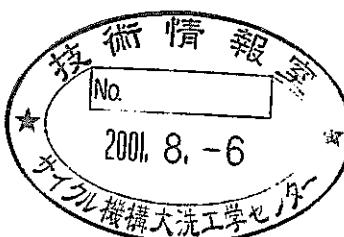


高速炉燃料集合体内  
詳細熱流動解析手法の開発（1）  
(研究報告書)



2001年6月

核燃料サイクル開発機構  
大洗工学センター

本資料の全部または一部を複写・複製・転載する場合は、下記にお問い合わせください。

〒319-1184 茨城県那珂郡東海村大字村松4-49

核燃料サイクル開発機構

技術展開部 技術協力課

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to :

Technical Cooperation Section,

Technology Management Division,

Japan Nuclear Cycle Development Institute

4-49 Muramatsu, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki, 319-1184

Japan

© 核燃料サイクル開発機構 (Japan Nuclear Cycle Development Institute)

2001

## 高速炉燃料集合体内詳細熱流動解析手法の開発(1)

大島 宏之<sup>1</sup> 今井 康友<sup>2</sup>

### 要 旨

高燃焼度燃料など高性能化を目指した高速炉燃料集合体の熱流動評価手法として、サブチャンネル解析手法と複雑空間内詳細熱流動解析手法を組み合わせた解析評価システムを構築している。これは、実験では解明が困難な熱流力特性を数値実験によって予測可能とし、合理的な安全設計評価に寄与することを目的とする。本報告書は、このシステムを構成する詳細熱流動解析コード SPIRAL-II について、その流動解析部の開発および基本検証について記述したものである。

SPIRAL-II コード流動解析部の開発においては、形状模擬性に優れるという観点から有限要素法を採用した。支配方程式の離散化には Bubnov-Galerkin 法を用いるとともに、計算安定化のために Streamline Upwind Petrov Galerkin 法、Balanced Tensor Diffusivity 法も選択できるようにした。時間積分には半陰解法 (Fractional Step 法) を用い、圧力方程式の解法には直接法あるいは ICCG 法を適用した。また、乱流の取り扱いとして  $k \cdot \varepsilon$  2 方程式モデルを組み込んだ。計算要素については、複雑形状に対応するため流速・圧力ともに六面体 1 次もしくは 2 次、五面体 1 次アイソパラメトリック要素の 3 種類を用意し、この中から自由に組み合わせて用いることも可能とした。

作成した流動解析部の基本性能を確認するため、以下の解析を実施した。

層流問題 (1) 低レイノルズ数領域における矩形ダクト内 2 次元流れ

(2) キャビティフロー

(3) バックステップフロー

乱流問題 (4) 高レイノルズ数領域における矩形ダクト内 2 次元流れ

(5) 乱流バックステップフロー

その結果、(1),(2)においては流速分布が理論解／数値実験解と一致し、(2)においても流速分布が実験値とほぼ一致するとともに再付着点位置も高次差分法と同等の予測値を得た。乱流領域においても同様に理論近似解や実験計測値と良好に一致した。以上より、SPIRAL-II コードは、流動に関して十分な予測精度を有することを確認した。

---

1 : 大洗工学センター 要素技術開発部 流体計算工学研究グループ

2 : 株式会社エヌ・ディー・データ

June, 2001

## Development of Computer Program for Detailed Thermal-Hydraulic Analysis in A Fast Reactor Fuel Subassembly (1)

H. Ohshima<sup>1</sup> and Y. Imai<sup>2</sup>

### ABSTRACT

As a thermal-hydraulic evaluation tool for high performance fast reactor fuel subassemblies, with high burn-up fuel, a numerical analysis system in which a subchannel analysis program and a detailed thermal hydraulic analysis program are utilized interactively is under development. This system enables us to clarify thermal hydraulic characteristics that cannot be revealed by experiments due to the measurement difficulty and to contribute to rational safety design and assessment. This report describes the first step of development and verification study of the detailed thermal hydraulic analysis program SPIRAL-II.

SPIRAL-II adopts the finite element method from the viewpoint of the advantage to treat precisely complicated geometry. Conservation equations of mass and momentum were discretized by Bubnov-Galerkin method. At the same time, one can choose streamline upwind Petrov-Galerkin method or a balancing tensor diffusivity method for calculation stabilization. Semi-implicit solution scheme (fractional step method) developed by Ramaswamy is used for time integration. As the pressure equation matrix solver, ICCG or Gaussian elimination is applied. With respect to the turbulence model, k- $\epsilon$  two equation model was implemented. As to the type of calculation element, 1st/2nd order hexahedron element and 1st order pentahedron element are available.

A verification study of SPIRAL-II was carried out using the following problems:

- (1) 2-dimensional flow in duct (laminar and turbulent flow),
- (2) Cavity flow, and
- (3) Backstep facing flow (laminar and turbulent flow)

The predicted velocity profiles in the case (1) agreed with theoretical ones in both laminar and turbulent flow. In the cases of (2) and (3), it was confirmed that the SPIRAL-II has the prediction accuracy that is almost equivalent to the higher-order finite difference method.

---

1: Thermal-Hydraulic Research Group, Advanced Technology Division, O-arai Engineering Center, Japan Nuclear Cycle Development Institute

2: NDD Inc.

## &lt; 目 次 &gt;

要旨	i
図表リスト	v
記号表	vii
 第1章 緒言	1
1. 1 研究の背景と目的	1
1. 2 本報告書の範囲	2
 第2章 基礎方程式と有限要素方程式	4
2. 1 基礎方程式	4
2. 1. 1 連続の式	4
2. 1. 2 Navier-Stokes 方程式	4
2. 2 時間積分法	5
2. 3 重み付き残差表示	6
2. 4 有限要素方程式	7
2. 4. 1 近似流速についての有限要素方程式	7
2. 4. 2 圧力についての有限要素方程式	8
2. 4. 3 流速についての有限要素方程式	9
 第3章 数値安定化手法	10
3. 1 Streamline Upwind Petrov Galerkin 法	10
3. 2 Balanced Tensor Diffusivity 法	12
3. 3 多次元問題への拡張	14
 第4章 乱流モデル	19
4. 1 基礎方程式と補助方程式	19
4. 1. 1 基礎方程式	19
4. 1. 2 涡粘性モデル	19
4. 1. 3 $k-\epsilon$ 2方程式モデル	20
4. 2 時間積分法	21
4. 3 重み付き残差表示	22
4. 4 有限要素方程式	23
4. 5 壁近傍領域の取り扱い	25
4. 5. 1 壁関数	25
4. 5. 2 レイノルズ応力	26
4. 5. 3 乱流エネルギーと散逸率	27

4. 6 乱流エネルギーと散逸率の補正	27
第5章 数値計算法	29
5. 1 有限要素と形状関数	29
5. 2 座標変換	33
5. 3 数値積分法	35
5. 4 行列解法	36
5. 4. 1 Mass-Lumping 法	36
5. 4. 2 Cholesky 法（直接法）	37
5. 4. 3 ICCG 法（反復法）	38
5. 5 計算上の工夫	40
5. 5. 1 計算の効率化	40
5. 5. 2 計算規模を優先する場合	41
5. 5. 3 確認計算	41
5. 6 定常判定法	42
第6章 検証解析	54
6. 1 矩形ダクト内 2 次元流れ解析	
6. 2 キャビティフロー解析	55
6. 3 層流バックステップフロー解析	56
6. 4 乱流バックステップフロー解析	57
第7章 まとめ	79
参考文献	80

# 図表リスト

## 第1章

図 1.1	高速炉燃料集合体内熱流動解析評価システム	3
-------	----------------------	---

## 第3章

図 3.1	1 次元における移流拡散問題	16
図 3.2	Bubnov-Galerkin 法の重み関数 $W_\alpha^{BG}$ と SUPG 法の重み関数 $W_\alpha^{SUPG}$	17
図 3.3	Bubnov-Galerkin 法の重み関数 $W_\alpha^{BG}$ と BTD 法の重み関数 $W_\alpha^{BTD}$	17
図 3.4	2 次元における移流拡散問題	18

## 第4章

図 4.1	層流底層、乱流領域の速度分布則と Reichardt の式	28
-------	-------------------------------	----

## 第5章

表 5.1	1 次元における Gauss の積分公式	43
表 5.2	三角形における Gauss の積分公式	44
表 5.3	ICCG 法	45
表 5.4	係数マトリックスの記憶に必要とする記憶容量と占有率	46
表 5.4	計算に要する記憶容量とタイムステップあたりの計算時間	47
図 5.1	2 節点線要素の節点番号	48
図 5.2	3 節点線要素の節点番号	48
図 5.3	4 節点四角形要素の節点番号	49
図 5.4	3 節点三角形要素の節点番号	49
図 5.5	9 節点四角形要素の節点番号	50
図 5.6	6 節点三角形要素の節点番号	50
図 5.7	8 節点六面体要素の節点番号	51
図 5.8	6 節点五面体要素の節点番号	51
図 5.9	27 節点六面体要素の節点番号	52
図 5.10	18 節点五面体要素の節点番号	52
図 5.11	節点数と計算に要する記憶容量の関係	53
図 5.12	節点数とタイムステップあたりの計算時間の関係	53
図 5.13	節点数と行列解法に要する計算時間の関係	53

## 第6章

表 6.1	主渦中心における流れ関数 $\psi_{min}$ 、渦度 $\omega$ 、中心座標 $(x_0, y_0)$ の比較	59
表 6.2	入口流速分布	60

表 6.3	主流の再付着点位置	60
表 6.4	SPIRAL-II で実施した検証解析	61
図 6.1	解析領域	62
図 6.2	出口境界における流速分布 ( $Re = 500$ )	63
図 6.3	出口境界における流速分布 ( $Re = 5000$ )	63
図 6.4	解析体系および境界条件	64
図 6.5 (a)	$Re = 100$ における解析結果	65
図 6.5 (b)	$Re = 400$ における解析結果	65
図 6.5 (c)	$Re = 1000$ における解析結果	65
図 6.5 (d)	$Re = 3200$ における解析結果	66
図 6.5 (e)	$Re = 5000$ における解析結果	66
図 6.5 (f)	$Re = 7500$ における解析結果	66
図 6.6	Bubnov-Galerkin 法/BTD 法/SUPG 法の比較 ( $Re = 100$ )	67
図 6.7	Bubnov-Galerkin 法/BTD 法/SUPG 法の比較 ( $Re = 10000$ )	68
図 6.8	層流バックステップフロー解析領域	69
図 6.9	再付着点に関する実験計測値と解析値の比較	69
図 6.10 (a)	$x/H = 0$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 73$ )	70
図 6.10 (b)	$x/H = 1$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 73$ )	70
図 6.10 (c)	$x/H = 2$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 73$ )	71
図 6.10 (d)	$x/H = 3$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 73$ )	71
図 6.10 (e)	$x/H = 4$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 73$ )	72
図 6.10 (f)	$x/H = 5$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 73$ )	72
図 6.11 (a)	$x/H = 0$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 229$ )	73
図 6.11 (b)	$x/H = 2$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 229$ )	73
図 6.11 (c)	$x/H = 4$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 229$ )	74
図 6.11 (d)	$x/H = 6$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 229$ )	74
図 6.11 (e)	$x/H = 8$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 229$ )	75
図 6.11 (f)	$x/H = 10$ における $u/u^*$ の分布 ( $Re = 229$ )	75
図 6.12	乱流バックステップフロー解析領域	76
図 6.13 (a)	$x/H = 1$ における $u/u^*$ の分布	76
図 6.13 (b)	$x/H = 3$ における $u/u^*$ の分布	76
図 6.13 (c)	$x/H = 5$ における $u/u^*$ の分布	77
図 6.13 (d)	$x/H = 6$ における $u/u^*$ の分布	77
図 6.13 (e)	$x/H = 7$ における $u/u^*$ の分布	77
図 6.14 (a)	$x/H = 4$ における $u/u^*$ の分布	78
図 6.14 (b)	$x/H = 7$ における $u/u^*$ の分布	78
図 6.14 (c)	$x/H = 13$ における $u/u^*$ の分布	78

## 記号表

$e_{ij}$	: 歪速度
$f_i$	: 外力成分
$h$	: セル間距離
$i$ 、 $j$ 、 $k$	: 座標軸方向
$k$	: $\psi$ の拡散係数
$k$	: 乱流エネルギー
$k^*$	: $k$ の重み関数
$L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$	: 面積座標
$n$	: 計算時間ステップ
$n_i$	: 外向きの単位法線成分
$p$	: 圧力
$P$	: 圧力 / 密度
$P^*$	: $P$ の重み関数
$R_{ij}$	: レイノルズ応力
$t$	: 時刻
$\Delta t$	: 時刻の刻み幅
$u_i$	: 流速成分  ( $u_1 = u$ 、 $u_2 = v$ 、 $u_3 = w$ )
$u_i^*$	: $u_i$ の重み関数
$u^+$	: 壁速度 ( $= u / u_\tau$ )
$u_\tau$	: 摩擦速度
$x_i$	: 全体座標系における座標成分  ( $x_1 = x$ 、 $x_2 = y$ 、 $x_3 = z$ )
$y^+$	: 壁座標 ( $= u_\tau y / v$ )

$\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$	: 節点番号
$\delta$	: 定常判定値
$\varepsilon$	: 乱流エネルギー散逸率
$\varepsilon^*$	: $\varepsilon$ の重み関数
$\lambda$ 、 $\mu$	: 粘性係数
$\nu$	: 動粘性係数
$\nu_t$	: 渦動粘性係数
$\rho$	: 密度
$\Phi$	: 形状関数
$\psi$	: 任意の物理量
$\omega$	: セルレイノルズ数
$\xi_i$	: 局所座標系における座標成分 ( $\xi_1 = \xi$ 、 $\xi_2 = \eta$ 、 $\xi_3 = \zeta$ )
$\bar{\psi}$	: $\psi$ の平均量
$\psi'$	: $\psi$ の変動量
$\hat{\psi}$	: $\psi$ の近似量
[ $\cdot$ ]	: 正方マトリックス
( $\cdot$ )	: 列ベクトル
[J]	: ヤコビアンマトリックス

## 第1章 緒 言

### 1.1 研究の背景と目的

高速炉の経済性向上には、高線出力化や高燃焼度化といった燃料の高性能化が1つの有力な方法である。これを実現するためには、従来の設計で見込まれてきた過度な保守性を排除し裕度の合理化を図るとともに、新たに様々な運転条件と燃料ピンの変形を重ね合わせたような条件での燃料健全性評価が行える評価手法の構築が必要である。熱流動的には、ワイヤースペーサの存在により複雑となる燃料集合体内熱流力挙動の詳細な解明および被覆管表面温度分布の予測が不可欠となる。

燃料集合体内熱流力挙動の把握には、これまで水あるいはナトリウムなどの作動流体を用いた実験的解明や、サブチャンネル解析手法を用いた評価がなされてきた。前者については、設計が明確に確定していれば、モックアップ実験等を行うことにより熱流力挙動のおおよその把握は可能であるが、設計研究や安全評価で想定される複数の形状あるいは条件ごとに実験を実施するのは時間的にも経済的にも負担が大きい。また、複雑形状ゆえに計測自体が比較的難しいものが多く、特にナトリウムを作動流体とした場合、計測技術の観点から様々な制約があり、必要十分なデータの取得は容易ではない。一方、後者のサブチャンネル解析手法は、実験より得られる断片的なデータを補完するあるいは解釈するために有効な手段であるが、この解析手法も主に実験データから抽出される伝熱流動相関式あるいは各種モデルパラメータを必要とするものである。従って、その予測精度は利用する実験データの計測精度に大きく左右されるとともに、適用範囲も実験計測可能な領域に限定されてしまう場合がある。相関式等の外挿性も必ずしも高くない場合が多く、新しいタイプあるいは条件での熱流力特性評価を行う場合、その信頼性を確保するためには何らかの方法で外挿性の確認をする必要がある。また、サブチャンネル解析手法で取り扱う計算メッシュ分割法のため、燃料被覆管表面の詳細な温度分布を求めるには限界がある。以上のことから、従来の方法のみでは、予測精度のさらなる向上は望めないことになる。

本研究は、昨今の計算機処理能力の飛躍的な向上を背景に、従来のサブチャンネル解析手法と局所詳細解析手法を開発・組み合わせることによってこれまでの限界を打破し、より合理的にかつ精度の高い燃料集合体内熱流力評価手法の確立を図ることを目的とする。図1-1にそのコンセプトを示す。ここでは、従来の方法に対して、実験が担っていた部分を「数値実験」に置き換えることがポイントである。すなわち、様々な制約があった実験に代えて、局所詳細解析手法を用いることにより、燃料ピンバンドルの変形を含む複雑形状下においてより広範な条件に対応できる相関式あるいはモデルパラメータの導出を可能とし、これをサブチャンネル解析コードに適用し燃料集合全体の熱流力挙動を予測するものである。また、逆にサブチャンネル解析の結果を境界条件として、被覆管表面温度分布など局所詳細な評価を行うことを可能とす

るものである。(燃料集合体全体を詳細解析手法で評価することも不可能ではないが、現在のコンピュータの処理能力を考慮すると、このように守備範囲の異なるコードを組み合わせて用いることが最も実用的と考えられる。) このコンセプトでは、実験は必要に応じて基礎的なものだけを行えばよく、モックアップのような大型試験は不要となる。大掛かりな実験の介在を回避できることから、時間的にもコスト的にも合理的に評価を行うことが可能となる。

燃料集合体全体の熱流力挙動を評価するサブチャンネル解析コードには、流体計算工学研究グループで開発してきた ASFRE コード<sup>[1]</sup>を適用する。ASFRE コードは、低流量から高流量条件まで、また局所閉塞事象などの異常事象の解析にも適用できる非定常コードであり、水やナトリウム試験データをもとに多くの検証解析がなされてきた実績を有する(例えば[2])。他のサブチャンネル解析コードに比べて、プリミティブな相関式を組み合わせてモデル化がなされていることから、ワイヤースペーサ型燃料集合体への適用性が高いという特徴を有する。一方、局所詳細解析コードは SPIRAL コード<sup>[3]</sup>および SPLASH コード<sup>[4]</sup>をベースに今回新たに開発を開始した。

## 1.2 本報告書の範囲

本報告書は、開発に着手した局所詳細非定常解析コード SPIRAL-II に関して、昨年度に実施した開発内容についてまとめたものである。

SPIRAL-II コードは、複雑形状の模擬性を重視するため、数値解析法として Galerkin 有限要素法を採用している。また時間積分法としては Fractional step 法<sup>[5]</sup>を用いている。この方法では、対流項を陽的に取り扱うため、対流項の非線形性に起因する反復計算は必要なく、また、質量マトリックスを対角化することにより、計算コストを大幅に軽減できる。第 2 章においては、コード内で取り扱う基礎方程式と有限要素方程式について述べる。

さらに、高レイノルズ数流れでの数値安定性を確保するため、移流項の離散化法として SUPG 法(Streamline upwind Petrov-Galerkin 法)<sup>[5]</sup>を、時間項から派生する不安定性を改善する方法として BTD 法(Balancing tensor diffusivity 法)<sup>[6]</sup>を追加し、また、乱流モデルとして  $k-\epsilon$  モデル<sup>[7]</sup>を導入した。SUPG 法および BTD 法は、有限要素法における移流項の風上化法に帰着し、計算の安定化、高精度化などの効果を得ることができる。また、 $k-\epsilon$  モデルは、乱流解析の最も標準的なモデルであり、比較的低い計算コストで乱流の特性を再現することができる。第 3 章では数値安定化手法について、第 4 章では乱流モデルについて述べる。

本作業の最後には、SPIRAL-II の精度検証として、矩形ダクト 2 次元流れ、キャビティフロー、層流および乱流ステップフローの解析を実施し、解析結果が理論値または実験値と概ね一致していることを確認した。この検証解析については第 6 章に述べる。

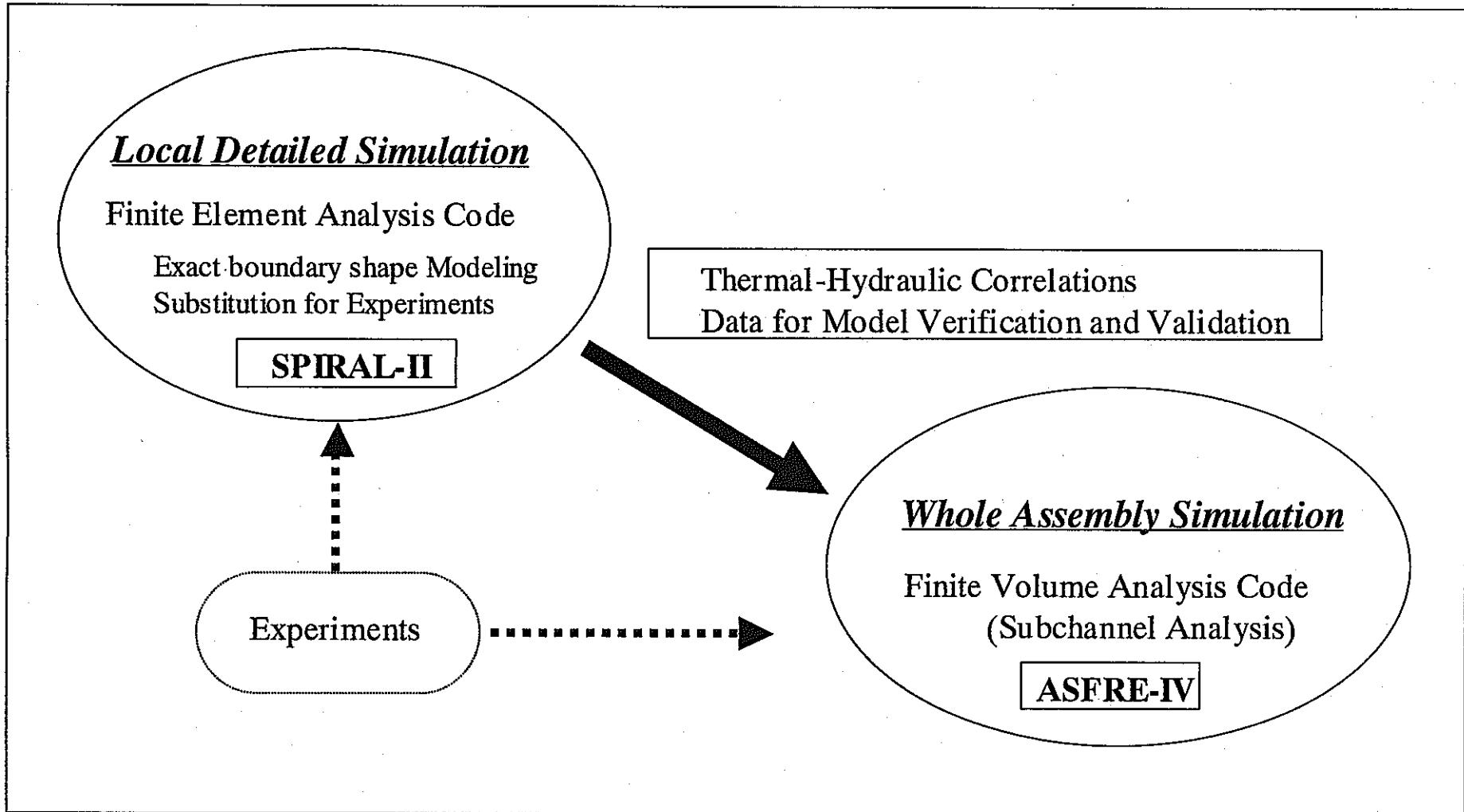


図 1.1 高速炉燃料集合体内熱流動解析評価システム

## 第2章 基礎方程式と有限要素方程式

### 2. 1 基礎方程式

本節では、基礎方程式を導出する。

単相流の質量保存則および運動量保存則は、以下のように表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \cdots (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i = 0 \quad \cdots (2.2)$$

(2.1)式、(2.2)式から、基礎方程式として、非圧縮性粘性流体の連続の式およびNavier-Stokes方程式を導出する。

#### 2. 1. 1 連続の式

流体の非圧縮性を仮定する。このとき、密度  $\rho$  の時間的変化および空間的変化は無視できるので、次式が成り立つ。

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \quad \cdots (2.3)$$

(2.3)式を質量保存則に代入することにより、連続の式が得られる。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \cdots (2.4)$$

#### 2.1.2 Navier-Stokes方程式

Newton流体では、運動量保存則の応力テンソル  $\tau_{ij}$  は次式で表される。

$$\tau_{ij} = (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad \cdots (2.5)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \cdots (2.6)$$

ここで、 $\lambda$ 、 $\mu$  は弾性体の Lame 定数に対応する物質定数であり、 $\lambda$  は体積膨張速度  $e_{kk}$  と応力を関係づける比例定数、 $\mu$  は歪速度  $e_{ij}$  と応力を関係づける比例定数（粘性係数）である。非圧縮性の条件から  $e_{kk} = 0$  を考慮すると、(2.5)式は、

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \cdots (2.7)$$

となる。従って、運動量保存則は次式で表される。

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \rho f_i = 0 \quad \cdots (2.8)$$

(2.8)式を  $\rho$  で除して、対流項および粘性項に連続の式(2.4)を適用することにより、Navier-Stokes 方程式が得られる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - f_i = 0 \quad \cdots (2.9)$$

## 2. 2 時間積分法

本節では、有限要素方程式を導出するため、基礎方程式を時間に関して離散化する。Navier-Stokes 方程式の非定常項に Euler 差分公式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad \cdots (2.10)$$

を適用する。このとき、対流項および粘性項に関しては陽的に、圧力項に関しては陰的に離散化する。従って、得られる方程式は semi-implicit となる。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} - f_i^n = 0 \quad \cdots (2.11)$$

新しい時刻の流速と圧力を求めるため、Ramaswamy らによる速度修正法<sup>[8]</sup>を採用する。速度修正法では、非圧縮性の条件を満足しない近似流速を用いて二段階の時間差分を行う。

近似流速は、(2.11)式の圧力項を零とおいて定義する。

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} - f_i^n = 0 \quad \cdots (2.12)$$

(2.11)式と(2.12)式の比較から、次式を得る。

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} = - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} \quad \cdots (2.13)$$

(2.13)式を  $x_i$  で微分して、各方向の総和をとれば、以下の圧力に関する Poisson 方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_j^{n+1}}{\partial x_j} \quad \cdots (2.14)$$

ここで、連続の式(2.4)を用いている。

## 2. 3 重み付き残差表示

本節では、時間に関して離散化された基礎方程式の重み付き残差表示を求める。  
 $u_i^*$ 、 $P^*$  をそれぞれ  $u_i$ 、 $P$  の重み関数とする。(2.12)式に  $u_i^*$  を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int u_i^* \tilde{u}_i^{n+1} dV &= \int u_i^* u_i^n dV - \Delta t \int u_i^* u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} dV \\ &\quad + v \Delta t \int u_i^* \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} dV + \Delta t \int u_i^* f_i^n dV \end{aligned} \quad \cdots (2.15)$$

同様にして、(2.14)式に  $P^*$  を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\int P^* \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} dV = \frac{1}{\Delta t} \int P^* \frac{\partial \tilde{u}_j^{n+1}}{\partial x_j} dV \quad \cdots (2.16)$$

(2.15)式の右辺第三項と(2.16)式の左辺第一項に、Green-Gauss の定理を適用する。

$$\int u_i^* \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x_j \partial x_j} dV = - \int \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} dV + \int u_i^* \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (2.17)$$

$$\int P^* \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} dV = - \int \frac{\partial P^*}{\partial x_j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} dV + \int P^* \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (2.18)$$

ここで、 $n_j$  は領域の境界に対して外向きの単位法線成分である。従って、(2.17)式の右辺第二項は流速の自然境界条件を、(2.18)式の右辺第二項は圧力の自然境界条件を与える。

(2.15)式に(2.17)式を代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int u_i^* \tilde{u}_i^{n+1} dV &= \int u_i^* u_i^n dV - \Delta t \int u_i^* u_j^n \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} dV \\ &\quad - v \Delta t \int \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} dV + v \Delta t \int u_i^* \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} n_j dS + \Delta t \int u_i^* f_i^n dV \end{aligned} \quad \cdots (2.19)$$

(2.16)式に(2.18)式を代入すれば、次式が得られる。

$$\int \frac{\partial P^*}{\partial x_j} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} dV = -\frac{1}{\Delta t} \int P^* \frac{\partial \tilde{u}_j^{n+1}}{\partial x_j} dV + \int P^* \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (2.20)$$

流速は、(2.13)式より近似流速と圧力の関数として求められる。(2.13)式に  $u_i^*$  を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\int u_i^* u_i^{n+1} dV = \int u_i^* \tilde{u}_i^{n+1} dV - \Delta t \int u_i^* \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} dV \quad \cdots (2.21)$$

## 2. 4 有限要素方程式

本節では、形状関数を定義して有限要素方程式を導出する。

Galerkin 有限要素法では、重み関数と形状関数を等しくとる。流速、圧力および近似流速については、次のように形状関数を用いて次式で内挿する。

$$u_i = \varphi_\alpha u_{i\alpha} \quad \cdots (2.22)$$

$$P = \varphi_\alpha P_\alpha \quad \cdots (2.23)$$

$$\tilde{u}_i = \varphi_\alpha \tilde{u}_{i\alpha} \quad \cdots (2.24)$$

$$u_i^* = \varphi_\alpha u_{i\alpha}^* \quad \cdots (2.25)$$

$$P^* = \varphi_\alpha P_\alpha^* \quad \cdots (2.26)$$

ここで、 $\alpha$  は節点番号であり、(2.22)式から(2.26)式は節点の数  $N$  だけ総和をとる。

(2.22)式から(2.26)式を用いて流速、圧力および近似流速についての有限要素方程式を導出する。

### 2. 4. 1 近似流速についての有限要素方程式

まず、近似流速についての有限要素方程式を求める。(2.19)式に(2.22)式、(2.24)式および(2.25)式を代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int \varphi_\alpha u_{i\alpha}^* \varphi_\beta \tilde{u}_{i\beta}^{n+1} dV &= \int \varphi_\alpha u_{i\alpha}^* \varphi_\beta u_{i\beta}^n dV - \Delta t \int \varphi_\alpha u_{i\alpha}^* \varphi_\beta u_{i\beta}^n \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_j} u_{i\gamma}^n dV \\ &\quad - v \Delta t \int \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} u_{i\alpha}^* \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} u_{i\beta}^n dV + v \Delta t \int \varphi_\alpha u_{i\alpha}^* \frac{\partial u_{i\beta}^n}{\partial x_j} n_j dS \\ &\quad + \Delta t \int \varphi_\alpha u_{i\alpha}^* f_i^n dV \end{aligned} \quad \cdots (2.27)$$

ここで、 $u_i^*$  は任意の形状関数であるから、すべての節点  $\alpha' (= 1, 2, \dots, N)$  に対

して、

$$\begin{aligned} u_{ia}^* &= 1 \quad (\alpha = \alpha') \\ u_{ia}^* &= 0 \quad (\alpha \neq \alpha') \end{aligned} \quad \cdots (2.28)$$

が成り立たなければならない。従って、(2.27)式は  $N$  個の連立方程式となる。

$$\begin{aligned} \int \varphi_a \varphi_\beta \tilde{u}_{\beta}^{n+1} dV &= \int \varphi_a \varphi_\beta u_{\beta}^n dV - \Delta t \int \varphi_a \varphi_\beta u_{\beta}^n \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_j} u_{\gamma}^n dV \\ &\quad - v \Delta t \int \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} u_{\beta}^n dV + v \Delta t \int \varphi_a \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} n_j dS + \Delta t \int \varphi_a f_i^n dV \end{aligned} \quad \cdots (2.29)$$

(2.29)式では、節点値が空間座標に依存しないので、領域積分の外に出すことができる。よって、マトリックス表示を用いた、近似流速についての有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} [M_{\alpha\beta}](\tilde{u}_{\beta}^{n+1}) &= [M_{\alpha\beta}](u_{\beta}^n) - \Delta t [K_{j\alpha\beta\gamma}](u_{\beta}^n)(u_{\gamma}^n) \\ &\quad - v \Delta t [S_{\alpha\beta}](u_{\beta}^n) + v \Delta t (\Omega_{ia}) + \Delta t (F_a) f_i^n \end{aligned} \quad \cdots (2.30)$$

$$[M_{\alpha\beta}] = \int \varphi_a \varphi_\beta dV \quad \cdots (2.31)$$

$$[K_{i\alpha\beta\gamma}] = \int \varphi_a \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_i} dV \quad \cdots (2.32)$$

$$[S_{\alpha\beta}] = \int \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} dV \quad \cdots (2.33)$$

$$(F_a) = \int \varphi_a dV \quad \cdots (2.34)$$

$$(\Omega_{ia}) = \int \varphi_a \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (2.35)$$

## 2.4.2 圧力についての有限要素方程式

次に、圧力についての有限要素方程式を求める。(2.20)式に(2.23)式、(2.24)式および(2.26)式を代入すれば、次式が得られる。

$$\int \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_j} P_a^* \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} P_\beta^{n+1} dV = -\frac{1}{\Delta t} \int \varphi_a P_a^* \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} \tilde{u}_{\beta}^{n+1} dV + \int \varphi_a P_a^* \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (2.36)$$

ここで、 $P^*$  は任意の形状関数であるから、すべての節点  $a'$  ( $= 1, 2, \dots, N$ ) に対して、

$$\begin{aligned} P_{\alpha}^* &= 1 & (\alpha = \alpha') \\ P_{\alpha}^* &= 0 & (\alpha \neq \alpha') \end{aligned} \quad \cdots (2.37)$$

が成り立たなければならない。従って、(2.36)式は  $N$  個の連立方程式となる。

$$\int \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_j} P_{\beta}^{n+1} dV = -\frac{1}{\Delta t} \int \varphi_{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_j} \tilde{u}_{j\beta}^{n+1} dV + \int \varphi_{\alpha} \frac{\partial P_{\beta}^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (2.38)$$

(2.38)式では、節点値が空間座標に依存しないので、領域積分の外に出すことができる。よって、マトリックス表示を用いた、圧力についての有限要素方程式が得られる。

$$[S_{\alpha\beta}](P_{\beta}^{n+1}) = -\frac{1}{\Delta t} [H_{i\alpha\beta}](\tilde{u}_{j\beta}^{n+1}) + (\Sigma_{\alpha}) \quad \cdots (2.39)$$

$$[H_{i\alpha\beta}] = \int \varphi_{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_i} dV \quad \cdots (2.40)$$

$$(\Sigma_{\alpha}) = \int \varphi_{\alpha} \frac{\partial P_{\beta}^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (2.41)$$

#### 2.4.3. 流速についての有限要素方程式

最後に、流速についての有限要素方程式を求める。(2.21)式に(2.22)式、(2.23)式、(2.24)式および(2.25)式を代入すれば、次式が得られる。

$$\int \varphi_{\alpha} u_{ia}^* \varphi_{\beta} u_{i\beta}^{n+1} dV = \int \varphi_{\alpha} u_{ia}^* \varphi_{\beta} \tilde{u}_{i\beta}^{n+1} dV - \Delta t \int \varphi_{\alpha} u_{ia}^* \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_i} P_{\beta}^{n+1} dV \quad \cdots (2.42)$$

ここで、 $u_i^*$  は任意の形状関数であるから、すべての節点  $\alpha' (= 1, 2, \dots, N)$  に対して、

$$\begin{aligned} u_{ia}^* &= 1 & (\alpha = \alpha') \\ u_{ia}^* &= 0 & (\alpha \neq \alpha') \end{aligned} \quad \cdots (2.43)$$

が成り立たなければならない。従って、(2.42)式は  $N$  個の連立方程式となる。

$$\int \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} u_{i\beta}^{n+1} dV = \int \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} \tilde{u}_{i\beta}^{n+1} dV - \Delta t \int \varphi_{\alpha} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_i} P_{\beta}^{n+1} dV \quad \cdots (2.44)$$

(2.44)式では、節点値が空間座標に依存しないので、領域積分の外に出すことができる。よって、マトリックス表示を用いた、流速についての有限要素方程式が得られる。

$$[M_{\alpha\beta}](u_{i\beta}^{n+1}) = [M_{\alpha\beta}](\tilde{u}_{i\beta}^{n+1}) - \Delta t [H_{i\alpha\beta}](P_{\beta}^{n+1}) \quad \cdots (2.45)$$

### 第3章 数値安定化手法

本章では、SPIRAL-II コードの数値安定化のために組み込んだ Streamline Upwind Petrov Galerkin 法 (SUPG 法)<sup>[5]</sup> および Balancing Tensor Diffusivity 法 (BTD 法)<sup>[6]</sup>について述べる。

#### 3.1 Streamline Upwind Petrov Galerkin 法

本節では、SUPG 法による有限要素方程式を導出する。

1 次元の移流拡散方程式について考える (図 3.1 参照)。

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \cdots (3.1)$$

ここで、 $\psi$  は任意の物理量であり、流速  $u$  および拡散係数  $k$  はともに正とする。

有限差分法において、(3.1)式を中心差分により離散化すると、

$$u \frac{\Psi_{a+1} - \Psi_{a-1}}{2h} = k \frac{\Psi_{a+1} - 2\Psi_a + \Psi_{a-1}}{h^2} \quad \cdots (3.2)$$

が得られ、移流項を風上差分により離散化すると、

$$u \frac{\Psi_a - \Psi_{a-1}}{h} = k \frac{\Psi_{a+1} - 2\Psi_a + \Psi_{a-1}}{h^2} \quad \cdots (3.3)$$

が得られる。ここで、 $h$  はセル間距離 (節点間の距離) である。(3.3)式を変形すると、

$$u \frac{\Psi_{a+1} - \Psi_{a-1}}{2h} = (k + k_\infty) \frac{\Psi_{a+1} - 2\Psi_a + \Psi_{a-1}}{h^2} \quad \cdots (3.4)$$

$$k_\infty = \frac{uh}{2} \quad \cdots (3.5)$$

となり、(3.3)式と(3.4)式の比較から、風上差分による離散化は、人工拡散  $k_\infty$  を付加した中心差分による離散化と等価であると考えられる。

有限要素法において、2.4 節で用いた Galerkin 有限要素法 (Bubnov-Galerkin 法) は、風上側にも風下側にも等しい重み関数を用いるため、中心差分に相当する。従って、人工拡散  $k_\infty$  を付加した Bubnov-Galerkin 法は、風上化 Galerkin 有限要素法 (SUPG 法) と等価であると考えられる。

(3.1)式に人工拡散  $k_\infty$  を付加して、Bubnov-Galerkin 法により離散化すると、次式が得られる。

$$\int \Phi_\alpha u \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta = - \int (k + k_\infty) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta \quad \cdots (3.6)$$

ここで、右辺に Green-Gauss の定理 (部分積分法) を用いている。(但し、簡単化のた

めに境界積分項は無視している。) (3.6)式は、次式と等価である。

$$\int (\varphi_\alpha + \frac{k_\infty}{u} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x}) u \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta = - \int k \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta \quad \cdots (3.7)$$

(3.7)式では、移流項の重み関数が、

$$W_\alpha^{SUPG} = \varphi_\alpha + \frac{k_\infty}{u} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \quad \cdots (3.8)$$

となり(図3.2参照)、このとき、移流項は節点  $\alpha$  より  $k_\infty / u = h/2$  だけ風上側で評価される。従って、(3.7)式は風上差分に相当する。

次に、(3.7)式の精度を向上させるため、人工拡散係数  $k_\infty$  を最適化する。(3.7)式と等価である(3.6)式において、 $k_\infty$  を未知の人工拡散係数  $k_s$  に置き換え、積分を実行すれば、

$$u \frac{\Psi_{\alpha+1} - \Psi_{\alpha-1}}{2h} = (k + k_s) \frac{\Psi_{\alpha+1} - 2\Psi_\alpha + \Psi_{\alpha-1}}{h^2} \quad \cdots (3.9)$$

が得られる。(3.9)式が各節点で(3.1)式を満足するように  $k_s$  を設定する。

$\psi$  の Taylor 展開から次式が得られる。

$$\Psi_{\alpha+1} = \Psi_\alpha + h\psi'_\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \psi_\alpha^{(n)} \quad \cdots (3.10)$$

$$\Psi_{\alpha-1} = \Psi_\alpha - h\psi'_\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-h)^n}{n!} \psi_\alpha^{(n)} \quad \cdots (3.11)$$

(3.1)式から得られる2次以上の微係数の関係式

$$\psi''_\alpha = \frac{k}{u} \psi'''_\alpha = \dots = \left(\frac{k}{u}\right)^{n-2} \psi_\alpha^{(n)} \quad \cdots (3.12)$$

を用いて(3.10)式と(3.11)式の高次の微係数を2次の微係数に変換すれば、

$$\Psi_{\alpha+1} = \Psi_\alpha + h\psi'_\alpha + \left(\frac{k}{u}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \psi''_\alpha \quad \cdots (3.13)$$

$$\Psi_{\alpha-1} = \Psi_\alpha - h\psi'_\alpha + \left(\frac{k}{u}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\omega)^n}{n!} \psi''_\alpha \quad \cdots (3.14)$$

$$\omega = \frac{uh}{k} \quad \cdots (3.15)$$

となる。ここで、 $\omega$  はセルレイノルズ数と呼ばれる無次元数である。(3.13)式と(3.14)式の和、差をとれば、

$$\Psi_{\alpha+1} + \Psi_{\alpha-1} = 2\Psi_\alpha + 2\left(\frac{k}{u}\right)^2 (\cosh \omega - 1) \psi''_\alpha \quad \cdots (3.16)$$

$$\Psi_{\alpha+1} - \Psi_{\alpha-1} = 2h\psi'_\alpha + 2\left(\frac{k}{u}\right)^2 (\sinh \omega - \omega) \psi''_\alpha \quad \cdots (3.17)$$

となる。(3.16)式と(3.17)式を(3.9)式に代入すれば、次式が得られる。

$$u\psi'_a - k\psi''_a = \left[ \frac{2}{\omega^2} (k + k_s)(\cosh \omega - 1) - \frac{k}{\omega} \sinh \omega \right] \psi''_a \quad \cdots (3.18)$$

(3.18)式は、(3.1)式との比較から、右辺が零にならなければならない。このとき、 $k_s$  は次式で求められる。

$$k_s = k_\infty F(\omega) \quad \cdots (3.19)$$

$$F(\omega) = \coth \frac{\omega}{2} - \frac{2}{\omega} \quad \cdots (3.20)$$

従って、(3.7)式の  $k_\infty$  を  $k_s$  に置き換えるれば、各節点で厳密な解を得ることができる。このとき、(3.9)式は、

$$[1 - F(\omega)] u \frac{\Psi_{a+1} - \Psi_{a-1}}{2h} + F(\omega) u \frac{\Psi_a - \Psi_{a-1}}{h} = k \frac{\Psi_{a+1} - 2\Psi_a + \Psi_{a-1}}{h^2} \quad \cdots (3.21)$$

となり、有限差分法における部分風上差分に等しい。ここで、 $F(\omega)$  は Langevin 関数と呼ばれる風上化最適化関数であり、 $\omega = 0$  のとき  $F(\omega) = 0$  、 $k_s = 0$  であり、 $\omega \sim \infty$  のとき  $F(\omega) \sim 1$  、 $k_s \sim k_\infty$  である。従って、(3.21)式は低レイノルズ数領域では中心差分に、高レイノルズ数領域では 1 次風上差分に漸近する。

なお、(3.20)式は、次の近似式を用いて計算する。

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \frac{\omega}{6} \left(1 - \frac{\omega}{18}\right) & , 0 \leq \omega \leq 6 \\ \tilde{F}(\omega) &= 1 - \frac{2}{\omega} & , 6 \leq \omega \end{aligned} \quad \cdots (3.22)$$

### 3.2 Balancing Tensor Diffusivity 法

本節では、BTM 法による有限要素方程式を導出する。

3.1 節と同様、以下の 1 次元の非定常移流拡散方程式について考える。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \cdots (3.23)$$

ここで、 $\psi$  は任意の物理量であり、流速  $u$  および拡散係数  $k$  はともに正とする。

$\psi$  の Taylor 展開から次式が得られる。

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|' \Delta t + \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right|' \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \quad \cdots (3.24)$$

(3.24)式において、2.2 節の時間積分法で用いた Euler 差分公式では、2 次以上の微分項は省略される。しかし、BTM 法では、時間積分法の精度を向上させるため、2 次の微分項まで考慮する。

(3.23)式から得られる微分演算子の関係式

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \equiv L \quad \cdots (3.25)$$

を用いて(3.24)式の時間微分を空間微分に変換すれば、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial(L\psi)}{\partial t} = L^2\psi + \frac{\partial L}{\partial t}\psi \quad \cdots (3.26)$$

となる。(3.26)式を(3.24)式に代入すれば、次式が得られる。

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \Delta t (\tilde{L}\psi)^n \quad \cdots (3.27)$$

$$\tilde{L} = L + \frac{\Delta t}{2} \left( L^2 + \frac{\partial L}{\partial t} \right) \quad \cdots (3.28)$$

ここで、移流項が拡散項に比べ卓越していて、また、演算子の時間依存性が無視できると仮定すれば、

$$L^2 = u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2uk \frac{\partial^3}{\partial x^3} + k^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \sim u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} \sim 0 \quad \cdots (3.29)$$

と近似できる。(3.28)式に(3.29)式を代入すれば、次式が得られる。

$$\tilde{L} = -u \frac{\partial}{\partial x} + (k + k_B) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \cdots (3.30)$$

$$k_B = \frac{\Delta t}{2} u^2 \quad \cdots (3.31)$$

ここで、 $k_B$  は BTD と呼ばれる人工拡散係数である。

(3.27)式に(3.30)式を代入して、Bubnov-Galerkin 法により離散化すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int \Phi_\alpha \Phi_\beta dx \cdot \psi_\beta^{n+1} &= \int \Phi_\alpha \Phi_\beta dx \cdot \psi_\beta^n \\ &\quad - \Delta t \int \Phi_\alpha u \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta^n - \Delta t \int (k + k_B) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta^n \end{aligned} \quad \cdots (3.32)$$

ここで、拡散項に Green-Gauss の定理（部分積分法）を用いている。（ここでも簡略化のために境界積分項は無視している。）(3.32)式は、次式と等価である。

$$\begin{aligned} \int \Phi_\alpha \Phi_\beta dx \cdot \psi_\beta^{n+1} &= \int \Phi_\alpha \Phi_\beta dx \cdot \psi_\beta^n \\ &\quad - \Delta t \int \left( \Phi_\alpha + \frac{k_B}{u} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \right) u \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta^n - \Delta t \int k \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta^n \end{aligned} \quad \cdots (3.33)$$

(3.33)式では、移流項の重み関数が、

$$W_\alpha^{BTD} = \Phi_\alpha + \frac{k_B}{u} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \quad \cdots (3.34)$$

となり（図3.3参照）、このとき、移流項は節点 $\alpha$ より $k_B/u = u\Delta t/2$ だけ風上側で評価される。従って、(3.33)式では、移流項を時刻 $n+1/2$ で評価することになる。

### 3.3 多次元問題への拡張

本節では、SUPG法およびBTD法を多次元問題へと拡張する。

3.1節、3.2節の結果から、1次元の移流拡散方程式

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \cdots (3.35)$$

を SUPG 法または BTD 法により離散化すると、次式が得られる。

$$\int (\Phi_\alpha + \frac{k'}{u} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x}) u \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta = - \int k \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x} dx \cdot \psi_\beta \quad \cdots (3.36)$$

ここで、 $k'$ は人工拡散係数であり、SUPG法では(3.19)式で定義された $k_s$ を、BTD法では(3.31)式で定義された $k_B$ を表す。

次に、2次元の移流拡散方程式について考える（図3.4参照）。

$$(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y}) - k \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \cdots (3.37)$$

ここで、流速 $u$ 、 $v$ および拡散係数 $k$ はいずれも正とする。

有限差分法では、(3.37)式を $x$ 方向の移流拡散方程式と $y$ 方向の移流拡散方程式の和

$$(u \frac{\partial \psi}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}) + (v \frac{\partial \psi}{\partial y} - k \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}) = 0 \quad \cdots (3.38)$$

とみなして、それぞれの方向について風上化を適用する。しかし、この方法では、流れに交差する方向に余分な数値拡散が付加されてしまうため、精度の良い解は得られない。

一方、有限要素法では、(3.37)式を流れ方向( $X$ 方向)の移流拡散方程式と流れに交差する方向( $Y$ 方向)の拡散方程式の和

$$(U \frac{\partial \psi}{\partial X} - k \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}) + (-k \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}) = 0 \quad \cdots (3.39)$$

$$U = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \cdots (3.40)$$

とみなして、流れ方向についてのみ風上化を適用する。そのため、余分な数値拡散は付加されない。ここで、座標変換の公式

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots (3.41)$$

$$\cos\theta = \frac{u}{U}, \quad \sin\theta = \frac{v}{U} \quad \cdots (3.42)$$

を用いている。

(3.39)式の  $X$  方向について(3.36)式を適用すれば、次式を得る。

$$\int (\varphi_\alpha + \frac{k'}{U} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial X}) U \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial X} dS \cdot \psi_\beta = - \int k \left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial X} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial X} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial Y} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial Y} \right) dS \cdot \psi_\beta \quad \cdots (3.43)$$

(3.43)式を  $XY$  座標系から  $xy$  座標系に逆変換すれば、以下のような 2 次元の風上化有限要素方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int [\varphi_\alpha + \frac{k'}{U^2} (u \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y})] (u \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y}) dS \cdot \psi_\beta \\ &= - \int k \left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} \right) dS \cdot \psi_\beta \end{aligned} \quad \cdots (3.44)$$

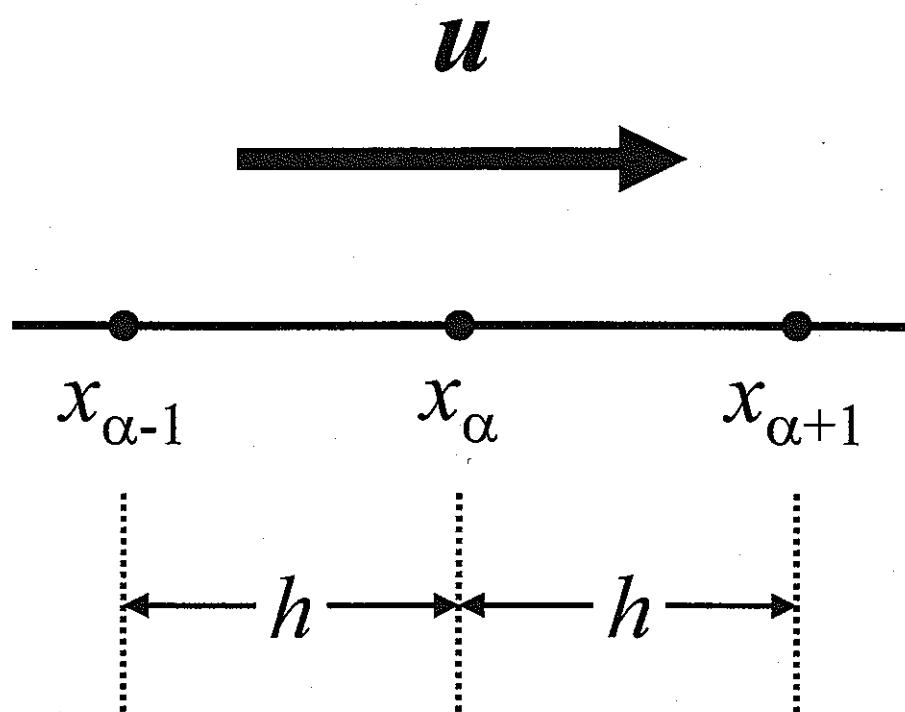


図 3.1 1 次元における移流拡散問題

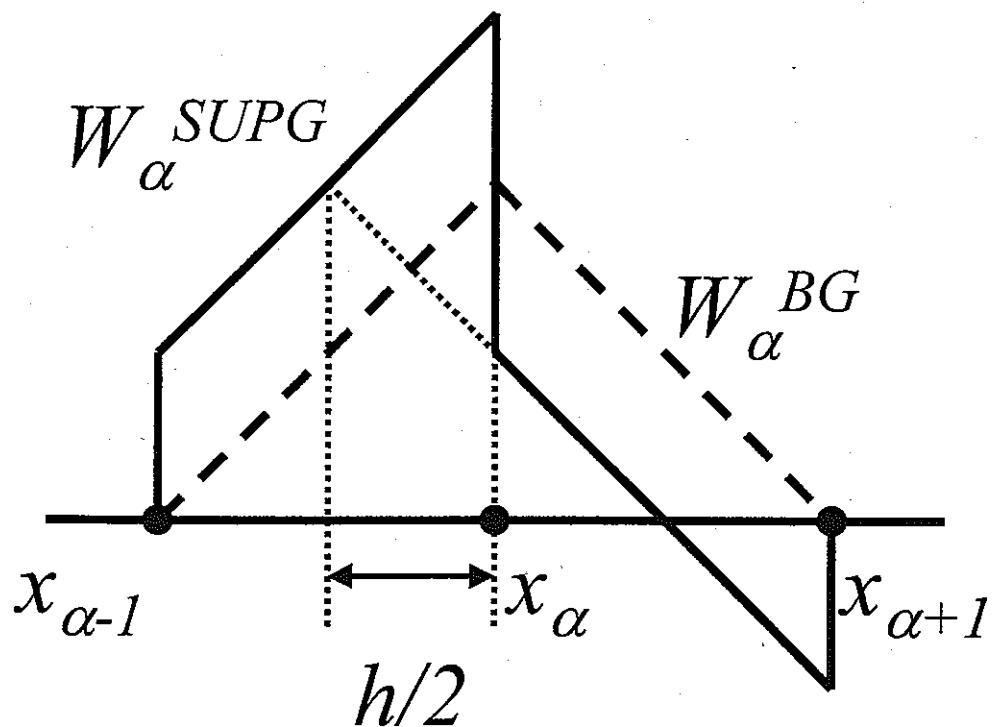


図 3.2 Bubnov-Galerkin 法の重み関数  $W_\alpha^{BG}$  と SUPG 法の重み関数  $W_\alpha^{SUPG}$

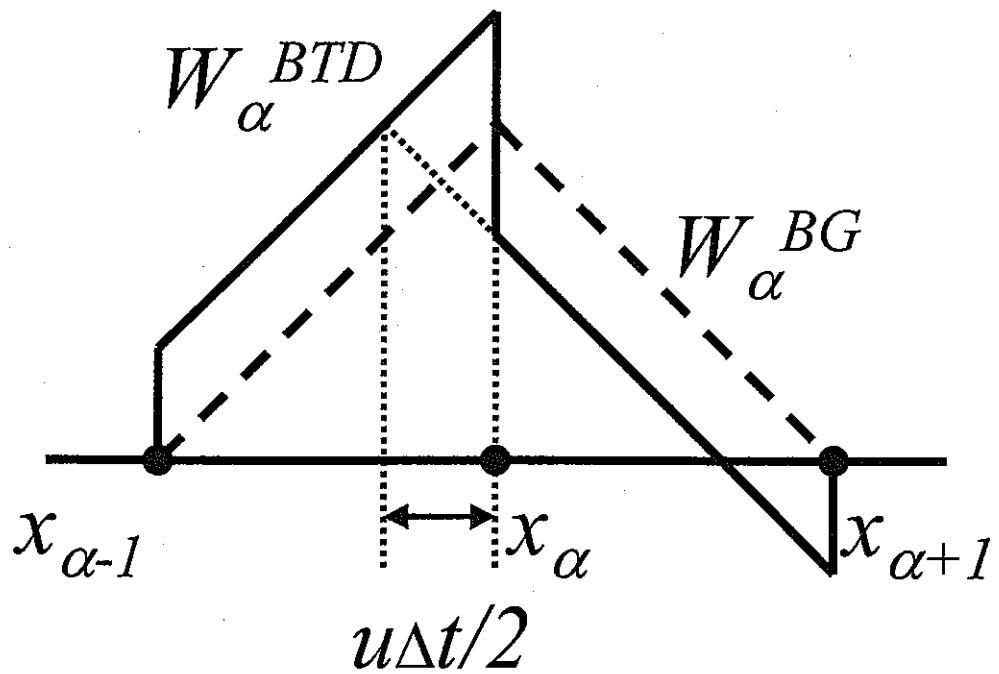


図 3.3 Bubnov-Galerkin 法の重み関数  $W_\alpha^{BG}$  と BTD 法の重み関数  $W_\alpha^{BTD}$

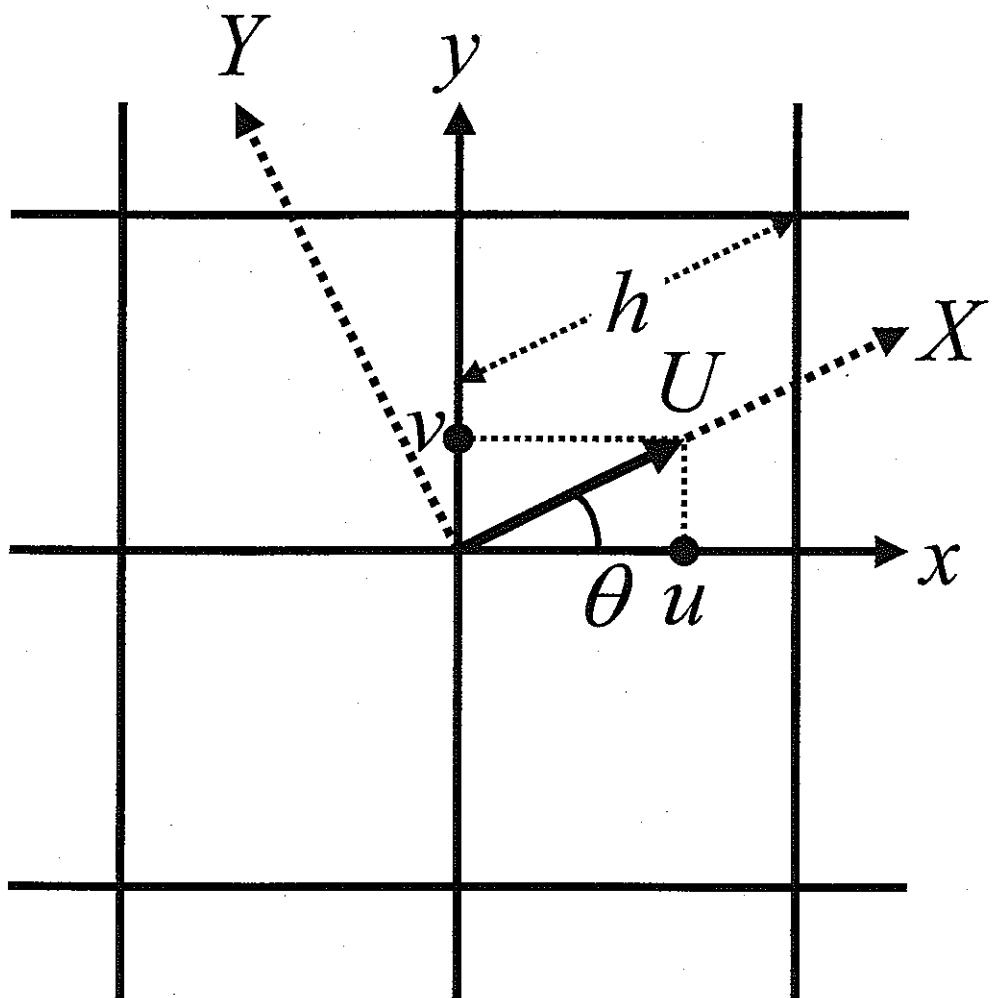


図 3.4 2 次元における移流拡散問題

## 第4章 亂流モデル

本章では、SPIRAL-II コードに採用した乱流モデル ( $k - \varepsilon$  2 方程式モデル<sup>[7]</sup>) について述べる。

### 4.1 基礎方程式と補助方程式

#### 4.1.1 基礎方程式

乱流状態にある速度と圧力は、平均成分と変動成分の和として、

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad \cdots (4.1)$$

$$P = \bar{P} + P' \quad \cdots (4.2)$$

と表すことができる。

(4.1)式、(4.2)式を 2.1 節で得られた基礎方程式に代入してレイノルズ平均をとれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \cdots (4.3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - R_{ij} \right) + \bar{f}_i \quad \cdots (4.4)$$

ここで、 $R_{ij}$  はレイノルズ応力と呼ばれる速度の 2 次相関項であり、次式で表される。

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \quad \cdots (4.5)$$

RANS (Reynolds Averaged Numerical Simulation) による乱流解析では、(4.3)式と(4.4)式を基礎方程式とする。ただし、(4.4)式に現れるレイノルズ応力は未知であるため、方程式系は閉じていない。方程式系を閉じるためにには、以下のモデル化を用いてレイノルズ応力を求める必要がある。

#### 4.1.2 レイノルズ応力

(4.5)式のレイノルズ応力  $R_{ij}$  に関して、以下の渦粘性モデルを適用する。

##### (1) Boussinesq の渦粘性モデル

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_i \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \cdots (4.6)$$

(2) Speziale の渦粘性モデル<sup>[9]</sup>

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - v_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{k}{\varepsilon} v_t \sum_m c_m (\bar{S}_{mij} - \frac{1}{3} \bar{S}_{mkk} \delta_{ij}) \quad \cdots (4.7)$$

$$\bar{S}_{1ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad \cdots (4.8)$$

$$\bar{S}_{2ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \cdots (4.9)$$

$$\bar{S}_{3ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad \cdots (4.10)$$

$$c_1 = 0.454, \quad c_2 = 0.302, \quad c_3 = -0.151$$

Boussinesq の渦粘性モデルでは、レイノルズ応力を平均歪速度の 1 次項のみで近似しているため、乱流の等方性しか再現することができない。一方、Speziale の渦粘性モデルでは、レイノルズ応力を平均歪速度の 1 次項と 2 次項で近似しているため、乱流の非等方性まで再現することができる。

なお、レイノルズ応力の等方成分である  $(2/3)k$  は、(4.4)式において圧力に含めて考える。従って、(4.4)式は以下のように修正される。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{P}_+}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) + \bar{f}_i \quad \cdots (4.11)$$

$$\bar{P}_+ = \bar{P} + \frac{2}{3} k \quad \cdots (4.12)$$

4.1.3  $k-\varepsilon$  2 方程式乱流モデル

(4.6)式または(4.7)式の渦動粘性係数  $v_t$  に関して、以下の  $k-\varepsilon$  2 方程式乱流モデルを適用する。

$k-\varepsilon$  モデルでは、乱流エネルギー  $k$  と散逸率  $\varepsilon$  を用いて渦動粘性係数  $v_t$  を次式で定義する。

$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \cdots (4.13)$$

乱流エネルギーおよび散逸率は、それぞれの輸送方程式から求められる。  
まず、乱流エネルギーの輸送方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad \cdots (4.14)$$

(4.14)式において、左辺は  $k$  についての物質微分であり、第一項が  $k$  の時間的な変化を、第二項が  $k$  の流れによる輸送を表す。また、右辺に関しては、第一項が  $k$  の拡散を、第二項が  $k$  の生成を、第三項が  $k$  の散逸を表す。

次に、散逸率の輸送方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad \cdots (4.15)$$

(4.15)式において、左辺は  $\varepsilon$  についての物質微分であり、第一項が  $\varepsilon$  の時間的な変化を、第二項が  $\varepsilon$  の流れによる輸送を表す。また、右辺に関しては、第一項が  $\varepsilon$  の拡散を、第二項が  $\varepsilon$  の生成を、第三項が  $\varepsilon$  の散逸を表す。

各モデル定数には標準的な以下の値を採用する。

$$c_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92$$

## 4.2 時間積分法

本節では、有限要素方程式を導出するため、支配方程式を時間に関して離散化する。連続の式および Navier-Stokes 方程式に関しては、2.2 節と同様に離散化する。なお、以下では、上添字のない従属変数はすべて現時刻  $n$  における値を表す。

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i}{\Delta t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \bar{u}'_i \bar{u}'_j + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) + \bar{f}_i \quad \cdots (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_+^{n+1}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_j^{n+1}}{\partial x_i} \quad \cdots (4.17)$$

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} = - \frac{\partial \bar{P}_+^{n+1}}{\partial x_i} \quad \cdots (4.18)$$

$k$  方程式および  $\varepsilon$  方程式に関しては、すべて陽的に離散化する。

$$\frac{k^{n+1} - k}{\Delta t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad \cdots (4.19)$$

$$\frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon}{\Delta t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad \cdots (4.20)$$

### 4.3 重み付き残差表示

本節では、時間に関して離散化された支配方程式の重み付き残差表示を求める。  
 $u_i^*$ 、 $P_+^*$ 、 $k^*$  および  $\varepsilon^*$  をそれぞれ  $\bar{u}_i$ 、 $\bar{P}_+$ 、 $k$  および  $\varepsilon$  の重み関数とする。  
(4.16)式に  $u_i^*$  を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int u_i^* \tilde{u}_i^{n+1} dV &= \int u_i^* \bar{u}_i dV - \Delta t \int u_i^* \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dV \\ &\quad - \Delta t \int \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \bar{u}'_i \bar{u}'_j + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) dV \\ &\quad + \Delta t \int u_i^* \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \bar{u}'_i \bar{u}'_j + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) n_j dS \\ &\quad + \Delta t \int u_i^* f_i dV \end{aligned} \quad \cdots (4.21)$$

(4.17)式に  $P_+^*$  を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\int \frac{\partial P_+^*}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{P}_+^{n+1}}{\partial x_j} dV = -\frac{1}{\Delta t} \int P_+^* \frac{\partial \tilde{u}_j^{n+1}}{\partial x_j} dV + \int P_+^* \frac{\partial \bar{P}_+^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (4.22)$$

(4.18)式に  $u_i^*$  を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\int u_i^* \tilde{u}_i^{n+1} dV = \int u_i^* \bar{u}_i dV - \Delta t \int u_i^* \frac{\partial \bar{P}_k^{n+1}}{\partial x_i} dV \quad \cdots (4.23)$$

(4.19)式に  $k^*$  を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int k^* k^{n+1} dV &= \int k^* k dV - \Delta t \int k^* \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} dV \\ &\quad - \Delta t \int \frac{\partial k^*}{\partial x_j} \left[ (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] dV + \Delta t \int k^* \left[ (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] n_j dS \\ &\quad - \Delta t \int k^* \bar{u}'_i \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dV - \Delta t \int k^* \varepsilon dV \end{aligned} \quad \cdots (4.24)$$

(4.20)式に  $\varepsilon^*$  を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int \varepsilon^* \varepsilon^{n+1} dV &= \int \varepsilon^* \varepsilon dV - \Delta t \int \varepsilon^* \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} dV \\ &\quad - \Delta t \int \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j} [(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}] dV + \Delta t \int \varepsilon^* [(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}] n_j dS \\ &\quad - c_{\varepsilon 1} \Delta t \int \varepsilon^* \frac{\varepsilon}{k} \bar{u}_i' \bar{u}_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dV - c_{\varepsilon 2} \Delta t \int \varepsilon^* \frac{\varepsilon^2}{k} dV \end{aligned} \quad \cdots (4.25)$$

ここで、(4.21)式、(4.22)式、(4.24)式および(4.25)式では Green-Gauss の定理を用いている。

#### 4.4 有限要素方程式

本節では、形状関数を定義して有限要素方程式を導出する。

Galerkin 有限要素法では、重み関数と形状関数を等しくとる。流速、圧力、近似流速、乱流エネルギーおよび散逸率については、形状関数を用いて次式で内挿する。

$$\bar{u}_i = \varphi_a \bar{u}_{ia} \quad \cdots (4.26)$$

$$\bar{P}_+ = \varphi_a \bar{P}_{+a} \quad \cdots (4.27)$$

$$\tilde{u}_i = \varphi_a \tilde{u}_{ia} \quad \cdots (4.28)$$

$$k = \varphi_a k_a \quad \cdots (4.29)$$

$$\varepsilon = \varphi_a \varepsilon_a \quad \cdots (4.30)$$

$$u_i^* = \varphi_a u_{ia}^* \quad \cdots (4.31)$$

$$P_+^* = \varphi_a P_{+a}^* \quad \cdots (4.32)$$

$$k^* = \varphi_a k_a^* \quad \cdots (4.33)$$

$$\varepsilon^* = \varphi_a \varepsilon_a^* \quad \cdots (4.34)$$

ここで、 $\alpha$  は節点番号であり、(4.26)式から(4.34)式は節点の数  $N$  だけ総和をとる。

(4.26)式から(4.34)式を用いて流速、圧力、近似流速、乱流エネルギーおよび散逸率についての有限要素方程式を導出する。

(4.16)式に(4.26)式、(4.28)式および(4.31)式を代入すれば、近似流速についての有限要素方程式が得られる。

$$[M_{\alpha\beta}](\tilde{u}_{\beta}^{n+1}) = [M_{\alpha\beta}](\bar{u}_{\beta}) - \Delta t[K_{j\alpha\beta\gamma}](\bar{u}_{\beta})(\bar{u}_{\gamma}) \\ - v\Delta t[S_{\alpha\beta}](\bar{u}_{\beta}) + \Delta t(S_{ia}) + v\Delta t(\Omega_{ia}) - \Delta t(\Omega_{ia}) + \Delta t(F_a)\bar{f}_i \quad \cdots (4.35)$$

$$[M_{\alpha\beta}] = \int \phi_{\alpha} \phi_{\beta} dV \quad \cdots (4.36)$$

$$[K_{j\alpha\beta\gamma}] = \int \phi_{\alpha} \phi_{\beta} \frac{\partial \phi_{\gamma}}{\partial x_j} dV \quad \cdots (4.37)$$

$$[S_{\alpha\beta}] = \int \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial x_j} dV \quad \cdots (4.38)$$

$$(S_{ia}) = \int \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_j} (\bar{u}'_i \bar{u}'_j - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) dV \quad \cdots (4.39)$$

$$(\Omega_{ia}) = \int \phi_{\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (4.40)$$

$$(\Omega_{ia}) = \int \phi_{\alpha} (\bar{u}'_i \bar{u}'_j - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) dS \quad \cdots (4.41)$$

$$(F_a) = \int \phi_{\alpha} dV \quad \cdots (4.42)$$

(4.17)式に(4.27)式、(4.28)式および(4.32)式を代入すれば、圧力についての有限要素方程式が得られる。

$$[S_{\alpha\beta}](\bar{P}_{+\beta}^{n+1}) = -\frac{1}{\Delta t}[H_{j\alpha\beta}](\tilde{u}_{\beta}^{n+1}) + (\Sigma_{\alpha}) \quad \cdots (4.43)$$

$$[H_{j\alpha\beta}] = \int \phi_{\alpha} \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial x_j} dV \quad \cdots (4.44)$$

$$(\Sigma_{\alpha}) = \int \phi_{\alpha} \frac{\partial \bar{P}_{+\beta}^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (4.45)$$

(4.18)式に(4.26)式、(4.27)式、(4.28)式および(4.31)式を代入すれば、流速についての有限要素方程式が得られる。

$$[M_{\alpha\beta}](\bar{u}_{\beta}^{n+1}) = [M_{\alpha\beta}](\tilde{u}_{\beta}^{n+1}) - \Delta t[H_{j\alpha\beta}](\bar{P}_{+\beta}^{n+1}) \quad \cdots (4.46)$$

(4.19)式に(4.26)式、(4.29)式、(4.30)式および(4.33)式を代入すれば、乱流エネルギーについての有限要素方程式が得られる。

$$[M_{\alpha\beta}](k_{\beta}^{n+1}) = [M_{\alpha\beta}](k_{\beta}) - \Delta t[K_{j\alpha\beta\gamma}](\bar{u}_{j\beta})(k_{\gamma}) \\ - \Delta t(D_{ka}) + \Delta t(\Theta_{ka}) - \Delta t(Q_{ka}) - \Delta t(R_{ka}) \quad \cdots (4.47)$$

$$(D_{ka}) = \int(v + \frac{v_t}{\sigma_k}) \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} dV \quad \cdots (4.48)$$

$$(\Theta_{ka}) = \int(v + \frac{v_t}{\sigma_k}) \varphi_a \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (4.49)$$

$$(Q_{ka}) = \int \varphi_a \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dV \quad \cdots (4.50)$$

$$(R_{ka}) = \int \varphi_a \varepsilon dV \quad \cdots (4.51)$$

(4.19)式に(4.26)式、(4.29)式、(4.30)式および(4.34)式を代入すれば、散逸率についての有限要素方程式が得られる。

$$[M_{\alpha\beta}](\varepsilon_{\beta}^{n+1}) = [M_{\alpha\beta}](\varepsilon_{\beta}) - \Delta t[K_{j\alpha\beta\gamma}](\bar{u}_{j\beta})(\varepsilon_{\gamma}) \\ - \Delta t(D_{ea}) + \Delta t(\Theta_{ea}) - c_{e1} \Delta t(Q_{ea}) - c_{e2} \Delta t(R_{ea}) \quad \cdots (4.52)$$

$$(D_{ea}) = \int(v + \frac{v_t}{\sigma_e}) \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} dV \quad \cdots (4.53)$$

$$(\Theta_{ea}) = \int(v + \frac{v_t}{\sigma_e}) \varphi_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j dS \quad \cdots (4.54)$$

$$(Q_{ea}) = \int \varphi_a \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dV \quad \cdots (4.55)$$

$$(R_{ea}) = \int \varphi_a \frac{\varepsilon^2}{k} dV \quad \cdots (4.56)$$

## 4.5 壁近傍領域の取り扱い

本説では、壁関数を用いた壁近傍境界での計算処理方法について述べる。

### 4.5.1 壁関数

壁隣接要素においては、流速の分布が壁関数に従うと仮定することにより摩擦速度  $u_t$  を求め、これを用いて各種値の計算を行う。ここで適用される壁関数は、以下の Reichardt の式である。

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \exp\left(-0.33 y^+\right) \right] \quad \cdots (4.57)$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad \cdots (4.58)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{v} \quad \cdots (4.59)$$

ここで、 $\kappa = 0.4$  であり、 $y$  は壁からの垂直な距離、 $u$  は壁に平行な流速成分である。

図 4.1 に(4.57)式の関数曲線と普遍速度分布則との比較を示す。Reichardt の式は、層流底層 ( $y^+ < 5$ ) と乱流領域 ( $30 < y^+ < 200$ ) のいずれに対しても有効である。

#### 4.5.2 レイノルズ応力

壁隣接要素において、レイノルズ応力を次式で計算する。なお、以下では、壁に対して垂直な方向を  $\xi$  軸、壁に対して平行な流れの方向を  $\zeta$  軸、両者に垂直な方向を  $\eta$  軸とする。

##### (1) Boussinesq の渦粘性モデル

$$\overline{u'_\xi u'_\xi} = \overline{u'_\eta u'_\eta} = \overline{u'_\zeta u'_\zeta} = \frac{2}{3} k \quad \cdots (4.60)$$

$$\overline{u'_\xi u'_\zeta} = \overline{u'_\zeta u'_\xi} = -u_\tau^2 \quad \cdots (4.61)$$

$$\overline{u'_\xi u'_\eta} = \overline{u'_\eta u'_\xi} = \overline{u'_\eta u'_\zeta} = \overline{u'_\zeta u'_\eta} = 0 \quad \cdots (4.62)$$

##### (2) Speziale の渦粘性モデル

$$\overline{u'_\xi u'_\xi} = \frac{2}{3} k + c_{\xi\xi} u_\tau^2 \quad \cdots (4.63)$$

$$\overline{u'_\eta u'_\eta} = \frac{2}{3} k + c_{\eta\eta} u_\tau^2 \quad \cdots (4.64)$$

$$\overline{u'_\zeta u'_\zeta} = \frac{2}{3} k + c_{\zeta\zeta} u_\tau^2 \quad \cdots (4.65)$$

$$\overline{u'_\xi u'_\zeta} = \overline{u'_\zeta u'_\xi} = -u_\tau^2 \quad \cdots (4.66)$$

$$\overline{u'_\xi u'_\eta} = \overline{u'_\eta u'_\xi} = \overline{u'_\eta u'_\zeta} = \overline{u'_\zeta u'_\eta} = 0 \quad \cdots (4.67)$$

ここで、 $c_{\xi\xi} = 1.18$ ,  $c_{\eta\eta} = -0.34$ ,  $c_{\zeta\zeta} = -0.84$

#### 4.5.3 乱流エネルギーと散逸率

壁隣接要素の流体側節点において、 $k$ 、 $\varepsilon$  の値を次式で設定する。

$$k_a = c_\mu^{-1/2} u_\tau^2 \quad \cdots (4.68)$$

$$\varepsilon_a = (\kappa \zeta)^{-1} u_\tau^3 \quad \cdots (4.69)$$

なお、固体側節点の  $k$ 、 $\varepsilon$  の値は、壁の法線方向に存在する流体側節点と同じ値を設定する。複数の流体側節点が存在する場合には、その平均値をとる。

#### 4.6 乱流エネルギーと散逸率の補正

本節では、 $k$ 、 $\varepsilon$  の補正について述べる。

$k$  方程式および  $\varepsilon$  方程式は数値的に非常に不安定であり、局所的に  $k$ 、 $\varepsilon$  の値が非物理的な負値となることがある。そのため、以下の基準で  $k$ 、 $\varepsilon$  の値を補正する。

まず、 $k$  値に関して、下限値  $k_{\min}$  より低い場合には  $k = k_{\min}$  に再設定する。下限値  $k_{\min}$  は次式で設定する。

$$k \text{ の下限値} = k \text{ の最大値} \times 10^{-7} \quad \cdots (4.70)$$

次に、 $\varepsilon$  値に関して、下限値  $\varepsilon_{\min}$  より低い場合には  $k = k_{\min}$ 、 $\varepsilon = c_\mu k^2 / 20 v$  に再設定する。下限値  $\varepsilon_{\min}$  は次式で設定する。

$$\varepsilon \text{ の下限値} = \varepsilon \text{ の最大値} \times 10^{-7} \quad \cdots (4.71)$$

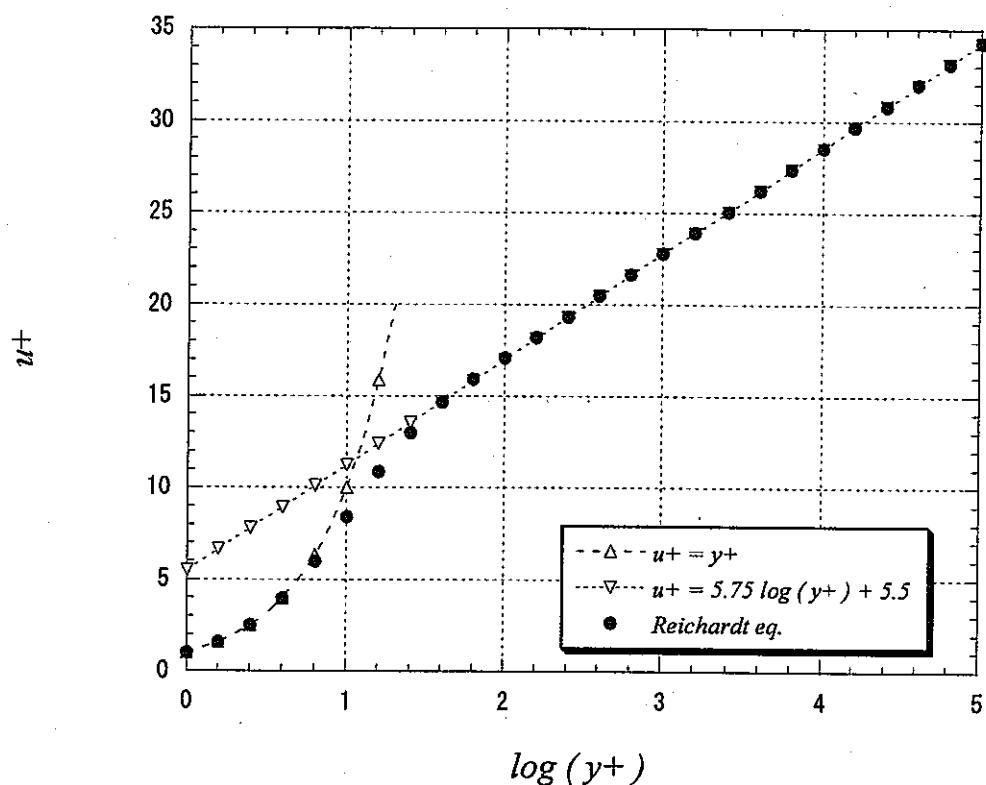


図 4.1 層流底層、乱流領域の速度分布則と Reichardt の式

## 第5章 数値計算法

本章では、SPIRAL-II コードにおける有限要素方程式の数値計算法について述べる。

### 5.1 有限要素と形状関数

SPIRAL-II コードで用いることの出来る有限要素と形状関数の定義は以下のとおりである。

#### (1) 1次元要素

##### ① 2節点線要素

2節点線要素の形状関数は双一次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/2 \cdot (1 - \xi) \\ \varphi_2 &= 1/2 \cdot (1 + \xi)\end{aligned} \quad \cdots (5.1)$$

ここで、 $\xi$  は局所座標であり、節点番号は図 5.1 のように与える。

2節点線要素の領域積分は、(5.1)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が節点であるため、定数として与える。

##### ② 3節点線要素

3節点線要素の形状関数は双二次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/2 \cdot (\xi^2 - \xi) \\ \varphi_2 &= 1 - \xi^2 \\ \varphi_3 &= 1/2 \cdot (\xi^2 + \xi)\end{aligned} \quad \cdots (5.2)$$

ここで、 $\xi$  は局所座標であり、節点番号は図 5.2 のように与える。

3節点線要素の領域積分は、(5.2)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が節点であるため、定数として与える。

#### (2) 2次元要素

##### ① 4節点四角形要素

4節点四角形要素の形状関数は双一次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/4 \cdot (1 - \xi)(1 - \eta) \\ \varphi_2 &= 1/4 \cdot (1 + \xi)(1 - \eta) \\ \varphi_3 &= 1/4 \cdot (1 + \xi)(1 + \eta) \\ \varphi_4 &= 1/4 \cdot (1 - \xi)(1 + \eta)\end{aligned} \quad \cdots (5.3)$$

ここで、 $\xi$ 、 $\eta$  は局所座標であり、節点番号は図 5.3 のように与える。

4 節点四角形要素の領域積分は、(5.3)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が 2 節点線要素となるため、(5.1)式を用いて計算する。

## ② 3 節点三角形要素

3 節点三角形要素の形状関数は双一次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= L_1 \\ \varphi_2 &= L_2 \\ \varphi_3 &= L_3\end{aligned}\cdots \quad (5.4)$$

ここで、 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  は三角形の面積座標であり、節点番号は図 5.4 のように与える。

3 節点三角形要素の領域積分は、(5.4)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が 2 節点線要素となるため、(5.1)式を用いて計算する。

## ③ 9 節点四角形要素

9 節点四角形要素の形状関数は双二次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/4 \cdot (\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \\ \varphi_2 &= 1/4 \cdot (\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \\ \varphi_3 &= 1/4 \cdot (\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \\ \varphi_4 &= 1/4 \cdot (\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \\ \varphi_5 &= 1/2 \cdot (1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\ \varphi_6 &= 1/2 \cdot (\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\ \varphi_7 &= 1/2 \cdot (1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\ \varphi_8 &= 1/2 \cdot (\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \\ \varphi_9 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)\end{aligned}\cdots \quad (5.5)$$

ここで、 $\xi$ 、 $\eta$  は局所座標であり、節点番号は図 5.5 のように与える。

9 節点四角形要素の領域積分は、(5.5)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が 3 節点線要素となるため、(5.2)式を用いて計算する。

## ④ 6 節点三角形要素

6 節点三角形要素の形状関数は双二次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= L_1(2L_1 - 1) \\ \varphi_2 &= L_2(2L_2 - 1) \\ \varphi_3 &= L_3(2L_3 - 1) \\ \varphi_4 &= 4L_2L_3 \\ \varphi_5 &= 4L_3L_1 \\ \varphi_6 &= 4L_1L_2\end{aligned}\cdots \quad (5.6)$$

ここで、 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  は三角形の面積座標であり、節点番号は図 5.6 のように与える。

6 節点三角形要素の領域積分は、(5.6)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が 3 節点線要素となるため、(5.2)式を用いて計算する。

### (3) 3 次元要素

#### ① 8 節点六面体要素

8 節点六面体要素の形状関数は双一次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/8 \cdot (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ \varphi_2 &= 1/8 \cdot (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ \varphi_3 &= 1/8 \cdot (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ \varphi_4 &= 1/8 \cdot (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ \varphi_5 &= 1/8 \cdot (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ \varphi_6 &= 1/8 \cdot (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ \varphi_7 &= 1/8 \cdot (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ \varphi_8 &= 1/8 \cdot (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)\end{aligned} \quad \cdots (5.7)$$

ここで、 $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$  は局所座標であり、節点番号は図 5.7 のように与える。

8 節点六面体要素の領域積分は、(5.7)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が 4 節点四角形要素となるため、(5.3)式を用いて計算する。

#### ② 6 節点五面体要素

6 節点五面体要素の形状関数は双一次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/2 \cdot L_1(1-\zeta) \\ \varphi_2 &= 1/2 \cdot L_2(1-\zeta) \\ \varphi_3 &= 1/2 \cdot L_3(1-\zeta) \\ \varphi_4 &= 1/2 \cdot L_1(1+\zeta) \\ \varphi_5 &= 1/2 \cdot L_2(1+\zeta) \\ \varphi_6 &= 1/2 \cdot L_3(1+\zeta)\end{aligned} \quad \cdots (5.8)$$

ここで、 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  は三角形の面積座標、 $\zeta$  は局所座標であり、節点番号は図 5.8 のように与える。

6 節点五面体要素の領域積分は、(5.8)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が 4 節点四角形要素または 3 節点三角形要素となるため、(5.3)式または(5.4)式を用いて計算する。

#### ③ 27 節点六面体要素

27 節点六面体要素の形状関数は双二次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 1/8 \cdot (\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_2 &= 1/8 \cdot (\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_3 &= 1/8 \cdot (\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_4 &= 1/8 \cdot (\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_5 &= 1/8 \cdot (\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_6 &= 1/8 \cdot (\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_7 &= 1/8 \cdot (\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_8 &= 1/8 \cdot (\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_9 &= 1/4 \cdot (1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_{10} &= 1/4 \cdot (\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_{11} &= 1/4 \cdot (1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_{12} &= 1/4 \cdot (\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_{13} &= 1/4 \cdot (\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{14} &= 1/4 \cdot (\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{15} &= 1/4 \cdot (\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{16} &= 1/4 \cdot (\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{17} &= 1/4 \cdot (1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_{18} &= 1/4 \cdot (\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_{19} &= 1/4 \cdot (1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_{20} &= 1/4 \cdot (\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_{21} &= 1/2 \cdot (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_{22} &= 1/2 \cdot (1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{23} &= 1/2 \cdot (\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{24} &= 1/2 \cdot (1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{25} &= 1/2 \cdot (\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{26} &= 1/2 \cdot (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_{27} &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

ここで、 $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$  は局所座標であり、節点番号は図 5.9 のように与える。

27 節点六面体要素の領域積分は、(5.9)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が 9 節点四角形要素となるため、(5.5)式を用いて計算する。

#### ④ 18 節点五面体要素

18 節点五面体要素の形状関数は双二次関数であり、次式で表される。

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 1/2 \cdot L_1(2L_1 - 1)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_2 &= 1/2 \cdot L_2(2L_2 - 1)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_3 &= 1/2 \cdot L_3(2L_3 - 1)(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_4 &= 1/2 \cdot L_1(2L_1 - 1)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_5 &= 1/2 \cdot L_2(2L_2 - 1)(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_6 &= 1/2 \cdot L_3(2L_3 - 1)(\zeta^2 + \zeta) \\
\\
\varphi_7 &= L_1(2L_1 - 1)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_8 &= L_2(2L_2 - 1)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_9 &= L_3(2L_3 - 1)(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{10} &= 2L_2L_3(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_{11} &= 2L_3L_1(\zeta^2 - \zeta) \\
\varphi_{12} &= 2L_1L_2(\zeta^2 - \zeta) \\
\\
\varphi_{13} &= 2L_2L_3(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_{14} &= 2L_3L_1(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_{15} &= 2L_1L_2(\zeta^2 + \zeta) \\
\varphi_{16} &= 4L_2L_3(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{17} &= 4L_3L_1(1 - \zeta^2) \\
\varphi_{18} &= 4L_1L_2(1 - \zeta^2)
\end{aligned} \quad \cdots (5.10)$$

ここで、 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  は三角形の面積座標、 $\zeta$  は局所座標であり、節点番号は図 5.10 のように与える。

18 節点五面体要素の領域積分は、(5.10)式を用いて計算する。また、境界積分は、要素境界が 9 節点四角形要素または 6 節点三角形要素となるため、(5.5)式または(5.6)式を用いて計算する。

## 5.2 座標変換

本節では、アイソパラメトリック要素における座標変換の公式を導出する。

アイソパラメトリック要素では、座標関数は形状関数を用いて次式で表現できる。

$$x = \varphi_a x_a \quad \cdots (5.11)$$

$$y = \varphi_a y_a \quad \cdots (5.12)$$

$$z = \varphi_a z_a \quad \cdots (5.13)$$

また、形状関数の局所座標系における空間微分は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad \cdots (5.14)$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad \cdots (5.15)$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad \cdots (5.16)$$

(5.14)式から(5.16)式にマトリックス表示を用いれば、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \cdots (5.17)$$

が得られる。ここで、[ J ] は Jacobian Matrix であり、全体座標系 ( x y z 系 ) における空間微分と局所座標系 ( ξ η ζ 系 ) における空間微分の関係を表す。

(5.11)式から(5.13)式を用いて Jacobian Matrix は次式で計算できる。

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_a}{\partial \xi} x_a & \frac{\partial \varphi_a}{\partial \xi} y_a & \frac{\partial \varphi_a}{\partial \xi} z_a \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \eta} x_a & \frac{\partial \varphi_a}{\partial \eta} y_a & \frac{\partial \varphi_a}{\partial \eta} z_a \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \zeta} x_a & \frac{\partial \varphi_a}{\partial \zeta} y_a & \frac{\partial \varphi_a}{\partial \zeta} z_a \end{bmatrix} \quad \cdots (5.18)$$

(5.17)式の逆変換から、形状関数の全体座標系における空間微分は、次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad \cdots (5.19)$$

Jacobian Matrix の余因子行列を [ H ] として、Jacobian Matrix の逆行列は次式で計

算できる。

$$[\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{J}]} [\mathbf{H}] \quad \cdots (5.20)$$

全体座標系における積分は、Jacobian Matrix を用いて局所座標系の積分に変換することができる。

$$\int dL = \int dx = \int \det[\mathbf{J}] d\xi \quad \cdots (5.21)$$

$$\int dS = \int dxdy = \int \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad \cdots (5.22)$$

$$\int dV = \int dxdydz = \int \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta \quad \cdots (5.23)$$

### 5.3 数値積分法

1 次元における Gauss の積分公式では、 $n$  点の積分点数に対して  $(2n-1)$  次の代数多項式まで厳密な積分値を計算することができる。

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i \cdot f(\xi_i) \quad \cdots (5.23)$$

ここで、 $\xi_i$  は積分点の座標値、 $H_i$  は積分点の重み係数である（表 5.1 参照）。

(5.23)式を 2 次元、3 次元に拡張すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \sum_{i=1}^n H_i \cdot \int_{-1}^1 f(\xi_i, \eta) d\eta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i \cdot H_j \cdot f(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \quad \cdots (5.24)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta &= \sum_{i=1}^n H_i \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_i, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i \cdot H_j \cdot \int_{-1}^1 f(\xi_i, \eta_j, \zeta) d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i \cdot H_j \cdot H_k \cdot f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \end{aligned} \quad \cdots (5.25)$$

従って、有限要素が 1 次元線要素のときには(5.23)式を、2 次元四角形要素のときには(5.24)式を、3 次元六面体要素のときには(5.25)式を用いれば、厳密な積分値を計算することができる。

なお、有限要素が2次元三角形要素のときには(5.26)式を、3次元五面体要素のときには(5.27)式を用いる。

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(L_1, L_2, L_3) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m H_i^\Delta \cdot f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) \quad \cdots (5.26)$$

$$\begin{aligned} \int_1^1 \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(L_1, L_2, L_3, \zeta) d\xi d\eta d\zeta &= \sum_{i=1}^m H_i^\Delta \cdot \int_1^1 f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}, \zeta) d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_i^\Delta \cdot H_j \cdot f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}, \zeta_j) \end{aligned} \quad \cdots (5.27)$$

ここで、 $L_{1i}$ 、 $L_{2i}$ 、 $L_{3i}$  は積分点の面積座標値、 $H_i^\Delta$  は積分点の重み係数である（表 5.2 参照）。

## 5.4 行列解法

2、3、4章で導出された有限要素方程式は、 $n$  元1次の行列方程式となる。SPIRAL-II では、流速方程式、乱流方程式の簡易化法として Mass-Lumping 法を、圧力方程式の解法として Cholesky 法および Incomplete Cholesky Conjugate Gradient(ICCG) 法<sup>[10]</sup>を採用している。

流速方程式、乱流方程式の解法である Mass-Lumping 法は、行列方程式の係数行列が質量行列であるときのみ有効な近似解法であり、行列成分を対角化することにより計算を高速化できる。また、圧力方程式の解法である Cholesky 法、ICCG 法は、それぞれ直接法、反復法に分類される行列解法であり、ともに係数行列が正値対称行列であるとき有効である。

本節では、これら 3 つの解法について述べる。

### 5.4.1 Mass-Lumping 法

Mass-Lumping 法は、計算の高速化のため係数行列を対角化する近似解法であり、質量行列  $M_{\alpha\beta}$  に対して次の近似式を適用する。

$$[M_{\alpha\beta}] = \int \varphi_\alpha \varphi_\beta dV \quad \cdots (5.28)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \sum_\beta M_{\alpha\beta} & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad \cdots (5.29)$$

Mass-Lumping 法では、質量行列  $\bar{M}_{\alpha\beta}$  は対角成分のみとなり、非対角成分はすべて零となる。そのため、逆行列は対角成分を逆数にするだけで容易に求められ、計算を高速化できる。ただし、この解法は、要素が粗いとき(5.29)式の近似が十分な精度で成り立たないため、数値振動の原因となる。

## 5.4.2 Cholesky 法(直接解法)

一般に行列の直接解法として、LU 分解法が用いられる。これは係数行列  $[A]$  を下三角行列  $[L]$  と上三角行列  $[U]$  の積として表す。すなわち、

$$[A]\{x\} = [L][U]\{x\} = \{b\} \quad \cdots (5.30)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad [U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \cdots (5.31)$$

(5.30)式の解は、前進代入と後退代入の二段階の計算に分けて求める。まず、前進代入の段階において、 $y_1$ 、 $y_2$ 、…、 $y_n$  が次々と求められる。

$$[L]\{y\} = \{b\}, \quad \{y\} = [U]\{x\} \quad \cdots (5.32)$$

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \quad \cdots (5.33)$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j) \quad (i > 1)$$

次に、後退代入の段階において、 $x_n$ 、 $x_{n-1}$ 、…、 $x_1$  が同様に求められる。

$$[U]\{x\} = \{y\} \quad \cdots (5.34)$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad \cdots (5.35)$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j) \quad (i < n)$$

一方、SPIRAL-II コードで取り扱う圧力 Poisson 方程式の係数行列は、正值対称行列となる。LU 分解法において、特に係数行列が正值対称行列である場合には、Cholesky 法（LDL 分解法）が利用できる。

Cholesky 法では、係数行列  $[A]$  を下三角行列  $[L]$  とその転置行列  $[L]^T$  の積として表す。すなわち、

$$[A]\{x\} = [L][L]^T\{x\} = \{b\} \quad \cdots (5.36)$$

$[A]$  と  $[L][L]^T$  の各成分を比較すれば、次式が成り立つ。

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk} \quad (i \geq j) \quad \cdots (5.37)$$

従って、 $[L]$  の各成分は、次式で計算できる。

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ l_{ii} &= \frac{a_{ii}}{l_{11}} \\ l_{jj} &= \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}} \quad (j > 1) \\ l_{ij} &= \frac{1}{l_{jj}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) \quad (i > j > 1) \end{aligned} \quad \cdots (5.38)$$

ただし、根号内の計算が負とならないための条件として  $[A]$  は正值行列でなければならない。

(5.36)式の解は、LU 分解法と同様にして求められる。すなわち、前進代入の段階において、

$$[L]\{y\} = \{b\}, \quad \{y\} = [L]^T\{x\} \quad \cdots (5.39)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{l_{11}} \\ y_i &= \frac{1}{l_{ii}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j) \quad (i > 1) \end{aligned} \quad \cdots (5.40)$$

次いで、後退代入の段階において、

$$[L]^T\{x\} = \{y\} \quad \cdots (5.41)$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{l_{nn}} \\ x_i &= \frac{1}{l_{ii}} (y_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} x_j) \quad (i < n) \end{aligned} \quad \cdots (5.42)$$

を計算すればよい。

### 5.4.3 ICCG 法(反復法)

共役勾配法 (CG 法) では、第  $k$  段階の  $x_k$ 、 $\alpha_k$ 、 $p_k$  を用いて、第  $(k+1)$  段階の  $x_{k+1}$  を次式で計算する。

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad \cdots (5.43)$$

(5.43)式において、 $\alpha_k$ 、 $p_k$  は汎関数  $F(x)$  が最小となるように定める。 $F(x)$  は次式で定義される。

$$F(x) = (x, Ax) - 2(x, b) \quad \dots (5.44)$$

(5.43)式を(5.44)式に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= (x_k + \alpha_k p_k, A(x_k + \alpha_k p_k)) - 2(x_k + \alpha_k p_k, b) \\ &= F(x_k) - 2\alpha_k(p_k, r_k) + \alpha_k^2(p_k, Ap_k) \end{aligned} \quad \dots (5.45)$$

ここで、残差ベクトル  $r_k$  は、

$$r_k = b - Ax_k \quad \dots (5.46)$$

(5.45)式は  $\alpha_k$  に関する 2 次方程式であり、 $A$  が正値対称行列であるため 2 次の項の係数は正である。従って、 $F(x_{k+1})$  が最小となる  $\alpha_k$  は、次式で定められる。

$$\alpha_k = \frac{(p_k, r_k)}{(p_k, Ap_k)} = \frac{(r_k, r_k)}{(p_k, Ap_k)} \quad \dots (5.47)$$

探索方向ベクトル  $p_{k+1}$  は、 $p_1, p_2, \dots, p_k$  とすべて直交 ( $A$ -直交) するように定める。まず、 $p_{k+1}$  を  $r_{k+1}$  と  $\beta_v p_v$  の和として、次式で定義する。

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \sum_{v=1}^k \beta_v p_v \quad \dots (5.48)$$

ただし、 $p_0 = r_0$  とする。 $A$ -直交性から、

$$\begin{aligned} (p_{k+1}, Ap_i) &= (r_{k+1} + \sum_{v=1}^k \beta_v p_v, Ap_i) = (r_{k+1}, Ap_i) + \sum_{v=1}^k \beta_v (p_v, Ap_i) \\ &= (r_{k+1}, Ap_i) + \beta_i (p_i, Ap_i) = 0 \end{aligned} \quad \dots (5.49)$$

従って、 $\beta_i$  は、

$$\beta_i = -\frac{(r_{k+1}, Ap_i)}{(p_i, Ap_i)} \quad \dots (5.50)$$

ここで、 $i < k$  に対して  $(r_{k+1}, Ap_i) = 0$ 、すなわち、 $\beta_i = 0$  が成立するので、結局、 $p_{k+1}$  は、次式で定められる。

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k = r_{k+1} - \frac{(r_{k+1}, Ap_k)}{(p_k, Ap_k)} p_k \quad \dots (5.51)$$

CG 法では、各反復段階における  $p_k$  が互いに直交するため、計算の途中で誤差が混入しなければ、 $n$  回の反復計算により必ず解  $x$  が求められる。

反復計算の収束をさらに加速させるに、不完全 Cholesky 分解を用いた前処理が用いられる。すなわち、前処理として係数行列  $A$  を  $A = U^T U + N$  または  $A = U^T D U + N$  と不完全 Cholesky 分解する。 $Ax = b$  の両辺に  $U^{-T}$  を乗じて、 $x = U^{-1}y$

とすれば、

$$U^{-T} A U^{-1} y = U^{-T} b \quad \cdots (5.52)$$

すなわち、

$$\tilde{A}y = \tilde{b} \quad \cdots (5.53)$$

$$\tilde{A} = U^{-T} A U^{-1}, \quad \tilde{b} = U^{-T} b \quad \cdots (5.54)$$

ここで、(5.53)式に対して CG 法を適用すれば、ICCG 法が得られる。

表 5.3 に ICCG 法の手順をそれぞれ示す。

## 5.5 計算上の工夫

SPIRAL-II コードにおいては、計算の効率もしくは計算規模の大きさのいずれを優先するかによって、以下に述べる計算上の工夫がなされる。

### 5.5.1 計算の効率化

有限要素方程式の各項は領域積分と境界積分から構成され、それらの被積分関数は形状関数  $\varphi_\alpha$  と節点値  $u_{i\alpha}$ 、 $P_\alpha$  の積として表される。例として、対流項を示せば、

$$\{C_{ia}\} = \int \varphi_a \varphi_\beta u_{j\beta} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_j} u_{i\gamma} dV \quad \cdots (5.55)$$

(5.55)式において、空間座標に依存しない節点値  $u_{j\beta}$ 、 $u_{i\gamma}$  を積分の外に出すと、

$$\{C_{ia}\} = \int \varphi_a \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_j} dV u_{j\beta} u_{i\gamma} \quad \cdots (5.56)$$

(5.56)式の被積分関数は、形状関数とその偏導関数のみから構成されている。形状関数とその偏導関数は時間に依存しないため、(5.56)式の積分値、すなわち、対流項の係数マトリックス  $[K_{i\alpha\beta\gamma}]$  も時間に依存しない。ここで、 $[K_{i\alpha\beta\gamma}]$  は、

$$\{C_{ia}\} = [K_{j\alpha\beta\gamma}] \{u_{j\beta}^n\} \{u_{i\gamma}^n\}, \quad [K_{i\alpha\beta\gamma}] = \int \varphi_a \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_i} dV \quad \cdots (5.57)$$

従って、対流項の係数マトリックスは、一度計算した値をメモリーに記憶すれば、過渡計算時には記憶した値を参照するだけで良く、再度計算する必要がない。そのため、各計算時間ステップにおいては、次式の積分計算を省略でき、計算を高速化することができる。

$$[K_{\alpha\beta\gamma}] = \int \varphi_\alpha \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_j} dV = \sum_{\lambda=1}^{Gauss} \left[ \varphi_\alpha \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_j} \right]_\lambda \quad \cdots (5.58)$$

ここでは、例として対流項を示したが、対流項以外にも時間変動項、粘性項、外力項、圧力項などは、すべて係数マトリックスを用いて計算することができる。

### 5.5.2 計算規模を優先する場合

既述したように、SPIRAL-II では初期計算時に計算した係数マトリックスをメモリーに記憶することにより、計算を高速化している。しかし、この計算方法は係数マトリックスを記憶するメモリーを必要とするため、計算資源の制約から大規模な体系では計算ができないという欠点がある。係数マトリックスの中でも、特にメモリーを使用するのが対流項の係数マトリックスであり、表 5.4 に示すように計算に必要とする全メモリーの約 75 % を占めている。

従って、対流項の係数マトリックスをメモリーに記憶しなければ、従来の 4 倍規模の体系まで計算が可能となる。この計算方法では、係数マトリックス  $[K_{\alpha\beta\gamma}]$  を記憶しないので、(5.57)式を用いて対流項  $\{C_{ia}\}$  を計算することはできない。そのため、(5.55)式に対してそのまま Gauss の積分公式を適用した次式を用いる。

$$\{C_{ia}\} = \int \varphi_\alpha \varphi_\beta u_{j\beta}^n \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_j} u_{i\gamma}^n dV = \sum_{\lambda=1}^{Gauss} \left[ \varphi_\alpha \varphi_\beta u_{j\beta}^n \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_j} u_{i\gamma}^n \right]_\lambda \quad \cdots (5.59)$$

### 5.5.3 確認計算

前節で述べた対流項係数マトリックスを記憶する場合 (Case A) / しない場合 (Case B) の 2 つの計算方法について、計算に要する記憶容量とタイムステップあたりの計算時間を比較するため、以下の条件にて計算を実施した。

計算体系	: 矩形ダクト体系
境界条件	: 入口 … 一様流入 ( $u = 10.0$ [m/s], $v = w = 0$ ) 出口 … 圧力一定 ( $P = 0$ ) 左右面 … Non-Slip ( $u = v = w = 0$ ) 上下面 … Free-Slip ( $v = w = 0$ )
計算メッシュ分割	: $x y z$ すべての方向について 10, 20, 30, 40, 50 分割
行列解法	: ICCG 法

圧力方程式の行列解法としては反復解法である ICCG 法を採用したが、計算時間計測が目的であるため、反復計算回数は 100 回に固定した。

計算結果を、表 5.5、図 5.11、図 5.12、図 5.13 に示す。計算メッシュ 10、20、30 分割体系の計算では、Case A（記憶する場合）に比べて Case B（記憶しない場合）は計算時間が約 1.3 倍となるが、計算に要する記憶容量は予測されたように 約 1/4 倍となっている。一方、40 分割を超えてくる体系の計算では、Case A の計算時間が非常に大きくなっている。これは今回の計算に使用した計算機のオプションとして、仮想記憶使用を可能としていたためである。これにより記憶に必要な容量がメモリ容量を越え仮想記憶領域に入ったため処理が極端に遅くなった。

ちなみに、本計算のように ICCG 法の反復計算回数を固定したとき、計算に要する記憶容量、タイムステップあたりの計算時間、行列解法に要する計算時間は、いずれも節点数に比例する傾向がある。

## 5.6 定常判定法

SPIRAL-II コードで使用する定常判定法は次のとおりである。  
計算時間ステップ間の相対変動値が定常判定値  $\delta$  以下になったとき、定常と判定する。相対変動値は次式で計算する。

$$\left| \frac{\psi_{\alpha}^{n+1} - \psi_{\alpha}^n}{\psi_{\max}^n} \right|_{\max} \leq \delta \quad \cdots (5.60)$$

ここで、 $\psi$  は任意の物理量（流速  $u_i$ 、乱流エネルギー  $k$ 、散逸率  $\epsilon$ ）であり、上添字  $n$ 、 $n+1$  は計算時間ステップ、下添字  $\alpha$  は節点番号を表す。また、 $\max$  はすべての節点の中で最大値をとることを意味する。

なお、相対変動値は時刻の刻み幅  $\Delta t$  に依存するため、定常判定値  $\delta$  の設定に際しては、時刻の刻み幅  $\Delta t$  を考慮した値を設定する必要がある。

表 5.1 1 次元における Gauss の積分公式

積分点数 $n$	積分点の座標値 $\pm \xi_i$	積分点の重み係数 $H_i$
$n = 1$	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
$n = 2$	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
$n = 3$	0.77459 66692 41483 0.00000 00000 00000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
$n = 4$	0.86113 63115 94053 0.33998 10435 84856	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
$n = 5$	0.90617 98459 38664 0.53846 93101 05683 0.00000 00000 00000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889

表 5.2 三角形における Gauss の積分公式

積分点の次数 $n$	積分点の面積座標値 $L_{1i}$ 、 $L_{2i}$ 、 $L_{3i}$	積分点の重み係数 $H_i^A$
$n = 1$	$1/3, 1/3, 1/3$	1.000
$n = 2$	$2/3, 1/6, 1/6$	$1/3$
	$1/6, 2/3, 1/6$	$1/3$
	$1/6, 1/6, 2/3$	$1/3$
$n = 3$	$1/3, 1/3, 1/3$	$27/60$
	$1/2, 1/2, 0$	$8/60$
	$0, 1/2, 1/2$	$8/60$
	$1/2, 0, 1/2$	$8/60$
	$1, 0, 0$	$3/60$
	$0, 1, 0$	$3/60$
	$0, 0, 1$	$3/60$
$n = 5$	$1/3, 1/3, 1/3$	0.22500000
	$\alpha_1, \beta_1, \beta_1$	0.13239415
	$\beta_1, \alpha_1, \beta_1$	0.13239415
	$\beta_1, \beta_1, \alpha_1$	0.13239415
	$\alpha_2, \beta_2, \beta_2$	0.12593918
	$\beta_2, \alpha_2, \beta_2$	0.12593918
	$\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.12593918

$$\alpha_1 = 0.05971587$$

$$\beta_1 = 0.47014206$$

$$\alpha_2 = 0.79742699$$

$$\beta_2 = 0.10128651$$

表 5.3 ICCG 法

<p>Given : <math>\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k</math>  <math>\because \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0 = (U^T U)^{-1} \mathbf{r}_0</math></p>
$\alpha_k = \frac{((U^T U)^{-1} \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{p}_k, A\mathbf{p}_k)}$
$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$
$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A\mathbf{p}_k$
$\beta_k = \frac{((U^T U)^{-1} \mathbf{r}_{k+1}, A\mathbf{p}_k)}{(\mathbf{p}_k, A\mathbf{p}_k)}$
$\mathbf{p}_{k+1} = (U^T U)^{-1} \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k$

表 5.4 係数マトリックスの記憶に必要とする記憶容量と占有率

係数マトリックス		矩形、10×10×10 分割 節点数 1331 要素数 1000		矩形、50×50×50 分割 節点数 132651 要素数 125000	
時間変動項	$[M_{\alpha\beta}] = \int \varphi_\alpha \varphi_\beta dV$	0.49 MB	(3.14 %)	61.04 MB	(3.19 %)
対流項	$[K_{i\alpha\beta\gamma}] = \int \varphi_\alpha \varphi_\beta \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_i} dV$	11.72 MB	(75.22 %)	1464.84 MB	(76.55 %)
粘性項	$[S_{\alpha\beta}] = \int \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} dV$	0.49 MB	(3.14 %)	61.04 MB	(3.19 %)
外力項	$\{F_\alpha\} = \int \varphi_\alpha dV$	0.06 MB	(0.39 %)	7.63 MB	(0.40 %)
圧力項	$[H_{i\alpha\beta}] = \int \varphi_\alpha \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_i} dV$	1.47 MB	(9.44 %)	183.11 MB	(9.57 %)
その他	※ 流速値、圧力値、境界条件等の記憶に必要な記憶容量	1.35 MB	(8.67 %)	135.82 MB	(7.10 %)
総計		15.58 MB	—	1913.48 MB	—

整数型変数を 4 Byte、実数型変数を 8 Byte として計算

表 5.5 計算に要する記憶容量とタイムステップあたりの計算時間

計算体系		Case A (5.30)式、 ・対流項の係数マトリ クスを記憶する	Case B (5.32)式、 ・対流項の係数マトリ クスを記憶しない
矩形、 $10 \times 10 \times 10$ 分割 節点数 1331 要素数 1000	計算に要する記憶容量	15.58 MB	3.86 MB
	タイムステップあたりの 計算時間	0.30 sec ( 0.22 sec )	0.38 sec ( 0.22 sec )
矩形、 $20 \times 20 \times 20$ 分割 節点数 9261 要素数 8000	計算に要する記憶容量	123.23 MB	29.48 MB
	タイムステップあたりの 計算時間	2.50 sec ( 1.83 sec )	3.12 sec ( 1.85 sec )
矩形、 $30 \times 30 \times 30$ 分割 節点数 29791 要素数 27000	計算に要する記憶容量	414.44 MB	98.03 MB
	タイムステップあたりの 計算時間	8.40 sec ( 6.17 sec )	10.72 sec ( 6.16 sec )
矩形、 $40 \times 40 \times 40$ 分割 節点数 68921 要素数 64000	計算に要する記憶容量	980.69 MB	230.69 MB
	タイムステップあたりの 計算時間	59.64 sec ( 31.12 sec )	25.35 sec ( 14.35 sec )
矩形、 $50 \times 50 \times 50$ 分割 節点数 132651 要素数 125000	計算に要する記憶容量	1913.48 MB	448.64 MB
	タイムステップあたりの 計算時間	計算不可能	50.23 sec ( 28.13 sec )

括弧内の値は圧力方程式の行列解法（ ICCG 法）に要した計算時間

ICCG 法の反復計算回数は 100 回、収束判定は使用しない

計算はすべて Pentium-III ( クロック周波数 1GHz、メモリー 1GB ) で実行

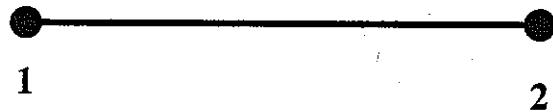


図 5.1 2 節点線要素の節点番号

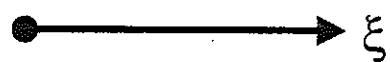
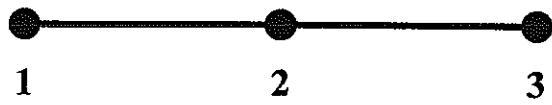


図 5.2 3 節点線要素の節点番号

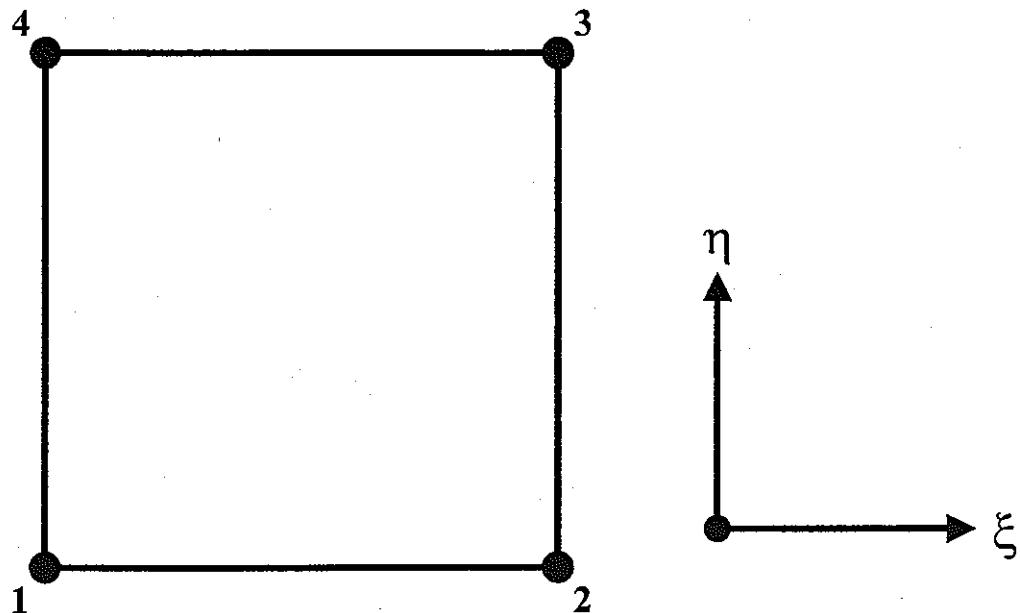


図 5.3 4 節点四角形要素の節点番号

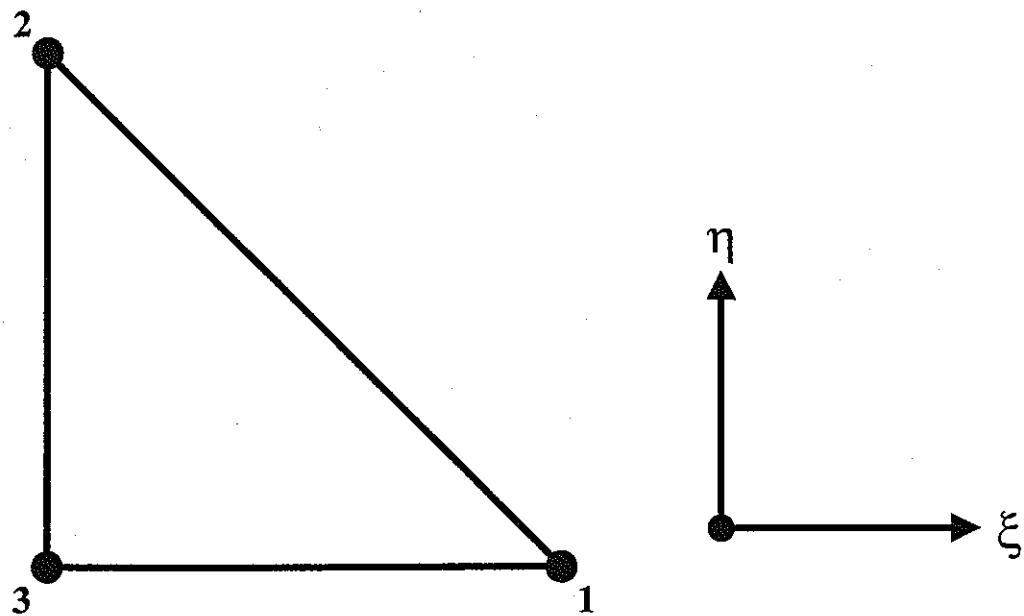


図 5.4 3 節点三角形要素の節点番号

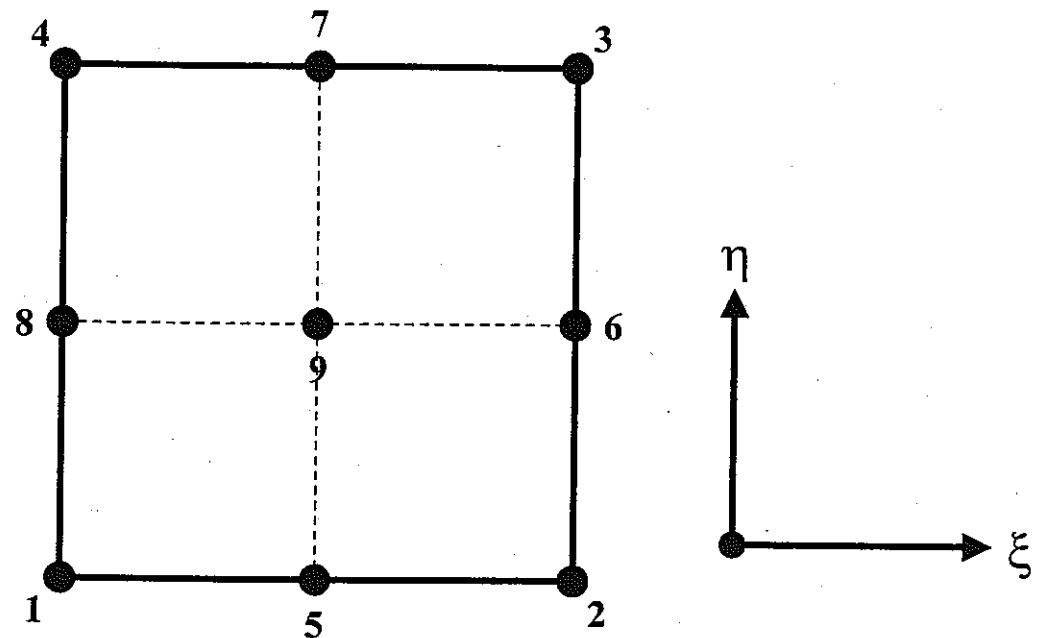


図 5.5 9 節点四角形要素の節点番号

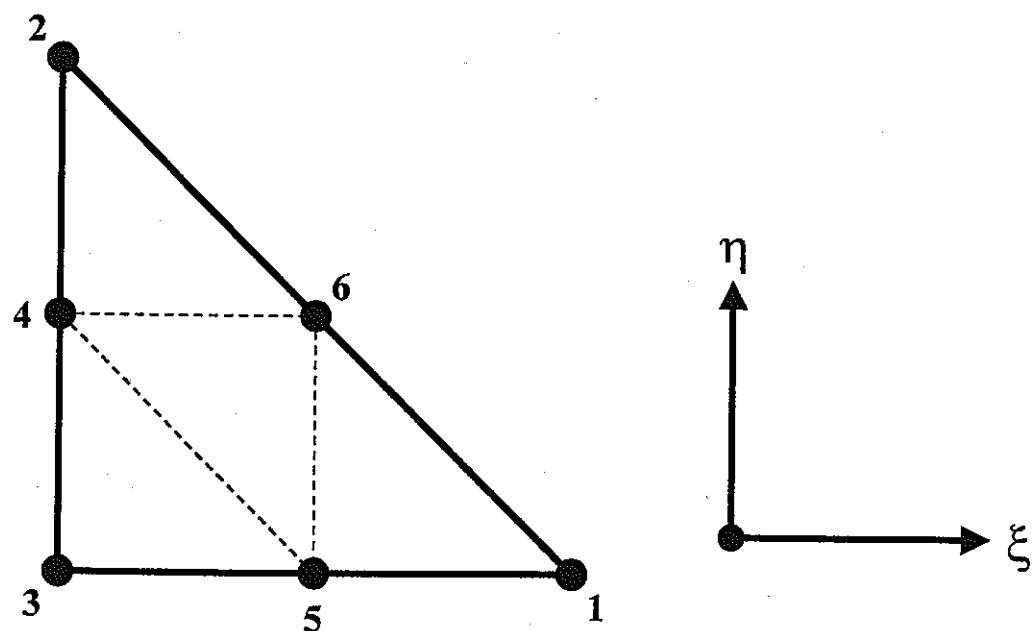


図 5.6 6 節点三角形要素の節点番号

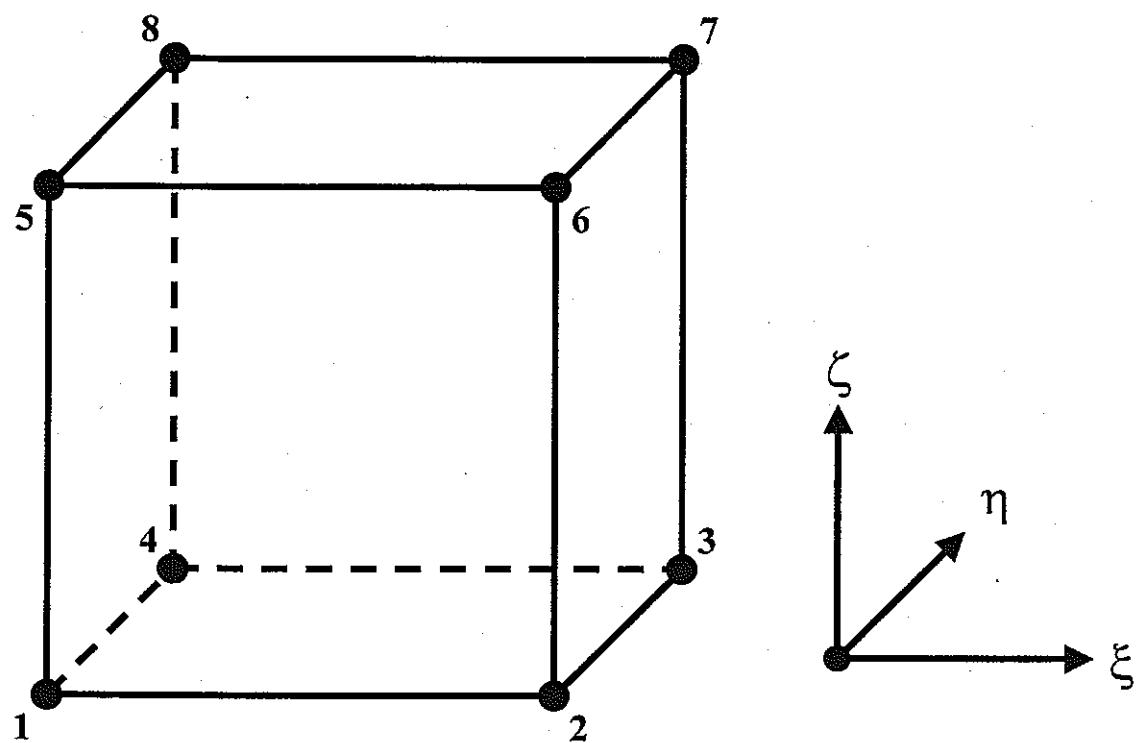


図 5.7 8 節点六面体要素の節点番号

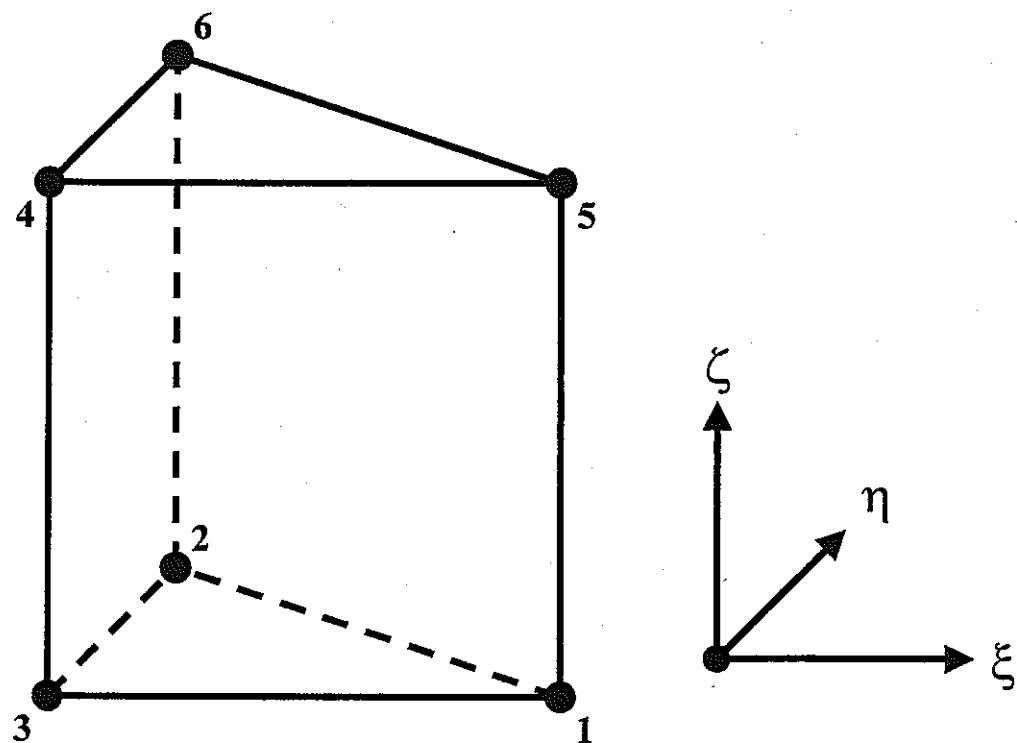


図 5.8 6 節点五面体要素の節点番号

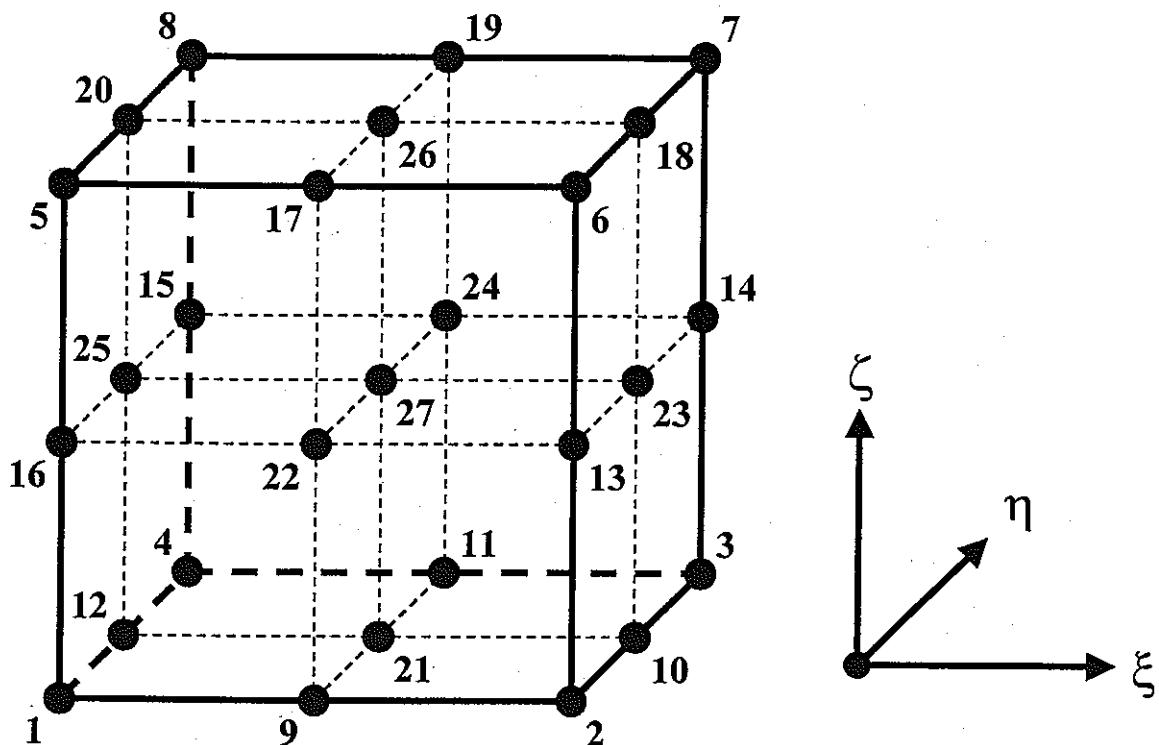


図 5.9 27 節点六面体要素の節点番号

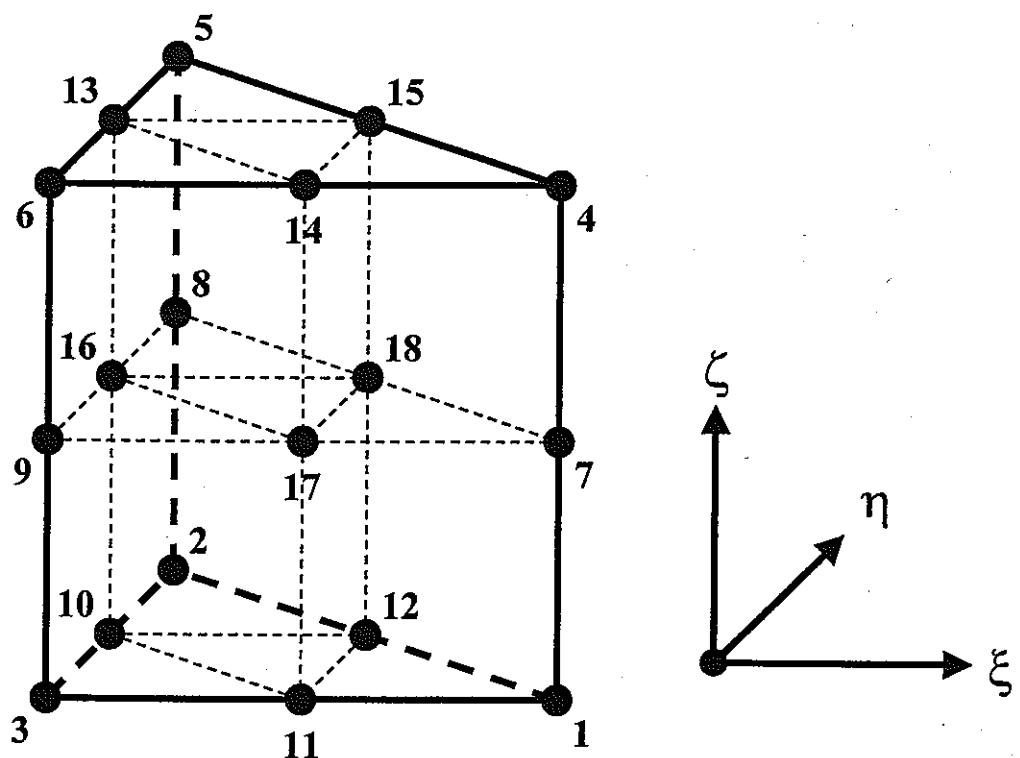


図 5.10 18 節点五面体要素の節点番号

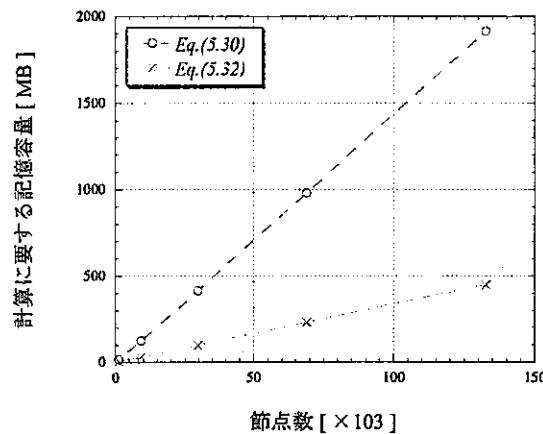


図 5.11 節点数と計算に要する記憶容量の関係

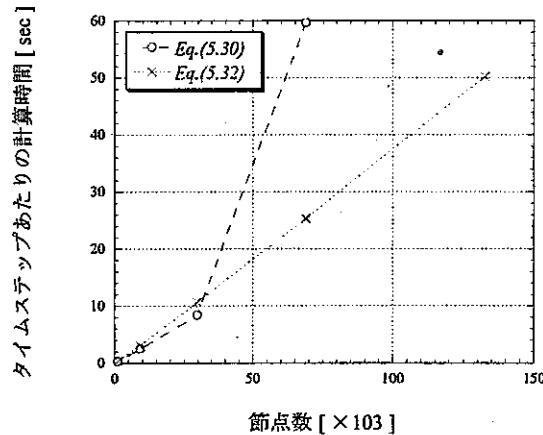


図 5.12 節点数とタイムステップあたりの計算時間の関係

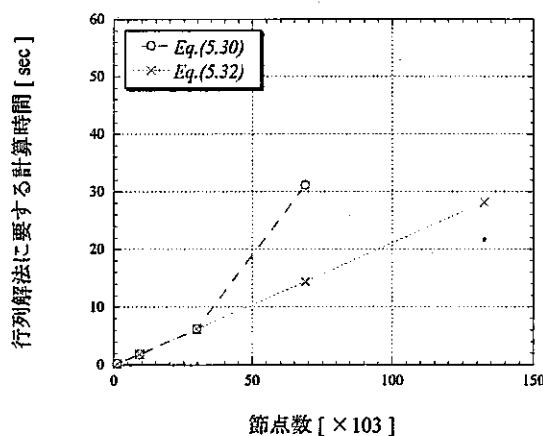


図 5.13 節点数と行列解法に要する計算時間の関係

## 第6章 検証解析

これまでに作成した SPIRAL-II コード（流動解析部のみ）の機能検証を行うため、いくつかの例題解析を実施する。ここで取り上げた例題は、矩形ダクト内 2 次元流れ（層流域・乱流域）、キャビティフロー、層流バックステップフローおよび乱流バックステップフローである。これらを解析することにより、計算が正しくなされることを確認すると同時に予測精度を把握し、必要に応じて改良課題を抽出する。

### 6.1 矩形ダクト内2次元流れ解析

解析体系は、矩形ダクトを考える。上下面の境界条件を Free-Slip、左右面を Non-Slip 条件とすることにより、流れは 2 次元的流速分布となる。この体系では流速分布には理論解が存在し、層流領域では Hagen-Poiseuille 則に完全に一致、乱流領域では  $1/7$  乗則にほぼ一致することが知られている。

#### 解析条件

解析領域	:	対称条件から 1/2 矩形ダクト体系とする(図 6.1 参照)
境界条件	:	AB 面 … 一様流入 ( $u = 10.0$ [m/s], $v = 0$ )
		CD 面 … 圧力一定 ( $P = 0$ )
		AD 面 … Non-Slip ( $u = v = 0$ )
		BC 面 … Free-Slip ( $v = 0$ )
動粘性係数	:	$10^{-1}$ , $10^{-3}$ [m <sup>2</sup> /s]
時間の刻み幅	:	$10^{-3}$ [s] (平均クーラン数 : 0.01)
定常判定値	:	$10^{-7}$

解析ケースは 2 ケース（層流領域  $Re = 500$ 、乱流領域  $Re = 5000$ ：動粘性係数を変えることで対応）であり、ともに入口境界の流速分布を一様とし、出口境界の流速分布について評価する。主流が十分発達するよう、入口幅  $H$  に対して流れ方向  $100H$  を設定している。また、それぞれのケースにおいて、 $x$ ,  $y$ ,  $z$  の 3 方向それぞれに主流が流れる場合も想定した。

以上の条件に対して、(A) Bubnov-Galerkin 法、(B) SUPG 法、(C) BTD 法、(D)  $k - \varepsilon$  乱流モデルそれぞれを適用して解析を行った。

なお、本解析では、主流が十分に発達した領域においては、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, v = 0 \quad \cdots (6.1)$$

が成立し対流項は零となるため、Bubnov-Galerkin 法、SUPG 法および BTD 法は、理論的に等しい解を与えるはずである。

### 解析結果

図 6.2 に 層流領域 ( $Re = 500$ ) の解析で得られた出口境界での流速分布を、図 6.3 に乱流領域 ( $Re = 10,000$ ) の解析で得られた出口境界での流速分布を、それぞれの理論解および理論近似解と併せて示す。図 6.2、図 6.3 とともに  $y < 0$  の領域に関しては、Free-slip 面 ( $y = 0$ ) について対称となるように補間している。

Bubnov-Galerkin 法、SUPG 法および BTD 法については、層流領域において Hagen-Poiseuille 則にほぼ完全に一致した。これにより解析コードの基本構成に誤りがないことを確認するとともに、層流領域での予測精度が十分であることを確認した。一方、乱流モデルを使用しない場合、本来乱流となる条件においても Hagen-Poiseuille 則に一致した。これは今回の解析条件では、乱流への遷移に至らなかったためである。一般的に比較的安定に計算できる解析コードの場合、乱流モデルを使用しなければ臨界  $Re$  数を超えてすぐには乱流に遷移しない場合があるが、この場合計算メッシュを細かくするとともに、入口境界で乱れ成分を与えるなどすれば解決する場合が多い。

$k-\epsilon$  乱流モデルによる結果は、層流領域では Hagen-Poiseuille 則に、乱流領域では  $1/7$  乗則に概ね一致した。いずれの結果においても、理論近似解に比べて壁近傍流速を小さく、最大流速を大きく予測する傾向が見られるが、メッシュ分割を細かくすると改善の方向に向かうことが確認された(図 6.3)。壁境界条件を Non-slip に設定したことにより、壁剪断応力を過大に評価していることも要因として考えられる。壁近傍領域のモデル化には検討の余地があるといえる。

なお、層流／乱流ケースとともに、主流が  $x, y, z$  の 3 方向に流れる場合についても、それぞれ完全に同じ結果となることを確認した。

### 6.2 キャビティフロー解析

この課題は、矩形容器内の回転流れを解くことにより、運動量輸送のチェックを行うものである。一般に Ghia らが詳細解析メッシュを用いて得た数値実験解<sup>[11]</sup>が比較対象として用いられる。

### 解析条件

解析条件を図 6.4 に示す。解析領域は一辺が  $L$  の正方領域であり、 $xy$  方向にそれぞれ 80 等分割した解析要素を用いた。境界条件は、解析領域の上側壁面において流速一定条件、その他の壁面において Non-Slip 条件を適用した。解析ケースとして、Reynolds 数を、 $Re = 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500, 10000$  と変化させた。

解析結果

図 6.5 にそれぞれの Reynolds 数における流線図、等渦度線図、水平／鉛直方向流速分布を示す。また、表 6.1 に主渦中心における流れ関数  $\psi_{\min}$ 、渦度  $\omega$ 、中心座標 ( $x_0, y_0$ ) を示す。いずれも比較の対象として Ghia らの数値実験の結果を併せて示している。

SPIRAL-II の結果を Ghia らの結果と比較すると、流速分布に関しては、低 Reynolds 数領域では極めて良く一致しているが、高 Reynolds 数領域では壁面近傍領域において若干の差異が見られる。同様に、主渦中心における流れ関数  $\psi_{\min}$  と渦度  $\omega$  に関しても、高 Reynolds 数領域では SPIRAL-II は過大に評価する傾向がある。高 Reynolds 数領域における精度低下の理由は、要素の分割が粗く、壁面近傍領域における流速分布の急激な変化を再現できなかつたためと思われる。従って、壁面近傍領域をさらに詳細な要素で分割すれば、精度は向上すると予想される。

また、低 Reynolds 数領域 ( $Re = 100$ ) では離散化法の違いによる精度の優劣はほとんどないが、高 Reynolds 数領域 ( $Re = 10000$ ) では BTD 法の結果には小さな、SUPG 法の結果には大きな解のなまりが現れた（図 6.6, 6.7 参照）。BTD 法/SUPG 法における精度低下の理由は、過度の人工粘性が混入したためと思われる。代表流速  $\bar{u} = 1.0$  を用いて計算すると、BTD 法の人工粘性は  $\nu^* \sim 10^{-4}$  ( $Re^* = \bar{u} L / \nu^* \sim 10000$ ) 程度、SUPG 法の人工粘性は  $\nu^* \sim 10^{-3}$  ( $Re^* = \bar{u} L / \nu^* \sim 1000$ ) 程度である。

### 6.3 層流バックステップフロー解析

この例題は、日本原子力学会「熱流動数値解析」特別専門委員会の活動の中で、単相流解析コードの基本機能検証解析問題<sup>[12]</sup>の 1 つとして提案されたものである。解析体系を図 6.8 に示す。流路各断面の流速プロファイルと流れの再付着点について、実験計測値との比較を行うことが課題である。

解析条件

解析領域	: 図 6.8 参照
境界条件	: AB 面 … 流入境界 ( $u = $ 入口流速分布 ( 表 6.2 参照 ), $\nu = 0$ )
	CD 面 … $P = 0$ (一様分布), $\nu = 0$
	BC 面, DE 面, EO 面, OA 面 … $u = \nu = 0$
動粘性係数	: $1.0 [m^2/s]$
時間刻み幅	: $10^{-4} [s]$ (クーラン数 : 約 0.01)
定常判定値	: $10^{-9}$

解析ケースは4ケース(Case1( $Re = 73$ )、Case2( $Re = 125$ )、Case3( $Re = 191$ )、Case4( $Re = 229$ ))であり、それぞれについてBubnov-Galerkin法、SUPG法およびBTD法による解析を実施した。

層流ステップフローでは、入口から出口に向かう主流の他に、流路拡大部下流に再循環流が形成される。本解析では、主流の再付着点位置および $x$ 方向流速 $u$ の $y$ 方向分布を求めた。

### 解析結果

表6.3に主流の再付着点位置を、他の解析コード(文献[12]で同様の解析を行ったコード)による結果と併せて示す。Case2、Case3、Case4では、Bubnov-Galerkin法およびBTD法の解析においては数値振動が発生し、SUPG法の解析においてのみ収束解が得られた。従って、計算の安定性に関しては、SUPG法は優れているといえる。別の有限要素法コードではBubnov-Galerkin法でも高い $Re$ 数の計算がなされているが、これはSPIRAL-IIコードと異なり混合法(流速に2次要素、圧力に1次要素を適用)を用いたことで計算安定性を確保しているためと思われる。

再付着点位置については、SPIRAL-IIコードの予測値は他の有限要素法コードの結果とほぼ一致している。傾向としては、 $Re$ 数が高くなるほど数値粘性の影響が大きくなるが、再循環流を過小評価する1次風上差分法よりは予測精度は高く、むしろ高次差分に近い結果を与えていている。(有限要素法の場合、スタッガードメッシュの有限差分法コードと流速定義点が異なるため、高次差分に比べて若干上流側に予測する。)図6.9には再付着点について実験計測値とSPIRAL-II予測値との比較を示す。

図6.10(a)~(f)にCase1の $x/H = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ における流速分布を、図6.11(a)~(f)にCase4の $x/H = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ における流速分布を示す。図6.10、図6.11ともに流速は入口境界の平均流速 $u^* = Re$ で除して無次元化してある。Case1において、Bubnov-Galerkin法、SUPG法およびBTD法の結果は、極めて良く一致している。また、Case4において、SUPG法の解析結果と実験結果は、主流の分布に若干の差違が現れたが、概ね良く一致している。従って、層流領域における計算の精度に関しては、Bubnov-Galerkin法、SUPG法およびBTD法は大差なく、いずれも現象の再現性に優れているといえる。

### 6.3 乱流バックステップフロー解析

本例題も6.2節同様、日本原子力学会「熱流動数値解析」特別専門委員会において、単相流解析コードの基本機能検証解析問題<sup>[12]</sup>の1つとして取り上げられたものであり、流れ方向流速分布や乱流エネルギー分布について実験計測結果との比較が課題である。

解析条件

解析体系	: 図 6.12 参照
境界条件	: AB 面 … 流入境界
	$u_{in} = 18.2 \text{ [m/s]}$ (一様流速)
	$k_{in} = 1.5 (0.003 u_{in})^2 \text{ [m}^2/\text{s}^2]$
	$\varepsilon_{in} = c_\mu^{3/4} k_{in}^{3/2} / (0.09 H) \text{ [m}^2/\text{s}^3]$
	CD 面 … $P = 0 \text{ [Pa]}$
	BC 面, DE 面, EO 面, OA 面 … $u = v = 0 \text{ [m/s]}$
動粘性係数	: $1.51 \times 10^{-5} \text{ [m}^2/\text{s}]$
時刻の刻み幅	: $10^{-5} \text{ [s]}$
定常判定値	: $10^{-5}$

乱流ステップフローでは、層流の場合と同様、入口から出口に向かう主流の他に、流路拡大部下流に再循環流が形成される。本解析では、 $x$  方向流速  $u$  および乱流エネルギー  $k$  の  $y$  方向分布について実験との比較を行う。

解析結果

図 6.13(a)~(e) に  $x/h = 1, 3, 5, 6, 7$  における流速分布 (流入流速  $u^*$  で除して無次元化) を、図 6.14(a)~(c) に  $x/h = 4, 7, 13$  における乱流エネルギー分布 (流入流速の 2 乗  $k^* = (u^*)^2$  で除して無次元化) を示す。図 6.13、図 6.14 とともに比較の対象として Kim らの実験結果<sup>[13]</sup>および有限差分法コード AQUA<sup>[14]</sup>の解析結果を併せて示してある。

SPIRAL-II コードの解析結果を Kim らの実験結果と比較すると、流速分布および乱流エネルギー分布の予測は定性的に良好であるが、剥離域においては再循環流速を過小に、乱流エネルギーを過大に評価している。標準  $k-\varepsilon$  モデルの特徴として、剥離流、旋回流および低レイノルズ数領域において乱流エネルギーを実際より過大に評価する傾向があり、これは本解析で得られた傾向に一致する。また、再付着点近傍では  $u \sim 0$  となるため、摩擦速度に基づく壁関数を適用することは妥当性を欠いている。従って、より精度の良い解を得るために、より高度な乱流モデル（低レイノルズ型  $k-\varepsilon$  モデル、ASM モデルなど）が必要と考えられる。

なお、SPIRAL-II コードの解析結果と AQUA コードの解析結果は、良く一致している。壁近傍の流速分布がやや異なっているが、これは有限差分法におけるスタガードメッシュ構造と有限要素法解析メッシュ構造の違いによるものと考えられる。

以上、基本検証のまとめを表 6.4 に示す。

表 6.1 主渦中心における流れ関数  $\psi_{\min}$ 、渦度  $\omega$ 、中心座標  $(x_0, y_0)$  の比較

<i>Reynolds 数</i>	<i>GHIA</i>	<i>SPIRAL-II</i>	<i>Error</i>
$Re = 100$	$\psi_{\min} = -0.103423$ $\omega = 3.16646$ $(x_0, y_0) = (0.6172, 0.7344)$	$\psi_{\min} = -0.10135$ $\omega = 3.3045$ $(x_0, y_0) = (0.6250, 0.7500)$	Error ( $\psi_{\min}$ ) = -2.00 % Error ( $\omega$ ) = 4.36 % $(\delta x, \delta y) = (0.0078, 0.0156)$
$Re = 400$	$\psi_{\min} = -0.113909$ $\omega = 2.29469$ $(x_0, y_0) = (0.5547, 0.6055)$	$\psi_{\min} = -0.11394$ $\omega = 2.3100$ $(x_0, y_0) = (0.5500, 0.6125)$	Error ( $\psi_{\min}$ ) = 0.03 % Error ( $\omega$ ) = 0.67 % $(\delta x, \delta y) = (-0.0047, 0.0070)$
$Re = 1000$	$\psi_{\min} = -0.117929$ $\omega = 2.04968$ $(x_0, y_0) = (0.5313, 0.5625)$	$\psi_{\min} = -0.11956$ $\omega = 2.1069$ $(x_0, y_0) = (0.5375, 0.5625)$	Error ( $\psi_{\min}$ ) = 1.38 % Error ( $\omega$ ) = 2.79 % $(\delta x, \delta y) = (0.0062, 0.0000)$
$Re = 3200$	$\psi_{\min} = -0.120377$ $\omega = 1.98860$ $(x_0, y_0) = (0.5165, 0.5469)$	$\psi_{\min} = -0.12495$ $\omega = 2.0370$ $(x_0, y_0) = (0.5125, 0.5375)$	Error ( $\psi_{\min}$ ) = 3.80 % Error ( $\omega$ ) = 2.43 % $(\delta x, \delta y) = (-0.0040, -0.0094)$
$Re = 5000$	$\psi_{\min} = -0.118966$ $\omega = 1.86016$ $(x_0, y_0) = (0.5117, 0.5352)$	$\psi_{\min} = -0.12727$ $\omega = 2.0321$ $(x_0, y_0) = (0.5125, 0.5375)$	Error ( $\psi_{\min}$ ) = 6.98 % Error ( $\omega$ ) = 9.24 % $(\delta x, \delta y) = (0.0008, 0.0023)$
$Re = 7500$	$\psi_{\min} = -0.119976$ $\omega = 1.87987$ $(x_0, y_0) = (0.5117, 0.5322)$	$\psi_{\min} = -0.13040$ $\omega = 2.0503$ $(x_0, y_0) = (0.5125, 0.5250)$	Error ( $\psi_{\min}$ ) = 8.69 % Error ( $\omega$ ) = 9.07 % $(\delta x, \delta y) = (0.0008, -0.0072)$
$Re = 10000$	$\psi_{\min} = -0.119731$ $\omega = 1.88082$ $(x_0, y_0) = (0.5117, 0.5333)$	$\psi_{\min} = -0.13268$ $\omega = 2.0699$ $(x_0, y_0) = (0.5125, 0.5250)$	Error ( $\psi_{\min}$ ) = 10.82 % Error ( $\omega$ ) = 10.05 % $(\delta x, \delta y) = (0.0008, -0.0083)$

流れ関数  $\psi$  の計算式 :  $\psi(x, y) = - \int v dx + \int u dy$

渦度  $\omega$  の計算式 :  $\omega(x, y) = - \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$

表 6.2 入口流速分布

$y / H$	Re = 73	Re = 125	Re = 191	Re = 229
0.000	0.0	0.0	0.0	0.0
0.125	28.4	49.0	76.0	101.0
0.250	49.8	88.0	146.6	187.7
0.375	69.0	123.7	200.6	253.7
0.500	84.7	149.2	237.1	294.7
0.625	96.3	164.1	256.7	311.0
0.750	104.3	174.1	268.7	315.5
0.875	108.4	179.9	272.3	315.6
1.000	109.9	180.1	269.6	311.8
1.125	108.1	176.3	263.6	304.8
1.250	102.8	170.3	254.2	296.3
1.375	94.3	161.3	238.4	278.6
1.500	81.5	143.6	212.0	255.4
1.625	64.4	117.5	177.1	214.7
1.750	44.2	82.5	124.0	150.3
1.875	22.5	42.2	59.3	71.7
2.000	0.0	0.0	0.0	0.0

表 6.3 主流の再付着点位置

	Case1 ( Re = 73 )	Case2 ( Re = 125 )	Case3 ( Re = 191 )	Case4 ( Re = 229 )
SPIRAL-II (A) Bubnov-Galerkin 法	5.09	-	-	-
SPIRAL-II (B) SUPG 法	5.18	7.09	8.98	9.46
SPIRAL-II (C) BTD 法	5.09	-	-	-
有限要素法コード ( Bubnov-Galerkin 法 )	4.97	7.07	8.96	9.60
有限差分法コード ( 1 次風上差分 )	4.04	5.55	6.67	6.71
有限差分法コード ( 3 次風上差分 )	5.42	7.45	9.28	9.70
実験値	4.1	6.8	8.6	9.8

表 6.4 SPIRAL-II で実施した検証解析

検証解析	検証目的	検証結果
平行平板間流れ	<ul style="list-style-type: none"> <li>Bubnov-Galerkin 法、BTD 法、SUPG 法における計算精度の調査</li> <li>標準型 <math>k-\epsilon</math> モデル、RNG 型 <math>k-\epsilon</math> モデルにおける計算精度の調査</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>四角形メッシュに比べ、三角形メッシュは計算精度が悪い</li> <li>出入口境界条件を圧力差で定義すると、<math>Re=100</math> 以下で計算が発散するが、入口境界条件を流速、出口境界条件を圧力で定義すると、<math>Re=10000</math> 以上でも計算が可能</li> <li>離散化法の違いによる精度の優越はほとんどない</li> <li>層流解析（乱流モデルを使用しない解析）では、粗メッシュを用いると乱流に遷移しない</li> <li>乱流解析では、粗メッシュでも乱流流速分布を再現できる</li> </ul>
キャビティフロー	<ul style="list-style-type: none"> <li>Bubnov-Galerkin 法、BTD 法、SUPG 法における計算精度の調査</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>いずれの離散化法でも <math>Re=10000</math> まで計算が可能</li> <li>Bubnov-Galerkin 法、BTD 法は、低 <math>Re</math> 数領域では数値実験と良く一致するが、高 <math>Re</math> 数領域では若干の差異が現れる</li> <li>SUPG 法は、低 <math>Re</math> 数領域では他の離散化法と同程度の精度であるが、高 <math>Re</math> 数領域では著しい鈍りが現れる</li> </ul>
層流バックステップフロー	<ul style="list-style-type: none"> <li>Bubnov-Galerkin 法、BTD 法、SUPG 法における計算精度の調査</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Bubnov-Galerkin 法、BTD 法は <math>Re=100</math> 程度、SUPG 法は <math>Re=500</math> 程度で計算が発散する</li> <li>他の離散化法に比べ、SUPG 法は主流の再付着点位置を過大に評価する</li> <li><math>Re=229</math> では解析結果（SUPG 法）と実験結果は良く一致する</li> </ul>
乱流バックステップフロー	<ul style="list-style-type: none"> <li>標準型 <math>k-\epsilon</math> モデル、RNG 型 <math>k-\epsilon</math> モデルにおける計算精度の調査</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>乱流エネルギー、乱流动粘性係数の分布に関しては、定性的にも定量的にも RNG 型モデルの方が実験と良く一致する（標準型モデルはいずれも過大に評価する）</li> <li>再循環流速の分布に関しては、実験に比べ標準型モデルは過小に、RNG モデルは過大に評価する</li> </ul>

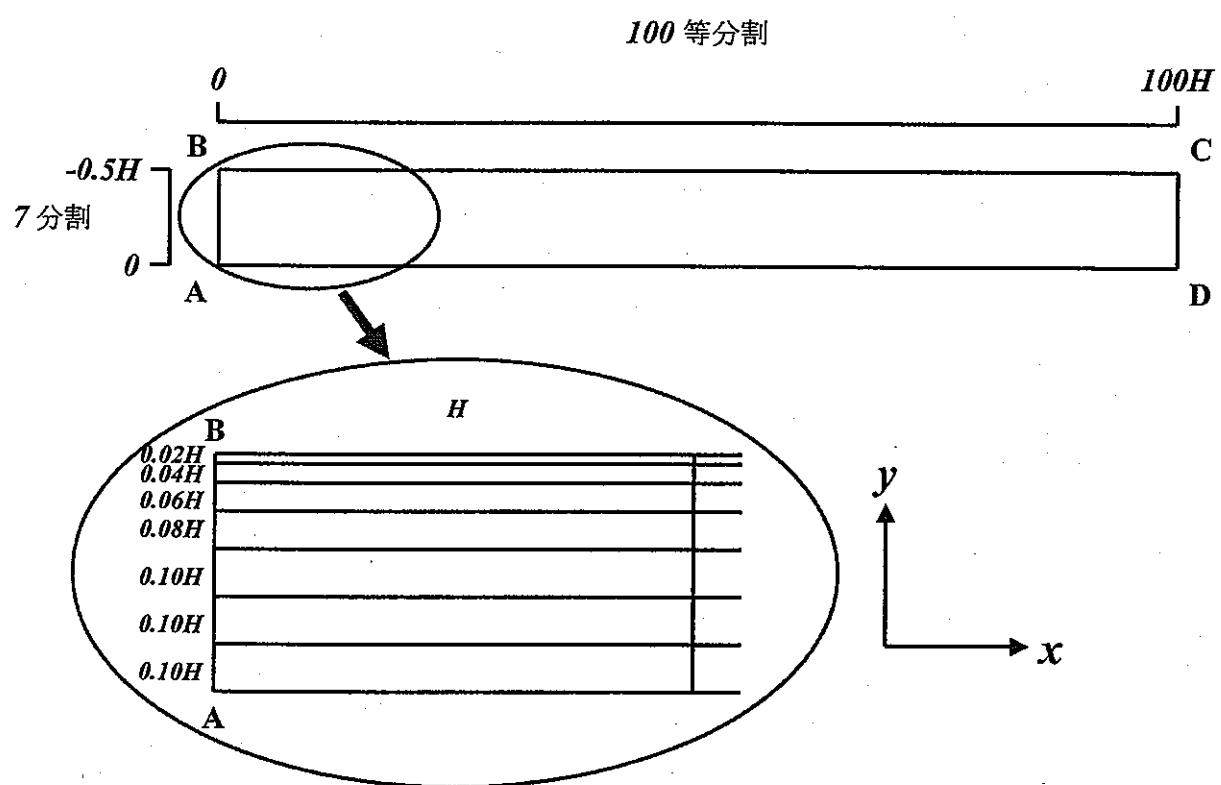


図 6.1 解析領域

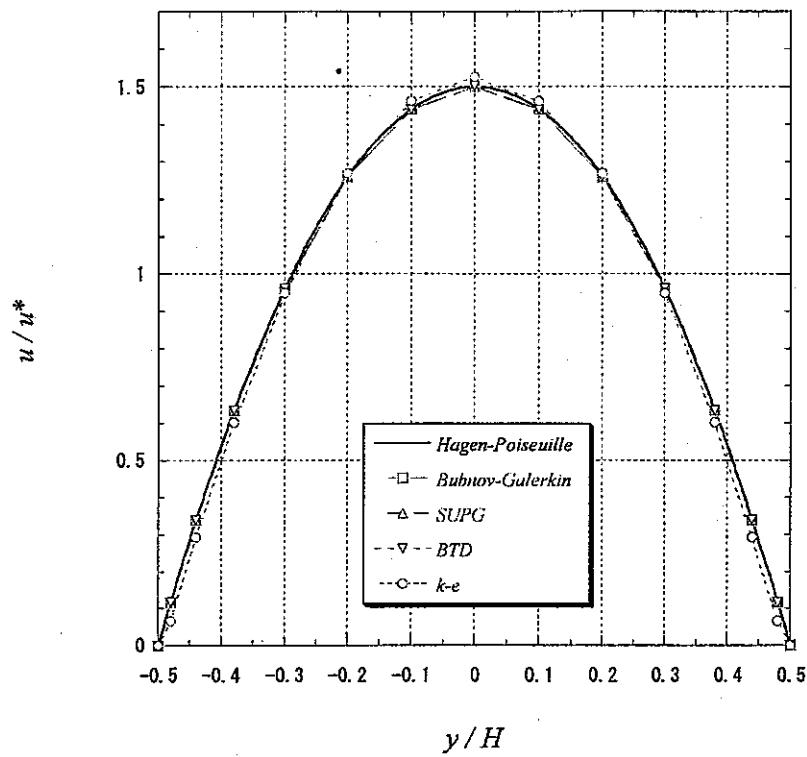


図 6.2 出口境界における流速分布 (  $Re = 500$  )

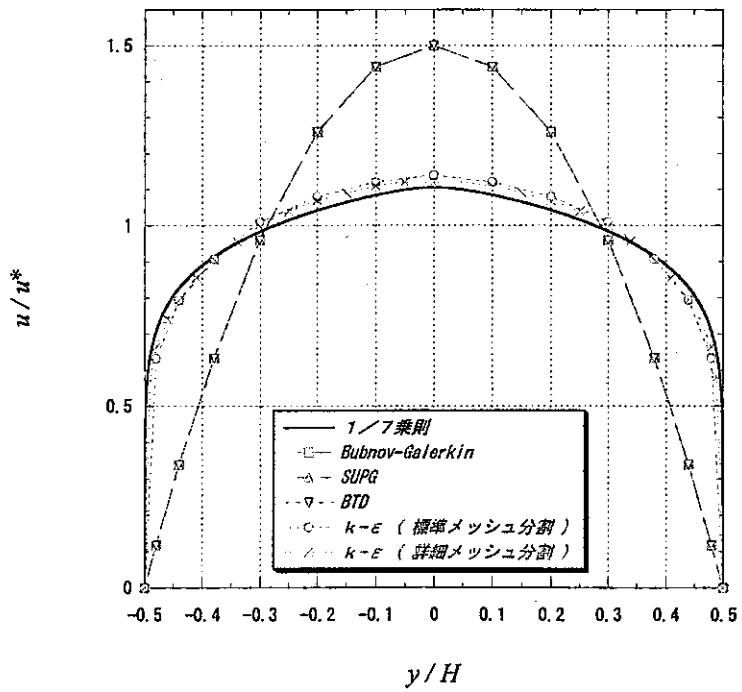


図 6.3 出口境界における流速分布 (  $Re = 10000$  )

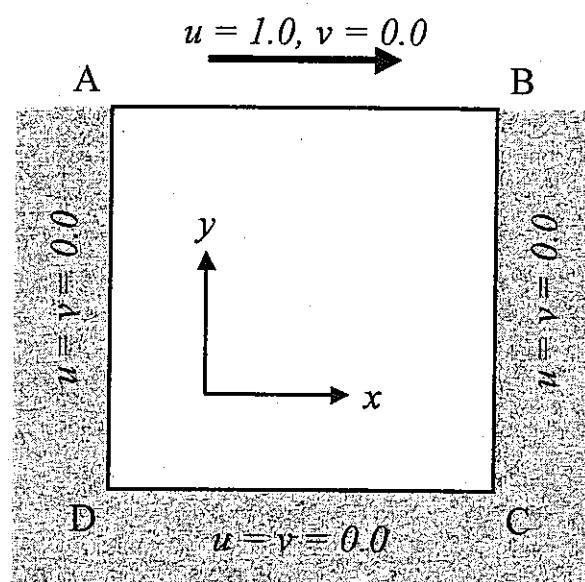


図 6.4 解析体系および境界条件

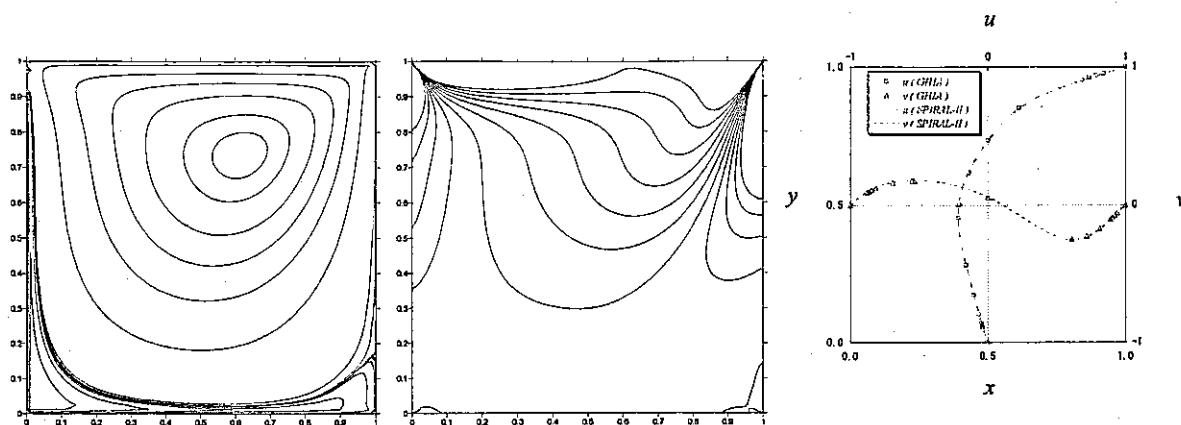


図 6.5(a)  $Re=100$  における解析結果(流線図, 等渦度線図, 水平／鉛直方向流速分布)

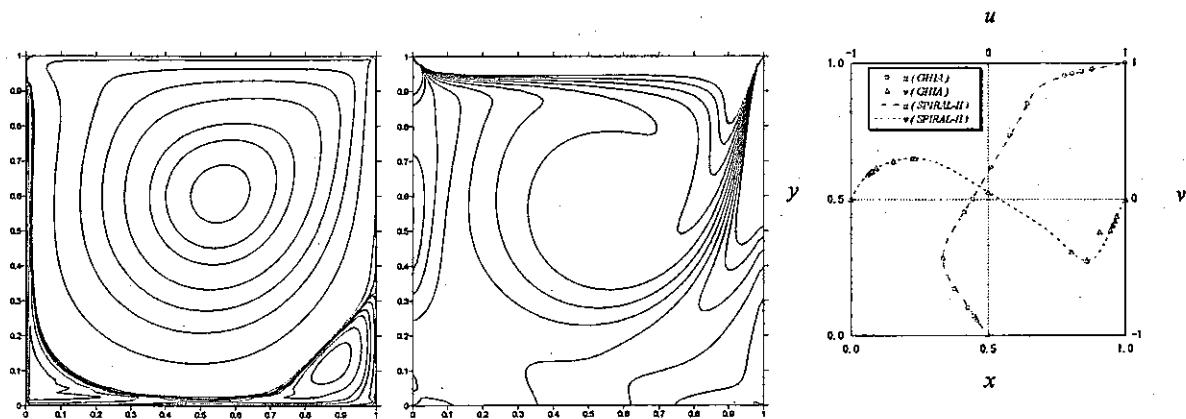


図 6.5(b)  $Re=400$  における解析結果(流線図, 等渦度線図, 水平／鉛直方向流速分布)

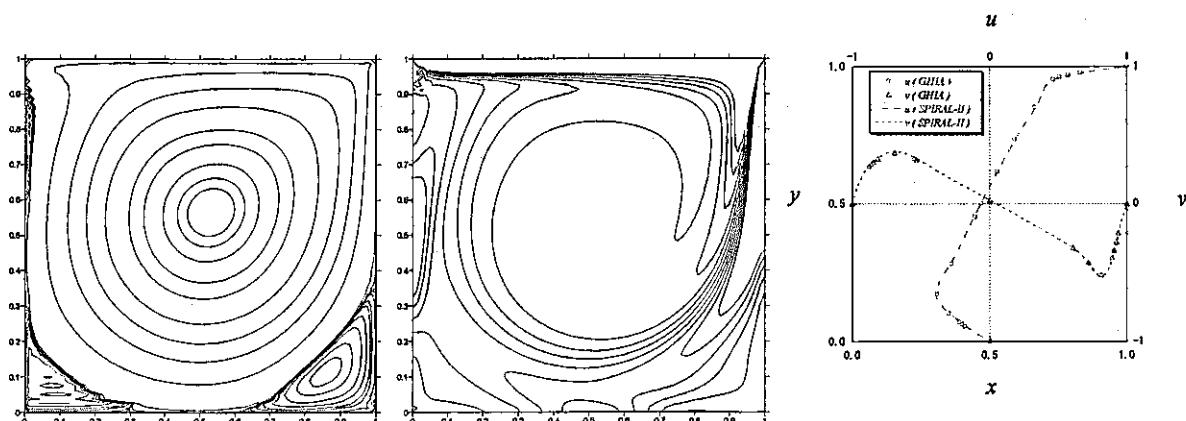


図 6.5(c)  $Re=1000$  における解析結果(流線図, 等渦度線図, 水平／鉛直方向流速分布)

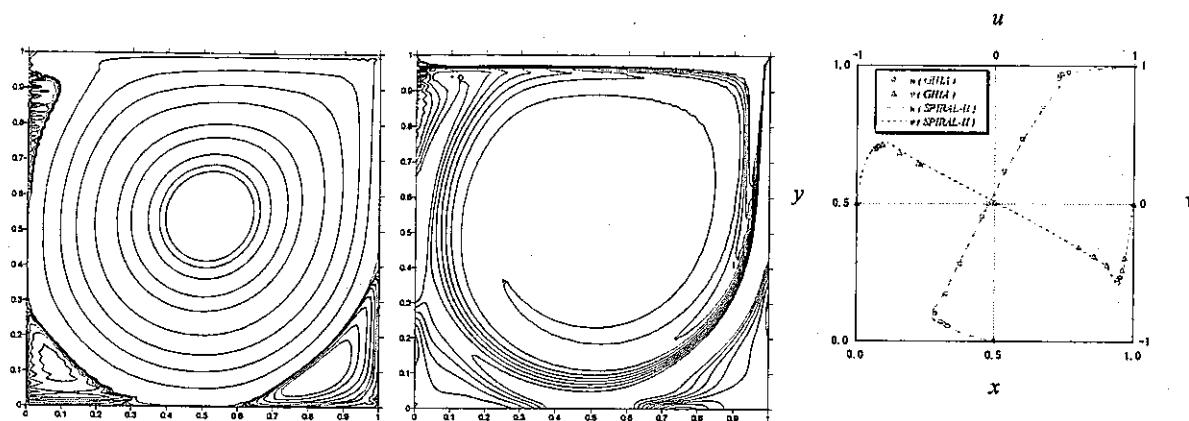


図 6.5(d)  $Re=3200$  における解析結果(流線図, 等渦度線図, 水平／鉛直方向流速分布)

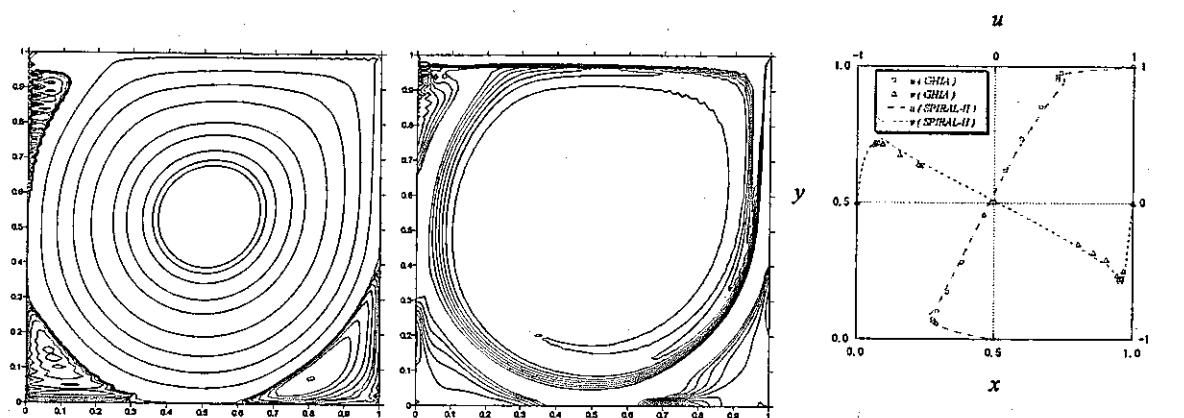


図 6.5(e)  $Re=5000$  における解析結果(流線図, 等渦度線図, 水平／鉛直方向流速分布)

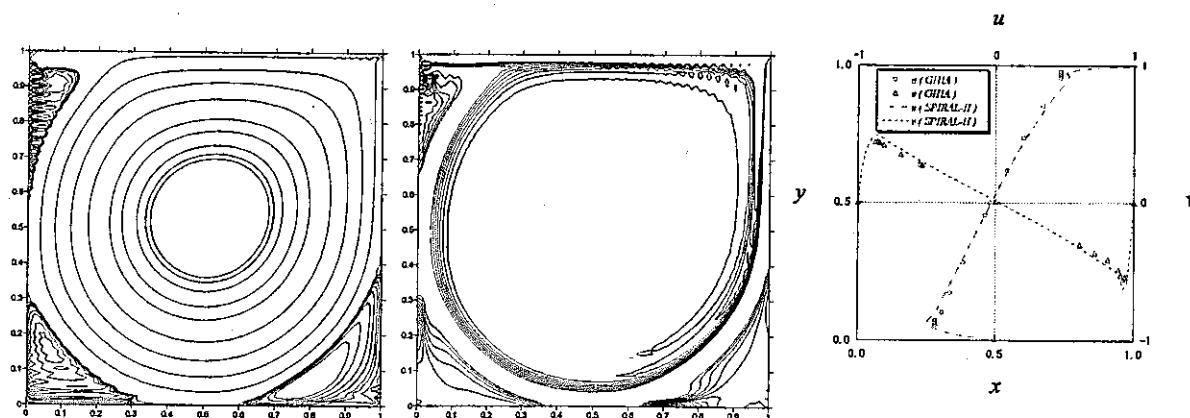


図 6.5(f)  $Re=7500$  における解析結果(流線図, 等渦度線図, 水平／鉛直方向流速分布)

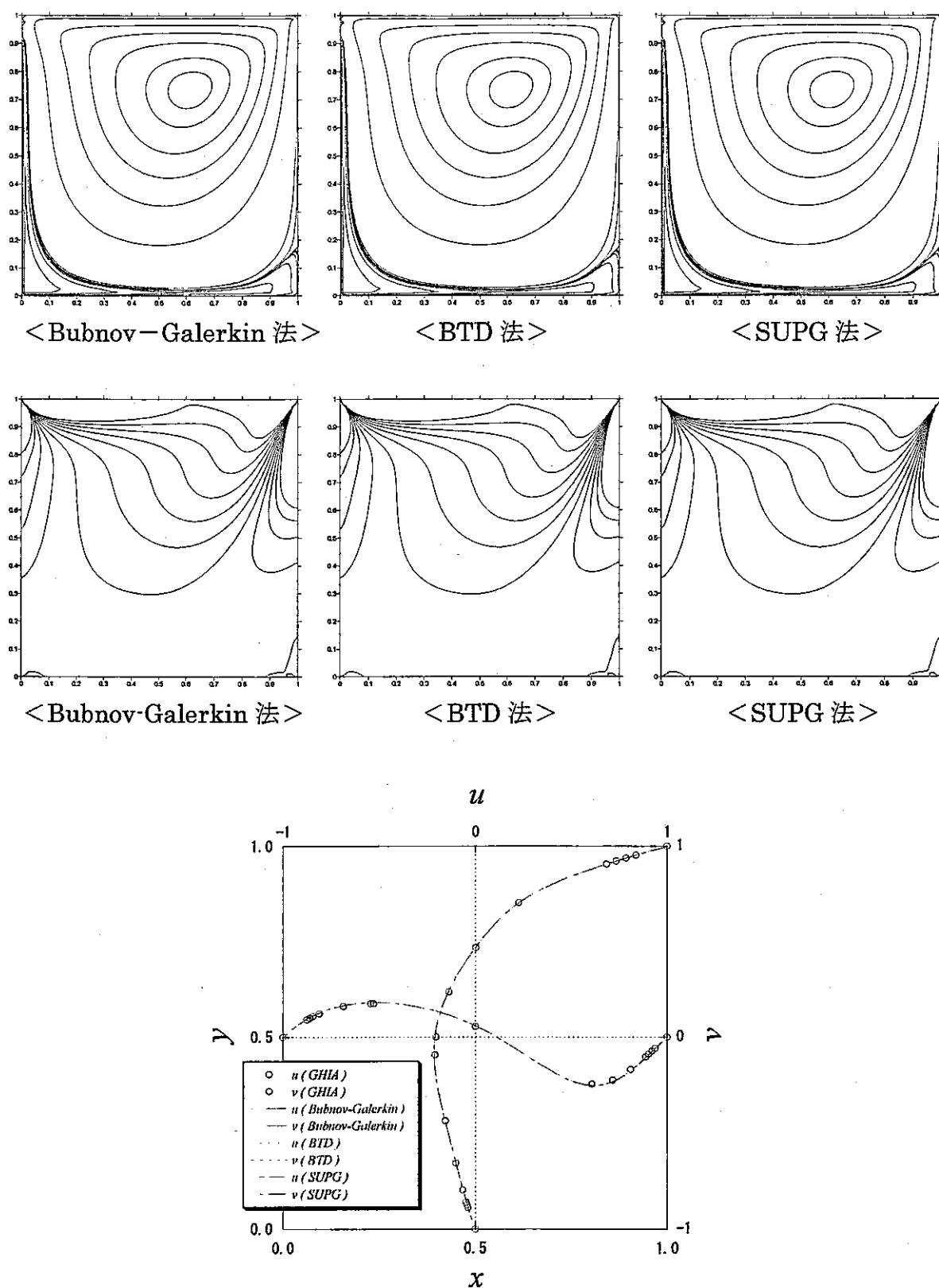


図 6.6 Bubnov-Galerkin 法/BTD 法/SUPG 法の比較 ( $Re = 100$ )

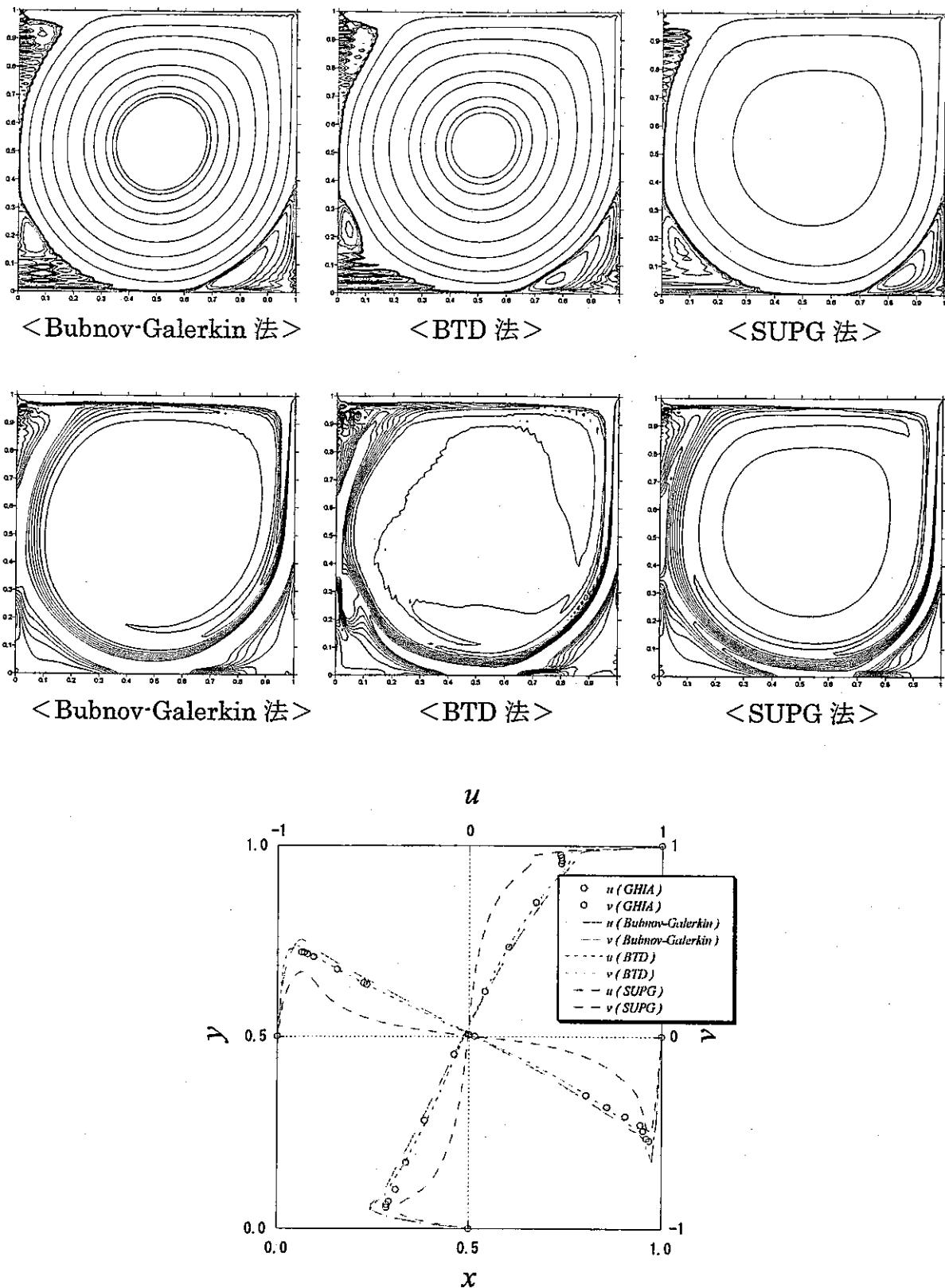


図 6.7 Bubnov-Galerkin 法／BTD 法／SUPG 法の比較 ( $Re = 10000$ )

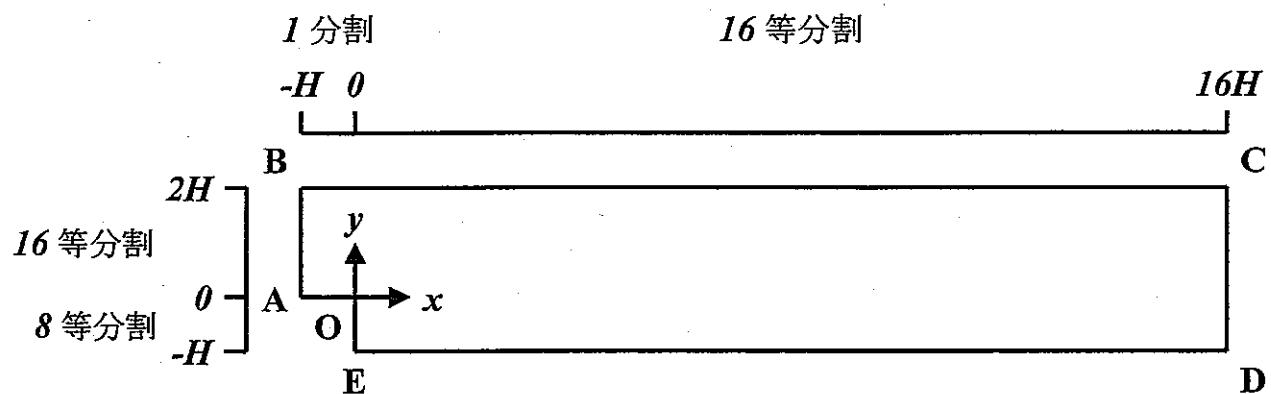


図 6.8 層流バックステップフロー解析領域

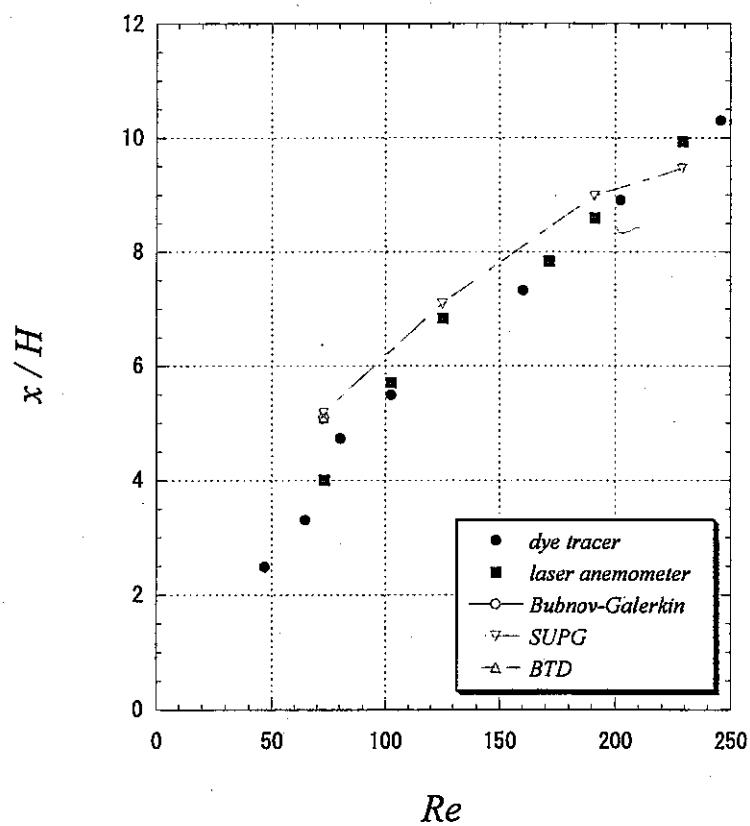


図 6.9 再付着点に関する実験計測値と解析値の比較

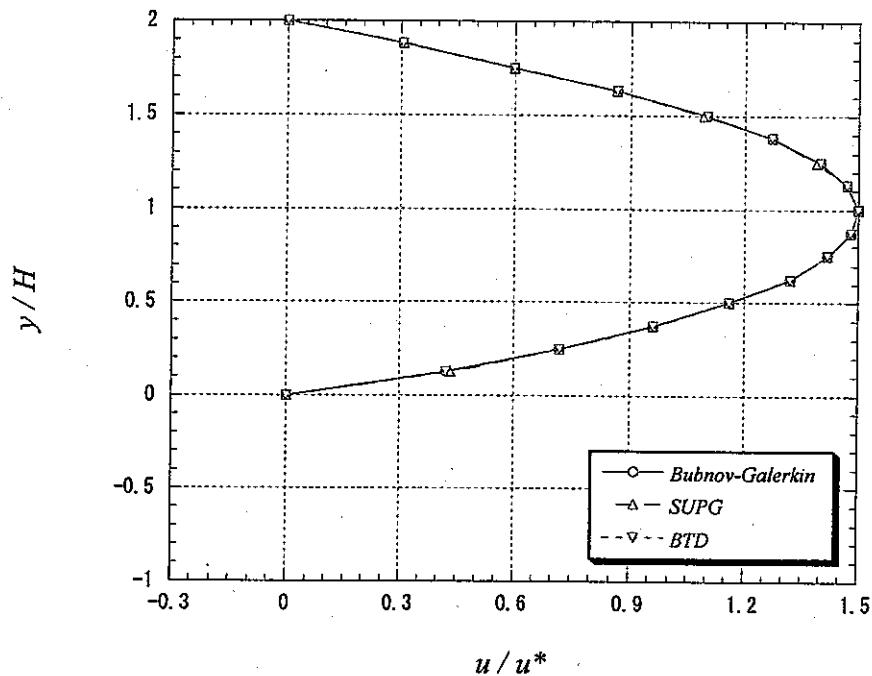


図 6.10 (a)  $x/H=0$  における  $u/u^*$  の分布 (  $Re=73$  )

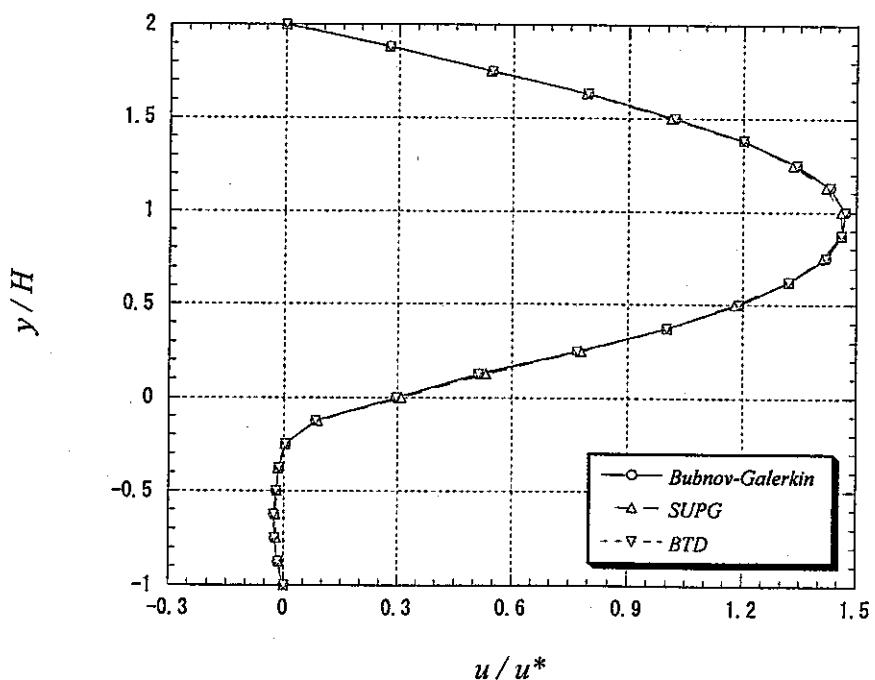


図 6.10 (b)  $x/H=1$  における  $u/u^*$  の分布 (  $Re=73$  )

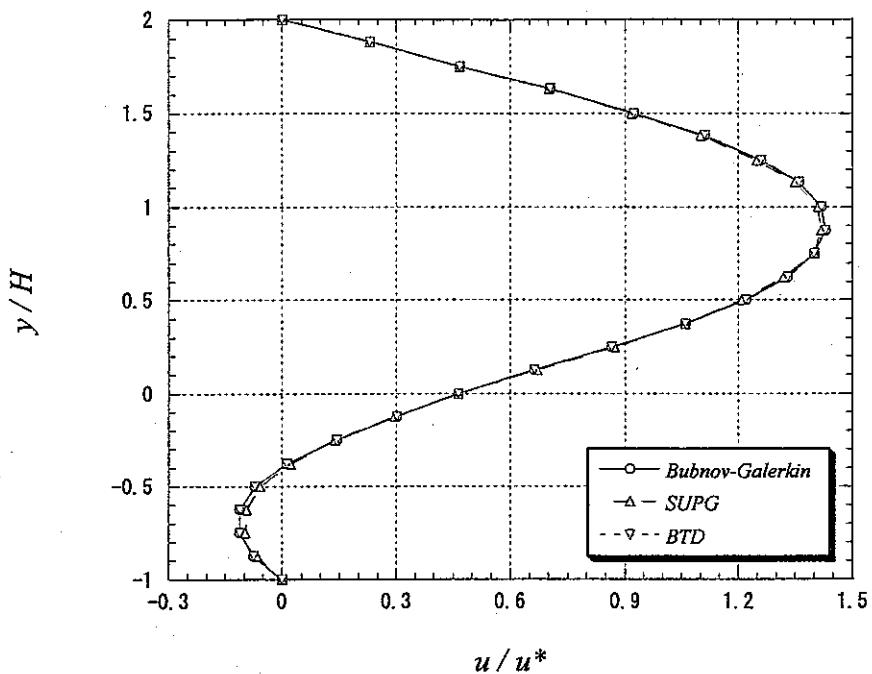


図 6.10(c)  $x/H=2$  における  $u/u^*$  の分布 (  $Re=73$  )

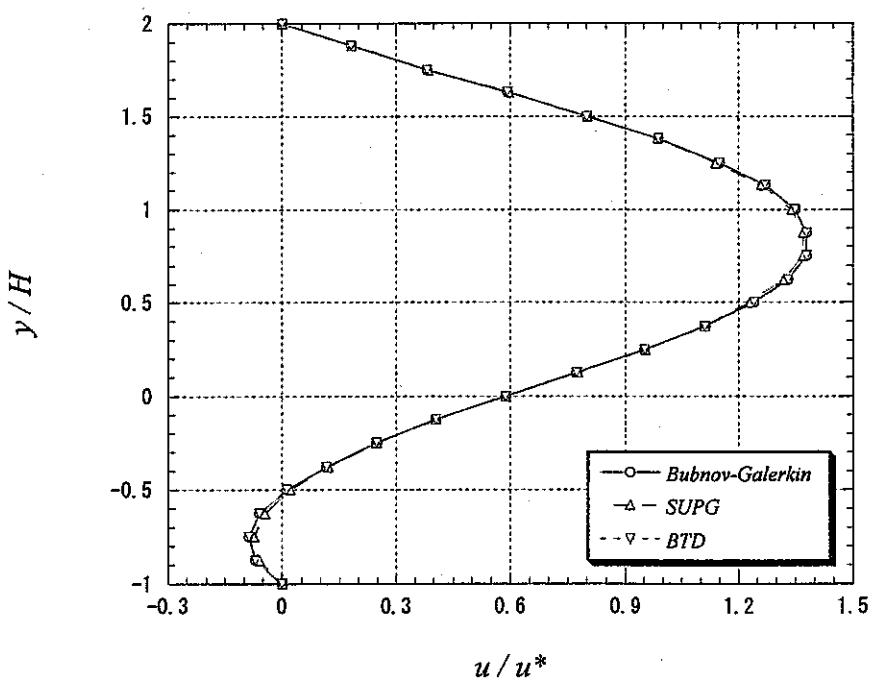


図 6.10(d)  $x/H=3$  における  $u/u^*$  の分布 (  $Re=73$  )

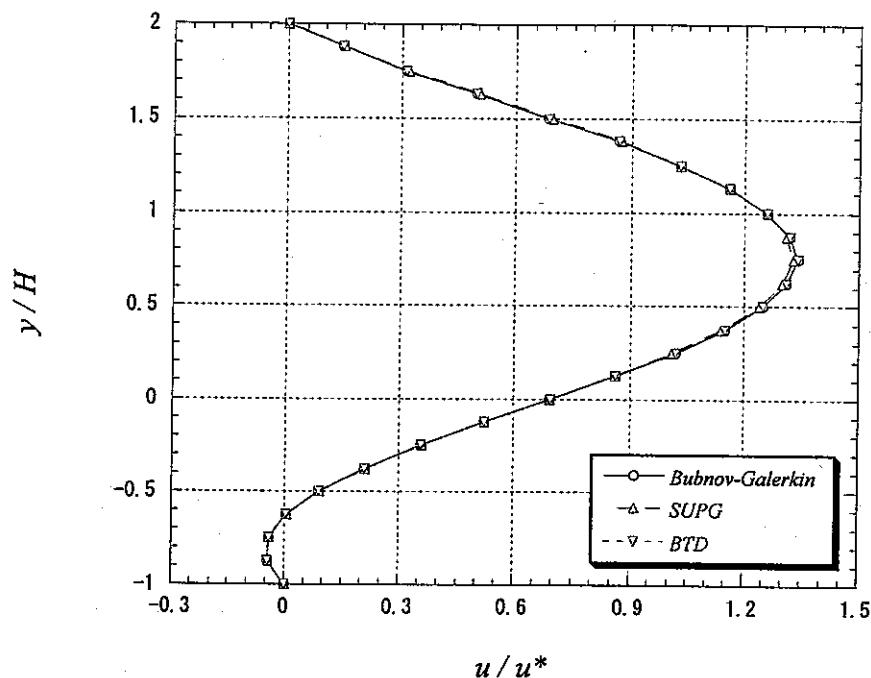


図 6.10 (e)  $x/H=4$  における  $u/u^*$  の分布 (  $Re=73$  )

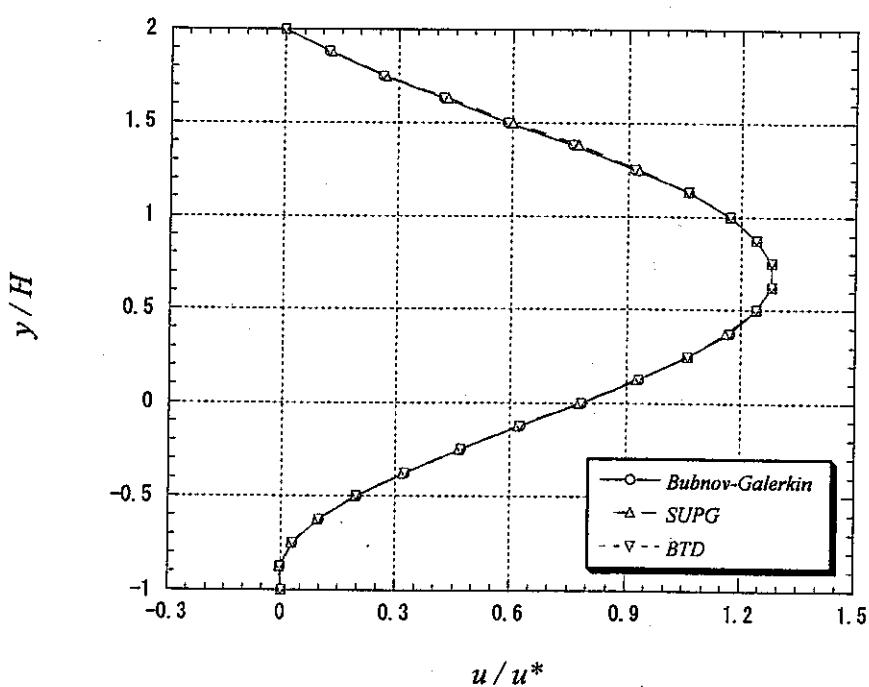


図 6.10 (f)  $x/H=5$  における  $u/u^*$  の分布 (  $Re=73$  )

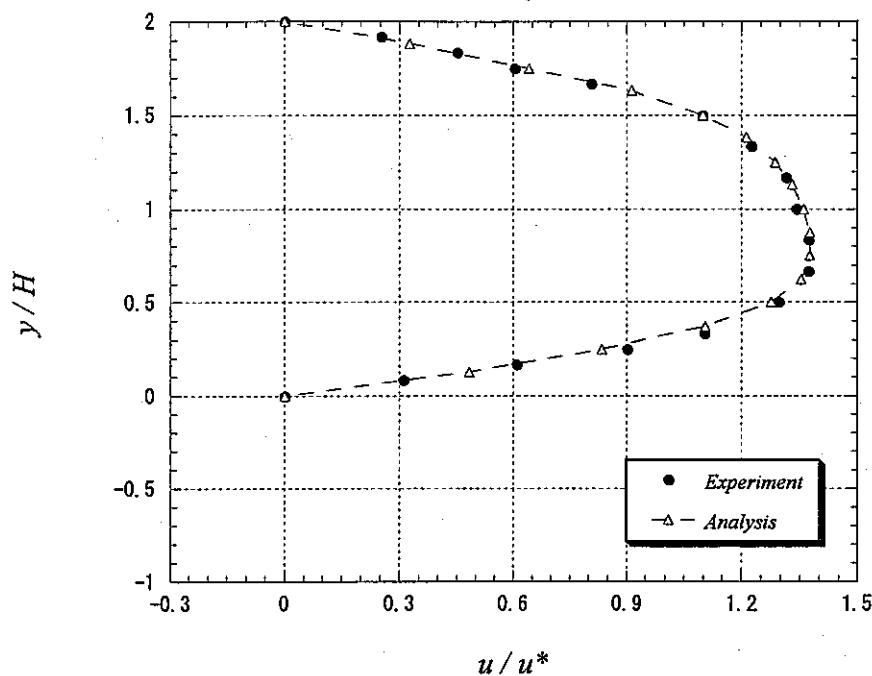


図 6.11 (a)  $x / H = 0$  における  $u / u^*$  の分布 (  $Re = 229$  )

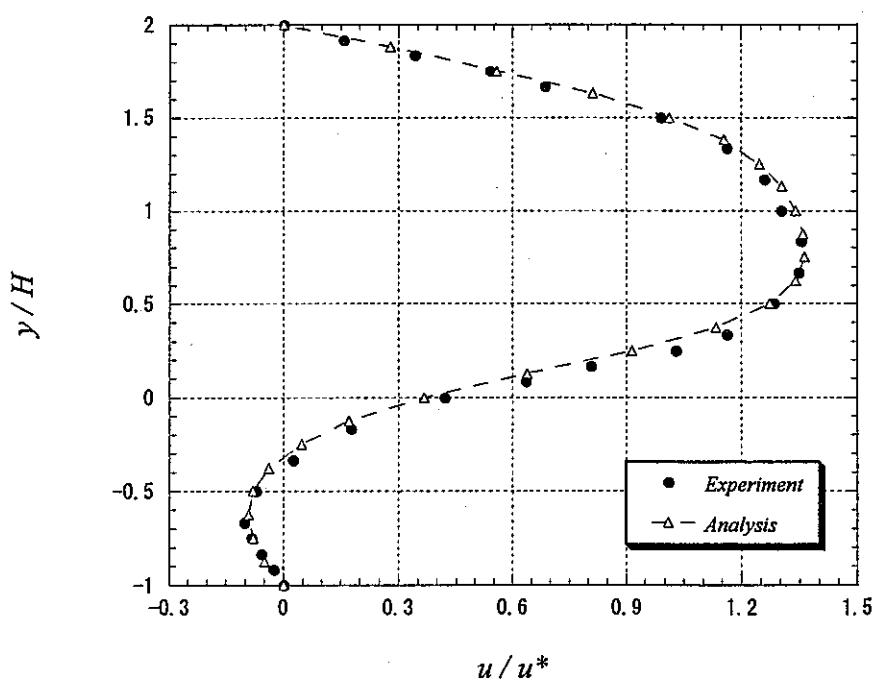


図 6.11 (b)  $x / H = 2$  における  $u / u^*$  の分布 (  $Re = 229$  )

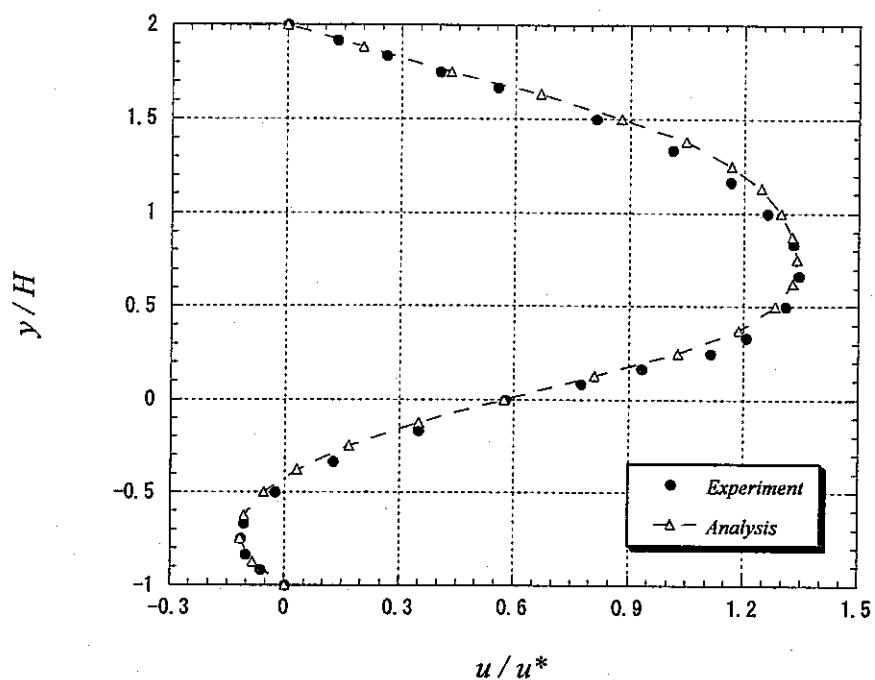


図 6.11(c)  $x / H = 4$  における  $u / u^*$  の分布 (  $Re = 229$  )

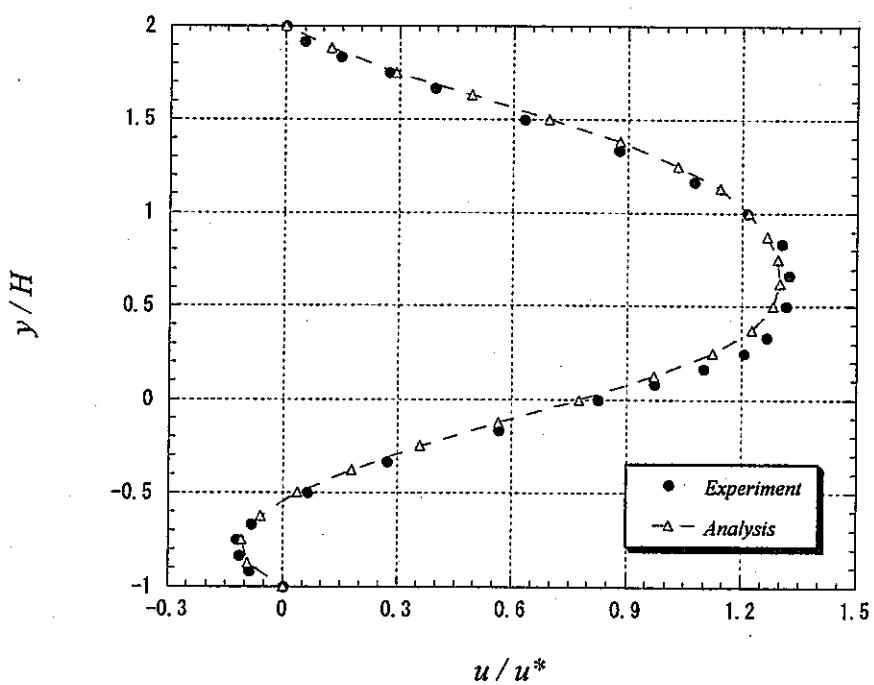


図 6.11(d)  $x / H = 6$  における  $u / u^*$  の分布 (  $Re = 229$  )

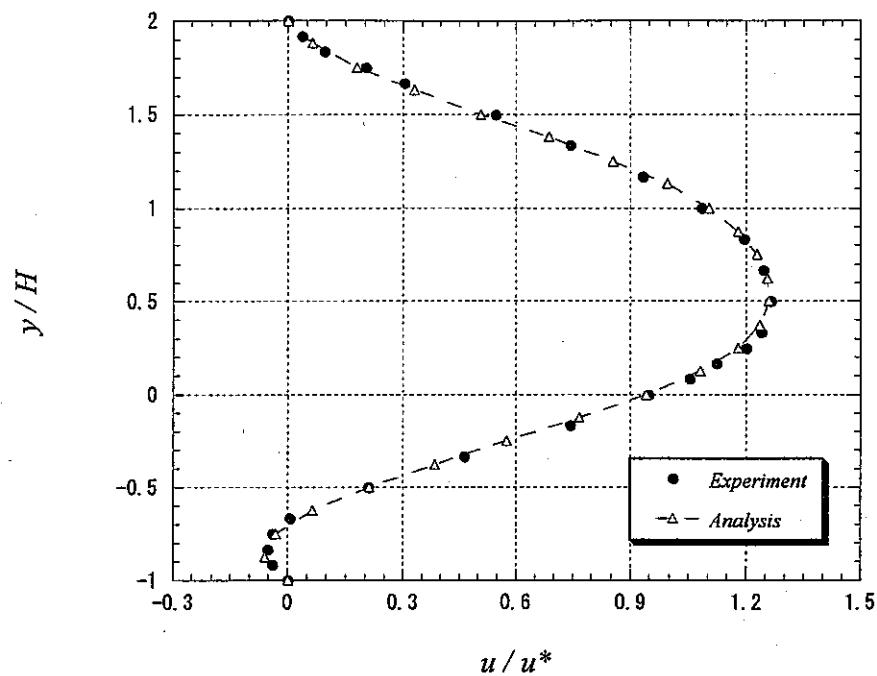


図 6.11 ( e )  $x/H=8$  における  $u/u^*$  の分布 (  $Re=229$  )

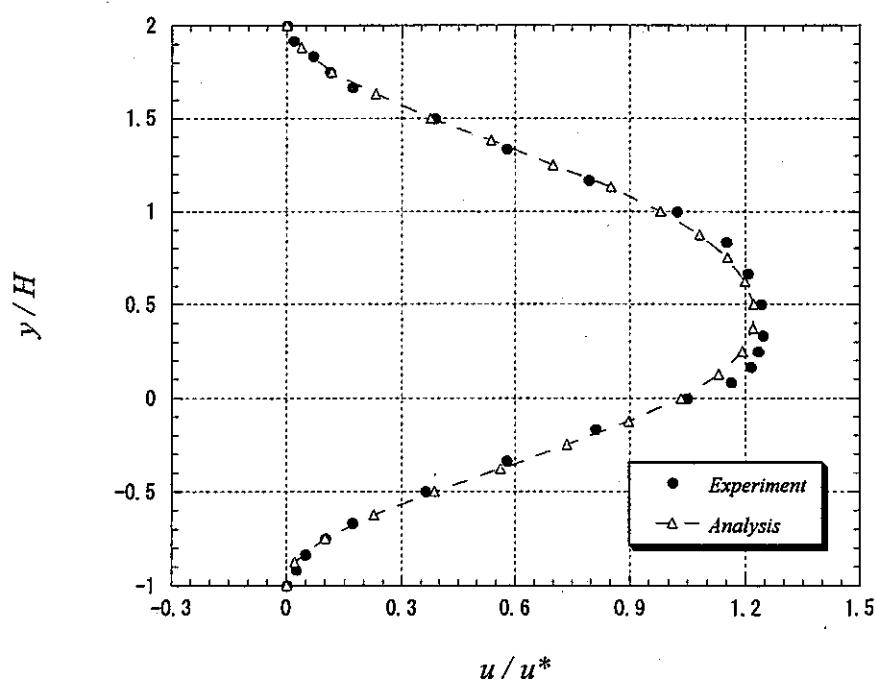


図 6.11 ( f )  $x/H=10$  における  $u/u^*$  の分布 (  $Re=229$  )

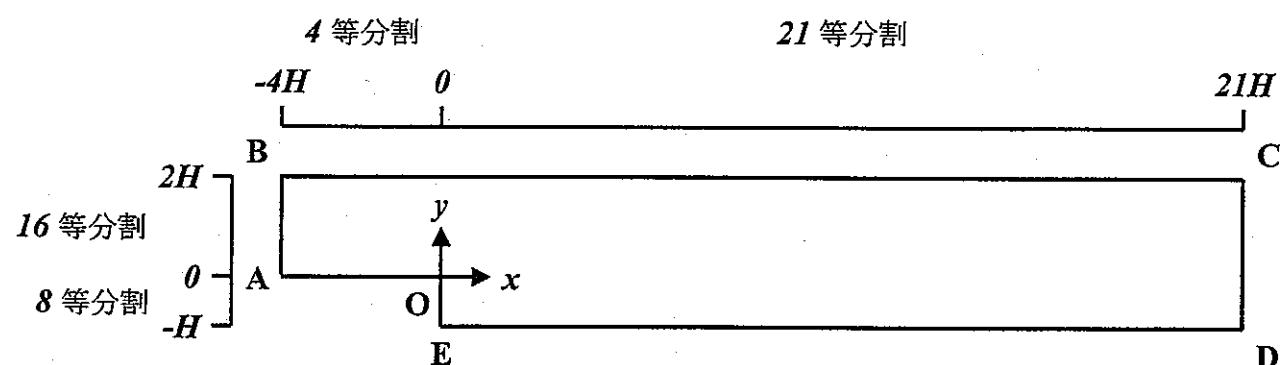


図 6.12 亂流バックステップフロー解析領域

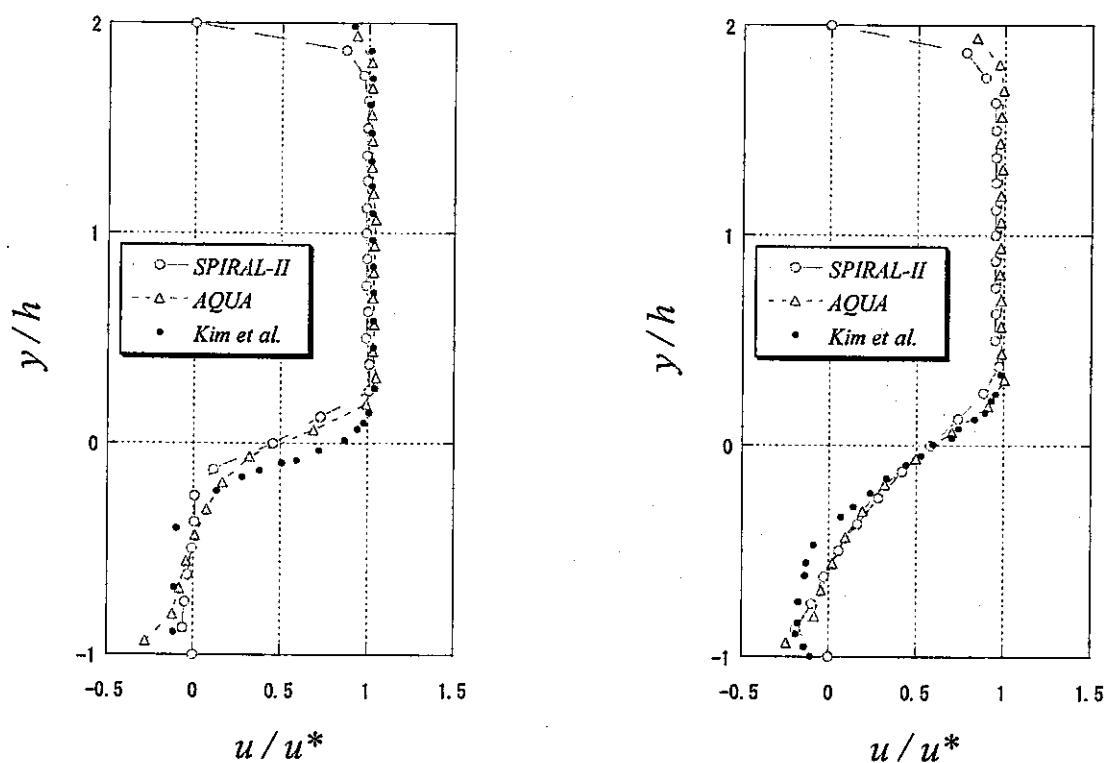
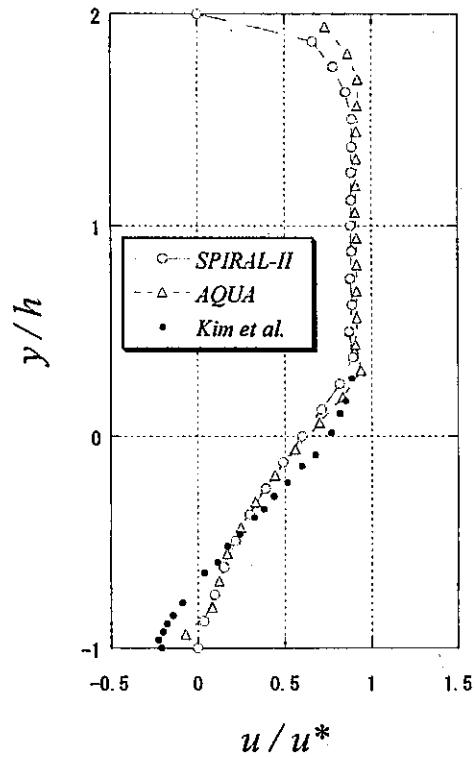
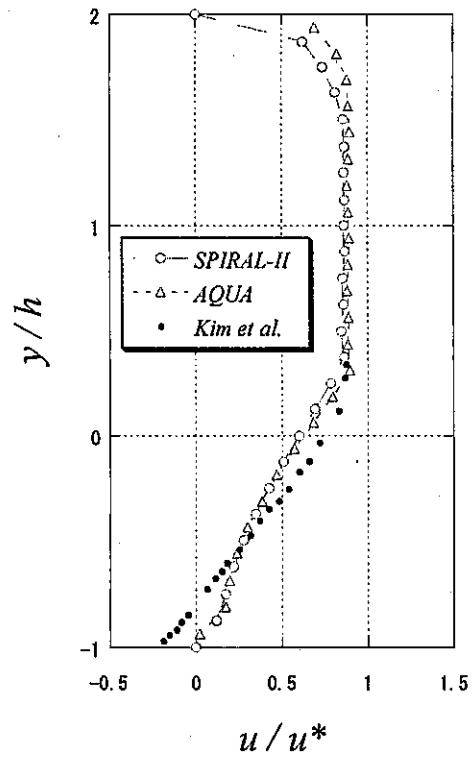
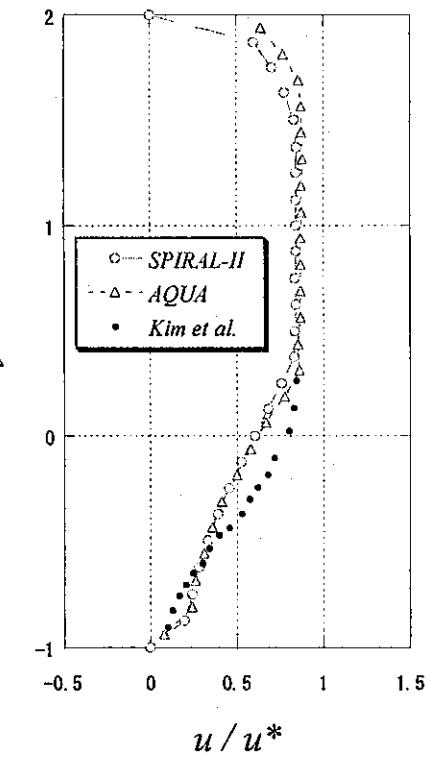
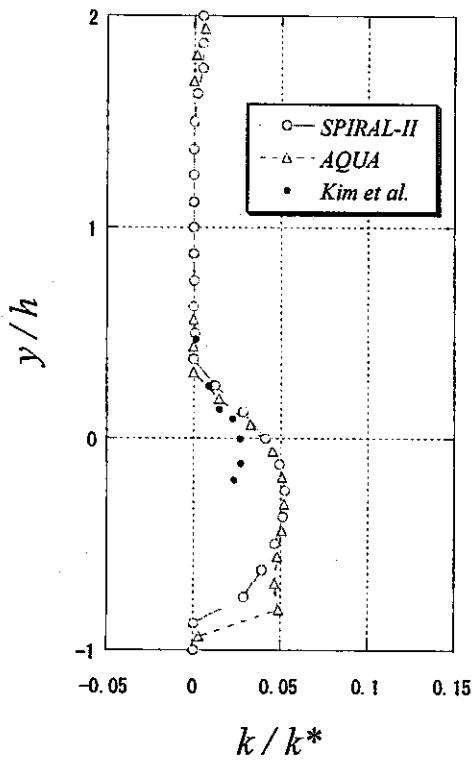
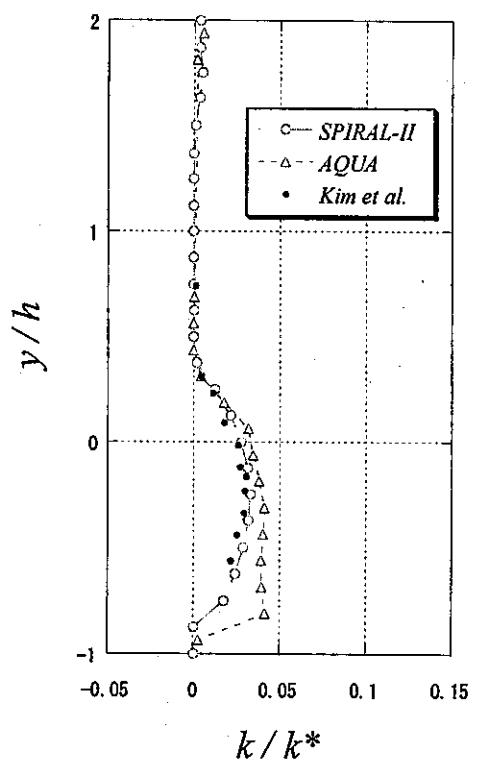
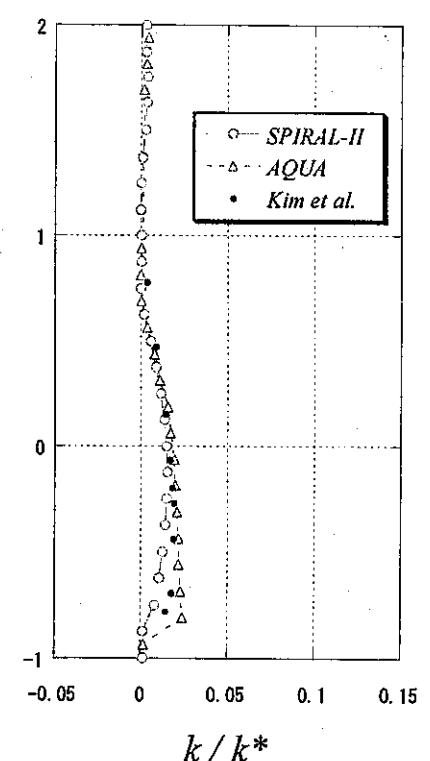


図 6.13 (a)  $u/u^*$  分布 ( $x/H=1$ )

図 6.13 (b)  $u/u^*$  分布 ( $x/H=3$ )

図 6.13 (c)  $u/u^*$  分布 ( $x/H=5$ )図 6.13 (d)  $u/u^*$  分布 ( $x/H=6$ )図 6.13 (e)  $u/u^*$  分布 ( $x/H=7$ )

図 6.14(a)  $k/k^*$  の分布 ( $x/H = 4$ )図 6.14(b)  $k/k^*$  の分布 ( $x/H = 7$ )

## 第7章 まとめ

高速炉燃料集合体内熱流動解析評価システム開発の一環として、有限要素法に基づく複雑空間内詳細熱流動解析コード SPIRAL-II の開発に着手した。これは、計算機処理能力の飛躍的な向上を背景に、これまで用いられてきたサブチャンネル解析手法を高度化するだけでなく、ここで開発する詳細熱流動解析手法と組み合わせることによって、サブチャンネル解析手法で使用される伝熱流動相関式を従来のように試験から導出するのではなく、数値実験から得ようというものである。また、逆にサブチャンネル解析手法による結果を境界条件として、詳細熱流動解析手法により、局所的な被覆管表面温度分布を詳細に求めるなど、燃料健全性評価の精度を向上させることを目的とするものである。数値実験の導入により、従来の試験では計測が困難であったデータの取得も可能となるため、高燃焼度燃料など変形が生じたピンバンドルにおいても高精度な熱流力特性評価が可能となる。

本報告書においては、SPIRAL-II コードの流動解析部に関するプログラミングの内容およびその基本検証解析について述べた。

SPIRAL-II では、形状模擬性に優れるという観点から有限要素法を採用した。支配方程式の離散化には Bubnov-Galarkin 法を用いるとともに、計算安定化のために SUPG 法、BTD 法も選択できるようにした。時間積分には半陰解法 (Fractional Step 法) を用い、圧力方程式の解法には直接法あるいは ICCG 法を適用した。また、乱流の取り扱いとして  $k-\epsilon$  2 方程式モデルを組み込んだ。計算要素については、複雑形状に対応するため流速・圧力とともに六面体 1 次もしくは 2 次、五面体 1 次アイソパラメトリック要素の 3 種類を用意し、この中から自由に組み合わせて用いることも可能とした。

作成した流動解析部の基本性能を確認するため、層流問題として、(1)低レイノルズ数領域における矩形ダクト内 2 次元流れ、(2)キャビティフロー、(3)層流バックステップフローを、乱流問題として、(4)高レイノルズ数領域における矩形ダクト内 2 次元流れ、(5)乱流バックステップフローを取り上げ解析を実施した。その結果、(1)および(2)においては流速分布が理論解／数値実験解と一致し、(3)においても流速分布が実験値とほぼ一致するとともに再付着点位置も高次差分法と同等の予測値を得た。さらに乱流領域においても同様に十分な予測精度を有することを確認した。

今回の作業に引き続き、流動解析部の高度化として  $k-\epsilon$  2 方程式モデルを改良した RNG モデルを導入するとともに、非等方乱流のシミュレーションに対応するため、代数応力モデル(ASM)あるいはレイノルズ応力モデル(RSM)を組み込む予定である。また、次のステップとして、エネルギー方程式を組み込み温度場評価へ適用範囲を拡大するとともに、燃料ピンバンドル体系への適用を図っていく。

## 参考文献

- 1) H. Ohshima, H. Ninokata, "Thermal-Hydraulic Analysis of Fast Reactor Fuel Subassembly with Porous Blockages," 4th International Seminar on Subchannel Analysis (ISSCA-4), Tokyo, 1997.
- 2) 大高 雅彦、大島 宏之、「サブチャンネル解析コード ASFRE-III の検証」、日本原子力学会 1996 春の年会、C22, 1996.
- 3) T. Shimizu, H. Ninokata and H. Shishido, "Distributed parameter analysis for the prediction of the fine structure of flow and temperature fields in wire-wrapped fuel pin bundle geometries." Nucl. Eng. Des., 120, pp369-383, 1990..
- 4) 山口 彰, 「有限要素法による自由液面を含む体系の流動解析コード SPLASH の開発」, PNC TN9410 92-053, 1992.
- 5) A. N. Brooks and T. J. R. Hughes, "Streamline Upwind / Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on The Incompressible Navier-Stokes Equations", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 32, pp199-295, 1982.
- 6) P. Gresho, M. Chen, R. Lee and C. Upson, "A Modified Finite Element Method for Solving The Time Dependant Incompressible Navier-Stokes Equation. Part I. Theory," Int. J. Num. Meth. Fluids, 4, pp557-598, 1984.
- 7) B. E. Launder and D. B. Spalding, "The numerical computation of turbulent flows," Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 3, pp269-289, 1974.
- 8) B. Ramaswamy, M. kawahara, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for the Analysis of Free Surface Fluid Flows," Proc. of Int. Conf. Comp. Mech., Tokyo, 1986.
- 9) C. G. Speziale, "On nonlinear K-l and K- $\varepsilon$  models of turbulence," J. Fluid Mech., 178, pp459-475, 1987.
- 10) 例えば、村田 健郎、他、「スーパーコンピュータ：計算技術計算への適用」、丸善、1985 年。
- 11) 热流動数値解析高度化特別専門委員会, 「原子炉における熱流動数値解析技術の高度化調査報告集 (I)」, 日本原子力学会, 1989.
- 12) U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-grid Method," J. of Comp. Phys., 48, pp387-411, 1982.
- 13) J. Kim, S. J. Kline, J. P. Johnson, "Investigation of a Reattaching Turbulent Shear Layer: Flow over a Backword Facing Step," Trans. ASME, J. of Fluids Eng., 102, p302, 1980.
- 14) 前川 勇他, 「ナトリウム燃焼解析評価手法の開発(4)」, 日本原子力学会 1997 秋の大会, G62, 1997.