

# 電磁流動解析手法の整備（2）

— 3次元解析手法の開発 —

(研究報告)

2003年9月

核燃料サイクル開発機構  
大洗工学センター

本資料の全部または一部を複写・複製・転載する場合は、下記にお問い合わせください。

〒319-1184 茨城県那珂郡東海村村松4番地49  
核燃料サイクル開発機構  
技術展開部 技術協力課  
電話：029-282-1122（代表）  
ファックス：029-282-7980  
電子メール：jserv@jnc.go.jp

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to :

Technical Cooperation Section,  
Technology Management Division ,  
Japan Nuclear Cycle Development Institute  
4-49 Muramatsu , Tokai-mura , Naka-gun , Ibaraki 319-1184 ,  
Japan

© 核燃料サイクル開発機構  
(Japan Nuclear Cycle Development Institute)  
2003

## 電磁流動解析手法の整備(2)

### - 3 次元解析手法の開発 - (研究報告)

大平 博昭\*、荒 邦章\*

#### 要 旨

FBR サイクルの実用化戦略調査研究では、経済性の向上及び機器の高度化の観点から、液体金属冷却高速炉の主冷却系に電磁応用機器を適用することを検討している。しかし、大容量化に伴う高流量かつ高磁場環境下での冷却材の流動現象は非常に複雑であり、これまでの研究において流動特性を評価するための実験や解析手法の開発は行われているものの、2次元解析体系に限られていたため十分な現象把握は困難であった。

そこで本研究では、上記の電磁流動現象を解明するための解析手法を整備するため、昨年度に開発した2次元解析手法を3次元へ拡張し、大型電磁ポンプ試験結果を用いて検証した。その結果、流速が流路中心部において平坦化し壁面近傍で大きくなる M 型流速分布が得られるとともに、圧力損失特性は2次元解析結果よりさらに実験結果に近い値が得られ、3次元解析手法の有効性が確認された。

次に、比較的少ない要素分割で、しかも精度良い解析評価が可能となる人工壁面境界条件を用いたLES 手法を磁場環境へ適用するために、直流磁場がチャンネル体系に印加されている条件について解析を実施した。その結果、平均流速分布及び乱流強度とも実験結果及び詳細メッシュ分割モデルによる解析結果と比較的良好く一致し、人工壁面境界条件が電磁乱流場へ適用できる見通しが得られた。

---

\*大洗工学センター 要素技術開発部 次世代機器研究グループ

## Development of the Numerical Method for Liquid Metal Magnetohydrodynamics (II)

– Development of the 3D calculational method –

H. Ohira\*, K. Ara\*

### Abstract

Application of advanced electromagnetic components to the main cooling systems of Liquid Metal Fast Reactor is investigated in the Feasibility Studies on Commercialized FR Cycle System. Although a number of experiments and numerical analyses were carried out on both high Reynolds numbers and high magnetic Reynolds numbers, the complex phenomena could not be evaluated in detail by the 2-D models.

As the second step of the development of the numerical methods for the liquid metal magnetohydrodynamics, we extended the two dimensional model to the three dimension and calculated the magnetohydrodynamics in a large electromagnetic pump for the verification. The velocity profile in the flow region showed a M-shape and the calculated pressure drop in the pump agreed better than that by the 2-D model. From these results it was concluded that this 3-D model was available for evaluating the pump characteristics.

Magnetohydrodynamic turbulent channel flows were also calculated by using an artificial wall boundary conditions for the purpose of saving the computational time. The results showed that both average profiles of the streamwise velocity and the turbulent intensities agreed well with those by a detail model and experimental data. From these results, it could be expected that the artificial wall boundary conditions were valid even in uniform magnetic fields.

---

\* Innovative Component System Research Group, Advanced Technology Div., OEC

## 目 次

要 旨 .....	i
Abstract .....	ii
目 次 .....	iii
図・表リスト .....	iv
第1章 緒 言 .....	1
1.1 研究の背景 .....	1
1.2 研究の目的 .....	1
第2章 ベクトル有限要素法による 3 次元電磁流動解析手法 .....	2
2.1 支配方程式 .....	2
2.2 Navier-Stokes の式の解法 .....	3
2.3 ベクトル形状関数 .....	8
2.4 誘導方程式の解法 .....	9
2.5 誘導方程式の検討 .....	12
第3章 電磁流動解析手法の検証 .....	16
3.1 解析モデル .....	16
3.2 解析条件 .....	16
3.3 解析結果及び考察 .....	16
第4章 電磁乱流解析手法の検討 .....	18
4.1 電磁乱流解析手法について .....	18
4.2 人工壁面境界条件 .....	18
4.3 電磁乱流解析モデル .....	20
4.4 解析条件 .....	21
4.5 解析結果及び考察 .....	21
第5章 結 言 .....	25
参考文献 .....	26

## 図・表リスト

## 表

表 3-1	大型電磁ポンプの解析パラメータ	27
表 3-2	解析に用いたパラメータ及び条件	27
表 3-3	3次元検証解析ケース	27
表 4-1	代表的な解析条件	28

## 図

図 2-1	ベクトル形状関数の概念	29
図 2-2	流動場及び電磁場における変数の定義位置	30
図 2-3	$b_1$ に対する計算アルゴリズム	31
図 2-4	ソレノイダル条件が満たされる理由	31
図 3-1	大型電磁ポンプの縦断面及び主な仕様	32
図 3-2	ALIP 型電磁ポンプの解析モデルの概要	33
図 3-3(a)	解析モデル(全要素)	34
図 3-3(b)	解析モデル(部分要素;拡大図)	35
図 3-4	ナトリウム非充填時における周方向の磁束密度分布	36
図 3-5	初期速度分布	37
図 3-6	初期磁場分布	38
図 3-7	初期電場分布	39
図 3-8	圧力差の時系列分布	40
図 3-9	流路における圧力分布	41
図 3-10(a)	流路におけるローレンツ力分布(中央部)	42
図 3-10(b)	流路におけるローレンツ力分布(出口部)	43
図 3-10(c)	流路におけるローレンツ力分布(入口部)	44
図 3-11	径-流れ方向流速分布	45
図 3-12	径-流れ方向印加磁場分布	46
図 3-13	径-流れ方向誘導磁場分布	47
図 3-14	流量-圧力損失(Q-H)特性	48
図 3-15	スリップ-圧力損失(S-H)特性	49
図 4-1	解析体系	50
図 4-2	流れ方向の平均流速分布( $Ha=0$ )	51
図 4-3	乱流強度分布( $Ha=0$ )	51
図 4-4	$x-y$ 平面の電流密度分布及び $x-z$ 平面の流速分布( $Ha=52.5$ )	52
図 4-5	流れ方向の平均流速分布( $Ha=52.5$ )	53
図 4-6	乱流強度分布( $Ha=52.5$ )	53
図 4-7	流れ方向の平均流速分布( $Ha=125$ )	54
図 4-8	乱流強度分布( $Ha=125$ )	54

## 第1章 緒 言

### 1.1 研究の背景

液体金属ナトリウムを冷却材として使用する高速炉システムでは、機械的振動の回避やコンパクト化のために、液体ナトリウムの高い電気伝導率を活用した電磁応用機器を積極的に利用することが重要である。特に電磁ポンプや電磁流量計はその代表的な機器であり、これまでに国内外で開発が行われている。さらに、プラント全体のコンパクト化や経済性のために、熱交換器等の機器と合体した電磁ポンプの検討、及び革新的な電磁応用機器の創出を行う計画となっている。

液体金属に磁場が印加されると流速と磁場との相互作用により、液体金属内に電流が誘起され、その周りに誘導磁場が発生する。低磁場あるいは低流量領域では、誘導磁場は無視できる程小さいため、磁場分布に殆んど影響を及ぼさない<sup>1,2)</sup>。したがって、流動に与える影響も比較的単純となり、複雑な現象も生じにくくなる。このため、これまでに開発が進められてきた電磁応用機器の多くは、小型のもの、すなわち比較的弱い磁場あるいは低流量領域である。しかし、高磁場かつ高流量の場合には誘導磁場が比較的大きく、流動場及び電磁場とも互いに影響を及ぼし合うため、非常に複雑な流れとなる。したがって、これらの領域で使用される比較的大きな電磁応用機器では、不安定流動や圧力脈動が発生する<sup>3,4)</sup>ため、実用化が困難な状況である。

高磁場かつ高流量領域における電磁流動特性を評価するための研究は、これまでに電磁ポンプに関する実験及び数値解析が行われている。本領域の実験を実験室規模で実現することは困難であり、測定データも限られるめ、不安定現象や圧力脈動現象が発生したとの報告はあるものの、それらの原因は十分には解明されていない。一方、数値解析の研究に関しては、電磁流量計及び電磁ポンプに対する2次元及び3次元の解析手法の開発が行われている<sup>3,4)</sup>。これらの解析手法では、構造不均一による磁場分布を評価しているものの、高磁場かつ高流量領域の電磁流動特性を考慮していない。さらに、高速炉に使用される電磁応用機器では、例えば熱交換器と電磁ポンプとの合体機器では、電磁流動場が非常に複雑な構造となることが想定されるため、上記の電磁ポンプの解析手法のような単純円筒形では対応不可能となる。したがって、高磁場かつ高流量領域であり、しかも複雑形状領域における電磁乱流特性が精度良く評価できる解析手法を開発し、電磁応用機器システムの設計手法を確立する必要がある。

### 1.2 研究の目的

本研究では、昨年度に開発した2次元体系の解析手法<sup>5)</sup>を3次元体系へ拡張し、既存の研究と比較することにより、拡張した3次元解析手法を検証する。また、本研究と平行して先行基礎工学研究にてモデル定数の最適化を必要としない電磁乱流モデル(Dynamic SGS モデル)の開発を進めており、本解析モデルに組み込むことにより高精度の解析評価が可能となると考えられる。しかし、要素分割数を比較的多く設ける必要があるため、計算時間の観点からパラメータ計算を行うことには必ずしも適しているとは言えない。したがって、本研究では流れ場の計算において用いられている人口壁面境界条件を適用したLESを直流磁場条件に適用し、既存の実験データや詳細解析結果と比較することにより、その有効性を確認する。

## 第2章 ベクトル有限要素法による3次元電磁流動解析手法

### 2.1 支配方程式

流動場及び電磁場の無次元支配方程式として、以下に示す連続の式、Navier-Stokes の方程式、磁化不在の法則、及び誘導方程式を用いた。

(連続の式)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-1)$$

(Navier-Stokes の式)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ha}{Re Re_m} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2-2)$$

(磁化不在の法則)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-3)$$

(誘導方程式)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{Re m} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2-4)$$

ここで、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{J}_i$ 、 $p$ 、 $t$ 、及び $\mathbf{u}$ は、それぞれ無次元の全磁場(印加磁場+誘導磁場)、誘導電流、圧力、時間、及び速度を表す。また $Ha$ 、 $Re$ 、及び $Re_m$ はそれぞれ、ハルトマン数、レイノルズ数、及び磁気レイノルズ数であり、次のように定義される。

$$Ha^2 = B_0^2 L_m^2 \frac{\sigma}{\mu} \quad (2-5)$$

$$Re = \frac{\rho V_m L_m}{\mu} \quad (2-6)$$

$$Re_m = \sigma \mu_0 V_m L_m \quad (2-7)$$

ここで、 $\mu_0$  ;透磁率、 $\mu$  ;粘性係数、 $\sigma$  ;電気伝導率、 $\rho$  ;密度、 $V_m$  ;代表速度、 $L_m$  ;代表長さである。直流磁場に対しては、 $V_m$  及び $L_m$  として、それぞれ流動場の代表速度及び代表長さが用いられ、交流磁場に対しては、 $L_m = \tau / \pi$ 、 $V_m = 2\pi f L_m$  ( $\tau$  ;ポールピッチ、 $V_m$  ;同期速度(磁場進行速度)、 $f$  ;周波数)が用いられる。

3章に記述したALIP型電磁ポンプの解析を行う場合には、電磁ポンプのコイルとナトリウムとの間にダクト壁及びギャップが存在するため、これらの領域でアンペールの法則を積分すると、 $\delta_h \mu_0 \mathbf{J} = \delta_m \nabla \times \mathbf{B}$  が得られる。ここで、 $\delta_h$  はナトリウム流路幅、 $\delta_m$  は非磁性ギャップ幅(流路幅+ダクト壁厚さ+ギャップ幅)である。この関係を式(2-4)に適用して、無次元化を行うと支配方程式(2-1)

～(2-4)、 $Ha$ 、及び $Re$ は同じ表式であるが、 $Re m$ のみが式(2-8)となり、ナトリウム流路に対する実効値として補正したことになる。

$$Re m = \sigma \mu_0 u_0 L_0 \frac{\delta_h}{\delta_m} \quad (2-8)$$

## 2.2 Navier-Stokes の式の解法

### (1) Navier-Stokes の式の変形

ここでは、2次元版とは異なり、式(2-2)の発散形に、上流化技術として BTD (Balancing Tensor Diffusivity)<sup>2)</sup>法を用いると、式(2-9)となる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Ha}{Re Re m} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + BTD \quad (2-9)$$

ただし、 $BTD = \nabla \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \mathbf{u}$  であり、 $\mathbf{K} = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u} \mathbf{u}$  は人口粘性テンソルを表す。

式(2-9)における BTD 項は、時間項をテーラー展開した時の2階微分項である。したがって、BTD 項により時間の2階微分項を空間微分項として付加することにより、時間項の2次精度化及び計算の安定化が可能となる。

### (2) アルゴリズム

式(2-9)において、圧力項に完全陰解法を適用すれば、式(2-10)を得る。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} + \mathbf{f}^n \quad (2-10)$$

$$\text{ただし、} \mathbf{f}^n = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{Ha}{Re Re m} \mathbf{J}^n \times \mathbf{B}^n + BTD$$

そこでまず、速度の予測子  $\tilde{\mathbf{u}}$  を前進オイラー法で求める。すなわち、

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla p^n + \mathbf{f}^n \quad (2-11)$$

となる。この速度の予測子は、発散がゼロを満足しないから、全エネルギーを修正しながら

$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$  となるように速度を修正する必要がある。式(2-10)から式(2-11)を差し引くと、

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\nabla(p^{n+1} - p^n) \quad (2-12)$$

が得られる。そこで、スカラー関数  $\varphi$  を式(3-13)で定義すれば、時刻  $(n+1)\Delta t$  の速度は式(2-14)となる。

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\varphi}{\Delta t} \quad (2-13)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \varphi \quad (2-14)$$

したがって、式(2-14)の両辺の発散をとり、 $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$  とすれば、 $\varphi$  に関するポアソン方程式を得る。

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (2-15)$$

このポアソン方程式をニュートン-ラフソン法により、全エネルギーと速度の同時緩和法で解き、式(2-13)及び(2-14)から  $p^{n+1}$  及び  $\mathbf{u}^{n+1}$  を得る。

### (3) 離散化

時間的に離散化された基礎方程式を空間的に離散化する。式(2-11)の両辺に重み関数  $\delta w$  を内積し、全領域  $\Omega$  で積分する。

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \delta w \frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} d\Omega &= - \iiint_{\Omega} \delta w \cdot (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) d\Omega - \iiint_{\Omega} \delta w \nabla p^n d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{Re} \iiint_{\Omega} \delta w \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}^n) d\Omega + \iiint_{\Omega} \delta w \cdot \nabla \cdot (\mathbf{K}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) d\Omega \\ &\quad + \frac{Ha}{Re Re_m} \iiint_{\Omega} \delta w \cdot (\mathbf{J}^n \times \mathbf{B}^n) d\Omega \end{aligned} \quad (2-16)$$

ここで、全体領域  $\Omega$  を多数の要素に分割し、1つの要素  $\Omega_e$  に着目する。

$$\iiint_{\Omega_e} \delta w \frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} d\Omega = - \iiint_{\Omega_e} \delta w \cdot (\mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n) d\Omega - \iiint_{\Omega_e} \delta w \nabla p^n d\Omega$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{Re} \iiint_{\Omega_e} \delta w \cdot (\nabla^2 u^n) d\Omega + \iiint_{\Omega_e} \delta w \cdot (\nabla \cdot (K^n \cdot \nabla u^n)) d\Omega \\
& + \frac{Ha}{Re Re m} \iiint_{\Omega_e} \delta w \cdot (J^n \times B^n) d\Omega
\end{aligned} \tag{2-17}$$

右辺第2項、第3項および第4項を部分積分して、Gauss の発散定理を適用すると、

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega_e} \delta w \frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} d\Omega &= - \iiint_{\Omega_e} \delta w \cdot (u^n \cdot \nabla u^n) d\Omega \\
&\quad - \oint_{\Gamma_e} n \cdot (\delta w p^n) d\Gamma + \iiint_{\Omega_e} (\nabla \cdot \delta w) p^n d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{Re} \oint_{\Gamma_e} \delta w \cdot \frac{\partial u^n}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{Re} \iiint_{\Omega_e} \nabla \delta w : \nabla u^n d\Omega \\
&\quad + \oint_{\Gamma_e} \delta w \cdot (n \cdot K^n \cdot \nabla u^n) d\Gamma - \iiint_{\Omega_e} \nabla \delta w : (K^n \cdot \nabla u^n) d\Omega \\
&\quad + \frac{Ha}{Re Re m} \iiint_{\Omega_e} \delta w \cdot (J^n \times B^n) d\Omega
\end{aligned} \tag{2-18}$$

となる。ただし、 $\partial / \partial n = n \cdot \nabla$ 、 $\nabla \delta w : \nabla u^n = (\partial \delta w_i / \partial x_j) (\partial u_i^n / \partial x_j)$ である。ここで、要素内において速度  $u$  を双1次関数で補間すると、

$$u = N_\alpha u_\alpha \tag{2-19}$$

となる。ただし  $\alpha$  は要素内での局所節点番号、 $N_\alpha$  は形状関数であり、 $\alpha$  について総和の規約が適用される。この形状関数を用いて、重み関数  $\delta w$  を

$$\delta w = N_\alpha \delta w_\alpha \tag{2-20}$$

と補間する。 $\delta w_\alpha$  の各成分は任意の定数であり、基本境界条件  $\Gamma_1$  (ディリクレ条件) では  $\delta w_\alpha$  の成分はゼロである。また、圧力は要素内一定の関数で補間する。式(2-20)を式(2-18)に代入して、 $\delta w_\alpha$  の各成分の任意性を用いると、

$$\begin{aligned}
\left( \iiint_{\Omega_e} N_\alpha N_\beta d\Omega \right) \frac{\tilde{u} - u_\beta^n}{\Delta t} &= -u_e^n \cdot \left( \iiint_{\Omega_e} N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega \right) u_\beta^n \\
&\quad + \left( \iiint_{\Omega_e} \nabla N_\alpha d\Omega \right) p_e^n - \frac{1}{Re} \left( \iiint_{\Omega_e} \nabla N_\alpha \cdot \nabla N_\beta d\Omega \right) u_\beta^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \oint_{\Gamma_e} \mathbf{n} (N_\alpha p^n) d\Gamma + \frac{1}{\text{Re}} \oint_{\Gamma_e} N_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial n} d\Gamma \\
& + \oint_{\Gamma_e} N_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n d\Gamma \\
& - \frac{\Delta t}{2} \iiint_{\Omega_e} (\mathbf{u}_e \cdot \nabla N_\alpha) (\mathbf{u}_e \cdot \nabla N_\beta) d\Omega \\
& + \frac{Ha}{\text{Re} \text{Re} m} \left( \iiint_{\Omega_e} N_\alpha N_\beta d\Omega \right) (\mathbf{J}_\beta^n \times \mathbf{B}_\beta^n)
\end{aligned} \tag{2-21}$$

となる。ただし、式(2-21)の右辺第1項における移流速度には、計算の簡略化のために要素平均値を用いる。速度の要素平均は、

$$\langle \mathbf{u} \rangle_e = \frac{1}{\Omega_e} \iiint_{\Omega_e} \mathbf{u} d\Omega = \mathbf{u}_e \tag{2-22}$$

で定義される。したがって、式(2-21)に

(質量行列)

$$M_{\alpha\beta} = \iiint_{\Omega_e} N_\alpha N_\beta d\Omega \tag{2-23}$$

(移流行列)

$$A_{\alpha\beta} = \iiint_{\Omega_e} N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega \tag{2-24}$$

(拡散行列)

$$D_{\alpha\beta} = \iiint_{\Omega_e} \nabla N_\alpha \cdot \nabla N_\beta d\Omega \tag{2-25}$$

(BTD 行列)

$$B_{\alpha\beta} = \iiint_{\Omega_e} (\mathbf{u}_e \cdot \nabla N_\alpha) \cdot (\mathbf{u}_e \cdot \nabla N_\beta) d\Omega$$

(勾配行列)

$$\mathbf{C}_\alpha = \iiint_{\Omega_e} \nabla N_\alpha d\Omega \tag{2-26}$$

と定義される係数行列を用いると、

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta} \frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\beta^n}{\Delta t} &= -\mathbf{u}_e^n \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n + \mathbf{C}_\alpha p_e^n - \frac{1}{\text{Re}} D_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n - \frac{\Delta t}{2} B_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n \\
& + \frac{Ha}{\text{Re} \text{Re} m} M_{\alpha\beta} (\mathbf{J}_e^n \times \mathbf{B}_\beta^n)
\end{aligned}$$

$$+ \oint_{\Gamma_e} N_\alpha \left( -p^n \mathbf{n} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial n} + N_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right) d\Gamma \quad (2-27)$$

となる。式(2-27)で質量の集中化を行うと、

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\alpha\beta} \frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\beta^n}{\Delta t} = & -\mathbf{u}_e^n \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n + \mathbf{C}_\alpha p_e^n - \frac{1}{Re} D_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n - \frac{\Delta t}{2} B_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n \\ & + \frac{Ha}{Re Re m} M_{\alpha\beta} (\mathbf{J}_e^n \times \mathbf{B}_\beta^n) \\ & + \oint_{\Gamma_e} N_\alpha \left( -p^n \mathbf{n} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial n} + N_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2-28)$$

となる。次に、式(2-18)において  $\tilde{\mathbf{u}}$  を  $\mathbf{u}^{n+1}$  に、 $p^n$  を  $p^{n+1}$  に変えて同様にして得られる式(2-10)の空間的な離散式

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\alpha\beta} \frac{\mathbf{u}_\beta^{n+1} - \mathbf{u}_\beta^n}{\Delta t} = & -\mathbf{u}_e^n \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n + \mathbf{C}_\alpha p_e^{n+1} - \frac{1}{Re} D_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n - \frac{\Delta t}{2} B_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^n \\ & + \frac{Ha}{Re Re m} M_{\alpha\beta} (\mathbf{J}_e^n \times \mathbf{B}_\beta^n) \\ & + \oint_{\Gamma_e} N_\alpha \left( -p^n \mathbf{n} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \mathbf{u}^n}{\partial n} + N_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2-29)$$

から式(2-28)を差し引くと、

$$\overline{M}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta^{n+1} = \overline{M}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{u}}_\beta + \mathbf{C}_\alpha \phi_{pe} - \oint_{\Gamma_e} N_\alpha (\phi_p \mathbf{n}) d\Gamma \quad (2-30)$$

となる。式(2-28)及び(2-30)の全要素についての和が各節点上における速度の離散化式である。自然境界条件  $\Gamma_2$  (ノイマン条件)上で圧力が規定されている場合、 $\phi_p = 0$  より、式(2-30)の右辺第3項を全要素について和をとると、

$$\sum_e \left\{ - \oint_{\Gamma_e} N_\alpha (\phi_p \mathbf{n}) d\Gamma \right\} = - \oint_{\Gamma_2} N_\alpha (\phi_p \mathbf{n}) d\Gamma = 0 \quad (2-31)$$

が成立つので、式(2-30)の右辺第3項は計算上考慮する必要はない。また、式(2-13)は、

$$p_e^{n+1} = p_e^n + \frac{\phi_{pe}}{\Delta t} \quad (2-32)$$

と空間的に離散化される。さらに、式(2-15)の両辺を要素内で積分すると、

$$\iiint_{\Omega_e} \nabla^2 \phi_p d\Omega = \iiint_{\Omega_e} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\Omega \quad (2-33)$$

となる。したがって、式(2-33)の左辺に Gauss の発散定理を用い、右辺に式(2-19)を代入して勾配行列を用いると、

$$\oint_{\Gamma_e} \frac{\partial \phi_p}{\partial n} d\Gamma = \mathbf{C}_\beta \cdot \tilde{\mathbf{u}}_\beta \quad (2-34)$$

となる。

### 2.3 ベクトル形状関数

図 2-1(a)に示す任意の六面体形状に対して、面ベクトル形状関数は式(2-36)のように記述できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -\frac{1}{8}(1-\zeta)\nabla\eta \times \nabla\zeta & \mathbf{F}_2 &= \frac{1}{8}(1+\zeta)\nabla\eta \times \nabla\zeta \\ \mathbf{F}_3 &= -\frac{1}{8}(1-\eta)\nabla\zeta \times \nabla\xi & \mathbf{F}_4 &= \frac{1}{8}(1+\eta)\nabla\zeta \times \nabla\xi \\ \mathbf{F}_5 &= -\frac{1}{8}(1-\zeta)\nabla\xi \times \nabla\eta & \mathbf{F}_6 &= \frac{1}{8}(1+\zeta)\nabla\xi \times \nabla\eta \end{aligned} \quad (2-36)$$

また、図 2-1(b)に示す任意の六面体形状に対して、辺ベクトル形状関数は式(2-37)のように記述できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)\nabla\xi & \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)\nabla\xi \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)\nabla\xi & \mathbf{E}_4 &= \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)\nabla\xi \\ \mathbf{E}_5 &= \frac{1}{8}(1-\zeta)(1-\xi)\nabla\eta & \mathbf{E}_6 &= \frac{1}{8}(1+\zeta)(1-\xi)\nabla\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_7 &= \frac{1}{8}(1+\zeta)(1+\xi)\nabla\eta & \mathbf{E}_8 &= \frac{1}{8}(1-\zeta)(1+\xi)\nabla\eta \\
\mathbf{E}_9 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)\nabla\xi & \mathbf{E}_{10} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)\nabla\xi \\
\mathbf{E}_{11} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)\nabla\xi & \mathbf{E}_{12} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)\nabla\xi
\end{aligned} \tag{2-37}$$

ベクトル有限要素法の最も大きな特徴はその連続性であり、面ベクトルの形状関数  $\mathbf{F}_\alpha$  及び辺ベクトル形状関数  $\mathbf{E}_\alpha$  に対しては、式(2-38)および(2-39)で表される性質がある。

$$\iint \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha dS = \delta_{\alpha\beta} \tag{2-38}$$

$$\int \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\beta dl = \delta_{\alpha\beta} \tag{2-39}$$

ここで、 $\mathbf{n}$ 、及び  $\mathbf{t}$  はそれぞれ着目した面の外向き単位法線ベクトル、及び着目した辺の単位接線ベクトルを表わす。また  $\delta_{\alpha\beta}$  はクロネッカーのデルタである。さらに、面ベクトル形状関数と辺ベクトル形状関数の間には式(2-40)の関係がある。

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E}_1 &= -\mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_3 & \nabla \times \mathbf{E}_2 &= +\mathbf{F}_5 - \mathbf{F}_4 \\
\nabla \times \mathbf{E}_3 &= -\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_4 & \nabla \times \mathbf{E}_4 &= +\mathbf{F}_6 - \mathbf{F}_3 \\
\nabla \times \mathbf{E}_5 &= -\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_5 & \nabla \times \mathbf{E}_6 &= +\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_6 \\
\nabla \times \mathbf{E}_7 &= -\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_6 & \nabla \times \mathbf{E}_8 &= +\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_5 \\
\nabla \times \mathbf{E}_9 &= -\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_1 & \nabla \times \mathbf{E}_{10} &= +\mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_2 \\
\nabla \times \mathbf{E}_{11} &= -\mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_2 & \nabla \times \mathbf{E}_{12} &= +\mathbf{F}_4 - \mathbf{F}_1
\end{aligned} \tag{2-40}$$

## 2.4 誘導方程式の解法

磁束密度  $\mathbf{B}$  及び電場  $\mathbf{E}$  はそれぞれ、面ベクトル形状関数及び辺ベクトル形状関数を用いて次のように補間される。

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}_\alpha b_\alpha \tag{2-41}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\alpha e_\alpha \tag{2-42}$$

ここで、スカラー量  $b_\alpha$  及び  $e_\alpha$  は次のように定義される。

$$b_\alpha = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2-43)$$

$$e_\alpha = \oint_I \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl \quad (2-44)$$

すなわち、 $b_\alpha$  は着目している面での磁束密度  $\mathbf{B}$  の面積分を、 $e_\alpha$  は着目している辺における電場  $\mathbf{E}$  の線成分を表す。ここで、 $S$  及び  $I$  はそれぞれ着目している面、及び辺を表す。

速度場及び電磁場の変数定義位置を図 2-2 に示す。速度場では圧力が要素中心に、速度ベクトルが節点上に配置されているのに対して、電磁場では磁束密度が面上に、電場が辺上に配置されている。速度場の圧力と速度ベクトルをスタガードに配置することにより非物理的な振動を回避でき計算が安定すると同様、電磁場においても磁場と電場の変数配置を図 2-2 のように配置することにより物理的に妥当な計算が可能となる。

式(2-4)において、磁場及び電場の各方程式に対し時間方向の離散化を行うと、以下の離散化式が得られる。

$$\frac{\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n}{\Delta t} = -\nabla \times \mathbf{E}^n \quad (3-45)$$

$$\mathbf{E}^n = -\mathbf{u}^{n+1} \times \mathbf{B}^n + \frac{1}{\text{Re } m} (\nabla \times \mathbf{B}^n) \quad (3-46)$$

計算では最初に流動場を計算を行うため、式(2-46)の  $\mathbf{u}^{n+1}$  は既知である。したがって式(2-46)から

電場  $\mathbf{E}^n$  を求めると、式(2-45)から  $\mathbf{B}^{n+1}$  が得られる。

一方、空間方向の離散化に対しては、磁場及び電場の方程式(2-45)及び(2-46)に、それぞれ重み関数として面ベクトル形状関数  $\mathbf{F}_\alpha$  及び辺ベクトル形状関数  $\mathbf{E}_\alpha$  を内積した後、要素積分を行うと式(2-47)及び(2-48)となる。

$$\iint_{\Omega_e} \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n}{\Delta t} d\Omega = - \iint_{\Omega_e} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla \times \mathbf{E}^n d\Omega \quad (2-47)$$

$$\iint_{\Omega_e} \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}^n d\Omega = - \iint_{\Omega_e} \mathbf{E}_\alpha \cdot (\mathbf{u}^{n+1} \times \mathbf{B}^n) d\Omega + \frac{1}{\text{Re } m} \iint_{\Omega_e} \mathbf{E}_\alpha \cdot (\nabla \times \mathbf{B}^n) d\Omega \quad (2-48)$$

式(2-47)を整理してまとめると、

$$\iiint_{\Omega_e} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\beta d\Omega \frac{b_\beta^{n+1} - b_\beta^n}{\Delta t} = - \iiint_{\Omega_e} \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla \times \mathbf{E}_\beta d\Omega e_\beta^n \quad (2-49)$$

式(2-49)の右辺は式(2-40)の性質を利用して以下のように変形できる。

$$\iiint_{\Omega_e} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\beta d\Omega \frac{b_\beta^{n+1} - b_\beta^n}{\Delta t} = - \iiint_{\Omega_e} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\beta d\Omega \sum_{\gamma=1}^4 a_{\beta\gamma} e_\gamma^n \quad (2-50)$$

ここで  $a_{\beta\gamma}$  は式(2-40)に従った単位符号±1を表す。式(2-50)の両辺における  $\iiint_{\Omega_e} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\beta d\Omega$  に対して質量集中化を行うと最終的に以下の式が得られる。

$$\frac{b_\beta^{n+1} - b_\beta^n}{\Delta t} = - \sum_{\gamma=1}^4 a_{\beta\gamma} e_\gamma^n \quad (2-51)$$

上式では、左辺が着目した面における磁束密度の面積分量の時間変化を表し、右辺が着目した面を取り囲む辺における電場の線積分量を表している。例えば、図 2-3 のような場合には、

$$\frac{b_1^{n+1} - b_1^n}{\Delta t} = - (e_1^n + e_2^n - e_3^n - e_4^n) \quad (2-52)$$

の関係が成立する。

また、式(2-48)を整理してまとめると次の離散化式(3-53)が得られる。

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_e} \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta d\Omega e_\beta^n &= - \iiint_{\Omega_e} \mathbf{E}_\alpha \cdot (\mathbf{u}_e^{n+1} \times \mathbf{F}_\beta) d\Omega b_\beta^n \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re } m} \iiint_{\Omega_e} \mathbf{E}_\alpha \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_\beta) d\Omega b_\beta^n \end{aligned} \quad (2-53)$$

ここで、 $\mathbf{u}_e^{n+1}$  は要素平均速度ベクトルである。さらに、ベクトル解析の公式：

$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$  を右辺第2項に適用すると、最終的に次の離散化式が得られる。

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_e} \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta d\Omega e_\beta^n = & - \iiint_{\Omega_e} \mathbf{E}_\alpha \cdot (\mathbf{u}_e^{n+1} \times \mathbf{F}_\beta) d\Omega b_\beta^n \\ & + \frac{1}{\text{Re } m} \iiint_{\Omega_e} \mathbf{F}_\beta \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_\alpha) d\Omega b_\beta^n \end{aligned} \quad (2-54)$$

電場  $\mathbf{E}$  の回転から磁束密度  $\mathbf{B}$  が得られるめ、図 2-4 に示したように、ある任意の要素における各面での磁束密度の面積分値の時間変化量は、着目した面を取り囲む線積分値として求まる。一方、線積分を行った辺は要素を構成する面を2つ共有している。各辺での線積分の方向は互いに異なり、線積分値が打消し合うために、構成する要素に対する全ての面積分値の変化量の和が 0 となる。したがって、初期条件でソレノイダル条件を満足している場合、時間進行を行ってもその条件は満足される。

## 2.5 誘導方程式の検討

電磁ポンプなどの交流機器に対して電磁場を支配する誘導方程式の導出を行う。ある場における磁場および電場はそれぞれ印加磁場、誘導磁場ならびに印加電場、誘導電場等に分離することができる。磁場および電場を分離せずに全磁場、全電場として離散化する場合と磁場および電場をそれぞれ分離し、印加磁場と誘導磁場、印加電場と誘導電場に分離した場合の各支配方程式を検討する。なお、本節に限り理解を容易にするため、方程式は有次元表示とする。

### (1) 磁場および電場をそれぞれ印加成分と誘導成分に分離しない場合

磁場および電場をそれぞれ印加成分と誘導成分に分離せずに統一的に扱う場合、誘導方程式を構成するファラデーの法則、アンペールの法則およびオームの法則はそれぞれ以下のように記述できる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_a \quad (2-55)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_a = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2-56)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}_a + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_a) \quad (2-57)$$

ここで添え字の  $a$  は全磁場および全電場という意味であり、 $\sigma$  は電気伝導率である。これらの式から誘導方程式は、 $\mu_0$  を透磁率以下のように記述できる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_a) - \frac{1}{\sigma\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}_a \quad (2-58)$$

この誘導方程式は、最初に示した誘導方程式(2-4)と差異はない。

## (2) 磁場および電場をそれぞれ印加成分と誘導成分に分離した場合

磁場および電場をそれぞれ印加磁場と誘導磁場および印加電場と誘導電場に分離して取り扱う場合、誘導方程式を構成するファラデーの法則、アンペールの法則およびオームの法則は以下のように記述できる。

$$\frac{\partial(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i)}{\partial t} = -\nabla \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i) \quad (2-59)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2-60)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i + \mathbf{u} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i)) \quad (2-61)$$

ここで添え字の  $0$  は磁場および電場の外部成分をあらわす。添え字の  $i$  は磁場および電場の誘導成分をあらわす。ここで一つの仮定を考える。ファラデーの法則において、印加成分と誘導成分の和に対してファラデーの法則が成り立っているが、印加成分、誘導成分それぞれに対してもファラデーの法則が成り立つと仮定すると以下の式が成り立つ。

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_0 \quad (2-62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_i \quad (2-63)$$

ここで式(2-60)、(2-61)および(2-63)を用いて誘導成分に対する誘導方程式を導くと、以下の式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}_0 + \nabla \times (\mathbf{u} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i)) - \frac{1}{\sigma\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_i) \quad (2-64)$$

## (3) 印加成分と誘導成分を分離した誘導方程式と分離しない誘導方程式の特徴

印加成分と誘導成分を分離しない場合、磁場と電場の境界条件の与え方を考える。磁場の変数の中には印加成分と誘導成分すべてが統一的に記述されているので、境界条件を与える場合

は解析領域の境界での磁場および電場を与える必要がある。ところが、印加成分を産出するのは容易だが、誘導成分を境界条件として与えるのは困難である。近似的に境界での誘導成分は 0 として印加磁場および印加電場を与えて解析を行うのが現実的であるといえる。一方、印加成分と誘導成分を分離して誘導成分に対する磁場の誘導方程式を用いる場合、印加磁場および印加電場は外力として扱うことができる。つまり、印加磁場および印加電場は全空間で与えられるものとする。誘導成分の境界条件は特に指定する必要はないため、境界での誘導成分が考慮されることになる。

#### (4) 電磁ポンプ解析への適応

電磁ポンプなどの解析を行うには、磁場に対しては、外部からポンプに印加される外部磁場と流れによって引き起こされる誘導磁場を考慮する必要がある。また電場に対しても磁場と同様に外部から印加される印加磁場に伴う電場および誘導磁場によって生じる誘導電場を考慮する必要がある。

電磁ポンプにおける電磁場の挙動について外部から印加される磁場をまず考える。電磁ポンプを取り巻く外部のコイルによって外部磁場  $\mathbf{B}_0$  と外部電場  $\mathbf{E}_0$  が空間全体に与えられる。外部電場  $\mathbf{E}_0$  は外部磁場  $\mathbf{B}_0$  によって時間的に変化する外部磁場が与えられた時にファラデーの法則 ( $\partial \mathbf{B}_0 / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}_0$ ) にしたがって与えられる外部磁場である。

電磁ポンプ内部のナトリウムにおいては外部磁場と誘導磁場、外部電場と誘導電場が相互に影響しあう。その過程を考えてみる。誘導磁場および誘導電場はナトリウムの流速、および物性値により影響を受ける。

- 外部磁場  $\mathbf{B}_0$  と誘導磁場  $\mathbf{B}_i$ 、外部電場  $\mathbf{E}_0$  と誘導電場  $\mathbf{E}_i$  により誘導電流  $\mathbf{J}_i$  が生じる。つまり電気伝導度を  $\sigma$  とすると、誘導電流  $\mathbf{j}_i = \sigma(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_0 + \mathbf{u} \times (\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_0))$  を得る。ここで外部磁場  $\mathbf{B}_0$  および外部電場  $\mathbf{E}_0$  は既知の値であるが誘導磁場および誘導電場は未定である。
- 誘導電流が生じると、アンペールの法則から誘導磁場  $\mathbf{B}_i$  を得る。 $\nabla \times \mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{j}_i$
- 誘導磁場は、時間に対して変化している。そこで、ファラデーの法則より誘導電場を得る。 $\partial \mathbf{B}_i / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}_i$

ここで注意すべきことは、ファラデーの法則は全磁場(つまり外部磁場と誘導磁場の和)および全電場(つまり外部電場と誘導電場の和)に対して成り立つということである。すなわち、以下の式が成り立つ。

$$\partial(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i) / \partial t = -\nabla \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i) \quad (2-65)$$

しかし、ここでは外部磁場と誘導磁場および外部電場と誘導電場それぞれに対してファラデーの法則が成り立つと仮定する。また、誘導磁場および誘導電場は解析の初期には上記のアルゴリズムのため決定することができない。解析の初期には外部磁場および外部電場のみにより誘導

方程式の解析を行い、時間進行とともに電場および磁場の誘導成分が安定に印加されると考える。

実際の計算を行う場合、外部磁場と外部電場は境界部分だけでなく、空間内部に対しても与える。以上の議論をまとめると、具体的な計算手順は各ステップにおいて以下のようになる。

- 辺ベクトル FEM を用いて誘導電場の算出

$$\mathbf{E}_i = -\mathbf{E}_0 - \mathbf{u} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times \mathbf{B}_i \quad (2-66)$$

- 面ベクトル FEM を用いて誘導磁場の算出

$$\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_i \quad (2-67)$$

- 電流の算出 ( $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  は全空間で与えられるものとする)

$$\mathbf{j}_i = \sigma(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_0 + \mathbf{u} \times (\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_0)) \quad (2-68)$$

- ローレンツ力の算出

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}_i \times (\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_0) \quad (2-69)$$

誘導磁場および誘導電場の初期条件は不明だが、全空間で  $\mathbf{B}_i = 0, \mathbf{E}_i = 0$  を与える。解析の進行とともに誘導磁場および誘導電場が計算され、計算時間の発展と共にその値はある周期の範囲で一定値に収束すると予想される。

### 第3章 電磁流動解析手法の検証

#### 3.1 解析モデル

図3-1に、日本原子力発電(株)により米国ETECで2000年～2001年に試験が行われた160( $m^3/min.$ )級の大型電磁ポンプの縦断面<sup>6,7)</sup>を示す。主要な構造データ及び定格条件も同図に示した。本電磁ポンプは、下部流入側部流出の縦型構造となっており、しかもナトリウム流路の内側領域にも外側コイルと同位置かつ同相の内側コイルが設けられている。

本解析では、上記大型電磁ポンプのナトリウム流路について、3次元体系の解析を実施し、解析モデルの妥当性を評価するとともに、実験データの評価を試みる。ただし、2次元解析結果から周方向にはほぼ均一な流動分布となつたため、本解析では周方向に15°セクターのみモデル化することとした。

#### 3.2 解析条件

##### (1) メッシュ分割

図3-2に本解析で用いた3次元解析モデルを示す。計算領域は表3-1に示したパラメータにより要素分割を行った。本モデルでは外側及び内側の構造物をともに2要素設けモデル化した。一方、周方向には15°セクターのみを3要素でモデル化した。本解析モデルの要素全体を図3-3(a)に、その拡大図を図3-3(b)に示す。

##### (2) 初期条件及び境界条件

図3-4に上記大型電磁ポンプ試験で得られた磁束密度分布を示す。図には周波数が20Hz及び10Hzの2種類を示した。これらの磁束分布は、ナトリウムが充填されていない場合における、磁束分布の瞬時ピーク値の30%を時間方向に重ね合わせた分布である。これらの30%ピーク値は、平均すると20Hz時が約0.067(T)、及び10Hz時が0.070(T)であり、周方向に殆んど差がないことがわかる。したがって、本解析では全ケースにおいて印加磁束密度のピーク値として0.22(T)とした。

本解析では、初期条件として全領域で均一な流速分布、及び上述の印加磁束密度分布を与えた。表3-2に本解析に用いたパラメータ及び条件、表3-3に解析ケースを示す。支配方程式に現れる無次元数は、定格時の温度より求めた物性値を用いて計算し、非定常計算を通じて一定値とした。

一方、境界条件については、入口流速は初期条件で固定、出口流速は自由流出条件(傾きがゼロのノイマン条件)とした。また、周方向の境界壁では、圧力、流速、電場、及び磁場に関して周期境界条件とした。特に、電場及び磁場の周期境界条件は各辺の1メッシュ内側の値をコピーして貼り付けた。図3-5、図3-6及び図3-7に初期の流速ベクトル及び電磁場の分布を示した。なお本解析では、全ケースにおいて乱流モデルは用いなかった。

#### 3.3 解析結果及び考察

図3-8に磁場印加領域における圧力差の時系列分布を示す。磁場を印加してから約0.15sec.ではほぼ一定の振幅を持つ周期的に定常な状態に達していることがわかる。本ケースでは0.3sec.まで解析を実施した。図3-9(a)及び(b)に、時刻が0.3sec.における流路の圧力センター及び流れ

方向の圧力分布を示す。図 3-9(a)から、周方向にはほぼ一定の圧力差となっていること、及び入口部において比較的大きな圧力となっていることがわかる。また、図 3-9(b)から上記同様に入口部で大きな圧力差があるのみならず、出口部においても大きな圧力差が生じていることがわかる。また、圧力勾配は流路でほぼ一定であるため、流路全体の圧力差は、部分モデルで評価可能であることがわかる。

図 3-10(a), (b), 及び(c)には  $x-z$  方向(径-流れ方向)のローレンツ力分布を示す。メッシュ中央部では、壁面に近い領域は中心部よりも大きな力が流れ方向にほぼ均一に作用していることがわかる。一方、出入口部(図 3-10(b)及び(c))では、流れ方向とは逆方向にローレンツ力が作用し、その大きさは壁面近傍よりも中心部が大きな値となっていることがわかる。したがって、図 3-9 に現れた出入口部での大きな圧力差は、逆向きのローレンツ力によるものであることがわかった。本現象は印加磁場端部効果としてわかっており、実機では端部近傍においてコイルの巻き数等を調整することにより、本効果を緩和している。本解析では、端部において印加磁場分布が精度良く模擬できていなかったため、本現象が現れたものと考えられる。したがって、圧力差の精度良い評価のためには、端部における印加磁場分布を流動特性とは別に評価する必要はあるものの、端部を除いた領域では、印加磁場分布はほぼ均一であるので、出入口における圧力差は十分に再現できると考えられる。

図 3-11 に時刻 0.3sec.における径-流れ方向の流速分布を示す。流速分布は図 3-10 のローレンツ力と同様に、壁面近傍で大きく中心部ではほぼ均一となり、ハルトマン効果による M 型流速分布となった。また、図 3-12 及び図 3-13 に示した同時刻における印加磁場及び誘導磁場分布は、与えた交流磁場に対応して適切な進行磁場が得られた。したがって、流速分布及び磁場分布とも適切に解析が行われていると考えられる。

図 3-14、及び図 3-15 に流量-出入口圧力差( $Q-H$ )特性、及びスリップ-圧力差( $S-H$ )特性を示す。これらの図には、本3次元解析の全ケース、実験結果<sup>8)</sup>、及び2次元解析結果<sup>5)</sup>を同時にプロットした。これらの図から、本3次元解析結果は2次元解析結果よりも実験結果を良く再現できることがわかった。また、乱流モデルを用いなくとも、あるいは上記の端部効果が存在しても、 $Q-H$  及び  $S-H$  特性に関しては、本3次元解析手法により比較的良好く実験結果を再現できることがわかった。

以上の検証により、高磁場かつ高流量領域における電磁流動解析手法の整備が適切に行われたことが確認できた。しかし本解析手法では、電磁乱流現象を考慮していないためそれに起因する電磁流動現象の詳細な評価は不可能である。したがって、今後は本研究と平行に進めている電磁乱流モデルを反映して解析精度向上及び現象解明を行う予定である。

## 第4章 電磁乱流解析手法の検討

### 4.1 電磁乱流解析手法について

昨年度の検討<sup>5)</sup>では、高磁場かつ高流量領域における電磁流動特性を精度良く評価するためには、Dynamic-SGS モデルが最適であることがわかった。そのため、本研究と平行して先行基礎工学研究において Dynamic-SGS モデルの開発を進めている。

一方、上記の電磁乱流モデルは非常に多くの要素分割を必要とし、したがって解析時間をおよそ多く必要とするため、多くのパラメータ解析を行うには、高度な並列計算アルゴリズムの開発が必要である。この困難さを克服するための1つの手段として、Dynamic-SGS モデルでは代表的なケースを解析することにより乱流モデル定数を設定することとし、比較的少ない要素分割で、しかも精度良い解析評価が可能となる LES モデルによりパラメータ解析を行うことが得策と考えられる。

LES モデルでは、最も簡単なスマゴリンスキーモデルにおいてさえも、モデル定数を解析条件に応じて設定しなければならないだけでなく、精度良い解析評価を行うためには粘性底層内までも細かく要素分割しなければならない。しかし、 $\kappa - \epsilon$  モデル等に用いられている壁関数等の人工壁面境界条件を用いることができれば、要素分割数を大幅に削減でき、計算時間も短縮できる。このため、CFD の分野では人工壁面境界条件を用いた LES の開発が行われ、比較的高精度で平均速度分布や乱流統計量が評価できることがわかっている<sup>9,10)</sup>。

以上から、本章では上記の人工壁面境界条件を用いた LES の手法が、電磁乱流場へ適応可能かどうか検討することとした。ただし、ここでは乱流モデル定数がほぼ確定され、かつ強磁場環境における電磁乱流モデルが開発されている、直流磁場が印加されたチャンネル領域<sup>11)</sup>を扱うこととする。

### 4.2 人工壁面境界条件

LES で用いることのできる情報は速度場のみであるため、速度場の情報のみにより壁面境界条件を設定する手法を以下に記述する。

一般に壁法則は、壁座標  $y^+$  及び無次元化速度  $u^+$  の関数として表現される。例えば、本章で用いた Spalding 則は次のように表される。

$$F(y^+, u^+) = u^+ - y^+ + \exp(-\kappa B) \left[ \exp(\kappa u^+) - 1 - (\kappa u^+) - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right] \quad (4-1)$$

ここで、 $y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$ ,  $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$ ,  $u_\tau^2 = \frac{\tau_w}{\rho}$ ,  $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{wall}$ ,  $y$ : 壁からの距離,  $\nu$ : 動粘性係数,  $u$ :  $y$  点の速度,  $u_\tau$ : 壁面摩擦速度,  $\rho$ : 密度,  $\tau_w$ : 壁面摩擦応力,  $\mu$ : 粘性係数である。

また、式(4-1)では  $\kappa = 0.40$ ,  $B = 5.5$  と用いた。

LES の計算の壁面境界条件として必要な瞬時局所的な壁面摩擦応力  $\bar{\tau}_w$  の算出を行う際、GS (Grid scale) 速度及び壁面摩擦応力を平均量と変動量とに分離して考える。すなわち、壁面摩擦応力の平均値は定義通り式(4-2)で与え、変動量は式(4-3)の仮定を用いる。

$$\frac{\langle \bar{\tau}_w \rangle}{\rho} = \frac{\nu y^+}{u^+} \frac{\langle \bar{u} \rangle}{y} \quad (4-2)$$

$$\frac{\bar{\tau}_w''}{\rho} = \frac{\nu y^+}{u^+} \frac{\bar{u}''}{y} \quad (4-3)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$  と  $''$  はそれぞれアンサンブル平均値及びそれからのずれを示す。また、GS 成分を上付き  $\bar{\cdot}$  で示す。式(4-2)及び(4-3)を加えると、瞬時の壁面摩擦応力は次のように表現できる。

$$\frac{\bar{\tau}_w}{\rho} = \frac{\nu y^+}{u^+} \frac{\bar{u}}{y} \quad (4-4)$$

一方、平均摩擦速度  $\langle \bar{u}_\tau \rangle$  を代表速度、チャンネル高さ  $L_0$  を代表長さとして無次元化を行うと、 $y^+$  及び  $u^+$  は式(4-5)で表される。

$$\begin{aligned} y^+ &= \langle \bar{R}e_\tau \rangle \bar{u}_\tau^* y^* \\ u^+ &= \frac{\bar{u}^*}{\bar{u}_\tau^*} \end{aligned} \quad (4-5)$$

したがって、式(4-1)にこれらを適用すれば、ニュートンラフソン法等により  $\bar{u}_\tau^*$  を求めることができ、式(4-6)から無次元化された壁面摩擦応力  $\bar{\tau}_w^*$  及び壁面における速度勾配が得られる。

$$\left( \bar{u}_\tau^* \right)^2 = \bar{\tau}_w^* = \frac{1}{\langle \bar{R}e_\tau \rangle} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{wall} \quad (4-6)$$

ただし本章では、計算時間の短縮化を図るため、式(4-5)において、GS 瞬時局所速度  $\bar{u}^*$  の代わりにそのアンサンブル平均速度  $\langle \bar{u}^* \rangle$  を用いた式(4-7)を用いることとした。

$$\begin{aligned} y^+ &= \langle \bar{R}e_\tau \rangle \bar{u}_\tau^* y^* \\ u^+ &= \frac{\langle \bar{u}^* \rangle}{\bar{u}_\tau^*} \end{aligned} \quad (4-7)$$

### 4.3 電磁乱流解析モデル

本章で扱う磁場は直流磁場であるため、誘導磁場が無視できる条件となる。したがって、電位ポテンシャル  $\phi$  を用いて2章と同様の無次元化を行うと、オームの法則は式(4-8)となる。

$$\mathbf{J} = -\nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 \quad (4-8)$$

Navier-Stokes の式(2-2)に式(4-8)を適用し、フィルタリング操作を行うと式(4-9)が得られる。また、磁化不在の法則(2-3)及び誘導方程式(2-4)は必要なく、その代わりに  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0$  を満たすボアソン方程式(4-10)が必要となる。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \frac{Ha^2}{Re} [(-\nabla \bar{\phi} + \bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0] - \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^u \quad (4-9)$$

$$\nabla^2 \bar{\phi} = \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}_0) \quad (4-10)$$

ここで、式(4-9)の右辺第4項の  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^u$  は、Shimomura<sup>11)</sup>が提案した次のモデルを用いる。

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^u - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}}^u) = -2\nu_{SGS} \bar{\mathbf{S}} \quad (4-11)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \bar{\mathbf{u}} + [\nabla \bar{\mathbf{u}}]^T \right) \quad (4-12)$$

$$\nu_{SGS} = \nu_s \exp \left[ \frac{Ha^2}{Re} \left( \frac{C_m}{C_s} \right)^2 (2\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}})^{-1/2} \right], \quad C_m \approx 1.4, \quad C_s = 0.1 \quad (4-13)$$

$$\nu_s = (C_s \Delta)^2 (2\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}})^{1/2} \quad (4-14)$$

である。

#### 4.4 解析条件

本研究では、図 4-1 に示すチャンネル流れ体系に、壁と垂直方向の一様磁場 ( $B_0$ ) が印加されている体系とした。本チャンネルのサイズは壁垂直方向、スパン方向及び流れ方向にそれぞれ、 $L_0$ 、 $1.6L_0$ 、及び $6.4L_0$  とし、流れを維持するために、流れ方向に平均摩擦力に相当する平均圧力勾配 (-2) を与えた。

流れ場の境界条件は、スパン方向及び流れ方向は周期境界条件、上下壁面の壁垂直方向の速度はゼロ、かつスパン方向および流れ方向の速度はスリップ条件とした。一方、電磁場の境界条件は、上下壁面では壁垂直方向の電流はゼロとし、スパン方向は、実験と同様に絶縁条件

$$\int_0^L \langle \bar{J}_y \rangle dx = 0 \quad (4-15)$$

とした。ここで、 $\bar{J}_y$  はスパン方向の無次元電流密度の GS 成分、 $\langle \rangle$  は領域内のアンサンブル平均を表す。式(4-8)の GS 成分に対する式を式(4-15)に代入することにより、以下の条件が得られる。

$$-\left\langle \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right\rangle = B_0 W_0, \quad W_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \langle \bar{w} \rangle dx \quad (4-16)$$

この条件により、流れ方向の流速  $\bar{w}$  が平均流速  $W_0$  より速い場合には減速する方向にローレンツ力が作用し、遅い場合には加速する方向に作用する。

$Ha=0$  の時の初期条件は、流れ方向に対数則に基づく速度分布、及び全ての方向に Kreplin-Eckelmann<sup>12)</sup>による実験結果の2倍の乱流強度の乱数を与えた。与えた乱数が十分に減衰し流れが定常状態になるまで計算を行い、続いて 5 万ステップ間を平均して平均速度分布や乱流強度などの統計量を求めた。磁場が印加されたケースについては、 $Ha=0$  の速度分布に磁場を印加して計算を開始し、流れが定常になった後に 5 万ステップ間を平均して平均量及び乱流強度を求めた。

以上の主な解析条件と解析ケースをまとめると表 4-1 となる。これらのケースでは、実験結果および Shimomura の詳細解析結果と比較するため、平均速度に基づくレイノルズ数 ( $Re_0 = W_0 L / \nu$ ) が約 29,000 となるように  $Re_\tau$  を調整して解析を行った。

#### 4.5 解析結果及び考察

##### (1) 磁場が印加されない場合

図 4-2 に無次元平均速度分布を示す。いずれのケースも  $Re_0$  は  $29,000 \pm 200$  程度と、Shimomura の解析条件と同程度であった。図には式(4-1)の Spalding 則から計算した流速分布及び Shimomura の解析結果も同時にプロットした。図から、最大 0.6 程度の差はあるものの、スパン方向及び流れ方向の

要素分割数に係らず比較的良好上記の結果と一致していることがわかる。このことから、本研究で用いた人工壁面境界条件の設定方法は妥当であり、比較的少ない要素分割数でも平均速度分布は予測可能であることがわかる。

図 4-3(a)、(b)及び(c)に、それぞれ流れ方向、スパン方向および壁垂直方向の乱流強度分布を示す。これらの図には、Kreplin-Eckelmann<sup>12)</sup>による実験結果(以後 K-E と略す)及び Shimomura の解析結果(以後 SH と略す)も同時にプロットした。まず、流れ方向の乱流強度に関しては、いずれの解析ケースも壁面近傍以外は同程度の値である。壁面近傍では、スパン方向および流れ方向の要素分割数が詳細になるに従い SH と K-E に近づく。スパン方向の乱流強度に関しては、ケース2及び3は上記の SH 及び K-E よりも大きな値を示し、ケース1及び4では小さな値を示した。しかし中央部ではいずれのケースも同程度であり、SH 及び K-E と比較的良好一致した。壁垂直方向の乱流強度に関しては、壁近傍ではいずれの解析結果も小さい値となるものの、要素分割が詳細となるに従って SH 及び K-E に近づく。また流路中央部では、SH 及び K-E と比較的良好一致した。以上の結果は、森西ら<sup>10)</sup>が有限体積法(FVM)により行った解析結果と同様な傾向であった。人工壁面境界条件を用いて壁近傍の要素分割数を少なくする場合には壁面近傍の細かな渦までは再現できないため、壁面近傍の乱流強度などの乱流統計量は十分に再現できないと考えられる。しかし、比較的大きな渦が支配的であり、しかも中央部では乱流挙動は比較的良好再現できる。

以上の結果から、磁場が印加されていない場合、GSMAC-FEM を用いた人工壁面境界条件の設定方法は妥当であり、平均流速分布や壁面近傍を除く乱流強度は SH 及び K-E を比較的良好再現できることがわかった。

## (2) $Ha=52.5$ の一様磁場が印加された場合

図 4-4(a)には、ケース6における x-y 平面の無次元電流分布を示す。また本図の P-Q 位置における x-z 平面の無次元速度分布を図 4-4(b)に示す。これらは共にチャンネル中央部(z 方向中央)において平均操作開始後 5 万ステップにおける瞬時値をプロットした図である。さらに Fig.5(b)には上記の時刻において式(4-16)から計算された平均速度  $W_0$  も示した。これらの図から、各要素における GS 速度が  $W_0$  よりも大きな領域(中央部)では電流は +y 方向に、 $W_0$  よりも小さな領域(壁近傍)では -y 方向に流れていることがわかる。また上記の中央部と壁近傍との境では、壁垂直方向の GS 速度成分が  $W_0$  前後に変動したため、渦電流が生じた。したがって、3 章に記述した絶縁境界条件の設定は妥当であることがわかった。

図 4-5 に本解析で得られた平均流速分布を示す。図に示した Brouillette-Lykoudis の実験結果<sup>13)</sup>(以後 B-L と略す)、及び SH を比較すると、ケース 6 がこれらの値と最も近い値を示した。しかし他のケースにおいても、 $X^- \leq 100$  の領域では上記の結果とほぼ一致し、 $X^+ \geq 100$  の領域でも、B-L 及び SH と最大約 1.2 の差しかなかったことから、 $C_m \approx 1.4$  とすることにより、比較的少ない要素数で平均速度分布が良好再現できることがわかった。

一方、Reed-Lykoudis<sup>14)</sup>による実験では、磁場強度が大きくなると乱流強度が減衰されるため、中心部では層流条件で導出された Hartmann の解に近づくことが報告されている。そこで、本研究に用いた Spalding 則が壁面近傍から流れの中心部までの領域で式(4-17)に示した Hartmann 解とどの程度の差があるのかを確かめるために、図 4-5 に  $Ha=52.5$  の時の両者の速度分布をプロットした。

$$w^+ = \frac{Re_0}{Re_\tau} \left\{ 1 + \frac{1}{Ha \cdot coth(Ha) - 1} \right\} \left\{ 1 - \frac{\cosh[Ha \cdot (y^+ / Re_\tau - 0.5)]}{\cosh(Ha)} \right\} \quad (4-17)$$

ただし、式(4-17)は文献 1)の解を本解析に用いた座標系に統一するとともに、平均摩擦速度  $\langle u_\tau \rangle$  で無次元化を行い、 $Re_0=29,000$  及び  $Re_\tau=1,450$  を用いた。図から、Hartmann 解、SH 及び Spalding 則は  $x^+ \leq 30$  の領域において比較的良く一致していることがわかる。したがって、本条件のような比較的大きな磁場環境においても  $x^+ \leq 30$  程度の領域において Spalding 則が適用可能であると考えられる。また、 $x^+ \geq 30$  の領域では、 $x^+ \approx 100$  において最大 2.0 程度の差があるものの、それ以上の領域では Hartmann の解と比較的良く一致した。以上の結果から、Spalding 則と Shimomura の提案した渦粘性係数を用いることにより、比較的精度良く平均流速分布が予測できることがわかった。

図 4-6(a),(b)および(c)に、それぞれ流れ方向、スパン方向、および壁垂直方向の乱流強度分布を示す。これらの乱流強度分布は、いずれのケースとも大きな差はなく  $C_m$  値や要素分割数に大きく影響されないことを示している。流れ方向の乱流強度に関しては、壁面近傍では SH と比較的良く一致しているものの、中央部では SH より大きな値となった。スパン方向および壁垂直方向の乱流強度についても中央部では SH より大きな値となり、壁近傍ではスパン方向は SH よりも大きく、壁垂直方向は小さな値となった。一方、Reed-Lykoudis による実験結果<sup>14)</sup>では、本解析条件と同程度のハルトマン数であるにもかかわらず、z 方向中央部において流れ方向及びスパン方向に、本解析結果に近い 0.1~0.6 程度の乱流強度が生じたことが報告されている。このことから、乱流強度に関しては、SH と比較するのみでは本解析結果の評価は困難であり、文献 14)の条件を用いてさらに検証解析を実施する必要があると考えられる。

### (3) $Ha=125$ の一様磁場が印加された場合

図 4-7 にケース 8 および 9 における流れ方向の平均速度分布を示す。これらのケースでは  $C_m=1.2$  を用いた。同図には、B-L、SH、Hartmann の解及び Spalding 則も同時にプロットした。本解析結果と Hartmann の解を比較するために、式(4-17)において  $Re_0=29,000$  及び  $Re_\tau=1,900$  用いた。これらの 2 種類の解析結果は、 $X^+ \approx 100$  以外の位置では、Hartmann の解、SH 及び B-L と良い一致が得られた。 $X^+ \approx 100$  では上記の SH、B-L 及び Hartmann の解よりも 1.3 程度大きな値であり、Spalding 則から計算される値と同程度であった。本解析では、2 ケースとも 5 万ステップ間の x-y 断面の電流密度に変化はなくほぼ一定の分布を示し、しかも  $X^+ \approx 100$  において電流密度ほぼゼロ、すなわち流れ方向に作用するローレンツ力もほぼゼロであった。また、乱流強度についても次に記述したように非常に小さな値であった。さらに、壁垂直方向の要素分割幅が等しい  $Ha=52.5$  のいずれのケースでも現れなかった。したがって、上記の  $X^+ \approx 100$  における差は本解析ケース特有の現象であり、磁場が印加されない場合の流れの平均速度に近い値となったと考えられる。

本解析条件では、 $x^+ \leq 70$  の領域において Hartmann の解は、Spalding 則及び SH と良く一致した。図 4-5 及び図 4-7 を比較すると印加磁場が大きい程壁面近傍における層流化が促進されることがある。したがって、層流条件で導出された Hartmann の解は、壁面から遷移領において Spalding 則と比較的良く一致すると考えられる。以上から、比較的大きな磁場を印加する場合には、壁面から遷移領域に速度の最近傍定義点を設定すれば人工壁面境界条件として Spalding 則を用いても比較的良

い平均速度分布が計算できると考えられる。

図 4-8 にケース 8 及び 9 における、流れ方向、スパン方向及び壁垂直方向の乱流強度分布を示す。Case-8 と Case-9 の結果を比較すると、流れ方向及び壁垂直方向に関しては、両ケースとも同程度の乱流強度分布を示し、スパン方向に関しては Case-8 が Case-9 の約 2.5 倍の乱流強度を示すことがわかる。しかし乱流強度の最大値は約  $2.6 \times 10^{-3}$  と非常に小さく、いずれの方向も速度変動がほぼ消失していることがわかる。本条件では SH においても乱流変動がほとんど消失したと記載されていることから、定性的には本解析結果は妥当であると考えられる。

## 第5章 結 言

高速炉に用いられる高磁場かつ高流量領域であり、しかも複雑形状領域における電磁流動現象が精度良く評価できる解析手法を開発し、電磁応用機器システムの設計手法を確立することを目標として、昨年度に開発した2次元解析手法を3次元に拡張し、大型電磁ポンプ試験を用いて検証を行った。その結果、以下の事柄が明らかとなった。

- (1) 流れ方向の流速分布及び流速は、壁面近傍において比較的大きく中心部ではほぼ一定となる M 型分布を持つことが確認された。
- (2) 本3次元解析モデルにより得られた流量-圧損特性及びスリップ-圧損特性に関しては、ともに2次元解析結果よりも実験結果に近い結果が得られ、本解析モデルの有効性が確認された。

次に、比較的少ない要素分割で、しかも精度良い解析評価が可能となる LES (Spalding 則を用いた LES) 手法を磁場環境へ適用するために、直流磁場がチャンネル体系に印加されている条件について解析を実施した。その結果、以下の事柄が明らかとなった。

- (3) ハルトマン数が 0、52.5 及び 125 のいずれの場合においても、Spalding 則及び Shimomura の渦粘性モデルを用いることにより、少ない要素分割数にもかかわらず、流れ方向の平均速度分布は実験結果を比較的良好に再現できる。
- (4) 乱流強度については、磁場が印加されない場合には実験結果を比較的良好に再現できる。しかし、比較的大きな磁場が印加された場合には、今後さらなる解析を通じてモデルの検証を行う必要がある。

## 参考文献

- 1) P.A. Davidson, *An introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge university press (2001)
- 2) 棚橋隆彦、電磁流体の数値解析-基礎と応用-、森北出版 (1995)
- 3) H. Araseki, S. Kotake, A self-correcting procedure for computational liquid metal magnetohydro-dynamics, Jounal of Computational Physics, **110** p.301–309 (1994)
- 4) 荒関英夫、村上貴裕、環状流路の誘導型電磁ポンプの不安定特性、電力中央研究所報告 U00030 (2001)
- 5) 大平博昭、荒邦章、電磁流動解析手法の整備(1) -解析手法の検討及び2次元解析手法の開発-, JNC TN9400 2002-058 (2002)
- 6) 植田、等、大容量浸漬型電磁ポンプの開発(1) -開発の概要-、日本原子力学会 2002 年秋の大会 (2002)
- 7) 大田、等、大容量浸漬型電磁ポンプの開発(2) -ポンプの設計・製作-、日本原子力学会 2002 年秋の大会 (2002)
- 8) 大田、等、大容量浸漬型電磁ポンプの開発(3) -試験結果と評価-、日本原子力学会 2002 年秋の大会 (2002)
- 9) 森西洋平、小林敏雄、LES 乱流計算における壁面境界条件の一考察、日本機械学会論文集 (B 編)、55 卷 511 号、p.615–623 (1989)
- 10) 森西洋平、小林敏雄、人工壁面境界条件を用いた LES の構成およびその評価、日本機械学会論文集 (B 編)、57 卷 540 号、p.2595–2601 (1991)
- 11) Y. Shimomura, Large eddy simulation of magnetohydrodynamic turbulent channel flows under a uniform magnetic field, Phys. Fluids A3 (12), p.3098–3106 (1991)
- 12) H.P. Kreplin and H. Eckelmann, Behavior of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow, Phys. Fluids 22(7), p.1233–1239 (1979)
- 13) E.C. Brouillette and P.S. Lykoudis, Magneto-fluid-mechanic channel flow. I. Experiment, Phys. Fluids, 10(5), p.995–1001, (1967)
- 14) C.B. Reed and P.S. Lykoudis, “The effect of a transverse magnetic field on shear turbulence,” J. Fluid Mech., **89**, 147–171 (1978)

表 3-1 大型電磁ポンプの解析パラメータ

パラメータ	値
構造部外径	0.575 [m]
流体部外径	0.565 [m]
流体部内径	0.490 [m]
構造部内径	0.482 [m]
軸長さ	5.616 [m]
z 方向分割数	72
r 方向外側構造部割数	2
r 方向流体部	10
r 方向内側構造部分割数	2
θ 方向分割数	3
解析領域の θ 方向角度	15°

表 3-2 解析に用いたパラメータ及び条件

パラメータ	値
ナトリウム密度	871.70 [kg/m <sup>3</sup> ]
ナトリウム粘性係数	$3.18 \times 10^{-4}$ [Pa·s]
透磁率	$1.257 \times 10^{-6}$ [H/m]
ナトリウム電気伝導率	$5.222 \times 10^6$ [S/m]
ダクト電気伝導率	$1.044 \times 10^6$ [S/m]
ポールピッチ	0.312 [m]
周波数	20.5 [Hz]
乱流モデル	なし
壁面境界条件	すべりなし
軸方向解析領域長さ	5.616 [m]
軸方向外部磁場、電場印加範囲	0.312~5.304 [m]
Re·s	0.972
Δt	$5.0 \times 10^{-7}$
ε	$1.0 \times 10^{-3}$

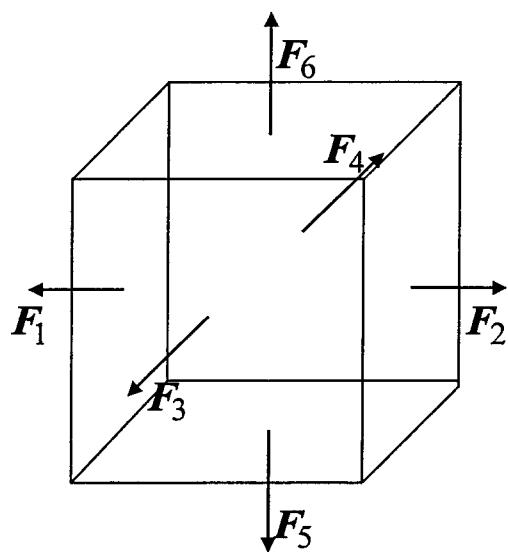
表 3-3 3次元検証解析ケース

解析ケース	流速 (m/sec.)	周波数 (Hz)
1	11.3	20.5
2	10.7	20.5
3	10.0	20.5

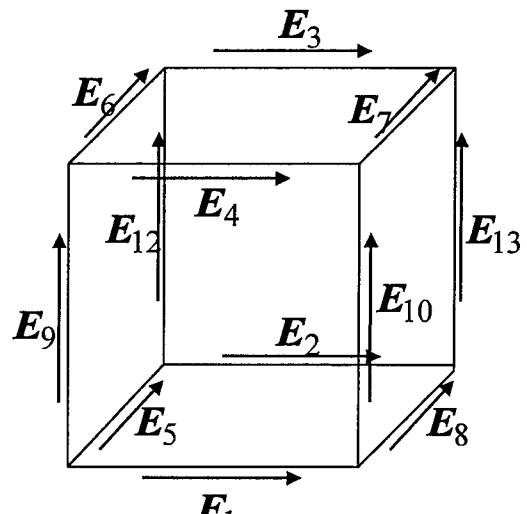
表 4-1 代表的な解析条件

Case	Ha	$Re_\tau$	Finite Elements(*)	$C_m$
1			$12 \times 8 \times 16$	
2	0.0	1450	$12 \times 16 \times 32$	-
3			$12 \times 32 \times 64$	
4			$24 \times 32 \times 64$	
5			$12 \times 8 \times 16$	1.4
6	52.5	1450	$12 \times 8 \times 16$	1.2
7			$12 \times 16 \times 32$	1.2
8	125	1900	$12 \times 8 \times 16$	1.2
9			$12 \times 16 \times 32$	1.2

(\*) Finite elements in (the normal)  $\times$  (the spanwise)  $\times$  (the streamwise) direction.

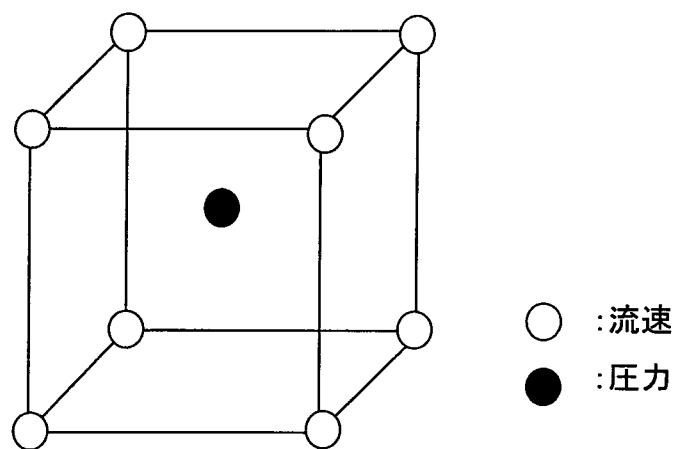


(a) 面ベクトル形状関数

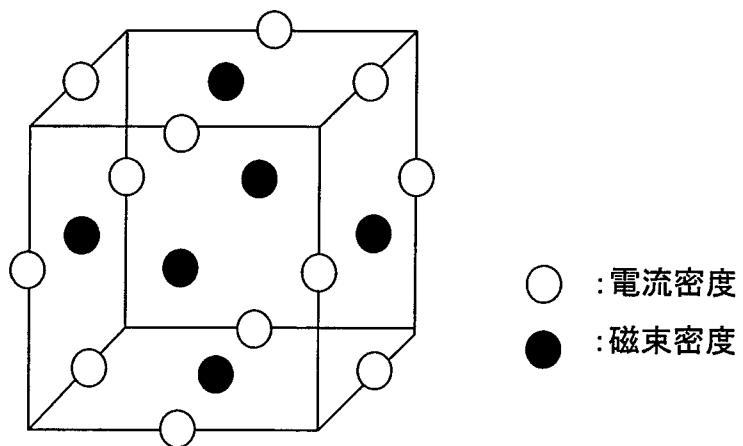


(b) 辺ベクトル形状関数

図2-1 ベクトル形状関数の概念



(a) 流動場



(b) 電磁場

図2-2 流動場及び電磁場における変数の定義位置

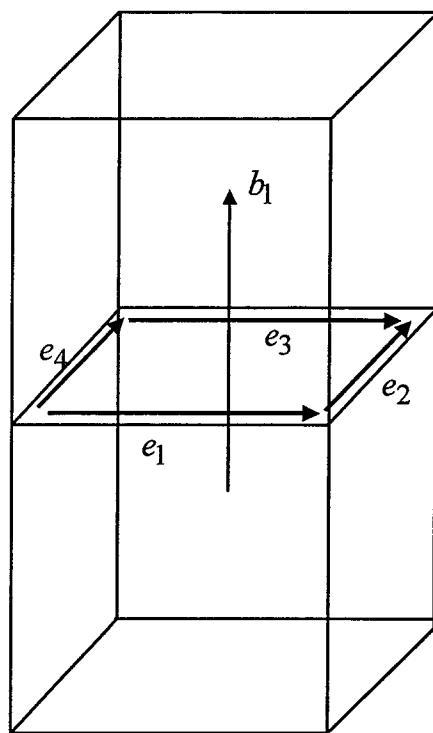


図2-3  $b_1$ に対する計算アルゴリズム

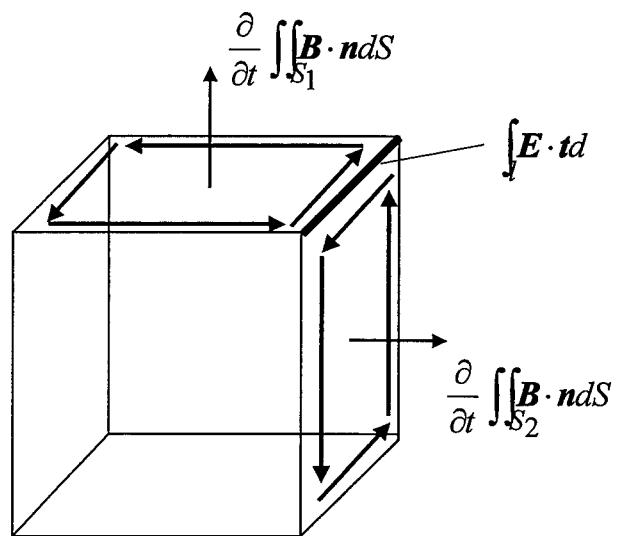
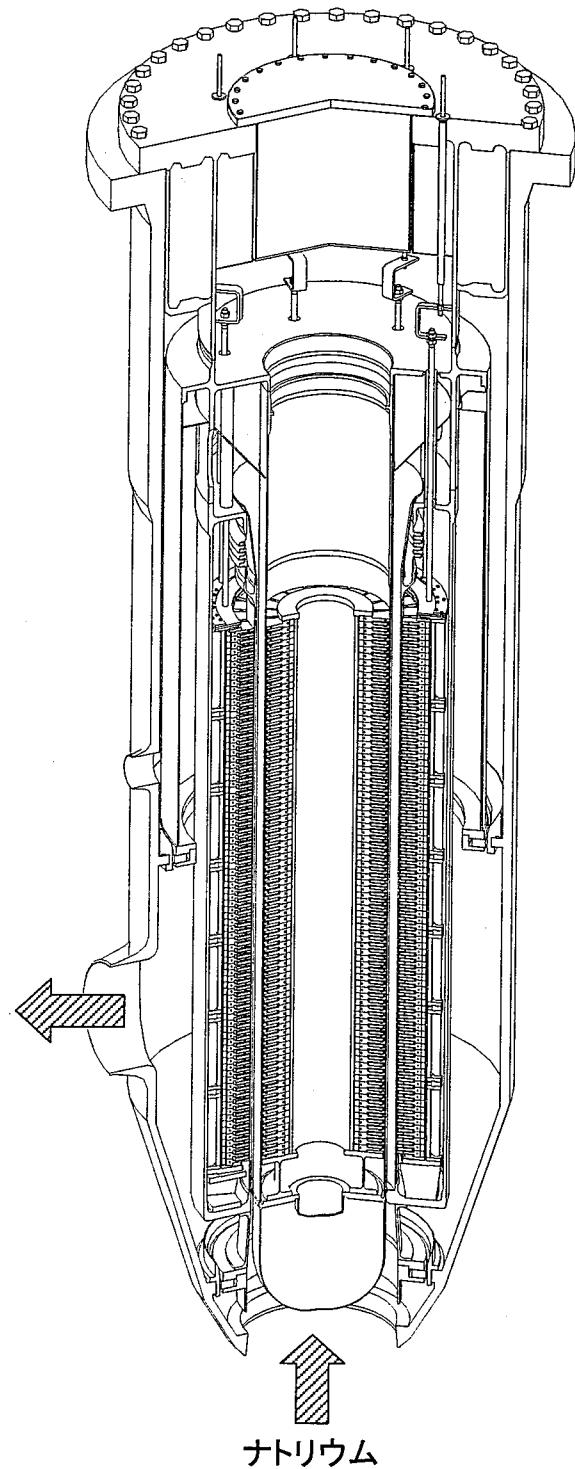


図2-4 ソレノイダル条件が満たされる理由



主要設計仕様

- ・型式 : ダブルステータALIP
- ・流量 : 160 m<sup>3</sup>/min
- ・揚程 : 0.25 Mpa
- ・入力 : 1680 kW
- ・端子電圧: 1350 V
- ・相電流 : 884 A
- ・周波数 : 20.0 Hz
- ・ポール数 : 14ポール
- ・流路幅 : 75 mm
- ・ステータ長: 4420 mm
- ・ケーシング外径 : 1900 mm

図3-1 大型電磁ポンプの縦断面及び主な仕様

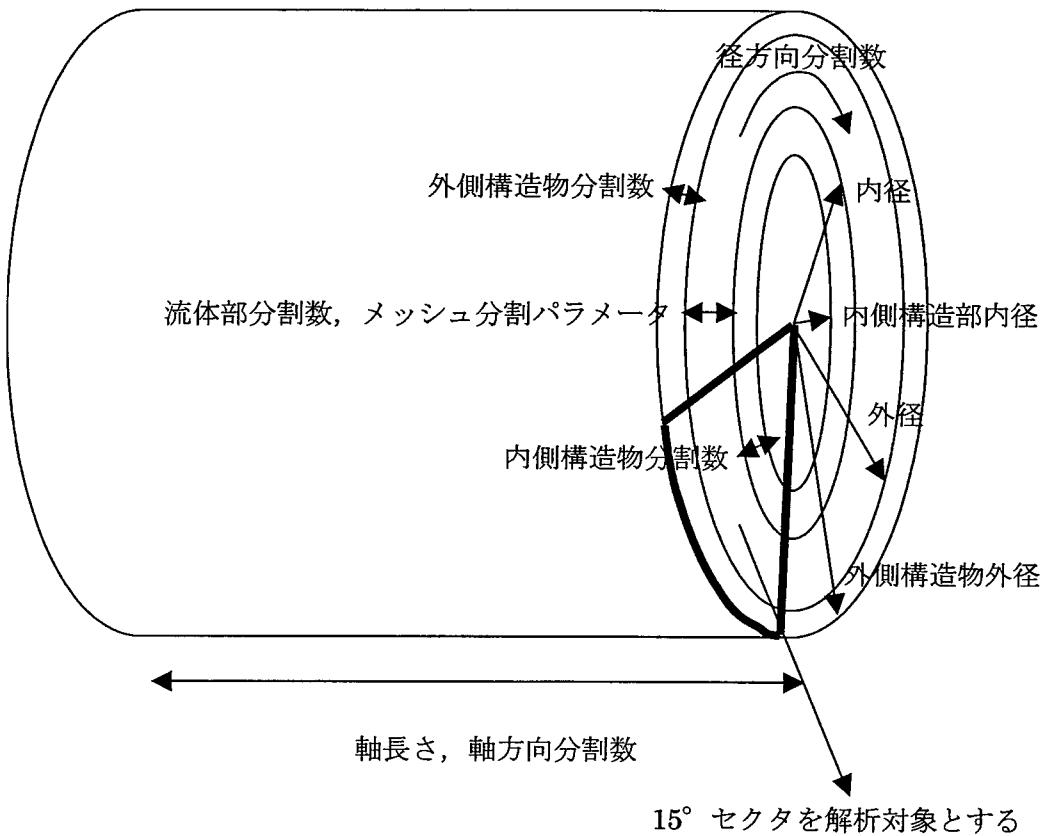


図3-2 ALIP型電磁ポンプの解析モデルの概要

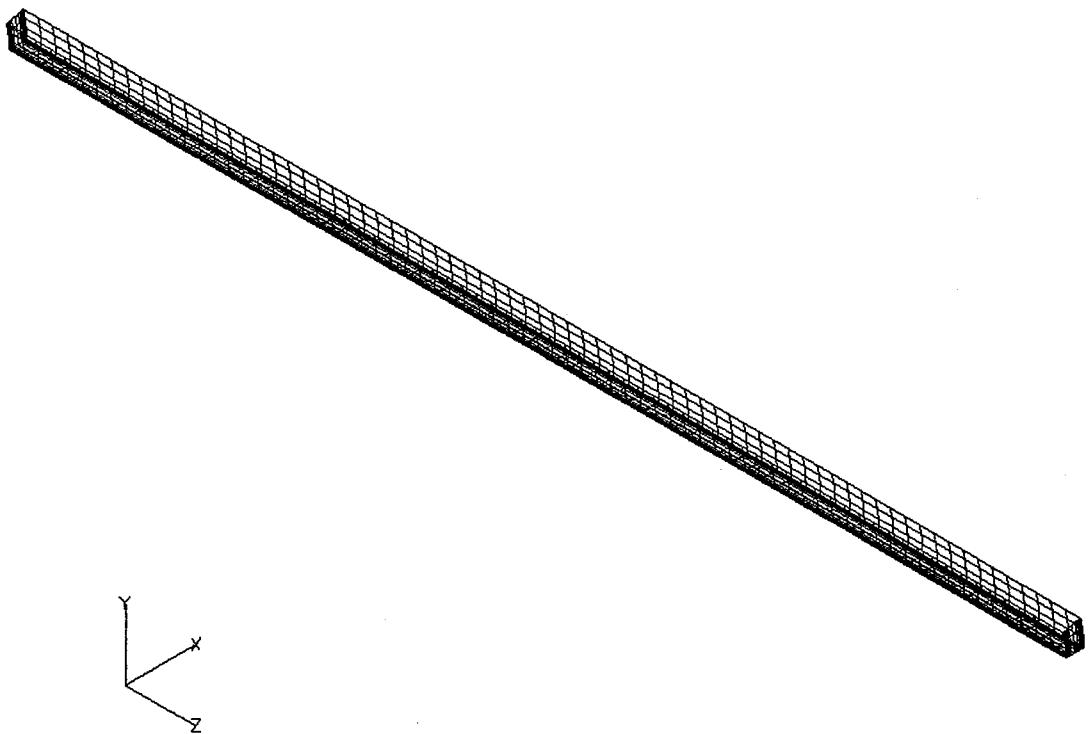


図3-3(a) 解析モデル(全要素)

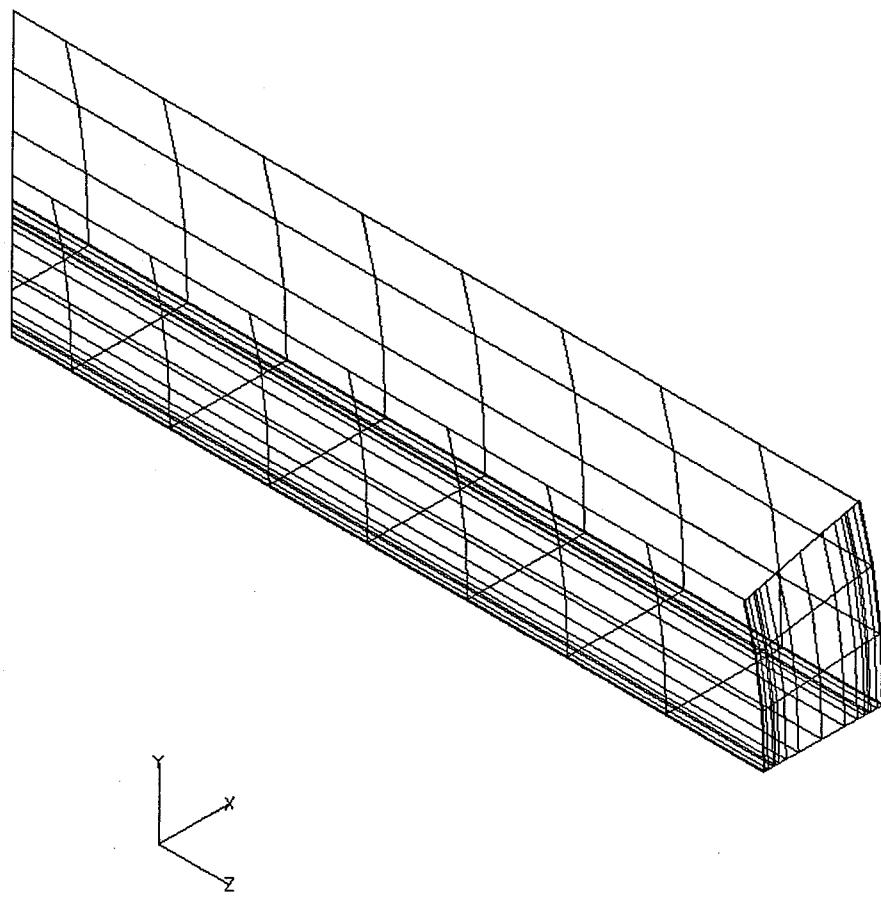
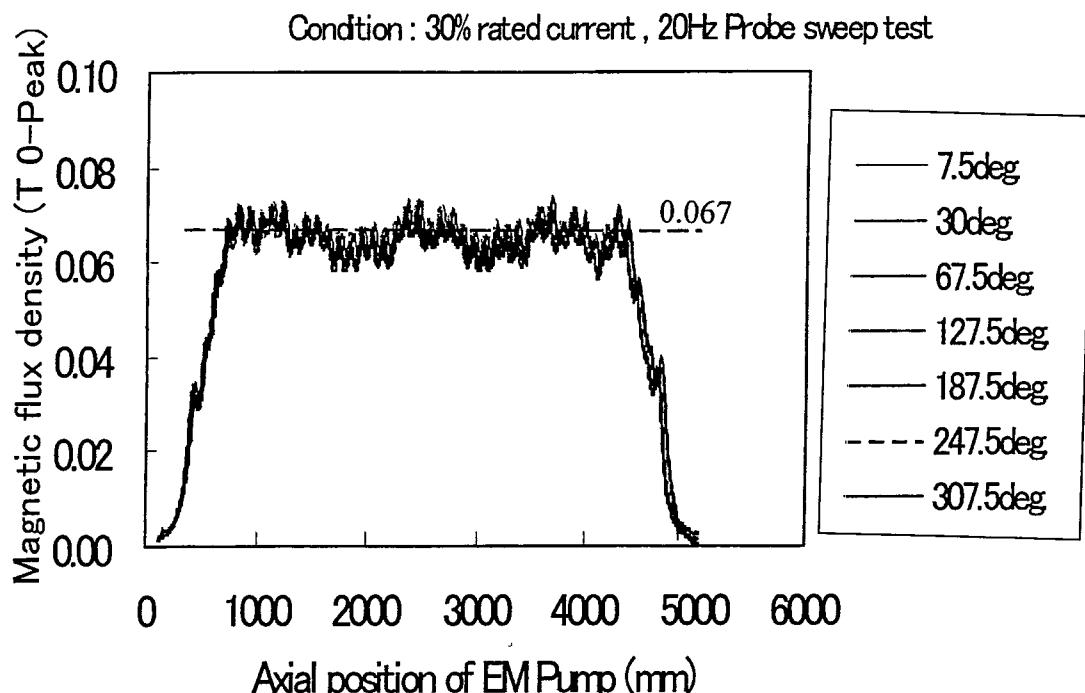
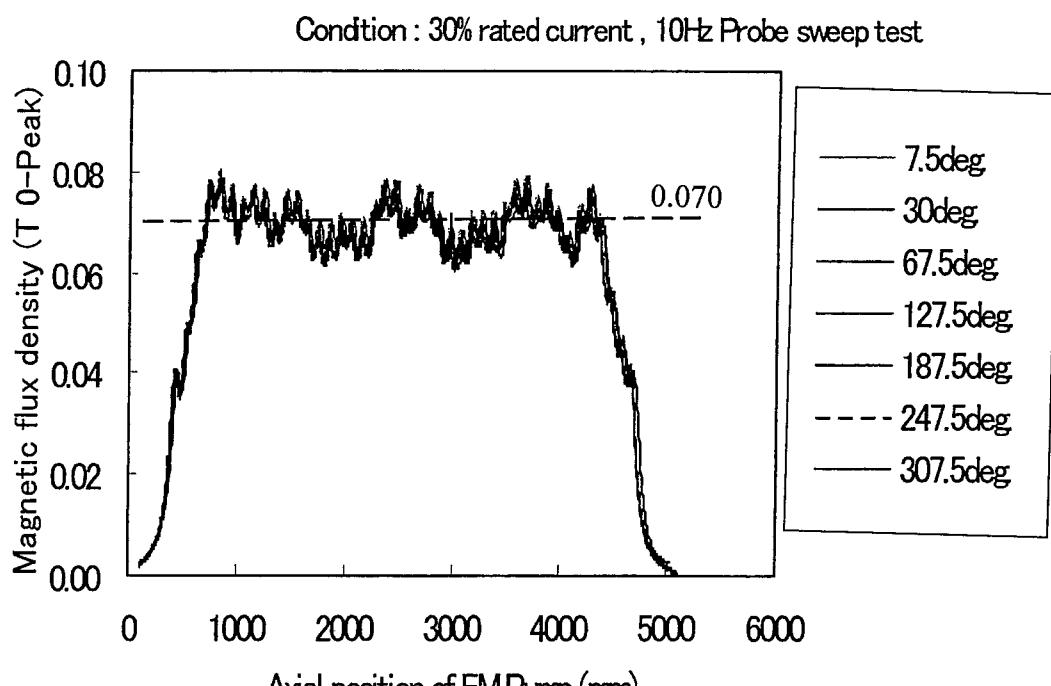


図3-3(b) 解析モデル(部分要素;拡大図)



(a) 周波数が20Hzの場合



(b) 周波数が10Hzの場合

図3-4 ナトリウム非充填時における周方向の磁束密度分布

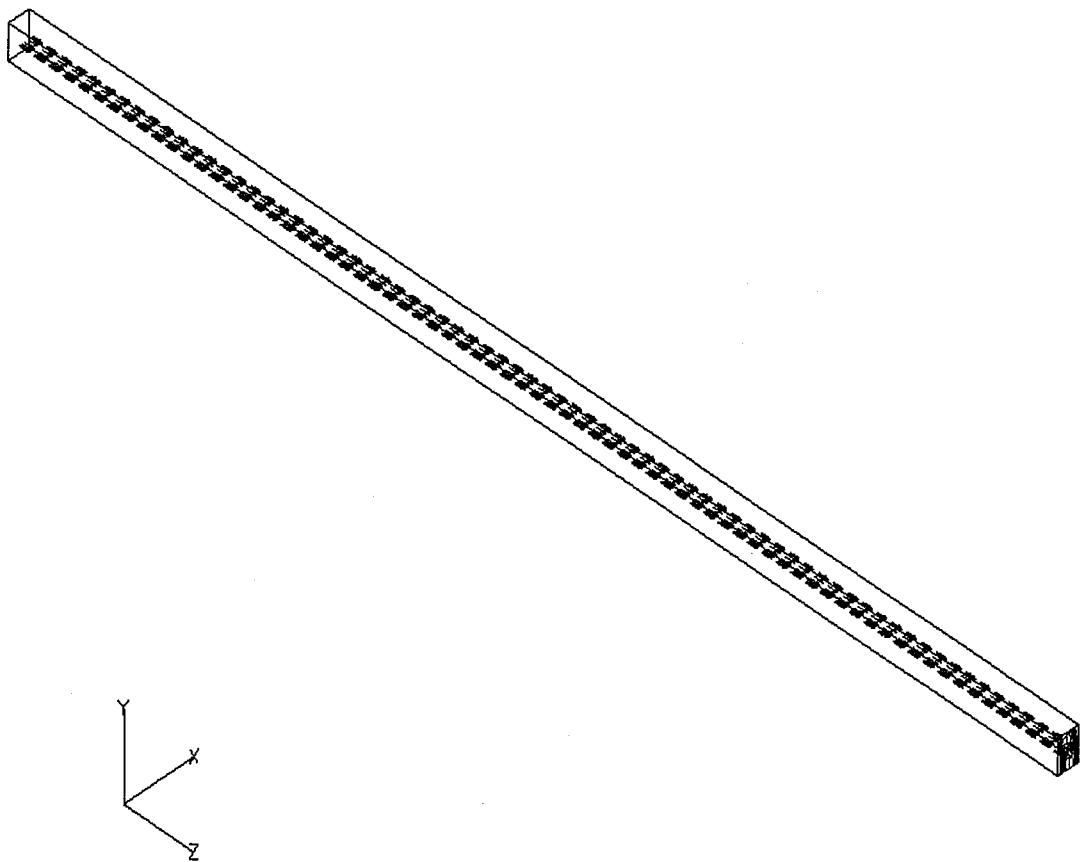


図3-5 初期速度分布

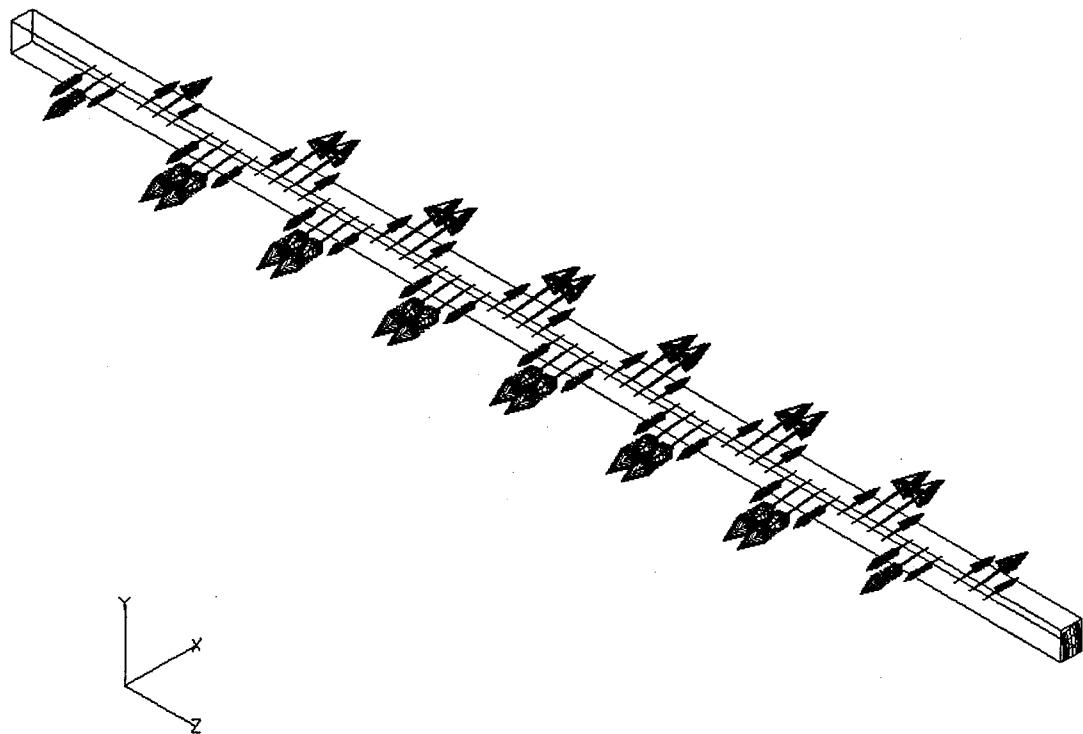


図3-6 初期磁場分布

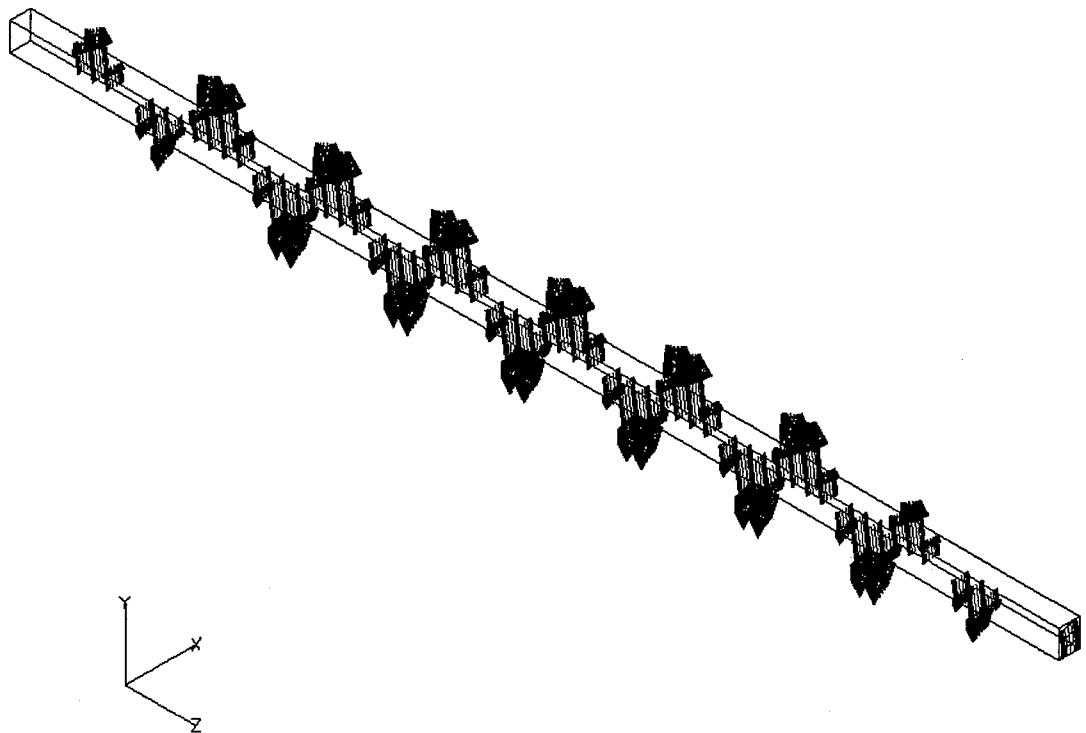


図3-7 初期電場分布

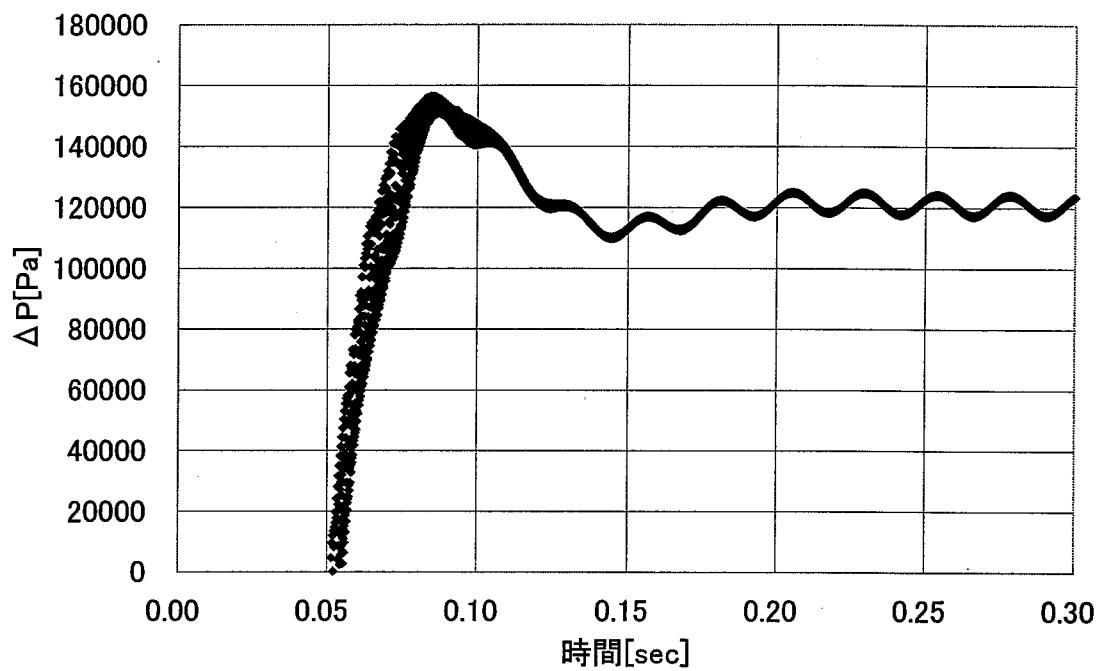


図3-8 圧力差の時系列分布

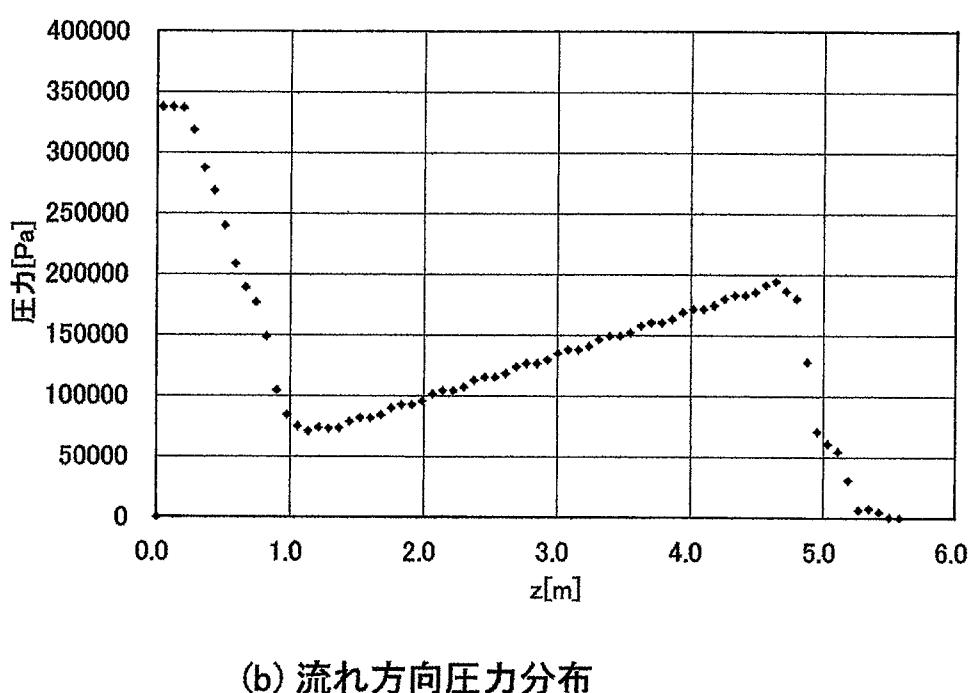
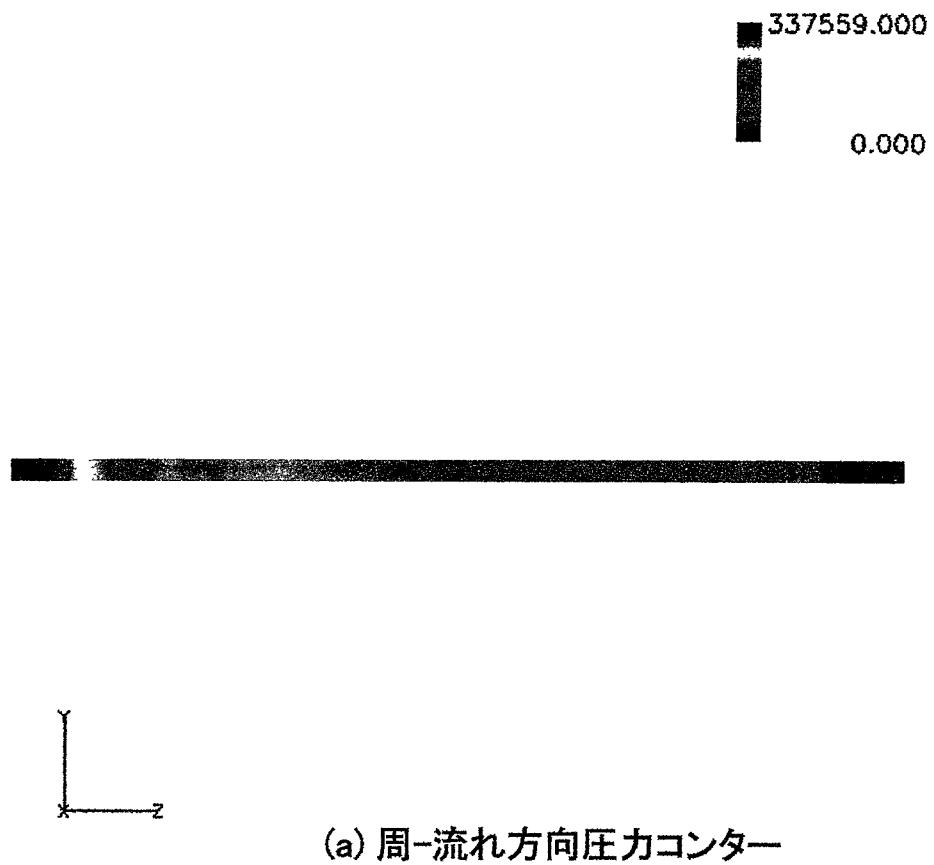


図3-9 流路における圧力分布



図3-10(a) 流路におけるローレンツ力分布(中央部)

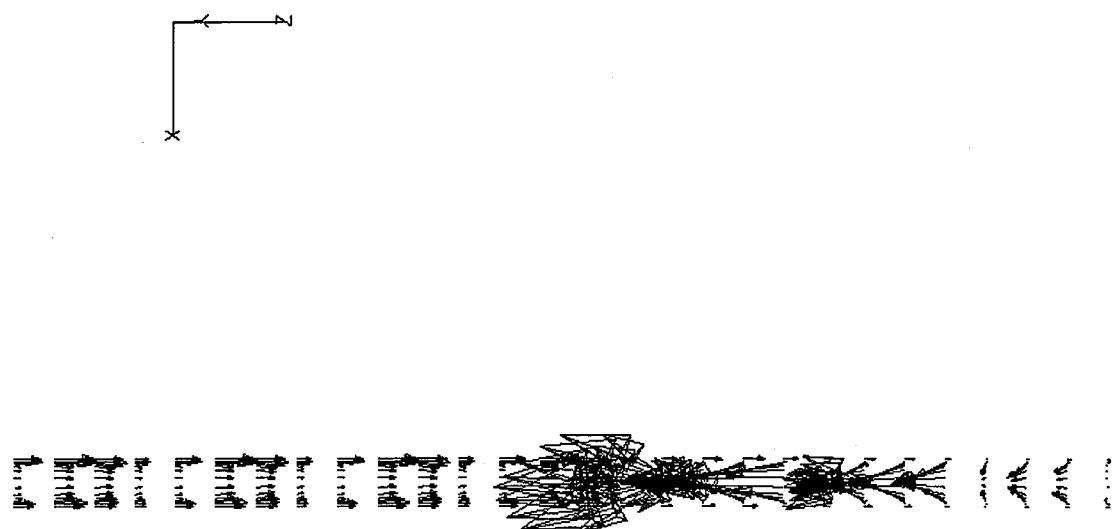


図3-10(b) 流路におけるローレンツカ分布(出口部)

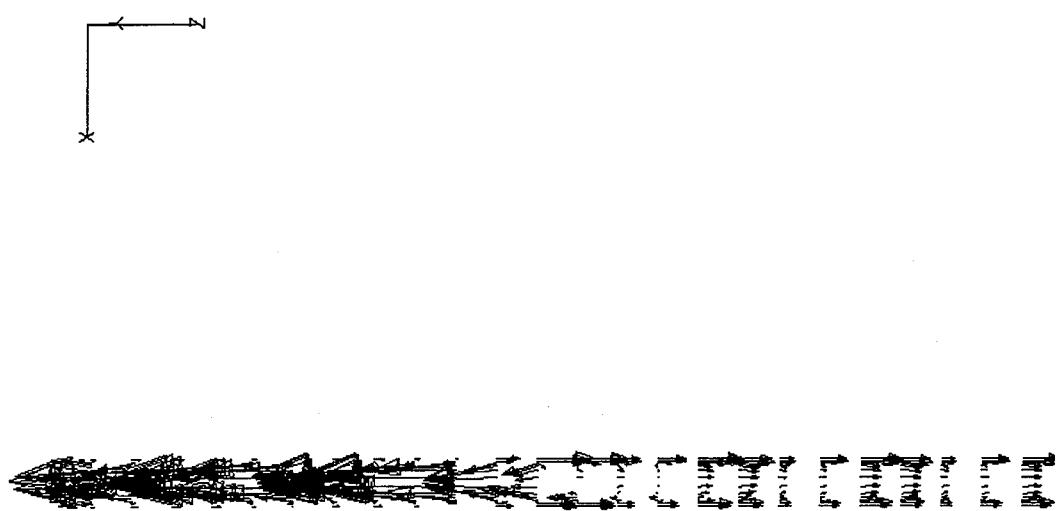


図3-10(c) 流路におけるローレンツ力分布(入口部)

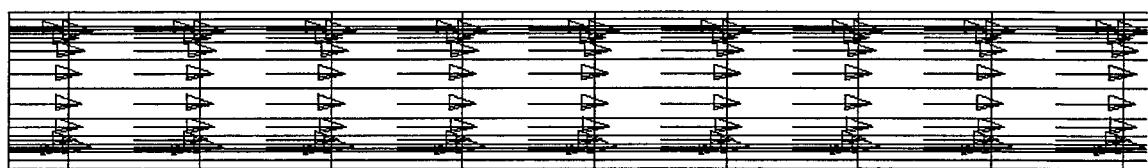
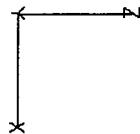


図3-11 径-流れ方向流速分布

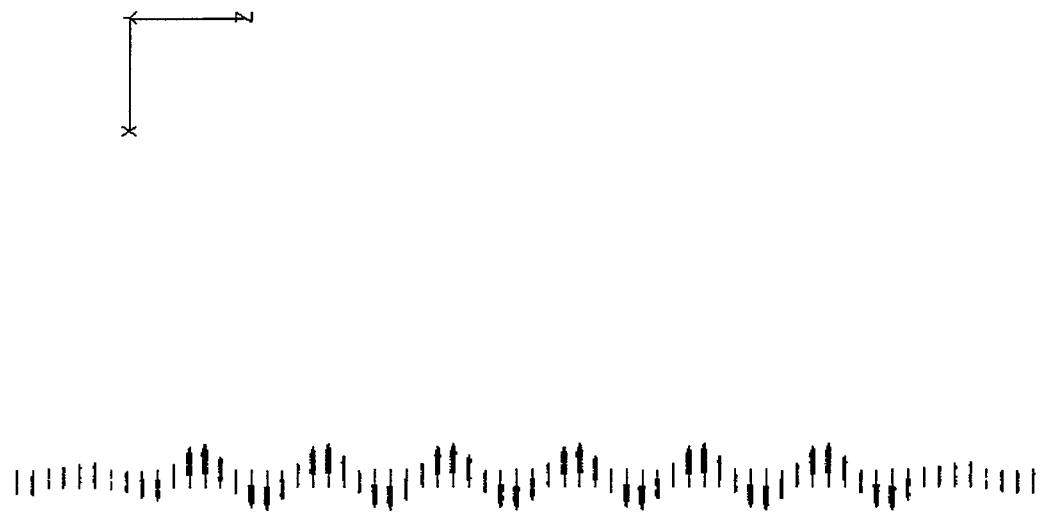


図3-12 径-流れ方向印加磁場分布

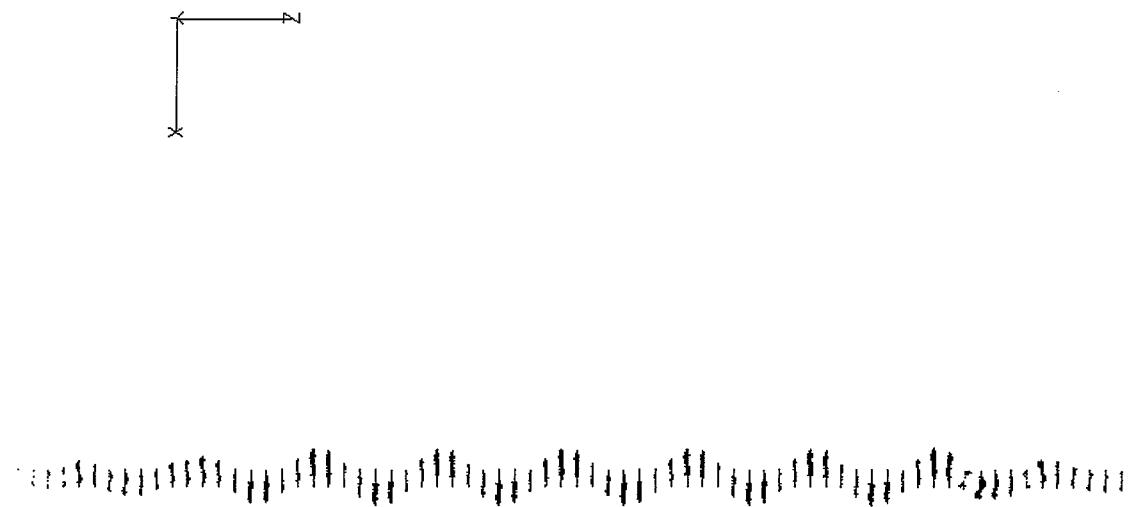


図3-13 径-流れ方向誘導磁場分布

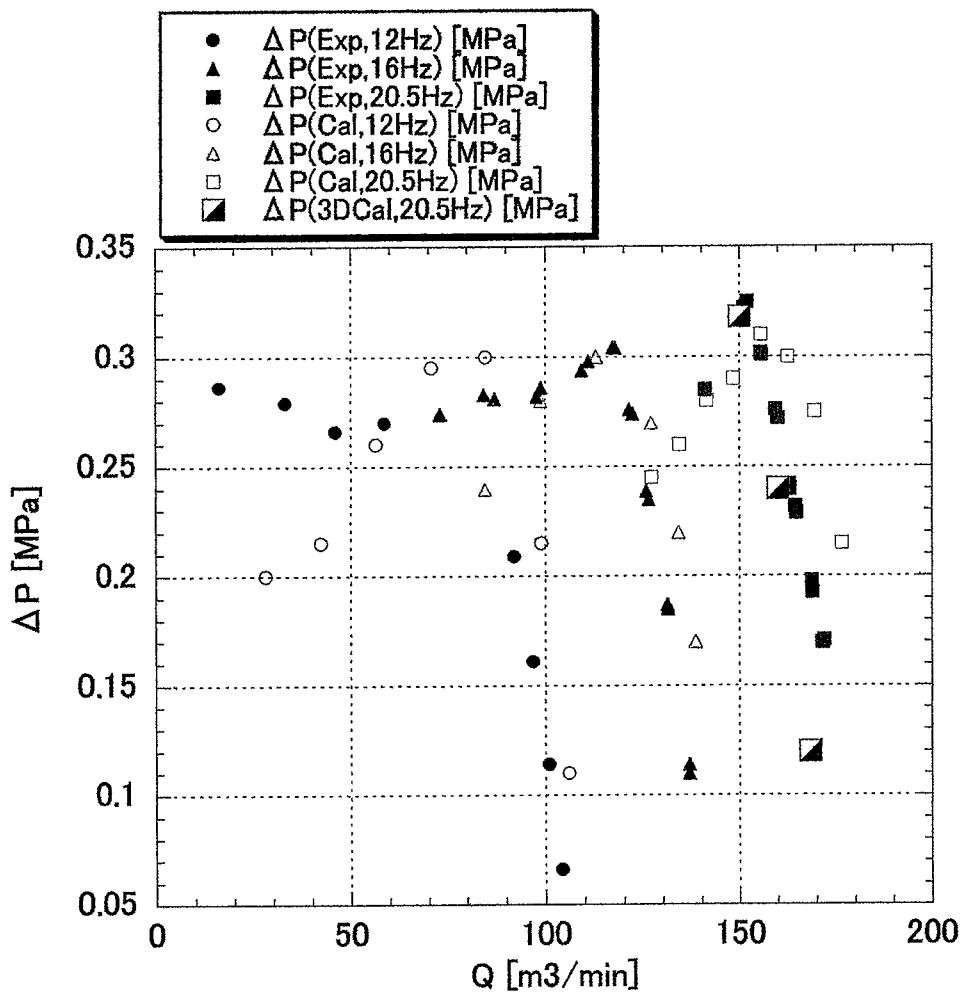


図3-14 流量- 壓力損失(Q-H)特性

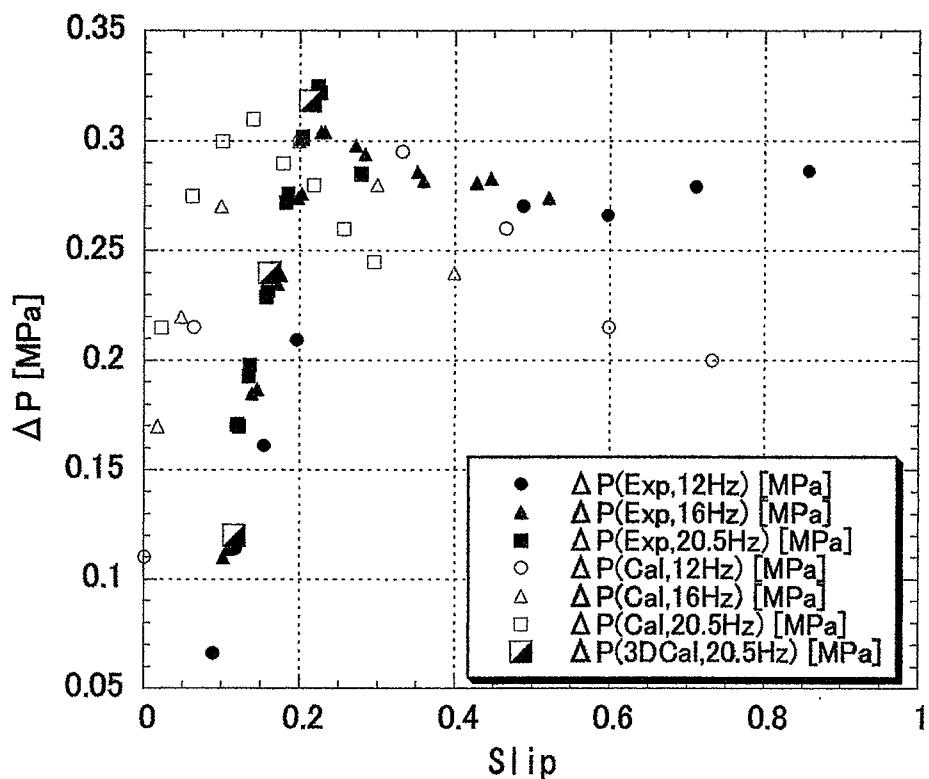


図3-15 スリップ-圧力損失(S-H)特性

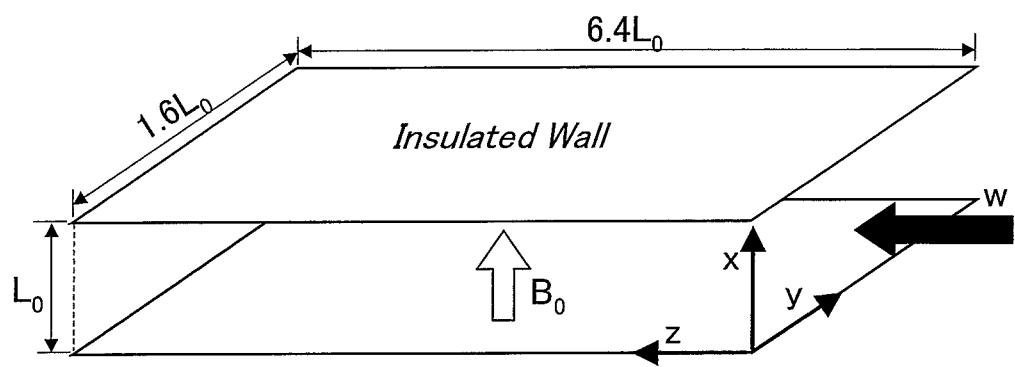
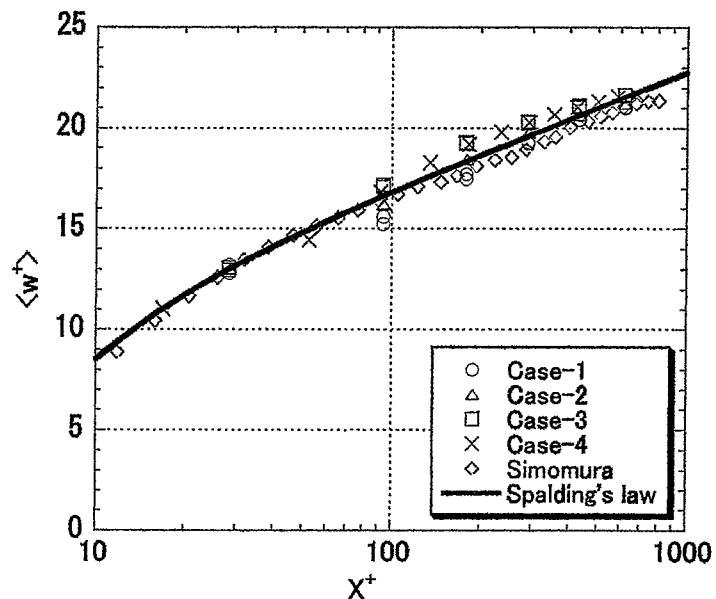
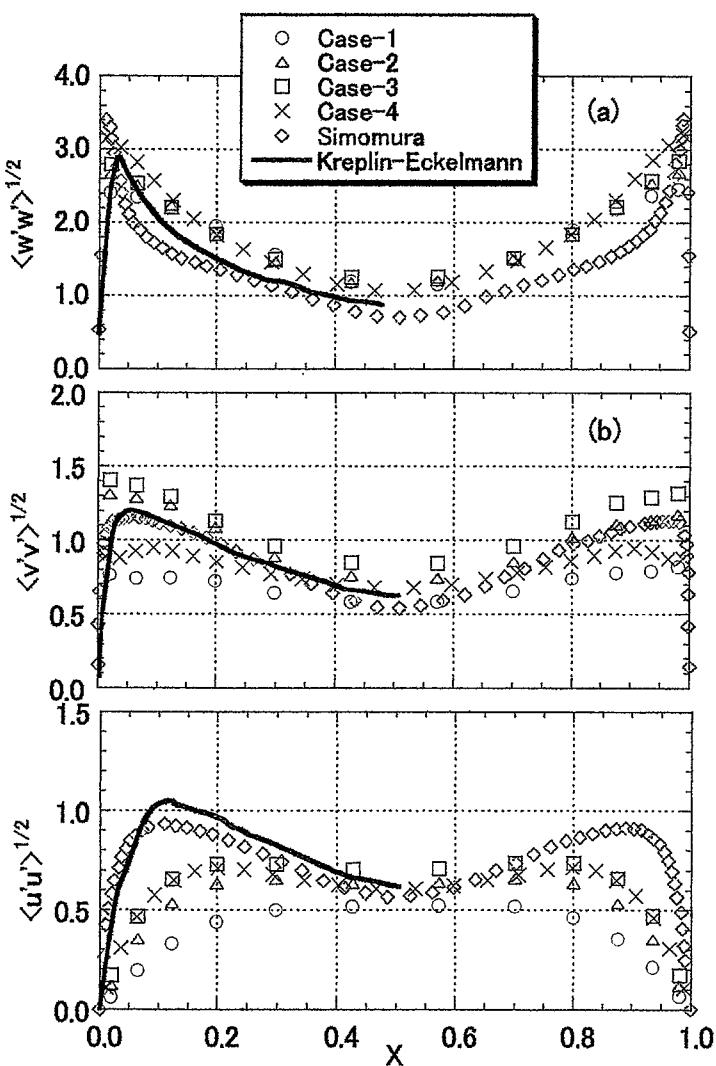


図4-1 解析体系

図4-2 流れ方向の平均流速分布 ( $Ha=0$ )図4-3 乱流強度分布 ( $Ha=0$ )

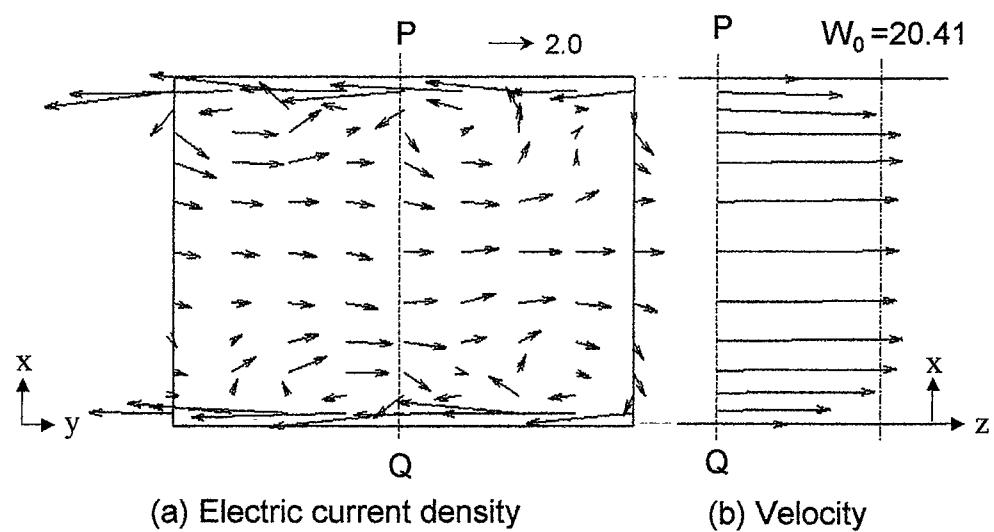


図4-4 x-y平面の電流密度分布及びx-z平面の流速分布( $Ha=52.5$ )

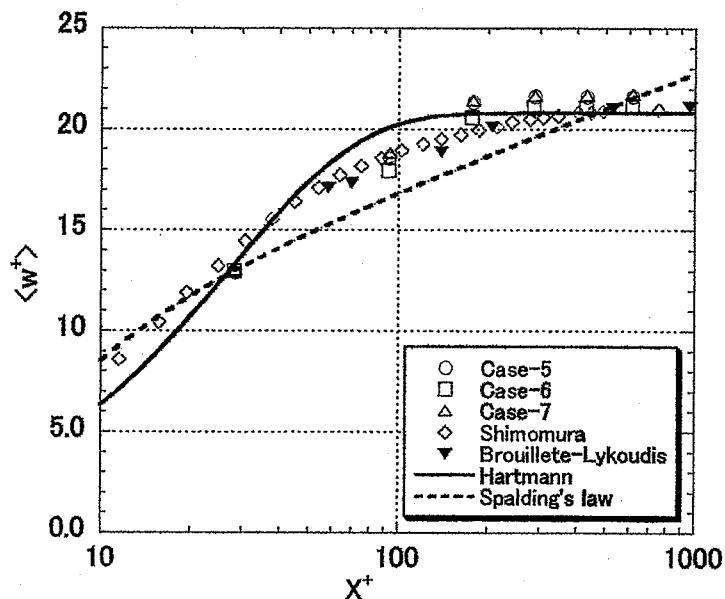


図4-5 流れ方向の平均流速分布(Ha=52.5)

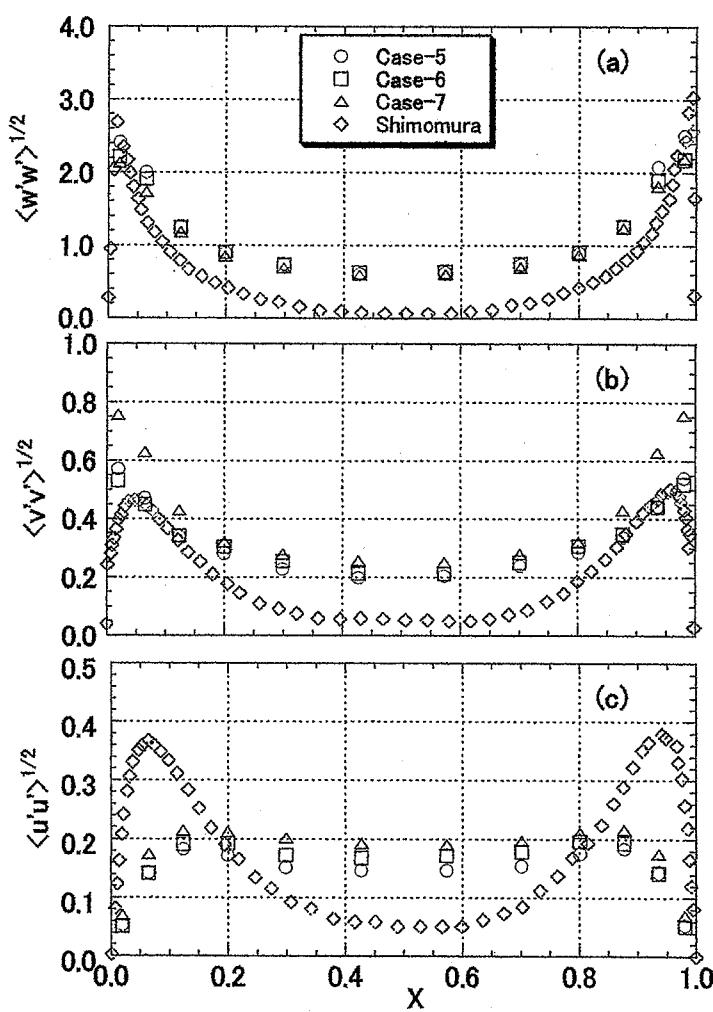


図4-6 乱流強度分布(Ha=52.5)

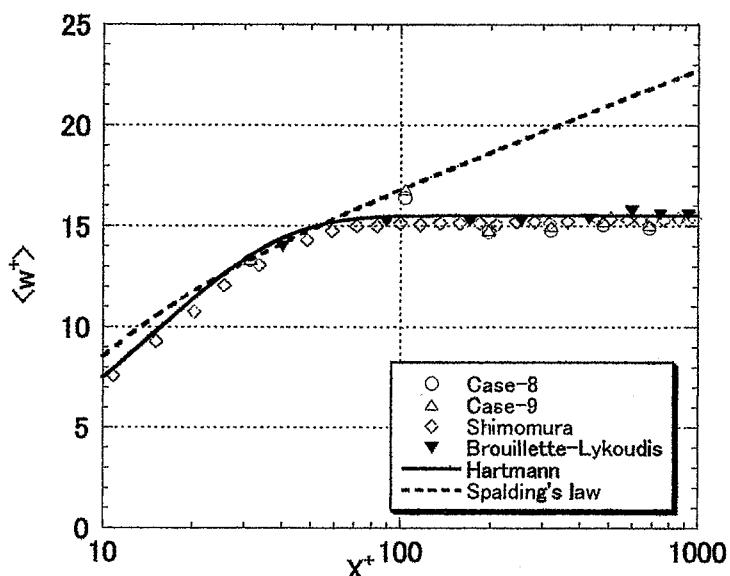


図4-7 流れ方向の平均流速分布(Ha=125)

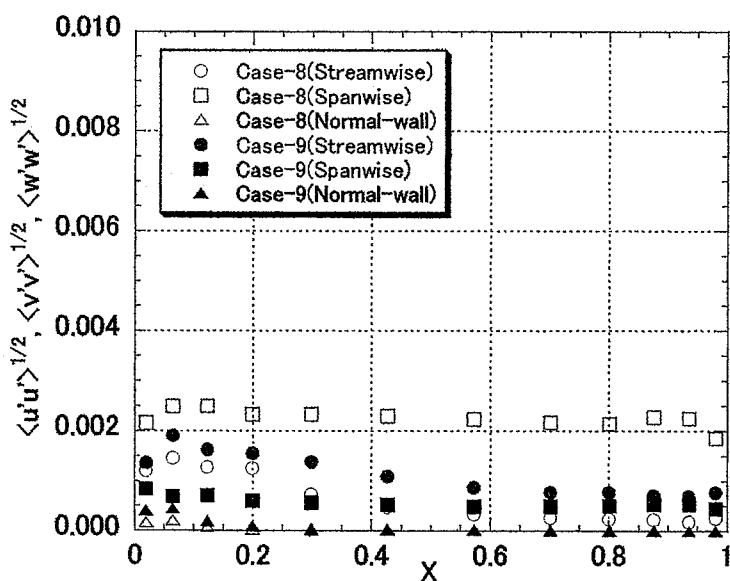


図4-8 乱流強度分布(Ha=125)