

高速炉燃料集合体内詳細熱流動解析手法の開発（2）
—乱流モデルの導入—
(研究報告)

2003年6月

核燃料サイクル開発機構
大洗工学センター

本資料の全部または一部を複写・複製・転載する場合は、下記にお問い合わせください。

〒319-1184 茨城県那珂郡東海村村松 4 番地49
核燃料サイクル開発機構
技術展開部 技術協力課
電話：029-282-1122（代表）
ファックス：029-282-7980
電子メール：jserv@jnc.go.jp

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to:

Technical Cooperation Section,
Technology Management Division,
Japan Nuclear Cycle Development Institute
4-49 Muramatsu, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki 319-1184, Japan

© 核燃料サイクル開発機構
(Japan Nuclear Cycle Development Institute)
2003

高速炉燃料集合体内詳細熱流動解析手法の開発(2) —乱流モデルの導入— (研究報告)

大島 宏之¹ 今井 康友²

要 旨

高燃焼度燃料など高性能化を目指した高速炉燃料集合体の熱流動評価手法として、サブチャンネル解析手法と複雑空間内詳細熱流動解析手法を組み合わせた解析評価システムを構築している。これは、実験では解明が困難な熱流力特性を数値実験によって予測可能とし、合理的な安全設計評価に寄与することを目的とするものである。本報告書は、このシステムを構成する詳細熱流動解析コード SPIRAL-II の開発について、新たに導入した乱流モデルとその基本検証解析について記述するものである。

乱流モデルとしては、標準型 $k - \varepsilon$ 2方程式モデルに加えて、より経験定数が少なく且つ低レイノルズ領域で精度が良いとされる RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル、および非等方性モデルである代数応力モデル (ASM) の組み込みを行った。いずれのモデルも同型の乱流エネルギー k 及び散逸率 ε の輸送方程式を Galerkin 法で離散化して解くが、ASMにおいては拡散項に Daly-Harlow モデルが適用される。ASM では k 及び ε 等から代数式によりレイノルズ応力を求めるため、反復法(Newton-Raphson 法)を用いた。壁境界条件としては、いずれのモデルを使用する際にも壁関数 (Reichardt 関数) を適用した。

基本検証解析として、平行平板間流れ、バックステップフロー、矩形ダクト内流れ解析を行った。これらの結果から 3 つの乱流モデルの予測特性を把握するとともに、その妥当性を確認した。

1 : 大洗工学センター 要素技術開発部 流体計算工学研究グループ

2 : 株式会社エヌデーター

**Development of Computer Program for Detailed Thermal-Hydraulic
Analysis in a Fast Reactor Fuel Subassembly (2)
— Incorporation of Turbulence Models —**

H. Ohshima¹ and Y. Imai²

ABSTRACT

As a thermal-hydraulic evaluation tool for fast reactor fuel subassemblies with high burn-up ratio, a numerical analysis system in which a subchannel analysis program and a detailed thermal hydraulic analysis program are utilized interactively is under development. This system enables us not only to clarify thermal hydraulic characteristics that cannot be revealed by experiments due to measurement difficulty but also to contribute to the rational safety design and assessment. This report describes the incorporation of turbulence models to the detailed thermal hydraulic analysis program SPIRAL-II and its verification study.

In addition to the standard $k-\varepsilon$ two-equation model, Renormalization Group (RNG) $k-\varepsilon$ model and Algebraic Stress Model (ASM) were incorporated to SPIRAL-II as turbulence models. The former utilizes fewer empirical constants than the standard $k-\varepsilon$ model and is believed to be more accurate especially in low Reynolds number regions. The latter treats Reynolds stresses directly and therefore has applicability to anisotropic turbulent flow. It is common for three models that similar transport equations for turbulent kinetic energy k and dissipation rate ε are discretized and solved by Galerkin method. With respect to ASM, Daly-Harlow model is applied to the diffusion terms of the transport equations and algebraic expressions related to Reynolds stresses are solved by Newton-Raphson method using calculated k and ε . A wall function (Reichardt function) is applied to each model as the boundary condition treatment.

A verification study of improved SPIRAL-II was carried out using three kinds of problems: turbulent flow between parallel walls, backstep facing turbulent flow and turbulent flow in a square duct. From these calculation results, the validity of the improved program was confirmed and prediction characteristics of each turbulent model were clarified.

1: Thermal-Hydraulic Research Group, Advanced Technology Division, O-arai Engineering Center, Japan Nuclear Cycle Development Institute

2: NDD Inc.

< 目 次 >

要旨	i
図表リスト	iv
記号表	vi
 第 1 章 緒言	 1
 第 2 章 乱流モデル概要	 3
2. 1 基礎方程式	3
2. 2 乱流モデル	4
2. 2. 1 標準型 $k - \varepsilon$ 2 方程式モデル	4
2. 2. 2 RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル	4
2. 2. 3 応力方程式モデル	5
2. 2. 4 代数応力モデル	8
 第 3 章 数値計算法	 10
3. 1 時間積分方程式	10
3. 2 重み付き残差方程式	11
3. 3 有限要素方程式	13
3. 4 壁近傍領域のモデル化	17
3. 5 乱流エネルギーと散逸率の補正	20
 第 4 章 検証解析	 23
4. 1 平行平板間乱流	23
4. 2 乱流ステップフロー	24
4. 2. 1 Kim らの実験による検証	25
4. 2. 2 Kasagi らの実験による検証	26
4. 3 矩形ダクトフロー	27
4. 3. 1 Fujita らの実験による検証	27
4. 3. 2 Sata らの実験による検証	28
 第 5 章 結言	 58
参考文献	59
付録	61

図表リスト

第3章

表 3.1	層流／乱流計算時における移流項の計算負荷の比較	21
図 3.1	有限要素法による壁近傍領域のモデル化	22

第4章

表 4.1	平行平板間乱流 摩擦流速 u_t / U_c の比較	30
表 4.2	平行平板間乱流 計算所要時間	30
表 4.3	乱流ステップフロー 計算所要時間	31
表 4.4	乱流ステップフロー 入口境界条件	32
図 4.1	平行平板間乱流 解析領域と要素分割	33
図 4.2	流速 u / U_c の分布	34
図 4.3	乱流エネルギー k / U_c^2 の分布	34
図 4.4	流速の変動成分 u_{rms} / U_c の分布	35
図 4.5	流速の変動成分 v_{rms} / U_c の分布	35
図 4.6	流速の変動成分 w_{rms} / U_c の分布	36
図 4.7	Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} / U_c^2 の分布	36
図 4.8	乱流ステップフロー 解析領域と要素分割	37
図 4.9	流速、乱流エネルギーの分布	38
図 4.10 (a)	$x / H = 1$ における流速 u / u_{in} の分布	40
図 4.10 (b)	$x / H = 3$ における流速 u / u_{in} の分布	40
図 4.10 (c)	$x / H = 5$ における流速 u / u_{in} の分布	41
図 4.10 (d)	$x / H = 6$ における流速 u / u_{in} の分布	41
図 4.10 (e)	$x / H = 7$ における流速 u / u_{in} の分布	42
図 4.11 (a)	$x / H = 4$ における乱流エネルギー k / u_{in}^2 の分布	42
図 4.11 (b)	$x / H = 7$ における乱流エネルギー k / u_{in}^2 の分布	43
図 4.11 (c)	$x / H = 13$ における乱流エネルギー k / u_{in}^2 の分布	43
図 4.12	乱流エネルギー輸送方程式の収支	44
図 4.13	散逸率輸送方程式の収支	45
図 4.14	流速、乱流エネルギーの分布	46
図 4.15	流速 u / U_c の分布	47
図 4.16	流速 v / U_c の分布	47
図 4.17	乱流エネルギー k / U_c^2 の分布	47
図 4.18	流速の変動成分 u_{rms} / U_c の分布	48
図 4.19	流速の変動成分 v_{rms} / U_c の分布	48
図 4.20	流速の変動成分 w_{rms} / U_c の分布	48

図 4.21	乱流エネルギー輸送方程式の収支	49
図 4.22	散逸率輸送方程式の収支	50
図 4.23	矩形ダクトフロー 解析領域と要素分割	51
図 4.24	主流方向流速 u / U_c の分布	52
図 4.25	断面方向流速 (v, w) の分布	52
図 4.26	乱流エネルギー k / U_c^2 の分布	52
図 4.27	流速の変動成分 u_{rms} / U_c の分布	53
図 4.28	流速の変動成分 v_{rms} / U_c の分布	53
図 4.29	流速の変動成分 w_{rms} / U_c の分布	53
図 4.30	Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} / U_c^2 の分布	54
図 4.31	Reynolds 応力の剪断成分 R_{xz} / U_c^2 の分布	54
図 4.32	Reynolds 応力の垂直成分差 $(R_{yy} - R_{zz}) / U_c^2$ の分布	54
図 4.33	主流方向流速 u / U_c の分布	55
図 4.34	断面方向流速 (v, w) の分布	55
図 4.35	乱流エネルギー k / U_c^2 の分布	55
図 4.36	流速の変動成分 u_{rms} / U_c の分布	56
図 4.37	流速の変動成分 v_{rms} / U_c の分布	56
図 4.38	流速の変動成分 w_{rms} / U_c の分布	56
図 4.39	Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} / U_c^2 の分布	57
図 4.40	Reynolds 応力の剪断成分 R_{xz} / U_c^2 の分布	57
図 4.41	Reynolds 応力の剪断成分 R_{yz} / U_c^2 の分布	57

記号表

\bar{A}	: A の平均成分
A'	: A の変動成分
C_k 、 C_ϵ 、 C_{ij}	: 乱流エネルギー、散逸率、Reynolds 応力の移流項
D_k 、 D_ϵ 、 D_{ij}	: 乱流エネルギー、散逸率、Reynolds 応力の拡散項
E_{ij}	: 歪速度
E_k 、 E_ϵ 、 E_{ij}	: 乱流エネルギー、散逸率、Reynolds 応力の散逸項
f_i	: 外力
J	: Jacobi 行列
k	: 乱流エネルギー
n_i	: 境界面の単位法線
P	: 圧力
P_k 、 P_ϵ 、 P_{ij}	: 乱流エネルギー、散逸率、Reynolds 応力の生成項
R_{ij}	: Reynolds 応力
t	: 時刻
u_i	: 流速
u_i^\dagger	: 近似流速
u^+	: 壁流速 ($u^+ = u / u_\tau$)
u_τ	: 摩擦流速
W	: Gauss 積分の重み係数
x_i	: 座標
y	: 壁法線距離
y^+	: 壁座標 ($y^+ = u_\tau y / \nu$)
δ_{ij}	: Kronecker の d 関数
ϵ	: 散逸率
κ	: Karman 定数
ν	: 動粘性係数
ν_t	: 乱流粘性係数
τ_{ij}	: 応力
τ_w	: 壁面応力
Φ_{ij}	: 壓力歪相関項
Φ_α	: Bubnov-Galerkin 法の重み関数 = 形状関数 = 内挿関数
Ψ_α	: Petrov-Galerkin 法の重み関数

上付き添え字

- l : Gauss 積分点番号
 n : タイムステップ
 $*$: 重み関数

下付き添え字

- i 、 j 、… : 座標軸方向
 rms : Root-Means-Square 値
 α 、 β 、… : 節点番号

第1章 緒 言

高速炉の経済性向上には、高線出力化や高燃焼度化といった燃料の高性能化が1つの有力な方法である。これを実現するためには、従来の設計で見込まれてきた過度な保守性を排除し裕度の合理化を図るとともに、新たに様々な運転条件と燃料ピンの変形を重ね合わせたような条件での燃料健全性評価が行える評価手法の構築が必要である。熱流動的には、ワイヤースペーサの存在により複雑となる燃料集合体内熱流力挙動の詳細な解明および被覆管表面温度分布の予測が不可欠となる。

燃料集合体内熱流力挙動の把握には、これまで水あるいはナトリウムなどの作動流体を用いた実験的解明や、サブチャンネル解析手法を用いた評価がなされてきた。前者については、設計が明確に確定していれば、モックアップ実験等を行うことにより熱流力挙動のおおよその把握は可能であるが、設計研究や安全評価で想定される複数の形状あるいは条件ごとに実験を実施するのは時間的にも経済的にも負担が大きい。また、複雑形状ゆえに計測自体が比較的難しいものが多く、特にナトリウムを作動流体とした場合、計測技術の観点から様々な制約があり、必要十分なデータの取得は容易ではない。一方、後者のサブチャンネル解析手法は、実験より得られる断片的なデータを補完するあるいは解釈するために有効な手段であるが、この解析手法も主に実験データから抽出される伝熱流動相関式あるいは各種モデルパラメータを必要とするものである。従って、その予測精度は利用する実験データの計測精度に大きく左右されるとともに、適用範囲も実験計測可能な領域に限定されてしまう場合がある。相関式等の外挿性も必ずしも高くない場合が多く、新しいタイプあるいは条件での熱流力特性評価を行う場合、その信頼性を確保するためには何らかの方法で外挿性の確認をする必要がある。また、サブチャンネル解析手法で取り扱う計算メッシュ分割法のため、燃料被覆管表面の詳細な温度分布を求めるには限界がある。以上のことから、従来の方法のみでは、予測精度のさらなる向上は望めないことになる。

本研究は、昨今の計算機処理能力の飛躍的な向上を背景に、従来のサブチャンネル解析手法と局所詳細解析手法を開発・組み合わせることによってこれまでの限界を打破し、より合理的にかつ精度の高い燃料集合体内熱流力評価手法の確立を図ることを目的とする。すなわち、様々な制約があった実験に代えて、局所詳細解析手法を用いることにより、燃料ピンバンドルの変形を含む複雑形状下においてより広範な条件に対応できる相関式あるいはモデルパラメータの導出を可能とし、これをサブチャンネル解析コードに適用し燃料集合全体の熱流力挙動を予測するものである。また、逆にサブチャンネル解析の結果を境界条件として、被覆管表面温度分布など局所詳細な評価を行うことを可能とするものである。実験は必要に応じて基礎的なものだけを行えばよく、モックアップのような大型試験は不要となる。大掛かりな実験の介在を回避できることから、時間的にもコスト的にも合理的に評価を行うことが可能となる。

燃料集合全体の熱流力挙動を評価するサブチャンネル解析コードには、流体計算

工学研究グループで開発してきた ASFRE コード^[1]を適用する。ASFRE コードは、低流量から高流量条件まで、また局所閉塞事象などの異常事象の解析にも適用できる非定常コードであり、水やナトリウム試験データをもとに多くの検証解析がなされてきた実績を有する（例えは[2]）。他のサブチャンネル解析コードに比べて、プリミティブな相関式を組み合わせてモデル化がなされていることから、ワイヤースペーサ型燃料集合体への適用性が高いという特徴を有する。一方、局所詳細解析コードとしては有限要素法を用いた SPIRAL-II^[3]を開発・適用する。

本報告書は、局所詳細非定常解析コード SPIRAL-II の開発・整備に関して、第 2 報として乱流モデルの高度化についてまとめたものである。前報^[3]までに整備された SPIRAL-II コードの概要は以下のとおりである。

数値解析法	: Galerkin 有限要素法
時間積分法	: Fractional step 法 ^[4]
数値安定化法	: SUPG 法 ^[5] 、BTD 法 ^[6]
乱流モデル	: 標準型 $k - \varepsilon$ 2 方程式モデル ^[7]
圧力方程式行列解法	: Cholesky 法（直接法）、ICCG 法（反復法）

標準型 $k - \varepsilon$ 2 方程式モデルは、工学的に最も標準的に利用される時間平均型乱流モデルであり、比較的低い計算コストで乱流の特性を再現することができる特徴を有する。しかしながら、使用されるモデルパラメータ群は、基礎的な理論や実験によって求められたものであり、燃料集合体内部の複雑な流れを詳細に解こうとする場合には、チューニングが必要である。本報告では、さらなる予測精度の向上と適用範囲の拡張を行うことを目的として、このモデルに加えて、新たに RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル^[8]および代数応力モデル^[9]を導入する。RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルは標準型 $k - \varepsilon$ モデルを改良したもので、1つを除くすべてのモデルパラメータを、乱流の統計的な研究に基づいた繰り込み群理論により求めることができるため、比較的広範囲な流れに対して適用可能である。また、代数応力モデルは、乱流の非等方性が顕著な流れに対して有効であり、且つ応力方程式モデルに比べて低い計算コストで済むという長所を持つ。

第 2 章において、各乱流モデルの概要とその離散化法、および数値計算法を述べる。また、第 3 章では導入した乱流モデルの計算妥当性、予測特性を確認するために実施した基本検証解析について述べる。

第2章 亂流モデル概要

本章では、SPIRAL コードに組み込まれる時間平均型の乱流モデル、標準型／RNG 型 $k - \varepsilon$ 2 方程式モデル、および代数応力モデル (Algebraic Stress equation Model ; ASM) について述べる。

2. 1 基礎方程式

非圧縮性粘性流体の流動現象は、連続の式(2.1)、Navier-Stokes 方程式(2.2)を用いて記述される。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \cdots (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + f_i \quad \cdots (2.2)$$

(2.1)、(2.2)において、 u_i 、 P は瞬時における流速、圧力である。

Reynolds 平均を用いて、瞬時における流速、圧力を平均成分と変動成分の和で表せば、

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad \cdots (2.3)$$

$$P = \bar{P} + P' \quad \cdots (2.4)$$

(2.3)、(2.4)を、連続の式(2.1)、Navier-Stokes 方程式(2.2)に代入して時間平均をとれば、平均流に関する連続の式(2.5)、Navier-Stokes 方程式(2.6)が得られる。

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \cdots (2.5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - R_{ij} + \bar{f}_i \quad \cdots (2.6)$$

(2.6)において、 R_{ij} は乱流の特性を表現する Reynolds 応力であり、次式で定義される。

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \quad \cdots (2.7)$$

Reynolds 応力は未知変数であるため、平均流に関する連続の式(2.5)、Navier-Stokes

方程式(2.6)を連立させた方程式は数学的に閉じていない。方程式を閉じて流速、圧力を求めるには、未知変数である Reynolds 応力を既知変数である時間平均量から近似する、乱流のモデル化が必要となる。

2. 2 乱流モデル

2.2.1 標準型 $k - \varepsilon$ 2方程式モデル^[7]

$k - \varepsilon$ モデルでは、勾配拡散の線形近似に基づいた Boussinesq 湍粘性モデルを用いて、Reynolds 応力 R_{ij} を次式でモデル化する。

$$R_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \cdots (2.8)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \cdots (2.9)$$

乱流エネルギー k と散逸率 ε は、それぞれの輸送方程式から求められる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = D_k + P_k - \varepsilon \quad \cdots (2.10)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad \cdots (2.11)$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$$

$$P_k = -R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 2\nu_t E_{ij} E_{ij} , \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

(2.9)、(2.10)、(2.11)のモデル定数として、格子乱流などの実験から得られた次の値を用いる。

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \quad \cdots (2.12)$$

2.2.2 RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル^[8]

RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルでは、乱流の統計理論的な研究に基づいた繰り込み群理論 (Renormalization Group) を用いて、 $k - \varepsilon$ モデルのモデル定数を定める。繰り込み群

理論では、摂動展開近似から変動の高波数成分が低波数成分に繰り込まれ、結果として得られるモデルは Reynolds 応力を時間平均量で近似する渦粘性モデルに対応している。

RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルは、高 Reynolds 数領域では標準型 $k - \varepsilon$ モデルと同型であり、乱流エネルギー k 、散逸率 ε の輸送方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = D_k + P_k - \varepsilon \quad \cdots (2.13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad \cdots (2.14)$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha_k (\nu + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha_\varepsilon (\nu + \nu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$$

$$P_k = -R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 2\nu_t E_{ij} E_{ij}, \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

モデル定数として、次の値を用いる。

$$C_{\varepsilon 1} = C'_{\varepsilon 1} - \frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3} \quad \cdots (2.15)$$

$$\eta = \sqrt{C_\mu^{-1} \frac{P_k}{\varepsilon}} = \sqrt{2E_{ij} E_{ij}} \frac{k}{\varepsilon}, \quad \eta_0 = 4.377, \quad \beta = 0.012$$

$$C_\mu = 0.0845, \quad \alpha_k = \alpha_\varepsilon = 1.39, \quad C'_{\varepsilon 1} = 1.42, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.68$$

(2.15)のモデル定数は、 β を除けばすべて理論的に求められた値であり、標準型 $k - \varepsilon$ モデルに近い値となっている。

2.2.3 応力方程式モデル^[9]

$k - \varepsilon$ モデルは、比較的低い計算コストで精度良く乱流の特性を再現できる長所がある。しかしながら、一方では、勾配拡散の線形近似に基づいた Boussinesq 渦粘性モデルを用いて Reynolds 応力をモデル化しているため、乱流の等方性しか再現できない短所もある。従って、燃料集合体領域など、剥離流／旋回流が生じて、Reynolds 応力の非等方性が顕著となる複雑な流動では、高精度の予測結果は得られない。乱流の非等方性まで良好に再現するためには、応力方程式モデルや代数方程式モデルが有効である。SPIRAL-II コードでは後者を導入するが、その基となる前者についてここでは概略を示す。

応力方程式モデルは、Reynolds 応力をその輸送方程式から求めるモデル化法である。Reynolds 応力の厳密な輸送方程式は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} &= P_{ij} + \Phi_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} & \cdots (2.16) \\ P_{ij} &= -R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \\ \Phi_{ij} &= \overline{P' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \\ D_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\bar{u}'_i \bar{u}'_j \bar{u}'_k - \overline{P' u'_i} \delta_{jk} - \overline{P' u'_j} \delta_{ik} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \right) \\ \varepsilon_{ij} &= 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \end{aligned}$$

(2.16)において、 P_{ij} 、 Φ_{ij} 、 D_{ij} 、 ε_{ij} は、それぞれ、生成項、圧力歪相関項、拡散項、散逸項である。次に、各項のモデル化について述べる。

(1) 生成項 P_{ij}

生成項 P_{ij} は、Reynolds 応力と平均流速勾配のみから構成されているため、モデル化の必要はない。これは応力方程式モデルの最大の長所である。

(2) 圧力歪相関項 Φ_{ij}

圧力歪相関項 Φ_{ij} は、Slow 項 Φ_{ij}^s 、Rapid 項 Φ_{ij}^r 、Wall Reflection 項 Φ_{ij}^w の和として表される。

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^s + \Phi_{ij}^r + \Phi_{ij}^w \quad \cdots (2.17)$$

a) Slow 項 Φ_{ij}^s

流速の変動成分が渦を等方化させる現象を表現する Slow 項 Φ_{ij}^s に関して、次の Rotta モデル^[10]を適用する。

$$\Phi_{ij}^s = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \quad \cdots (2.18)$$

b) Rapid 項 Φ_{ij}^r

流速の平均成分が渦を等方化させる現象を表現する Rapid 項 Φ_{ij}^r に関して、次の IPM (Isotropization of Production Model)^[11]を適用する。

$$\Phi'_{ij} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \quad \cdots (2.19)$$

c) Wall Reflection 項 Φ_{ij}^w

壁面で圧力の変動が反射する効果を表現する Wall Reflection 項 Φ_{ij}^w は、Slow 項 Φ_{ij}^s と Rapid 項 Φ_{ij}^r に対応して、次式でモデル化される^{[12][13]}。

$$\Phi_{ij}^w = \Phi_{ij}^{ws} + \Phi_{ij}^{wr} \quad \cdots (2.20)$$

$$\Phi_{ij}^{ws} = C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{kl} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} R_{kj} n_k n_i \right) f_w$$

$$\Phi_{ij}^{wr} = C'_2 \left(\Phi'_{kl} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi'_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi'_{kj} n_k n_i \right) f_w$$

(2.20)において、 n_i は壁面に対する単位法線成分、 f_w は Φ_{ij}^w の壁面漸近挙動を表現する減衰関数であり、壁面法線距離 y_n を用いて次式でモデル化される。

$$f_w = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa \varepsilon} \frac{1}{y_n} \quad \cdots (2.21)$$

d) 拡散項 D_{ij}

流速変動による拡散項（流速の三次相関項）に関して、次の Daly-Harlow モデル^[14]を適用する。Daly-Harlow モデルでは、圧力変動による拡散項（流速と圧力の二次相関項）も同時にモデル化されたとみなして無視できる。

$$-\overline{u'_i u'_j u'_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon} R_{kl} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_l} \quad \cdots (2.22)$$

e) 散逸項 ε_{ij}

散逸項 ε_{ij} は、局所等方性の仮定に基づいて、次式でモデル化される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad \cdots (2.23)$$

散逸率 ε は、その輸送方程式から求められる。散逸率の輸送方程式は $k - \varepsilon$ モデルと同型であるが、拡散項に対して Daly-Harlow モデルが適用されている。

なお、(2.18)、(2.19)、(2.20)、(2.22)のモデル定数として、次の値を用いる。

$$C_1 = 1.8, \quad C_2 = 0.6, \quad C'_1 = 0.5, \quad C'_2 = 0.3, \quad C_s = 0.22 \quad \cdots (2.24)$$

2.2.4 代数応力モデル

応力方程式モデルでは、Reynolds 応力をモデル化せず、その輸送方程式から求めたため、乱流の非等方性を再現できる長所がある。しかしながら、乱流量の輸送方程式の数が 2 次元／3 次元において 4 本／7 本となるため、計算負荷もそれだけ増大する。SPIRAL-II コードでは、計算効率化の観点から、計算精度をそれほど劣化させず計算負荷を低減できる非等方乱流モデルとして、次の代数応力モデルを導入した。

代数応力モデルは、Reynolds 応力輸送方程式(2.16)の近似的な代数式を用いて、Reynolds 応力を求めるモデル化法である。代表的な Rodi モデル^[9]では、Reynolds 応力輸送方程式における時間項、移流項、拡散項の総和が、乱流エネルギー輸送方程式における時間項、移流項、拡散項の総和に比例すると仮定して、次式でモデル化する。

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + C_{ij} - D_{ij} = \frac{R_{ij}}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + C_k - D_k \right) = \frac{R_{ij}}{k} (P_k - \varepsilon) \quad \cdots (2.25)$$

(2.25)において、 C_{ij} 、 D_{ij} は Reynolds 応力の移流項、拡散項、 C_k 、 D_k 、 P_k は乱流エネルギーの移流項、拡散項、生成項である。

Reynolds 応力輸送方程式(2.16)に(2.25)を代入すれば、

$$R_{ij} = k \frac{P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}}{P_k - \varepsilon} \quad \cdots (2.26)$$

乱流エネルギー k と散逸率 ε は、それぞれの輸送方程式から求められる。輸送方程式は $k - \varepsilon$ モデルと同型であるが、拡散項に対して Daly-Harlow モデルが適用されている。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = D_k + P_k - \varepsilon \quad \cdots (2.27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = D_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad \cdots (2.28)$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(v \delta_{ij} + C_{sk} \frac{k}{\varepsilon} R_{ij} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(v \delta_{ij} + C_{s\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} R_{ij} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$$

$$P_k = -R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

(2.27)、(2.28)のモデル定数として、次の値を用いる。

$$C_{sk} = 0.22, \quad C_{s\epsilon} = 0.18, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92 \quad \cdots (2.29)$$

(2.26)は Reynolds 応力と乱流エネルギー、散逸率の関係式であり、非等方性を考慮した渦粘性モデルに対応している。そのため、代数応力モデルは、旋回流など非等方性の強い乱流に対して、特に有効である。しかし、(2.25)の妥当性に関する論理的な根拠はそれほど明確ではなく、局所平衡が成立しない領域（平均歪流速が急激に変化する領域など）では代数近似の欠陥が指摘されているので、適用にあたっては注意が必要である。

代数応力モデルの解法

非線形方程式である代数応力方程式(2.26)の解法としては、陰的解法と陽的解法がある。

陰的解法（ Implicit ASM ; IASM ）では、(2.26)に現れる Reynolds 応力をすべて同時刻で評価する。すなわち、

$$R_{ij}^n = k^n \frac{P_{ij}^n + \Phi_{ij}^n - \varepsilon_{ij}^n}{P_k^n - \varepsilon^n} \quad \cdots (2.30)$$

IASM では、Reynolds 応力に関する非線形行列方程式を解かなければならないため、Newton-Raphson 法などの反復解法を用いて計算する必要がある。そのため、数学的に厳密であるが、計算速度は $k - \varepsilon$ モデルに比べて著しく劣る。

一方、陽的解法（ Explicit ASM ; EASM ）では、(2.26)に現れる Reynolds 応力を左辺は現時刻で、右辺は前時刻で評価する。すなわち、

$$R_{ij}^n = k^n \frac{P_{ij}(R_{ij}^{n-1}, \bar{u}_{i,j}^n) + \Phi_{ij}(R_{ij}^{n-1}, k^n, \varepsilon^n, \bar{u}_{i,j}^n) - \varepsilon_{ij}^n}{P_k(R_{ij}^{n-1}, \bar{u}_{i,j}^n) - \varepsilon^n} \quad \cdots (2.31)$$

EASM では、右辺がすべて既知変数であるため反復計算は必要なく、従って、計算速度は IASM に比べて向上する。しかしながら、実際の計算において不安定となる場合があるため、SPIRAL では IASM を採用している。

第3章 数値計算法

3. 1 時間積分方程式

Navier-Stokes 方程式(2.6)を時間に関して離散化する際には、非定常項に対して Euler 陽差分公式を適用する。また、流速に関して陽的、圧力に関して陰的に離散化する半陰解法を用いる。

従って、

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\Delta t} + \bar{u}_j^n \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{P}^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} - R_{ij}^n \right) + \bar{f}_i^n \quad \cdots (3.1)$$

新しい時刻 ($n+1$) における流速と圧力を求めるため、Ramaswamy らの流速修正法^[4]を採用する。流速修正法では、非圧縮性の条件を満足しない近似流速を用いて、二段階の時間差分を実行する。

近似流速は、(3.1)の圧力項を零とおいて定義する。

$$\frac{\bar{u}_i^\dagger - \bar{u}_i^n}{\Delta t} + \bar{u}_j^n \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} - R_{ij}^n \right) + \bar{f}_i^n \quad \cdots (3.2)$$

(3.1)と(3.2)の差分をとれば、新しい時刻の流速は、

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^\dagger}{\Delta t} = - \frac{\partial \bar{P}^{n+1}}{\partial x_i} \quad \cdots (3.3)$$

(3.3)の発散をとれば、圧力に関する Poisson 方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{P}^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \bar{u}_j^\dagger}{\partial x_j} \quad \cdots (3.4)$$

乱流エネルギー k 、散逸率 ε の輸送方程式に関しては、すべて陽的に離散化する。

$$\frac{k^{n+1} - k^n}{\Delta t} + \bar{u}_j^n \frac{\partial k^n}{\partial x_j} = D_k^n + P_k^n - \varepsilon^n \quad \cdots (3.5)$$

$$\frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\Delta t} + \bar{u}_j^n \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_j} = D_\varepsilon^n + \frac{\varepsilon^n}{k^n} (C_{\varepsilon 1} P_k^n - C_{\varepsilon 2} \varepsilon^n) \quad \cdots (3.6)$$

3. 2 重み付き残差方程式

本節では、前節で得られた時間積分方程式に対して重み付き残差法を適用して、重み付き残差方程式を求める。

流速 \bar{u}_i 、圧力 \bar{P} 、乱流エネルギー k 、散逸率 ε の重み関数をそれぞれ u_i^* 、 P^* 、 k^* 、 ε^* とする。(3.2)、(3.4)、(3.3)、(3.5)、(3.6)にそれぞれ重み関数を乗じて領域積分すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_V u_i^* \bar{u}_i^\dagger dV &= \int_V u_i^* \bar{u}_i^n dV - \Delta t \int_V u_i^* \bar{u}_j^n \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} dV \\ &\quad + \Delta t \int_V u_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} - R_{ij}^n \right) dV + \Delta t \int_V u_i^* \bar{f}_i^n dV \end{aligned} \quad \cdots (3.7)$$

$$\int_V P^* \frac{\partial^2 \bar{P}^{n+1}}{\partial x_i \partial x_j} dV = \frac{1}{\Delta t} \int_V P^* \frac{\partial \bar{u}_j^\dagger}{\partial x_i} dV \quad \cdots (3.8)$$

$$\int_V u_i^* \bar{u}_i^{n+1} dV = \int_V u_i^* \bar{u}_i^\dagger dV - \Delta t \int_V u_i^* \frac{\partial \bar{P}^{n+1}}{\partial x_i} dV \quad \cdots (3.9)$$

$$\begin{aligned} \int_V k^* k^{n+1} dV &= \int_V k^* k^n dV - \Delta t \int_V k^* \bar{u}_j^n \frac{\partial k^n}{\partial x_j} dV \\ &\quad + \Delta t \int_V k^* D_k^n dV + \Delta t \int_V k^* P_k^n dV - \Delta t \int_V k^* \varepsilon^n dV \end{aligned} \quad \cdots (3.10)$$

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon^* \varepsilon^{n+1} dV &= \int_V \varepsilon^* \varepsilon^n dV - \Delta t \int_V \varepsilon^* \bar{u}_j^n \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_j} dV \\ &\quad + \Delta t \int_V \varepsilon^* D_\varepsilon^n dV + \Delta t \int_V \varepsilon^* C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon^n}{k^n} P_k^n dV - \Delta t \int_V \varepsilon^* C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^n}{k^n} \varepsilon^n dV \end{aligned} \quad \cdots (3.11)$$

なお、流速方程式(3.7)の粘性項、圧力方程式(3.8)の Laplacian 項、乱流エネルギー方程式(3.10)、散逸率方程式(3.11)の拡散項に対しては、次の Green-Gauss の定理を適用する。

$$\begin{aligned} &\int_V u_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} - R_{ij}^n \right) dV \\ &= \int_S u_i^* \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} - R_{ij}^n \right) n_j dS - \int_V \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} - R_{ij}^n \right) dV \end{aligned} \quad \cdots (3.12)$$

$$\int_V P^* \frac{\partial^2 \bar{P}^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} dV = \int_S P^* \frac{\partial \bar{P}^{n+1}}{\partial x_j} n_j dS - \int_V \frac{\partial P^*}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{P}^{n+1}}{\partial x_j} dV$$

$$\begin{aligned} \int_V k^* D_k^n dV &= \int_S k^* \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^n}{\partial x_j} n_j dS \\ &\quad - \int_V \frac{\partial k^*}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^n}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (\text{標準型 } k-\varepsilon \text{ モデル})$$

$$\begin{aligned} \int_V k^* D_k^n dV &= \int_S k^* \alpha_k \left(\nu + \nu_t \right) \frac{\partial k^n}{\partial x_j} n_j dS \\ &\quad - \int_V \frac{\partial k^*}{\partial x_j} \alpha_k \left(\nu + \nu_t \right) \frac{\partial k^n}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (\text{RNG 型 } k-\varepsilon \text{ モデル})$$

$$\begin{aligned} \int_V k^* D_k^n dV &= \int_S k^* \left(\nu \delta_{ij} + C_{sk} \frac{k^n}{\varepsilon^n} R_{ij}^n \right) \frac{\partial k^n}{\partial x_j} n_i dS \\ &\quad - \int_V \frac{\partial k^*}{\partial x_i} \left(\nu \delta_{ij} + C_{sk} \frac{k^n}{\varepsilon^n} R_{ij}^n \right) \frac{\partial k^n}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (\text{代数応力モデル})$$

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon^* D_\varepsilon^n dV &= \int_S \varepsilon^* \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_j} n_j dS \\ &\quad - \int_V \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (\text{標準型 } k-\varepsilon \text{ モデル})$$

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon^* D_\varepsilon^n dV &= \int_S \varepsilon^* \alpha_\varepsilon \left(\nu + \nu_t \right) \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_j} n_j dS \\ &\quad - \int_V \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j} \alpha_\varepsilon \left(\nu + \nu_t \right) \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (\text{RNG 型 } k-\varepsilon \text{ モデル})$$

$$\begin{aligned} \int_V \varepsilon^* D_\varepsilon^n dV &= \int_S \varepsilon^* \left(\nu \delta_{ij} + C_{s\varepsilon} \frac{k^n}{\varepsilon^n} R_{ij}^n \right) \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_j} n_i dS \\ &\quad - \int_V \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_i} \left(\nu \delta_{ij} + C_{s\varepsilon} \frac{k^n}{\varepsilon^n} R_{ij}^n \right) \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (\text{代数応力モデル})$$

3. 3 有限要素方程式

本節では、前節で得られた重み付き残差方程式に対して Galerkin 有限要素法を適用して、有限要素方程式を求める。

Galerkin 有限要素法では、重み関数と内挿関数を等しくとる。流速 \bar{u}_i 、圧力 \bar{P} 、乱流エネルギー k 、散逸率 ε 、および、それぞれの重み関数は、内挿関数と節点値の積和として次式で内挿される。

$$\bar{u}_i = \Phi_\alpha \bar{u}_{i\alpha} \quad \cdots (3.13)$$

$$\bar{P} = \Phi_\alpha \bar{P}_\alpha$$

$$k = \Phi_\alpha k_\alpha$$

$$\varepsilon = \Phi_\alpha \varepsilon_\alpha$$

$$\bar{u}_i^* = \Phi_\alpha \bar{u}_{i\alpha}^*$$

$$P^* = \Phi_\alpha P_\alpha^*$$

$$k^* = \Phi_\alpha k_\alpha^*$$

$$\varepsilon^* = \Phi_\alpha \varepsilon_\alpha^*$$

(3.7)、(3.8)、(3.9)、(3.10)、(3.11)に(3.13)を代入すれば、次式が得られる。

$$M_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^\dagger = M_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n + \Delta t \left(-C_{i\alpha}^n - D_{i\alpha}^n + Q_{i\alpha}^n + F_{i\alpha}^n \right) \quad \cdots (3.14)$$

$$S_{\alpha\beta} \bar{P}_\beta^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} H_{j\alpha\beta} \bar{u}_{j\beta}^\dagger + \Sigma_\alpha^{n+1} \quad \cdots (3.15)$$

$$M_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^{n+1} = M_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^\dagger - \Delta t H_{i\alpha\beta} \bar{P}_\beta^{n+1} \quad \cdots (3.16)$$

$$M_{\alpha\beta} k_\beta^{n+1} = M_{\alpha\beta} k_\beta^n + \Delta t \left(-C_{k\alpha}^n - D_{k\alpha}^n + Q_{k\alpha}^n + P_{k\alpha}^n - E_{k\alpha}^n \right) \quad \cdots (3.17)$$

$$M_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta^{n+1} = M_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta^n + \Delta t \left(-C_{\varepsilon\alpha}^n - D_{\varepsilon\alpha}^n + Q_{\varepsilon\alpha}^n + P_{\varepsilon\alpha}^n - E_{\varepsilon\alpha}^n \right) \quad \cdots (3.18)$$

ここで、

$$M_{\alpha\beta} = \int_V \Phi_\alpha \Phi_\beta dV$$

$$H_{j\alpha\beta} = \int_V \Phi_\alpha \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_j} dV$$

$$S_{\alpha\beta} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_j} dV$$

$$C_{i\alpha} = \int_V \Psi_\alpha \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dV$$

$$D_{i\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - R_{ij} \right) dV$$

$$\Omega_{i\alpha} = \int_S \Phi_\alpha \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - R_{ij} \right) n_j dS$$

$$F_{i\alpha} = \int_V \Psi_\alpha \bar{f}_i dV$$

$$\Sigma_\alpha = \int_S \Phi_\alpha \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} n_j dS$$

$$C_{k\alpha} = \int_V \Psi_\alpha \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} dV$$

$$D_{k\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} dV \quad (\text{標準型 } k - \varepsilon \text{ モデル})$$

$$D_{k\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \alpha_k \left(\nu + \nu_t \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} dV \quad (\text{RNG 型 } k - \varepsilon \text{ モデル})$$

$$D_{k\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} \left(\nu \delta_{ij} + C_{sk} \frac{k}{\varepsilon} R_{ij} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} dV \quad (\text{代数応力モデル})$$

$$\Omega_{k\alpha} = \int_S \Phi_\alpha \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j dS \quad (\text{標準型 } k - \varepsilon \text{ モデル})$$

$$\Omega_{k\alpha} = \int_S \Phi_\alpha \alpha_k (\nu + \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j dS$$

(RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル)

$$\Omega_{k\alpha} = \int_S \Phi_\alpha (\nu \delta_{ij} + C_{sk} \frac{k}{\varepsilon} R_{ij}) \frac{\partial k}{\partial x_j} n_i dS$$

(代数応力モデル)

$$P_{k\alpha} = - \int_V \Psi_\alpha R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dV$$

$$E_{k\alpha} = \int_V \Psi_\alpha \varepsilon dV$$

$$E_{\varepsilon\alpha} = \int_V \Psi_\alpha C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} dV$$

$$C_{\varepsilon\alpha} = \int_V \Psi_\alpha \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} dV$$

$$D_{\varepsilon\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} dV$$

(標準型 $k - \varepsilon$ モデル)

$$D_{\varepsilon\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \alpha_\varepsilon (\nu + \nu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} dV$$

(RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル)

$$D_{\varepsilon\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} \left(\nu \delta_{ij} + C_{s\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} R_{ij} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} dV$$

(代数応力モデル)

$$\Omega_{\varepsilon\alpha} = \int_S \Phi_\alpha \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j dS$$

(標準型 $k - \varepsilon$ モデル)

$$\Omega_{\varepsilon\alpha} = \int_S \Phi_\alpha \alpha_\varepsilon (\nu + \nu_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j dS$$

(RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル)

$$\Omega_{\varepsilon\alpha} = \int_S \Phi_\alpha (\nu \delta_{ij} + C_{s\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} R_{ij}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_i dS$$

(代数応力モデル)

$$P_{\varepsilon\alpha} = - \int_V \Psi_\alpha C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} dV$$

$$E_{\varepsilon\alpha} = \int_V \Psi_\alpha C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} dV$$

なお、計算の高速化のため、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ は対角化する。

また、移流項、生成項、散逸項の重み関数 Ψ_α は、Bubnov-Galerkin 法では $\Psi_\alpha = \Phi_\alpha$ となるが、Petrov-Galerkin 法(Balancing Tensor Diffusivity 法／Streamline Upwind 法) では(3.19)／(3.20)を用いる。

$$\Psi_\alpha = \Phi_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \bar{u}_\alpha \frac{\bar{u}_{j\alpha}}{\bar{u}_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \quad \cdots (3.19)$$

$$\Psi_\alpha = \Phi_\alpha + \frac{h}{2} F(\omega) \frac{\bar{u}_{j\alpha}}{\bar{u}_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \quad \cdots (3.20)$$

$$F(\omega) = \coth \frac{\omega}{2} - \frac{2}{\omega} \quad , \quad \omega = \frac{\bar{u} h}{\nu}$$

(3.19)、(3.20)において、 h はセル間距離、 \bar{u}_α は流速の絶対値であり、 α に関しては総和をとらない。

乱流計算時における数値計算法

SPIRAL-II では、層流計算時において、計算高速化のため、有限要素方程式に現れる各項を係数行列と物理量の行列積から計算している。例えば、粘性項 $D_{i\alpha}$ は、係数行列 $S_{\alpha\beta}$ と流速 $\bar{u}_{i\beta}$ の行列積として、

$$D_{i\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) dV = \nu S_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta} \quad , \quad S_{\alpha\beta} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_j} dV \quad \cdots (3.21)$$

しかし、乱流計算時においては、乱流に関連する各項(流速方程式の粘性項 $D_{i\alpha}$ 、乱流方程式の拡散項 $D_{k\alpha}$ 、 $D_{\varepsilon\alpha}$ 、生成項 $P_{k\alpha}$ 、 $P_{\varepsilon\alpha}$ 、散逸項 $E_{k\alpha}$ 、 $E_{\varepsilon\alpha}$) の計算は複雑となり、係数行列を作成するのは極めて難しい。そのため、乱流関連の各項に関しては、係数行列を作成せず、そのまま Gauss 求積法を適用して計算している。例えば、(3.21)の粘性項 $D_{i\alpha}$ は、Reynolds 応力が付加されるから、

$$D_{i\alpha} = \int_V \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - R_{ij} \right) dV = \sum_l^{Gauss} \left[W^{(l)} \times \frac{\partial \Phi_\alpha^{(l)}}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i^{(l)}}{\partial x_j} - R_{ij}^{(l)} \right) |J|^{(l)} \right] \quad \cdots (3.22)$$

(3.22)において、 W は Gauss 求積法の重み係数であり、上付き添え字 (l) は各積分点における値を表す。

Gauss 求積法を用いて乱流関連の各項を計算するには、各積分点において以下の処理が必要となる。

(1) Gauss 求積法の重み係数 W の計算	… [0]
(2) 形状関数 Φ_α の計算	… [0]
(3) 形状関数の局所座標系における方向微分 $\Phi_{\alpha,\xi}$ の計算	… [0]
(4) Jacobi 行列 J 、逆行列 J^{-1} 、行列式 $ J $ の計算	… [111]
(5) 形状関数の全体座標系における方向微分 $\Phi_{\alpha,x}$ の計算	… [72]
(6) 流速 \bar{u}_i 、乱流エネルギー k 、散逸率 ε とそれぞれの勾配の計算	… [160]
(7) 流速方程式の粘性項 $D_{i\alpha}$ 、乱流方程式の拡散項 $D_{k\alpha}, D_{\varepsilon\alpha}$ 、生成項 $P_{k\alpha}, P_{\varepsilon\alpha}$ 、散逸項 $E_{k\alpha}, E_{\varepsilon\alpha}$ の計算	… [200]

括弧内の値は、3次元8節点六面体要素を想定したとき、それぞれの処理で必要となる乗除演算回数の概算値である。Gauss 求積法の重み係数 W 、形状関数 Φ_α とその方向微分 $\Phi_{\alpha,\xi}$ に関しては、最初に計算した値を記憶しているため、各タイムステップにおいて乗除演算は必要ない。

Gauss 求積法では、処理 (1)~(6) は、流速方程式(3.14)においても、乱流方程式(3.17)、(3.18)においても、同一の処理となる。そのため、SPIRAL-II では、流速方程式と乱流方程式を同時に解き、同一の処理を統合して、計算効率の向上を図っている。

さらに、乱流計算時には、移流項の計算に対しても Gauss 求積法を適用すると、計算速度の向上に繋がる。その理由は、層流計算時には計算されていない処理 (1)~(6) が、乱流計算時には既に計算されているため、移流項の計算としては、

(8) 流速方程式の移流項 $C_{i\alpha}$ 、乱流方程式の移流項 $C_{k\alpha}, C_{\varepsilon\alpha}$ の計算 … [60]

を追加するだけで良く、係数行列を用いて計算したときに比べて、計算負荷が軽減されるためである（表 3.1 参照）。移流項の係数行列は、記憶容量の観点からも大規模計算の障害となるため、SPIRAL-II では、乱流計算時には、移流項を必ず Gauss 求積法を用いて計算するように設定されている。

3. 4 壁近傍領域のモデル化

本節では、壁近傍領域のモデル化について述べる。

壁近傍領域においては、流速の分布が壁関数に従うと仮定して、まず摩擦応力 u_τ を求め、次に u_τ を用いて乱流諸量の壁面境界条件を設定する。

壁関数としては、層流領域 ($y^+ < 5$)、遷移領域 ($5 < y^+ < 30$)、乱流領域 ($30 < y^+$) のいずれに対しても適用が可能な Reichardt 関数を用いる。

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 [1 - \exp(-0.09y^+) - 0.09y^+ \exp(-0.33y^+)] \quad \cdots (3.23)$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

次に、局所平衡の仮定、Prandtl の混合長理論に基づき、壁隣接節点における乱流エネルギー k 、散逸率 ε を次式で計算する。

$$k_a = \frac{u_\tau^2}{C_\mu^{1/2}} \quad \cdots (3.24)$$

$$\varepsilon_a = \frac{u_\tau^4}{\kappa \nu y^+} \quad \cdots (3.25)$$

対数則が成立する壁近傍領域においては、剪断応力 $\tau_{xy} = -R_{xy}$ が壁面応力 $\tau_w = u_\tau^2$ に等しいと近似できる。従って、等方性乱流モデルである $k - \varepsilon$ モデルでは、壁隣接要素における Reynolds 応力を次式で計算する。

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = \frac{2}{3}k \quad \cdots (3.26)$$

$$R_{xy} = R_{yx} = -u_\tau^2$$

$$R_{xz} = R_{zx} = R_{yz} = R_{zy} = 0$$

非等方性乱流モデルである代数応力モデルでは、Reynolds 応力を代数応力方程式から計算する。代数応力方程式では、圧力歪相関項に現れる Wall Reflection 項が Reynolds 応力の壁漸近挙動を表している。

有限要素法による壁近傍領域の離散化

次に、有限要素法による壁近傍領域の離散化の例を示す。

図 3.1 に示した構造格子において、定常で主流が完全に発達した状態を仮定して、主流方向の流速勾配を零、圧力勾配を一定とする。このとき、時間項と移流項は零となるので、Reynolds 方程式(2.7)は次式で表される。

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \cdots (3.27)$$

Galerkin 有限要素法に従い、(3.27)を離散化すると、次式が得られる。

$$-\int_V \Phi_a \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} dV + \int_S \Phi_a \tau_{xy} n_y dS - \int_V \frac{\partial \Phi_a}{\partial y} \tau_{xy} dV = 0 \quad \cdots (3.28)$$

(3.28)において、応力項に対しては Green-Gauss の定理を適用している。

簡略化のため、等方性乱流モデルを仮定すれば、剪断応力 τ_{xy} は、壁に隣接する要素 E_{11} 、 E_{21} において、

$$\tau_{xy} = \tau_w = u_\tau^2 \quad \cdots (3.29)$$

となり、その外側の要素 E_{12} 、 E_{22} において、

$$\tau_{xy} = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - R_{xy} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \cdots (3.30)$$

となる。従って、節点 $N_\alpha = N_{22}$ として、その周辺の要素 E_{11} 、 E_{21} 、 E_{12} 、 E_{22} に関して、有限要素方程式(3.28)を計算すると、

$$-W_{11} \frac{\delta \bar{P}}{\delta x} - W_{11} \frac{2}{\delta y} \tau_w = 0 \quad \cdots (3.31.a)$$

$$-W_{21} \frac{\delta \bar{P}}{\delta x} - W_{21} \frac{2}{\delta y} \tau_w = 0 \quad \cdots (3.31.b)$$

$$-W_{12} \frac{\delta \bar{P}}{\delta x} + W_{12} \frac{2}{\delta y} (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0 \quad \cdots (3.31.c)$$

$$-W_{22} \frac{\delta \bar{P}}{\delta x} + W_{22} \frac{2}{\delta y} (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0 \quad \cdots (3.31.d)$$

(3.31)において、 W_λ は要素 E_λ における重み関数 Φ_α の積分値であり、構造格子においては $W_{11} = W_{21} = W_{12} = W_{22} = \delta x \delta y / 4$ となる。また、境界積分項は、外部境界では重み関数が零となるため、内部境界では隣接する要素で打ち消しあうため、すべて零とした。

(3.31)の総和をとれば、次式が得られる。

$$-W \frac{\delta \bar{P}}{\delta x} + W \frac{(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \tau_w}{\delta y} = 0 \quad \cdots (3.32)$$

$$W = W_{11} + W_{21} + W_{12} + W_{22}$$

(3.32)から、構造格子においては、有限要素法の離散化式は有限差分法の離散化式に概ね一致する（ただし、有限要素法で用いられるノーマルグリッド格子と有限差分法で用いられるスタガード格子では、流速の定義点が異なるため、壁関数の適用距離も δy 、 $\delta y / 2$ と異なる）と分かる。

3. 5 乱流エネルギーと散逸率の補正

乱流エネルギー k 、散逸率 ε の輸送方程式は、数値的に極めて不安定であり、 k 、 ε の値が局所的に非物理的な負値となる場合がある。そのため、次の基準に従い、 k 、 ε の値を補正する。

まず、 k の値に関して、下限値 k_{\min} より低い場合は $k = k_{\min}$ に設定する。下限値 k_{\min} は次式で計算する。

$$k_{\min} = k_{\max} \times 10^{-7} \quad \cdots (3.33)$$

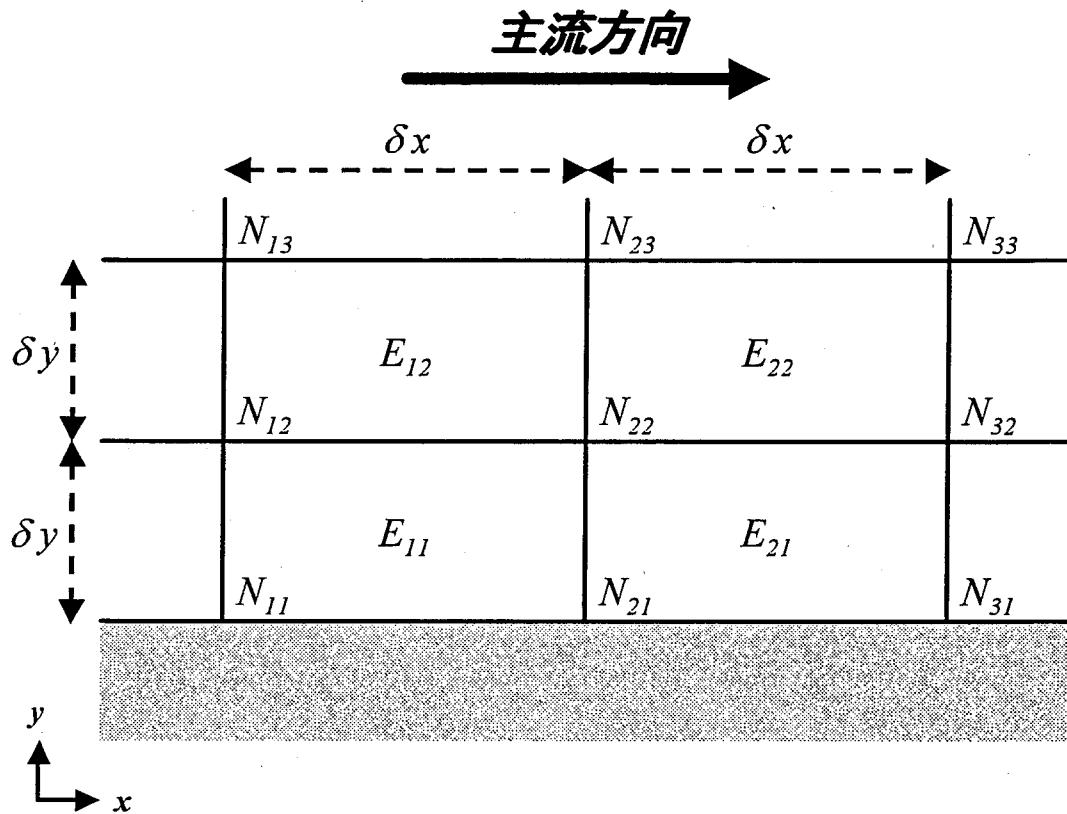
次に、 ε の値に関して、下限値 ε_{\min} より低い場合は $k = k_{\min}$ 、 $\varepsilon = C_{\mu} k_{\min}^2 / 20 \nu$ に設定する。下限値 ε_{\min} は次式で計算する。

$$\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{\max} \times 10^{-7} \quad \cdots (3.34)$$

表 3.1 層流／乱流計算時における移流項の計算負荷の比較
 (乗除演算回数の概算値の比較)

移流項 $C_{i\alpha}$ の計算法	層流計算時		乱流計算時	
	係数行列	Gauss 求積法	係数行列	Gauss 求積法
係数行列を用いたときの 移流項の計算負荷	4800	—	4800	—
Gauss 求積法を用いたときの 移流項の計算負荷	—	$36 \times m$ $= 972$	—	$36 \times m$ $= 972$
各積分点における W 、 Φ_α 、 J 、 \bar{u}_i などの計算負荷	—	$279 \times m$ $= 7533$	$279 \times m$ $= 7533$	$279 \times m$ $= 7533$
総計	4800	8505	12333	8505

3 次元 8 節点六面体要素を想定して、
 Gauss 求積法の積分点総数 $m = 3^3 = 27$ とした。



N_α は節点、 E_λ は要素を表す。

※ 節点 N_α における流速を \bar{u}_α 、圧力を \bar{P}_α とする。主流が完全に発達した状態を仮定して、主流方向の流速勾配を零、圧力勾配を一定とすれば、次式が成立する。

$$\bar{u}_{11} = \bar{u}_{21} = \bar{u}_{31} = 0$$

$$\bar{u}_{12} = \bar{u}_{22} = \bar{u}_{32} = \bar{u}$$

$$\bar{u}_{13} = \bar{u}_{23} = \bar{u}_{33} = \bar{u} + \delta\bar{u}$$

$$\bar{P}_{11} = \bar{P}_{12} = \bar{P}_{13} = \bar{P} - \delta\bar{P}$$

$$\bar{P}_{21} = \bar{P}_{22} = \bar{P}_{23} = \bar{P}$$

$$\bar{P}_{31} = \bar{P}_{32} = \bar{P}_{33} = \bar{P} + \delta\bar{P}$$

図 3.1 有限要素法による壁近傍領域のモデル化

第4章 検証解析

各種乱流モデルの検証として、平行平板間乱流、乱流ステップフロー、矩形ダクトフローの解析を実施した。本検証においては、計算の妥当性の確認に加え、各モデルの予測精度に関する知見の蓄積を目的としている。

4. 1 平行平板間乱流

各種乱流モデルの検証として、平行平板間乱流の解析を実施した。

平行平板間乱流では、主流が完全に発達した領域において、流速の分布が $1/n$ 乗則（ n は定数； $n = 6, 7, 8$ ）に概ね一致するが、本解析では、流速の分布に加え、乱流諸量の分布に関しても、実験との比較を行った。なお、比較の対象としては、Laufer の実験^[15]（ $Re = 12,300$ ）を採用した。

解析条件

乱流モデル : 標準型 $k - \varepsilon$ モデル、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル、代数応力モデル

解析領域 : 図 4.1 参照

境界条件 : AB 面 … 入口境界 $u_{in} = 2.14$ [m / s]

$$k_{in} = (0.1 u_{in})^2 / 2 \quad [\text{m}^2 / \text{s}^2]$$

$$\varepsilon_{in} = C_\mu k_{in}^{3/2} / (\delta/2) \quad [\text{m}^2 / \text{s}^3]$$

CD 面 … 出口境界 $P = 0.0$ [Pa]

AC 面 … 壁面境界 $u = v = 0.0$ [m / s]

BD 面 … 対称境界 $v = 0.0$ [m / s]

Reynolds 数 : $Re = 12,300$

解析領域は、流路幅 $2\delta \times$ 流路長 100δ の矩形領域に対して、流路中心 ($y = \delta$) における対称性を考慮した $1/2$ セクタ領域であり、要素分割は、 10×100 分割（粗分割メッシュ）、 20×100 分割（詳細分割メッシュ）とした。境界条件は、入口境界において流速を一定、出口境界において圧力を一定として、壁面境界に対しては壁関数を適用した。また、乱流エネルギーと散逸率に関しては、入口境界において流入流速の 10 % に相当する乱流量を定義した。

Laufer の実験では、Reynolds 数は流路中心流速 U_c で定義されており、 $Re = U_c \delta / \nu = 12,300$ である。解析では、流路平均流速を実験と一致させ、乱流モデルとしては、標準型 $k - \varepsilon$ モデル（図では KEM と略す）、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル（同 RNG）、代数応力モデル（同 ASM）を使用した。

解析結果

図 4.2、図 4.3 に、流速 u 、乱流エネルギー k の分布を示す。解析の結果を実験の結果と比較すると、各モデルとも流速に関しては極めて良く一致するが、乱流エネルギーに関しては過大に評価する傾向がある。

次に、図 4.4、図 4.5、図 4.6 に、乱流エネルギーの各成分である u_{rms} 、 v_{rms} 、 w_{rms} の分布を示す。なお、RMS 値は、次式から計算した。

$$u_{rms} = \sqrt{R_{xx}} , \quad v_{rms} = \sqrt{R_{yy}} , \quad w_{rms} = \sqrt{2k - R_{xx} - R_{yy}}$$

実験と比べると、等方性モデルでは、主流方向成分 u_{rms} に関しては概ね良く一致するが、 v_{rms} 、 w_{rms} に関しては過大に評価している。一方、非等方性モデルでは、主流方向成分 u_{rms} 、壁法線方向成分 v_{rms} に関しては概ね良く一致するが、 w_{rms} に関しては等方性モデルと同じく過大に評価している。従って、乱流エネルギーの過大評価の原因は、主としてスパン方向成分 w_{rms} の過大評価にあると思われる。

次に、図 4.7 に Reynolds 応力の剪断成分である R_{xy} の分布を、また、表 4.1 に摩擦流速 u_t と u_τ から計算した壁隣接節点の壁座標 y^+ を示す。壁近傍領域を除けば、 R_{xy} の実験との差は流速勾配に比例して増加する傾向がある。少なくとも等方性モデルでは、 $R_{xy} = -\nu_t(u_{,y} + v_{,x})$ であり、流速勾配は実験と良く一致しているので、 R_{xy} の過大評価の原因は、乱流粘性 $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$ の過大評価、すなわち、乱流エネルギー k の過大評価にあると思われる。一方、壁近傍領域に関しては、摩擦流速 u_t 、剪断応力 R_{xy} ともに実験と良く一致している。また、壁隣接節点の壁座標 y^+ は、粗分割メッシュでは $y^+ = 60$ 程度、詳細分割メッシュでは $y^+ = 30$ 程度であり、いずれも壁関数の適用範囲内にあると分かる。

最後に、表 4.2 に各モデルの計算所要時間の比較を示す。標準型 $k - \varepsilon$ モデルと RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルの計算所要時間は大差ないが、代数応力モデルの計算所要時間はそれらの約 1.6 ~ 2.1 倍となっている。

4. 2 亂流ステップフロー

各種乱流モデルの検証として、乱流ステップフローの解析を実施した。

乱流ステップフローでは、ステップ後方領域において、主流から剥離した再循環流が形成されるが、本解析では、ステップ後方領域における流速の分布、乱流諸量の挙動に関して、実験との比較を行った。なお、比較の対象としては、Kim らの実験^[16]（ $Re = 46,000$ ）、Kasagi らの実験^[17]（ $Re = 5,540$ ）を採用した。

4.2.1 Kim らの実験による検証

解析条件

乱流モデル	:	標準型 $k - \varepsilon$ モデル、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル、代数応力モデル
解析領域	:	図 4.8 参照
境界条件	:	AB 面 … 入口境界 $u_{in} = 18.2$ [m / s] $k_{in} = 1.5 (0.003 u_{in})^2$ [m^2 / s^2] $\varepsilon_{in} = C_\mu k_{in}^{3/2} / (0.09 H)$ [m^2 / s^3]
		CD 面 … 出口境界 $P = 0.0$ [Pa]
		BC 面、DE 面、AO 面、EO 面 … 壁面境界 $u = v = 0.0$ [m / s]
Reynolds 数	:	$Re = 46,000$

解析領域は、ステップ幅 H に対して、入口幅 $2H$ 、出口幅 $3H$ 、ステップ前方距離 $4H$ 、ステップ後方距離 $21H$ の領域であり、要素分割は、568 均等要素分割（粗分割メッシュ）、1504 不均等要素分割（詳細分割メッシュ）とした。境界条件は、入口境界において流速、乱流エネルギー、散逸率を一定、出口境界において圧力を一定として、壁面境界に対しては壁関数を適用した。Reynolds 数は $Re = 46,000$ であり、標準型 $k - \varepsilon$ モデル、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル、代数応力モデルによる解析を実施した。数値安定化法として SUPG 法を用いた。

解析結果

図 4.9 に流速と乱流エネルギーの分布を示す。主流の再付着点位置は、実験が $7 \pm 1H$ であるのに対して、標準型 $k - \varepsilon$ モデルは、粗メッシュで $6.00H$ 、詳細分割メッシュで $5.98H$ とやや上流側に評価している。一方、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルでは、粗メッシュで $8.75H$ とかなり下流側に現れるのに対して、詳細分割メッシュで $7.84H$ と改善されている。メッシュに対する感度が相対的に高い。実験と最も良く一致するのは代数応力モデルであり、粗メッシュで $6.86H$ 、詳細分割メッシュで $6.61H$ と予測精度は高い。

次に、図 4.10 (a)~(e) に $x/H = 1, 3, 5, 6, 7$ における流速 u の分布を、図 4.11 (a)~(c) に $x/H = 4, 7, 13$ における乱流エネルギー k の分布を示す。標準型 $k - \varepsilon$ モデルは、主流流速は実験と最も良く一致するが、再付着点近傍の再循環流速を過小に、ステップ後方の乱流エネルギーを過大に評価する傾向がある。一方、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルは、主流流速、再循環流速ともに過大に評価するが、乱流エネルギーは定性的にも定量的にも実験と良く一致する。対して、代数応力モデルでは、主流流速、再循環流速ともに実験と良く一致しており、乱流エネルギーは定量的には過大

に評価するが、定性的には概ね良く一致している。概して各モデルとも、粗メッシュに比べ詳細分割メッシュでは予測精度の向上が見られる。

参考までに、実験値は無いが、図 4.12、図 4.13 に、乱流エネルギーと散逸率それぞれの輸送方程式の収支を示す。各モデルを比べると、標準型 $k - \varepsilon$ モデルでは、乱流エネルギー、散逸率、それぞれの生成、散逸、いずれも大きめに評価する傾向がある。また、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルでは、乱流エネルギーの生成に対して散逸率の生成が高く、そのため、乱流エネルギーの生成が抑制されたと思われる。

最後に、表 4.3 に各モデルの計算所要時間の比較を示す。平行平板間乱流と同様、標準型 $k - \varepsilon$ モデルと RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルの計算所要時間は大差ないが、代数応力モデルの計算所要時間はそれらの約 1.6~2.1 倍となっている。

4.2.2 Kasagi らの実験による検証

解析条件

乱流モデル	:	標準型 $k - \varepsilon$ モデル、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル、代数応力モデル
解析領域	:	図 4.8 参照
境界条件	:	AB 面 … 入口境界 $u = u_{in}$, $k = k_{in}$, $\varepsilon = \varepsilon_{in}$ (表 4.4 参照) CD 面 … 出口境界 $P = 0.0$ [Pa] BC 面、DE 面、AO 面、EO 面 … 壁面境界 $u = v = 0.0$ [m / s]
Reynolds 数	:	$Re = 5,540$

解析領域は、ステップ幅 H に対して、入口幅 $2H$ 、出口幅 $3H$ 、ステップ前方距離 $4H$ 、ステップ後方距離 $21H$ の領域であり、要素分割は、1504 不均等要素分割とした。境界条件は、入口境界において流速、乱流エネルギー、散逸率を実験と一致させ、出口境界において圧力を一定とした。また、壁面境界に対しては壁関数を適用した。Reynolds 数は $Re = 5,540$ であり、標準型 $k - \varepsilon$ モデル、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル、代数応力モデルによる解析を実施した。

解析結果

図 4.14 に流速と乱流エネルギーの分布を示す。主流の再付着点位置は、実験が $6.51 H$ であるのに対して、標準型 $k - \varepsilon$ モデルは $5.43 H$ とかなり上流側に評価している。対して、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルは $6.73 H$ 、代数応力モデルは $6.32 H$ と予測精度は高い。

次に、図 4.15、図 4.16 に、流速 u 、 v の分布を示す。 u に関しては、各モデルとも実験と良く一致しているが、 v に関しては、標準型 $k - \varepsilon$ モデルが下側壁面へ向か

う流速を過大に評価しており、主流の再付着点が上流側に現れた原因となっている。これは、乱流エネルギー k の過大評価、すなわち乱流粘性の増大によるものである。

次に、図 4.17、図 4.18、図 4.19、図 4.20 に、乱流エネルギー k とその各成分である u_{rms} 、 v_{rms} 、 w_{rms} の分布を示す。標準型 $k-\varepsilon$ モデルでは、 $y < 0$ において k を過大に評価しており、一方、RNG 型 $k-\varepsilon$ モデルでは、 $y = 0, x/H = 1$ において k のピークを十分に再現できていない。また、両モデルとも等方性モデルであるため、 u_{rms} を過小に、 v_{rms} を過大に評価する傾向がある。対して、代数応力モデルでは、 k の分布は定性的にも定量的にも実験と良く一致しており、 k の非等方性も良好に再現できている。

最後に、図 4.21、図 4.22 に、乱流エネルギーと散逸率それぞれの輸送方程式の収支を示す。各モデルの差が最も著しいのが乱流エネルギー生成項 P_k であり、他のモデルに比べ代数応力モデルは実験と極めて良い一致を示している。代数応力モデルには、Reynolds 応力の非等方性が考慮されているため P_k を正確に計算できる長所があり、結果として、乱流エネルギーと流速に関して高精度な予測が可能となっている。

4. 3 矩形ダクトフロー

代数応力モデルの検証として、矩形ダクトフローの解析を実施した。

矩形ダクトフローでは、主流と直交する流路断面において、Reynolds 応力の非等方性に起因した第二種二次流れが形成され、主流の分布に歪が生じる原因となる。本解析では、流速の分布、乱流諸量の分布に関して、実験との比較を行った。なお、比較の対象としては、Fujita らの実験^[18]（ $Re = 65,000$ ）、Sata らの実験^[19]（ $Re = 24,000$ ）を採用した。

4.3.1 Fujita らの実験による検証

解析条件

乱流モデル	:	代数応力モデル
解析領域	:	図 4.23 参照
境界条件	:	ABCD面 … 入口境界 $u_{in} = 19.5$ [m / s] EFGH面 … 出口境界 $P = 0.0$ [Pa] BCGF面、CDHG面 … 壁面境界 $u = v = w = 0.0$ [m / s]
		ADHE面 … 対称境界 $v = 0.0$ [m / s]
		ABFE面 … 対称境界 $w = 0.0$ [m / s]
Reynolds 数	:	$Re = 65,000$

解析領域は、主流方向（ x 方向） $2D$ 、流路断面 $D \times D$ の矩形ダクト領域に対して、流路中心（ $y=0$ および $z=0$ ）における対称性を考慮した $1/4$ セクタ領域であり、要素分割は、主流方向に関して 20 分割、主流と直交する断面に関して 25×25 分割（粗分割メッシュ）、 40×40 分割（詳細分割メッシュ）とした。境界条件は、流速、乱流エネルギー、散逸率に関しては周期境界条件を適用して、圧力に関しては出口境界において一定とした。また、壁面境界に対しては壁関数を適用した。Reynolds 数は $Re = 65,000$ であり、代数応力モデルを用いて解析を実施した。

解析結果

図 4.24、図 4.25 に、主流方向流速 u 、断面方向流速 (v, w) の分布を示す。主流方向流速に関しては、 $u / U_c = 0.98$ の等数値線が実験では流路中心にかなり近い領域に現れているのに対して、解析では流路中心からやや離れた領域に現れている。等数値線の歪は、粗分割メッシュに比べて、詳細分割メッシュでは比較的良好に再現できているが、実験ほど顕著ではない。また、断面方向流速に関しては、実験と解析は傾向として概ね良く一致しているが、解析では壁近傍の流速や流路中心から壁頂点へと向かう流速などを過小に評価している。ちなみに、Wall Reflection 項を考慮しない解析では、二次流れは逆まわりとなつた。

次に、図 4.26、図 4.27、図 4.28、図 4.29 に、乱流エネルギー k とその各成分である u_{rms} 、 v_{rms} 、 w_{rms} の分布を示す。粗分割メッシュでは、 k 、 u_{rms} の二次流れによる等数値線の歪が顕著ではなく、また、 k 、 u_{rms} 、 v_{rms} 、 w_{rms} 、いずれも過大に評価する傾向がある。対して、詳細分割メッシュでは、いずれも定性的にも定量的にも実験と概ね良く一致している。

最後に、図 4.39、図 4.40、図 4.41 に、Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} 、 R_{xz} 、垂直成分差 $R_{yy} - R_{zz}$ の分布を示す。実験においては、二次流れの影響から対称面（ $y=0$ / $z=0$ ）の近傍で Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} / R_{xz} が異符号となる領域が現れる。解析においても、 R_{xy} / R_{xz} が異符号となる領域が現れているが、粗分割メッシュに比べ詳細分割メッシュの方が良好に再現できている。また、Reynolds 応力の垂直成分差 $R_{yy} - R_{zz}$ は理論的には対角線で対称となるが、実験では対称性が崩れている。一方、解析では粗分割メッシュの結果と詳細分割メッシュの結果は極めて良く一致しており、ともに対称性は保たれている。

4.3.2 Sata らの実験による検証

解析条件

乱流モデル : 代数応力モデル

解析領域	:	図 4.1 参照
境界条件	:	ABCD面 … 入口境界 $u_m = 5.0 [\text{m/s}]$
		EFGH面 … 出口境界 $P = 0.0 [\text{Pa}]$
		BCGF面、CDHG面 … 壁面境界 $u = v = w = 0.0 [\text{m/s}]$
		ADHE面 … 対称境界 $v = 0.0 [\text{m/s}]$
		ABFE面 … 対称境界 $w = 0.0 [\text{m/s}]$
Reynolds 数	:	$Re = 24,000$

解析領域は、主流方向（ x 方向） $2D$ 、流路断面 $D \times D$ の矩形ダクト領域に対して、流路中心（ $y=0$ および $z=0$ ）における対称性を考慮した $1/4$ セクタ領域であり、要素分割は、主流方向に関して 20 分割、主流と直交する断面に関して 40×40 分割とした。境界条件は、流速、乱流エネルギー、散逸率に関しては周期境界条件を適用して、圧力に関しては出口境界において一定とした。また、壁面境界に対しては壁関数を適用した。Reynolds 数は $Re = 24,000$ であり、代数応力モデルを用いて解析を実施した。

解析結果

図 4.33、図 4.34 に、主流方向流速 u 、断面方向流速 (v, w) の分布を示す。主流方向流速に関しては、 $u / U_c = 0.6, 0.7$ の等数値線は実験と概ね良く一致しているが、 $u / U_c = 0.8, 0.9$ の等数値線は解析では歪がそれほど顕著に現れていない。また、断面方向流速に関しては、二次渦の中心位置は実験と概ね良く一致しているが、流路中心から壁頂点へと向かう流速を解析では過小に評価している。

次に、図 4.35、図 4.36、図 4.37、図 4.38 に、乱流エネルギー k とその各成分である u_{rms} 、 v_{rms} 、 w_{rms} の分布を示す。主流流速と同様、乱流エネルギーに関しても、二次流れによる等数値線の歪は解析ではそれほど顕著に現れていない。また、壁近傍領域においては、実験では主流方向の非等方成分 u_{rms} が支配的であり、断面方向の非等方成分 v_{rms} 、 w_{rms} の減衰が顕著であるのに対して、解析では u_{rms} も v_{rms} 、 w_{rms} と同程度に減衰している。壁関数の影響が現れていると考えられる。

最後に、図 4.39、図 4.40、図 4.41 に、Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} 、 R_{xz} 、 R_{yz} の分布を示す。いずれも実験の特徴を再現できているが、解析では二次流れを過小に評価しているように、Reynolds 応力の絶対量も過小に評価する傾向がある。

表 4.1 平行平板間乱流 摩擦流速 u_τ / U_c の比較
 (実験値 $u_\tau / U_c = 4.23 \times 10^{-2}$)

	粗分割メッシュ	詳細分割メッシュ
標準型 $k - \varepsilon$ モデル	$u_\tau / U_c = 4.66 \times 10^{-2}$ ($y^+ = 57.3$)	$u_\tau / U_c = 4.63 \times 10^{-2}$ ($y^+ = 28.5$)
RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル	$u_\tau / U_c = 4.61 \times 10^{-2}$ ($y^+ = 56.7$)	$u_\tau / U_c = 4.57 \times 10^{-2}$ ($y^+ = 28.1$)
代数応力モデル	$u_\tau / U_c = 4.61 \times 10^{-2}$ ($y^+ = 56.7$)	$u_\tau / U_c = 4.52 \times 10^{-2}$ ($y^+ = 27.8$)

y^+ : 壁隣接節点における壁座標 ($y^+ = u_\tau y / v$)

表 4.2 平行平板間乱流 計算所要時間

	粗分割メッシュ (1000 要素)	詳細分割メッシュ (2000 要素)
標準型 $k - \varepsilon$ モデル	$\tau = 1620$ [sec] ($t = 38.606$ [sec]) $\tau / n = 0.042$ [sec / step]	$\tau = 2280$ [sec] ($t = 27.755$ [sec]) $\tau / n = 0.082$ [sec / step]
RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル	$\tau = 1708$ [sec] ($t = 39.222$ [sec]) $\tau / n = 0.044$ [sec / step]	$\tau = 3073$ [sec] ($t = 35.163$ [sec]) $\tau / n = 0.087$ [sec / step]
代数応力モデル	$\tau = 11821$ [sec] ($t = 171.191$ [sec]) $\tau / n = 0.069$ [sec / step]	$\tau = 7031$ [sec] ($t = 41.448$ [sec]) $\tau / n = 0.169$ [sec / step]

t : 定常に到達したときの解析時刻

τ : 定常に到達するまでの計算所要時間

τ / n : タイムステップあたりの計算所要時間

表 4.3 亂流ステップフロー 計算所要時間

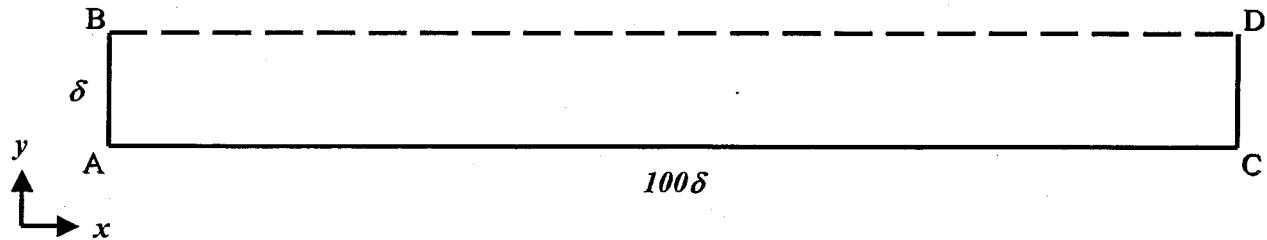
	粗分割メッシュ (568 要素)	詳細分割メッシュ (1504 要素)
標準型 $k - \varepsilon$ モデル	$\tau = 846$ [sec] ($t = 0.24730$ [sec]) $\tau / n = 0.034$ [sec / step]	$\tau = 2206$ [sec] ($t = 0.23563$ [sec]) $\tau / n = 0.094$ [sec / step]
RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル	$\tau = 1434$ [sec] ($t = 0.40252$ [sec]) $\tau / n = 0.036$ [sec / step]	$\tau = 3661$ [sec] ($t = 0.37166$ [sec]) $\tau / n = 0.098$ [sec / step]
代数応力モデル	$\tau = 2254$ [sec] ($t = 0.39061$ [sec]) $\tau / n = 0.058$ [sec / step]	$\tau = 7228$ [sec] ($t = 0.35754$ [sec]) $\tau / n = 0.199$ [sec / step]

 t : 定常に到達したときの解析時刻 τ : 定常に到達するまでの計算所要時間 τ / n : タイムステップあたりの計算所要時間

表 4.4 乱流ステップフロー 入口境界条件

y	u	k	ε
0.000E+00	0.000E+00	7.998E-05	3.185E-05
2.465E-03	7.925E-02	2.029E-04	1.287E-04
5.249E-03	9.624E-02	1.529E-04	8.419E-05
8.395E-03	1.044E-01	1.269E-04	6.364E-05
1.195E-02	1.096E-01	1.096E-04	5.107E-05
1.596E-02	1.147E-01	9.252E-05	3.963E-05
2.050E-02	1.191E-01	7.827E-05	3.085E-05
2.554E-02	1.236E-01	6.365E-05	2.261E-05
3.058E-02	1.265E-01	5.293E-05	1.715E-05
3.561E-02	1.291E-01	4.226E-05	1.223E-05
4.065E-02	1.297E-01	3.845E-05	1.062E-05
4.569E-02	1.291E-01	4.226E-05	1.223E-05
5.073E-02	1.265E-01	5.293E-05	1.715E-05
5.576E-02	1.236E-01	6.365E-05	2.261E-05
6.080E-02	1.191E-01	7.827E-05	3.085E-05
6.534E-02	1.147E-01	9.252E-05	3.963E-05
6.935E-02	1.096E-01	1.096E-04	5.107E-05
7.291E-02	1.044E-01	1.269E-04	6.364E-05
7.605E-02	9.624E-02	1.529E-04	8.419E-05
7.884E-02	7.925E-02	2.029E-04	1.287E-04
8.130E-02	0.000E+00	7.998E-05	3.185E-05

解析領域



要素分割

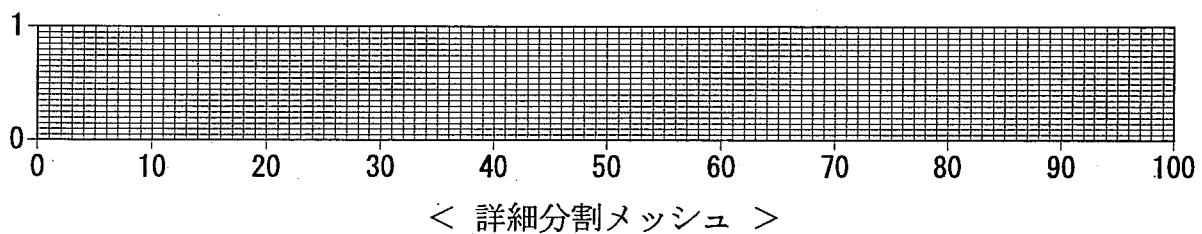
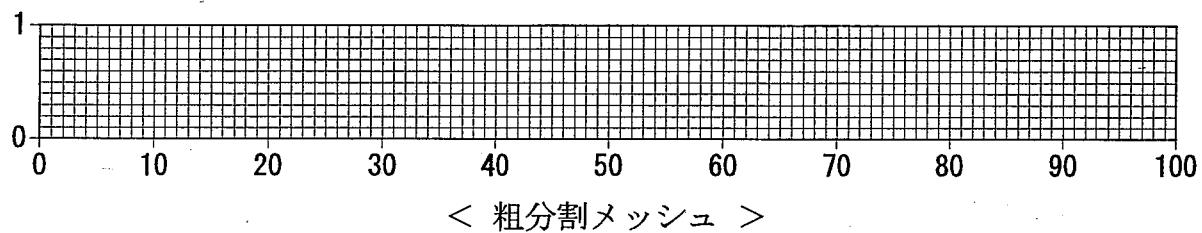
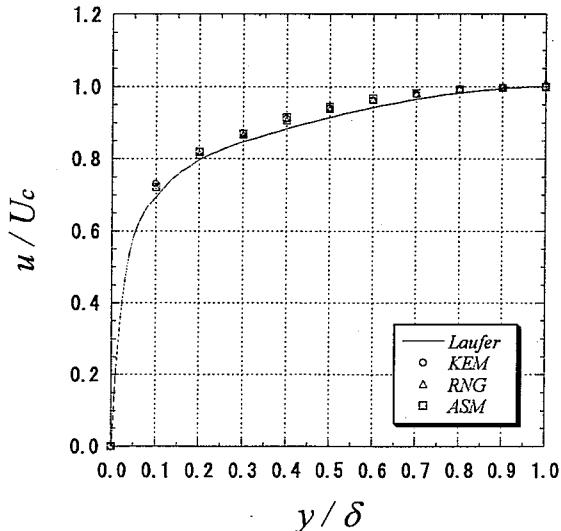


図 4.1 平行平板間乱流 解析領域と要素分割

粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

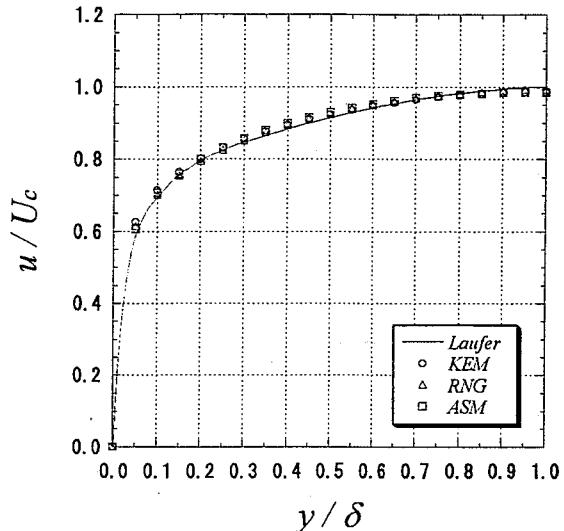
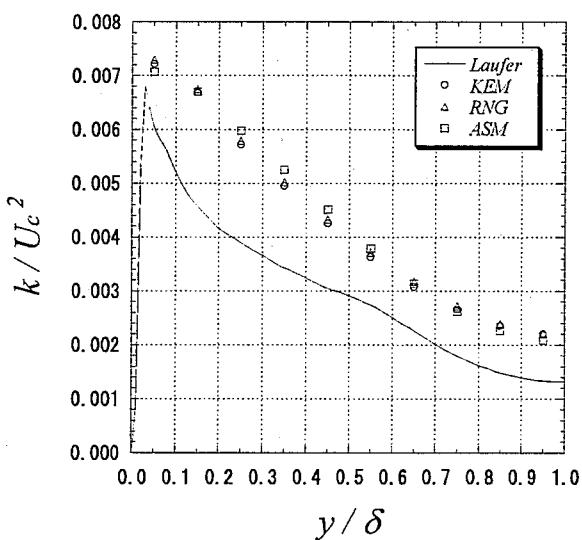


図 4.2 流速 u / U_c の分布

粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

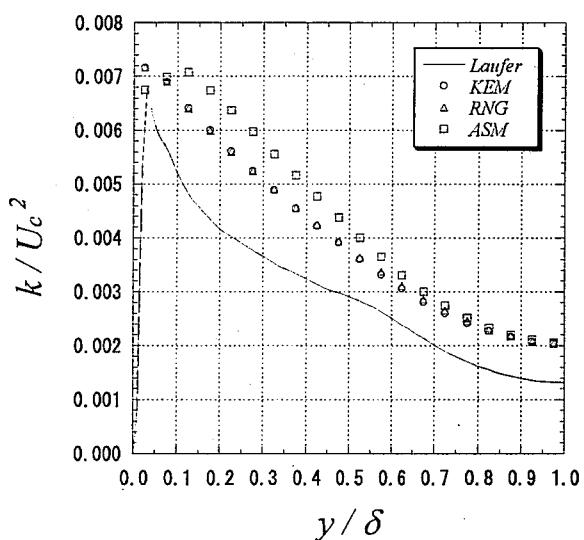
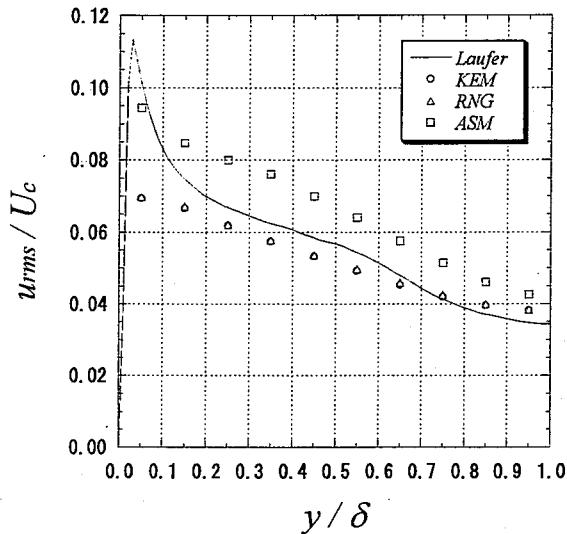
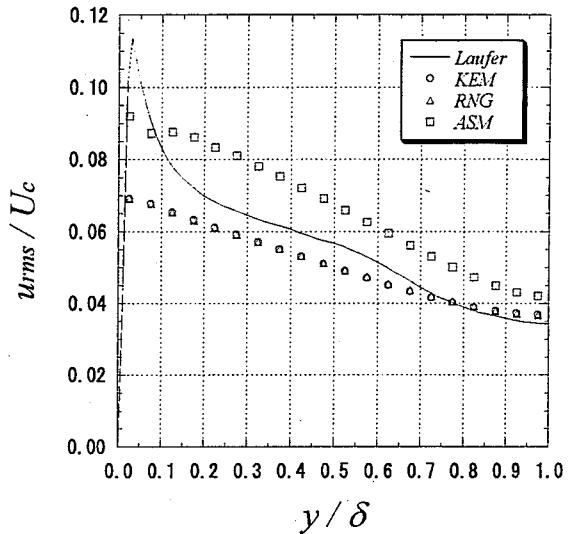
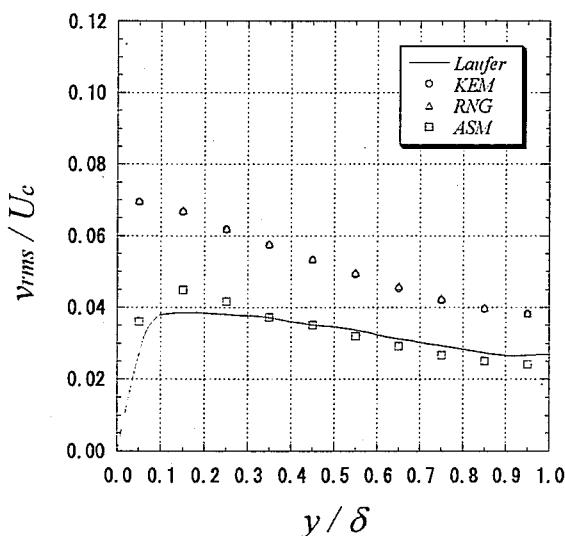
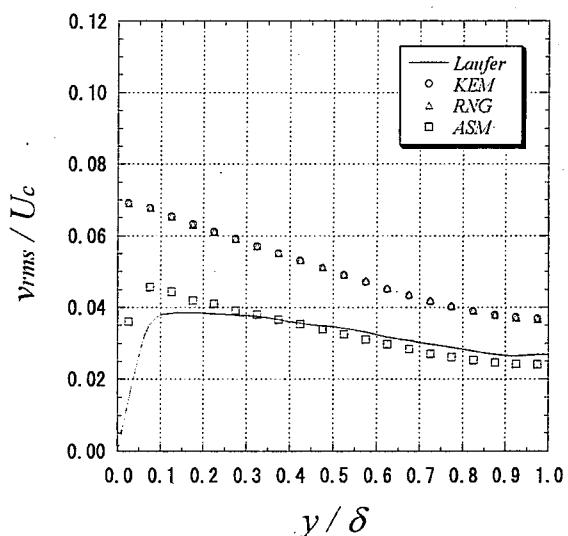
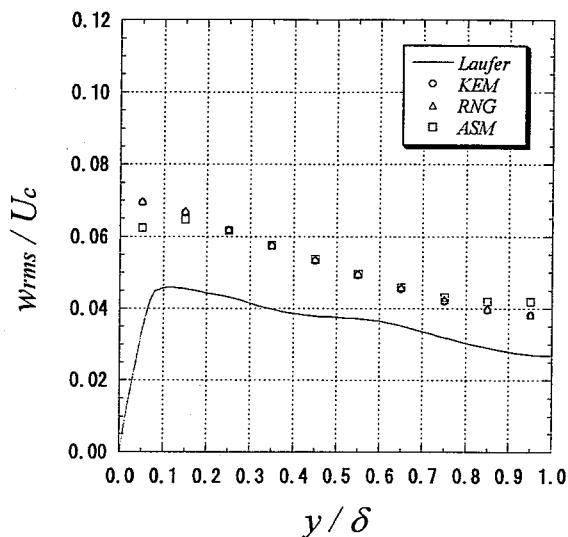
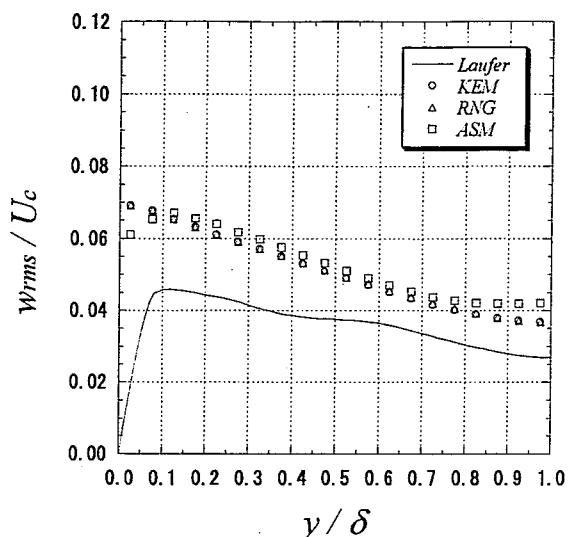
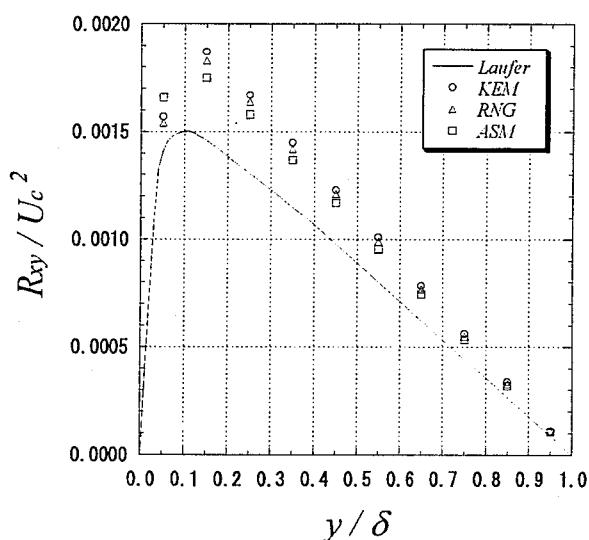
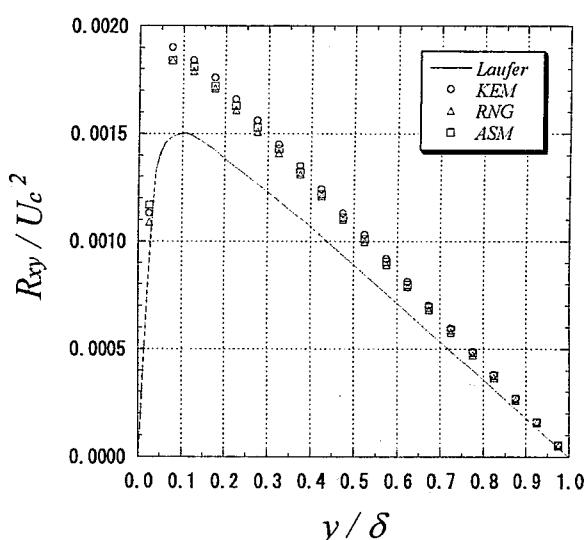
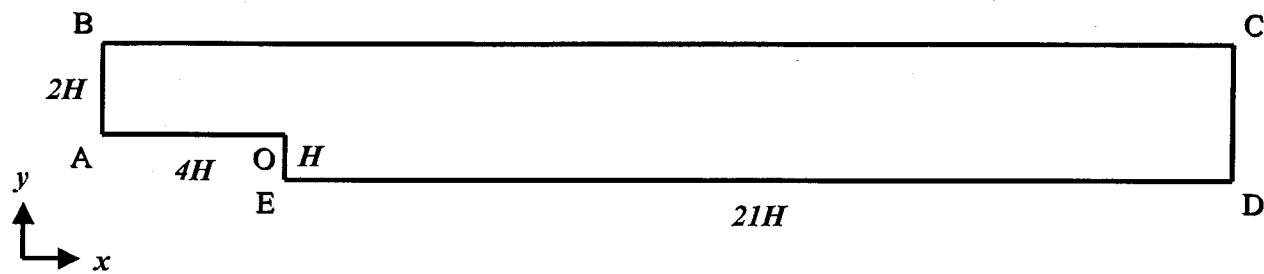


図 4.3 乱流エネルギー k / U_c^2 の分布

粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.4 流速の変動成分 u_{rms} / U_c の分布粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.5 流速の変動成分 v_{rms} / U_c の分布

粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.6 流速の変動成分 w_{rms} / U_c の分布粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.7 Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} / U_c^2 の分布

解析領域

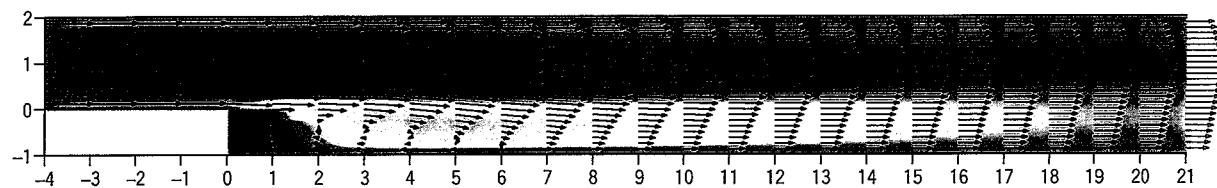


要素分割



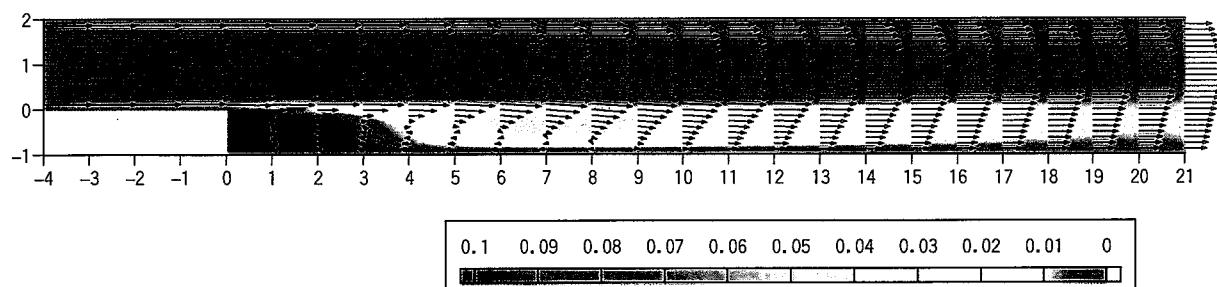
図 4.8 亂流ステップフロー 解析領域と要素分割

標準型 $k - \varepsilon$ モデル



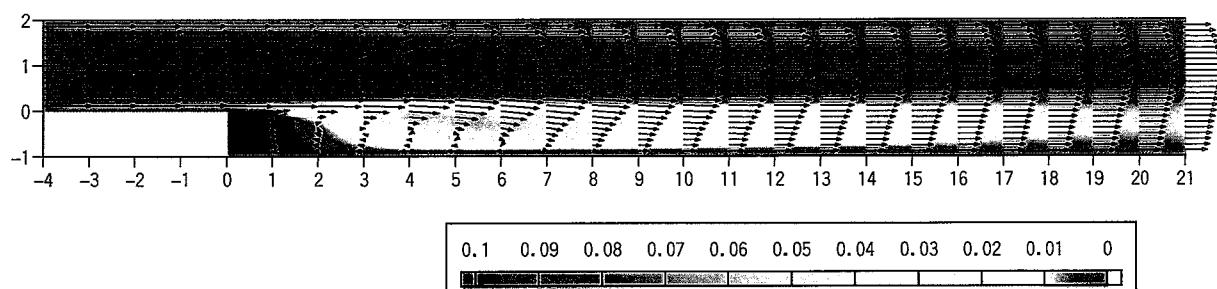
再付着点位置 : $6.00 H$

RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル



再付着点位置 : $8.75 H$

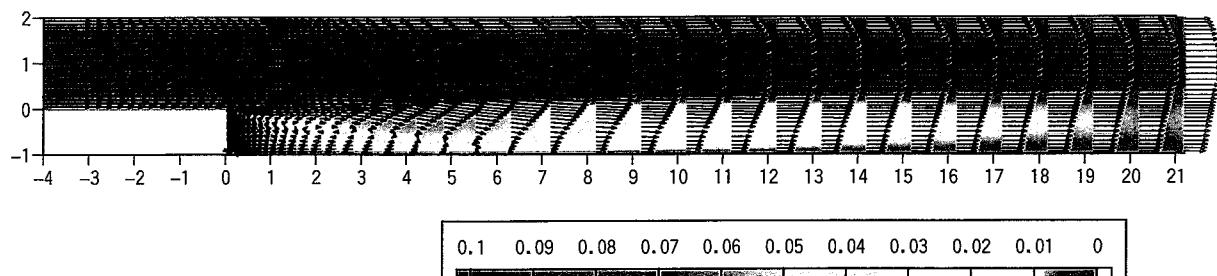
代数応力モデル



再付着点位置 : $6.86 H$

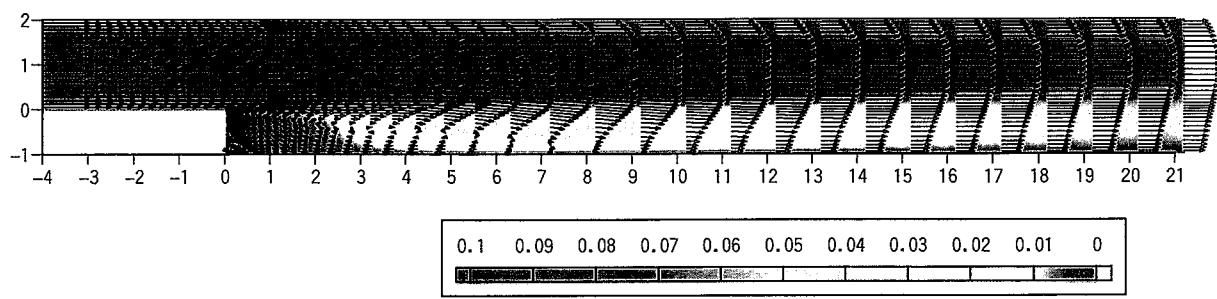
図 4.9(1) 流速、乱流エネルギーの分布

標準型 $k - \varepsilon$ モデル



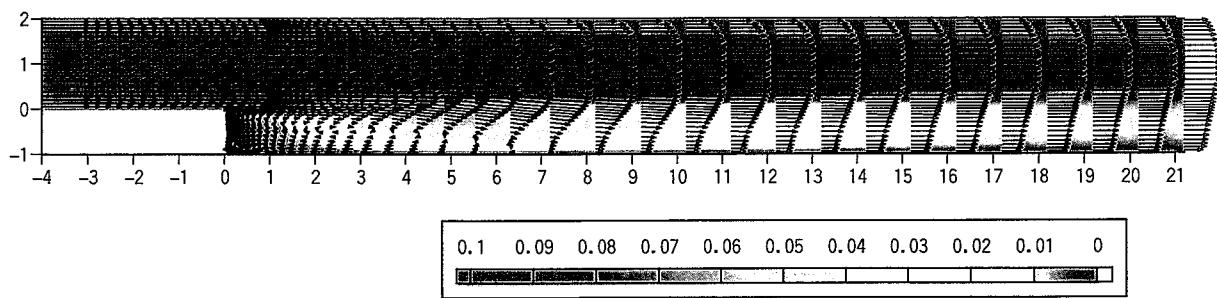
再付着点位置 : $5.98 H$

RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル



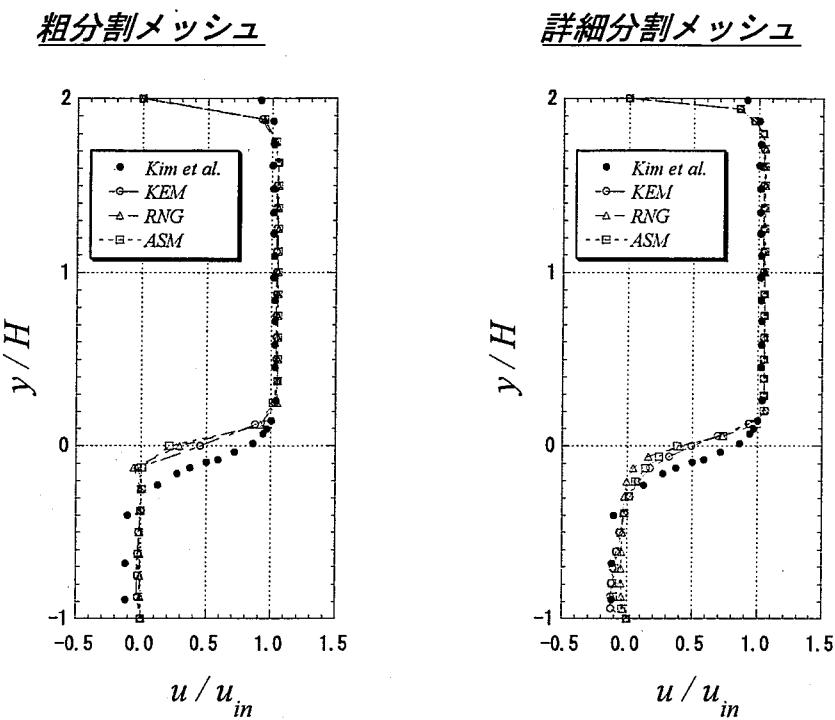
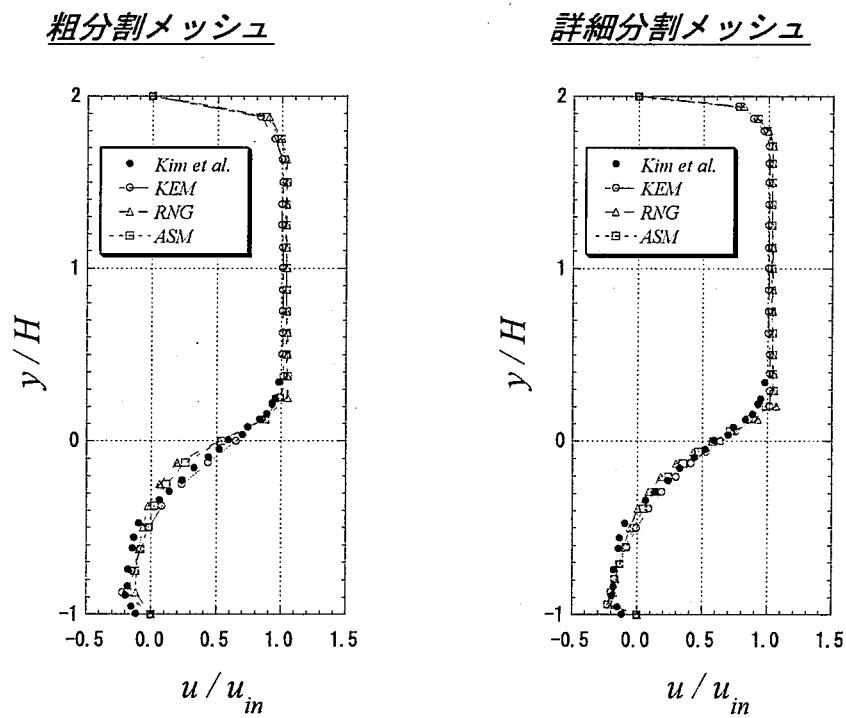
再付着点位置 : $7.84 H$

代数応力モデル

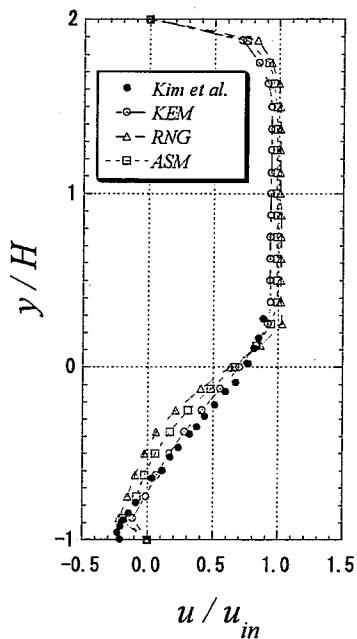


再付着点位置 : $6.61 H$

図 4.9(2) 流速、乱流エネルギーの分布

図 4.10 (a) $x / H = 1$ における流速 u / u_{in} の分布図 4.10 (b) $x / H = 3$ における流速 u / u_{in} の分布

粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

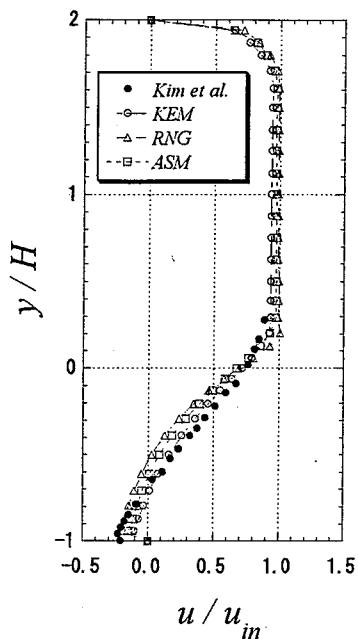
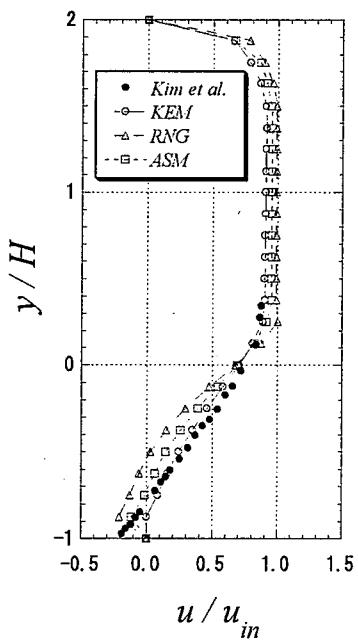


図 4.10 (c) $x / H = 5$ における流速 u / u_{in} の分布

粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

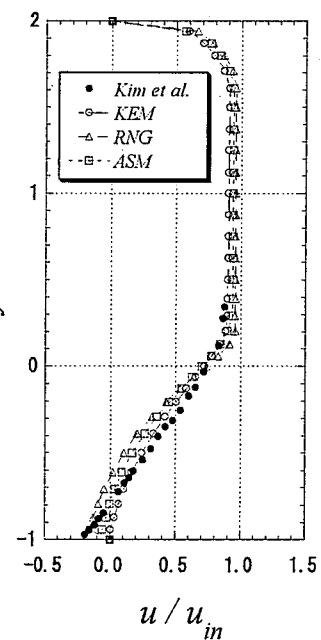
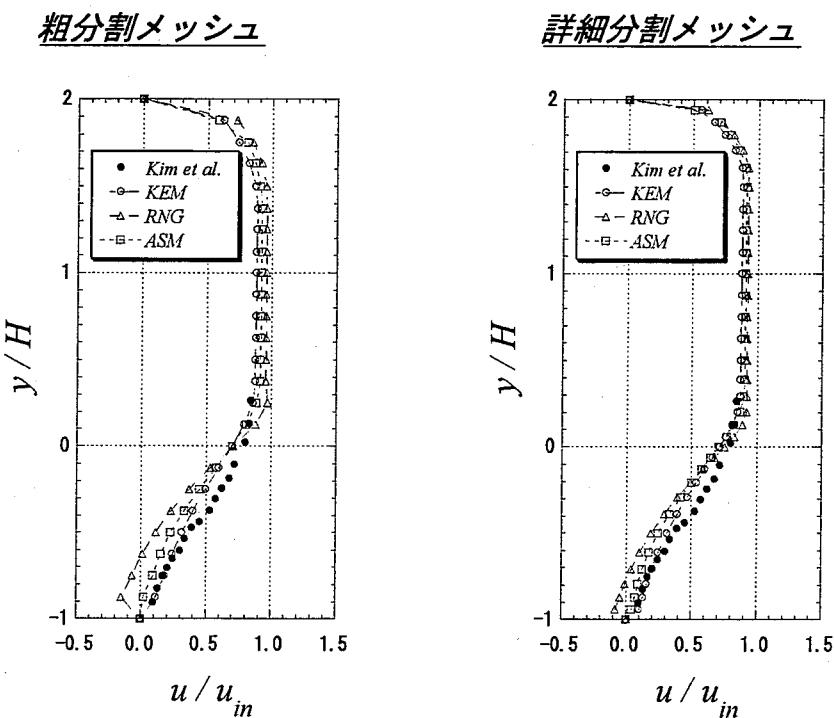
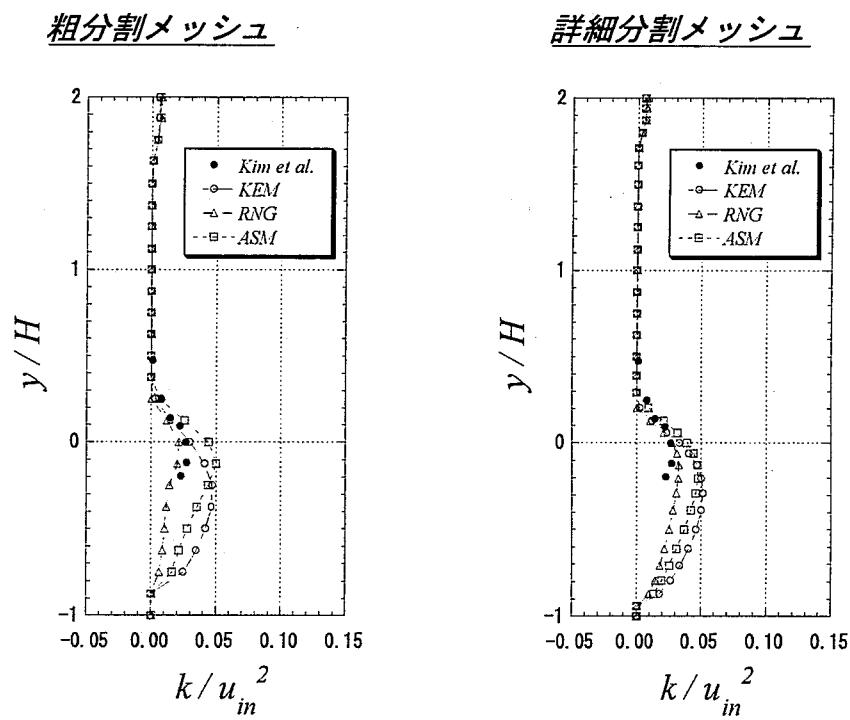
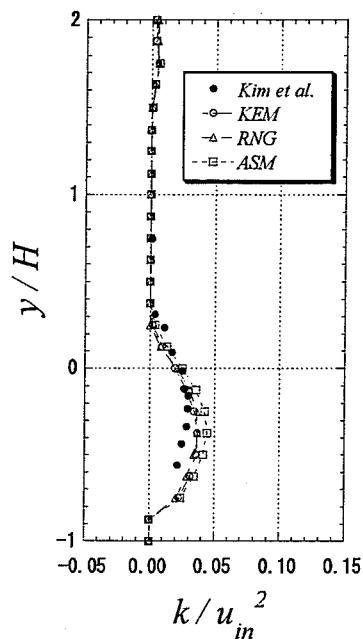
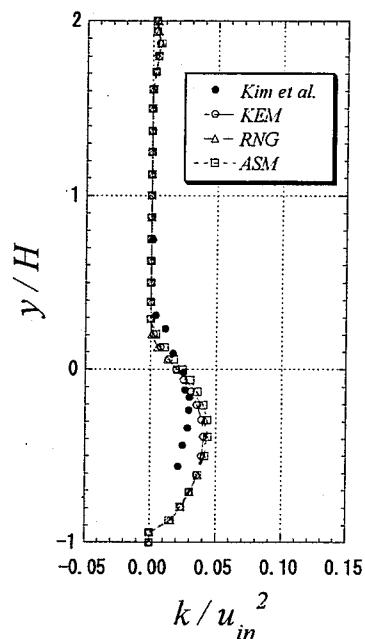
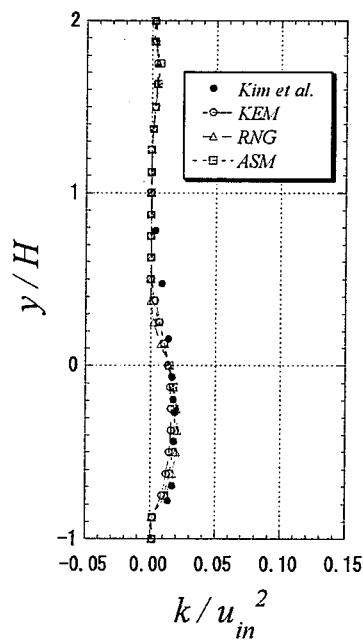
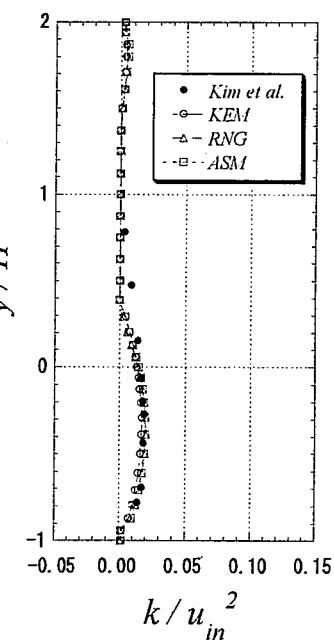


図 4.10 (d) $x / H = 6$ における流速 u / u_{in} の分布

図 4.10 (e) $x / H = 7$ における流速 u / u_{in} の分布図 4.11 (a) $x / H = 4$ における乱流エネルギー k / u_{in}^2 の分布

粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.11 (b) $x / H = 7$ における乱流エネルギー k / u_{in}^2 の分布粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.11 (c) $x / H = 13$ における乱流エネルギー k / u_{in}^2 の分布

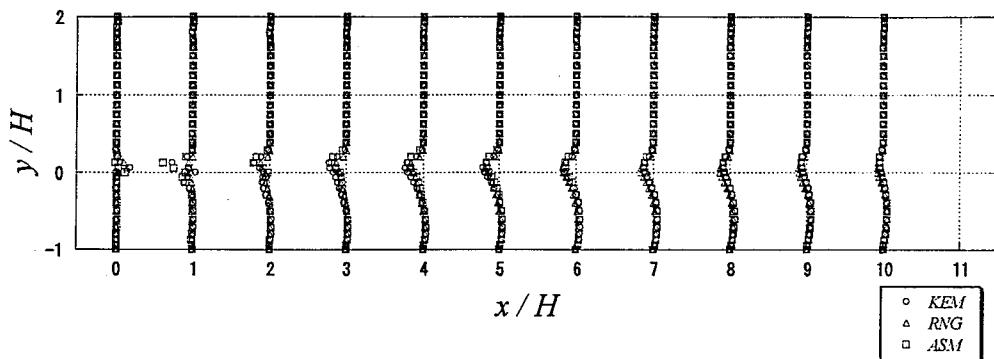
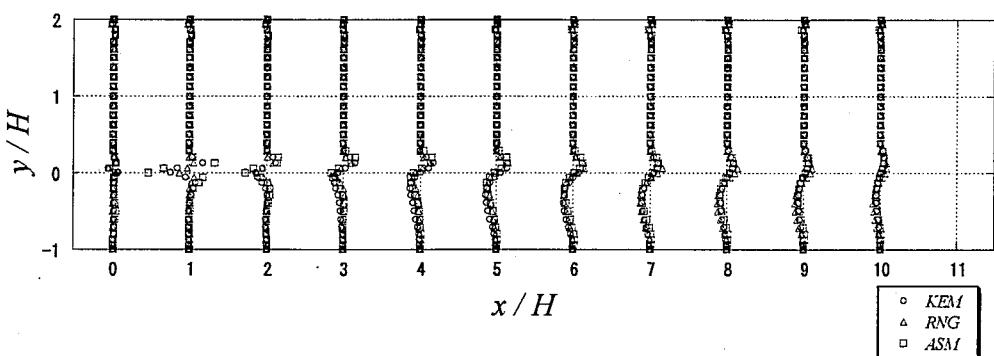
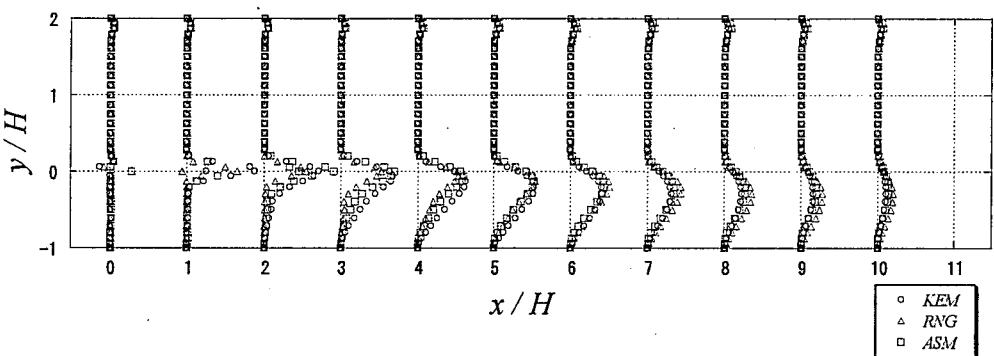
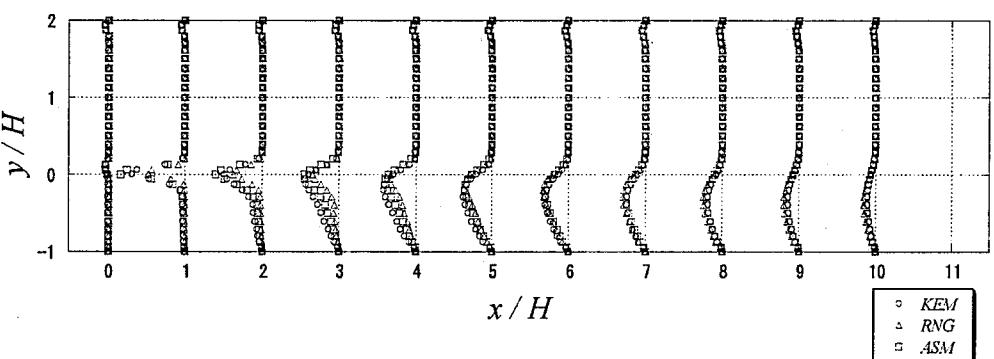
移流項 $C_k / (U_c^3 / H)$ 拡散項 $D_k / (U_c^3 / H)$ 生成項 $P_k / (U_c^3 / H)$ 散逸項 $E_k / (U_c^3 / H)$ 

図 4.12 乱流エネルギー輸送方程式の収支

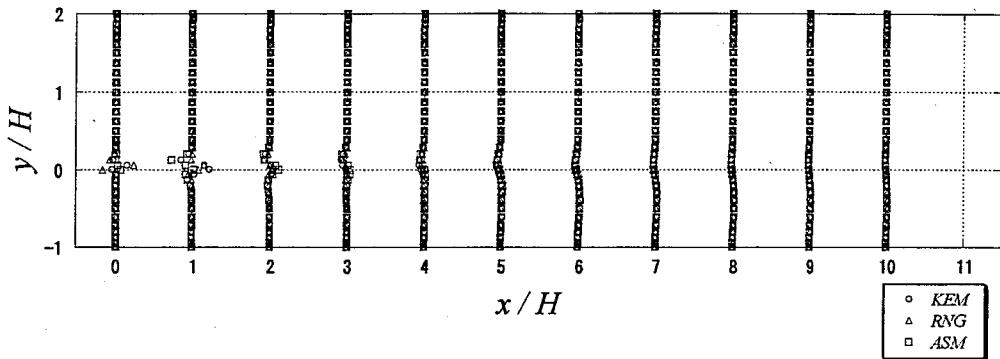
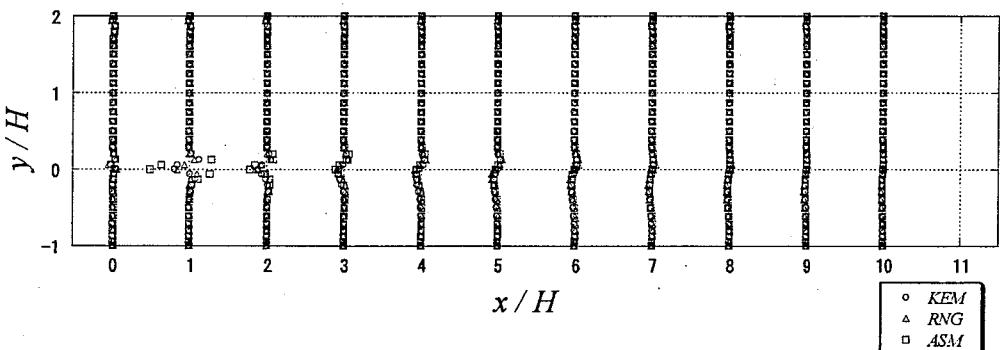
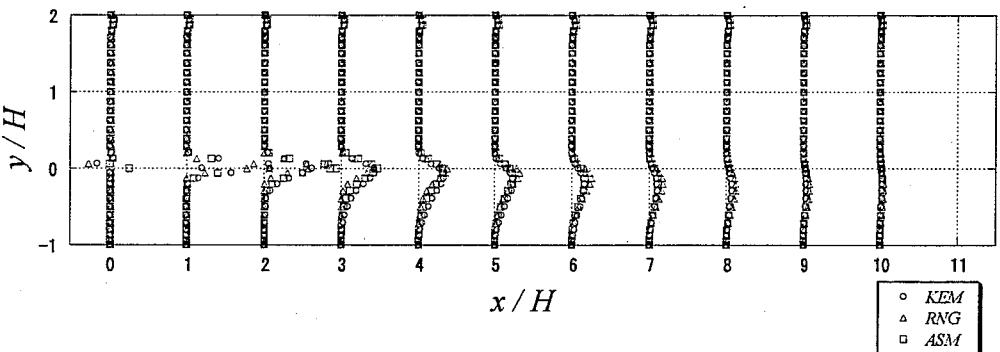
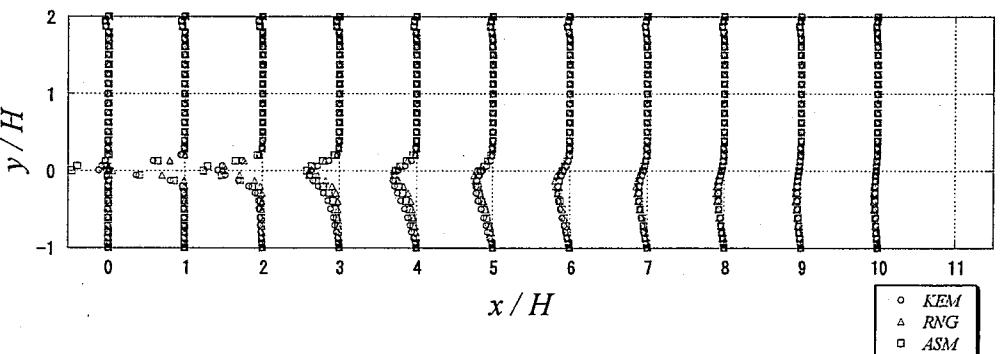
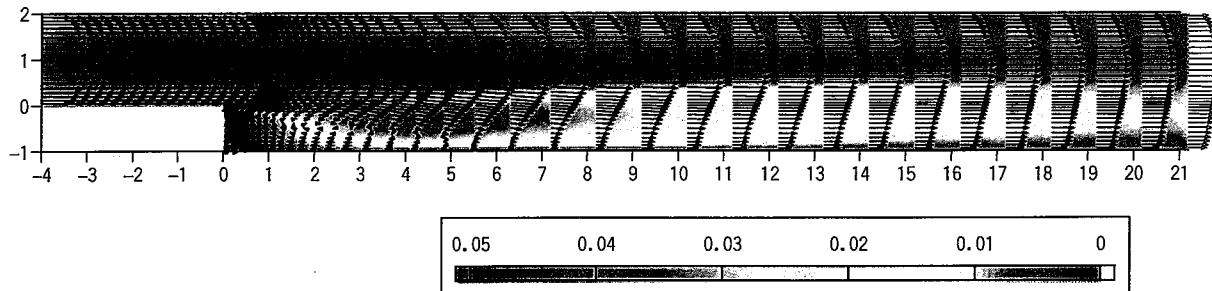
移流項 $C_\varepsilon / (U_c^4 / H^2)$ 拡散項 $D_\varepsilon / (U_c^4 / H^2)$ 生成項 $P_\varepsilon / (U_c^4 / H^2)$ 散逸項 $E_\varepsilon / (U_c^4 / H^2)$ 

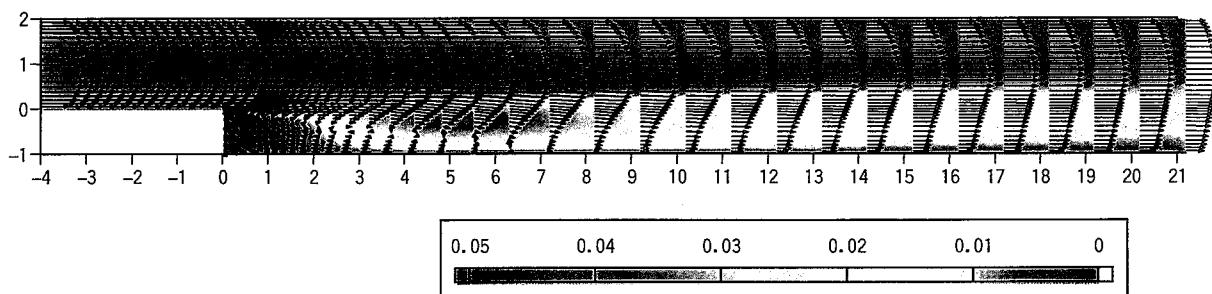
図 4.13 散逸率輸送方程式の収支

標準型 $k - \varepsilon$ モデル



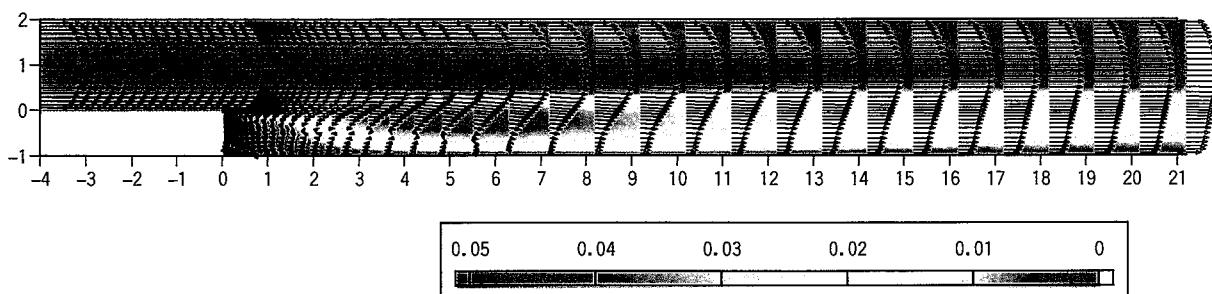
再付着点位置 : $5.43 H$

RNG 型 $k - \varepsilon$ モデル



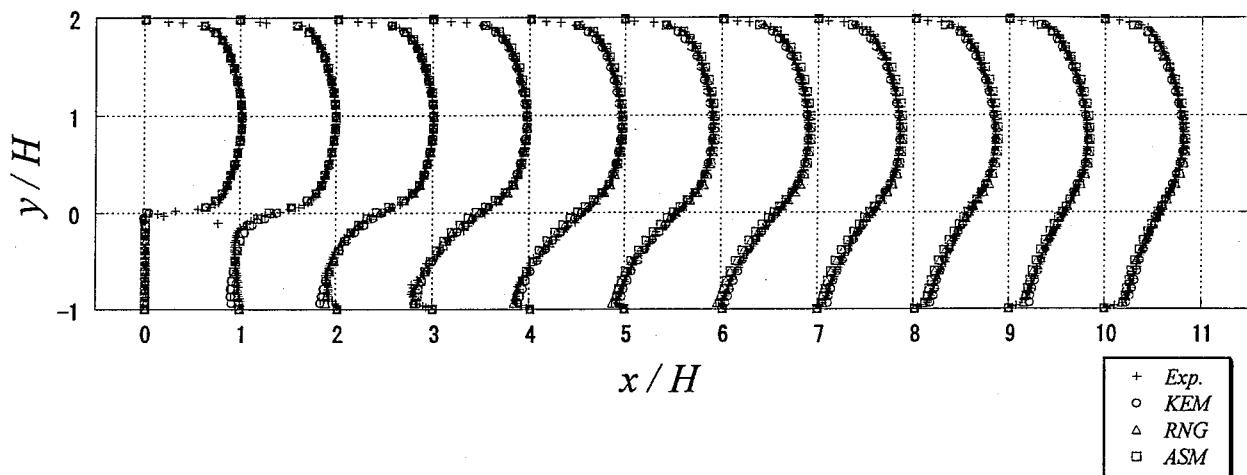
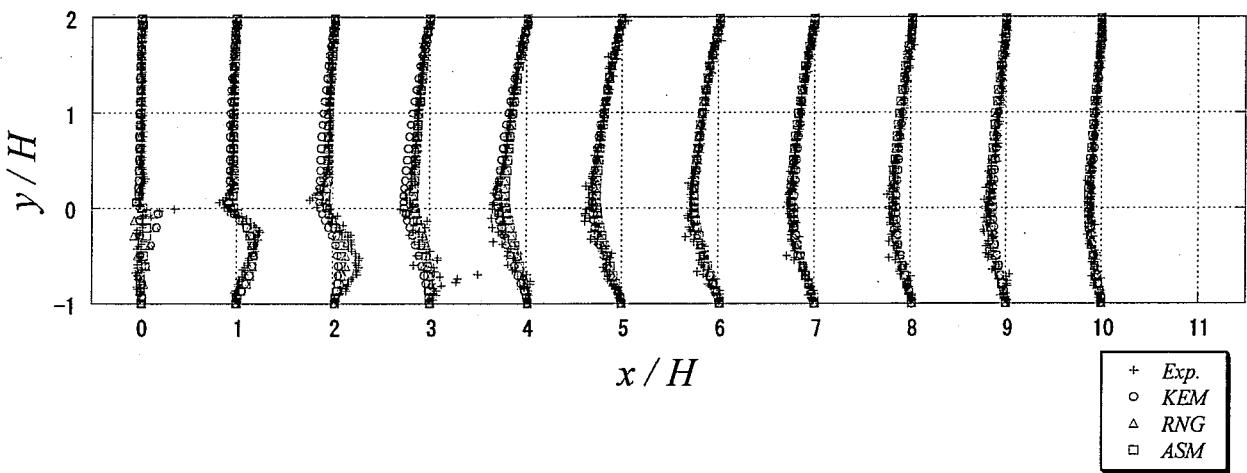
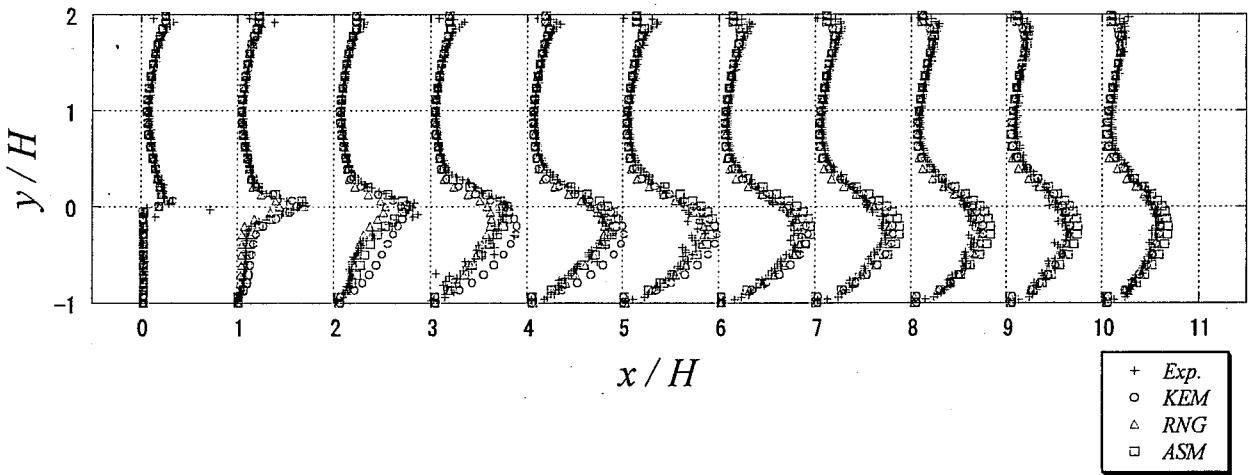
再付着点位置 : $6.73 H$

代数応力モデル



再付着点位置 : $6.32 H$

図 4.14 流速、乱流エネルギーの分布

図 4.15 流速 u / U_c の分布図 4.16 流速 v / U_c の分布図 4.17 乱流エネルギー k / U_c^2 の分布

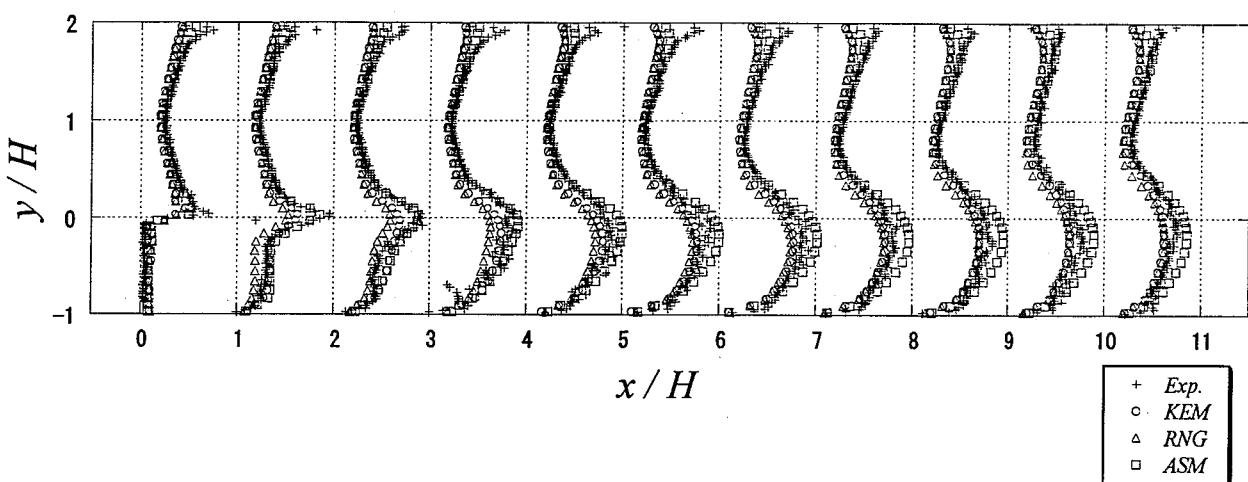


図 4.18 流速の変動成分 u_{rms} / U_c の分布

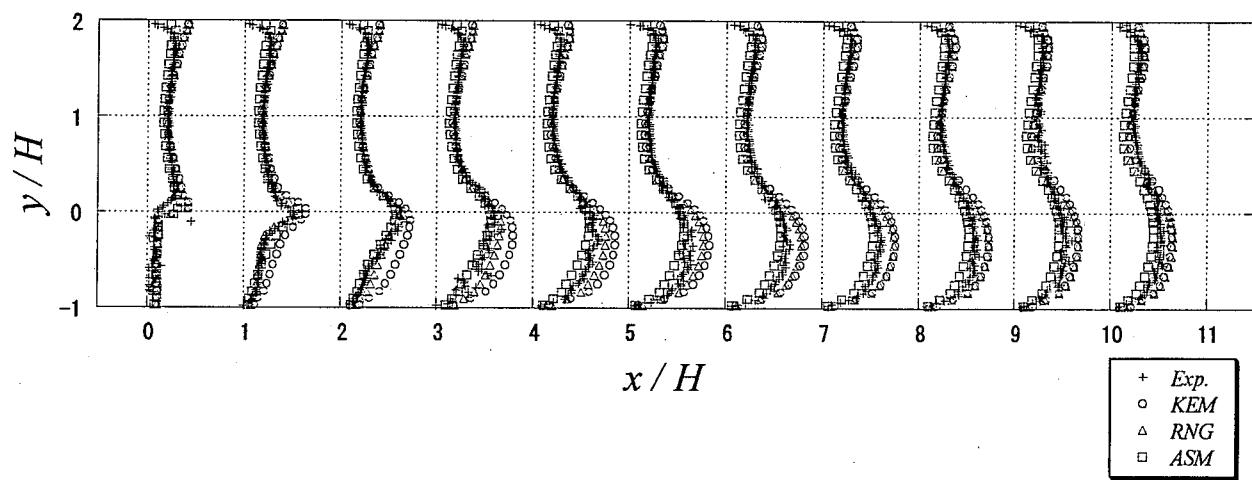


図 4.19 流速の変動成分 v_{rms} / U_c の分布

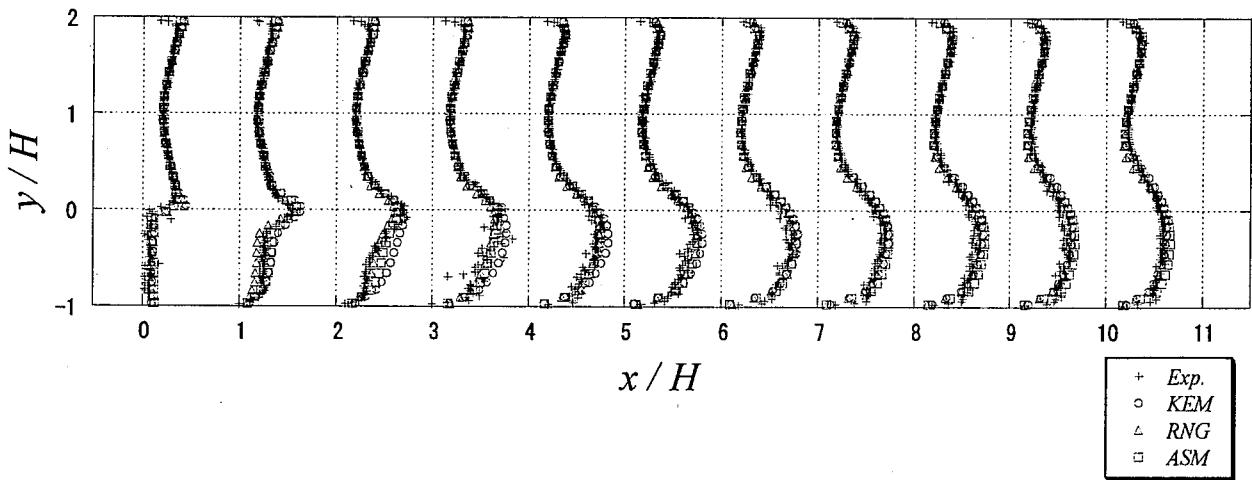


図 4.20 流速の変動成分 w_{rms} / U_c の分布

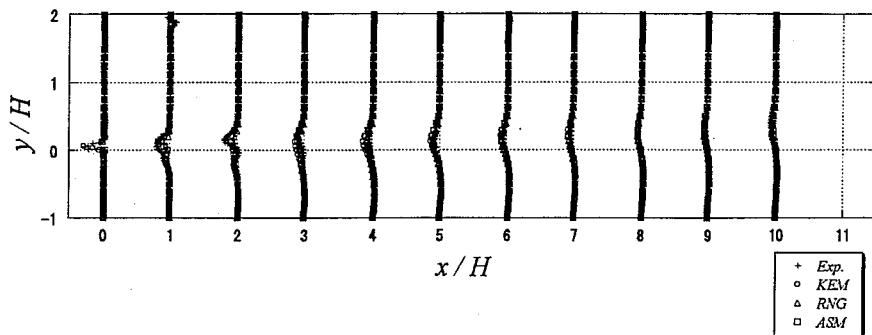
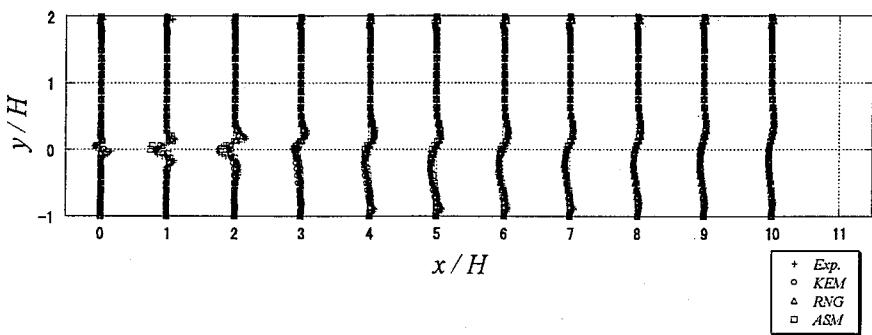
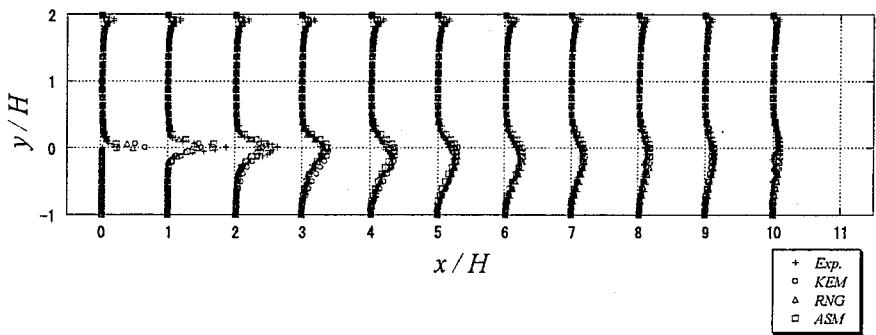
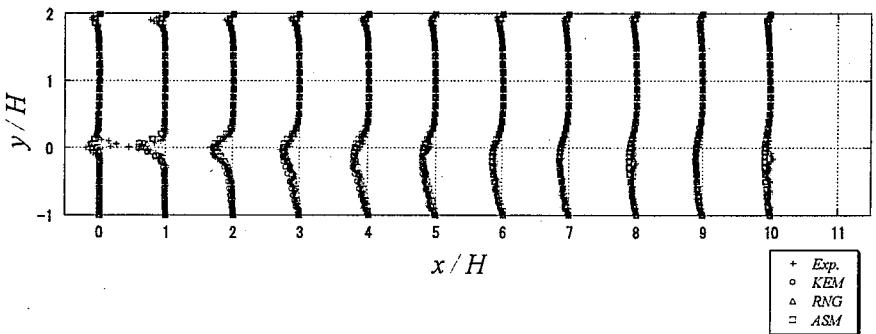
移流項 $C_k / (U_c^3 / H)$ 拡散項 $D_k / (U_c^3 / H)$ 生成項 $P_k / (U_c^3 / H)$ 散逸項 $E_k / (U_c^3 / H)$ 

図 4.21 乱流エネルギー輸送方程式の収支

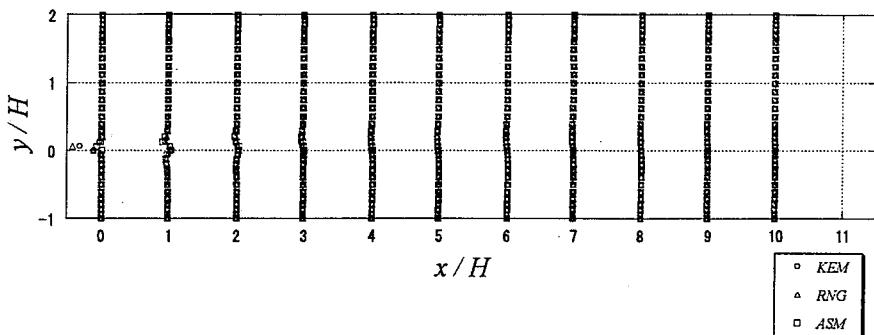
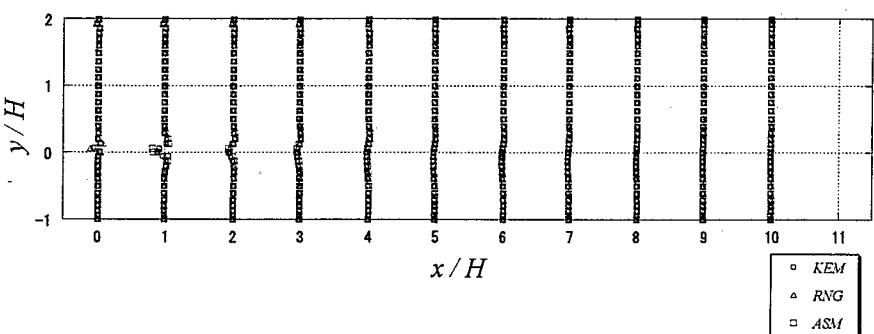
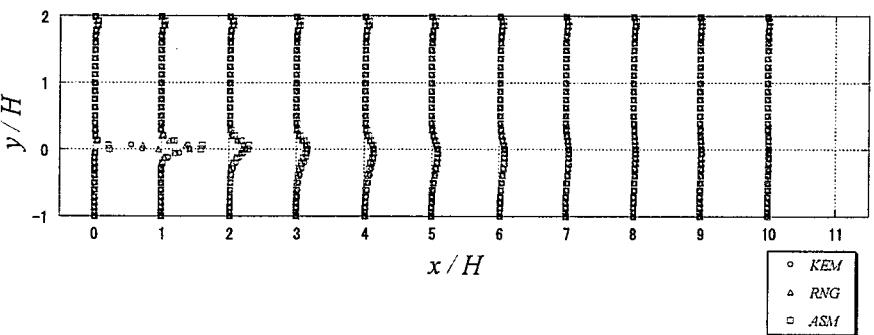
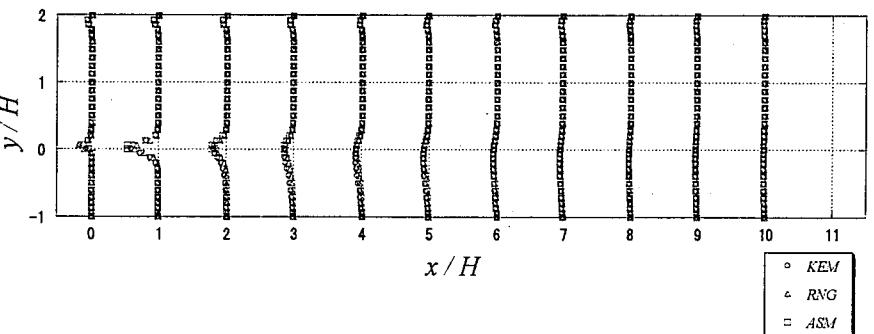
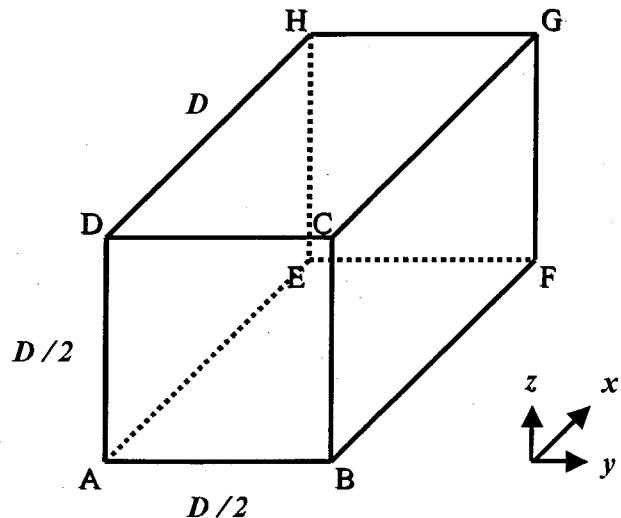
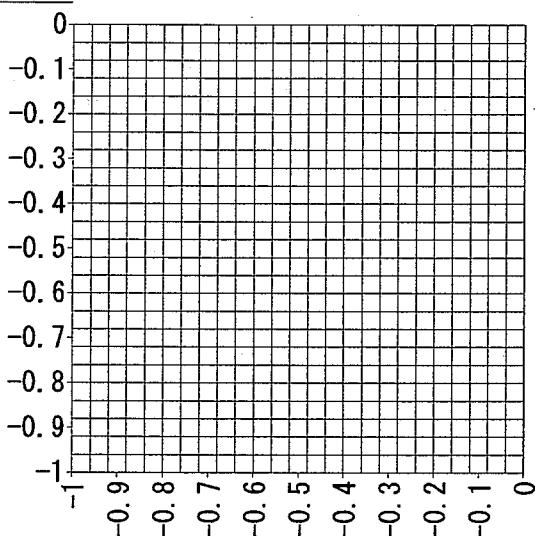
移流項 $C_\varepsilon / (U_c^4 / H^2)$ 拡散項 $D_\varepsilon / (U_c^4 / H^2)$ 生成項 $P_\varepsilon / (U_c^4 / H^2)$ 散逸項 $E_\varepsilon / (U_c^4 / H^2)$ 

図 4.22 散逸率輸送方程式の収支

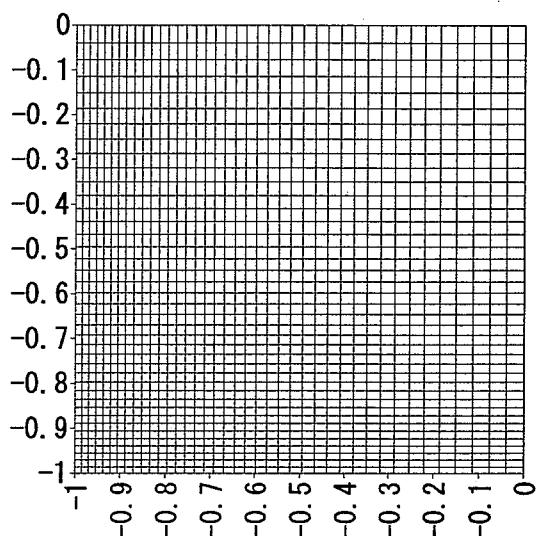
解析領域



要素分割



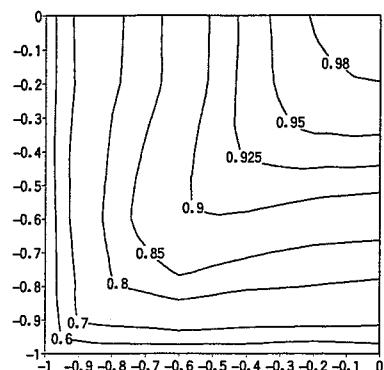
< 粗分割メッシュ >



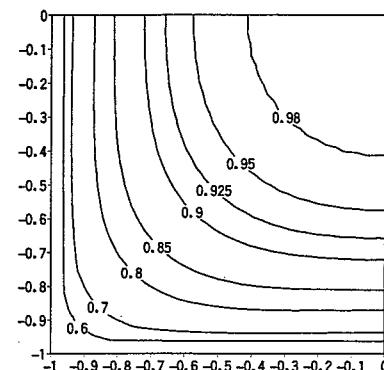
< 詳細分割メッシュ >

図 4.23 矩形ダクトフロー 解析領域と要素分割

実験



粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

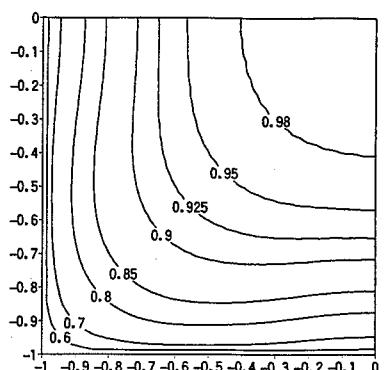
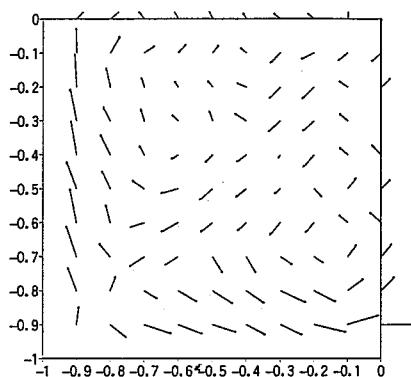
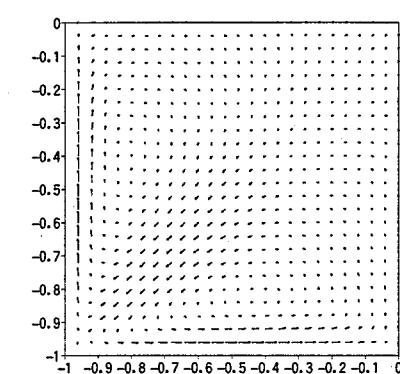


図 4.24 主流方向流速 u / U_c の分布

実験



粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

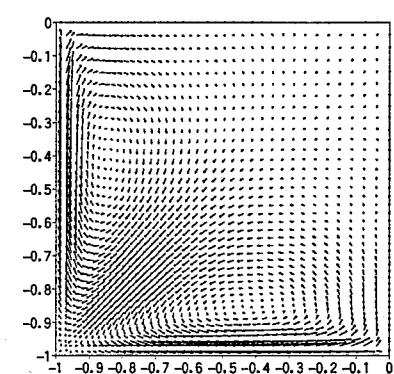
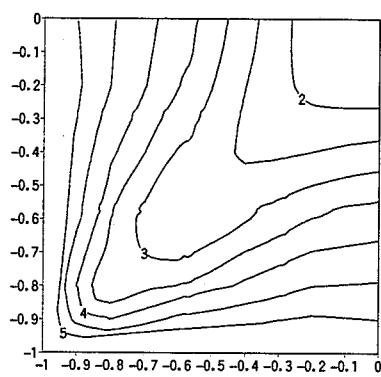
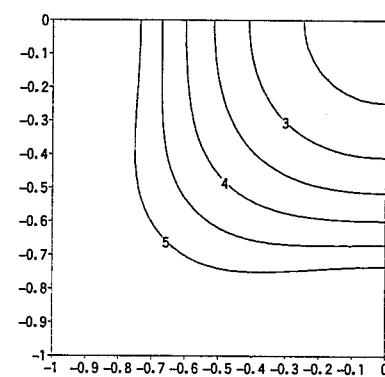


図 4.25 断面方向流速 (v, w) の分布

実験



粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

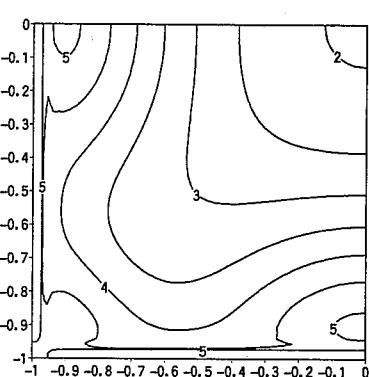
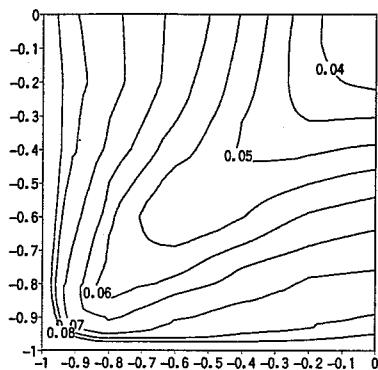
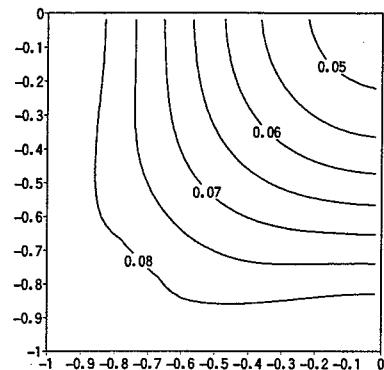
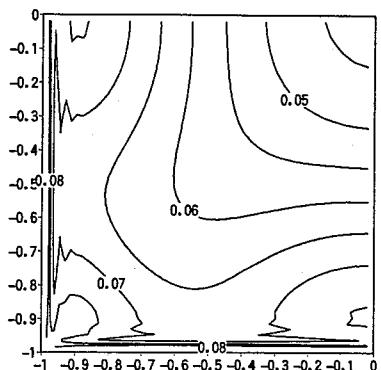
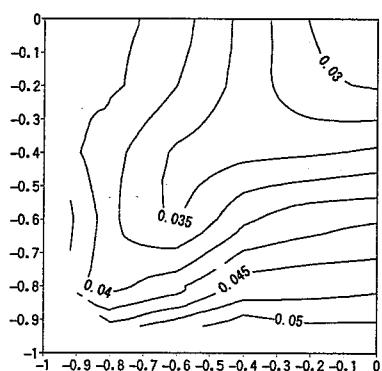
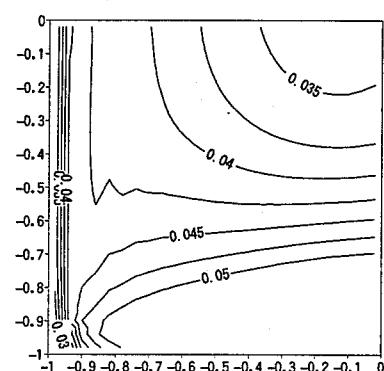
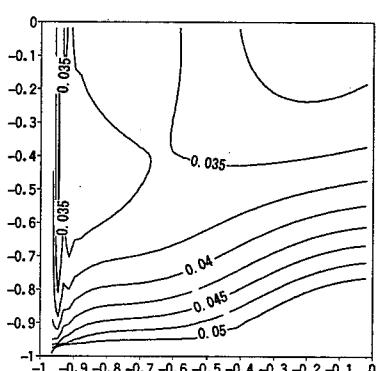
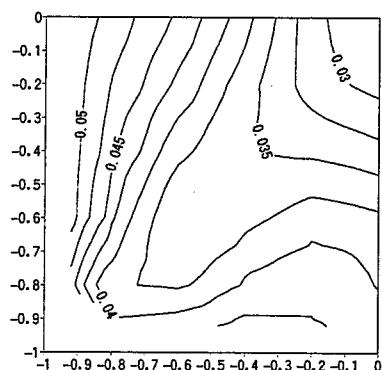
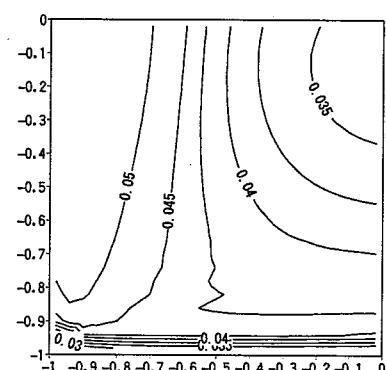
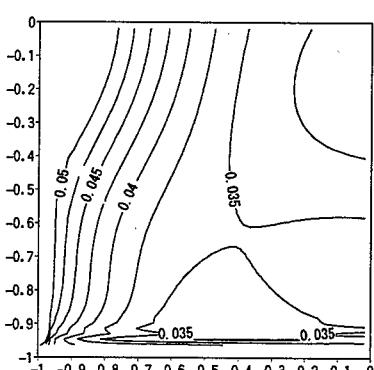
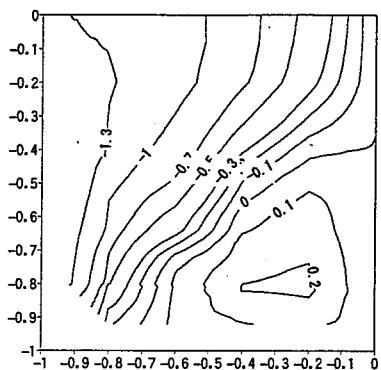


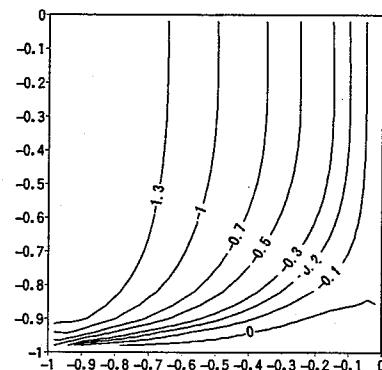
図 4.26 乱流エネルギー k / U_c^2 の分布

実験粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.27 流速の変動成分 u_{rms} / U_c の分布実験粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.28 流速の変動成分 v_{rms} / U_c の分布実験粗分割メッシュ詳細分割メッシュ図 4.29 流速の変動成分 w_{rms} / U_c の分布

実験



粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

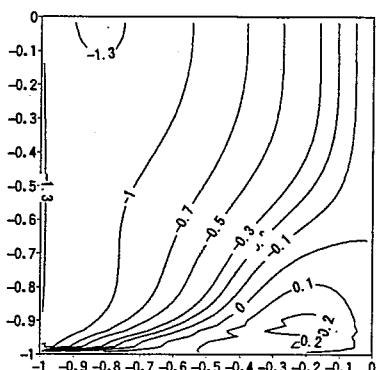
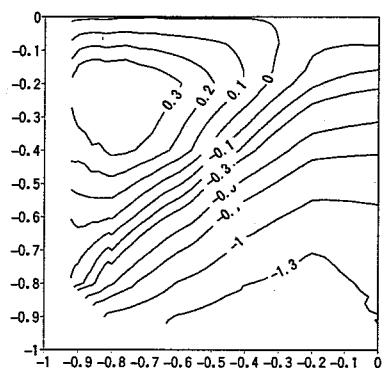
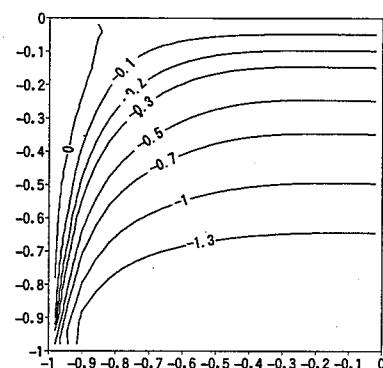


図 4.30 Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} / U_c^2 の分布

実験



粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

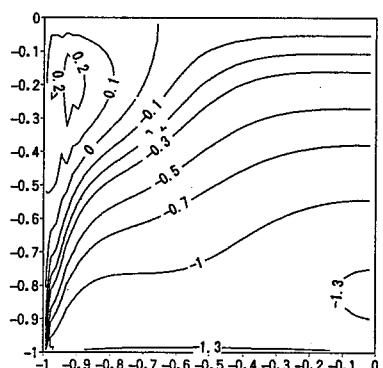
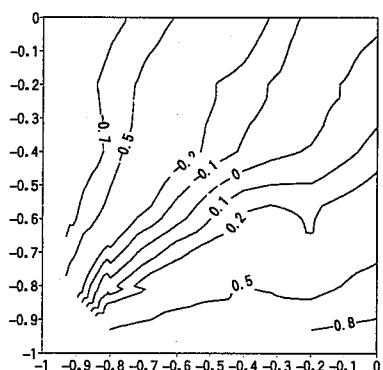
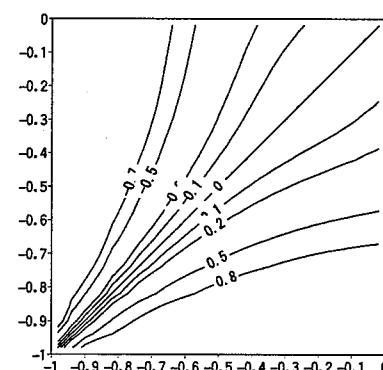


図 4.31 Reynolds 応力の剪断成分 R_{xz} / U_c^2 の分布

実験



粗分割メッシュ



詳細分割メッシュ

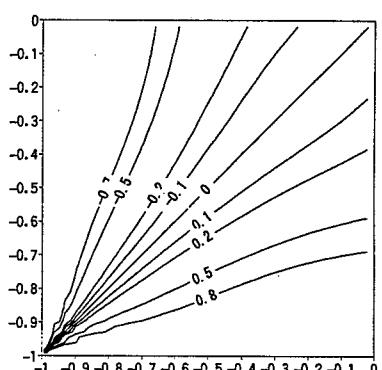
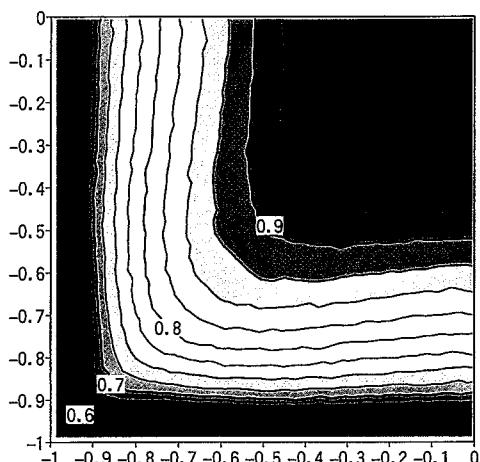


図 4.32 Reynolds 応力の垂直成分差 $(R_{yy} - R_{zz}) / U_c^2$ の分布

実験



解析

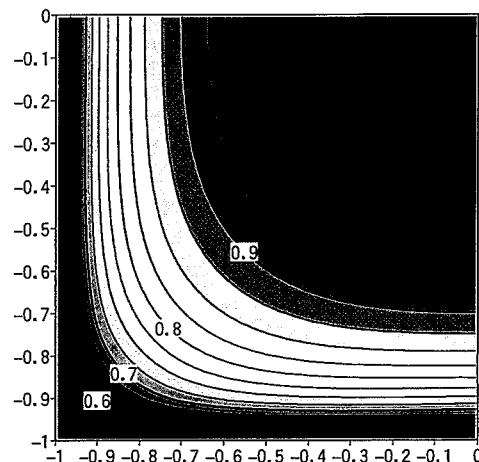
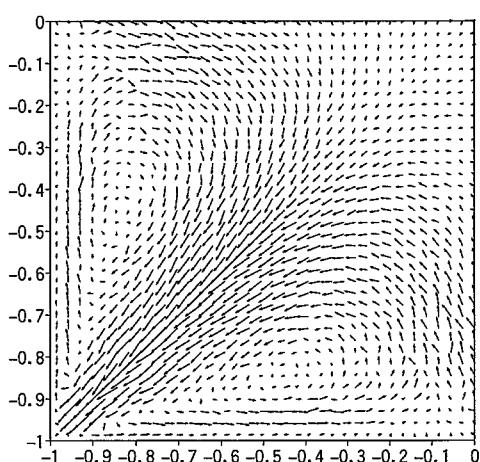


図 4.33 主流方向流速 u / U_c の分布

実験



解析

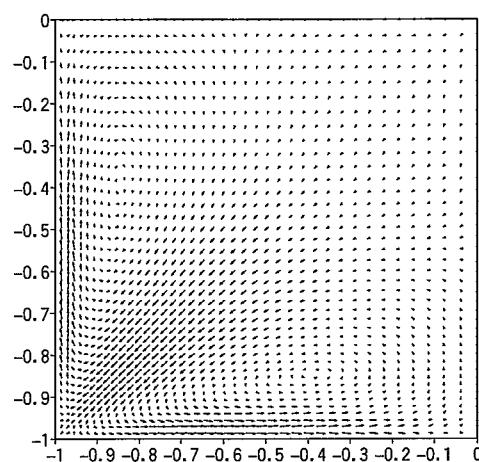
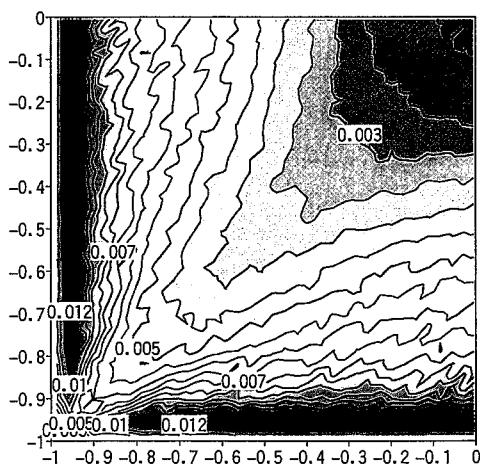


図 4.34 断面方向流速 (v, w) の分布

実験



解析

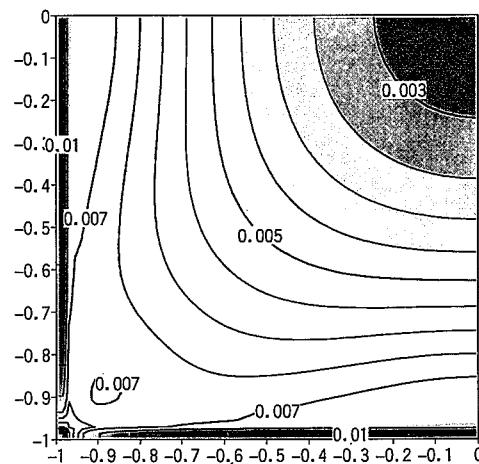
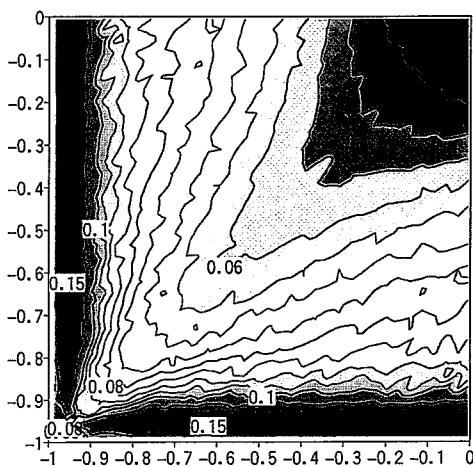


図 4.35 乱流エネルギー k / U_c^2 の分布

実験



解析

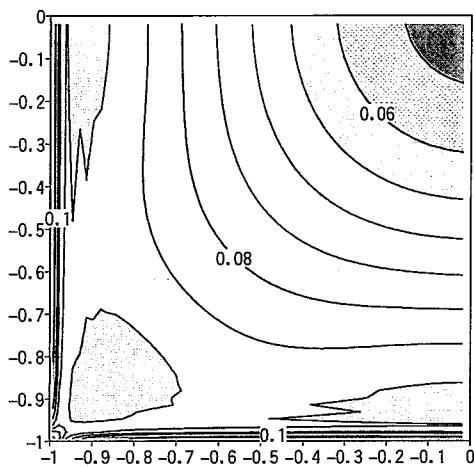
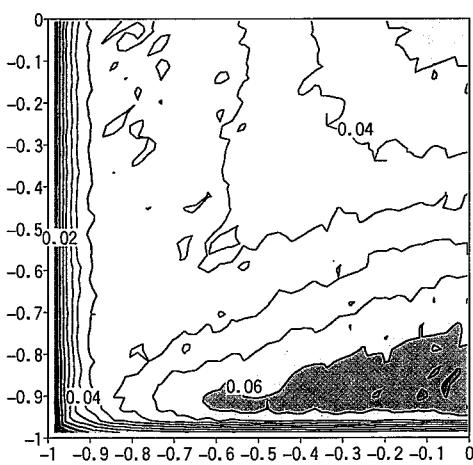


図 4.36 流速の変動成分 u_{rms} / U_c の分布

実験



解析

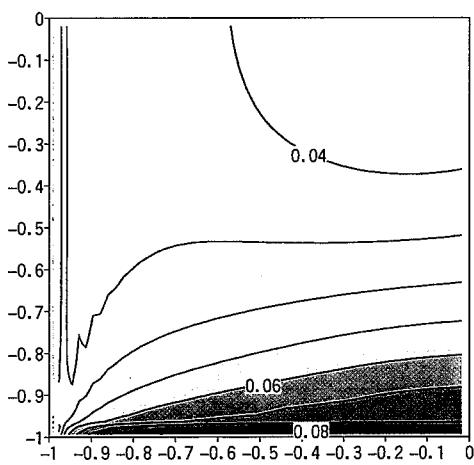
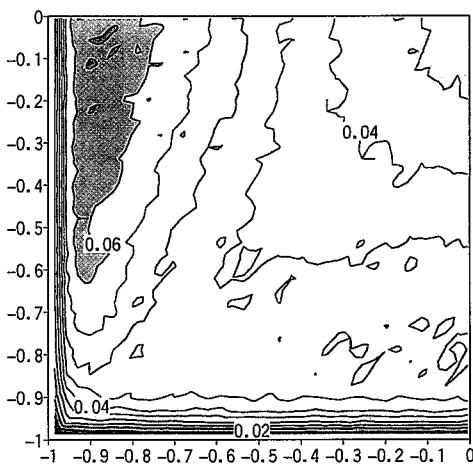


図 4.37 流速の変動成分 v_{rms} / U_c の分布

実験



解析

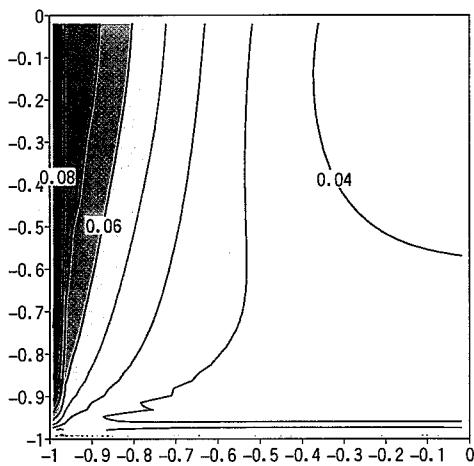
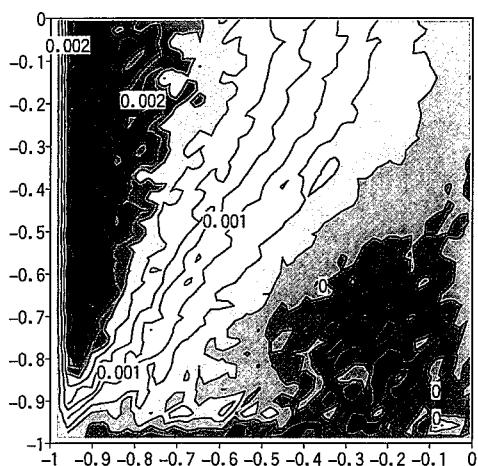


図 4.38 流速の変動成分 w_{rms} / U_c の分布

実験



解析

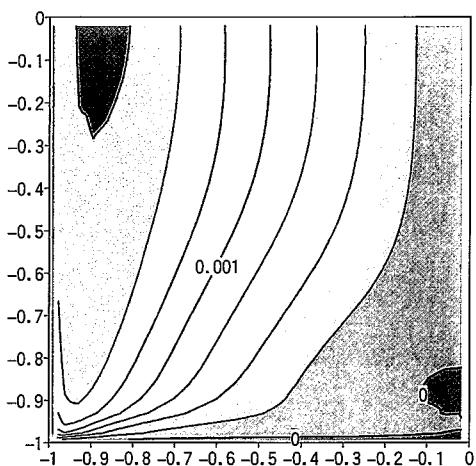
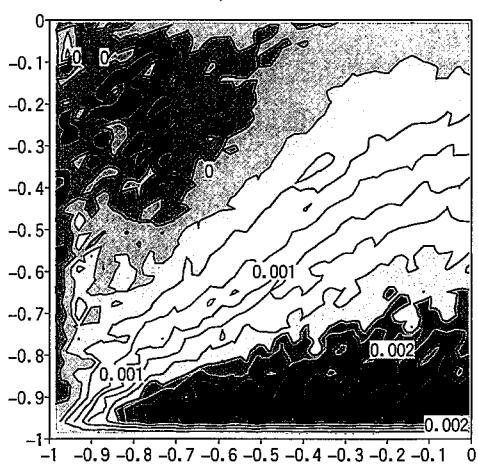


図 4.39 Reynolds 応力の剪断成分 R_{xy} / U_c^2 の分布

実験



解析

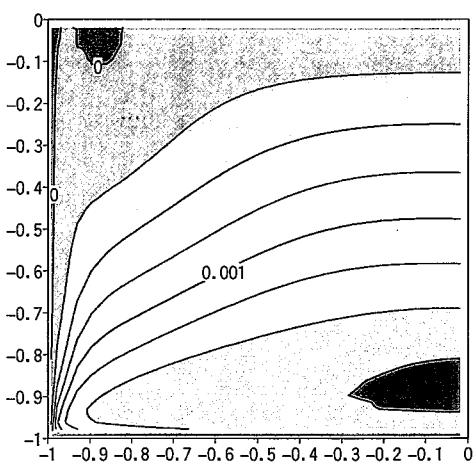
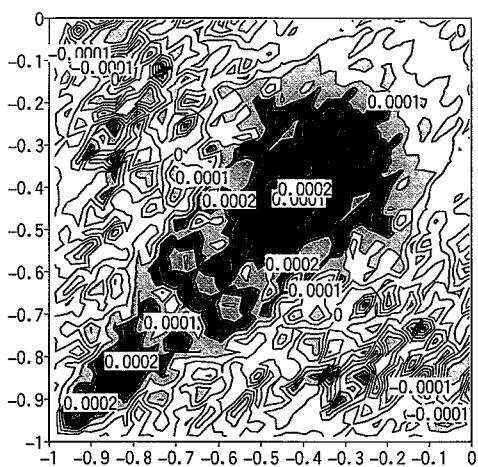


図 4.40 Reynolds 応力の剪断成分 R_{xz} / U_c^2 の分布

実験



解析

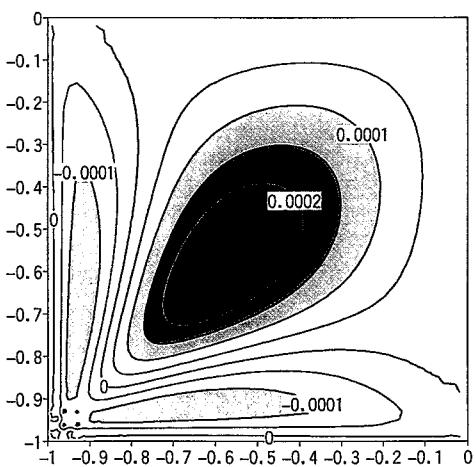


図 4.41 Reynolds 応力の剪断成分 R_{yz} / U_c^2 の分布

第5章 結 言

高速炉の高燃焼度燃料等の熱流力特性評価を目的として、従来から用いてきたサブチャンネル解析手法に加えて、3次元詳細解析手法を組み合わせたワイヤースペーサ型燃料集合体内熱流動評価手法の整備を行っている。これまでに有限要素法を用いた3次元詳細流動解析コード SPIRAL-II のベース構築を行ったが、今回はこのSPIRAL-II コードに複数の乱流モデルを組み込むとともに基本検証解析を実施した。

乱流モデルとしては、従来の標準型 $k - \varepsilon$ モデルに加え、RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルおよび代数応力モデル (ASM) を組み込んだ。標準型 $k - \varepsilon$ モデルの改良モデルである RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルは、乱流の統計的な研究に基づいた繰り込み群理論を用いているため、比較的広範囲な流れに対して適用が可能である。また、応力方程式モデルの近似的なモデルである ASM は、乱流の非等方性が顕著となる流れに対して非常に有効であり、応力方程式モデルに比べて低い計算コストで乱流の非等方性を再現できる長所がある。いずれのモデルも同型の乱流エネルギー k 及び散逸率 ε の輸送方程式を Galerkin 法で離散化して解くが、ASMにおいては拡散項に Daly-Harlow モデルが適用される。ASM では k 及び ε 等からレイノルズ応力を求めるため、反復法 (Newton-Raphson 法)を用いた。壁境界条件としては、いずれのモデルを使用する際にも壁関数 (Reichardt 関数) を適用した。

組み込みを行った乱流モデルの検証としては、平行平板間乱流、乱流ステップフロー、矩形ダクトフローの解析を実施した。その結果、平行平板間乱流の解析では、流速の分布は各モデルとも良好に再現できたが、乱流諸量の分布はいずれも過大に評価する傾向が現れた。また、乱流ステップフローの解析では、低 Reynolds 数乱流に対する RNG 型 $k - \varepsilon$ モデルの有用性、および、剥離流／再付着流に対する代数応力モデルの有用性が確認された。代数応力モデルの検証として実施した矩形ダクトフローの解析では、乱流の非等方性に起因する二次流れを概ね良く再現できた。

本改良によって、SPIRAL-II コードの流動解析機能は、層流現象のみならず乱流現象に対しても高精度な解析が可能となった。今後は、流速場に加えて温度場の評価を可能とするため、エネルギー保存式および熱乱流モデルの組み込みに着手するとともに、燃料集合体への適用を目指す予定である。

参考文献

- 1) H. Ohshima, H. Ninokata, "Thermal-Hydraulic Analysis of Fast Reactor Fuel Subassembly with Porous Blockages," 4th International Seminar on Subchannel Analysis (ISSCA-4), Tokyo, 1997.
- 2) 大高 雅彦、大島 宏之、「サブチャンネル解析コード ASFRE-III の検証」、日本原子力学会 1996 春の年会、C22、1997.
- 3) 大島 宏之、今井 康友、「高速炉燃料集合体内詳細熱流動解析手法の開発(1)」、PNC TN9400 2001-064、2001.
- 4) B. Ramaswamy and M. Kawahara, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for the Analysis of Free Surface Fluid Flows," Proc. of Int. Conf. Comp. Mech., Tokyo, 1986.
- 5) A. N. Brooks and T. J. R. Hughes, "Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations.", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 32, pp199-295, 1982.
- 6) P. Gresho, M. Chen, R. Lee and C. Upson, "A Modified Finite Element Method for Solving The Time Dependant Incompressible Navier-Stokes Equation. Part I. Theory," Comp. Int. J. Num. Meth. Fluids., 4, pp557-598, 1984.
- 7) B. E. Launder and D. B. Spalding, "The numerical computation of turbulent flows," Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 3, pp269-289, 1974.
- 8) V. Yakhot and L. M. Smith, "The renormalization group, the ε -expansion and derivation of turbulence models," J. Sci. Comp., 7, pp35-61, 1992.
- 9) W. Rodi, "A new algebraic relation for the calculating the Reynolds stresses," ZAMM, 56, pp219-221, 1976.
- 10) J. C. Rotta, "Statistische theorie nichthomogener turbulenz," Zeitscr Phys., 129, pp547-572, 1951.

- 11) B. E. Launder, G. J. Reece and W. Rodi, "Progress in the development of Reynolds stress turbulence closure," *J. Fluid Mech.*, 68, pp537-566, 1975.
- 12) C. C. Shir, "A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flow in the idealized planetary boundary layer," *J. Atoms. Sci.*, 30, pp1327-1339, 1973.
- 13) M. M. Gibson and B. E. Launder, "Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer," *J. Fluid Mech.*, 86, pp491-511, 1978.
- 14) B. J. Daly and F. H. Harlow, "Transport equations of turbulence," *Phys. Fluids*, 13, pp2634-2649, 1970.
- 15) J. Laufer, "Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel," NACA, TN2123, 1950.
- 16) J. Kim, S. J. Kline and P. Johnston, "Investigation of a reattaching turbulent shear layer : flow over a backward facing step," *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, 102, p302, 1980.
- 17) N. Kasagi and A. Matsunaga, "Three-dimensional particle tracking velocimetry measurement of turbulent statistic and energy budget in a backward-facing step flow," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 16, pp477-485, 1995.
- 18) 藤田 秀臣 他、「対向二面に粗面をもつ正方形流路内の乱流（第1報，速度・応力場の測定）」、日本機械学会論文集B編、52(482)、pp3491-3497、1986。
- 19) Y. Sata, K. Kato, N. Kasagi and N. Takamura, "Turbulent air flow measurement with three-dimensional particle tracking velocimetry," *Trans. JSME Ser. B*, 60 (571) , pp865-871, 1994.

付録

Picard-Iteration 法／Newton-Raphson 法による代数応力方程式の解法

代数応力方程式(A.1)は Reynolds 応力に関する非線形行列方程式となるため、反復解法を用いて計算しなければならない。そこで、以下では、代表的な非線形行列解法である Picard-Iteration 法、および、Newton-Raphson 法による解法を示す。

$$R_{ij} = k \frac{P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}}{P_k - \varepsilon} \quad \cdots \text{(A.1)}$$

$$P_{ij} = -R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad \cdots \text{(A.2)}$$

$$P_k = -R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^s + \Phi_{ij}^r + \Phi_{ij}^w$$

$$\Phi_{ij}^s = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right)$$

$$\Phi_{ij}^r = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^w &= C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{kl} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} R_{kj} n_k n_i \right) f_w \\ &\quad + C'_2 \left(\Phi_{kl}^r n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ki}^r n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{kj}^r n_k n_i \right) f_w \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$$

$$C_1 = 1.8, \quad C_2 = 0.6, \quad C'_1 = 0.5, \quad C'_2 = 0.3$$

まず、Picard-Iteration 法／Newton-Raphson 法を適用するため、(A.1)を非線形項 $N_{kl} R_{ij} R_{kl}$ 、線形項 $L_{ijkl} R_{kl}$ 、および、定数項 C_{ij} の和として $N_{kl} R_{ij} R_{kl} + L_{ijkl} R_{kl} + C_{ij} = 0$ の形で表す。

(A.1)を変形して、

$$\frac{P_k - \varepsilon}{k} R_{ij} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad \cdots \text{(A.3)}$$

(A.3)の両辺をそれぞれ展開すれば、

$$\frac{P_k - \varepsilon}{k} R_{ij} = -\frac{1}{k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} R_{ij} R_{kl} - \frac{\varepsilon}{k} R_{ij} \quad \cdots \text{(A.4)}$$

$$\begin{aligned} P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} &= \left(-C_1 \frac{\varepsilon}{k} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} C_2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \delta_{ij} - (1 - C_2) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \delta_{jk} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \right. \\ &\quad + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(n_k n_i \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_i n_k \delta_{jl} - \frac{3}{2} n_j n_k \delta_{il} \right) f_w \\ &\quad + C_2 C'_2 \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \left(\delta_{ij} - 3 n_i n_j \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} n_j n_k + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} n_i n_k \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \left(2 n_m n_k \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_m n_i \delta_{jk} - \frac{3}{2} n_m n_j \delta_{ik} \right) \right) f_w \right) R_{kl} - \frac{2}{3} (1 - C_1) \varepsilon \delta_{ij} \end{aligned}$$

従って、(A.3)は、

$$F_{ij} = N_{kl} R_{ij} R_{kl} + L_{ijkl} R_{kl} + C_{ij} = 0 \quad \cdots \text{(A.5)}$$

$$\begin{aligned} N_{kl} &= \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \\ L_{ijkl} &= \left(1 - C_1 \right) \frac{\varepsilon}{k} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} C_2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \delta_{ij} - (1 - C_2) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \delta_{jk} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \\ &\quad + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(n_k n_i \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_i n_k \delta_{jl} - \frac{3}{2} n_j n_k \delta_{il} \right) f_w \\ &\quad + C_2 C'_2 \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \left(\delta_{ij} - 3 n_i n_j \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} n_j n_k + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} n_i n_k \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \left(2 n_m n_k \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_m n_i \delta_{jk} - \frac{3}{2} n_m n_j \delta_{ik} \right) \right) f_w \\ C_{ij} &= -\frac{2}{3} (1 - C_1) \varepsilon \delta_{ij} \end{aligned}$$

(A.5)において、 L_{ijkl} の定義式における第四項、第五項が Reynolds 応力の壁面漸近挙動を表す Wall Reflection 項 Φ_{ij}^w である。

(A.5)は、2次元／3次元において、それぞれ4元／9元の非線形行列方程式となる。しかし、Reynolds 応力の対称性を考慮すれば、未知数の数はそれぞれ3個／6個である。そこで、方程式の数を未知数の数に一致させるため、(A.5)を次式に変形する。

$$\Omega_\alpha = \Phi_\beta \theta_\alpha \theta_\beta + \Psi_{\alpha\beta} \theta_\beta + \Gamma_\alpha = 0 \quad \cdots (A.6)$$

$$\alpha = f(i, j), \beta = f(k, l)$$

$$\theta_\alpha = R_{ij}, \theta_\beta = R_{kl}$$

$$\Omega_\alpha = F_{ij}$$

$$\Phi_\beta = N_{kl}; k = l, \quad \Phi_\beta = N_{kl} + N_{lk}; k \neq l$$

$$\Psi_{\alpha\beta} = L_{ijkl}; k = l, \quad \Psi_{\alpha\beta} = L_{ijkl} + L_{ijlk}; k \neq l$$

$$\Gamma_\alpha = C_{ij}$$

$$f(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{2次元}, \quad f(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad \text{3次元}$$

(A.6)に対して、Picard-Iteration 法／Newton-Raphson 法を適用する。

(1) Picard-Iteration 法

Picard-Iteration 法では、(A.6)の非線形項 $N_{kl}(R_{ij})R_{kl}$ を線形化して、次の反復計算から R_{kl} を求める。

$$\Omega_\alpha = \Phi_\beta \theta_\alpha^n \theta_\beta^{n+1} + \Psi_{\alpha\beta} \theta_\beta^{n+1} + \Gamma_\alpha = 0 \quad \cdots (A.7)$$

従って、

$$\theta_\beta^{n+1} = -[\Phi_\beta \theta_\alpha^n + \Psi_{\alpha\beta}]^{-1} \Omega_\alpha \quad \cdots (A.8)$$

(A.8)の反復計算を収束するまで繰り返す。なお、初期値 θ_β^0 は Boussinesq 湍粘性

モデル(A.9)から求める。

$$\theta_{\beta}^0 = R_{kl}^0 = \frac{2}{3}k\delta_{kl} - v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) \quad \cdots \text{ (A.9)}$$

(2) Newton-Raphson 法

Newton-Raphson 法では、(A.6)の微係数を求め、Taylor 展開に基づいた次の反復計算から R_{kl} を求める。

$$\theta_{\beta}^{n+1} = \theta_{\beta}^n - \Pi_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_{\alpha}^n \quad \cdots \text{ (A.10)}$$

(A.6)の微係数は次式で計算される。

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Omega_{\alpha}}{\partial \theta_{\beta}} = \Phi_{\beta} \theta_{\alpha} + (\Phi_{\gamma} \theta_{\gamma}) \delta_{\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\beta} \quad \cdots \text{ (A.11)}$$

(A.10)の反復計算を収束するまで繰り返す。なお、初期値 θ_{β}^0 は Picard-Iteration 法と同様に Boussinesq 湍粘性モデル(A.9)から求めるか、または、Picard-Iteration 法の収束解を用いる。

※ (A.4)の導出

$$\begin{aligned}
P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} &= P_{ij} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \\
&\quad + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{kl} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} R_{kj} n_k n_i \right) f_w \\
&\quad + C'_2 \left(\Phi'_{kl} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi'_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi'_{kj} n_k n_i \right) f_w - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \\
&= P_{ij} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \\
&\quad + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{kl} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ki} n_k n_j - \frac{3}{2} R_{kj} n_k n_i \right) f_w \\
&\quad - C_2 C'_2 \left(\left(P_{kl} - \frac{2}{3} P_k \delta_{kl} \right) n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \left(P_{ki} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ki} \right) n_k n_j - \frac{3}{2} \left(P_{kj} - \frac{2}{3} P_k \delta_{kj} \right) n_k n_i \right) f_w - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \\
&= \left(-C_1 \frac{\varepsilon}{k} \delta_{ik} \delta_{jl} + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_i n_k \delta_{jl} - \frac{3}{2} n_j n_k \delta_{il} \right) f_w \right) R_{kl} \\
&\quad + \left(\frac{2}{3} C_2 \delta_{ij} + \frac{2}{3} C_2 C'_2 \left(n_m n_n \delta_{ij} \delta_{mn} - \frac{3}{2} n_m n_i \delta_{mj} - \frac{3}{2} n_m n_j \delta_{mi} \right) f_w \right) P_k \\
&\quad + \left((1-C_2) \delta_{mn} \delta_{ij} - C_2 C'_2 \left(n_m n_n \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_m n_i \delta_{nj} - \frac{3}{2} n_m n_j \delta_{ni} \right) f_w \right) P_{mn} - \frac{2}{3} (1-C_1) \varepsilon \delta_{ij} \\
&= \left(-C_1 \frac{\varepsilon}{k} \delta_{ik} \delta_{jl} + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_i n_k \delta_{jl} - \frac{3}{2} n_j n_k \delta_{il} \right) f_w \right) R_{kl} \\
&\quad + \left(\frac{2}{3} C_2 \delta_{ij} + \frac{2}{3} C_2 C'_2 \left(\delta_{ij} - 3 n_i n_j \right) f_w \right) \left(-R_{kl} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \\
&\quad + \left((1-C_2) \delta_{mi} \delta_{nj} - C_2 C'_2 \left(n_m n_n \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_m n_i \delta_{nj} - \frac{3}{2} n_m n_j \delta_{ni} \right) f_w \right) \left(-R_{kl} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \delta_{nk} - R_{kl} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \delta_{mk} \right) - \frac{2}{3} (1-C_1) \varepsilon \delta_{ij} \\
&= \left(-C_1 \frac{\varepsilon}{k} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} C_2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \delta_{ij} - (1-C_2) \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \delta_{nk} + \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \delta_{mk} \right) \delta_{mi} \delta_{nj} \right. \\
&\quad \left. + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_i n_k \delta_{jl} - \frac{3}{2} n_j n_k \delta_{il} \right) f_w \right. \\
&\quad \left. + C_2 C'_2 \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \left(\delta_{ij} - 3 n_i n_j \right) + \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \delta_{nk} + \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \delta_{mk} \right) n_m n_n \delta_{ij} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \delta_{nk} + \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \delta_{mk} \right) n_m n_i \delta_{nj} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \delta_{nk} + \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \delta_{mk} \right) n_m n_j \delta_{ni} \right) f_w \right) R_{kl} - \frac{2}{3} (1-C_1) \varepsilon \delta_{ij} \right. \\
&= \left(-C_1 \frac{\varepsilon}{k} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} C_2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \delta_{ij} - (1-C_2) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \delta_{jk} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \right. \\
&\quad \left. + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_i n_k \delta_{jl} - \frac{3}{2} n_j n_k \delta_{il} \right) f_w \right. \\
&\quad \left. + C_2 C'_2 \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \left(\delta_{ij} - 3 n_i n_j \right) + 2 \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} n_m n_k \delta_{ij} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} n_m n_i \delta_{jk} + \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} n_i n_k \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} n_m n_j \delta_{ik} + \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} n_j n_k \right) \right) f_w \right) R_{kl} - \frac{2}{3} (1-C_1) \varepsilon \delta_{ij} \right. \\
&= \left(-C_1 \frac{\varepsilon}{k} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{2}{3} C_2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \delta_{ij} - (1-C_2) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \delta_{jk} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \right. \\
&\quad \left. + C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_i n_k \delta_{jl} - \frac{3}{2} n_j n_k \delta_{il} \right) f_w \right. \\
&\quad \left. + C_2 C'_2 \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \left(\delta_{ij} - 3 n_i n_j \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} n_j n_k + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} n_i n_k \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} \left(2 n_m n_k \delta_{ij} - \frac{3}{2} n_m n_i \delta_{jk} - \frac{3}{2} n_m n_j \delta_{ik} \right) \right) f_w \right) R_{kl} - \frac{2}{3} (1-C_1) \varepsilon \delta_{ij} \right.
\end{aligned}$$