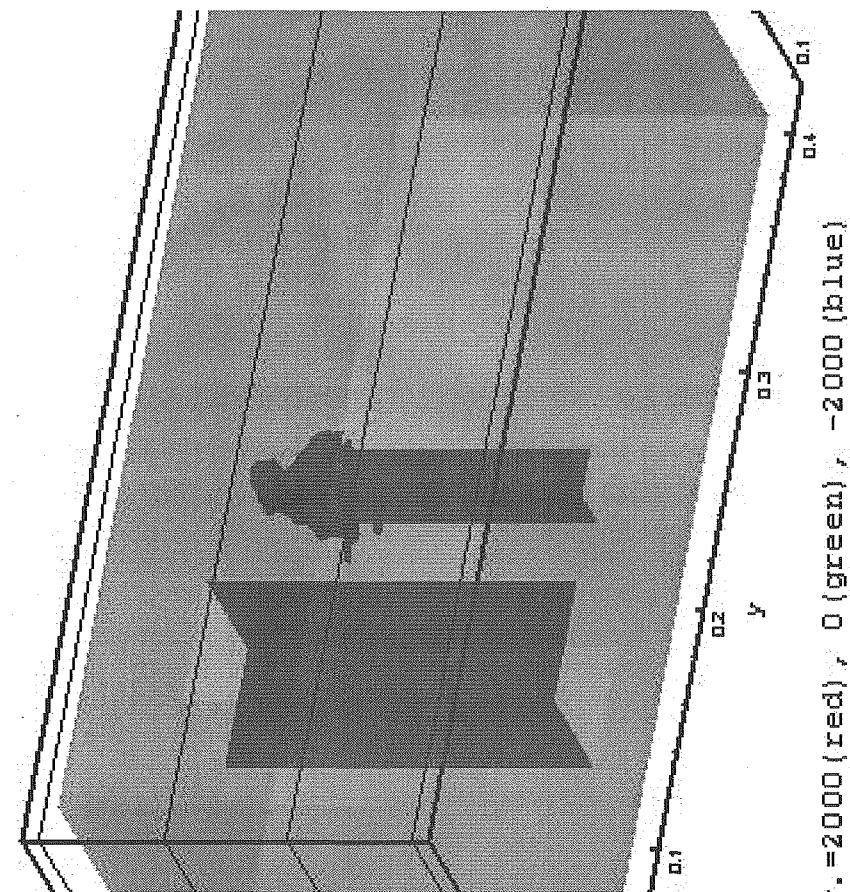


図4.10(c) 第2不変量(ゼロ近傍)の分布