

# 炉心変形解析のためのパッド要素の開発(Ⅱ)

— コーナー接触型パッド要素の定式化 —

(研究報告書)

1999年4月

核燃料サイクル開発機構  
大洗工学センター

本資料の全部または一部を複写・複製・転載する場合は、下記にお問い合わせください。

〒319-1194 茨城県那珂郡東海村大字村松4番地49

核燃料サイクル開発機構

技術展開部 技術協力課

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to :

Technical Cooperation Section,

Technology Management Division,

Japan Nuclear Cycle Development Institute

4-49 Muramatsu, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki 319-1194

Japan.

© 核燃料サイクル開発機構 (Japan Nuclear Cycle Development Institute)  
1999

## 炉心変形解析のためのパッド要素の開発 (II)

### —コーナー接触型パッド要素の定式化—

(研究報告書)

月森和之\*

### 要 旨

高速炉炉心の変形挙動を把握することは、過渡事象時の炉心変形に起因する反応度変化の評価、高燃焼度化などにもなう燃料の寿命や集合体引抜き荷重等の評価など、安全性と経済性の面から重要である。さらに炉心変形挙動を解析的に精度良く評価することは、炉心の構造設計自体の高度化に繋がる。

本研究の目的は、炉心変形解析の精度向上のために、隣接する集合体の相互干渉をより正確に取り扱うための集合体パッド要素を開発することにある。すでに、パッドの六角形断面の各辺中央で接触することを仮定したパッド要素を開発しているが、今回は「もんじゅ」の燃料集合体パッドなどで想定されるパッドの六角形断面の各頂点での接触を仮定した「はち巻型パッド要素」の開発を行った。本稿では、このパッド要素の具体的な定式化および要素特性の検証結果を示す。ラップ管をシェル要素でモデル化する詳細解析は問題の規模が大きくなるため計算の実行に非常な困難を伴うが、この要素は従来のはり要素によるモデル化に適合するため、実際的な解析が効率的に実施できる。以下に要点をまとめる。

(1) 炉心変形解析の精度向上のためにパッド要素を提案し、定式化を示した。本要素によって、カップリングを含む面間圧縮剛性、軸方向のパッド間摩擦によって生じる曲げモーメント、熱膨張やスエリング等によって生じる断面の等方的な変形が考慮できる。

(2) 基本的な問題に適用して、パッド要素の機能、特性を検証し、その有用性を示した。この要素をパッド位置に適用することによって、六角形コーナーで接触するタイプのパッドを有する燃料集合体からなる炉心について、容易にパッド部断面の力学的な特性等を考慮できる。

---

\*大洗工学センター システム技術開発部 構造・材料技術開発グループ

## PAD ELEMENT FOR CORE DEFORMATION ANALYSIS (II) - FORMULATION OF CORNER CONTACT TYPE PAD ELEMENT -

Kazuyuki TSUKIMORI\*

### Abstract

It is important to understand the deformation behaviors of FBR core in the aspects of safety and economy, i.e., the reaction change in the transient period, the fuel life expectation, and the removal of subassemblies. Furthermore, the realization of precise analysis of the core deformation behaviors will contribute to sophistication of the core structure design.

The aim of this study is to develop a special 'PAD ELEMENT' which owes the role to treat the interaction between subassemblies at their pads precisely. Another 'PAD ELEMENT', which assumes that contact between neighboring subassemblies occurs at the middle point of pad surfaces, has already been developed. In this study a new 'PAD ELEMENT', which assumes that contacts between neighboring subassemblies occur at the corners of pad, has already been developed. This type of pad is corresponding to that of 'MONJU'. In this report, the detailed formulation of this 'PAD ELEMENT' and the result of its fundamental test calculation are described. This pad element promises practical core deformation analyses because this element is consistent in the modeling by beam elements. The gists are as follows.

- (1) This PAD ELEMENT possesses the functions of the flexibility of pad cross section including coupling effect, bending or torsional moment caused by friction forces between pads and uniform cross sectional deformation at pads such as thermal expansion, swelling, etc.
- (2) The functions and the behaviors of PAD ELEMENT are verified by applying this element to some fundamental problems. The perspective is obtained that the characteristics at pads can be easily considered by adopting PAD ELEMENT to conventional analysis model by beam elements.

---

\* Structure and Material Research Group, System Engineering Technology Division, O-arai Engineering Center, Japan Nuclear Cycle Development Institute (JNC)

目 次

1. 緒言	.....	1
2. コーナー接触型パッド要素の定式化	.....	3
2.1 概要	.....	3
2.2 定式化	.....	3
2.2.1 コーナー接触型パッド要素を構成するはり要素の定式化	.....	3
2.2.2 はり要素座標系からパッド要素座標系への変換	.....	7
2.2.3 六角形リング状部分の剛性マトリクスの組立て	.....	12
2.2.4 パッド要素マトリクス方程式の組み立て	.....	15
3. 要素検証解析	.....	21
3.1 問題の設定	.....	21
3.2 計算条件	.....	24
3.3 計算結果	.....	28
4. 考察	.....	36
4.1 パッド部における頂点間圧縮剛性	.....	36
4.2 パッド部のモデル化の集合体の彎曲挙動に及ぼす影響	.....	38
4.3 パッド断面の等方的変形	.....	39
4.4 既存ソフトへの適用性および計算効率	.....	39
5. 結言	.....	41
謝辞	.....	41
参考文献	.....	42
付録		
A. 剛性マトリクスの縮退	.....	43
B. 検証解析モデルのマトリクス釣合い方程式	.....	57
C. 3頂点均等圧縮荷重に対するたわみ特性	.....	60
補遺 式(2-31)の変換マトリクスに関する考察	.....	65



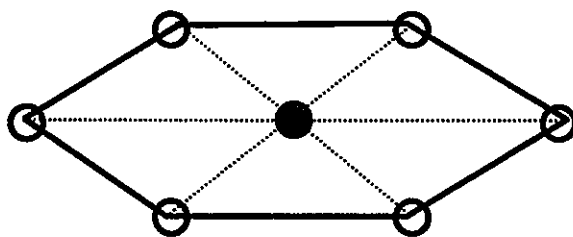
素でモデル化する詳細解析は問題の規模が大きくなるため計算の実行に非常な困難を伴うが、この要素は従来のはり要素によるモデル化に適合するため、実際的な解析が効率的に実施できる。

## 2. コーナー接触型パッド要素の定式化

### 2.1 概要

この特殊要素は、図に示すようにはり要素を正六角形に配置し、中心に節点を置くことで集合体パッド断面の種々の特性を表現するようになっている。具体的には、カップリングを含む面間圧縮剛性、軸方向のパッド間摩擦によって生じる曲げモーメント、熱膨張やスエリング等の断面の等方的な変形が考慮できる。このようなパッド断面の特性を表現する意味ではすでに開発しているパッド要素[8,9]と同じであるが、この要素が「常陽」のように隣接するパッド同士が面の中央（六角形の辺の中点）接触することを前提としているのに対して、本要素は「もんじゅ」のようにフラットなパッド面を想定してパッドのコーナー(六角形の頂点)でパッド同士が接触することを前提に組立てられている。図のパッド要素の白抜き節点で隣接する集合体のパッド要素と接触要素を介して接触する。摩擦によるモーメントは各コーナーの節点と中心の節点との関係で与えられる。熱膨張などによる断面の形状変化は六角形の拡張で表現される。面間圧縮剛性は対向するパッド面のコーナーの2対の節点間の相対変位と他の対のそれらを連成させることで表現される。

本節では、このパッド要素の定式化を具体的に示す。ラップ管をシェル要素でモデル化する詳細解析は問題の規模が大きくなるため計算の実行に非常な困難を伴うが、この要素は従来のはり要素によるモデル化に適合するため、実際的な解析が効率的に実施できるという特徴がある。



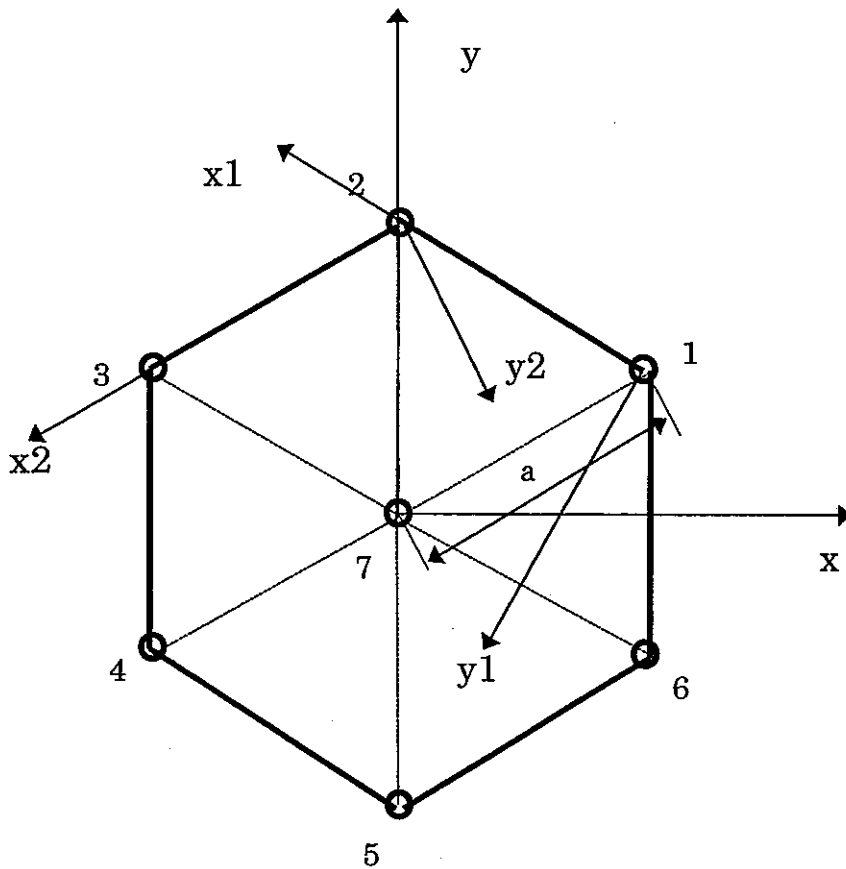
### 2.2 定式化

#### 2.2.1 コーナー接触型パッド要素を構成するはり要素の定式化

図に集合体先端方向から見たパッド要素を示す。まず、パッド断面形状に合わせて6本のはり要素で六角形を形成し、パッド全体の動きを代表させるために六角形の中心に節点を置いてひとつの要素とする。各はり要素の長さを  $a$  とし、パッド要



素の節点については周辺節点を反時計回りに1から6まで、中心を7とする。要素座標系は7と1、6の中点を結ぶ方向をx軸、7と2を結ぶ方向をy軸、集合体の中心軸方向（紙面の裏から表に貫く方向）にz軸をとる。



節点1から2に向かってはりの軸方向をx1軸、これを反時計回りに90度回転させた方向をy1軸、同様に各辺についてxi, yi軸 (i=1,6)を決め、z軸をパッド要素と共通にとると、縮退前の各はり要素の釣合い式は、次式で表される[10]。

$$\{f^{beam}_i\} = [k^{beam}] \{u^{beam}_i\} \quad (2-1)$$

ここで、 $\{f^{beam}_i\}$ 、 $\{u^{beam}_i\}$ 、 $[k^{beam}]$ はそれぞれ、節点荷重ベクトル、節点変位ベクトル、要素剛性マトリクスである。

$$\begin{aligned} \{f^{beam\ i}\}^T &= \left[ f_{xi}^i f_{yi}^i f_{zi}^i m_{xi}^i m_{yi}^i m_{zi}^i : f_{x,i+1}^i f_{y,i+1}^i f_{z,i+1}^i m_{x,i+1}^i m_{y,i+1}^i m_{z,i+1}^i \right] \\ &= \left[ f_i^i m_i^i : f_{i+1}^i m_{i+1}^i \right] \\ &\quad (i = 1,5) \end{aligned} \tag{2-2a}$$

$$\begin{aligned} \{f^{beam\ 6}\}^T &= \left[ f_{x6}^6 f_{y6}^6 f_{z6}^6 m_{x6}^6 m_{y6}^6 m_{z6}^6 : f_{x1}^6 f_{y1}^6 f_{z1}^6 m_{x1}^6 m_{y1}^6 m_{z1}^6 \right] \\ &= \left[ f_6^6 m_6^6 : f_1^6 m_1^6 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{u^{beam\ i}\}^T &= \left[ u_{xi}^i u_{yi}^i u_{zi}^i \theta_{xi}^i \theta_{yi}^i \theta_{zi}^i : u_{x,i+1}^i u_{y,i+1}^i u_{z,i+1}^i \theta_{x,i+1}^i \theta_{y,i+1}^i \theta_{z,i+1}^i \right] \\ &= \left[ u_i^i \theta_i^i : u_{i+1}^i \theta_{i+1}^i \right] \\ &\quad (i = 1,5) \end{aligned} \tag{2-2b}$$

$$\begin{aligned} \{u^{beam\ 6}\}^T &= \left[ u_{x6}^6 u_{y6}^6 u_{z6}^6 \theta_{x6}^6 \theta_{y6}^6 \theta_{z6}^6 : u_{x1}^6 u_{y1}^6 u_{z1}^6 \theta_{x1}^6 \theta_{y1}^6 \theta_{z1}^6 \right] \\ &= \left[ u_6^6 \theta_6^6 : u_1^6 \theta_1^6 \right] \end{aligned}$$

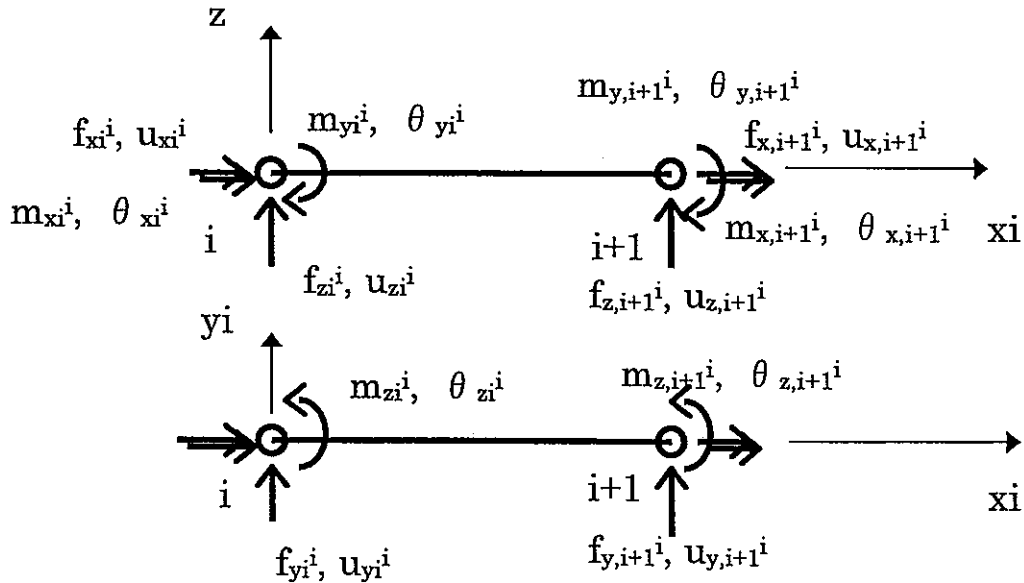
$$\begin{aligned} & \left[ k^{beam} \right] \\ &= \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{Aa^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{Aa} & 0 & -\frac{12I_z}{Aa^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{Aa} \\ 0 & 0 & \frac{12I_y}{Aa^2} & 0 & -\frac{6I_y}{Aa} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12I_y}{Aa^2} & 0 & -\frac{6I_y}{Aa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6I_y}{Aa} & 0 & \frac{4I_y}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_y}{Aa} & 0 & \frac{2I_y}{A} & 0 \\ 0 & \frac{6I_z}{Aa} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{A} & 0 & -\frac{6I_z}{Aa} & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_z}{A} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I_z}{Aa^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{Aa} & 0 & \frac{12I_z}{Aa^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{Aa} \\ 0 & 0 & -\frac{12I_y}{Aa^2} & 0 & \frac{6I_y}{Aa} & 0 & 0 & 0 & \frac{12I_y}{Aa^2} & 0 & \frac{6I_y}{Aa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6I_y}{Aa} & 0 & \frac{2I_y}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_y}{Aa} & 0 & \frac{4I_y}{A} & 0 \\ 0 & \frac{6I_z}{Aa} & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_z}{A} & 0 & -\frac{6I_z}{Aa} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{A} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-2c}$$

$$[k^{beam}] = \begin{bmatrix} [k_{11}^{beam}] & [k_{12}^{beam}] & -[k_{11}^{beam}] & [k_{12}^{beam}] \\ [k_{12}^{beam}]^T & [k_{22}^{beam}] & -[k_{12}^{beam}]^T & [k_{24}^{beam}] \\ -[k_{11}^{beam}] & -[k_{12}^{beam}] & [k_{11}^{beam}] & -[k_{12}^{beam}] \\ [k_{12}^{beam}]^T & [k_{24}^{beam}]^{(T)} & -[k_{12}^{beam}]^T & [k_{22}^{beam}] \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$$[k_{11}^{beam}] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{Aa^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12I_y}{Aa^2} \end{bmatrix}, \quad [k_{12}^{beam}] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6I_z}{Aa} \\ 0 & -\frac{6I_y}{Aa} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-3a \sim 3d)$$

$$[k_{22}^{beam}] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{GJ}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4I_y}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4I_z}{A} \end{bmatrix}, \quad [k_{24}^{beam}] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2I_y}{A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2I_z}{A} \end{bmatrix}$$

ここで、E、G、A、I<sub>z</sub>、I<sub>y</sub>、J はそれぞれ、縦弾性係数、横弾性係数、はりの断面積、z 軸回りおよび y 軸回りの断面 2 次モーメント、断面 2 次極モーメントである。節点荷重ベクトル、節点変位ベクトルの成分については図に示すとおりである。



### 2.2.2 はり要素座標系からパッド要素座標系への変換

次に6本のはり要素を繋ぎ合せてパッド要素を作るために、各はり要素の座標系とパッド要素の座標系間の座標変換を行う。

節点変位ベクトルおよび節点荷重ベクトルは、次式で変換される。

$$\begin{aligned} \{u_i\} &= [T_i] \{U_i\}, & \{f_i\} &= [T_i] \{F_i\} \\ & & (i=1,6) & \end{aligned} \quad (2-4a,b)$$

ここで、 $\{u_i\}, \{U_i\}, \{f_i\}, \{F_i\}$  はそれぞれ各はり要素座標系、パッド要素座標系で見た節点変位ベクトルおよび節点荷重ベクトルである。なお、各ベクトルは、 $x, y, z$  の3成分に対応させている。また、 $[T_i]$  はパッド要素座標系から各はり要素座標系への座標変換マトリクスで、

$$[T_i] = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

$$\theta_1 = \frac{5\pi}{6}, \quad \theta_2 = \frac{7\pi}{6}, \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_4 = \frac{11\pi}{6}, \quad \theta_5 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_6 = \frac{\pi}{2}$$

したがって、

$$\begin{aligned} [T_1] &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & [T_2] &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & [T_3] &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ [T_4] &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & [T_5] &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & [T_6] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-6)$$

言うまでもなく、はり要素座標系からパッド要素座標系への変換は、

$$\begin{aligned} \{U_i\} &= [T_i]^T \{u_i\}, & \{F_i\} &= [T_i]^T \{f_i\} \\ & & (i=1,6) & \end{aligned} \quad (2-7a,b)$$

式(2-15)を拡張した座標変換マトリクスを使って、式(2-2c)をパッド要素座標系での表示に変換する。

$$\{\tilde{F}_i\} = [\tilde{k}^i] \{\tilde{U}_i\} \quad (i=1,6) \quad (2-8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}_i\}^T &= [F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} : F_{x,i+1} \quad F_{y,i+1} \quad F_{z,i+1} \quad M_{x,i+1} \quad M_{y,i+1} \quad M_{z,i+1}] \\ &= [F_i M_i : F_{i+1} M_{i+1}] \\ &(i=1,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}_6\}^T &= [F_{x6} \quad F_{y6} \quad F_{z6} \quad M_{x6} \quad M_{y6} \quad M_{z6} : F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{z1}] \\ &= [F_6 M_6 : F_1 M_1] \end{aligned}$$

(2-9a)

$$\begin{aligned} \{\tilde{U}_i\}^T &= [U_{xi} \quad U_{yi} \quad U_{zi} \quad \Theta_{xi} \quad \Theta_{yi} \quad \Theta_{zi} : U_{x,i+1} \quad U_{y,i+1} \quad U_{z,i+1} \quad \Theta_{x,i+1} \quad \Theta_{y,i+1} \quad \Theta_{z,i+1}] \\ &= [U_i \Theta_i : U_{i+1} \Theta_{i+1}] \\ &(i=1,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{U}_6\}^T &= [U_{x6} \quad U_{y6} \quad U_{z6} \quad \Theta_{x6} \quad \Theta_{y6} \quad \Theta_{z6} : U_{x1} \quad U_{y1} \quad U_{z1} \quad \Theta_{x1} \quad \Theta_{y1} \quad \Theta_{z1}] \\ &= [U_6 \Theta_6 : U_1 \Theta_1] \end{aligned}$$

(2-9b)

$$[\tilde{k}_0^i] = [\tilde{T}_i]^T [k^{beam}] [\tilde{T}_i] \quad (2-10)$$

ここで、

$$[\tilde{T}_i] = \begin{bmatrix} [T_i] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [T_i] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [T_i] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [T_i] \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

式(2-10)は、式(2-3)と式(2-11)から、

$$\begin{aligned}
 \left[ \tilde{k}_0^i \right]_{(12 \times 12)} &= \begin{bmatrix} \left[ \tilde{k}_{11}^i \right] & \left[ \tilde{k}_{12}^i \right] & - \left[ \tilde{k}_{11}^i \right]^T & \left[ \tilde{k}_{12}^i \right] \\ & \left[ \tilde{k}_{22}^i \right] & - \left[ \tilde{k}_{12}^i \right]^T & \left[ \tilde{k}_{24}^i \right] \\ & & \left[ \tilde{k}_{11}^i \right] & - \left[ \tilde{k}_{12}^i \right] \\ & & & \left[ \tilde{k}_{22}^i \right] \end{bmatrix} \\
 & \quad \text{sym.} \\
 &= \begin{bmatrix} \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{11}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] & \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{12}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] & - \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{11}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] & \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{12}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] \\ & \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{22}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] & - \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{12}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] & \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{24}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] \\ & & \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{11}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] & - \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{12}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] \\ & & & \left[ \tilde{T}_i \right]^T \left[ k_{22}^{beam} \right] \left[ \tilde{T}_i \right] \end{bmatrix} \\
 & \quad \text{sym.}
 \end{aligned} \tag{2-12}$$

$$\left[ \tilde{k}_{11}^i \right] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} c_i^2 + \frac{12I_z}{Aa^2} s_i^2 & \left( 1 - \frac{12I_z}{Aa^2} \right) c_i s_i & 0 \\ & s_i^2 + \frac{12I_z}{Aa^2} c_i^2 & 0 \\ & & \frac{12I_y}{Aa^2} \end{bmatrix}$$

sym.

(2-12a, b)

$$\left[ \tilde{k}_{12}^i \right] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{6I_z}{Aa} s_i \\ 0 & 0 & \frac{6I_z}{Aa} c_i \\ \frac{6I_y}{Aa} s_i & -\frac{6I_y}{Aa} c_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \tilde{k}_{22}^i \right] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{GJ}{EA} c_i^2 + \frac{4I_y}{A} s_i^2 & \left( \frac{GJ}{EA} - \frac{4I_y}{A} \right) c_i s_i & 0 \\ & \frac{GJ}{EA} s_i^2 + \frac{4I_y}{A} c_i^2 & 0 \\ & & \frac{4I_z}{A} \end{bmatrix}$$

sym.

(2-12c,d)

$$\left[ \tilde{k}_{24}^i \right] = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{EA} c_i^2 + \frac{2I_y}{A} s_i^2 & -\left( \frac{GJ}{EA} + \frac{2I_y}{A} \right) c_i s_i & 0 \\ & -\frac{GJ}{EA} s_i^2 + \frac{2I_y}{A} c_i^2 & 0 \\ & & \frac{2I_z}{A} \end{bmatrix}$$

sym.

$$\begin{pmatrix} c_i = \cos \theta_i \\ s_i = \sin \theta_i \end{pmatrix}$$

式(2-5)から、

$$c_1 = c_2 = -c_4 = -c_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c_3 = c_6 = 0$$

$$s_1 = -s_2 = -s_4 = s_5 = \frac{1}{2}, \quad s_3 = -s_6 = -1$$
(2-13)

したがって、式(2-13a~d)は、

$$[\tilde{k}_{11}^1] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} 3 + \frac{12I_z}{Aa^2} & -\sqrt{3}\left(1 - \frac{12I_z}{Aa^2}\right) & 0 \\ & 1 + \frac{36I_z}{Aa^2} & 0 \\ sym. & & \frac{48I_y}{Aa^2} \end{bmatrix} = k^* \begin{bmatrix} 3 + 6\alpha & -\sqrt{3}(1 - 6\alpha) & 0 \\ & 1 + 18\alpha & 0 \\ sym. & & 24\beta \end{bmatrix}$$
(2-14a,b)

$$[\tilde{k}_{12}^1] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{12I_z}{Aa} \\ 0 & 0 & -\frac{12\sqrt{3}I_z}{Aa} \\ \frac{12I_y}{Aa} & \frac{12\sqrt{3}I_y}{Aa} & 0 \end{bmatrix} = k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6\alpha \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha \\ 6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}_{22}^1] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} \frac{3GJ}{EA} + \frac{4I_y}{A} & -\sqrt{3}\left(\frac{GJ}{EA} - \frac{4I_y}{A}\right) & 0 \\ & \frac{GJ}{EA} + \frac{12I_y}{A} & 0 \\ sym. & & \frac{16I_z}{A} \end{bmatrix} = k^* a^2 \begin{bmatrix} 3\gamma + 2\beta & -\sqrt{3}(\gamma - 2\beta) & 0 \\ & \gamma + 6\beta & 0 \\ sym. & & 8\alpha \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}_{24}^1] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} -\frac{3GJ}{EA} + \frac{2I_y}{A} & \sqrt{3}\left(\frac{GJ}{EA} + \frac{2I_y}{A}\right) & 0 \\ & -\frac{GJ}{EA} + \frac{6I_y}{A} & 0 \\ sym. & & \frac{8I_z}{A} \end{bmatrix} = k^* a^2 \begin{bmatrix} -3\gamma + \beta & \sqrt{3}(\gamma + \beta) & 0 \\ & -\gamma + 3\beta & 0 \\ sym. & & 4\alpha \end{bmatrix}$$

(2-14c,d)

$$[\tilde{k}_{11}^2] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} 3 + \frac{12I_z}{Aa^2} & \sqrt{3}\left(1 - \frac{12I_z}{Aa^2}\right) & 0 \\ & 1 + \frac{36I_z}{Aa^2} & 0 \\ sym. & & \frac{48I_y}{Aa^2} \end{bmatrix} = k^* \begin{bmatrix} 3 + 6\alpha & \sqrt{3}(1 - 6\alpha) & 0 \\ & 1 + 18\alpha & 0 \\ sym. & & 24\beta \end{bmatrix} \quad (2-15a,b)$$

$$[\tilde{k}_{12}^2] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{12I_z}{Aa} \\ 0 & 0 & -\frac{12\sqrt{3}I_z}{Aa} \\ \frac{12I_y}{Aa} & \frac{12\sqrt{3}I_y}{Aa} & 0 \end{bmatrix} = k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha \\ -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}_{22}^2] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} \frac{3GJ}{EA} + \frac{4I_y}{A} & \sqrt{3}\left(\frac{GJ}{EA} - \frac{4I_y}{A}\right) & 0 \\ & \frac{GJ}{EA} + \frac{12I_y}{A} & 0 \\ sym. & & \frac{16I_z}{A} \end{bmatrix} = k^* a^2 \begin{bmatrix} 3\gamma + 2\beta & \sqrt{3}(\gamma - 2\beta) & 0 \\ & \gamma + 6\beta & 0 \\ sym. & & 8\alpha \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{k}_{24}^2] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} -\frac{3GJ}{EA} + \frac{2I_y}{A} & -\sqrt{3}\left(\frac{GJ}{EA} + \frac{2I_y}{A}\right) & 0 \\ & -\frac{GJ}{EA} + \frac{6I_y}{A} & 0 \\ sym. & & \frac{8I_z}{A} \end{bmatrix} = k^* a^2 \begin{bmatrix} -3\gamma + \beta & -\sqrt{3}(\gamma + \beta) & 0 \\ & -\gamma + 3\beta & 0 \\ sym. & & 4\alpha \end{bmatrix}$$

(2-15c,d)

$$[\tilde{k}_{11}^3] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} \frac{48I_z}{Aa^2} & 0 & 0 \\ & 4 & 0 \\ sym. & & \frac{48I_y}{Aa^2} \end{bmatrix} = k^* \begin{bmatrix} 24\alpha & 0 & 0 \\ & 4 & 0 \\ sym. & & 24\beta \end{bmatrix}$$

(2-16a,b)

$$[\tilde{k}_{12}^3] = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{24I_z}{Aa} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{24I_y}{Aa} & 0 & 0 \end{bmatrix} = k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -12\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{22}^3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} \frac{16I_y}{A} & 0 & 0 \\ \frac{4GJ}{EA} & 0 & 0 \\ sym. & \frac{16I_z}{A} & 0 \end{bmatrix} = k^* a^2 \begin{bmatrix} 8\beta & 0 & 0 \\ 4\gamma & 0 & 0 \\ sym. & 8\alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{2-16c,d}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{24}^3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{4a} \begin{bmatrix} \frac{8I_y}{A} & 0 & 0 \\ -\frac{4GJ}{EA} & 0 & 0 \\ sym. & \frac{8I_z}{A} & 0 \end{bmatrix} = k^* a^2 \begin{bmatrix} 4\beta & 0 & 0 \\ -4\gamma & 0 & 0 \\ sym. & 4\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$k^* = \frac{EA}{4a}, \quad \alpha = \frac{2I_z}{Aa^2}, \quad \beta = \frac{2I_y}{Aa^2}, \quad \gamma = \frac{GJ}{EAa^2}, \tag{2-16e}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{12}^4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tilde{k}_{12}^1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{22}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{24}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{24}^1 \end{bmatrix} \tag{2-17a~d}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{12}^5 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tilde{k}_{12}^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{22}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{24}^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{24}^2 \end{bmatrix} \tag{2-18a~d}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{12}^6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tilde{k}_{12}^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{22}^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{22}^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{k}_{24}^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{24}^3 \end{bmatrix} \tag{2-19a~d}$$

### 2.2.3 六角形リング状部分の剛性マトリクスの組立て

6本のはり要素を六角形のリング状に繋ぎ合わせると、全体のマトリクス方程式は次のようになる。

$$\{\tilde{F}\} = [\tilde{K}_0] \{\tilde{U}\} \tag{2-20}$$

$$\begin{aligned}
 \{\tilde{F}\}^T &= \left\| \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{M}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{F}_2 \\ \tilde{M}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{F}_3 \\ \tilde{M}_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{F}_4 \\ \tilde{M}_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{F}_5 \\ \tilde{M}_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{F}_6 \\ \tilde{M}_6 \end{bmatrix} \right\| \\
 \{\tilde{U}\}^T &= \left\| \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{\Theta}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{U}_2 \\ \tilde{\Theta}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{U}_3 \\ \tilde{\Theta}_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{U}_4 \\ \tilde{\Theta}_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{U}_5 \\ \tilde{\Theta}_5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{U}_6 \\ \tilde{\Theta}_6 \end{bmatrix} \right\|
 \end{aligned} \tag{2-21a,b}$$



$$[K_0] = \begin{bmatrix} [K_0^{11}] & & & & & \\ & [K_0^{12}] & & & & \\ & & [K_0^{13}] & & & \\ & & & [K_0^{14}] & & \\ & & & & [K_0^{15}] & \\ & & & & & [K_0^{16}] \\ & & & & & & [K_0^{22}] \\ & & & & & & & [K_0^{23}] \\ & & & & & & & & [K_0^{25}] \\ & & & & & & & & & [K_0^{26}] \\ & & & & & & & & & & [K_0^{33}] \\ & & & & & & & & & & & [K_0^{36}] \\ & & & & & & & & & & & & [K_0^{11}] \\ & & & & & & & & & & & & & [K_0^{12}] \\ & & & & & & & & & & & & & & [K_0^{22}] \\ & & & & & & & & & & & & & & & [K_0^{23}] \\ & & & & & & & & & & & & & & & & [K_0^{33}] \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

ここで、

$$[K_0^{11}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 15+83\alpha & 5\sqrt{3}(-1+5\alpha) & 0 \\ & 25+33\alpha & 0 \\ sym. & & \frac{160\beta\gamma(15\beta+38\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, \quad [K_0^{12}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -(15+14\alpha) & -\sqrt{3}(-5+36\alpha) & 0 \\ -\sqrt{3}(-5+4\alpha) & -(5+54\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{640\beta\gamma(3\beta+8\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix} \quad (2-28a, b)$$

$$[K_0^{13}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -19\alpha & 11\sqrt{3}\alpha & 0 \\ -11\sqrt{3}\alpha & 21\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{320\beta\gamma(3\beta+10\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, \quad [K_0^{14}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 13\alpha & 5\sqrt{3}\alpha & 0 \\ & 3\alpha & 0 \\ sym. & & -\frac{160\beta\gamma(3\beta+14\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix} \quad (2-28c, d)$$

$$[K_0^{15}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 11\alpha & -21\sqrt{3}\alpha & 0 \\ \sqrt{3}\alpha & -9\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{320\beta\gamma(3\beta+10\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, \quad [K_0^{16}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -74\alpha & 16\sqrt{3}\alpha & 0 \\ -16\sqrt{3}\alpha & 2(-10+3\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{640\beta\gamma(3\beta+8\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix} \quad (2-28e, f)$$

$$[K_0^{22}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 2(15+4\alpha) & 0 & 0 \\ & 2(5+54\alpha) & 0 \\ sym. & & \frac{160\beta\gamma(15\beta+38\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, \quad [K_0^{23}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -(15+14\alpha) & \sqrt{3}(-5+4\alpha) & 0 \\ \sqrt{3}(-5+36\alpha) & -(5+54\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{640\beta\gamma(3\beta+8\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix} \quad (2-28g, h)$$

$$[K_0^{25}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ & 18\alpha & 0 \\ sym. & & -\frac{160\beta\gamma(3\beta+14\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, \quad [K_0^{26}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 11\alpha & -\sqrt{3}\alpha & 0 \\ 21\sqrt{3}\alpha & -9\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{320\beta\gamma(3\beta+10\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix} \quad (2-28i, j)$$

$$[K_0^{33}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 15+83\alpha & -5\sqrt{3}(-1+5\alpha) & 0 \\ & 25+33\alpha & 0 \\ sym. & & \frac{160\beta\gamma(15\beta+38\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, \quad [K_0^{36}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 13\alpha & -5\sqrt{3}\alpha & 0 \\ & 3\alpha & 0 \\ sym. & & -\frac{160\beta\gamma(3\beta+14\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix} \quad (2-28k, l)$$

2.2.4 パッド要素マトリクス方程式の組立て

熱膨張、スエリング等による断面の等方的膨張変位  $w_0$  (六角形 1 辺の長さについての伸び量) を考慮するために、節点変位ベクトルに見かけの変位ベクトルとして与える。つまり、

$$\{U_{1-6}\} \rightarrow \{U_{1-6}\} - w_0 \{\bar{U}_{1-6}\}$$

$$\text{where } \{\bar{U}_{1-6}\}^T = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} 0 : 0 1 0 : -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} 0 : -\frac{\sqrt{3}}{2} -\frac{1}{2} 0 : 0 -1 0 : \frac{\sqrt{3}}{2} -\frac{1}{2} 0 \right] \quad (2-29)$$

とおく。また、節点荷重ベクトルについては、六角形断面の変形に寄与するのは相対的な節点荷重ベクトルであることから、全体の平均的な動きに寄与する節点荷重ベクトル  $\{F_{1-6}^*\}$  を分離する。

$$\{F_{1-6}\} \rightarrow \{F_{1-6}\} + \{F_{1-6}^*\} \quad (2-30)$$

ここで、第 2 項の節点荷重ベクトルは、節点 7 の荷重ベクトルを使って次のように表すものとする。

$$\{F_{1-6}^*\} = [B^*] \{F_7\}$$

(18×6)

$$(2-31)$$

$$\text{where } \{F_7\}^T = [F_{x7} F_{y7} F_{z7} : M_{x7} M_{y7} M_{z7}]$$

$$[B^*]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ & & \frac{3a}{6a} & & & \frac{3a}{6a} & & & \frac{3a}{6a} & & & -\frac{3a}{6a} & & & -\frac{3a}{6a} & & & -\frac{3a}{6a} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6a} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6a} \\ -\frac{1}{12a} & \frac{\sqrt{3}}{12a} & 0 & -\frac{1}{6a} & 0 & 0 & -\frac{1}{12a} & -\frac{\sqrt{3}}{12a} & 0 & \frac{1}{12a} & -\frac{\sqrt{3}}{12a} & 0 & \frac{1}{6a} & 0 & 0 & \frac{1}{12a} & \frac{\sqrt{3}}{12a} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

ここで、式(2-31)の関係は節点 7 の荷重成分を節点 1 から節点 6 にどのように分配するかを規定しているもので、実際には一意に決めることはできない。式(2-31)では後の式(2-34)の第 3 式に示す節点 1 から節点 6 の平均的な動きを求めるためのマ

トリクスの転置を用いている。式(2-31)と式(2-34)で用いる変換マトリクスを共通にすることにより、最終的に導かれるパッド要素の剛性マトリクスが対称となることが保障される。式(2-31)の変換マトリクスに関しては補遺において若干考察を試みる。

式(2-29)および式(2-30)を使うと、式(2-25)は、

$$\{F_{1-6}\} + \{F_{1-6}^*\} = [K_0] (\{U_{1-6}\} - w_0 \{\bar{U}_{1-6}\}) \quad (2-33)$$

一方、節点7の荷重ベクトルを節点7の変位ベクトルと六角形の頂点の平均的な動きとの差を使って便宜的に次のように関係付ける。

$$\begin{aligned} \{F_7\} &= [K^*] (\{U_7\} - \{U^*\}) \\ \text{where } \{U_7\}^T &= [U_{x7} \ U_{y7} \ U_{z7} \ ; \ \Theta_{x7} \ \Theta_{y7} \ \Theta_{z7}] \end{aligned} \quad (2-34)$$

$$\{U^*\} = [B^*]^T \{U_{1-6}\}$$

また、 $[K^*]$ は、荷重を伝達するためのばねの剛性マトリクスで、

$$[K^*] = \begin{bmatrix} K_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_y^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\Theta_x}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\Theta_y}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\Theta_z}^* \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

パッド要素全体の節点変位ベクトルを用いると、式(2-34)の節点変位ベクトルは次のように表せる。

$$\begin{aligned} \{U_7\} - \{U^*\} &= [[I] \ ; \ -[B^*]^T] \{U\} \\ \text{where } [I] &: \text{ unit matrix} \end{aligned} \quad (2-36)$$

$$\{U\}^T = [U_{x7} \ U_{y7} \ U_{z7} \ \Theta_{x7} \ \Theta_{y7} \ \Theta_{z7} \ ; \ U_{x1} \ U_{y1} \ U_{x2} \ U_{y2} \ U_{x3} \ U_{y3} \ U_{x4} \ U_{y4} \ U_{x5} \ U_{y5} \ U_{x6} \ U_{y6}] \quad (2-37)$$

式(2-36)と式(2-34)から、

$$\{F_7\} = [[K^*] \ ; \ -[K^*][B^*]^T] \{U\} \quad (2-38)$$

また、式(2-31)と式(2-38)から、

$$\{F_{1-6}^*\} = [[B^*][K^*] \ ; \ -[B^*][K^*][B^*]^T] \{U\} \quad (2-39)$$

式(2-38)と式(2-39)を式(2-33)に用いると、要素全体の釣合い方程式が以下のように求まる。

$$\{F\} + \{F_0\} = [K]\{U\} \quad (2-40)$$

ここで、

$$\{F\}^T = [F_{x7} \ F_{y7} \ F_{z7} \ M_{x7} \ M_{y7} \ M_{z7}; F_{x1} \ F_{y1} \ F_{z1}; F_{x2} \ F_{y2} \ F_{z2}; F_{x3} \ F_{y3} \ F_{z3}; F_{x4} \ F_{y4} \ F_{z4}; F_{x5} \ F_{y5} \ F_{z5}; F_{x6} \ F_{y6} \ F_{z6}] \quad (2-41)$$

$$\{F_0\} = w_0 \begin{bmatrix} [0] \\ [K_0] \end{bmatrix} \{\bar{U}_{1-6}\} = 4k^* w_0 \{\bar{U}_{1-7}\} \quad (2-42)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}]^T & [K_{22}] \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

なお、 $\{F_0\}$ は、パッド断面の等方的変形による見かけの節点荷重ベクトルであり、導出において次の関係を用いている。

$$[B^*]^T \{\bar{U}_{1-6}\} = \{0\} \quad (2-44)$$

式(2-42)および式(2-43)において、

$$\{\bar{U}_{1-7}\}^T = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ \bar{U}_{1-6} \end{bmatrix} \begin{matrix} (6) \\ (18) \end{matrix} \quad (2-45)$$

$$[K_{11}] = [K^*] \quad (2-46)$$

また、 $k^*$ は、式(2-16e)であり、再記すると、

$$k^* = \frac{EA}{4a}, \quad \alpha = \frac{2I_z}{Aa^2}, \quad \beta = \frac{2I_y}{Aa^2}, \quad \gamma = \frac{GJ}{EAa^2}, \quad (2-16e)$$

$$[K_{12}]^T = -[B^*][K^*]$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} K_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2a}K_{\alpha}^* \\ 0 & K_y^* & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2a}K_{\alpha}^* \\ 0 & 0 & K_z^* & \frac{2}{a}K_{\alpha}^* & -\frac{\sqrt{3}}{a}K_{\theta}^* & 0 \\ K_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a}K_{\alpha}^* \\ 0 & K_y^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z^* & \frac{1}{a}K_{\alpha}^* & 0 & 0 \\ K_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2a}K_{\alpha}^* \\ 0 & K_y^* & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2a}K_{\alpha}^* \\ 0 & 0 & K_z^* & \frac{2}{a}K_{\alpha}^* & \frac{\sqrt{3}}{a}K_{\theta}^* & 0 \\ K_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2a}K_{\alpha}^* \\ 0 & K_y^* & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2a}K_{\alpha}^* \\ 0 & 0 & K_z^* & -\frac{2}{a}K_{\alpha}^* & \frac{\sqrt{3}}{a}K_{\theta}^* & 0 \\ K_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a}K_{\alpha}^* \\ 0 & K_y^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z^* & -\frac{1}{a}K_{\alpha}^* & 0 & 0 \\ K_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2a}K_{\alpha}^* \\ 0 & K_y^* & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2a}K_{\alpha}^* \\ 0 & 0 & K_z^* & -\frac{2}{a}K_{\alpha}^* & -\frac{\sqrt{3}}{a}K_{\theta}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (2-47)$$

$$\begin{aligned} [K_{22}] &= [K_0] + [B^*][K^*][B^*]^T \\ &= [K_0] + \begin{bmatrix} [K_{11}^{(22*)}] & [K_{12}^{(22*)}] \\ [K_{12}^{(22*)}]^T & [K_{11}^{(22*)}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-48)$$

ここで、 $[K_0]$ は、式(2-27)で与えられ、

$$\left[ K_{11}^{(22)} \right] = \frac{1}{36} \begin{bmatrix}
 K_x + \frac{K_\alpha}{4d^2} & \frac{\sqrt{3}}{4d^2} K_\alpha & 0 & K_x + \frac{K_\alpha}{2d^2} & 0 & 0 & K_x + \frac{K_\alpha}{4d^2} & \frac{\sqrt{3}}{4d^2} K_\alpha & 0 \\
 & K_y + \frac{3K_\alpha}{4d^2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2d^2} K_\alpha & K_y & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4d^2} K_\alpha & K_y + \frac{3K_\alpha}{4d^2} & 0 \\
 & & K_z + \frac{4}{d^2} K_\alpha + \frac{3}{d^2} K_\theta & 0 & 0 & K_z + \frac{2}{d^2} K_\alpha & 0 & 0 & K_z + \frac{4}{d^2} K_\alpha - \frac{3}{d^2} K_\theta \\
 & & & K_x + \frac{K_\alpha}{d^2} & 0 & 0 & K_x + \frac{K_\alpha}{2d^2} & \frac{\sqrt{3}}{2d^2} K_\alpha & 0 \\
 & & & & K_y & 0 & 0 & K_y & 0 \\
 & & & & & K_z + \frac{1}{d^2} K_\alpha & 0 & 0 & K_z + \frac{2}{d^2} K_\alpha \\
 & & & & & & K_x + \frac{K_\alpha}{4d^2} & \frac{\sqrt{3}}{4d^2} K_\alpha & 0 \\
 & & & & & & & K_y + \frac{3K_\alpha}{4d^2} & 0 \\
 & & & & & & & & K_z + \frac{4}{d^2} K_\alpha + \frac{3}{d^2} K_\theta
 \end{bmatrix}$$

(2-49a)

$$\left[ K_{12}^{(22)} \right] = \frac{1}{36} \begin{bmatrix}
 K_x - \frac{K_\alpha}{4d^2} & \frac{\sqrt{3}}{4d^2} K_\alpha & 0 & K_x - \frac{K_\alpha}{2d^2} & 0 & 0 & K_x - \frac{K_\alpha}{4d^2} & \frac{\sqrt{3}}{4d^2} K_\alpha & 0 \\
 & K_y - \frac{3K_\alpha}{4d^2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2d^2} K_\alpha & K_y & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4d^2} K_\alpha & K_y - \frac{3K_\alpha}{4d^2} & 0 \\
 & & K_z - \frac{4}{d^2} K_\alpha - \frac{3}{d^2} K_\theta & 0 & 0 & K_z - \frac{2}{d^2} K_\alpha & 0 & 0 & K_z - \frac{4}{d^2} K_\alpha + \frac{3}{d^2} K_\theta \\
 & & & K_x - \frac{K_\alpha}{d^2} & 0 & 0 & K_x - \frac{K_\alpha}{2d^2} & \frac{\sqrt{3}}{2d^2} K_\alpha & 0 \\
 & & & & K_y & 0 & 0 & K_y & 0 \\
 & & & & & K_z - \frac{1}{d^2} K_\alpha & 0 & 0 & K_z - \frac{2}{d^2} K_\alpha \\
 & & & & & & K_x - \frac{K_\alpha}{4d^2} & \frac{\sqrt{3}}{4d^2} K_\alpha & 0 \\
 & & & & & & & K_y - \frac{3K_\alpha}{4d^2} & 0 \\
 & & & & & & & & K_z - \frac{4}{d^2} K_\alpha - \frac{3}{d^2} K_\theta
 \end{bmatrix}$$

(2-49b)

また、式(2-42)において  $w_0$  は、断面の等方的膨張変位であり、たとえば熱膨張の



場合、

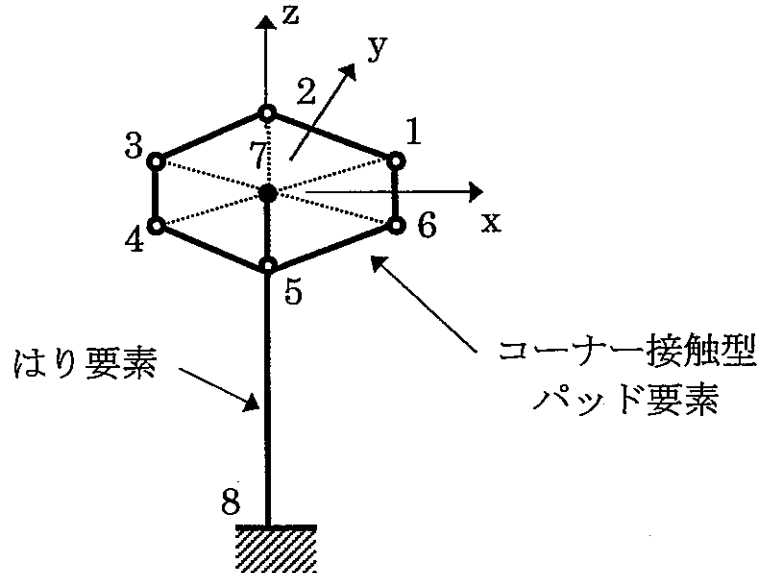
$$w_0 = \alpha \cdot \Delta T \cdot a \quad (2-50)$$

ここで、 $\alpha$ は線膨張係数、 $\Delta T$ は温度変化である。

### 3. 要素検証解析

#### 3.1 問題の設定

コーナー接触型パッド要素の機能特性を検証するために、図に示すような単純な傘状の構造を考える。このモデルは、はり要素を1本繋いでその下端を固定したものである。

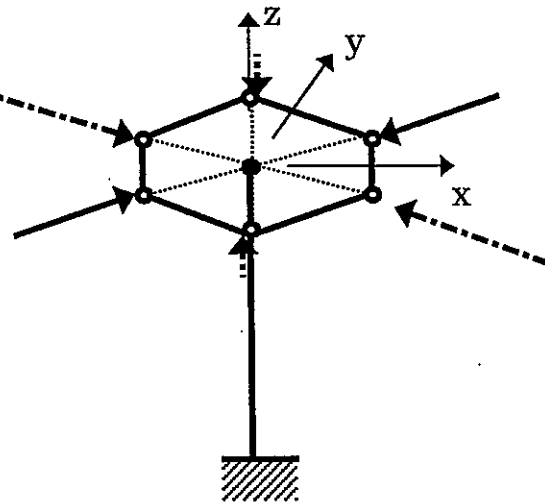


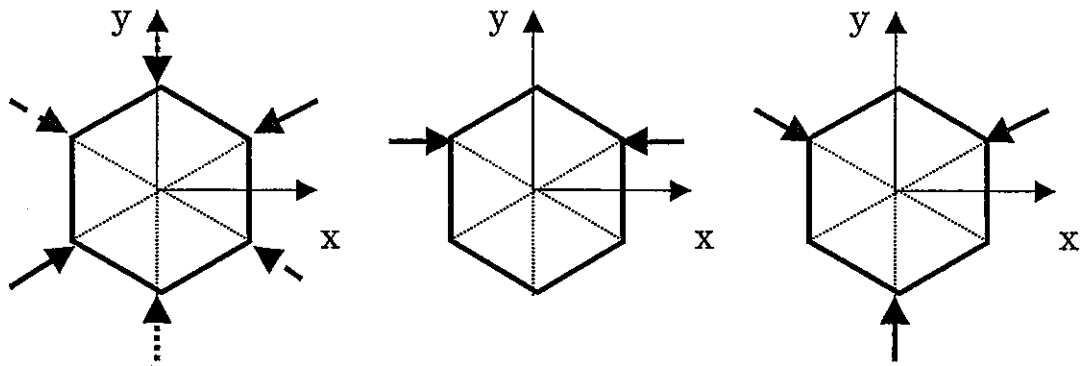
この単純な構造モデルを使って、面間圧縮剛性のカップリング効果、パッド面間距離のモーメントアームとしての効果、熱膨張など等方的な断面変形量、およびこれらを組合わせた場合について調べる。

#### (1) 頂点間圧縮剛性のカップリング効果

図のように、1～3対の頂点間圧縮力を負荷し、理論式[11]による計算値と比較する。

さらに、ひとつ置ききの2頂点間に等しい圧縮荷重が作用する場合[11]およびひとつ置ききの3頂点間に等しい圧縮荷重が作用する場合(付録C参照)について理論式による計算値と比較する。

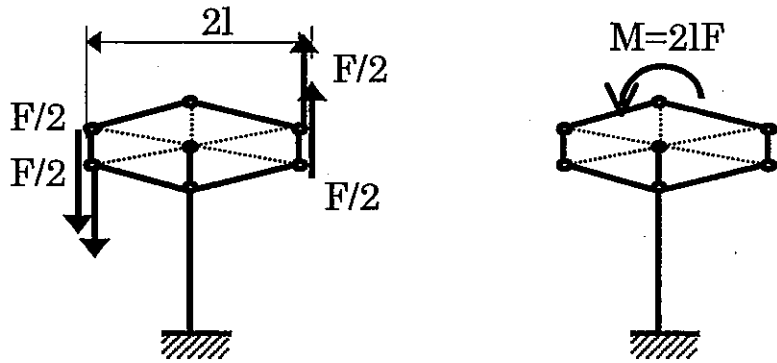




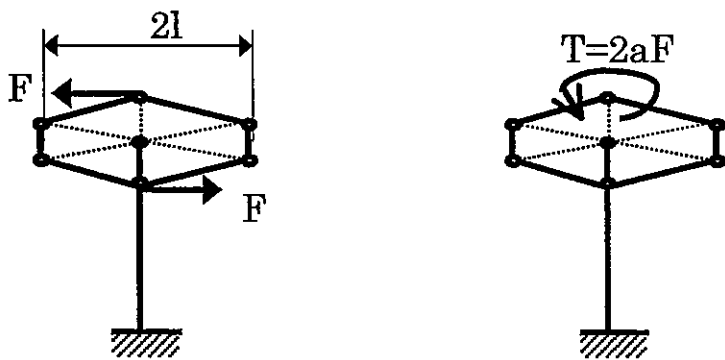
(2) パッド頂点間距離のモーメントアームとしての効果

図のように、曲げモーメント、ねじりモーメント、横荷重、軸荷重に対する構造の変形について、節点1, 4にかかる偶力あるいは平行力として与えた場合と節点7に直接モーメントあるいは荷重として与えた場合を比較する。

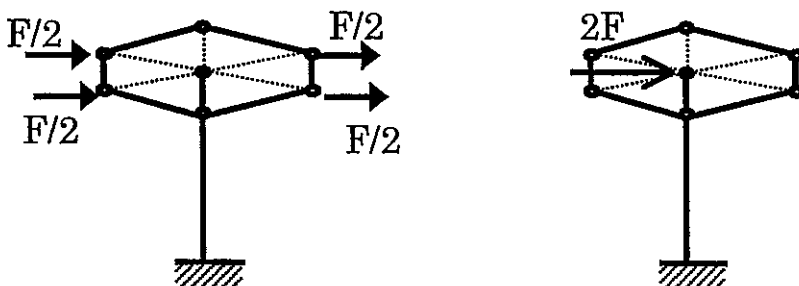
・曲げモーメント



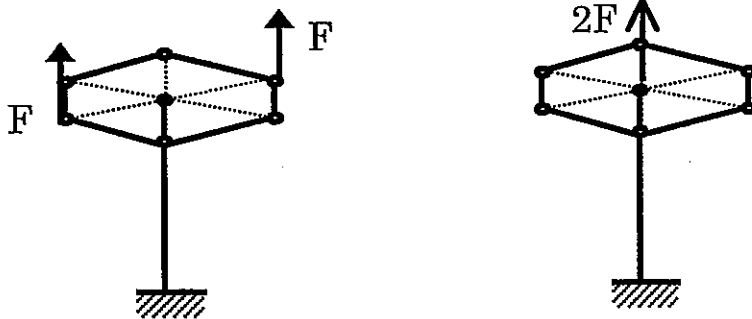
・ねじりモーメント



・横荷重

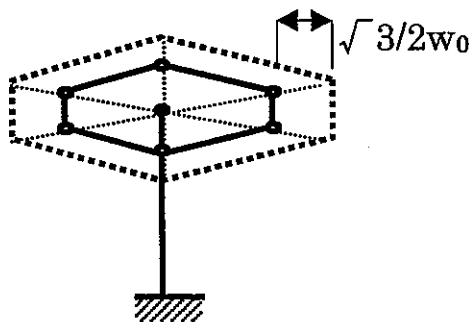


・軸荷重



(3) 等方的な断面変形量

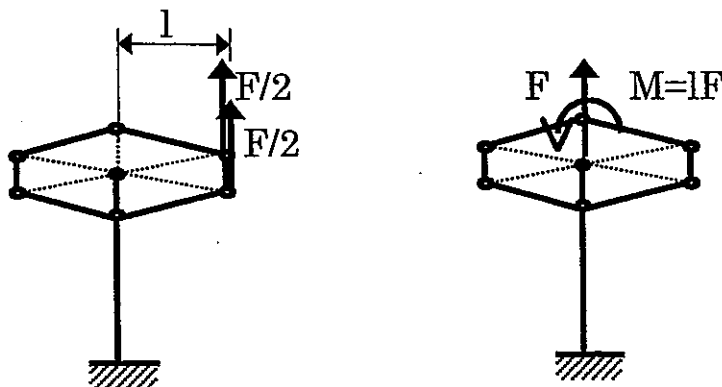
図のように、熱膨張等によってパッド断面が均等に広がる状況をみかけの荷重によって表現できることを確認する。



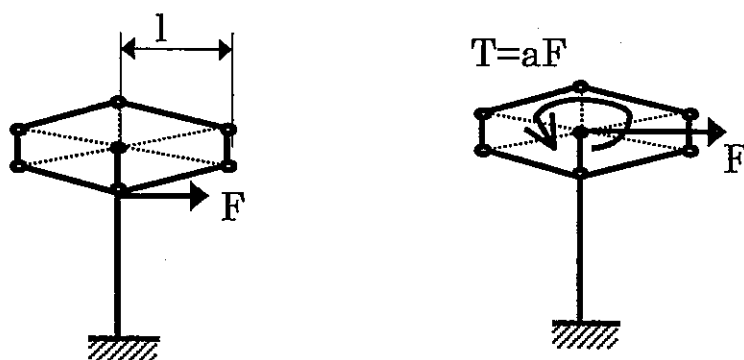
(4) 組合わせ荷重による変形

図のように、曲げモーメントと軸力、ねじりモーメントと横荷重の組合わせによる変形および片押しによる断面変形と横たわみを比較評価する。

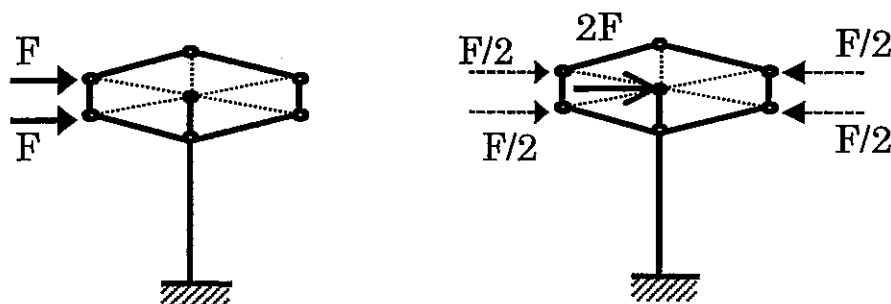
・曲げモーメントと軸力



・ねじりモーメントと横荷重



・片端押し



3.2 計算条件

有限要素法といっても、上記の単純な構造の場合、マトリクス釣合い方程式を陽な形に求めて、逆マトリクス演算ライブラリ等を利用して簡単に計算することができる。このマトリクス釣合い方程式については、付録 B に示す。

計算に用いたパッド要素とはり要素の形状、材料定数等はそれぞれ次のとおりである。

\*パッド要素

- ・パッド対面間距離の半分の長さ ;  $l=53.8\text{mm}$
- ・パッド断面六角形 1 辺の長さ ;  $a=62.1\text{mm}$
- ・パッド部の板厚 ;  $t_p=3\text{mm}$
- ・パッド部の幅 ;  $b=10\text{mm} \quad / \quad 100\text{mm}$
- ・パッド部の縦弾性係数 ;  $E_p=1.52 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$
- ・パッド部のポアソン比 ;  $\nu_p=0.3$
- ・パッド部の横弾性係数 ;  $G_p= E_p / 2(1 + \nu_p) = 0.585 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$
- ・断面積 ;  $A=b t_p=30\text{mm}^2 \quad / \quad 300\text{mm}^2$
- ・断面 2 次モーメント ;  $I_z=b t_p^3/12=22.5\text{mm}^4 \quad / \quad 225\text{mm}^4$

$$I_y = t_p b^3/12 = 250.0 \text{mm}^4 \quad / \quad 2.5 \times 10^5 \text{mm}^4$$

・断面 2 次極モーメント ;  $J = I_z + I_y = 272.5 \text{mm}^4 \quad / \quad 2.50 \times 10^5 \text{mm}^4$

したがって、第 2 章式(2-16e)は、

$$k^* = \frac{EA}{4a} = 1835.7 \text{kg/mm} \quad / \quad 1.8357 \times 10^4 \text{kg/mm}$$

$$\alpha = \frac{2I_z}{Aa^2} = 3.890 \times 10^{-4} \quad / \quad 3.890 \times 10^{-4}$$

$$\beta = \frac{2I_y}{Aa^2} = 4.322 \times 10^{-3} \quad / \quad 4.322 \times 10^{-1}$$

$$\gamma = \frac{GJ}{EAa^2} = 9.059 \times 10^{-4} \quad / \quad 8.318 \times 10^{-2}$$

また、式(2-35)の対角成分を次のように置く。

$$K_x^* = K_y^* = K_z^* = \frac{EA_w}{b} \times 100 \approx 1.70 \times 10^8 \text{kg/mm}$$

$$K_{\Theta x}^* = K_{\Theta y}^* = K_{\Theta z}^* = \frac{EI_w}{b} \times 100 \approx 2.73 \times 10^{11} \text{kg/mm}$$

### \*はり要素

六角形中空断面のラップ間を想定して、

- ・面間距離の半分の長さ ;  $l = 53.8 \text{mm}$
- ・板厚 ;  $t = 3 \text{mm}$

とする。

- ・はり長さ ;  $l_w = 2390 \text{mm}$
- ・断面積 ;  $A_w = 4\sqrt{3}lt = 1118 \text{mm}^2$
- ・断面 2 次モーメント ;  $I_w = \frac{20\sqrt{3}}{9} l^3 t = 1.798 \times 10^6 \text{mm}^4$
- ・断面 2 次極モーメント ;  $J_w = \frac{40\sqrt{3}}{9} l^3 t = 3.596 \times 10^6 \text{mm}^4$
- ・縦弾性係数 ;  $E_w = 1.52 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$
- ・ポアソン比 ;  $\nu_w = 0.3$
- ・横弾性係数 ;  $G_w = E_w / 2(1 + \nu_w) = 0.585 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$

次に前項の問題設定に準じて、荷重条件を以下に記す。

(1) 頂点間圧縮

<1-1> 1 対 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0 \ -1 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ ; \ 0 \ 1 \ 0 \ ; \ 0 \ 0 \ 0 \ ]$$

<1-2> 2 対 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : -0.866 \ -0.5 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0.866 \ -0.5 \ 0 : 0.866 \ 0.5 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : -0.866 \ 0.5 \ 0]$$

<1-3> 3 対 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : -0.866 \ -0.5 \ 0 : 0 \ -1 \ 0 : 0.866 \ -0.5 \ 0 : 0.866 \ 0.5 \ 0 : 0 \ 1 \ 0 : -0.866 \ 0.5 \ 0]$$

<1-4> 2 頂点同時 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : -1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

<1-5> 3 頂点同時 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : -0.866 \ -0.5 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0.866 \ -0.5 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 1 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

(2) はりの変形の比較

<2-1> 曲げモーメント ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.25 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ -0.25 : 0 \ 0 \ -0.25 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.25]$$

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ -538 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

<2-2> ねじりモーメント ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : -1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 1242 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

<2-3> 横荷重 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0.25 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0.25 \ 0 \ 0 : 0.25 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0.25 \ 0 \ 0]$$

$$\{F\}^T = [1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

<2-4> 軸荷重 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.5 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.5 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.333 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.333 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.333 : 0 \ 0 \ 0]$$

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.167 : 0 \ 0 \ 0.167 : 0 \ 0 \ 0.167 : 0 \ 0 \ 0.167 : 0 \ 0 \ 0.167 : 0 \ 0 \ 0.167]$$

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 1 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

(3) 等方的な断面変形 (熱膨張変位)

・線膨張係数 ;  $\alpha = 16. \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$

・温度上昇 ;  $\Delta T = 500^\circ\text{C}$

<3-1>  $w_0 = \alpha \cdot a \cdot \Delta T \cong 0.497 \text{ mm}$

(4) 組合わせ荷重による変形

<4-1> 曲げモーメントと軸荷重 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.5 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0.5]$$

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 1 : 0 \ -538 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

<4-2> ねじりモーメントと横荷重 ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

$$\{F\}^T = [1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 621 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

<4-3> 横押し ;

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0.5 \ 0 \ 0 : 0.5 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$

$$\{F\}^T = [1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : -0.25 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0.25 \ 0 \ 0 : 0.25 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : -0.25 \ 0 \ 0]$$

$$\{F\}^T = [1 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0 : 0 \ 0 \ 0]$$



### 3.3 計算結果

各荷重ケースについて、計算結果あるいは理論値(文献[11]および付録 C)との比較を下の表に示す。

#### (1) 頂点間圧縮

Node	<1-1> 1対		<1-2> 2対		<1-3> 3対		<1-4> 2点		<1-5> 3点	
	計算値	理論値	計算値	理論値	計算値	理論値	計算値	理論値	計算値	理論値
1-1	2.524	2.527	-2.535	-2.527	-0.012	0	-1.952	-1.945	-0.848	-0.842
1-2	-0.003	0	-0.003	0	-0.007	0	-0.279	0	-0.490	-0.486
2-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2-2	-4.381	-4.377	4.368	4.377	-0.014	0	3.083	3.369	0.966	0.973
3-1	-2.524	-2.527	2.535	2.527	0.012	0	1.952	1.945	0.848	0.842
3-2	-0.003	0	-0.003	0	-0.007	0	-0.279	0	-0.490	-0.486
4-1	-2.524	-2.527	2.535	2.527	0.012	0	0.975	0.973	-0.836	-0.842
4-2	0.003	0	0.003	0	0.007	0	-0.279	0	-0.483	-0.486
5-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5-2	4.381	4.377	-4.368	-4.377	0.014	0	-1.965	-1.685	0.979	0.973
6-1	2.524	2.527	-2.535	-2.527	-0.012	0	-0.975	-0.973	0.836	0.842
6-2	0.003	0	0.003	0	0.007	0	-0.279	0	-0.483	-0.486

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2}\text{mm}$ 。

上の表からわかるように、ケース<1-1>~<1-3>および<1-5>は理論値と良く一致することが確かめられた。ケース<1-4>は左右対称条件であり、理論は節点1のy方向変位を0として他の節点の変位を求めたものである。本パッド要素では、パッド断面形状を相対的に変形させる荷重の場合、言い替えると節点7に伝達される荷重が0の場合、各方向の平均変位は0に自動的に補償される。ケース<1-4>の理論値の各節点のy方向変位に計算値の節点1のy方向変位を加えると、節点2と5のy方向変位はそれぞれ3.090, -1.964となり、ほぼ計算値に一致することが確かめられる。

## (2) はりの変形の比較

## ① b=10mm

Node -DOF	<2-1>曲げ		<2-2>ねじり		<2-3>横		<2-4>軸			
	偶力	モーメント	偶力	モーメント	分散	集中	2分散	3分散	6分散	集中
1-1	-0.562	→	-1.016	-0.044	16.651	16.650	0	0	0	→
1-2	0	→	-0.769	0.076	0	→	0	0	0	→
1-3	0.025	→	0	0	-0.562	→	0.517	-0.023	0.014	→
2-1	-0.562	→	-0.579	-0.088	16.649	16.650	0	0	0	→
2-2	0	→	0	0	0	→	0	0	0	→
2-3	0	→	0	0	0	→	-0.237	0.162	0.014	→
3-1	-0.562	→	-1.016	-0.044	16.651	16.650	0	0	0	→
3-2	0	→	0.769	-0.076	0	→	0	0	0	→
3-3	-0.025	→	0	0	0.562	→	-0.237	-0.023	0.014	→
4-1	-0.562	→	1.016	0.044	16.651	16.650	0	0	0	→
4-2	0	→	0.769	-0.076	0	→	0	0	0	→
4-3	-0.025	→	0	0	0.562	→	0.517	0.051	0.014	→
5-1	-0.562	→	0.579	0.088	16.649	16.650	0	0	0	→
5-2	0	→	0	0	0	→	0	0	0	→
5-3	0	→	0	0	0	→	-0.237	-0.134	0.014	→
6-1	-0.562	→	1.016	0.044	16.651	16.650	0	0	0	→
6-2	0	→	-0.769	0.076	0	→	0	0	0	→
6-3	0.025	→	0	0	-0.562	→	-0.237	0.051	0.014	→
7-1	-0.562	→	0	0	16.650	16.650	0	0	0	→
7-2	0	→	0	0	0	→	0	0	0	→
7-3	0	→	0	0	0	→	0.014	0.014	0.014	→

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2}\text{mm}$ 。

## ② b=100mm

Node -DOF	<2-1>曲げ		<2-2>ねじり		<2-3>横		<2-4>軸			
	偶力	モーメント	偶力	モーメント	分散	集中	2分散	3分散	6分散	集中
1-1	-0.562	→	-0.141	-0.044	16.650	→	0	0	→	→
1-2	0	→	-0.009	0.076	0	→	0	0	→	→
1-3	0.025	→	0	0	-0.562	→	0.015	0.014	→	→
2-1	-0.562	→	-0.137	-0.088	16.650	→	0	0	→	→
2-2	0	→	0	0	0	→	0	0	→	→
2-3	0	→	0	0	0	→	0.014	0.014	→	→
3-1	-0.562	→	-0.141	-0.044	16.650	→	0	0	→	→
3-2	0	→	0.009	-0.076	0	→	0	0	→	→
3-3	-0.025	→	0	0	0.562	→	0.014	0.014	→	→
4-1	-0.562	→	0.141	0.044	16.650	→	0	0	→	→
4-2	0	→	0.009	-0.076	0	→	0	0	→	→
4-3	-0.025	→	0	0	0.562	→	0.015	0.014	→	→
5-1	-0.562	→	0.137	0.088	16.650	→	0	0	→	→
5-2	0	→	0	0	0	→	0	0	→	→
5-3	0	→	0	0	0	→	0.014	0.014	→	→
6-1	-0.562	→	0.141	0.044	16.650	→	0	0	→	→
6-2	0	→	-0.009	0.076	0	→	0	0	→	→
6-3	0.025	→	0	0	-0.562	→	0.014	0.014	→	→
7-1	-0.562	→	0	0	16.650	→	0	0	→	→
7-2	0	→	0	0	0	→	0	0	→	→
7-3	0	→	0	0	0	→	0.014	0.014	→	→

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2}\text{mm}$ 。

上の2つの表から、節点7の変位は、節点7に直接集中荷重を加えた場合も節点1から6に分散させて間接的に荷重を加えた場合も等しいことから、正しく荷重が伝達されていることが確認された。節点1から6の変位については、ケース<2-1>、ケース<2-4>の6分散など一部を除いて、直接、間接負荷で差異が生じている。直接節点7に負荷する場合の節点1から6の変位は節点7の変位に付随して生じる剛体変位である。節点1から6に分散させて負荷する場合の変位は、パッド断面の変形と剛体変位が足し合わされたものとなる。このことは、パッド幅(b)を10mmから100mmとしてパッド断面の剛性を増加させた場合、2番目の表に示されるように、直接、間接負荷で差異が大幅に減少していることから明らか

かである。

ここで、1番目の表のケース<2-4>の3分散の場合の軸(z)方向変位について、節点7に対する節点1から6の相対変位をとると次のようになる。

Node-DOF	1-3	2-3	3-3	4-3	5-3	6-3
Uz ( $\times 10^{-2}$ mm)	-0.037	+0.148	-0.037	+0.037	-0.148	+0.037

上の表から、節点ひとつおきに荷重を負荷したにもかかわらず、負荷節点2、4、6と無負荷節点1、3、5の相対変位がそれぞれ等しくなることがわかる。ただし、核変位を荷重とみなした場合、合計はゼロで、x軸およびy軸回りのモーメントは釣合っていることがわかる。このことは、第2章の式(2-31)の関係において式(2-32)のマトリクスを仮定していることに由来すると考えられる。この点に関しては補遺において若干考察する。ただし、検証用に行ったパッド断面の剛性が非常に低い場合にこのような特性が顕著となったが、実態に近い剛性を想定した場合には問題にならないと考えられる。

## (3) 等方的な断面変形 (熱膨張変位)

Node-	<3-1>熱膨張	
DOF	計算値	予測値
1-1	0.430	0.430
1-2	0.249	0.248
2-1	0	0
2-2	0.497	0.497
3-1	-0.430	-0.430
3-2	0.249	0.248
4-1	-0.430	-0.430
4-2	-0.249	-0.248
5-1	0	0
5-2	-0.497	-0.497
6-1	0.430	0.430
6-2	-0.249	-0.248

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、mm。

上の表から、計算値と予測値はよく一致することがわかる。

## (4) 組合わせ荷重による変形

## ① b=10mm

Node- DOF	<4-1>曲げ・軸		<4-2>ねじり・横		<4-3>横押し		
	片側	合成	片側	合成	片側	合成	軸押し
1-1	-0.562	→	16.141	16.628	15.919	15.918	16.650
1-2	0	→	-0.385	0.038	0	→	→
1-3	0.165	0.039	-0.562	→	-0.562	→	→
2-1	-0.562	→	16.363	16.606	16.649	16.650	16.650
2-2	0	→	0	0	1.262	→	0
2-3	-0.237	0.014	0	0	0	→	→
3-1	-0.562	→	16.141	16.628	17.382	→	16.650
3-2	0	→	0.385	-0.038	0	→	→
3-3	0.114	-0.011	0.562	→	0.562	→	→
4-1	-0.562	→	17.157	16.672	17.382	→	16.650
4-2	0	→	0.384	-0.038	0	→	→
4-3	0.114	-0.011	0.562	→	0.562	→	→
5-1	-0.562	→	16.942	16.694	16.649	16.650	16.650
5-2	0	→	0	0	-1.262	→	0
5-3	-0.237	0.014	0	0	0	→	→
6-1	-0.562	→	17.157	16.672	15.919	15.918	16.650
6-2	0	→	-0.384	0.038	0	→	→
6-3	0.165	0.039	-0.562	→	-0.562	→	→
7-1	-0.562	→	16.650	→	16.650	→	→
7-2	0	→	0	→	0	→	→
7-3	0.014	→	0	→	0	→	→

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2}$ mm。

## ② b=100mm

Node- DOF	<4-1>曲げ・軸		<4-2>ねじり・横		<4-3>横押し		
	片側	合成	片側	合成	片側	合成	軸押し
1-1	-0.562	→	16.579	16.628	16.577	→	16.650
1-2	0	→	-0.004	0.038	0	→	→
1-3	0.040	0.039	-0.562	→	-0.562	→	→
2-1	-0.562	→	16.582	16.606	16.650	→	16.650
2-2	0	→	0	0	0.126	→	0
2-3	0.014	→	0	0	0	→	→
3-1	-0.562	→	16.579	16.629	16.723	→	16.650
3-2	0	→	0.004	-0.038	0	→	→
3-3	-0.011	→	0.562	→	0.562	→	→
4-1	-0.562	→	16.720	16.672	16.723	→	16.650
4-2	0	→	0.004	-0.038	0	→	→
4-3	-0.011	→	0.562	→	0.562	→	→
5-1	-0.562	→	16.719	16.694	16.650	→	16.650
5-2	0	→	0	0	-0.126	→	0
5-3	0.014	→	0	0	0	→	→
6-1	-0.562	→	16.720	16.672	16.577	→	16.650
6-2	0	→	-0.004	0.038	0	→	→
6-3	0.040	0.039	-0.562	→	-0.562	→	→
7-1	-0.562	→	16.650	→	16.650	→	→
7-2	0	→	0	→	0	→	→
7-3	0.014	→	0	→	0	→	→

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2}\text{mm}$ 。

上の表から、ケース<4-1>、<4-2>については、パッド1面に作用する荷重によって、複合荷重（曲げモーメントと軸荷重、ねじりモーメントと横荷重）が表現されることが確かめられた。つまり、集合体軸心からパッド面までの距離がモーメントアームとして働く効果が表現できたということである。

ケース<4-3>からは、パッド要素によって、はり要素だけでは表現できなかった、断面の変形と軸心のたわみの複合した変形が現れていることがわかる。そしてこれは、片面押しの荷重に等しい荷重で軸心を押した変形と片面押しの荷重の半分の荷重で対面間を圧縮した変形とを合成した場合にほぼ等しくなっている。このことは、厳密には正しいとは言えないが、軸心のたわみが断面の変形によっ

て減ずる効果を第1次近似的に表現していると言える。

上の2つの表を比較して、パッド幅(b)を10mmから100mmとしてパッド断面の剛性を増加させた場合、2番目の表に示されるように、荷重の負荷の仕方の違いによる差異が大幅に減少しているのは、前述の「(2)はりの変形の比較」の場合と同様の理由による。



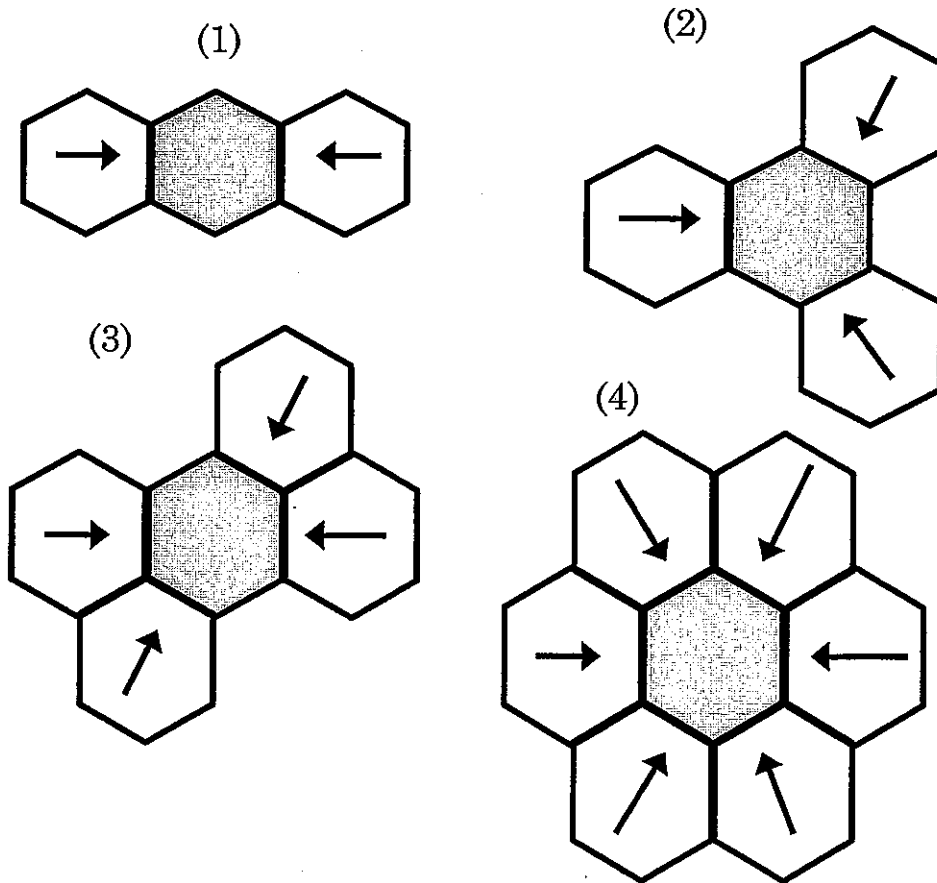
## 4. 考察

### 4.1 パッド部における頂点間圧縮剛性

検証解析ケースの<1-1>~<1-5>の結果からわかるように、本要素はリング状に構成されているため、パッド部の頂点間圧縮剛性ならびにそれらのカップリング効果は自動的に考慮される。また、剛性値については、式(2-16e)においてパラメータを設定することによって、パッドの仕様に応じて与えることができる。

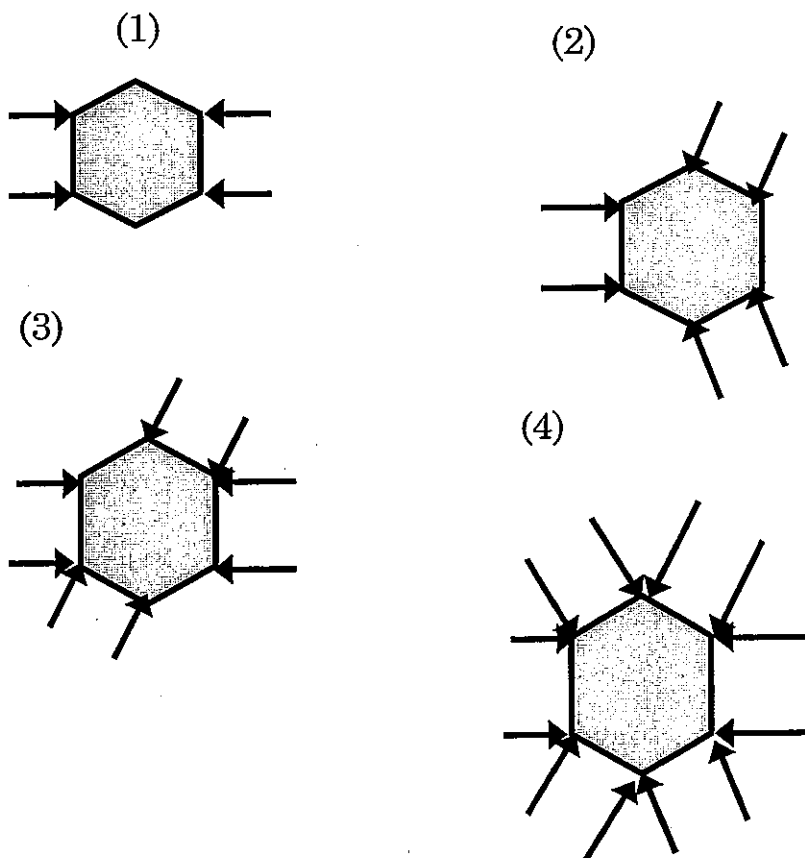
検証解析ではパッド部の頂点に荷重を負荷したが、いわゆる面間圧縮剛性としてとらえた場合、形状不整がなく、荷重が均等に負荷されるものとする、少なくともパッド断面の変形前については、パッド面全体で接触することになる。ここで、パッド面接触のパターンを単純化してみる。

「もんじゅ」の燃料集合体のようなはち巻型のパッドについて、注目する集合体(ハッチング)を中心に、隣接する集合体と等しい接触反力で対称となるパターンを考えると、下記の図のようになる。

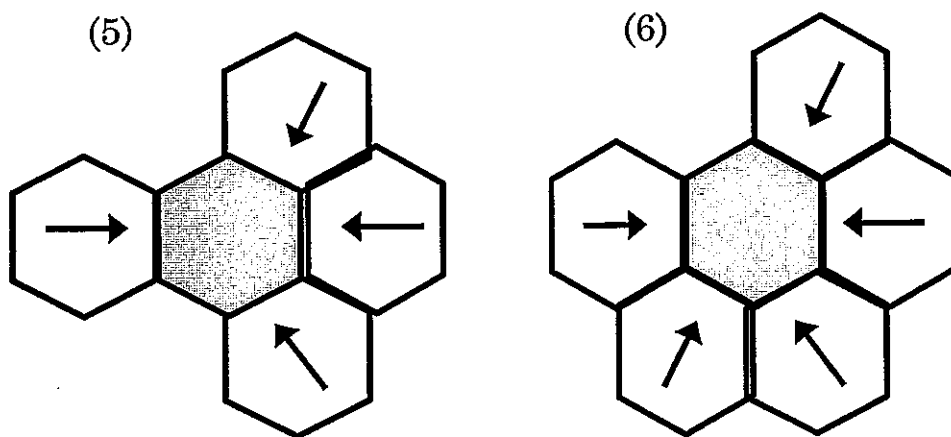


上の (1)以外は非常に剛性が高い。(1)については、挟まれた集合体の接触面は内側にたわむので、変形の進行によってコーナー接触に近い状況が生まれる。(2),

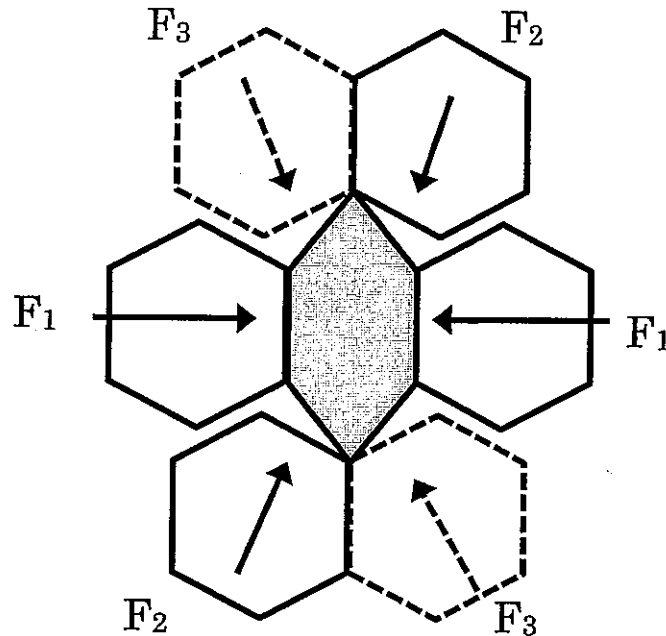
(3)の場合は、非接触パッド面には、理想的には曲げは作用しないのでたわまないことになる。(4)の場合は、全面拘束されており、周囲の集合体についても隣接するもの同士接触していることから、実際には荷重は分散する。このような各パターンについて、剛性特性を考慮した場合、次の図のようにコーナーに作用する荷重として扱うことで合理性を損なうことはないと考えられる。



このほかに次のような状況も考えられるが、これらの場合は、(2), (3)のパターンに1本の集合体が冗長に加わると考えられるのでやはり剛性は高い。



さらに、図(1)の状況を変形まで詳しく見ると、次図(7)のように示すことができる。パッド部断面は両側から圧縮されることによって、圧縮方向と直交する方向に広がる。もし、ここで他方向から1対あるいは2対の集合体ではさまれるとすると、図に示すようにコーナー同士で接触することになる。このような状況では、両者あるいは3者の間にカップリングが生じるが、コーナー接触型のパッド要素で扱うことができる。



(7)パッド間圧縮による断面の変形

#### 4.2 パッド部のモデル化の集合体の彎曲挙動に及ぼす影響

検証解析ケースの<2-3>~<2-4>のような平行する均等荷重については、従来のやり方で一応表現できるが、ケース<2-1>,<2-2>のような偶力によるモーメントは従来のやり方では表せない。ケース<4-1>,<4-2>で単純な複合問題を試みたが、実際の現象は、平行する荷重と偶力の組み合わせによる複合荷重によって生じていると考えられるので、解析精度を上げるためには後者の効果についても考慮しなければならない。

ケース<4-3>はパッド断面の変形と集合体軸心のたわみの重ね合せを想定した問題である。実際には集合体軸心に荷重が作用するのではなく、パッド面を介して作用する。したがって、軸心の変位は同じであっても、パッド頂点の節点の変位については、パッド断面の変形があるため、負荷側の節点変位は中心節点の変位よりも若干大きく、負荷と反対側の節点変位は逆に若干小さくなる。このような効果についても、直接シェル要素でモデル化しないかぎり、従来のはり要素に基づくモデル化では表現できないが、はり要素によるモデル化にパ

ッド要素のような特殊要素を導入することで効率的に表現できる。

なお、パッド要素の面外の曲げ剛性を非常に低く設定した場合、一部の荷重と変位のバランスに不整合を生じることがあるが、実態に近い剛性を設定すればこの点が問題になることはないと考えられる。

#### 4.3 パッド断面の等方的変形

検証解析ケース<3-1>の結果から、パッド要素を用いることによってパッド断面の等方的変形が容易に表せることが確かめられた。従来は熱膨張分をギャップ量のなかで調整するなどの方法がとられているが、本パッド要素では熱膨張によるパッド断面の変位を直接考慮できる。さらに、熱膨張変位だけでなく、スエリング等による等方的な断面変形についても、それらの値を時間、温度、中性子照射量などの関数として与えることにより、みかけの節点荷重として、全体解析のなかに自動的に取込むことができる。

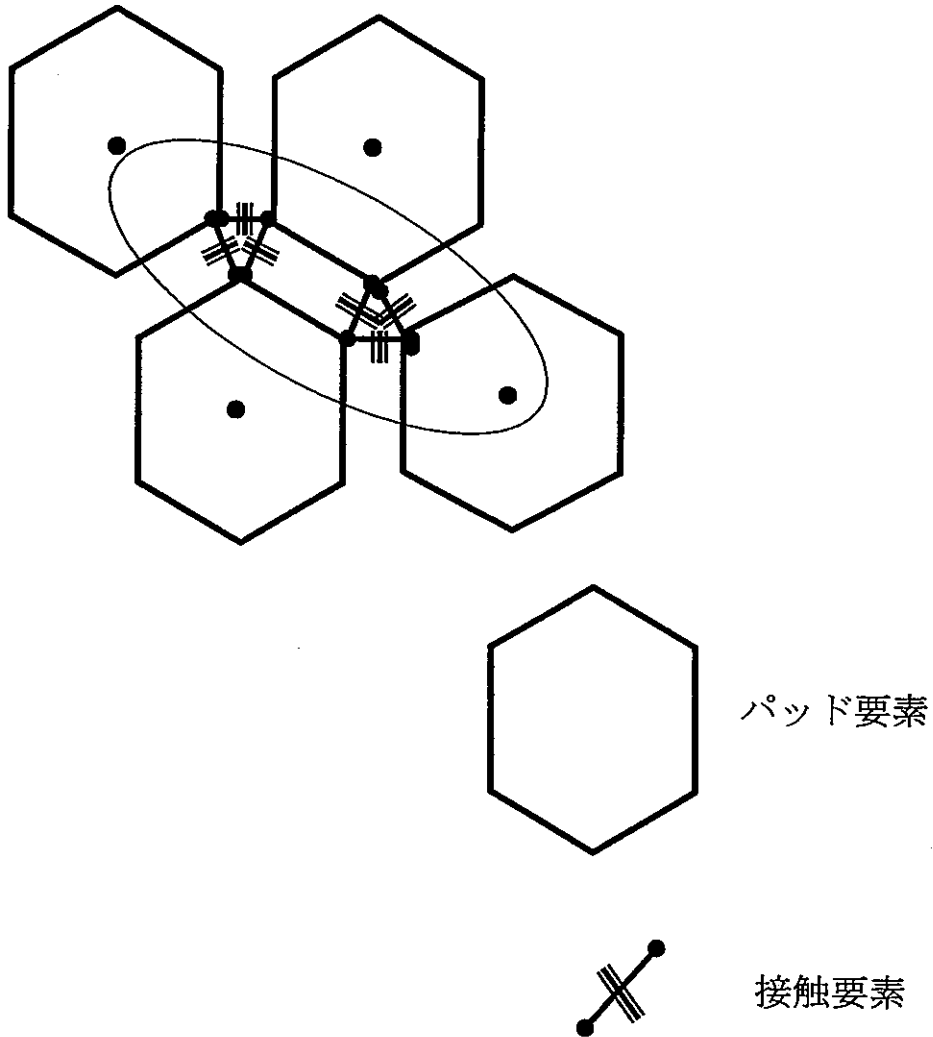
ただし、本パッド要素では、内圧等によりパッド面の中央が膨らむような変形は扱えない（既に提案しているパッド要素は、パッド面中央での接触を前提にしており、表現することが可能である[8,9]）。パッド面の張り出しが顕著となる場合には、パッド面の中央付近で接触する可能性があり、本パッド要素の接触のパターンが異なってくる。このような場合には、むしろ既往のパッド要素を適用すべきである。しかしながら、はち巻型のパッドはラップ管の薄肉部に比べ剛性が高く、このような変形が顕著になることはほとんどないと思われる。

#### 4.4 既存ソフトへの適用性および計算効率

本パッド要素は、中心節点で並進、回転の6自由度を有し、一般の3次元はり要素と整合する。周囲6節点については並進3自由度を有し、隣接するパッド要素同士は、対応する2節点間に自身の2節点の位置関係で接触挙動を表現する接触要素を配置すればよく、何ら特別な措置を要しない（下図参照）。つまり、本パッド要素はこの要素を新しい要素として組込むことさえできれば、既存ソフトのなかで自由に使うことができる。FINASにおいては、ユーザーサブルーチンを使って任意の要素を組込む機能があるので、このサブルーチンのなかでパッド要素を定義するマトリクスを規定することで使用可能である。

パッド要素は基本的に線形特性の要素であり、この要素自身のなかに計算負荷を増大させる要因はないと考えられる。したがって、このパッド要素を使用することによる解析モデルの自由度の増大が計算時間増大のひとつの目安になると考えられる。例えば、1本の集合体をはり要素、20で解析していたとすると、この場合の自由度は126である。これに、上下2つのパッド要素を用

いと、自由度は162となる。ラフな見積りではあるが、3割弱の自由度増となる。しかしながら、既往のパッド要素ではパッド面ひとつに接触要素ひとつであるため、ひとつのパッド要素に接続する接触要素は6個であるのに対して、本パッド要素では各頂点で隣接する2つのパッド要素と接触する可能性があるため、ひとつのパッド要素に接続する接触要素は12個となる（下図参照）。



## 5. 結言

高速炉炉心の変形挙動を把握することは、過渡事象時の炉心変形に起因する反応度変化の評価、高燃焼度化などにもなう燃料の寿命や集合体引抜き荷重等の評価など、安全性と経済性の面から重要である。さらに炉心変形挙動を解析的に精度良く評価することは、炉心の構造設計自体の高度化に繋がる。

本研究の目的は、炉心変形解析の精度向上のために、隣接する集合体の相互干渉をより正確に取り扱うための集合体パッド要素を開発することにある。すでに、パッドの六角形断面の各辺中央で接触することを仮定したパッド要素を開発しているが、今回は「もんじゅ」の燃料集合体パッドなどで想定されるパッドの六角形断面の各頂点での接触を仮定した「はち巻型パッド要素」の開発を行った。本稿では、このパッド要素の具体的な定式化および要素特性の検証結果を示す。ラップ管をシェル要素でモデル化する詳細解析は問題の規模が大きくなるため計算の実行に非常な困難を伴うが、この要素は従来のはり要素によるモデル化に適合するため、実際的な解析が効率的に実施できる。以下に要点をまとめる。

(1) 炉心変形解析の精度向上のためにパッド要素を提案し、定式化を示した。本要素によって、カップリングを含む面間圧縮剛性、軸方向のパッド間摩擦によって生じる曲げモーメント、熱膨張やスエリング等によって生じる断面の等方的な変形が考慮できる。

(2) 基本的な問題に適用して、パッド要素の機能、特性を検証し、その有用性を示した。この要素をパッド位置に適用することによって、六角形コーナーで接触するタイプのパッドを有する燃料集合体からなる炉心について、容易にパッド部断面の力学的な特性等を考慮できる。

以上のように、新しいパッド要素に関して、定式化と基本的な特性の検証を終えた。今後、FINAS のなかでこの要素を使用できる環境を作り、全炉心レベルの炉心変形解析を実施し、従来のはり要素と接触要素のみによる解析結果との比較を行う。

## 謝辞

定式化の確認作業、検証問題の計算等について、アイ・ティ・ジェイ(株) 谷口正氏ならびに東興機械工業(株) 阿部健二氏の協力を得たことを記し、謝意を表する。

参考文献

- [1]K.F.Allbeson, A.F.Curzon and V.F.Efimenko, Specialist Meeting on Predictions and Experience of Core Distortion Behaviour, IWGFR-54, IAEA, Wilmslow(1984).
- [2]Verification and Validation of LMFBR static core mechanics codes Part I, Vienna(1990).
- [3]R.G.Anderson and K.Maeda, Verification and Validation of LMFBR Static Core Mechanics Codes, Report on an IWGFR Co-Ordinated Research Programme, Proc.Int.Conf. by BNES, Inverness, Scotland, 4-6(1990).
- [4]M.Nakagawa, Verification of Core Mechanical Performance Code ARKAS with IAEA Benchmark Problems, J.Nucl.Sci.Technol., Vol.28, No.11, 973-994(1991).
- [5] M.Nakagawa, Verification of Core Mechanical Performance Code ARKAS with IAEA Benchmark Problems,(II), J.Nucl.Sci.Technol., Vol.130, No.5, 389-412(1993).
- [6]Verification and Validation of LMFBR static core mechanics codes Part II, Vienna(1990).
- [7] P.G.Reinhall, K.Park and R.W.Albrecht, Analysis of Mechanical Bowing Phenomena of Fuel Assemblies in Passively Safe Advanced Liquid-Metal Reactors, Nucl. Technol., Vol.83, 197-204(1988).
- [8]月森和之、炉心変形解析精度向上のためのパッド要素の開発、原子力学会「1997 秋の年会」、632(H77)(1997,10).
- [9]K.Tsukimori and H.Negishi, Development of Pad Element for Detailed Core Deformation Analyses and its Verification, SMIRT15(1999)(発表予定)
- [10]例えば、鷺津久一郎他共編、有限要素法ハンドブック I 基礎編、培風館(1981) p218-220.
- [11]月森和之、FINAS による炉心彎曲解析—基本挙動解析—、(1994,9) (PNC TN9410 94-349).

付録A 剛性マトリクスの縮退

第2章の式(2-20)を式(2-24)の条件のもとに縮退する。  
式(2-20)～式(2-24)を以下に再記する。

$$\{\tilde{F}\} = [\tilde{K}_0] \{\tilde{U}\} \tag{2-20}$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{F}\}^T &= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \tilde{F}_1 & \tilde{M}_1 & \tilde{F}_2 & \tilde{M}_2 & \tilde{F}_3 & \tilde{M}_3 & \tilde{F}_4 & \tilde{M}_4 & \tilde{F}_5 & \tilde{M}_5 & \tilde{F}_6 & \tilde{M}_6 \end{array} \right] \\ \{\tilde{U}\}^T &= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \tilde{U}_1 & \tilde{\Theta}_1 & \tilde{U}_2 & \tilde{\Theta}_2 & \tilde{U}_3 & \tilde{\Theta}_3 & \tilde{U}_4 & \tilde{\Theta}_4 & \tilde{U}_5 & \tilde{\Theta}_5 & \tilde{U}_6 & \tilde{\Theta}_6 \end{array} \right] \end{aligned} \tag{2-21a,b}$$

$$[\tilde{K}_0] = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} & \tilde{K}_{13} & \tilde{K}_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_{1,11} & \tilde{K}_{1,12} \\ & \tilde{K}_{22} & \tilde{K}_{23} & \tilde{K}_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{K}_{2,11} & \tilde{K}_{2,12} \\ & & \tilde{K}_{33} & \tilde{K}_{34} & \tilde{K}_{35} & \tilde{K}_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \tilde{K}_{44} & \tilde{K}_{45} & \tilde{K}_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \tilde{K}_{55} & \tilde{K}_{56} & \tilde{K}_{57} & \tilde{K}_{58} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \tilde{K}_{66} & \tilde{K}_{67} & \tilde{K}_{68} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \tilde{K}_{77} & \tilde{K}_{78} & \tilde{K}_{79} & \tilde{K}_{7,10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \tilde{K}_{88} & \tilde{K}_{89} & \tilde{K}_{8,10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \tilde{K}_{99} & \tilde{K}_{9,10} & \tilde{K}_{9,11} & \tilde{K}_{9,12} \\ & & & & & & & & & \tilde{K}_{10,10} & \tilde{K}_{10,11} & \tilde{K}_{10,12} \\ & & & & & & & & & & \tilde{K}_{11,11} & \tilde{K}_{11,12} \\ & & & & & & & & & & & \tilde{K}_{12,12} \end{array} \right] \tag{2-22}$$

*sym*

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_{11}] &= [\tilde{k}_{11}^6] + [\tilde{k}_{11}^1], & [\tilde{K}_{22}] &= [\tilde{k}_{22}^6] + [\tilde{k}_{22}^1] \\ [\tilde{K}_{2i+1,2i+1}] &= [\tilde{k}_{11}^i] + [\tilde{k}_{11}^{i+1}], & [\tilde{K}_{2i+2,2i+2}] &= [\tilde{k}_{22}^i] + [\tilde{k}_{22}^{i+1}] \quad (i=1,5) \\ [\tilde{K}_{12}] &= -[\tilde{k}_{12}^6] + [\tilde{k}_{12}^1], & [\tilde{K}_{2i+1,2i+2}] &= -[\tilde{k}_{12}^i] + [\tilde{k}_{12}^{i+1}] \quad (i=1,5) \\ [\tilde{K}_{2i-1,2i+1}] &= -[\tilde{k}_{11}^i], & [\tilde{K}_{2i-1,2i+2}] &= [\tilde{k}_{12}^i], & [\tilde{K}_{2i,2i+1}] &= -[\tilde{k}_{12}^i]^T, & [\tilde{K}_{2i,2i+2}] &= [\tilde{k}_{24}^i] \quad (i=1,5) \\ [\tilde{K}_{1,11}] &= -[\tilde{k}_{11}^6], & [\tilde{K}_{1,12}] &= -[\tilde{k}_{12}^6], & [\tilde{K}_{2,11}] &= [\tilde{k}_{12}^6]^T, & [\tilde{K}_{2,12}] &= [\tilde{k}_{24}^6] \end{aligned} \tag{2-23}$$



$$\{\tilde{M}_i\} = \{0\}, \quad (i=1,6) \tag{2-24}$$

第2章の式(2-17)~式(2-19)を式(2-23)に用いると、

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_{11}] &= [\tilde{k}_{11}^1] + [\tilde{k}_{11}^3], & [\tilde{K}_{12}] &= [\tilde{k}_{12}^1] + [\tilde{k}_{12}^3], & [\tilde{K}_{13}] &= -[\tilde{k}_{11}^1], & [\tilde{K}_{14}] &= [\tilde{k}_{12}^1], \\ [\tilde{K}_{22}] &= [\tilde{k}_{22}^1] + [\tilde{k}_{22}^3], & [\tilde{K}_{23}] &= -[\tilde{k}_{12}^1]^T = -[\tilde{K}_{14}]^T, & [\tilde{K}_{24}] &= [\tilde{k}_{24}^1], \\ [\tilde{K}_{33}] &= [\tilde{k}_{11}^1] + [\tilde{k}_{11}^2], & [\tilde{K}_{34}] &= -[\tilde{k}_{12}^1] + [\tilde{k}_{12}^2], & [\tilde{K}_{35}] &= -[\tilde{k}_{11}^2], & [\tilde{K}_{36}] &= [\tilde{k}_{12}^2], \\ [\tilde{K}_{44}] &= [\tilde{k}_{22}^1] + [\tilde{k}_{22}^2], & [\tilde{K}_{45}] &= -[\tilde{k}_{12}^2]^T = -[\tilde{K}_{36}]^T, & [\tilde{K}_{46}] &= [\tilde{k}_{24}^2], \\ [\tilde{K}_{55}] &= [\tilde{k}_{11}^2] + [\tilde{k}_{11}^3], & [\tilde{K}_{56}] &= -[\tilde{k}_{12}^2] + [\tilde{k}_{12}^3], & [\tilde{K}_{57}] &= -[\tilde{k}_{11}^3], & [\tilde{K}_{58}] &= [\tilde{k}_{12}^3], \\ [\tilde{K}_{66}] &= [\tilde{k}_{22}^2] + [\tilde{k}_{22}^3], & [\tilde{K}_{67}] &= -[\tilde{k}_{12}^3]^T = -[\tilde{K}_{58}]^T, & [\tilde{K}_{68}] &= [\tilde{k}_{24}^3], \\ [\tilde{K}_{77}] &= [\tilde{K}_{11}], & [\tilde{K}_{78}] &= -[\tilde{K}_{12}], & [\tilde{K}_{79}] &= [\tilde{K}_{13}], & [\tilde{K}_{7,10}] &= -[\tilde{K}_{14}], \\ [\tilde{K}_{88}] &= [\tilde{K}_{22}], & [\tilde{K}_{89}] &= [\tilde{K}_{14}]^T, & [\tilde{K}_{8,10}] &= [\tilde{K}_{24}], \\ [\tilde{K}_{99}] &= [\tilde{K}_{33}], & [\tilde{K}_{9,10}] &= -[\tilde{K}_{34}], & [\tilde{K}_{9,11}] &= [\tilde{K}_{35}], & [\tilde{K}_{9,12}] &= -[\tilde{K}_{36}], \\ [\tilde{K}_{10,10}] &= [\tilde{K}_{44}], & [\tilde{K}_{10,11}] &= [\tilde{K}_{36}]^T, & [\tilde{K}_{10,12}] &= [\tilde{K}_{46}], \\ [\tilde{K}_{11,11}] &= [\tilde{K}_{55}], & [\tilde{K}_{11,12}] &= -[\tilde{K}_{56}], & [\tilde{K}_{1,11}] &= [\tilde{K}_{57}], & [\tilde{K}_{1,12}] &= [\tilde{K}_{58}], \\ [\tilde{K}_{12,12}] &= [\tilde{K}_{66}], & [\tilde{K}_{2,11}] &= -[\tilde{K}_{58}]^T, & [\tilde{K}_{2,12}] &= [\tilde{K}_{68}] \end{aligned} \tag{A-1a}$$

式(A-1a)を用いると、式(2-22)は、

$$[\tilde{K}_0] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{11}] & [\tilde{K}_{12}] & [\tilde{K}_{13}] & [\tilde{K}_{14}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{1,11}] & [\tilde{K}_{58}] \\ & [\tilde{K}_{22}] & -[\tilde{K}_{14}]^T & [\tilde{K}_{24}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[\tilde{K}_{58}]^T & [\tilde{K}_{2,12}] \\ & & [\tilde{K}_{33}] & [\tilde{K}_{34}] & -[\tilde{K}_{35}]^T & [\tilde{K}_{36}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & & & [\tilde{K}_{44}] & -[\tilde{K}_{36}]^T & [\tilde{K}_{46}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & & & & [\tilde{K}_{55}] & [\tilde{K}_{56}] & -[\tilde{K}_{57}]^T & [\tilde{K}_{58}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & & & & & [\tilde{K}_{66}] & -[\tilde{K}_{58}]^T & [\tilde{K}_{68}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & & & & & & [\tilde{K}_{77}] & [\tilde{K}_{78}] & [\tilde{K}_{79}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & & & & & & & [\tilde{K}_{88}] & [\tilde{K}_{8,10}] & [\tilde{K}_{14}]^T & [0] & [0] & [0] \\ & & & & & & & & [\tilde{K}_{9,10}] & [\tilde{K}_{9,11}] & -[\tilde{K}_{36}] & [0] & [0] \\ & & & & & & & & & [\tilde{K}_{10,10}] & [\tilde{K}_{9,11}]^T & -[\tilde{K}_{36}] & [\tilde{K}_{10,12}] \\ & & & & & & & & & & [\tilde{K}_{1,11}] & [\tilde{K}_{1,12}] & [\tilde{K}_{11,12}] \\ & & & & & & & & & & & [\tilde{K}_{12,12}] & [\tilde{K}_{12,12}] \end{bmatrix}$$

*sym*

(A-1b)

式(2-20)を式(2-24)の条件下で以下の2式に分ける。

$$\begin{aligned} \{F\} &= [\tilde{K}_0^{11}] \{U\} + [\tilde{K}_0^{12}] \{\Theta\} \\ \{0\} &= [\tilde{K}_0^{21}] \{U\} + [\tilde{K}_0^{22}] \{\Theta\} \end{aligned} \quad (A-2a,b)$$

$$\begin{aligned} \{F\}^T &= \left[ \begin{array}{cccccc} \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 & \tilde{F}_3 & \tilde{F}_4 & \tilde{F}_5 & \tilde{F}_6 \end{array} \right] \\ \{U\}^T &= \left[ \begin{array}{cccccc} \tilde{U}_1 & \tilde{U}_2 & \tilde{U}_3 & \tilde{U}_4 & \tilde{U}_5 & \tilde{U}_6 \end{array} \right] \\ \{\Theta\}^T &= \left[ \begin{array}{cccccc} \tilde{\Theta}_1 & \tilde{\Theta}_2 & \tilde{\Theta}_3 & \tilde{\Theta}_4 & \tilde{\Theta}_5 & \tilde{\Theta}_6 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (A-3a,b,c)$$

式(A-1)を使うと、

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_0^{11}] &= \left[ \begin{array}{cccccc} [\tilde{K}_{11}] & [\tilde{K}_{13}] & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{1,11}] \\ & [\tilde{K}_{33}] & [\tilde{K}_{35}] & [0] & [0] & [0] \\ & & [\tilde{K}_{55}] & [\tilde{K}_{57}] & [0] & [0] \\ & & & [\tilde{K}_{77}] & [\tilde{K}_{79}] & [0] \\ & & & & [\tilde{K}_{99}] & [\tilde{K}_{9,11}] \\ & & & & & [\tilde{K}_{1,11}] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc} [\tilde{K}_{11}] & [\tilde{K}_{13}] & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{57}] \\ & [\tilde{K}_{33}] & [\tilde{K}_{35}] & [0] & [0] & [0] \\ & & [\tilde{K}_{55}] & [\tilde{K}_{57}] & [0] & [0] \\ & & & [\tilde{K}_{77}] & [\tilde{K}_{13}] & [0] \\ & & & & [\tilde{K}_{33}] & [\tilde{K}_{35}] \\ & & & & & [\tilde{K}_{55}] \end{array} \right] \\ & \quad \text{sym} \qquad \qquad \qquad \text{sym} \\ [\tilde{K}_0^{12}] &= \left[ \begin{array}{cccccc} [\tilde{K}_{12}] & [\tilde{K}_{14}] & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{1,12}] \\ [\tilde{K}_{23}]^T & [\tilde{K}_{34}] & [\tilde{K}_{36}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\tilde{K}_{45}]^T & [\tilde{K}_{56}] & [\tilde{K}_{58}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\tilde{K}_{67}]^T & [\tilde{K}_{78}] & [\tilde{K}_{7,10}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{89}]^T & [\tilde{K}_{9,10}] & [\tilde{K}_{9,12}] \\ [\tilde{K}_{2,11}]^T & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{1,10}]^T & [\tilde{K}_{1,12}] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc} [\tilde{K}_{12}] & [\tilde{K}_{14}] & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{58}] \\ -[\tilde{K}_{14}] & [\tilde{K}_{34}] & [\tilde{K}_{36}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & -[\tilde{K}_{36}] & [\tilde{K}_{56}] & [\tilde{K}_{58}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & -[\tilde{K}_{58}] & -[\tilde{K}_{12}] & -[\tilde{K}_{14}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{14}] & -[\tilde{K}_{34}] & -[\tilde{K}_{36}] \\ -[\tilde{K}_{58}] & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{36}] & -[\tilde{K}_{56}] \end{array} \right] \end{aligned}$$

(A-4a,b)

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_0^{21}] &= [\tilde{K}_0^{12}]^T, \\ [\tilde{K}_0^{22}] &= \left[ \begin{array}{cccccc} [\tilde{K}_{22}] & [\tilde{K}_{24}] & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{2,12}] \\ & [\tilde{K}_{44}] & [\tilde{K}_{46}] & [0] & [0] & [0] \\ & & [\tilde{K}_{66}] & [\tilde{K}_{68}] & [0] & [0] \\ & & & [\tilde{K}_{88}] & [\tilde{K}_{8,10}] & [0] \\ & & & & [\tilde{K}_{1,10}] & [\tilde{K}_{1,12}] \\ & & & & & [\tilde{K}_{2,12}] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc} [\tilde{K}_{22}] & [\tilde{K}_{24}] & [0] & [0] & [0] & [\tilde{K}_{68}] \\ & [\tilde{K}_{44}] & [\tilde{K}_{46}] & [0] & [0] & [0] \\ & & [\tilde{K}_{66}] & [\tilde{K}_{68}] & [0] & [0] \\ & & & [\tilde{K}_{22}] & [\tilde{K}_{24}] & [0] \\ & & & & [\tilde{K}_{44}] & [\tilde{K}_{46}] \\ & & & & & [\tilde{K}_{66}] \end{array} \right] \\ & \quad \text{sym} \qquad \qquad \qquad \text{sym} \end{aligned}$$

(A-4 c, d)

式(A-2b)を式(A-2a)に用いると、

$$\{F\} = [K_0] \{U\} \quad (\text{A-5})$$

$$[K_0] = [\tilde{K}_0^{11}] - [\tilde{K}_0^{12}] [\tilde{K}_0^{22}]^{-1} [\tilde{K}_0^{12}]^T \quad (\text{A-6})$$

式(A-4d)の逆マトリクスが陽なかたちで求まれば、式(A-6)は容易に陽に表せる。

式(A-4)のサブマトリクスを式(A-1)および第2章の式(2-14)～式(2-16)から求めると、

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_{11}] &= k^* \begin{bmatrix} 3+30\alpha & -\sqrt{3}(1-6\alpha) & 0 \\ & 5+18\alpha & 0 \\ \text{sym.} & & 48\beta \end{bmatrix}, & [\tilde{K}_{13}] &= k^* \begin{bmatrix} -3-6\alpha & \sqrt{3}(1-6\alpha) & 0 \\ & -1-18\alpha & 0 \\ \text{sym.} & & -24\beta \end{bmatrix} \\ [\tilde{K}_{33}] &= k^* \begin{bmatrix} 6+12\alpha & 0 & 0 \\ & 2+36\alpha & 0 \\ \text{sym.} & & 48\beta \end{bmatrix}, & [\tilde{K}_{35}] &= k^* \begin{bmatrix} -3-6\alpha & -\sqrt{3}(1-6\alpha) & 0 \\ & -1-18\alpha & 0 \\ \text{sym.} & & -24\beta \end{bmatrix} \\ [\tilde{K}_{55}] &= k^* \begin{bmatrix} 3+30\alpha & \sqrt{3}(1-6\alpha) & 0 \\ & 5+18\alpha & 0 \\ \text{sym.} & & 48\beta \end{bmatrix}, & [\tilde{K}_{57}] &= k^* \begin{bmatrix} -24\alpha & 0 & 0 \\ & -4 & 0 \\ \text{sym.} & & -24\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_{12}] &= k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha \\ -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix}, & [\tilde{K}_{14}] &= k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6\alpha \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha \\ 6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix} \\ [\tilde{K}_{34}] &= k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -12\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [\tilde{K}_{36}] &= k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha \\ -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix} \\ [\tilde{K}_{56}] &= k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha \\ -6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix}, & [\tilde{K}_{58}] &= k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -12\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{aligned} & \left[ \tilde{K}_{22} \right] = k^* a^2 \begin{bmatrix} 3\gamma + 10\beta & -\sqrt{3}(\gamma - 2\beta) & 0 \\ & 5\gamma + 6\beta & 0 \\ \text{sym.} & & 16\alpha \end{bmatrix}, \quad \left[ \tilde{K}_{24} \right] = k^* a^2 \begin{bmatrix} -3\gamma + \beta & \sqrt{3}(\gamma + \beta) & 0 \\ & -\gamma + 3\beta & 0 \\ \text{sym.} & & 4\alpha \end{bmatrix} \\ & \left[ \tilde{K}_{44} \right] = k^* a^2 \begin{bmatrix} 6\gamma + 4\beta & 0 & 0 \\ & 2\gamma + 12\beta & 0 \\ \text{sym.} & & 16\alpha \end{bmatrix}, \quad \left[ \tilde{K}_{46} \right] = k^* a^2 \begin{bmatrix} -3\gamma + \beta & -\sqrt{3}(\gamma + \beta) & 0 \\ & -\gamma + 3\beta & 0 \\ \text{sym.} & & 4\alpha \end{bmatrix} \\ & \left[ \tilde{K}_{66} \right] = k^* a^2 \begin{bmatrix} 3\gamma + 10\beta & \sqrt{3}(\gamma - 2\beta) & 0 \\ & 5\gamma + 6\beta & 0 \\ \text{sym.} & & 16\alpha \end{bmatrix}, \quad \left[ \tilde{K}_{68} \right] = k^* a^2 \begin{bmatrix} 4\beta & 0 & 0 \\ & -4\gamma & 0 \\ \text{sym.} & & 4\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A-8} \\
 & \tag{A-9}
 \end{aligned}$$

式(A-4d)の逆マトリクスを

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & [S_{13}] & [S_{14}] & [S_{15}] & [S_{16}] \\ & [S_{22}] & [S_{23}] & [S_{24}] & [S_{25}] & [S_{26}] \\ & & [S_{33}] & [S_{34}] & [S_{35}] & [S_{36}] \\ & & & [S_{44}] & [S_{45}] & [S_{46}] \\ \text{sym.} & & & & [S_{55}] & [S_{56}] \\ & & & & & [S_{66}] \end{bmatrix} \tag{A-10}$$

とおくと、

$$[S] [\tilde{K}_0^{22}] = [I] \tag{A-11a}$$

式(A-11a)をサブマトリクスの方程式群として表すと、

$$\sum_{k=1}^6 [S_{ik}] [\tilde{K}_0^{22}]_{jk}^T = \delta_{ij} [I] \quad (i, j = 1, 6) \tag{A-11b}$$

ここで、 $\delta_{ij}$  は、Kronecker のデルタである。

式(A-11b)において、 $i$  行について式(A-4d)と式(A-9)を用いて具体的に書くと次のとおりである。

$$[S_{11}] [\tilde{K}_{22}] + [S_{12}] [\tilde{K}_{24}] + [S_{16}] [\tilde{K}_{68}] = \delta_{11} [I] \tag{A-12a}$$

$$[S_{11}] [\tilde{K}_{24}] + [S_{12}] [\tilde{K}_{44}] + [S_{13}] [\tilde{K}_{46}] = \delta_{12} [I] \tag{A-12b}$$

$$[S_{12}] [\tilde{K}_{46}] + [S_{13}] [\tilde{K}_{66}] + [S_{14}] [\tilde{K}_{68}] = \delta_{13} [I] \tag{A-12c}$$

$$[S_{13}] [\tilde{K}_{68}] + [S_{14}] [\tilde{K}_{22}] + [S_{15}] [\tilde{K}_{24}] = \delta_{14} [I] \tag{A-12d}$$

$$[S_{i4}][\tilde{K}_{24}] + [S_{i5}][\tilde{K}_{44}] + [S_{i6}][\tilde{K}_{46}] = \delta_{i5}[I] \quad (\text{A-12e})$$

$$[S_{i1}][\tilde{K}_{68}] + [S_{i5}][\tilde{K}_{46}] + [S_{i6}][\tilde{K}_{66}] = \delta_{i6}[I] \quad (\text{A-12f})$$

式(A-12a)と式(A-12d)、式(A-12b)と式(A-12e)、式(A-12c)と式(A-12f)についてそれぞれ差をとると、次の関係が得られる。

$$[S_{i,1-4}][\tilde{K}_{22}] + [S_{i,2-5}][\tilde{K}_{24}] - [S_{i,3-6}][\tilde{K}_{68}] = (\delta_{i1} - \delta_{i4})[I] \quad (\text{A-13a})$$

$$[S_{i,1-4}][\tilde{K}_{24}] + [S_{i,2-5}][\tilde{K}_{44}] + [S_{i,3-6}][\tilde{K}_{46}] = (\delta_{i2} - \delta_{i5})[I] \quad (\text{A-13b})$$

$$- [S_{i,1-4}][\tilde{K}_{68}] + [S_{i,2-5}][\tilde{K}_{46}] + [S_{i,3-6}][\tilde{K}_{66}] = (\delta_{i3} - \delta_{i6})[I] \quad (\text{A-13c})$$

また、式(A-12a)と式(A-12d)、式(A-12b)と式(A-12e)、式(A-12c)と式(A-12f)についてそれぞれ和をとると、

$$[S_{i,1+4}][\tilde{K}_{22}] + [S_{i,2+5}][\tilde{K}_{24}] + [S_{i,3+6}][\tilde{K}_{68}] = (\delta_{i1} + \delta_{i4})[I] \quad (\text{A-14a})$$

$$[S_{i,1+4}][\tilde{K}_{24}] + [S_{i,2+5}][\tilde{K}_{44}] + [S_{i,3+6}][\tilde{K}_{46}] = (\delta_{i2} + \delta_{i5})[I] \quad (\text{A-14b})$$

$$[S_{i,1+4}][\tilde{K}_{68}] + [S_{i,2+5}][\tilde{K}_{46}] + [S_{i,3+6}][\tilde{K}_{66}] = (\delta_{i3} + \delta_{i6})[I] \quad (\text{A-14c})$$

ここで、

$$[S_{i,1-4}] = [S_{i1}] - [S_{i4}] \quad [S_{i,2-5}] = [S_{i2}] - [S_{i5}] \quad [S_{i,3-6}] = [S_{i3}] - [S_{i6}] \quad (\text{A-15a,b,c})$$

$$[S_{i,1+4}] = [S_{i1}] + [S_{i4}] \quad [S_{i,2+5}] = [S_{i2}] + [S_{i5}] \quad [S_{i,3+6}] = [S_{i3}] + [S_{i6}] \quad (\text{A-16a,b,c})$$

式(A-13a)～(A-13c)および式(A-14a)～(A-14c)の各々3式を眺めると、次の関係が成立つことは明らかである。

$$[S_{i,1-4}] = -[S_{i+3,1-4}] \quad [S_{i,2-5}] = -[S_{i+3,2-5}] \quad [S_{i,3-6}] = -[S_{i+3,3-6}] \quad (i=1,3) \quad (\text{A-17a,b,c})$$

$$[S_{i,1+4}] = [S_{i+3,1+4}] \quad [S_{i,2+5}] = [S_{i+3,2+5}] \quad [S_{i,3+6}] = [S_{i+3,3+6}] \quad (i=1,3) \quad (\text{A-18a,b,c})$$

したがって、式(A-13a)～(A-13c)および式(A-14a)～(A-14c)については、 $i=1\sim 3$ について求めれば、 $i=4\sim 6$ も式(A-17a)～(A-17c)および式(A-18a)～(A-18c)によって求まる。

式(A-13a)～(A-13c)のマトリクス $[S_{k,l-(l+3)}]$ ( $k=1,3, l=1,3$ )に属する  $i$  行  $j$  列の成分を  $s_{ij}^{(k)}$  ( $i, j=1,3$ ) とすると、式(A-13a)から～(A-13c)は次のマトリクス方程式を解くことに帰着する。

$$[A_{(-)}][S_{(-)}] = [I] \quad ([I]: \text{unit matrix}) \quad (\text{A-19})$$

ここで、

$$[A_{(-)}] = k^* a^2 \begin{bmatrix} 3\gamma+10\beta & -\sqrt{3}(\gamma-2\beta) & 0 & -3\gamma+\beta & \sqrt{3}(\gamma+\beta) & 0 & -4\beta & 0 & 0 \\ & 5\gamma+6\beta & 0 & \sqrt{3}(\gamma+\beta) & -\gamma+3\beta & 0 & 0 & 4\gamma & 0 \\ & & 16\alpha & 0 & 0 & 4\alpha & 0 & 0 & -4\alpha \\ & & & 6\gamma+4\beta & 0 & 0 & -3\gamma+\beta & -\sqrt{3}(\gamma+\beta) & 0 \\ & & & & 2\gamma+12\beta & 0 & -\sqrt{3}(\gamma+\beta) & -\gamma+3\beta & 0 \\ & & & & & 16\alpha & 0 & 0 & 4\alpha \\ & & & & & & 3\gamma+10\beta & \sqrt{3}(\gamma-2\beta) & 0 \\ & & & & & & & 5\gamma+6\beta & 0 \\ & & & & & & & & 16\alpha \end{bmatrix}$$

(A-20)

$$[S_{(-)}] = \begin{bmatrix} S_{11}^{(11-)} & S_{21}^{(11-)} & S_{31}^{(11-)} & S_{11}^{(21-)} & S_{21}^{(21-)} & S_{31}^{(21-)} & S_{11}^{(31-)} & S_{21}^{(31-)} & S_{31}^{(31-)} \\ S_{12}^{(11-)} & S_{22}^{(11-)} & S_{32}^{(11-)} & S_{12}^{(21-)} & S_{22}^{(21-)} & S_{32}^{(21-)} & S_{12}^{(31-)} & S_{22}^{(31-)} & S_{32}^{(31-)} \\ S_{13}^{(11-)} & S_{23}^{(11-)} & S_{33}^{(11-)} & S_{13}^{(21-)} & S_{23}^{(21-)} & S_{33}^{(21-)} & S_{13}^{(31-)} & S_{23}^{(31-)} & S_{33}^{(31-)} \\ S_{11}^{(12-)} & S_{21}^{(12-)} & S_{31}^{(12-)} & S_{11}^{(22-)} & S_{21}^{(22-)} & S_{31}^{(22-)} & S_{11}^{(32-)} & S_{21}^{(32-)} & S_{31}^{(32-)} \\ S_{12}^{(12-)} & S_{22}^{(12-)} & S_{32}^{(12-)} & S_{12}^{(22-)} & S_{22}^{(22-)} & S_{32}^{(22-)} & S_{12}^{(32-)} & S_{22}^{(32-)} & S_{32}^{(32-)} \\ S_{13}^{(12-)} & S_{23}^{(12-)} & S_{33}^{(12-)} & S_{13}^{(22-)} & S_{23}^{(22-)} & S_{33}^{(22-)} & S_{13}^{(32-)} & S_{23}^{(32-)} & S_{33}^{(32-)} \\ S_{11}^{(13-)} & S_{21}^{(13-)} & S_{31}^{(13-)} & S_{11}^{(23-)} & S_{21}^{(23-)} & S_{31}^{(23-)} & S_{11}^{(33-)} & S_{21}^{(33-)} & S_{31}^{(33-)} \\ S_{12}^{(13-)} & S_{22}^{(13-)} & S_{32}^{(13-)} & S_{12}^{(23-)} & S_{22}^{(23-)} & S_{32}^{(23-)} & S_{12}^{(33-)} & S_{22}^{(33-)} & S_{32}^{(33-)} \\ S_{13}^{(13-)} & S_{23}^{(13-)} & S_{33}^{(13-)} & S_{13}^{(23-)} & S_{23}^{(23-)} & S_{33}^{(23-)} & S_{13}^{(33-)} & S_{23}^{(33-)} & S_{33}^{(33-)} \end{bmatrix}$$

(A-21)

$$= \begin{bmatrix} [S_{1,1-4}] & [S_{2,1-4}] & [S_{3,1-4}] \\ [S_{1,2-5}] & [S_{2,2-5}] & [S_{3,2-5}] \\ [S_{1,3-6}] & [S_{2,3-6}] & [S_{3,3-6}] \end{bmatrix}$$

同様に、式(A-14a)～(A-14c)のマトリクス $[S_{k,l+(l+3)}]$  ( $k=1,3, l=1,3$ )に属するi行j列の成分を $s_{ij}^{(kl+)}$  ( $i, j=1,3$ )とすると、式(A-14a)から～(A-14c)は次のマトリクス方程式を解くことに帰着する。

$$[A_{(+)}][S_{(+)}] = [I] \quad ([I]: \text{unit matrix}) \tag{A-22}$$

ここで、

$$\left[ A_{(+)} \right] = k^* a^2 \begin{bmatrix}
 3\gamma+10\beta & -\sqrt{3}(\gamma-2\beta) & 0 & -3\gamma+\beta & \sqrt{3}(\gamma+\beta) & 0 & 4\beta & 0 & 0 \\
 & 5\gamma+6\beta & 0 & \sqrt{3}(\gamma+\beta) & -\gamma+3\beta & 0 & 0 & -4\gamma & 0 \\
 & & 16\alpha & 0 & 0 & 4\alpha & 0 & 0 & 4\alpha \\
 & & & 6\gamma+4\beta & 0 & 0 & -3\gamma+\beta & -\sqrt{3}(\gamma+\beta) & 0 \\
 & & & & 2\gamma+12\beta & 0 & -\sqrt{3}(\gamma+\beta) & -\gamma+3\beta & 0 \\
 & & & & & 16\alpha & 0 & 0 & 4\alpha \\
 & & sym & & & & 3\gamma+10\beta & \sqrt{3}(\gamma-2\beta) & 0 \\
 & & & & & & & 5\gamma+6\beta & 0 \\
 & & & & & & & & 16\alpha
 \end{bmatrix} \tag{A-23}$$

$$\left[ S_{(+)} \right] = \begin{bmatrix}
 S_{11}^{(11+)} & S_{21}^{(11+)} & S_{31}^{(11+)} & S_{11}^{(21+)} & S_{21}^{(21+)} & S_{31}^{(21+)} & S_{11}^{(31+)} & S_{21}^{(31+)} & S_{31}^{(31+)} \\
 S_{12}^{(11+)} & S_{22}^{(11+)} & S_{32}^{(11+)} & S_{12}^{(21+)} & S_{22}^{(21+)} & S_{32}^{(21+)} & S_{12}^{(31+)} & S_{22}^{(31+)} & S_{32}^{(31+)} \\
 S_{13}^{(11+)} & S_{23}^{(11+)} & S_{33}^{(11+)} & S_{13}^{(21+)} & S_{23}^{(21+)} & S_{33}^{(21+)} & S_{13}^{(31+)} & S_{23}^{(31+)} & S_{33}^{(31+)} \\
 S_{11}^{(12+)} & S_{21}^{(12+)} & S_{31}^{(12+)} & S_{11}^{(22+)} & S_{21}^{(22+)} & S_{31}^{(22+)} & S_{11}^{(32+)} & S_{21}^{(32+)} & S_{31}^{(32+)} \\
 S_{12}^{(12+)} & S_{22}^{(12+)} & S_{32}^{(12+)} & S_{12}^{(22+)} & S_{22}^{(22+)} & S_{32}^{(22+)} & S_{12}^{(32+)} & S_{22}^{(32+)} & S_{32}^{(32+)} \\
 S_{13}^{(12+)} & S_{23}^{(12+)} & S_{33}^{(12+)} & S_{13}^{(22+)} & S_{23}^{(22+)} & S_{33}^{(22+)} & S_{13}^{(32+)} & S_{23}^{(32+)} & S_{33}^{(32+)} \\
 S_{11}^{(13+)} & S_{21}^{(13+)} & S_{31}^{(13+)} & S_{11}^{(23+)} & S_{21}^{(23+)} & S_{31}^{(23+)} & S_{11}^{(33+)} & S_{21}^{(33+)} & S_{31}^{(33+)} \\
 S_{12}^{(13+)} & S_{22}^{(13+)} & S_{32}^{(13+)} & S_{12}^{(23+)} & S_{22}^{(23+)} & S_{32}^{(23+)} & S_{12}^{(33+)} & S_{22}^{(33+)} & S_{32}^{(33+)} \\
 S_{13}^{(13+)} & S_{23}^{(13+)} & S_{33}^{(13+)} & S_{13}^{(23+)} & S_{23}^{(23+)} & S_{33}^{(23+)} & S_{13}^{(33+)} & S_{23}^{(33+)} & S_{33}^{(33+)}
 \end{bmatrix} \tag{A-24}$$

$$= \begin{bmatrix}
 \left[ S_{1,1+4} \right] & \left[ S_{2,1+4} \right] & \left[ S_{3,1+4} \right] \\
 \left[ S_{1,2+5} \right] & \left[ S_{2,2+5} \right] & \left[ S_{3,2+5} \right] \\
 \left[ S_{1,3+6} \right] & \left[ S_{2,3+6} \right] & \left[ S_{3,3+6} \right]
 \end{bmatrix}$$

式(A-19)および式(A-22)から、式(A-21)および式(A-24)は式(A-20)および式(A-23)の逆マトリクスとなる。

$$\left[ S_{(-)} \right] = \left[ A_{(-)} \right]^{-1} \tag{A-25}$$

$$\left[ S_{(+)} \right] = \left[ A_{(+)} \right]^{-1} \tag{A-26}$$

式(A-25)、式(A-26)を実際に計算すると、各成分は次のとおりになる。

$$[S_{(-)}] = \frac{1}{k * a^2 \beta (9\beta + 26\gamma)} \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{3}{4} \frac{18\beta^2 + 35\beta\gamma + 6\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & - \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{6\beta^2 + 9\beta\gamma + 2\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ & \frac{3}{4} \frac{30\beta^2 + 53\beta\gamma + 10\gamma^3}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ & & 0 & \frac{3}{40} \frac{\beta(9\beta + 26\gamma)}{\alpha} \end{array} \right]$$

sym .

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{5}{2}\gamma & - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\gamma(5\beta + 2\gamma)}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ - \frac{\sqrt{3}}{2} (\beta + 4\gamma) & - \frac{1}{2} \frac{\beta(9\beta - 2\gamma)}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ 0 & 0 & - \frac{1}{40} \frac{\beta(9\beta + 26\gamma)}{\alpha} & \\ \frac{3}{2} (2\beta + 3\gamma) & 0 & 0 & \\ \frac{3}{2} \frac{6\beta^2 + 13\beta\gamma + 2\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & & 0 & \\ & & \frac{3}{40} \frac{\beta(9\beta + 26\gamma)}{\alpha} & \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{4} \frac{27\beta^2 + 39\beta\gamma + 10\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{3\beta^2 + 11\beta\gamma + 2\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ - \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{3\beta^2 + 11\beta\gamma + 2\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & - \frac{1}{4} \frac{9\beta^2 + 133\beta\gamma + 30\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{40} \frac{\beta(9\beta + 26\gamma)}{\alpha} & \\ \frac{5}{2}\gamma & \frac{\sqrt{3}}{2} (\beta + 4\gamma) & & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\gamma(5\beta + 2\gamma)}{9\beta + 2\gamma} & - \frac{1}{2} \frac{\beta(9\beta - 2\gamma)}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ 0 & 0 & - \frac{1}{40} \frac{\beta(9\beta + 26\gamma)}{\alpha} & \\ \frac{3}{4} \frac{18\beta^2 + 35\beta\gamma + 6\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{6\beta^2 + 9\beta\gamma + 2\gamma^2}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ & \frac{3}{4} \frac{30\beta^3 + 53\beta\gamma + 10\gamma^3}{9\beta + 2\gamma} & & 0 \\ & & \frac{3}{40} \frac{\beta(9\beta + 26\gamma)}{\alpha} & \end{array} \right]$$

(A-27)



$$[S_{(+)}] = \frac{1}{36k * a^2 \beta(\beta + 2\gamma)} \begin{bmatrix} 6\beta + 5\gamma & -\sqrt{3}(2\beta - \gamma) & 0 \\ & 10\beta + 3\gamma & 0 \\ & 0 & \frac{5\beta(\beta + 2\gamma)}{2\alpha} \\ \text{sym.} & & \\ 2\gamma & -2\sqrt{3}\gamma & 0 \\ -2\sqrt{3}\beta & -2\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{\beta(\beta + 2\gamma)}{\alpha} \\ 2(6\beta + \gamma) & 0 & 0 \\ & 2(2\beta + 3\gamma) & 0 \\ & & \frac{5\beta(\beta + 2\gamma)}{2\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(3\beta + \gamma) & -\sqrt{3}(\beta - \gamma) & 0 \\ \sqrt{3}(\beta - \gamma) & \beta + 3\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{\beta(\beta + 2\gamma)}{\alpha} \\ 2\gamma & 2\sqrt{3}\beta & 0 \\ 2\sqrt{3}\gamma & -2\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{\beta(\beta + 2\gamma)}{\alpha} \\ 6\beta + 5\gamma & \sqrt{3}(2\beta - \gamma) & 0 \\ & 10\beta + 3\gamma & 0 \\ & & \frac{5\beta(\beta + 2\gamma)}{2\alpha} \end{bmatrix}$$

(A-28)

式(A-9)は、式(A-15)～式(A-18)の関係を用いると、式(A-21)、式(A-24)から、

$$[\tilde{K}_0^{22}]^{-1} = [S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [S_{(+)}] + [S_{(-)}] & [S_{(+)}] - [S_{(-)}] \\ [S_{(+)}] - [S_{(-)}] & [S_{(+)}] + [S_{(-)}] \end{bmatrix} \quad (A-29)$$

一方、式(A-4b)は、9×9の2種類のマトリクスを使って次ぎのように表される。

$$[\tilde{K}_0^{12}] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{0,1}^{12}] & [\tilde{K}_{0,2}^{12}] \\ -[\tilde{K}_{0,2}^{12}] & -[\tilde{K}_{0,1}^{12}] \end{bmatrix} \quad (A-30)$$

ここで、右辺のサブマトリクスは、式(A-4a)と式(A-8)から、

$$[\tilde{K}_{0,1}^{12}] = k * a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6\alpha & 0 & 0 & -6\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 & 6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha & 0 & 0 & 12\alpha & 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha \\ -6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 & -12\beta & 0 & 0 & -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\alpha & 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 & -6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (A-31a)$$

$$[\tilde{K}_{0,2}^{12}] = k * a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A-31b)$$

式(A-29)と式(A-30)を使うと、式(A-6)の右辺第2項は、

$$[\tilde{K}_0^{12}] [\tilde{K}_0^{22}]^{-1} [\tilde{K}_0^{12}]^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}] [S_{(+)}] [\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}]^T + [\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}] [S_{(-)}] [\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}]^T & -[\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}] [S_{(+)}] [\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}]^T + [\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}] [S_{(-)}] [\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}]^T \\ -[\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}] [S_{(+)}] [\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}]^T + [\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}] [S_{(-)}] [\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}]^T & [\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}] [S_{(+)}] [\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}]^T + [\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}] [S_{(-)}] [\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}]^T \end{bmatrix} \quad (A-32)$$

ここで、

$$[\tilde{K}_{0,(1+2)}^{12}] = [\tilde{K}_{0,1}^{12}] + [\tilde{K}_{0,2}^{12}] = k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6\alpha & 0 & 0 & -6\alpha & 0 & 0 & 12\alpha \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 & 6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 & -12\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha & 0 & 0 & 12\alpha & 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha \\ -6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 & -12\beta & 0 & 0 & -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 12\alpha & 0 & 0 & -6\alpha & 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha \\ -12\beta & 0 & 0 & 6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 & -6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix}$$

(A-33a)

$$[\tilde{K}_{0,(1-2)}^{12}] = [\tilde{K}_{0,1}^{12}] - [\tilde{K}_{0,2}^{12}] = k^* a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6\alpha & 0 & 0 & -6\alpha & 0 & 0 & -12\alpha \\ 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 & 6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 & 12\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha & 0 & 0 & 12\alpha & 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\sqrt{3}\alpha \\ -6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 & -12\beta & 0 & 0 & -6\beta & 6\sqrt{3}\beta & 0 \\ 0 & 0 & -12\alpha & 0 & 0 & -6\alpha & 0 & 0 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha & 0 & 0 & 6\sqrt{3}\alpha \\ 12\beta & 0 & 0 & 6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 & -6\beta & -6\sqrt{3}\beta & 0 \end{bmatrix}$$

(A-33b)

式(A-32)は、具体的に次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} \tilde{K}_0^{12} \\ \tilde{K}_0^{22} \end{array} \right]^T \left[ \tilde{K}_0^{12} \right] \\
 & \frac{k^* \alpha}{5} \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc}
 67 & 5\sqrt{3} & 0 & -16 & 6\sqrt{3} & 0 & 19 & -11\sqrt{3} & 0 & -13 & -5\sqrt{3} & 0 & -11 & 2\sqrt{3} & 0 & -46 & -16\sqrt{3} & 0 \\
 & 57 & 0 & -26\sqrt{3} & -36 & 0 & 11\sqrt{3} & -21 & 0 & -5\sqrt{3} & -3 & 0 & -\sqrt{3} & 9 & 0 & 16\sqrt{3} & -6 & 0 \\
 & & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & 0 & \phi_5 & 0 & 0 & \phi_6 \\
 & & & 52 & 0 & 0 & -16 & 26\sqrt{3} & 0 & -11 & -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 & 0 & -11 & \sqrt{3} & 0 \\
 & & & & 72 & 0 & -6\sqrt{3} & -36 & 0 & 21\sqrt{3} & 9 & 0 & 0 & -18 & 0 & -21\sqrt{3} & 9 & 0 \\
 & & & & & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & 0 & \phi_5 \\
 & & & & & & 67 & -5\sqrt{3} & 0 & -46 & 16\sqrt{3} & 0 & -11 & -21\sqrt{3} & 0 & -13 & 5\sqrt{3} & 0 \\
 & & & & & & & 57 & 0 & -16\sqrt{3} & -6 & 0 & \sqrt{3} & 9 & 0 & 5\sqrt{3} & -3 & 0 \\
 & & & & & & & & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \\
 & & & & & & & & & 67 & 5\sqrt{3} & 0 & -16 & 6\sqrt{3} & 0 & 19 & -11\sqrt{3} & 0 \\
 & & & & & & & & & & 57 & 0 & -26\sqrt{3} & -36 & 0 & 11\sqrt{3} & -21 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 \\
 & & & & & & & & & & & & 52 & 0 & 0 & -16 & 26\sqrt{3} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 72 & 0 & -6\sqrt{3} & -36 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 67 & -5\sqrt{3} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & 57 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & \phi_6
 \end{array} \right] \\
 & \text{sym}
 \end{aligned}$$

(A-34)

ここで、

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{80\beta(3\beta+8\gamma)(9\beta+10\gamma)}{\alpha(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)}, & \phi_2 &= -\frac{40\beta(27\beta^2+84\beta\gamma+28\gamma^2)}{\alpha(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)}, \\
 \phi_3 &= -\frac{320\beta\gamma(3\beta+10\gamma)}{\alpha(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)}, & \phi_4 &= \frac{160\beta\gamma(3\beta+14\gamma)}{\alpha(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)}
 \end{aligned} \tag{A-35a-d}$$

式(A-4a)と式(A-34)を用いると、式(A-6)は、

$$\begin{aligned}
 [K_0] &= \left[ \begin{array}{cccccc}
 [K_0^{11}] & [K_0^{12}] & [K_0^{13}] & [K_0^{14}] & [K_0^{15}] & [K_0^{16}] \\
 & [K_0^{22}] & [K_0^{23}] & [K_0^{15}]^T & [K_0^{25}] & [K_0^{26}] \\
 & & [K_0^{33}] & [K_0^{16}]^T & [K_0^{26}]^T & [K_0^{36}] \\
 & & & [K_0^{11}] & [K_0^{12}] & [K_0^{13}] \\
 & & & & [K_0^{22}] & [K_0^{23}] \\
 & & & & & [K_0^{33}]
 \end{array} \right] \\
 & \text{sym.}
 \end{aligned} \tag{A-36}$$

ここで、

$$[K_0^{11}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 15+83\alpha & 5\sqrt{3}(-1+5\alpha) & 0 \\ & 25+33\alpha & 0 \\ \text{sym} & & \frac{160\beta\gamma(15\beta+38\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, [K_0^{12}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -(15+14\alpha) & -\sqrt{3}(-5+3\alpha) & 0 \\ -\sqrt{3}(-5+4\alpha) & -(5+54\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64\beta\gamma(3\beta+8\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}$$

(A-37a, b)

$$[K_0^{13}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -19\alpha & 11\sqrt{3}\alpha & 0 \\ -11\sqrt{3}\alpha & 21\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{320\beta\gamma(3\beta+10\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, [K_0^{14}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 13\alpha & 5\sqrt{3}\alpha & 0 \\ & 3\alpha & 0 \\ \text{sym} & & \frac{160\beta\gamma(3\beta+14\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}$$

(A-37c, d)

$$[K_0^{15}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 11\alpha & -21\sqrt{3}\alpha & 0 \\ \sqrt{3}\alpha & -9\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{320\beta\gamma(3\beta+10\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, [K_0^{16}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -74\alpha & 16\sqrt{3}\alpha & 0 \\ -16\sqrt{3}\alpha & 2(-10+3\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64\beta\gamma(3\beta+8\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}$$

(A-37e, f)

$$[K_0^{22}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 2(15+4\alpha) & 0 & 0 \\ & 2(5+54\alpha) & 0 \\ \text{sym} & & \frac{160\beta\gamma(15\beta+38\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, [K_0^{23}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -(15+14\alpha) & \sqrt{3}(-5+4\alpha) & 0 \\ \sqrt{3}(-5+3\alpha) & -(5+54\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64\beta\gamma(3\beta+8\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}$$

(A-37g, h)

$$[K_0^{25}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ & 18\alpha & 0 \\ \text{sym} & & \frac{160\beta\gamma(3\beta+14\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, [K_0^{26}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 11\alpha & -\sqrt{3}\alpha & 0 \\ 21\sqrt{3}\alpha & -9\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{320\beta\gamma(3\beta+10\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}$$

(A-37i, j)

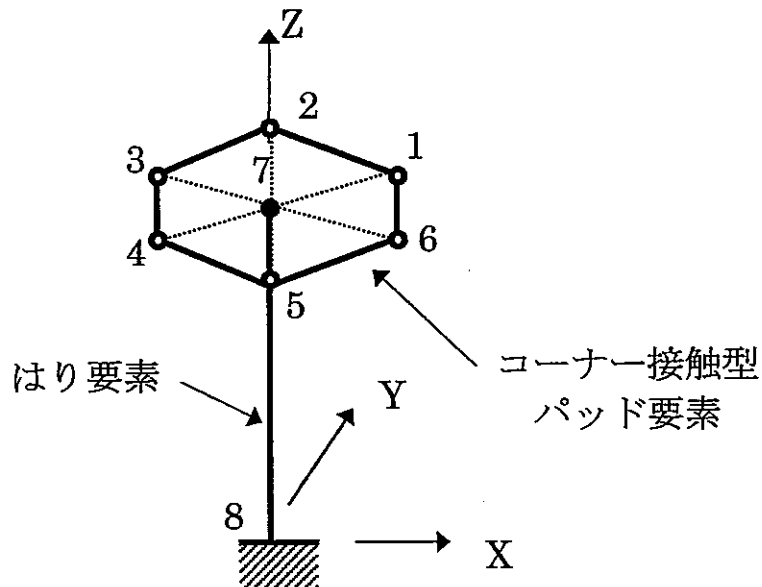
$$[K_0^{33}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 15+83\alpha & -5\sqrt{3}(-1+5\alpha) & 0 \\ & 25+33\alpha & 0 \\ \text{sym} & & \frac{160\beta\gamma(15\beta+38\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}, [K_0^{36}] = \frac{k^*}{5} \begin{bmatrix} 13\alpha & -5\sqrt{3}\alpha & 0 \\ & 3\alpha & 0 \\ \text{sym} & & \frac{160\beta\gamma(3\beta+14\gamma)}{(9\beta+26\gamma)(\beta+2\gamma)} \end{bmatrix}$$

(A-37k, l)

[付録 B]

検証解析モデルのマトリクス釣合い方程式

パッド要素の機能特性を検証するための、図に示す単純な傘状の構造モデルのマトリクス釣合い方程式を示す。このモデルは、コーナー接触型パッド要素にはり要素を1本繋いでその下端を固定したものである。



はり要素については、マトリクス釣合い方程式は次ぎのように表される。<sup>\*1</sup>

$$\{F^w\} = [K^w] \{U^w\} \tag{B-1}$$

ここで、 $\{F^w\}$ ,  $\{U^w\}$ ,  $[K^w]$  はそれぞれ節点荷重ベクトル、節点変位ベクトルおよび要素剛性マトリクスである。

$$\{F^w\}^T = [F_{x8} \ F_{y8} \ F_{z8} \ M_{x8} \ M_{y8} \ M_{z8} \ ; \ F_{x7} \ F_{y7} \ F_{z7} \ M_{x7} \ M_{y7} \ M_{z7}] \tag{B-2a}$$

$$\{U^w\}^T = [U_{x8} \ U_{y8} \ U_{z8} \ \Theta_{x8} \ \Theta_{y8} \ \Theta_{z8} \ ; \ U_{x7} \ U_{y7} \ U_{z7} \ \Theta_{x7} \ \Theta_{y7} \ \Theta_{z7}] \tag{B-2b}$$

$$[K^w] = \begin{bmatrix} [K_{11}^w] & [K_{12}^w] \\ [K_{12}^w]^T & [K_{22}^w] \end{bmatrix} \tag{B-3}$$

さらに、式(B-3)のサブマトリクスは、

<sup>\*1</sup> たとえば、「有限要素法ハンドブック I 基礎編」 鷲津他共編、培風館(1981) p218-220.

$$\left[ K_{11}^W \right] = \begin{bmatrix} \frac{12E_W I_W}{l_W^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_W I_W}{l_W^2} & 0 \\ & \frac{12E_W I_W}{l_W^3} & 0 & -\frac{6E_W I_W}{l_W^2} & 0 & 0 \\ & & \frac{E_W A_W}{l_W} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4E_W I_W}{l_W} & 0 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & \frac{4E_W I_W}{l_W} & 0 \\ & & & & & \frac{G_W J_W}{l_W} \end{bmatrix} \quad (\text{B-4a})$$

$$\left[ K_{12}^W \right] = \begin{bmatrix} \frac{12E_W I_W}{l_W^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_W I_W}{l_W^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12E_W I_W}{l_W^3} & 0 & -\frac{6E_W I_W}{l_W^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E_W A_W}{l_W} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6E_W I_W}{l_W^2} & 0 & \frac{2E_W I_W}{l_W} & 0 & 0 \\ -\frac{6E_W I_W}{l_W^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_W I_W}{l_W} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_W J_W}{l_W} \end{bmatrix} \quad (\text{B-4b})$$

$$\left[ K_{22}^W \right] = \begin{bmatrix} \frac{12E_W I_W}{l_W^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E_W I_W}{l_W^2} & 0 \\ & \frac{12E_W I_W}{l_W^3} & 0 & \frac{6E_W I_W}{l_W^2} & 0 & 0 \\ & & \frac{E_W A_W}{l_W} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{4E_W I_W}{l_W} & 0 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & \frac{4E_W I_W}{l_W} & 0 \\ & & & & & \frac{G_W J_W}{l_W} \end{bmatrix} \quad (\text{B-4c})$$

上記サブマトリクスにおいて、

- ・ はり長さ ;  $l_w$
- ・ 断面積 ;  $A_w$  ( $A_w = 4\sqrt{3}lt = 6at$ )

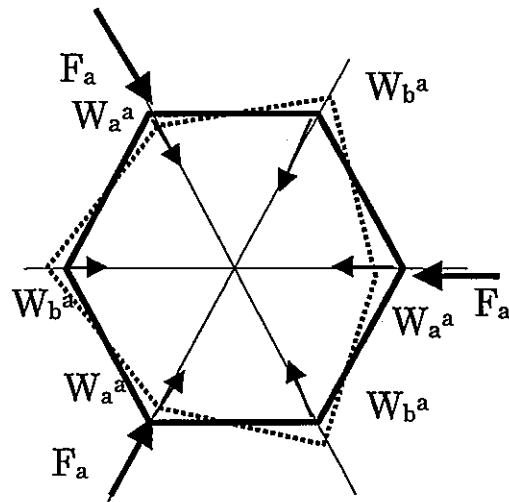




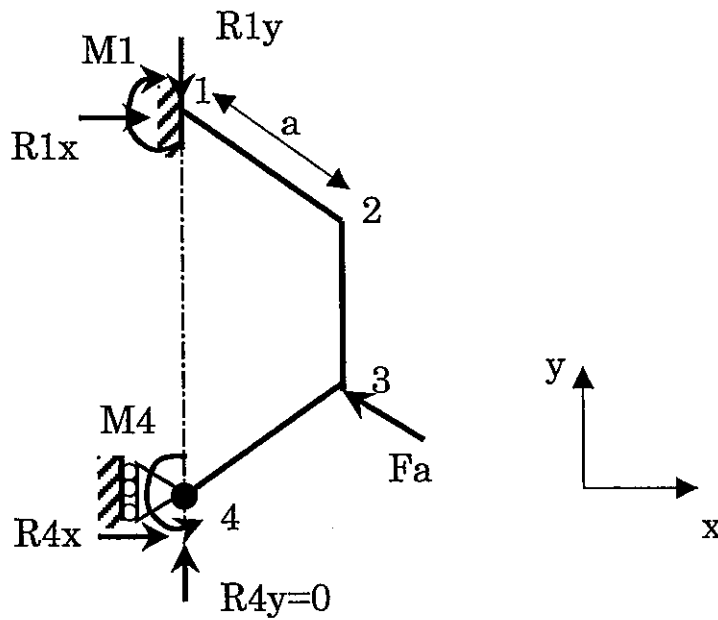
[付録 C]

3 頂点均等圧縮荷重に対するたわみ特性

下図のようにひとつおきの3頂点に等しい圧縮荷重  $F_a$  が作用している場合の作用点の変位  $W_{a^a}$  と他の頂点の変位  $W_{b^a}$  を考える。



対称性から下の図に示す半分の構造について、荷重とたわみの関係を求める。



頂点 1 と 4 について、変位とたわみ角の境界条件は、

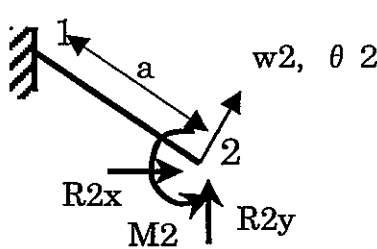
$$\delta_{1x} = \delta_{1y} = \Theta_1 = \delta_{4x} = \Theta_4 = 0 \quad (C-1)$$

力の釣合いは、

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 - M_4 - 2aR_{4x} + \frac{\sqrt{3}}{2} aF_a = 0 \\ R_{1x} + R_{4x} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_a = 0 \\ R_{1y} - \frac{1}{2} F_a = 0 \end{array} \right. \quad (C-2a-c)$$

次に 3 つの直線部分についてたわみおよびたわみ角を求める。

(1) 頂点 1-2 間

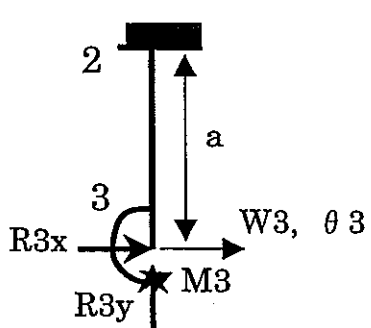


$$\left\{ \begin{array}{l} R_{2x} = R_{4x} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_a \\ R_{2y} = \frac{1}{2} F_a \\ M_2 = M_4 + \frac{3}{2} aR_{4x} - \frac{\sqrt{3}}{2} aF_a \end{array} \right. \quad (C-3a-c)$$

$$w_2 = \frac{a^2}{2EI} \left\{ M_4 + \frac{a}{2} \left( \frac{11}{3} R_{4x} - \sqrt{3} F_a \right) \right\} \quad (C-4a,b)$$

$$\theta_2 = \frac{a}{EI} \left\{ M_4 + \frac{a}{2} \left( \frac{7}{2} R_{4x} - \sqrt{3} F_a \right) \right\}$$

(2) 頂点 2-3 間

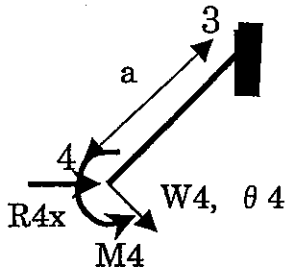


$$\left\{ \begin{array}{l} R_{3x} = R_{4x} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_a \\ R_{3y} = \frac{1}{2} F_a \\ M_3 = M_4 + \frac{1}{2} aR_{4x} \end{array} \right. \quad (C-5a-c)$$

$$w_3 = \frac{a^2}{2EI} \left\{ M_4 + \frac{a}{3} \left( \frac{7}{2} R_{4x} - \sqrt{3} F_a \right) \right\}$$

$$\theta_3 = \frac{a}{EI} \left\{ M_4 + \frac{a}{4} (4R_{4x} - \sqrt{3} F_a) \right\}$$
(C-6a,b)

(2) 頂点 3-4 間



$$w_4 = \frac{a^2}{2EI} \left( M_4 + \frac{a}{3} R_{4x} \right)$$

$$\theta_4 = \frac{a}{EI} \left( M_4 + \frac{a}{4} R_{4x} \right)$$
(C-7a,b)

一方、頂点 2、3、4 の水平および鉛直方向変位および頂点 4 の全たわみ角は、

$$\delta_{2H} = \frac{1}{2} w_2$$
(C-8a,b)

$$\delta_{2V} = \frac{\sqrt{3}}{2} w_2$$

$$\delta_{3H} = \frac{1}{2} w_2 + w_3 + a\theta_2$$

(C-9a,b)

$$\delta_{3V} = \frac{\sqrt{3}}{2} w_2$$

$$\delta_{4H} = \frac{1}{2} w_2 + w_3 + \frac{1}{2} w_4 + \frac{a}{2} (3\theta_2 + \theta_3)$$

(C-10a,b)

$$\delta_{4V} = \frac{\sqrt{3}}{2} w_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} w_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} a(\theta_2 + \theta_3)$$

$$\Theta_4 = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$$

(C-11)

境界条件式(C-1)から、

$$\delta_{4H} = \frac{a^2}{EI} \left\{ 3M_4 + a \left( \frac{17}{4} R_{4x} - \frac{7\sqrt{3}}{6} F_a \right) \right\} = 0$$

(C-12a,b)

$$\Theta_4 = \frac{3a}{EI} \left\{ M_4 + a \left( R_{4x} - \frac{\sqrt{3}}{4} F_a \right) \right\} = 0$$

これより、

$$\begin{aligned}
 R_{4x} &= \frac{\sqrt{3}}{3} F_a, & R_{1x} &= \frac{\sqrt{3}}{6} F_a, \\
 M_4 &= -\frac{\sqrt{3}}{12} a F_a, & M_1 &= \frac{\sqrt{3}}{12} a F_a
 \end{aligned}
 \tag{C-13a-d}$$

したがって、式(C-4)、式(C-6)および式(C-7)は、

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \frac{\sqrt{3}a^3}{72EI} F_a, & w_3 &= -\frac{\sqrt{3}a^3}{72EI} F_a, & w_4 &= \frac{\sqrt{3}a^3}{72EI} F_a \\
 \theta_2 &= 0, & \theta_3 &= 0, & \theta_4 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{C-14a-f}$$

また、式(C-8)、式(C-9)および式(C-10)は、

$$\begin{aligned}
 \delta_{2H} &= \frac{\sqrt{3}a^3}{144EI} F_a, & \delta_{3H} &= -\frac{\sqrt{3}a^3}{144EI} F_a, & \delta_{4H} &= 0 \\
 \delta_{2V} &= \frac{a^3}{48EI} F_a, & \delta_{3V} &= \frac{a^3}{48EI} F_a, & \delta_{4V} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{C-15a-f}$$

上式を使うと、荷重が作用する頂点の中心方向の変位およびそれ以外の頂点の中心方向変位は幾何学的な関係から求められる。頂点 1 が鉛直下方に  $W_a^a$  だけ変位することを考慮すれば、

$$W_a^a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \delta_{3H} + \frac{1}{2} (\delta_{3V} - W_a^a)
 \tag{C-16}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 W_a^a &= \frac{a^3}{72EI} F_a, \\
 W_b^a = \delta_{4V} - W_a^a &= -\frac{a^3}{72EI} F_a
 \end{aligned}
 \tag{C-17a,b}$$

荷重が作用する 3 頂点を入替えた場合についても同様に求められる。

$$\begin{aligned}
 W_b^b &= \frac{a^3}{72EI} F_b, \\
 W_a^b &= -\frac{a^3}{72EI} F_b
 \end{aligned}
 \tag{C-18a,b}$$

したがって、ひとつおきの頂点に均等な圧縮荷重  $F_a$  および  $F_b$  が作用する場合の頂点の中心方向の変位  $W_a$  および  $W_b$  は、式(C-17a,b)と式(C-18a,b)の重ね合せで与えられる。

$$\begin{aligned}
 W_a &= W_a^a + W_a^b = \frac{a^3}{72EI} (F_a - F_b) \\
 W_b &= W_b^b + W_b^a = \frac{a^3}{72EI} (F_b - F_a)
 \end{aligned}
 \tag{C-19a,b}$$

式(C-19)において、頂点に作用する荷重がすべて等しい時、変位は発生しない。こ

のことは、3対の頂点間に圧縮荷重が作用する場合の変位を表す式においてすべての荷重を等しく置いた結果と矛盾しない。

[補遺]

式(2-31)の変換マトリクスに関する考察

式(2-31)の関係は節点7の荷重成分を節点1から節点6にどのように分配するかを規定しているもので、実際には一意に決めることはできない。逆に、節点1から節点6の荷重成分を節点7点に集約することを考えると次の関係が成立つ。

$$\{F_7\} = \underset{(6 \times 18)}{[A^*]} \{F_{1-6}\} \quad (*-1)$$

ここで、

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & a & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ \frac{a}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 & -a & 0 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 & \frac{a}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 & a & 0 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 \end{bmatrix} \quad (*-2)$$

この式からもわかるように、式(2-31)のような関係を一意に定めることはできない。しかしながら、式(2-32)と式(\*-2)のマトリクスを比べてわかるように、両者の成分のパターンは類似している。

式(2-31)の関係について、節点7の荷重成分の節点1から節点6への分配を重み付けをして次のように置く。

$$\{F_{1-6}^*\} = \underset{(18 \times 6)}{[B\#]} \{F_7\} \quad (*-3)$$

ここで、

$$[B\#] = \begin{bmatrix}
 w_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2a}w_1^{(6)} \\
 0 & w_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2a}w_1^{(6)} \\
 0 & 0 & w_1^{(3)} & \frac{2}{a}w_1^{(4)} & -\frac{2\sqrt{3}}{3a}w_1^{(5)} & 0 \\
 w_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a}w_2^{(6)} \\
 0 & w_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & w_2^{(3)} & \frac{1}{a}w_2^{(4)} & 0 & 0 \\
 w_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2a}w_3^{(6)} \\
 0 & w_3^{(2)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2a}w_3^{(6)} \\
 0 & 0 & w_3^{(3)} & \frac{2}{a}w_3^{(4)} & \frac{2\sqrt{3}}{3a}w_3^{(5)} & 0 \\
 w_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2a}w_4^{(6)} \\
 0 & w_4^{(2)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2a}w_4^{(6)} \\
 0 & 0 & w_4^{(3)} & -\frac{2}{a}w_4^{(4)} & \frac{2\sqrt{3}}{3a}w_4^{(5)} & 0 \\
 w_5^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a}w_5^{(6)} \\
 0 & w_5^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & w_5^{(3)} & -\frac{1}{a}w_5^{(4)} & 0 & 0 \\
 w_6^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2a}w_6^{(6)} \\
 0 & w_6^{(2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2a}w_6^{(6)} \\
 0 & 0 & w_6^{(3)} & -\frac{2}{a}w_6^{(4)} & -\frac{2\sqrt{3}}{3a}w_6^{(5)} & 0
 \end{bmatrix} \tag{* -4}$$

式(\*-5)のマトリクス中の  $w_j^{(i)}$  は、節点 7 の  $i$  番目の荷重成分を  $j(1,6)$  の節点に分配する重みを表す。

$$\sum_{j=1}^{6(4)} w_j^{(i)} = 1 \quad (i = 1,6) \tag{* -5}$$

式(\*-5)のマトリクスの第1列から第3列は節点7の3方向の荷重成分に対応する。第4列はx軸回りのモーメントに対応し、重みの係数は1から6の各節点からx軸までの距離の逆数と符号を表す。第5列はy軸回りのモーメントに対応し、重みの係数は各節点からy軸までの距離の逆数と符号を表す。ただし、節点2および5はy軸上にあるのでカウントしない。第6列はz軸回りのモーメントに対応し、重みの係数は1から6の各節点からz軸までの距離の逆数にxとy軸に対する方向余弦をかけたものと符号を表す。

式(2-32)は、式(\*-4)において次のように重みを均等に配分したものとなっている。

$$w_j^{(1)} = w_j^{(2)} = w_j^{(3)} = w_j^{(4)} = w_j^{(6)} = \frac{1}{6} \quad (j=1,6), \quad w_j^{(5)} = \frac{1}{4} \quad (j=1,4) \quad (*-6)$$

上式において、荷重の3成分を均等に配分するのは自然である。また、y軸およびz軸回りのモーメントを均等に配分することも、対象とする各節点から軸までの距離が等しいので自然な選択であるといえる。ところが、x軸回りのモーメントについては、節点2,5のx軸からの距離は節点1,3,4,6のそれぞれの2倍であるために選択の余地を残すことになる。式(\*-6)の場合は節点7のモーメントを均等に配分して節点1から6のz方向の荷重を求めている。もし、配分した荷重が均等になるようにモーメントを配分するとしたら、距離の重みを考慮しなければならない。その場合、第4列の重みは次のようになる。

$$w_1^{(4)} = w_3^{(4)} = w_4^{(4)} = w_6^{(4)} = \frac{1}{8}, \quad w_2^{(4)} = w_5^{(4)} = \frac{1}{4} \quad (*-7)$$

このとき、式(\*-4)は次のようになる。



$$[B\#] = \begin{bmatrix}
 \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12a} \\
 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{12a} \\
 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4a} & -\frac{\sqrt{3}}{6a} & 0 \\
 \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6a} \\
 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4a} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12a} \\
 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{12a} \\
 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4a} & \frac{\sqrt{3}}{6a} & 0 \\
 \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12a} \\
 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{12a} \\
 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4a} & \frac{\sqrt{3}}{6a} & 0 \\
 \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6a} \\
 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4a} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12a} \\
 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{12a} \\
 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4a} & -\frac{\sqrt{3}}{6a} & 0
 \end{bmatrix} \tag{* - 8}$$

参考までに式(\*-8)のマトリクスを使って、パッド要素の剛性マトリクスを導き、第3章の要素検証解析を行った結果を示す。下の各表の各荷重ケースについての計

算結果はパッド幅  $b=10\text{mm}$  についてのものである。

(1) 頂点間圧縮

Node	<1-1> 1 対		<1-2> 2 対		<1-3> 3 対		<1-4> 2 点		<1-5> 3 点	
	式(*-8)	式(2-32)	式(*-8)	式(2-32)	式(*-8)	式(2-32)	式(*-8)	式(2-32)	式(*-8)	式(2-32)
1-1	2.524	→	-2.535	→	-0.012	→	-1.952	→	-0.848	→
1-2	-0.003	→	-0.003	→	-0.007	→	-0.279	→	-0.490	→
2-1	0	→	0	→	0	→	0	→	0	→
2-2	-4.381	→	4.368	→	-0.014	→	3.083	→	0.966	→
3-1	-2.524	→	2.535	→	0.012	→	1.952	→	0.848	→
3-2	-0.003	→	-0.003	→	-0.007	→	-0.279	→	-0.490	→
4-1	-2.524	→	2.535	→	0.012	→	0.975	→	-0.836	→
4-2	0.003	→	0.003	→	0.007	→	-0.279	→	-0.483	→
5-1	0	→	0	→	0	→	0	→	0	→
5-2	4.381	→	-4.368	→	0.014	→	-1.965	→	0.979	→
6-1	2.524	→	-2.535	→	-0.012	→	-0.975	→	0.836	→
6-2	0.003	→	0.003	→	0.007	→	-0.279	→	-0.483	→

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2}\text{mm}$ 。

上の表からわかるように、当然ではあるが、第3章の結果とまったく一致することが確かめられた。つまり、中心節点7の変位に影響を及ぼさないパッド断面の相対的変形については、式(2-31)の係数マトリクスを選択に依存しない。

## (2) はりの変形の比較

Node -DOF	<2-1>曲げ		<2-2>ねじり		<2-3>横		<2-4>軸			
	偶力	モーメント	偶力	モーメント	分散	集中	2分散	3分散	6分散	集中
1-1	-0.562	→	-1.016	-0.044	16.651	16.650	0	0	0	→
1-2	0	→	-0.769	0.076	0	→	0	0	0	→
1-3	0.025	→	0	0	-0.562	→	0.517	-0.041	0.014	→
2-1	-0.562	→	-0.579	-0.088	16.649	16.650	0	0	0	→
2-2	0	→	0	0	0	→	0	0	0	→
2-3	0	→	0	0	0	→	-0.237	0.125	0.014	→
3-1	-0.562	→	-1.016	-0.044	16.651	16.650	0	0	0	→
3-2	0	→	0.769	-0.076	0	→	0	0	0	→
3-3	-0.025	→	0	0	0.562	→	-0.237	-0.041	0.014	→
4-1	-0.562	→	1.016	0.044	16.651	16.650	0	0	0	→
4-2	0	→	0.769	-0.076	0	→	0	0	0	→
4-3	-0.025	→	0	0	0.562	→	0.517	0.070	0.014	→
5-1	-0.562	→	0.579	0.088	16.649	16.650	0	0	0	→
5-2	0	→	0	0	0	→	0	0	0	→
5-3	0	→	0	0	0	→	-0.237	-0.097	0.014	→
6-1	-0.562	→	1.016	0.044	16.651	16.650	0	0	0	→
6-2	0	→	-0.769	0.076	0	→	0	0	0	→
6-3	0.025	→	0	0	-0.562	→	-0.237	0.070	0.014	→
7-1	-0.562	→	0	→	16.650	→	0	→	→	→
7-2	0	→	0	→	0	→	0	→	→	→
7-3	0	→	0	→	0	→	0.014	→	→	→

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2}\text{mm}$ 。

第3章の計算結果と比較すると、ケース<2-4>の3分散の場合を除くとまったく一致する。

## (3) 等方的な断面変形 (熱膨張変位)

Node-	<3-1>熱膨張	
DOF	式(*-8)	式(2-32)
1-1	0.430	→
1-2	0.249	→
2-1	0	→
2-2	0.497	→
3-1	-0.430	→
3-2	0.249	→
4-1	-0.430	→
4-2	-0.249	→
5-1	0	→
5-2	-0.497	→
6-1	0.430	→
6-2	-0.249	→

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、mm。

上の表から、当然ではあるが、両者はまったく一致することが確認された。

(4) 組合わせ荷重による変形

Node- DOF	<4-1>曲げ・軸		<4-2>ねじり・横		<4-3>横押し		
	片側	合成	片側	合成	片側	合成	軸押し
1-1	-0.562	→	16.141	16.628	15.919	15.918	16.650
1-2	0	→	-0.385	0.038	0	→	→
1-3	0.165	0.039	-0.562	→	-0.562	→	→
2-1	-0.562	→	16.363	16.606	16.649	16.650	16.650
2-2	0	→	0	0	1.262	→	0
2-3	-0.237	0.014	0	0	0	→	→
3-1	-0.562	→	16.141	16.628	17.382	→	16.650
3-2	0	→	0.385	-0.038	0	→	→
3-3	0.114	-0.011	0.562	→	0.562	→	→
4-1	-0.562	→	17.157	16.672	17.382	→	16.650
4-2	0	→	0.384	-0.038	0	→	→
4-3	0.114	-0.011	0.562	→	0.562	→	→
5-1	-0.562	→	16.942	16.694	16.649	16.650	16.650
5-2	0	→	0	0	-1.262	→	0
5-3	-0.237	0.014	0	0	0	→	→
6-1	-0.562	→	17.157	16.672	15.919	15.918	16.650
6-2	0	→	-0.384	0.038	0	→	→
6-3	0.165	0.039	-0.562	→	-0.562	→	→
7-1	-0.562	→	16.650	→	16.650	→	→
7-2	0	→	0	→	0	→	→
7-3	0.014	→	0	→	0	→	→

\*第1列は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2}mm$ 。

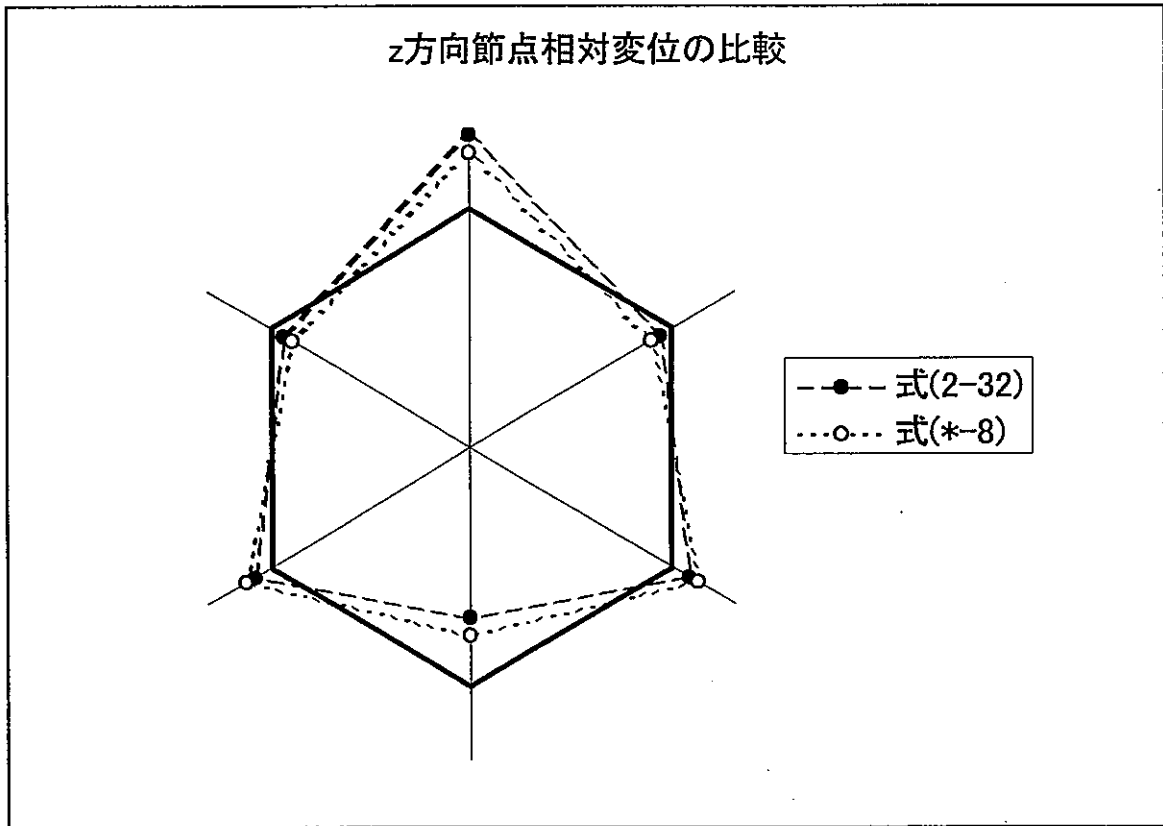
第3章の計算結果と比較するとまったく一致することがわかる。

以上から式(2-32)を使った場合との違いは、軸方向荷重を節点ひとつ置きに3つに分散して負荷した場合にのみ現れていることがわかる。ケース<2-4>の3分散の場合について、軸(z)方向変位の節点7に対する節点1から6の相対変位をとって両者を比較すると次のようになる。

Node-DOF	1-3	2-3	3-3	4-3	5-3	6-3
式(2-32)	-0.037	+0.148	-0.037	+0.037	-0.148	+0.037
式(*-8)	-0.056	+0.111	-0.056	+0.056	-0.111	+0.056

\*第1行は、節点番号と自由度番号の並びを示す。数値の単位は、 $\times 10^{-2} \text{mm}$ 。

上の表を図式化すると下のようになる。



図からわかるように、荷重に対する変形のバランスという点では若干の改善が見られる。ただし、第3章で示したように、パッド要素の幅を大きくして六角形の面外剛性を大きくすれば、実用上問題はないといえる。