

JNC TY7400 2001-002

クロスホール試験の解析法の開発に関する研究
(先行基礎工学研究 研究詳細報告書)

2001年7月

岡山大学

核燃料サイクル開発機構 東濃地科学センター

本資料の全部または一部を複写・複製・転載する場合は、下記にお問い合わせください。

〒319-1184 茨城県那珂郡東海村村松4番49

核燃料サイクル開発機構

技術展開部 技術協力課

Inquires about copyright and reproduction should be addressed to:

Technical Cooperation Section,

Technology Management Division,

Japan Nuclear Cycle Development Institute

4-49 Muramatsu, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki 319-1184,

Japan

© 核燃料サイクル開発機構

(Japan Nuclear Cycle Development Institute)

2001

クロスホール試験の解析法の開発に関する研究

西垣 誠*、南部卓也*、竹内竜史**

要旨

近年、大深度地下空間の高度利用により、より正確な地質調査の実施が強く求められており、特に岩盤内の浸透特性分布を高い信頼度で推定することが重要な課題となっている。現在、浸透特性を把握するための方法は多数提案されているが、それらの内、複数のボーリング孔間で透水試験を行うクロスホール透水試験の結果を用い、医学方面で人体内の詳細な構造を知る技術として進歩したトモグラフィ法で空間的な浸透特性の分布を把握する方法がある。しかし、この方法を用いる場合、従来の時間差分法では多大な時間を要することが懸念される。そこで、Laplace Transform Galerkin (LTG)法を適用した3次元浸透流解析手法を用いて、時間領域の複雑な問題を周波数領域での簡単な問題に変換することにより、解析の高度化を試みた。また、シヌソイダル試験を想定した3次元数値実験を行い、水圧伝播の特徴を調べて、クロスホール透水試験の実施体系を検討した。

A Study on a Development of an Analytical Method for a Cross-hole Hydraulic Test
(Document on Collaborative Study)

Makoto Nishigaki*, Takuya Nambu* and Ryuji Takeuchi**

Abstract

A precise estimation of the permeability distribution of rock mass is one of the issues for making use of deep underground. One of the investigation and analysis methods proposed is a cross-hole hydraulic test and a tomographic analysis.

As to a tomographic analysis, a time-domain difference calculation commonly used needs much time. For a fast calculation, Laplace Transform Galerkin method is applied which translate a time-domain problem into a frequency-domain problem.

The feasibility study of a cross-hole sinusoidal hydraulic test is also carried out by three-dimensional numerical experiment.

目次

	頁
第1章 序論	1
1.1 緒言	1
1.2 ジオトモグラフィ手法	2
1.2.1 従来のジオトモグラフィ手法	2
1.2.2 水圧トモグラフィ手法	3
1.3 本研究の目的及び構成	5
第2章 従来の研究	8
2.1 概説	8
2.2 岩盤のモデル化	9
2.3 岩盤における原位置透水試験法	12
2.3.1 単孔式透水試験	12
2.3.2 孔間透水試験(クロスホール透水試験)	16
2.4 岩盤の透水性評価手法	19
第3章 従来の多孔質媒体の三次元浸透流解析手法	28
3.1 概説	28
3.2 支配浸透方程式の誘導	29
3.3 透水テンソル	31
3.4 有限要素法による定式化	33
3.5 時間項の取り扱い	36
第4章 ラプラス変換を用いた三次元浸透流解析手法	39
4.1 概説	39
4.2 ラプラス変換	41
4.3 ラプラス空間での定式化	42
4.4 数値ラプラス逆変換	46

4.4.1	概説	46
4.4.2	細野の方法	47
4.4.3	Crumpの方法	48
4.5	LTG法の解析精度の検証	54
4.5.1	理論解析及び従来の解析手法との精度の比較	54
4.5.2	シヌソイダル試験を想定した場合の解析精度及び時間の検証	60
第5章	連立一次元方程式の数値解法	68
5.1	概説	68
5.2	数値解法の概要	68
5.2.1	直説法	68
5.2.2	反復法	69
5.3	非対称行列の反復解法	71
第6章	クロスホール透水試験を想定した数値実験	76
6.1	概説	76
6.2	応答水圧の特徴	77
6.2.1	定圧試験とシヌソイダル試験の応答水圧の比較	77
6.2.2	水頭拡散率と応答水圧の関係	82
6.3	岩盤の不均質部が応答水圧に与える影響	85
6.3.1	概要	85
6.3.2	不均質部が地表面に対し鉛直方向に卓越している場合	85
6.3.3	不均質部が地表面に対し水平方向に卓越している場合	101
第7章	結論	111
参考文献		114

付録

第1章 序論

1.1 緒言

近年、構造物周辺での景観や地上を日常の居住空間として有効に利用するために、地下空間の大規模な利用が盛んになってきている。トンネルの長大化や都市部における地下河川、揚水発電所などが挙げられる。このような地下構造物が建設される岩盤中は、恒温性や気密性、遮断性、耐震性、安定性に優れているといった素晴らしい特性を有している。この特性に着目して、21世紀に向けたエネルギー供給の更なる高効率化を実現するために、原油・液化ガスの岩盤内備蓄タンクや圧縮空気貯蔵システム(CAES)、放射性廃棄物地層処分場といったような、これまでになかった地下空間の大規模な利用も検討されている¹⁾。

しかし、地下空間の利用には、周辺岩盤の安定性の欠如による地下構造物の崩壊などの大惨事を引き起こす恐れがつきまとう。また、地下空洞掘削に伴う多量の地下水の流出が原因で、井戸や湖沼の涸渇や地盤沈下・陥没を引き起こし、周辺環境へ様々な悪影響を与えることも懸念される。一方で、都市部近傍における比較的地質が良好とはいえない箇所での建設が増加することも考えられる。

したがって、地下空間利用の際には、周辺環境への影響と構造物の安定性に対する評価を十分に行うために、建設に伴う正確な地下水挙動の予測が重要となる。そのためには、原位置での岩盤内の透水性分布の評価を高精度で行うことが、最重要課題となる。

岩盤は、亀裂、断層、破碎帯等の大小の割れ目（不連続面）を含む、本質的に不連続かつ不均質な材質である。しかも、それらは種々の方向、開口度、間隔を持ついくつもの群として存在している。岩盤内の地下水は、主に岩盤内を流動又は静止しているため、工学的意味での岩盤の透水性はこれらの割れ目に依存することとなる。しかも、岩盤の透水性は、一般に、割れ目の性状に依存した強い異方性と貯留性を有している。そのため、岩盤内の透水性、貯留性を評価し、挙動を予測するには3次元的な取り扱いが必要である。

1.2 ジオトモグラフィー手法

1.2.1 従来のトモグラフィー手法^{2),3)}

現在、岩盤の透水経路や不均質性の調査手法としてジオトモグラフィー (Geotomography) 手法が注目されている。トモグラフィー手法は、医学方面で人体内の詳細な構造を知る技術として開発された X 線 CT (Computed Tomography) に代表される手法であり、外部より何らかのインパクトを与え、その応答より内部構造を把握しようとするものである。この技術を応用して、面的に透水パラメータの分布や地盤の不均質性を探査する技術を総称してジオトモグラフィー手法と呼ぶ。いわば地球を対象としたトモグラフィー手法である。トモグラフィーの“tomo”はギリシア語の“断”を意味しており、トモグラフィーは断面を切るといような意味合いを持っている言葉である。

土木工学においては建設分野(ダム、トンネル、シールドトンネル、橋梁基礎)、防災分野(斜面安定、活断層調査、耐震調査)、環境分野(廃棄物汚染影響評価)等において研究が盛んに行われ、実施事例も多く見られつつある(例えば参考文献 4~7)。

ジオトモグラフィー手法には、表-1 に示すものがある。その他に、超音波を用いる超音波トモグラフィー、核磁気共鳴を用いる NMR、 γ 線を用いる SPECT (single photon emission CT) などがある。

これらは共通して、各物理現象を数理モデル化し、逆問題のアルゴリズムを構築し、数値解析手法を適用することによって、対象となる領域の地質構造の形状、性質や透水経路などの地下情報を得る。

これらは次のような利点を有している。

- (1) 面的・空間的な地盤情報を調べることができる。
- (2) 対象とする地下深部領域のすぐそばで測定を行うことから精度良く地盤の情報を抽出できる。
- (3) 詳細な物性断面として地下を視覚的に画像化できる。

一方、次のような問題点がある。

- (1) 測定点の配置によって解析断面に偽像が発生し、解析精度が低下する恐れがある。

(2) 経済的な理由などで対象地盤をボーリング孔や横坑で取り囲む形の理想的な測定が困難となる場合も多い。

(3) 岩盤中の浸透特性の推定に関しては、間接的な情報を与えるにとどまる。

特に問題点(3)に関しては、岩盤内備蓄タンクや放射性廃棄物地層処分における核種などの汚染物質の流出問題について考える必要があるケースが今後多くなることが予測されるため、岩盤中の浸透特性の分布をより高精度に推定する手法の開発が急務となっている。

表-1 主なジオトモグラフィー手法とその利用方法

手法	利用する媒体	概要	利用方法
弾性波トモグラフィー (seismic tomography)	弾性波(地震波、波動の伝播特性)	対象断面周辺(すなわち、地表やボーリング孔、横坑)で起振し、これによって発生した地震波を対象断面周辺の多地点で観測する。通常、投影データとして地震波の初動到達時間が用いられ、この場合、対象断面の弾性波速度分布が再構成される。	断層破碎帯や風化岩盤、堅岩部の分布を把握する。また、岩級区分を調べる。
比抵抗トモグラフィー (resistivity tomography)	電位分布(地盤内電位場の状態)	対象断面の周辺のある位置で電流を流し、それによって生じた電位分布を断面周辺の多地点で測定し、地形などの影響を補正し、投影データとして抽出する。	・地下水の賦存状況や、粘土化した断層の分布などを把握する。 ・塩水トレーサー試験と組み合わせ、岩盤内部の水みちとなる亀裂の分布状況を把握する。
電磁波トモグラフィー (radar tomography)	電磁波(波動の伝播特性)	数10MHz～数100MHzの電磁波を派生させ、地盤を透過してきた電磁波の到達時間、あるいは、振幅を投影データとして、電磁波の速度分布、あるいは減衰パラメータの分布を再構成する。	・帯水層、破碎帯の探査を行う。 ・ボーリングデータとの対比による地下水面の推定

1.2.2 水圧トモグラフィー手法

表-1 に示した各ジオトモグラフィー手法に対し、3次元的な岩盤の水理特性分布を直接把握する手法として、3本以上のボーリング孔間の透水試験を行う孔間透水試験(クロスホール透水試験)がある。この試験は、1つのボーリング孔(注水孔)のパッカーで閉塞した区間に注水することによって生じる非定常的

な水圧変化を、他のボーリング孔(観測孔)でその観測地の経時的な変化を計測するものである。中でも、正弦波によって加圧するクロスホール透水試験(シノソイダル試験)は、潮汐や温度など影響により、バックグラウンドの水圧が変動する場合でも水圧応答が捕らえやすいことなどにより、実用性の高い試験方法の一つであると考えられる。

このクロスホール透水試験から得られた水頭の経時変化データを用いて、3次元浸透理論から導かれた解析コードにより、モデル化された岩盤内の浸透特性の把握が可能となる。この手法を、一般的に水圧トモグラフィー手法(または、ウェルテストトモグラフィー手法)と呼ぶ。水圧トモグラフィー手法の概念図を図-1に示す。

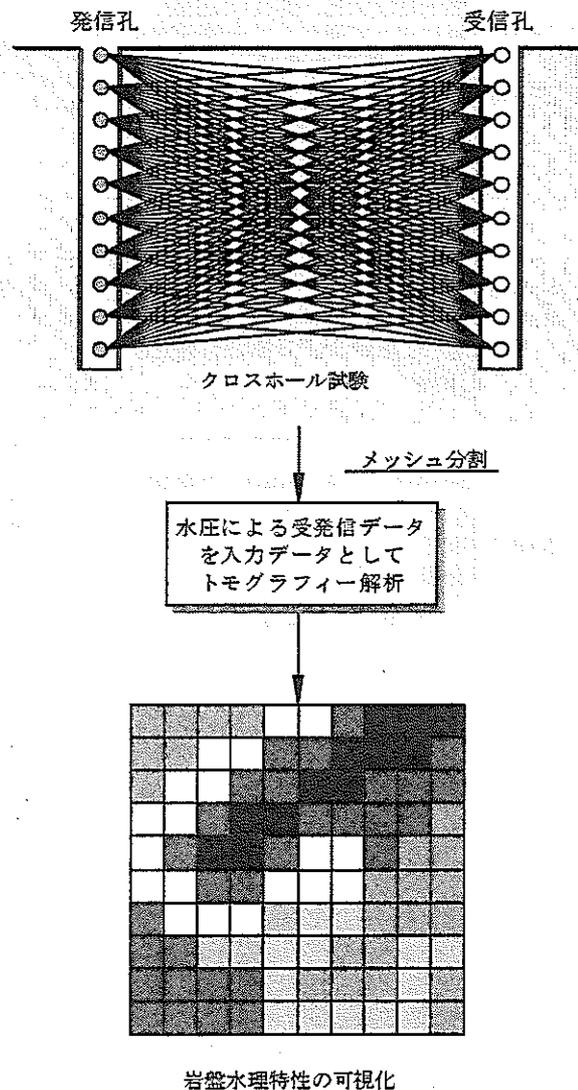


図-1.1 水圧トモグラフィー手法の概念図

しかし、クロスホール透水試験を実施する上で、1.2.1 節に示した問題点(1)、(2)は解決しておらず、更なる検討が必要である。

一方、数値解析の面では、モデル化された岩盤内の浸透特性をあらゆる多数の未知変数を同定する必要があるため、この手法の実用化には、数値計算の高速、高精度化が課題となる。これに対して、従来用いられている時間項を差分化する解析手法では、時間差分の取り方により解析値にばらつきが生じることが懸念される。また、シヌソイダル試験のように境界条件が時間的に変化する場合には、必然的に時間増分を小さくしなければならず、多大な時間を要するという点でも問題が発生する。さらに、実際の試験より現実に則したモデルで評価するためには、3次元モデルでかつ異方性を有した岩盤の非定常状態を逆解析する必要があり、その際にはさらに多くの労力と時間を費やすこととなる。よって、これらの問題を解決できる解析コードの開発が急務である。

1.3 本研究の目的と構成

本研究では亀裂性岩盤を対象としたクロスホール試験結果から岩盤の浸透特性の分布を空間的に推定することを目的としている。

岩盤の浸透特性の定量的評価において、時間的な短縮や、シヌソイダル試験において、その現象を正しく反映させる境界条件の設定を図るために、Laplace Transform Galerkin(LTG)法を用いた3次元浸透流解析手法の開発を行った。また、難・高透水性ゾーンを想定した簡単な解析地盤モデルについて、シヌソイダル試験を想定した数値実験を行い、クロスホール透水試験の実施に伴うボーリング孔の配置体系の検討を行った。

本研究の構成を、以下に示す。

第1章 本研究の背景および目的と構成を述べる。

第2章 従来の研究として、代表的な岩盤のモデル化手法、岩盤における原位置透水試験法を示し、その問題点を考察する。また、クロスホール透水試験を利用した従来の岩盤の透水性評価手法について述べる。

第3章 従来の多孔質媒体の三次元浸透流解析手法について示す。

第4章 岩盤の浸透特性評価方法および多孔質媒体の解析手法と浸透方程式、また、その離散化について、本研究で用いる方法(LTG法)を示し、

その有効性を検討する。

第5章 本研究で用いる連立一次元方程式の数値解法を示す。

第6章 クロスホール透水試験を想定した数値実験を行い、水圧応答結果より、岩盤の不均質部同定の可能性を検討する。

第7章 本研究で得られた知見を整理して結論とする。あわせて、今後の課題を示す。

【参考文献】

- 1) 西淳二, 清水隆文 : 地下空間利用の問題点および将来の可能性, 第 10 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.245-250, 1998.
- 2) 小島圭二 : ジオトモグラフィーの現状と将来, 地質と調査, No.2, pp.2-7, 1991.
- 3) 財団法人エンジニアリング振興協会 地下開発利用研究センター 探査データ解析技術研究会 : トモグラフィ技術に関するための解説書 トモグラフィ技術に関する Q&A, 1997.
- 4) 小島圭二, 神尾重雄, 石橋弘道, 内山成和, 齋藤秀樹, 島祐雅 : ジオトモグラフィーによる岩盤の画像化(その 1) - 岩盤の物性分布の画像化 -, 応用地質, Vol.30, No.3, pp.121-130, 1989.
- 5) 小島圭二, 神尾重雄, 石橋弘道, 内山成和, 齋藤秀樹, 島祐雅 : ジオトモグラフィーによる岩盤の画像化(その 2) - 岩盤内の地下水の流れの画像化 -, 応用地質, Vol.30, No.4, pp.179-188, 1989.
- 6) 鈴木浩一, 藤光康宏 : 弾性波・比抵抗トモグラフィーの地質分野への適用, 電力中央研究所報告, U92082, 1992.
- 7) Hyndman, D.W., J.M. Harris, S.M. Gorelick : Inferring the relation between seismic slowness and hydraulic conductivity in heterogeneous aquifers, Water Resources Research, Vol.36, No.8, pp.2121-2132, 2000.8.

第2章 従来の研究

2.1 概説

前章で示したように、岩盤の工学的な意味での透水性は、その割れ目に依存している。割れ目が不規則に数多く存在する場合には、巨視的には水理学的等方均一な媒体として取り扱える。しかし、一般には、岩盤の透水性は割れ目の性状に依存した水理学的な異方性と貯留性を有している。

岩盤のこのような特徴については、未解明な課題が多い。今日、物理探査法を利用した水みちをとらえるための研究、確率統計的な手法を応用して岩盤の透水経路や割れ目の分布情報などを推定するための研究、さらには原位置試験法の研究など、多くの研究が進められている。これらの内、割れ目の情報から透水テンソルを求める研究は、岩盤の透水性の評価に割れ目の性状を直接反映させるという意味で期待できるが、今後、割れ目の性状や透水性の評価など多くの課題を解決しなければならない。

そこで、現在では岩盤の割れ目の性状をもとにし、透水軸を原位置試験結果により割れ目の透水性をそれぞれ求め組み合わせることによって透水テンソルを求める方法、クロスホール試験によって求められる圧力水頭の経時変化と3次元浸透理論とを組み合わせる方法や、理論曲線とマッチングさせる方法などの研究がすすめられている。また、地質統計学的手法を用いて岩盤の透水性の空間的分布を評価する方法も提案されている。しかしながら、これらの研究の現状は未だ開発の途上にあり、様々な問題点も有している。今日の高度な岩盤構造物の開発のためには、これらの研究に加えて、岩盤の浸透性を透水係数のみならず、その異方性と貯留性を評価する方法について多方面からの研究が必要である。

本章では、まず、岩盤のモデル化と原位置透水試験法を示し、それらの特徴を紹介する。そして、これらの方法を用いた従来の岩盤の透水性評価に関する研究を示し、その問題点について述べる。

2.2 岩盤のモデル化

岩盤内の浸透を考えると、通常、調査・測定データに基づき、岩盤という透水媒体を岩盤水理モデルに置き換えてその透水性を評価する。その際、仮に岩盤の全ての亀裂について透水性を決定することができれば、岩盤全体の透水性が求められるのだが、すべての亀裂情報を測定することは現実的に不可能である。よって、岩盤をモデル化する上で、急速に進歩した解析技術と岩盤の亀裂調査のバランスを保つことが必要である。

岩盤の割れ目は、ボーリングなど各種調査により得られた亀裂情報(例えば、亀裂方向、亀裂分布密度、開口幅、亀裂群の数、ブロックサイズ)を利用して、理論的にモデル化される。そして、有限差分法(FDM)や有限要素法(FEM)などの数値解析手法により実際問題に適用され、浸透現象の解明、予知に利用される。

現在、亀裂情報を用いた代表的な岩盤モデルの概念を図-2.1に示す⁸⁾。岩盤モデルは大きく以下の2つの方向性がある。

(1) 連続体モデル

- ① 多孔質モデル
- ② 等価多孔質モデル

(2) 不連続帯モデル

- ① 亀裂中の流れに着目したモデル化(亀裂ネットワークモデル)

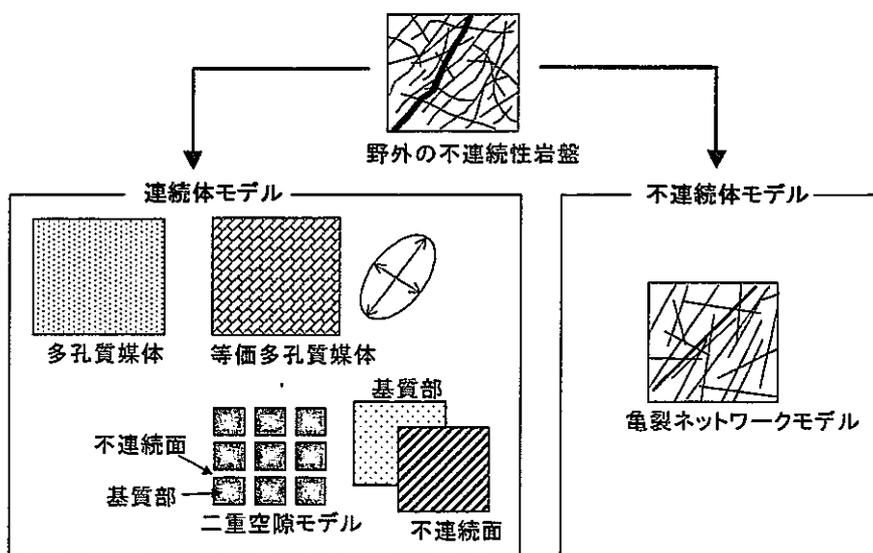


図-2.1 岩盤の水理モデル⁸⁾

(1)①の多孔質モデルは、従来の地下水浸透流解析に用いられてきた多孔質体中の浸透モデルにそのまま岩盤に当てはめるものである。解析に用いる浸透の支配方程式は次章に示す質量保存則とダルシーの法則から成り立っている。

この手法は、対象岩盤をそれと等価な要素の集まりとしてモデル化を行う。しかし、岩盤の亀裂情報をすべてモデル化することは、現在の計算機能力の限界や演算時間の増加等を考えると非現実的である。そのため、岩盤のスケールを非常に大きくとり、均質な連続体であると見なすことによってモデル化を行う。また、対象岩盤を亀裂状況などの違いによりいくつかの領域に分割する(ゾーニング)ことにより、岩盤の不均質をある程度表現することも可能である。ただし、両者の場合とも、計測のスケールを大きくとり、十分な数と長さの不連続面が対象とする領域に含まれていることが条件として挙げられるが、これを確認することが容易でない。

また、(1)②の等価多孔質モデルと呼ばれるものは以下の2通りに大別される。一つは、小田らにより提案されている⁹⁾。小田らはクラックテンソル理論を用いて、亀裂情報から透水テンソルを求める方法を提案した。これは岩盤の透水係数の三次元異方性をうまく決定しようとするものである。この方法はボーリング孔からサンプリングした亀裂情報と水理学的、地質統計学的に等価な多孔質媒体に置換する手法で、統計処理に十分な数の亀裂をサンプリングすることと共に、その十分なサンプリング精度が要求される。

もう一つのモデルは、石油資源工学の分野で発達した2重空隙モデルで、Barenblattらによって提案された方法である¹⁰⁾。このモデルの特長は岩盤の主透水経路となる亀裂を表す連続体と主に貯留を受け持つ intact rock を表す連続体を重ね合わせるという概念である。つまり、2連続体について各々浸透の式があり、同一点に2つの水頭を持たせ、両水頭の差により両連続体間を地下水が移動する効果が考慮されている。このモデルでは水位変動の遅延現象などが表現できるものの、実測水位との対応が明確ではない事が問題として挙げられる。

(2)の手法は、亀裂を決定論的に捕らえる方法である。この方法は、最初、Longらにより報告された¹¹⁾。Longらはサンプリングした亀裂情報と統計学的に同じ多数の一次元亀裂要素を発生し、数値実験により領域の透水係数とその異方

性を議論している。この方法は亀裂が網目状に結合しているので、一般に亀裂ネットワークモデル、または水みちネットワークモデルと呼ばれ、3次元問題への拡張¹²⁾や実問題への適用¹³⁾など様々な取り組みが行われている。このモデルは以下のような利点を有している。

- ① 割れ目の位置、走行、傾斜といった水理地質情報を直接的にモデルに取り込むことができ、モデルの構築が容易である。
- ② 解析領域のスケールや割れ目面の数、管路の頻度にもよるが比較的浸透流解析に要する計算時間が短い。

この方法についても、小田らの方法と同じように亀裂情報のサンプリング精度を高めることができれば、岩盤浸透に関するシンプルな理論モデルを与えることができる。また、これらのモデルは、一つの亀裂を平行2枚板や円盤としてモデル化し、開口が幅一定の平行板中の層流を仮定している。したがって、亀裂面の凹凸や介在物の影響など種々のファクターを取り入れる代わりに、亀裂開口幅を水理学的開口幅という概念でそれらの影響を一括して表現している。そのため、実測開口幅と水理学的開口幅にはモデルの仮定時から生じる相違が存在する。しかも、平行板中の流速は亀裂開口幅の2乗に比例することがわかっており、開口幅は透水性を大きく左右する最も大きな要因の一つとなっている。しかし、現状では、亀裂開口幅は露頭やボーリング孔から実測することが困難であり、亀裂に介在物が存在する場合には事実上不可能であると考えられる。したがって、モデルの信頼性が大きく低下する恐れがある。

以上の岩盤のモデル化に加えて、広域における亀裂性岩盤の地下水解析への適用を目指した等価不均質連続体モデルと呼ばれる手法が提唱されている¹⁴⁾。これは、不連続面からなるネットワークパターンを、不均質性や異方性を有するそれと等価な連続体ブロックに置換し、個々の要素内に含まれる亀裂に対してクラックテンソル理論を適用し、等価な透水テンソルを計算する方法である。この大きな利点は亀裂ネットワークモデルと比較して、個々の亀裂を要素分割する必要がなく、計算容量や計算時間の短縮を図ることができることにある。しかし、このモデルに関しても上述した小田らや Long らの方法と同様に、モデル化に際して正確な亀裂情報と水みち構造の把握が必要不可欠である。

以上に代表的な岩盤のモデル化手法を示したが、各モデル化に共通して考え

ておかなければならないことは、モデルの信頼性を左右するパラメータを決定することができるか、モデルで仮定した条件が実務上成り立っているかということである。モデルのパラメータを十分な精度で求めるためには、理論的アプローチから得られる透水性に関して、原位置透水試験の結果と比較検討することが不可欠である。

そこで、次節では、従来から研究され、また実用化されている原位置透水試験法を示し、その利点及び問題点について述べる。

2.3 岩盤における原位置透水試験法

2.3.1 単孔式透水試験(シングルホール試験)

岩盤のように透水性の低い地盤を対象とした単孔式透水試験(シングルホール法)の手法には、代表として、ルジオン試験、JFT試験、さらに西垣、中屋によって提案された方法が挙げられる。

(1) ルジオン試験^{15), 16)}

ルジオン試験は、ボーリング孔のある一定の区間をパッカーで区切り、その区間に外部から段階的に圧力を上昇させながら注水し、有効注入圧力が 10kgf/cm^2 に達した後、定常状態に保つ。その時、ボーリング孔の長さ 1m につき岩盤中に圧入されたときの注入流量(l/min)で透水性を評価するものである。透水度の単位にはルジオン(Lu)を用い、 $1(Lu)=1(\text{l/min/m}/10\text{kgf/cm}^2)$ である。この試験はボーリング孔を利用するため、ダム基礎深部まで試験を実施できることや、方法が単便であるため、広く実施されている。

しかし、以下のような問題点を有している。

- ① ルジオン値は、岩盤が透水性に対して、均質等方性を示すため、測定媒体が透水性に異方性を含む場合、異方性の検出は不可能である。
- ② 孔壁のごく近傍の局所的な岩盤のみが対象であり、この試験からは広域的な透水性の把握は困難である。
- ③ 孔径試験長などの理論的裏付けや規格がなく、地下水位などの境界条件の取り扱いが不明である。

- ④ 孔掘削におけるボーリング方法や掘削速度が試験精度に影響する。特に、弱い岩盤では考慮する必要がある。
- ⑤ 100 ルジオンを越えると結果の精度が著しく落ち、試験の適用限界となる。
- ⑥ 基準注水圧力は 10kgf/cm^2 であるが、この圧力について決定根拠が曖昧で、多くの議論がなされており、賛否両論である。

問題点②については、中屋らがルジオン値データと地盤統計的手法の一つである Block Kriging を用いて、岩盤全体の透水性の空間分布を推定を試みている¹⁷⁾。この手法は、ダムサイトなどでボーリングが多数存在する場所において、三次元的に整合性のとれたルジオン値の構造マップを作成する際に有効であると紹介されている。つまり、対象岩盤の透水性の推定精度を向上させるためには多点でのルジオン値データが必要となる。

(2) JFT 試験^{18),19)}

ルジオン試験と並んで、現在広く実用されている試験方法に JFT 試験がある。この試験は、図-2.2 のような試験装置を用い、バルブを開放することでロッド内に地下水を流水させ、水位計あるいは、水圧計を用いて水圧の経時変化を測定する非定常法である。

従来の JFT 試験は以下の問題点が有していた。

- ① バルブを地上から操作して開閉することができないので、1回の測定毎に装置を回収し再セットする必要がある。
- ② 原理的に観測管内を大気に開放した状態から計測を開始するため、測定深度が深くなるに従って過大な水頭差が生じ、水撃による岩盤の破壊、目詰まりが起きる可能性がある。
- ③ ロッド内に地下水が流入する必要があるため、測定に長時間を要する。

これらの問題を解決するために、柳沢、西垣らは、地上操作によりバルブの開閉を自在にできる装置を考案した(図-2.2(b))。改良型の場合、測定管内にインナーパッカーによる閉鎖空間を作り、間隙水圧を測定する方法を採用しているため、地下水の移動が少なく迅速に平衡状態が実現され測定が容易となっている。

しかし、ルジオン試験と同様に試験孔近傍の局所的な水理特性は把握できる

ものの、広域的な岩盤の透水性の把握は困難である。また、この方法も均質等方性媒体と仮定した透水係数が得られるため、岩盤透水係数の異方性を把握することは不可能である。

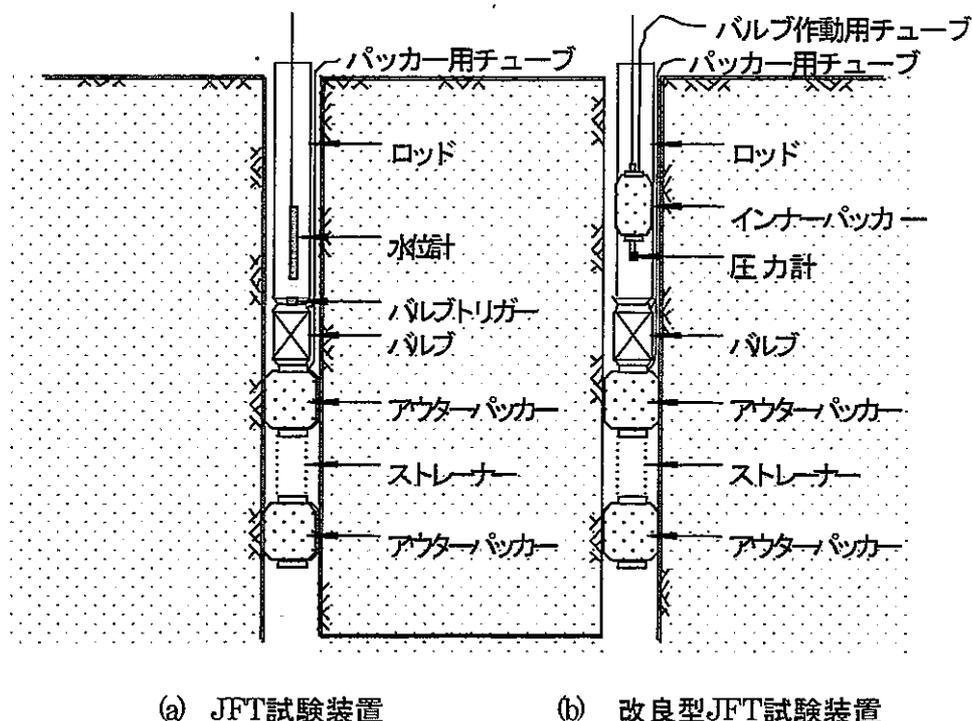


図-2.2 JFT 装置概念図¹⁹⁾

(3) 中屋・西垣の方法²⁰⁾

上記の単孔式透水試験法では、3次元異方性透水係数の決定は不可能とされてきたが、西垣、中屋らは、単孔式で3次元透水係数を決定できる方法を提案している。この方法は、単孔内で3種類の定常透水試験を実施し、岩盤の亀裂方位データや地質学的な面構造から透水主軸を求めておき、3種類の注水流量から3方向の主透水係数を決定するものである。

試験方法は、鉛直パッカー法、水平回転パッカー法、ルイナメール法に分類される。いずれも孔内を4つのパッカーで3つの区間を作る。

鉛直パッカー法は、中央の区間に注水圧、上下の区間を初期水圧に保つ方法であり、中央の区間から媒体内への定常注水量を測定する。これにより鉛直方向の透水性を求める。

水平回転パッカー法は、各区間を回転可能な中央隔壁により2つの副区間に分け、片方の副区間に注水圧、他方の副区間を初期水圧に保つ方法で、中央の副区間から媒体内への定常注水量を測定する。定常注水量は各方向で変化するため、この最大値及び最小値を測定することによって、異方性の程度を知ることができる。

ルイメナール法は Louis により考案された岩盤透水試験法である²¹⁾。この方法は、全ての区間に同じ注水圧を作用させ、鉛直パッカー法と同様に中央の区間から媒体内へ注水する。中央注水区間からの注水と干渉を起こすため孔軸に対して垂直な方向に流れ、区間からある程度に至るまでは、円筒上流となる。よって、中央区間の定常注水量より、ボーリング孔軸に対して垂直な方向の透水係数が求められる。

これら3種類の試験より得られた定常注入流量を西垣、中屋らが数値解析的に求めた算定式に代入することによって、主透水係数は決定される。

この試験は、単一ボーリングによって、3次元透水係数テンソルを決定できる点において画期的であるが、比貯留係数が決定できないことや、方向透水係数の異方性が10倍以上では、透水係数を決定できないという問題点もある。

また、単孔式透水試験全体でいえることであるが、試験より得られた透水係数は、局所的な範囲のものであり、岩盤全体で見たマクロな透水性の決定には力不足である。

2.3.2 孔間透水試験(クロスホール透水試験)

ここでは、前節で示した単孔式透水試験の問題点を解決する方法として、孔間透水試験について従来の研究を取り上げ、その有効性と問題点について言及する。

単孔式透水試験による手法と最も異なる点は、単孔式試験では定常状態の透水を取り扱っているために、透水係数テンソルの決定に終始していたのに対し、孔間透水試験(クロスホール透水試験)では、非定常の透水試験から透水テンソルだけでなく浸透現象の応答速度を決めるパラメータである比貯留係数の測定も行う点である。

クロスホール透水試験は、2本以上のボーリング孔を用いて透水試験を行い、試験孔の一孔に圧力を加圧して他方でその応答を計測する。この計測された試験孔間での圧力の減衰と圧力周期の位相差などより岩盤の浸透特性を把握する。この手法は、スキニング効果などの単孔式試験の欠点を補うことが可能である。また、多数の試験をすることで面的に、あるいは三次元的に透水性を評価することができるため、異方性を含む透水テンソルの評価について、理論的アプローチと比較し得る透水試験法として多用されつつある。図-2.3に概念図を示す。

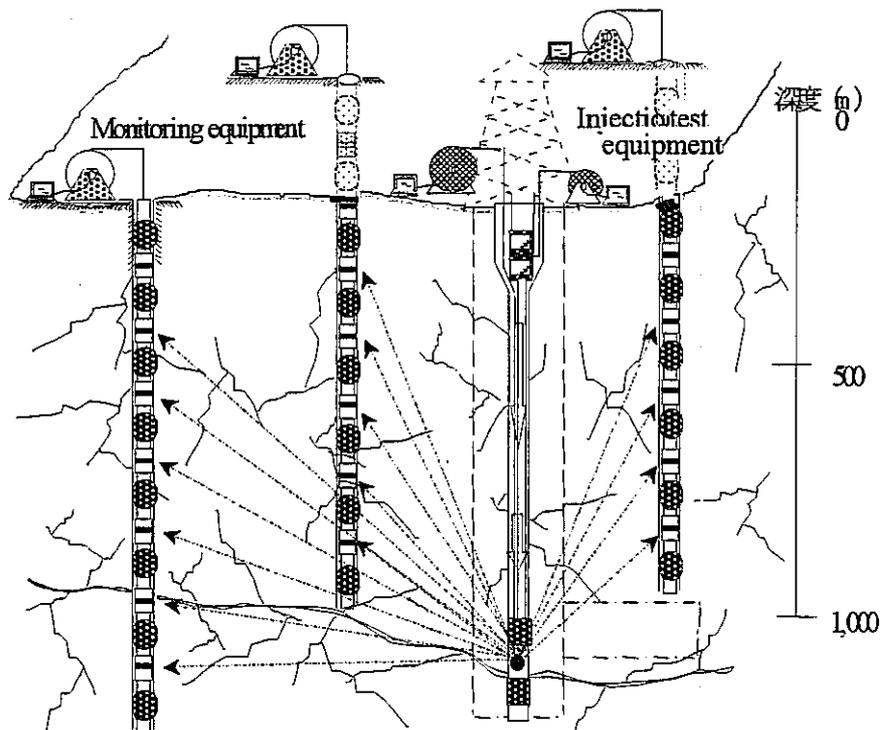


図-2.3 クロスホール透水試験概念図

クロスホール透水試験は、定圧・定流量試験、大規模透水試験、水圧パルス法、シヌソイダル(正弦波圧力)試験等に分類される。

(1) 定圧・定流量試験

加圧孔における注水の仕方によって、一定の圧力もしくは流量に保って試験を行う方法を定圧・定流量試験と呼ぶ。この方法は、クロスホール透水試験試験の基本的な試験方法であり、クロスホール透水試験の中では数多く行われている試験である。

(2) 大規模透水試験²²⁾

大規模透水試験は、1978年にL. Lundstorn達によって提唱されたものである²³⁾。試験にあたっては円の中心に一本の試験孔、その円周状をスリットに近似した複数本の試験孔を配置する。試験では周辺の複数の試験孔より同時に一定の圧力で注水し、周辺孔から中心孔への浸透流量および周辺孔と中心孔との圧力差を計測する。この計測された浸透流量と圧力差より透水係数を算出する。そのため、試験孔近傍の局所的な割れ目などの地質要素の影響を受けることなく、周辺孔で囲まれた比較的大きな岩塊を対象とした透水試験が期待できる。

この試験では、試験条件を単純にするために、浸透流を周辺孔から中心孔に向かう水平放射流となるように配慮する必要がある。しかし、試験時の浸透流はこのような理想的な状態にならない場合も考えられる。また、試験時の浸透流の浸出を防ぐための止水対策が必要となる。

(3) 水圧パルス法

水圧パルス法は加圧孔で注水と注水停止とを交互に繰り返す、方形波のパルス水圧を加圧する。この試験による研究は登坂、増本ら^{24), 25), 26)}によって考察されている。彼等は、トモグラフィーを行う際に未知数に見合う十分なデータ量を得るためには、強い非定常流を発生させることが必要であり、水圧パルス試験を用いることが効果的である、と報告している。また、実際に水圧パルス試験を想定した逆解析数値実験を行い、3次元モデルでの浸透率分布同定の可能性を示している²⁵⁾。この手法では、莫大な演算時間が必要であり、増本らは

演算時間を短くするように改良しているが、現状では数十回の演算が必要である。

(4) シヌソイダル(正弦波圧力)試験

シヌソイダル試験は、正弦波圧力試験とも言われ、正弦波状の注水圧力波形によるものである。これはスウェーデンで行われたストリパプロジェクトにおけるクロスホールプロジェクトの一環として最初に実施され、Black J.h. and K.L.Kipp によって考察されている²⁷⁾。彼等の方法は、一方の発信孔から発生させた周期的な水圧変化を他方の観測孔で計測し、孔間の水理特性に起因する圧力減衰あるいは位相のずれから、次式で示す水頭拡散率 η を決定するものである。

$$\eta = \frac{k}{Ss} = \frac{T}{S} \quad (2.1)$$

ここで、

- k : 透水係数
- Ss : 比貯留係数
- T : 透水量係数
- S : 貯留係数

発信源および観測点での水圧の振幅と位相差を計測すれば、対象領域の岩盤全体もしくは亀裂の水頭拡散率 η を求めることが出来る。

この方法では、信号水圧の発信周波数を色々と変化させることが可能であることや、バックグラウンドの水圧が変動する場合でも水圧応答が捕らえやすいといった利点を有しており、低透水性岩盤に適用できるため、今後実用性の高い手法として期待されている。

シヌソイダル試験では、受信孔での圧力変化を sin 波でカーブフィッティングさせることで地盤内における種々のノイズ（潮汐、気温や温度による水頭変化、地震発生による水頭変化等）を容易に分離することが可能である。ただし、発信孔から発生させる周期的な水圧変化は、ノイズの影響を受けにくいように、長周期の水圧変化を行う方がよい（図-2.4 参照）。

しかし、以下のような解決すべき課題を有している。

- ① 水頭拡散率 η から透水係数 k と比貯留係数 Ss を分離することが難しい。

- ② 試験結果のデータが莫大な量となるので、試験結果の整理及び処理に時間がかかる。
- ③ ボーリング孔の共振のような慣性の影響が結果の解釈を複雑にしている。
- ④ 受信側は多段に区切ることも多く、亀裂系岩盤のような低透水性の部分が含まれる媒体では高感度・高分解能の圧力センサーが必要となる。
- ⑤ あまり大きな水圧変動を加えると、孔内岩盤を破壊してしまう恐れがある。

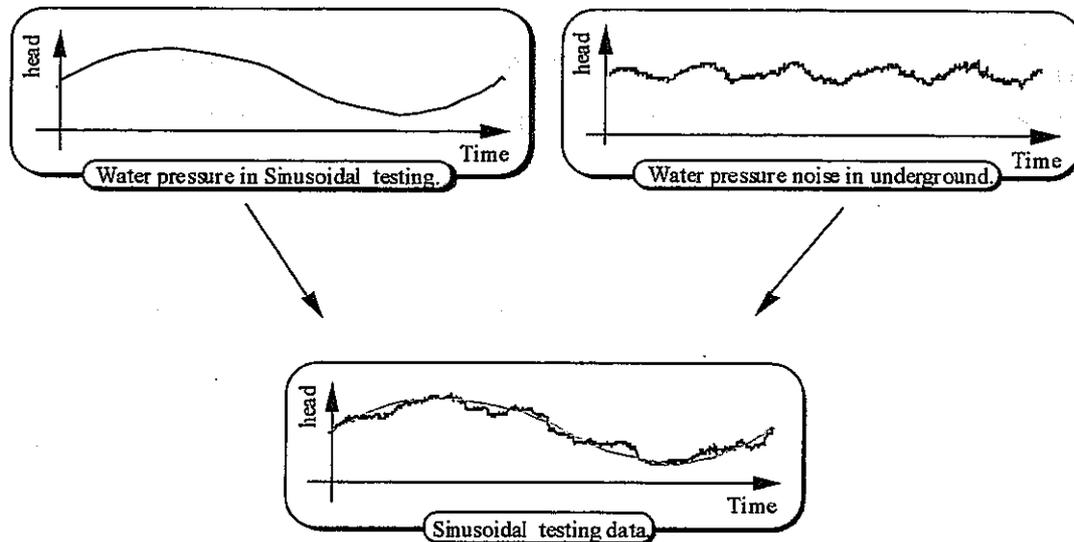


図-2.4 シヌソイダル試験のノイズ除去

2.4 岩盤の透水性評価手法

2.3 節までに、岩盤の透水性を評価する際に用いる岩盤モデル及び透水試験方法を示した。この中でも 2.3.2 節に示したクロスホール透水試験は、岩盤のような異方性媒体の透水性を評価する上で有効な手法である。しかし、この岩盤透水試験から三次元の透水係数テンソルを直接決定することが問題となる。

この問題を最初に解決する実質的な方法を開発したのは Hsieh and Neuman²⁸⁾, Hsieh et al.²⁹⁾である。彼等はクロスホール透水試験での多孔質媒体内の三次元浸透理論を展開した。そして、観測孔での観測水頭と三次元浸透の理論曲線とのマッチング手法により注水点と観測点を結ぶ方向の透水係数(方向透水係数;directionally hydraulic conductivity)を多方向について測定し、最小 2 乗法によって透水係数テンソルがつくる透水楕円体を決定した。この方

法は、岩盤をそれと等価な均質で異方性をも多孔質媒体とした場合、透水係数テンソルを三次元的に直接決定できるうえに、次の2つの点が大きな利点となっている。

- ① テストの前に主軸方向を知る必要がない
- ② ボーリング孔はどの方向に掘削してもよい。

彼等の方法は岩盤が不均質な異方性媒体として振る舞うか否かについてフィールドの巨視的な情報が直接得られるという点で特に重要である。青木ら³⁰⁾や奥野ら³¹⁾も同様の方法で岩盤の透水係数テンソルを測定している。

また、中屋・西垣は3次元浸透理論とを組み合わせる方法を提案している³²⁾。彼等は岩盤ブロックをそれと等価な水理学的に均質で異方性を持つ多孔質媒体に置換し、岩盤に発達する亀裂をクロスホール透水試験により求められる圧力水頭の経時変化と地質統計学的方法を組み合わせ、岩盤の3つの主透水係数と主軸方向および比貯留係数を精度よく推定している。

本島らは、シヌソイダル試験より求められた圧力の減衰率及び位相差を利用することにより、透水係数と比貯留係数を理論的に求めている³³⁾。まず、圧力減衰率と位相差について2種類の透水係数を算出し、式(2.1)により比貯留係数を求めている。また、彼らは正弦波圧力試験の原位置試験装置も開発している。これを用いて試験を行う場合は、位相差の計測誤差の影響が解析解に大きく影響を与えるため、圧力減衰率より算出した結果を採用している。

Noy, D. et al.は非整数次元流れ(Fractional dimension flow)モデルについて、その理論を展開し、周波数の異なる複数のシヌソイダル試験結果を用いて、解析を行っている³⁴⁾。2次元(放射流)モデルや3次元(球状流)モデルを用いた場合では周波数により解析値がばらついていたが、非整数次元モデルを用いることにより、周波数によらないほぼ一定の透水係数および比貯留係数が得られている。国内でも、竹内、下茂らが実際の試験に本手法を適用している³⁵⁾。

以上の理論的アプローチに対して、地質統計学的手法によって透水性分布の推定をする方法がある。地質統計学的手法とは、主に単一ボーリング孔の透水試験から得られた透水係数から地盤統計学的手法の一つであるクリッキング手法を適用し、ボーリング孔間を補完法によって推定するものであった(例えば、参考文献 17)。この方法を、近年、クロスホール透水試験の圧力応答を用いて

透水性分布の推定を試みる動きがある。例えば、Hsieh et al.は、クロスホール透水試験の応答結果より孔間の水理学的連続性を調べ、空間的変数をもちいたバリオグラムモデルを用いて高透水性ゾーンを推定している³⁶⁾。国内では、小林らが物理探査や地質調査から得た亀裂頻度を補助データとして、Indicator Simulation 手法による透水性分布の推定の可能性を検討している³⁷⁾。

しかし、これらの手法は、対象岩盤の透水性を高精度に推定するためには、亀裂情報など比較的広範囲にわたり多量のデータが必要となる。また、岩盤中の地下水流れの理論的裏付けを欠く手法であるところに問題があると考えられる。

3次元浸透理論と数値逆解析を組み合わせた手法としては、先に示した、中屋、西垣らの方法並びに登坂、増本らの方法がある。これらの方法で用いられる数値逆解析手法は、未知パラメータを仮定して順解析を行い、問題ごとに決まる評価関数を最小化(あるいは最大化)するために、未知パラメータを変更しながら繰り返し計算を行う手法が用いられている。中屋らの手法は、Hsieh and Neuman の理論式²⁸⁾を順解析部分とし、非線型最小二乗反復法として修正マルカート法を用いている³²⁾。これに対し、増本らの手法は、有限差分法を順解析部分とし、非線型最小二乗反復法として準ニュートン法を用い、評価関数の微分値を求める方法として最適制御理論を導入している。これにより、逆解析の反復1回当たりの順解析実施回数を最小とすることで、計算時間の高速化を図っている^{25), 26)}。増本らの逆解析手法を利用した例としては、2次元ではあるが、田中・本島はシヌソイダル試験による透水性分布の推定を試みている³⁸⁾。また、渡辺らは、増本らの逆解析手法に順解析部分を亀裂ネットワークモデルによる解析方法に改良した方法を提案している³⁹⁾。

これらの方法は、

- ① 地下水流の理論的裏付けがあり、実際の地下水流の流れを忠実に再現できる。
- ② 実際の岩盤を想定した解析モデルについてコンピュータにより順解析を行っているため、地盤の不均質性を取り入れやすい。
- ③ 原位置の比較的マクロな領域を映像化できる。

といった利点を有している。

しかし、岩盤モデル化の際に問題が発生する可能性がある。増本らの方法で

は、有限差分法を用いていることにより直交しない卓越割れ目のような座標軸と非平行な成分の水理地質情報をモデルに反映させるのは困難である。また、渡辺が改良した方法では、割れ目モデルの妥当性そのものに非常に支配されるため、モデルの妥当性を実証すること自体が困難である。

また、順解析を用いて実測結果に適合する水理パラメータを求める作業は、かなりのトライアル・アンド・エラーを繰り返す必要がある。これについては、増本らは、対象岩盤をあらかじめゾーニングをしておき、モデルの浸透特性のゲーピングを行うことによって未知数を減らし、計算の効率化を図る方法を提案している²⁵⁾。

近年、このような対象岩盤をグループングする際に必要な事前情報を取得するための原位置試験法として、1.2.1 節に示したジオトモグラフィー手法が注目されている。例えば、下茂らはクロスホール試験の水圧パルス法と電磁波探査や弾性波トモグラフィーと組み合わせることによって地下水浸透経路の把握を図っている⁴⁰⁾。

また、BTV 観測やジオトモグラフィーとクロスホール透水試験を組み合わせた水理地質構造モデル構築例が田中によって紹介されている⁴¹⁾。ここでは、まず、各種物理探査、レーダー・弾性波トモグラフィーにより、対象岩盤の割れ目構造を抽出している。そして、クロスホール透水試験のシヌソイダル試験結果と単孔式透水試験結果及びそのクリッキングによる統計解析結果を総合的に評価して、透水性分布状況の推定を行っている。この結果と先に抽出した割れ目構造を比較することにより、岩盤内の地下水浸透経路の把握を試みている。

これらは両者とも2次元的なアプローチである。岩盤内構造物の大型化が進み、より高度な地質調査や地下水流動の予測を行うためには、実際の地下水流動を忠実に再現しなければならない。そのためには、3次元的なアプローチが必要である。

以上に、クロスホール透水試験の圧力応答等を利用した、いくつかの岩盤の透水性分布把握方法を示した。クロスホール透水試験の中でも、本島らが考察したシヌソイダル試験が、バックグラウンドの水圧が変動する場合でも水圧応答が捕らえやすいこと等から考えて、特に注目すべき試験である。今後、現場における適用事例の蓄積が望まれる。また、実施が高価であるため、効率よく試

験を行うための実施指針等の作成が必要である。

また、応答結果より透水性分布を推定する解析方法の中では、増本らが考案した3次元浸透理論と数値逆解析手法を組み合わせる方法が、計算の効率化と信頼性を高める上で有効な方法であろう。しかし、シヌソイダル試験を想定する場合には、加圧源が常に変動するため計算時間ステップを細かく取る必要があり、計算効率が低下することが考えられる。そのため、これらの問題を解決できる新しいアプローチが必要である。

【参考文献】

- 8) 中屋眞司：不連続性岩盤の調査・解析と評価 5.不連続性岩盤における調査・解析事例(浸透問題)(その1), 土と基礎, Vol.48, No.11, pp.44, 2000.
- 9) Oda, M. : Permeability tensor of discontinuous rock masses, Geotechnique, Vol.35, No.4, pp.483-495.,1985.
- 10) Barenblatt, G.I., I.P. Zheltov and N.Kachina : Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, Prinkl. Matem. Makh., Vol.24, pp.852-864,1960.
- 11) Long,J.C.S. ,J.S.Remer, C.R.Wilson, and P.A.Witherspoon : Porous media equivalents for networks of discontinuous, Water Resources Research, Vol.18, No.3, pp. 645-658,1982.
- 12) 例えば, End,H.K. ,Long,J.C.S. : A model for investigating transport in fracture networks, Water Resources Research, Vol.20, pp.1390-1440, 1984.
- 13) 例えば, 杉村淑人, 森田豊, 渡辺邦夫 : ダム基礎岩盤の水みち構造把握の試み, 土木学会論文集, No.590/III-43, pp.223-237, 1998.
- 14) 山本肇, 下茂道人 : 等価不均質連続体モデルによる亀裂性岩盤の浸透流解析手法, 大成建設技術研究所報, 第29号, pp.257-262, 1996.
- 15) Lugeon, M. : Barrages et geologie, Poligrafico pedrazzini, Locarro., pp.85-111, 1933.
- 16) 山口嘉一, 松本徳久 : ダム基礎の透水性とルジオン値, 土木学会論文報告集, No.412, pp.51-60, 1989.
- 17) 中屋眞司 : 割れ目系岩盤における水理定数の三次元空間分布の推定法, 地下水学会誌, Vol.42, No.1, pp.95-105, 2000.
- 18) 柳沢孝一, 齋藤章, 西垣誠, 平田洋一 : 新しい現場透水試験法(動燃式 JFT) の開発と測定例, 土と基礎, Vol.37, No.7, pp.47-52, 1989.
- 19) 柳沢孝一, 西垣誠, 平田洋一 : 動燃式低水圧制御水理試験機(動燃式 JFT) の原理と適用例, 地下水学会誌, Vol.30, No.30, 1989.
- 20) Louis, C. : Rock hydraulics, B.G.R.M. Report, Orleans, 1974.
- 21) 西垣 誠, 中屋眞司, 河野伊一郎 : 原位置試験における節理性岩盤の3次

- 元異方透水係数の測定法に関する一提案, 第 22 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp.376~380, 1990.
- 22) 本島勲, 宮川公夫, 田中靖治, 大山隆弘, 志村孝吉, 北野晃一: クロスホール透水試験による超低透水性岩盤の基礎的考察, 電力中央研究所研究報告, U90003, pp.3-4, 1990.
- 23) Lundstrom, L., H. Stille: Large scale permeability test of the granite in the STRIPA mine and thermal conductivity test, LBA-7053, SAC-02, 1978.
- 24) 登坂博行, 増本 清, 伊藤一誠, 大塚康範: パルステストデータを用いた岩盤水理特性分布の 3 次元逆解析手法, 第 8 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, 1990.
- 25) 増本 清, 登坂 博行, 小島 圭二: 多点非定常圧力とその時間変化率の同時自動マッチングによる岩盤水理特性逆解析 - 3 次元基本アルゴリズムの開発 -, 地下水学会誌, 第 40 巻第 3 号, pp.273~287, 1998.
- 26) 増本清: ハイドロパルストモグラフィ技術の開発, 東京大学博士論文, 1995.
- 27) Black, J.H. and K.L.Kipp: Determination of hydrogeological parameter using sinusoidal pressure tests: A theoretical appraisal, Water Resources Research, Vol.17, No.3, pp.686-692, 1981.
- 28) Hsieh, P.A., Neuman S P.: Field Determination of the Three-Dimensional Hydraulic Conductivity Tensor of Anisotropic Media. 1.Theory, Water Resources Research, Vol.21, No.11, pp.1655-1665, 1985.
- 29) Hsieh, P.A., Neuman S P.: Field Determination of the Three-Dimensional Hydraulic Conductivity Tensor of Anisotropic Media. 2.Methodology and Application to Fractured Rocks, Water Resources Research, Vol.21, No.11, pp.1655-1665, 1985.
- 30) 青木謙治, 塩釜幸弘, 戸井田克, 手塚康成, 小淵孝晃, 升元一彦: 亀裂性岩盤の透水特性評価に対するクロスホール透水試験の適用性について, 第 8 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.441-446, 1990.
- 31) 奥野哲夫: 透水係数の空間分布推定法と地下水流動の予測に関する研究,

- 名古屋大学博士論文, pp.36-77, 1994.3.
- 32) 中屋眞司, 西垣誠, 河野伊一郎 : 亀裂性方位情報を利用したクロスホール透水試験による岩盤の三次元透水パラメータの測定法, 地下水学会誌, Vol.34, No.2, pp.81-98, 1992.
- 33) 本島勲, 打田靖夫 : 正弦波圧力試験による岩盤の地下水理特性の考察 - 岩盤の透水性, 貯留性および異方性 -, 電力中央研究所報告, U96040, 1997.
- 34) Noy, D. et al. : Crosshole investigations, Implementation and fractional dimension interpretation of sinusoidal tests, Stripa Project IR 88-01, SKB, Stockholm, Sweden, 1998.
- 35) 竹内竜史, 仙波毅, 天野健治, 下茂道人 : 孔間水理試験装置の開発と現場適用例, 第10回岩の力学シンポジウム講演論文集, pp.725-730, 1998.
- 36) Frederick, D. Day-Lewis, Paul A. Hsieh, Steven M. Gorelick : Identifying fracture-zone geometry using simulated annealing and hydraulic-connection data, Water Res. Res., Vol.36, No.7, pp.1707-1722, 2000.
- 37) 小林晃, 日向弘恵, 藤居宏一 : 不均質透水係数場の推定における共分散マトリックスの影響, 土木学会論文集, Vol.645, No.Ⅲ-50, pp.235-243, 2000.
- 38) 田中靖治, 本島勲 : 正弦波圧力データを用いた原位置岩盤内の透水係数分布の逆推定, 岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, Vol.26, pp.136-140, 1995.
- 39) 杉村淑人, 松田育子, 富森叡, 増本清, 渡辺邦夫 : 水みちネットワークモデルを用いた岩盤浸透流逆解析, 土木学会論文集, Vol.638, No.Ⅲ-49, pp.41-50, 1999.12
- 40) 下村道人, 井尻祐二, 飯星茂 : トモグラフィとクロスホール透水試験による岩盤内地下水浸透経路の調査, 大成建設技術研究所技報, pp.31-35, 1992.
- 41) 田中和広 : 割れ目系岩盤における水理地質構造の調査手法(詳細スケール), 地下水学会誌, Vol.42, No.1, pp.83-93, 2000.

【他章への参考文献】

- 1) K. Huang, Y. W. Tsang, G. S. Bodvarsson : Simultaneous inversion of Air-injection tests in fractured unsaturated tuff at Yucca Mountain, Water Res. Res., Vol.35, No.8, pp2375-2386, 1999.8.
- 2) 杉村淑人, 森田豊, 渡辺邦夫 : 孔間透水試験圧力応答パターンの水みちネットワークモデル数値実験による検討, 土木学会論文集, Vol.596, No.Ⅲ-43, pp.223-237, 1998.6.

第3章 従来の多孔質媒体の三次元浸透流解析手法

3.1 概説

地下水浸透流の解析には数学的手法を駆使する理論解析 (Analytical method) と計算機を利用する数値解析 (Numerical method) がある。電子計算機の発達が十分でなかった 1960 年頃までは、主として理論解析が行われていたが、極めて簡単な問題しか解けない状態であった。この場合、偏微分方程式を用いて境界値・初期値問題を取り扱うことになるが、解析の技法としてはグリーン関数、ラプラス変換、等角写像などが利用されていた。

今日、計算機を使う数値解析の手法として一般に用いられているのは、差分法 (Finite difference method) と有限要素法 (Finite element method) である。それぞれの方法の相違点としては、前者は基本式である微分方程式を数学的にどのように近似するか (微分方程式を差分方程式に変換して解く) という点に、後者は解析の対象となる領域を物理的にどのように細分化して (例えば、三角形や四角形要素) 解くかということに主眼点がある。したがって、簡単な初期値・境界値問題では両者の方法で導いた解析値が一致することは多い。しかし、差分法は手法的には単純であるが、複雑な境界条件の導入は困難であり、有限要素法はその逆であると一般的にいわれる。岩盤中の浸透特性を考えると、有限要素法で解析を行うことが妥当である。

現在では、Neuman⁴²⁾、西垣⁴³⁾などの研究にみられるように、有限要素法による浸透流解析が行われている。しかし、非定常浸透解析においては、時間項に関して差分法が適用されているため、Sinusoidal 試験のように境界条件が経時的変化をするような試験を数値解析によりシミュレートし、逆解析により浸透特性を把握する場合、多大な時間を要する。そこで、まず次節以降浸透理論を導き、従来の浸透解析の理論を示し、そこからこの手法の問題点を考察する。

3.2 浸透支配方程式の誘導⁴³⁾

すべての種類の多孔質媒体中において、流れの基礎方程式は次の二つの基本原理から導かれる。

- 連続性の式 : 水の質量が保存されることを述べたもの。
- ダルシーの法則 : 等方性の多孔質媒体の中において、比流量（浸透流速）が負の水頭勾配に比例することを述べたもの。

ここで異方性帯水層におけるダルシー法則の一般式を以下に示す。

$$V = -k\nabla h$$

$$\text{ここに } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

k : 透水係数の 2 階のテンソル, h : 全水頭, V : 多孔質媒体中の流速

したがって、これより異方性多孔質媒体においては、流れの方向が水頭勾配の方向と異なる場合があることがわかる。

流れの微分方程式は、帯水層の上面から底面までのびた極めて小さなコントロールボリュームについて、水収支を考えることによって導かれる。

時間帯 $[t, t+\Delta t]$ の間にコントロールボリュームに入ってくる正味の量は、コントロールボリューム内に貯留された水の増加量と釣り合っていなければならない。ここで、コントロールボリュームに入ってくる流れを+(正)、コントロールボリュームから出ていく流れを-(負)と定義する。

水平流を考えているため、涵養や揚水がコントロールボリュームの上面から行われるようにする。

$$\begin{aligned} & \Delta t \left[\left\{ (\rho v_x) \Big|_{x+\Delta x} \Delta y - (\rho v_x) \Big|_x \Delta y \right\} + \left\{ (\rho v_y) \Big|_{y+\Delta y} \Delta x - (\rho v_y) \Big|_y \Delta x \right\} + q \Delta x \Delta y \right] m \\ & = S_s \Delta x \Delta y [h(t+\Delta t) - h(t)] m \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、 m : 飽和帯の厚さ, S_s : 比貯留係数, ρ : 流体の密度,

t : 時間, x, y : 座標,

q : 単位水平面積当たりの涵養量または揚水量

式(3.2)を $\Delta t \Delta x \Delta y$ で割って、 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ の極限をとると、次の偏微分方

程式を得る。

$$\nabla(\rho v) + q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.3)$$

式(3.1)のダルシーの法則を代入すると、変数 h (全水頭値) で表された流れの方程式が得られる。

$$\nabla(\rho k \nabla h) + q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.4)$$

k : 帯水層の透水係数テンソル

また、被圧帯水層における貯留係数は、圧縮性による貯留である。

式(3.4)で示されたものを $\rho=1$ とすると、

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} - Q$$

もしくは、

$$\operatorname{div} k \nabla h = S_s \frac{\partial h}{\partial t} - Q \quad (3.5)$$

また、上式を解くための初期条件および境界条件は次のように定める。

(1) 初期条件

$$h(x_i, 0) = h_0(x_i) \quad (3.6)$$

(2) 境界条件

① 水頭が既知の境界

$$h(x_i, t) = h_b(x_i, t) \quad (3.7)$$

② 流量が既知の境界

$$\left(k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) n_i = -V(x_i, t) \quad (3.8)$$

ここで、 n_i は境界面からの垂直ベクトルである。

流量が既知の境界条件は物理現象において存在し得ない条件であるが、一定流量で揚水する場合などを仮定する際、計算上、境界条件を与えやすいためこの条件を加えている。

3.3 透水テンソル⁴⁴⁾

節理性岩盤は水理的に3次元異方性を示す。ここで、前述のように節理性岩盤を水理学的な異方性多孔質媒体と考える。そこで、均質で異方性を持つ岩盤の透水係数は、Fig.2.4に示される3つの主透水係数($k'_{11}, k'_{22}, k'_{33}$)と9つの方向余弦($l_1 \sim l_3, m_1 \sim m_3, n_1 \sim n_3$)によって以下のような透水テンソルとして表されることを示す。

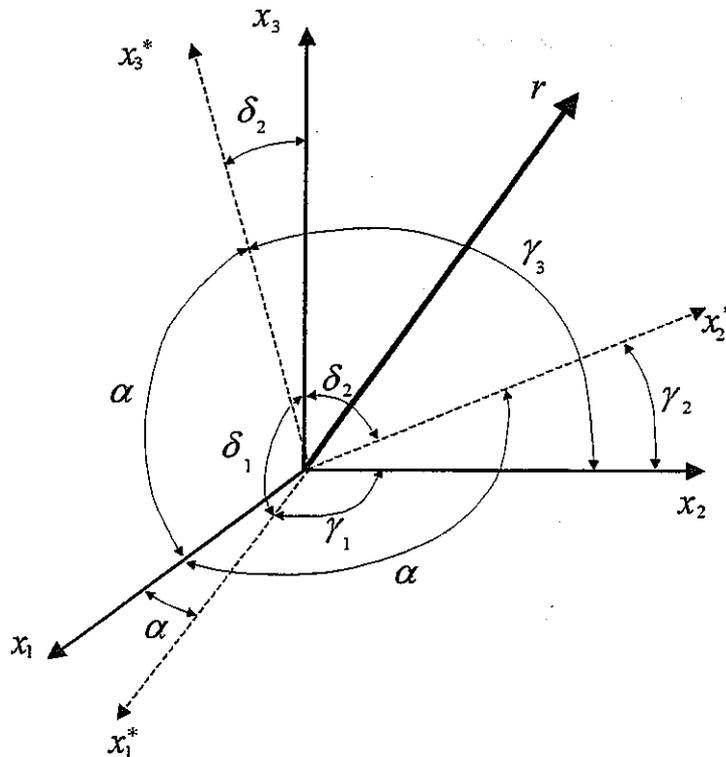


図-3.1 座標概念図

まず、回転による写像変換を求める。以下のように定義する。

$$\bar{r} = \sum_i r_i \bar{e}_i$$

(3.9)

$$\bar{r} = \sum_i r_i^* \bar{e}_i^*$$

ここで、

r_i, r_i^* : 軸 x_i, x_i^* における \bar{r} の成分,

\bar{e}_i, \bar{e}_i^* : 軸 x_i, x_i^* における単位ベクトル

したがって、軸における成分は、基本軸を用いて以下のように書ける。

$$\begin{aligned} r_i^* &= r \cdot \bar{e}_i^* = (r_1 \bar{e}_1 + r_2 \bar{e}_2 + r_3 \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_i^* \\ &= r_1 \alpha_{i1} + r_2 \alpha_{i2} + r_3 \alpha_{i3} \\ &= \sum_j \alpha_{ij} r_j \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここで、 $\alpha_{ij} \equiv \bar{e}_i^* \cdot \bar{e}_j$ は \bar{e}_i^* , \bar{e}_j 間の cosine とする。上式をベクトル表示すると、

$$\mathbf{r}^* = \alpha \mathbf{r} \quad (3.11a)$$

上記と同様にすると、以下が得られる。

$$\mathbf{r} = \alpha^* \mathbf{r}^* \quad (3.11b)$$

なお、 $\alpha^* = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j^* = \alpha^T$ である。

ダルシー則を2つの軸で考えると、

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k} \nabla h \quad (3.12a), \quad \mathbf{v}^* = -\mathbf{k}^* \nabla h \quad (3.12b)$$

そのとき、以下のように記せる。

$$\alpha \mathbf{v} = -\alpha^T \mathbf{k}^* \alpha \nabla h \quad (3.13a), \quad \mathbf{v}^* = -\alpha^T \mathbf{k}^* \alpha \nabla h \quad (3.13b)$$

従って、透水テンソルは以下のようなになる。

$$\mathbf{k} = \alpha^T \mathbf{k}^* \alpha \quad (3.14a), \quad \mathbf{k}^* = \alpha \mathbf{k}^* \alpha^T \quad (3.14b)$$

成分表示すると、

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \alpha_1 & \alpha_{21} &= \cos \alpha_2 & \alpha_{31} &= \cos \alpha_3 \\ \alpha_{12} &= \cos \gamma_1 & \alpha_{22} &= \cos \gamma_2 & \alpha_{32} &= \cos \gamma_3 \\ \alpha_{13} &= \cos \delta_1 & \alpha_{23} &= \cos \delta_2 & \alpha_{33} &= \cos \gamma_3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

したがって、水理学的異方性を持つ多孔質媒体の透水性は透水テンソルが作る楕円体で表され、異方性多孔質媒体においては、流れの方向が水頭勾配の方向と異なる場合があることがわかる。

3.4 有限要素法による定式化⁴⁴⁾

前述のように、浸透解析において複雑な流れ問題を取り扱う際には有限要素法を用いた手法が非常に有効である。対象としている問題の定式化に最も広く取り入れられている手法は、問題を支配する微分方程式と等価な汎関数を求め、それを最小にすることにより近似解を求める変分法である。一方、重み付き残差法は、問題を支配する方程式から直接に有限要素近似を数学的に導くことが可能であり、また、汎関数の存在しない問題や汎関数の見つからない問題まで拡張できるなどの利点がある。西垣は重み付き残差法で定式化を行い、飽和・不飽和中の浸透流を時間差分により導いている。本研究では岩盤中の飽和領域における試験を対象としているため、以下は飽和中の非定常浸透における定式化を行う。

前節において与えられた境界条件を満足する試験関数(trial function)を、次のように一般的な表示とする。

$$h(x_i, t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) N_j(x_i) \quad (3.17)$$

ただし、 m ：要素の節点数である。

$N_j(x_i)$ は、座標によって定まる関数であり、 $h_j(t)$ は時間だけによる未知パラメータである。式(3.17)を式(3.5)に代入すると、式(3.17)は式(3.6)、式(3.7)、式(3.8)、式(3.9)を厳密には満足しない。

$\rho=1$ とすると、

$$L(h) = \nabla \cdot \mathbf{k} \nabla (N_n(x_i) h_n(t)) - S_s \frac{\partial}{\partial t} (N_n(x_i) h_n(t)) + q = R \neq 0 \quad (3.18)$$

すなわち、ある残差(residual) R を生じる。したがって、最良の近似解を求めるには、 R が領域内のどこにおいても恒等的に零になるようにすればよい。

式(3.18)に重み関数 $w(x_i)$ をかけて領域全体について積分をすると、

$$\begin{aligned} & \int_V w(x_i) R dV \\ &= \int_V w(x_i) \left[\nabla \cdot \mathbf{K} \nabla (N_n(x_i) h_n(t)) - S_s \frac{\partial}{\partial t} (N_n(x_i) h(t)) + Q \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

と表すことができる。

未知のパラメータ h の数が n 個あれば、 n 個の一次独立な重み関数 $w_k(x_i)$ を用いると、式(3.19)は n 個の連立方程式となり、 h の値が求められる。ここに、 $w_k(x_i)$ は座標の関数であり、この重み関数の選び方として、選点法 (point collocation), Subdomain collocation, Galerkin 法などがある。

ここでは最も一般的な Galerkin 法を用いると、

$$w_k(x_i) = N_k(x_i) \quad (3.20)$$

すなわち、重み関数 $w_k(x_i)$ を h の近似解を定める形状関数 $N_k(x_i)$ に等しくおく方法である。

式(3.19)と式(3.20)より

$$\int_V N_n \left[\nabla \cdot \mathbf{K} \nabla (N_n(x_i) h_n(t)) - S_s \frac{\partial}{\partial t} (N_n(x_i) h(t)) + Q \right] dV = 0 \quad (3.21)$$

式(3.21)に Green-Gauss の定理を用いると、

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{K} \nabla N_n \cdot N_n h_m dV - \oint_S \mathbf{K} N_n \nabla N_m h_m \cdot \mathbf{n} dS \\ + \int_V S_s N_n \frac{\partial}{\partial t} (N_m h_m) dV + \int_V N_n Q dV = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

式(3.22)は浸透領域全体を N 個の有限要素に分割すると各要素内で上式が成立する。したがって、浸透領域全体では

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^N \left[\int_{V_i} K^{e}_{ij} \nabla N^n \cdot N^e_m \bar{h}_m dV - \oint_{S_i} K^{e}_{ij} N^n \nabla N^e_m \bar{h}_m \cdot \mathbf{n} dS \right. \\ \left. + \int_{V_i} S_s N^n \frac{\partial}{\partial t} (N^e_m \bar{h}_m) dV + \int_{V_i} N^n \bar{Q} dV \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

数値計算では、以下の式を解くものとする。

$$A_{nm} h_m + F_{nm} \frac{\partial h}{\partial t} = Q_n - D_n \quad (n, m=1, 2, 3, \dots, N) \quad (3.24)$$

$$A_{nm} = \sum_{e=1}^N \left[\int_{V_i} K^{e}_{ij} \nabla N^n \cdot N^e_m dV \right] \quad (3.25)$$

$$F_{nm} = \sum_{e=1}^N \left[\int_{V_i} S_s N^n N^e_m dV \right] \quad (3.26)$$

$$Q_n = \sum_{e=1}^N \oint_{S_i} K_i^e N^e \nabla N^e h_m \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{e=1}^N \oint_{S_i} V N^e n dS \quad (3.27)$$

$$D_n = \sum_{e=1}^N \int_{V_i} N^e Q dV \quad (3.28)$$

式(3.24)によって、飽和領域における3次元浸透流解析の定式化がなされた。

次に、式(3.24)の有限要素法による計算法について考える。

式(3.24)を計算するためには、式(3.24)～(3.28)を計算しなければならない。本研究の3次元解析では圧密解析等に見られるような応力による変形を取り扱わないので、図-3.2に示す8節点アイソパラメトリック要素を用いた。

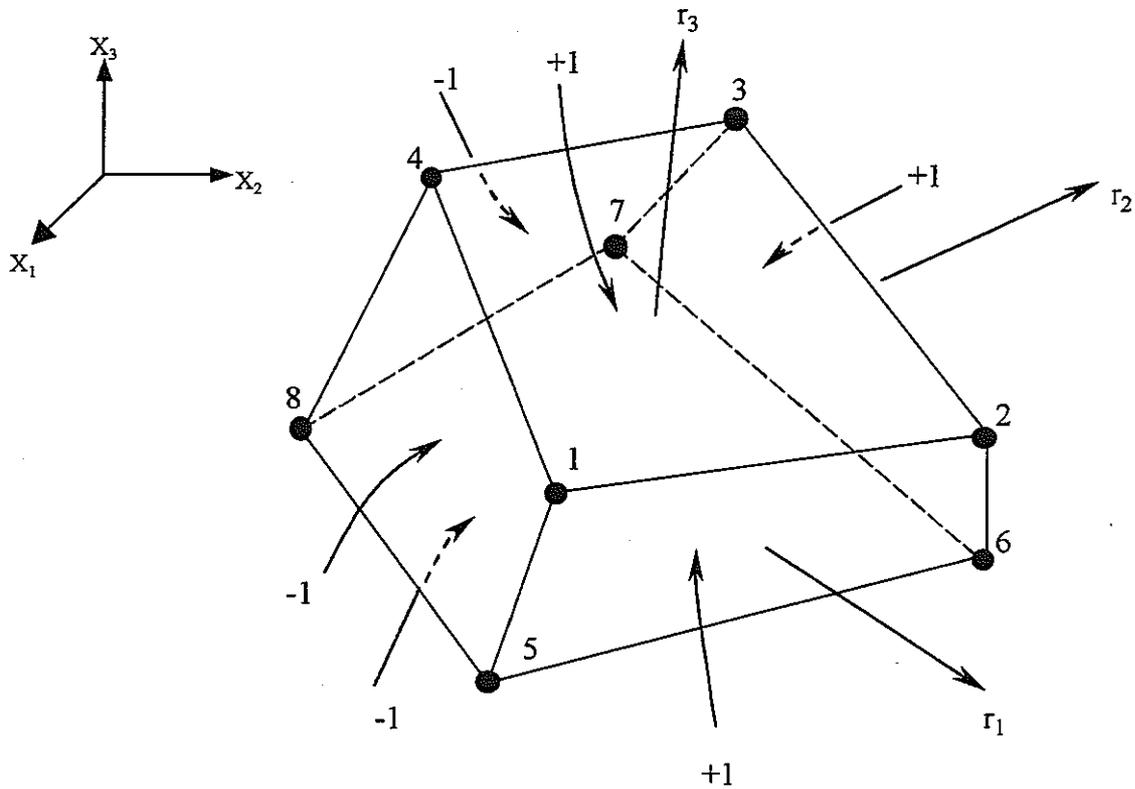


図-3.2 8節点アイソパラメトリック要素

3.5 時間項の取り扱い

式(3.23)はある特定の時間状態に対して式(3.5)を有限要素法により定式化したものである。したがって、時間項を取り扱う場合には、問題を適当な漸化式に書き下し、逐次計算を行うと、全時間にわたる解が得られる。漸化式として差分法を直接用いる方法と、Galerkinの重み付き残差法を各時間区間に対して用いるなどの方法があるが、西垣は時間項の取り扱いが明確な差分法を用いている。ここでは、一般的に表すために θ -法⁴⁵⁾と呼ばれる差分化による解法について述べる。

いま、時間ステップ $n-1$ における h の値 h^{n-1} がわかっているとして、未知水頭 h^k を Taylor 展開的に、

$$h^k = h^{k-1} + \Delta t \left[(1-\theta) \frac{dh^{k-1}}{dt} + \theta \frac{dh^k}{dt} \right] \quad (3.29)$$

と表現する。ここで、

Δt : ステップ $k-1$ から k への時間増分

θ : $0 \leq \theta \leq 1$

というパラメータである。

式(3.23)は時間ステップ $k-1$, k の双方で成立するので、

$$A_{nm} h_m^{k-1} + F_{nm} \frac{\partial h^{k-1}}{\partial a} = Q_n^{k-1} - D_n^{k-1} \quad (3.30a)$$

$$A_{nm} h_m^k + F_{nm} \frac{\partial h^k}{\partial a} = Q_n^k - D_n^k \quad (3.30b)$$

である。この第1式に $1-\theta$ 、第2式に θ をかけて両式を加えると

$$\begin{aligned} (1-\theta)A_{nm} h_m^{k-1} + \theta A_{nm} h_m^k + F_{nm} \left[(1-\theta) \frac{\partial h^{k-1}}{\partial a} + \theta \frac{\partial h^k}{\partial a} \right] \\ = (1-\theta) [Q_n^{k-1} - D_n^{k-1}] + \theta [Q_n^k - D_n^k] \end{aligned} \quad (3.31)$$

を得る。これに式(3.29)を代入、整理すると

$$\begin{aligned} \left[\theta A_{nm} + \frac{1}{\Delta t} F_{nm} \right] h_m^k = (1-\theta) [Q_n^{k-1} - D_n^{k-1}] + \theta [Q_n^k - D_n^k] \\ + \left[\frac{1}{\Delta t} F_{nm} - (1-\theta) A_{nm} \right] h_m^{k-1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

を得る。この式は書き下すと

$$\hat{K}h_m^k = \hat{Q}_n^k \quad (3.33)$$

$$\hat{K} = \theta A_{nm} + \frac{1}{\Delta t} F_{nm} \quad (3.34)$$

$$\hat{Q} = (1-\theta)[Q_n^{k-1} - D_n^{k-1}] + \theta [Q_n^k - D_n^k] + \left[\frac{1}{\Delta t} F_{nm} - (1-\theta)A_{nm} \right] h_m^{k-1} \quad (3.35)$$

こうして得られた時間増分 Δt ごとに式(3.32)を解くと、各時間ステップの h^n が逐次求まることになる。なお、初期条件はステップ $k=1$ を解くときに式(3.32)に代入される。なお、 $\theta=0$ とすると前進差分(Euler)法、 $\theta=0.5$ とすると中央差分(Crank-Nicolson)法、 $\theta=1$ とすると後退差分法に対応する式が得られる。式(3.34)から、境界条件が定圧・定流量の場合、時間増分 Δt を非常に大きな値を設定すると精度の問題が発生することがわかる。また、Sinusoidal 試験等の境界条件が時間的に変化する場合、必然的に時間増分 Δt を小さくしなければならない。この条件の下で逆解析を行うと、時間が多大にかかるのは明らかである。更に、時間増分 Δt の取り方により、得られる解の差が発生するという問題がある。

しかし、孔間水理試験(クロスホール試験)では揚水による境界条件の時間的変化および不圧帯水層内の浸透流における水頭の変化による浸透領域の変化等を考える必要がない。すなわち線形問題である。そこで、その点に着目し、時節では、西垣・松尾らが提案した新しい方法⁴⁶⁾を示す。

【参考文献】

- 42) Neuman, S.P.: Saturated-unsaturated seepage by finite elements, Proc., ASCE HY, Vol.99, No.12, pp.2233-2250, 1973.
- 43) 赤井浩一, 大西有三, 西垣誠: 有限要素法による飽和不飽和浸透流の解析, 土木学会論文報告集, 第 264 号, 1977.
- 44) 大西有三, 西垣誠: 有限要素法による飽和-不飽和領域内浸透の 3 次元解析 - 手法とプログラム解説 -, 京都大学工学部交通土木教室路盤基礎工学研究室 Report No.81-2, 1981.
- 45) 市川康明: 地盤力学における有限要素法入門, 日科技連, p.59-61, 1990.
- 46) 西垣誠, 松尾雄一郎: 亀裂性岩盤での水圧トモグラフィーに関する研究, 土木学会第 52 回年次学術研究発表会講演集, III-A253, pp.506-507, 1997.

第4章 ラプラス変換を用いた三次元浸透流解析手法

4.1 概説

現在では、Neuman,西垣などの研究にみられるように、有限要素法による浸透流解析が行われている。しかし、非定常浸透解析においては、時間項に関して差分法が適用されているため、Sinusoidal試験のように境界条件が経時的変化をするような試験を数値解析によりシミュレートし、逆解析により浸透特性を把握する場合、多大な時間を要することを前章で示した。

現在、前述の従来から用いられている時間差分法(Time difference method)に対する方法として、移流・分散の分野において Sudicky⁴⁷⁾が研究報告して以来、時間連続数値解法(time-continuous numerical technique)といわれる、いわゆる LTG (Laplace Transform Galerkin)法が注目を集めている。これにより迅速に解を求めることが可能であるが、現在、主として多孔質媒体中における物質輸送解に改良、適用されている。Sudickyの研究では、移流分散方程式をLTG法で解析すると、収束性がよく、分散しにくいことを示した。本研究ではGalerkin手順を適用し、領域を有限要素に細分した後に、微分方程式の空間離散集合において現れる時間的な離散を除去するために、ラプラス変換を適用する。これにより、より迅速なシミュレートが行えるものである。ラプラス空間において変換された代数式を解き、数値ラプラス逆変換を適用することでそれぞれの節点での経時的変化による水頭を求めることができる。ただし、線型問題しか取り扱えない。LTG法の利点を以下に示す。

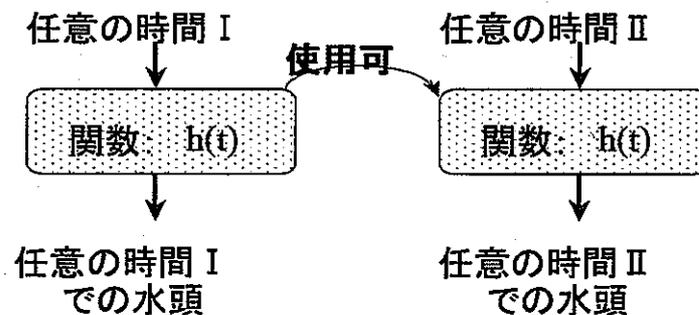
- (1) 境界条件を関数で与えることができるため、入力値など個人差による誤差がなくなる。
- (2) シヌソイダル試験のような境界条件が時間的に変動する場合でも、境界条件を関数で与えることができるため、取り扱いが簡単である。
- (3) シヌソイダル試験のような境界条件が時間的に変動する場合、従来の時間差分法では、細かい時間ピッチで解析する必要がある。これに対して、LTG法では、時間領域の問題を周波数領域の問題に変換しているため、求めたい時間のみ解析対象にすれば良い。

数値ラプラス逆変換については、数多くの方法が提案されているが、本研究では Crump⁴⁸⁾および細野⁴⁹⁾のアルゴリズムを用いる。

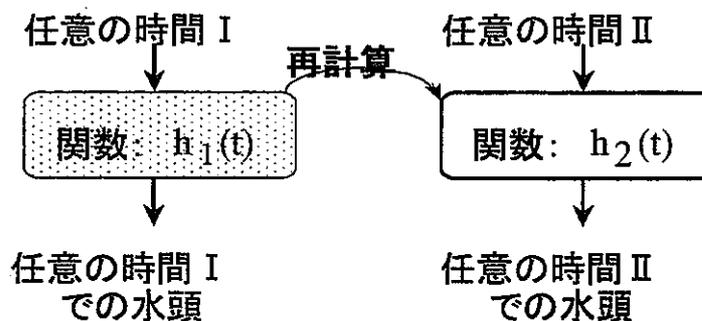
Crump のアルゴリズムは、ラプラス空間解の単集合から、各々の時間における水頭を代数的に算定することができる。それぞれのラプラス空間における解は独立であるため、並行処理型の数値解析システムでの演算を行うことに適している。また、それにより数値解析をより迅速かつ記憶容量を減少という可能性が生まれる。

細野のアルゴリズムは、Crump 法に比べ、時間においてそれぞれ解を求める必要がある。そのため、演算時間が多大にかかってしまう。しかし、Crump 法における数値発散がないため、数値誤差を極力抑えるため非常に有力な方法である。Crump の方法と細野の方法の概念図を図-4.1 に示す。

本章では、ラプラス空間での離散化およびラプラス逆変換法についてのこの方法について述べる。



(a) Crump の方法



(b) 細野の方法

図-4.1 数値ラプラス逆変換の概念図

4.2 ラプラス変換^{47), 50)}

ラプラス変換は、ヘヴィサイドの演算法の正統な後継の電気工学を始めとする理工学の諸分野に応用されている。

時間関数から周波数関数へのラプラス変換は、変数 t の全ての正の値に対して定義された関数 $h(t)$ に e^{-pt} をかけ、かつ t に関して零から無限まで積分することで得られる。すなわち、

$$\bar{h}(p) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt \quad (4.1)$$

ここで、 p : ラプラス演算子

この変換は、ここでは記号 $L[f]$ または $L\{f(t)\}$ で簡略化する。すなわち、

$$L[h(t)] = \bar{h}(p) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt \quad (4.2)$$

新関数 $\bar{h}(p)$ は、 $h(t)$ のラプラス変換形または映像と呼ばれる。以下において、元の関数は小文字で表し、その変換系はそれと同じ大文字で表す。

ラプラス変換は時間領域で微積分演算を含む問題を解くのに、まずラプラス変換で時間領域から周波数領域に移り、微積分演算を代数的演算に変えて演算を行い、これをラプラス逆変換で時間領域にもどして解を得るのに用いられる。この場合、ラプラス変換は以下のような機能がある。

- (1) 高級な関数を低級な関数に変える機能。
- (2) 高級な演算を低級な演算に変える機能を果たし、時間的領域で複雑な問題を周波数領域での簡単な問題に変える。

これらより、時間領域で複雑な問題を周波数領域での簡単な問題に変えることが可能となる。

ここで、前章から導かれた浸透支配方程式 (3.5) に、上記のラプラス変換を施した支配方程式を以下に導く。

$$\text{div} \mathbf{K} \nabla \bar{h} = S_p (\bar{p}h - h(t=0)) - \bar{Q} \quad (4.3)$$

また、上式を解くための境界条件は次のように定める。

- (1) 水頭が既知の境界

$$\bar{h}(x_i, p) = \bar{h}_b(x_i, p) \quad (4.4)$$

(2) 流量が既知の境界

$$\left(k_{ij} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_j}\right) n_i = -\bar{V}(x_i, p) \quad (4.5)$$

ここで、 n_i : 境界面からの法線ベクトル

もし、境界条件が時間に関して変動するものであれば、重ね合わせの原理を適用することで、複雑な時間変動の入力を行うことができる。

4.3 ラプラス空間での定式化⁴⁷⁾

現在、有限要素法は不均一の物質特性と、不規則な境界領域で適用され、理論解で算定不可能な問題も比較的容易に解くことが可能となっている。現在地盤の評価に関しても、地下水流動・物資輸送の問題において用いられている。

有限要素法において、 \bar{h} の試験的な解は、

$$\bar{h} \approx \hat{\bar{h}} = \sum_{j=1}^m \bar{h}_j(p) N_j(x_i) \quad (4.6)$$

のように仮定される。ここで、 $N_j(x_j)$: 座標によって定まる関数、 m : グリッドにおける節点数、 $\bar{h}_j(p)$: 節点におけるラプラス変換された水頭を表す未知係数。ここで、式(4.6)を式(4.3)に代入すると、式(4.3)は式(4.4)、式(4.5)を厳密には満足しないから、

$$\nabla \cdot \mathbf{k} \nabla (N_n(x_i) \bar{h}_n(p) - S_s(p N_n(x_i) \bar{h}(p) - h(0)) + \bar{Q}) = R \neq 0 \quad (4.7)$$

すなわち、ある残差(Residual) R を生じる。最良の近似解は、この R を領域 V のすべての点において最小にするものである。したがって、最良の近似解を求めるには、 R が領域内のどこにおいても恒等的に零になるようにすればよい。式(4.7)に重み関数 $w(x_i)$ をかけて領域全体について積分をすると、以下のように表せる。

$$\int_V w(x_i) R dV = \int_V w(x_i) \left[\nabla \cdot \mathbf{k} \nabla (N_n(x_i) \bar{h}_n(p) - S_s(p N_n(x_i) \bar{h}(p) - h(0)) + \bar{Q}) \right] dV = 0 \quad (4.8)$$

最も一般的な Galerkin 法を用いると、

$$w_k(x_i) = N_k(x_i) \quad (4.9)$$

式(4.8)と式(4.9)より

$$\int_V N_n [\nabla \cdot \mathbf{k} \nabla (N_n(x_i) \bar{h}_n(p)) - S_s (p N_n(x_i) \bar{h}(p) - h(0)) + \bar{Q}] dV = 0 \quad (4.10)$$

式(4.10)に Green-Gauss の定理を用いると,

$$\int_V \mathbf{k} \nabla N_n \cdot N_m \bar{h}_m dV - \int_S \mathbf{k} N_n \nabla N_m \bar{h}_m \cdot \mathbf{n} dS + p \int_V S_s N_n N_m \bar{h}_m dV - \int_V S_s N_n h(0) dV + \int_V N_n \bar{Q} dV = 0 \quad (4.11)$$

式(4.11)は浸透領域全体を N 個の有限要素に分割すると各要素内で上式が成立する。したがって、浸透領域全体では、

$$\sum_{e=1}^N \left[\int_{V_i} k^e_{ij} \nabla N_n^e \cdot N_m^e \bar{h}_m dV - \int_{S_i} k^e_{ij} N_n^e \nabla N_m^e \bar{h}_m \cdot \mathbf{n} dS + p \int_{V_i} S_s N_n^e N_m^e \bar{h}_m dV - \int_{V_i} S_s N_n^e h(0) dV + \int_{V_i} N_n^e \bar{Q} dV \right] = 0 \quad (4.12)$$

数値計算では、以下の式を解くものとする。

$$(A_{nm} + L_{nm}) \bar{h}_m = Q_n + B_n - D_n \quad (n, m=1, 2, 3, \dots, N) \quad (4.13)$$

$$A_{nm} = \sum_{e=1}^N \int_{V_i} k^e_{ij} \nabla N_n^e \cdot N_m^e dV \quad (4.14)$$

$$L_{nm} = \sum_{e=1}^N p \int_{V_i} S_s N_n^e N_m^e dV \quad (4.15)$$

$$Q_n = \sum_{e=1}^N \int_{S_i} k^e_{ij} N_n^e \nabla N_m^e \bar{h}_m \cdot \mathbf{n} dV = \sum_{e=1}^N \int_{S_i} \bar{V} N_n^e dS \quad (4.16)$$

$$B_n = \sum_{e=1}^N \int_{V_i} S_s N_n^e h(t=0) dV \quad (4.17)$$

$$D_n = \sum_{e=1}^N \int_{V_i} N_n^e \bar{Q} dV \quad (4.18)$$

これらの式は、前節と同様の手法を用いて解析が可能である。本研究ではクロスホール試験における注入は点源注入であるとして考えるため、面からの流出入マトリクス Q_n は導入しないものとした。

従って、以下のようなマトリックス形式で表される。

$$[[K] + p[L]] \{\bar{h}\} = \{B\} - \{\bar{D}\} \quad (4.19)$$

ここで、

$[K]$: 要素透水行列, $[L]$: 要素ラプラス行列
 $\{B\}$: 初期条件ベクトル, $\{\overline{D}\}$: 境界条件ベクトル

式(4.19)は既知節点と未知節点を導入するために、通常以下のように分離する。

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uc}] \\ [K_{cu}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} [L_{uu}] & [L_{uc}] \\ [L_{cu}] & [L_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{h}_u \\ \overline{h}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_u \\ B_c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \overline{D}_u \\ \overline{D}_c \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

上式を掛け合わせると、そのうちの一つは、

$$[[K_{uu}] + p[L_{uu}]] \{\overline{h}_u\} = \{B_u\} - \{\overline{D}_u\} - [[K_{uc}] + p[L_{uc}]] \{\overline{h}_c\} \quad (4.21)$$

これにより、既知量が右辺にすべて移項され、計算を行える。

ここで、 p に各々の数値ラプラス逆変換で用いる値を代入し、ラプラス空間内の節点ごとの解を得る。そこで数値ラプラス逆変換を用いることにより経時的な水頭値を得ることが可能となる。図-4.2に概念図を示す。

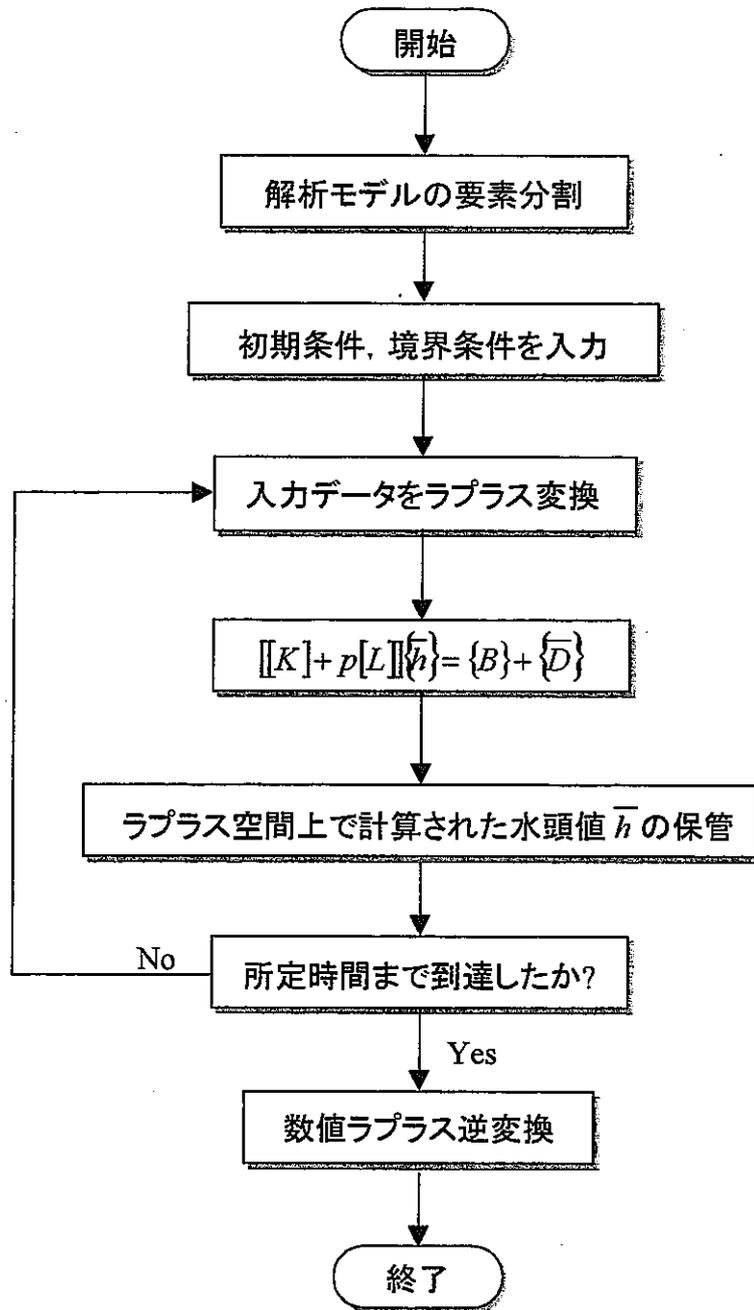


図-4.2 ラプラス空間上における順解析フロー図

4.4 数値ラプラス逆変換

4.4.1 概説⁴⁹⁾

前述のように，ラプラス変換でのメリットは大きいですが，ラプラス逆変換にラプラス変換の逆の機能を持たせるため，ラプラス逆変換の段階で困難が発生する。

ここで，ラプラス逆変換式を示す。

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \bar{h}(p) e^{pt} ds \quad (4.22)$$

従来のラプラス逆変換技術は，

- (1) ラプラス変換の表もしくは簡単な規則を利用する方法
- (2) Cauchy の積分定理を利用する方法
- (3) 数値計算により求める方法

等があった。これらに対して，(1)に関しては，Heaviside あるいは Mikusinski の演算方法が有名である。(2)に関しては Bromwich 積分を $t > 0$ の条件下で変形，複素関数論的に計算する。しかし，閉じた形に解が求まるものは Oberhettinger らの膨大な表を使用する必要がある。また，上記の(1)と(2)の方法では実質的な差がない。これらに対して(3)の数値解法は，(1)，(2)の持つ困難な問題を解決する方法として利用されており，本研究でもこの方法を適用する。

数値解法は，計算機で演算する際，

- (1) プログラミングが簡単である。
- (2) 計算時間が短い。

といった長所を有しているが，

- (1) かなりの量の定数データをあらかじめ計算しておき，コンピュータに記憶させておく必要がある。
- (2) 誤差の制御・評価が困難
- (3) 適用範囲にかなりの制限がある。

などの欠点を持っている。

これらの欠点を補う方法に，細野，Crump の方法がある。以下にそれぞれの方法について述べる。

4.4.2 細野の方法⁴⁹⁾

細野の手法は、ラプラス逆変換を計算機で演算するとき、複素積分が容易に実行できるように、式(4.22)中の指数関数部 e^{pt} を近似する方法を用いている。

$$e^p = \lim_{i\sigma_0 \rightarrow \infty} \frac{e^{\sigma_0}}{2 \cosh(\sigma_0 - p)} \quad (4.23)$$

の関係より、以下の近似を行っている。

$$e^p \doteq \frac{e^{\sigma_0}}{2 \cosh(\sigma_0 - p)} = \frac{e^p}{1 + e^{-2(\sigma_0 - p)}} \equiv E_{ec}(p, \sigma_0) \quad (4.24)$$

ここで、 σ_0 は近似のためのパラメータであり、細野は、3~6 程度の正数と定めている。

そして、式(4.22)を $E_{ec}(p, \sigma_0)$ の極のまわりの積分に変化することによって、次の数値ラプラス逆変換の理論式を導いている。

$$\begin{aligned} h_{ec}(t, \sigma_0) &= \frac{e^{\sigma_0}}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} i \bar{h} \left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)\pi}{t} \right) \\ &= \frac{e^{\sigma_0}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Im} \bar{h} \left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)\pi}{t} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

この式の誘導を付録 B-1 に示す。

数値計算を行う場合、原理的には式(4.25)を適当な項数 N で打ち切ればよいが、単純な打ち切りでは N をかなり大きくとらなければ誤差が大きくなり、実用的でない。従って、この場合に応じて実用的な計算式を工夫する必要がある。そこで、細野はかなり一般性のある Euler 変換を利用した計算方法で以下を導いている。

ここで、以下のように定義を行う。

$$\bar{h}_n \equiv (-1)^n \operatorname{Im} \bar{h} \left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)\pi}{t} \right) \quad (4.26)$$

Euler 変換は次の条件が成り立つ場合に有効である。

- (1) 適当な整数 $k \geq 1$ が存在し、 $n \geq k$ のとき、 \bar{h}_n の符号が交代する。
- (2) $n \geq k$ のとき $\frac{1}{2} < \left| \frac{\bar{h}_{n+1}}{\bar{h}_n} \right| \leq 1$

以上の条件が満足される場合、式(4.26)を次のように書き換えられることが

できる。

$$h_{ec}(t, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0}}{t} \left(\sum_{n=1}^{k-1} \bar{h}_n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n \bar{h}_k}{2^{n+1}} \right) \quad (4.27)$$

ただし、 $\Delta^n \bar{h}_k$ は次式で帰納的に定義される第 n 階差である。

$$\begin{cases} \Delta^0 \bar{h}_k \equiv \bar{h}_k \\ \Delta^{n+1} \bar{h}_k \equiv \Delta^n \bar{h}_k + \Delta^n \bar{h}_{k+1} \end{cases} \quad (4.28)$$

実際の計算では、式(4.27)を有限項で打ち切る。その際、次式により和を直接 \bar{h}_n から $\Delta^n \bar{h}_k$ を計算する。

$$\sum_{n=0}^{\mu} \frac{\Delta^n \bar{h}_k}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{\mu+1}} \sum_{v=0}^{\mu} A_{\mu,v} \bar{h}_{k+v} \quad (4.29)$$

ここで、

$$\begin{cases} A_{\mu,\mu} \equiv 1 \\ A_{\mu,v-1} \equiv A_{\mu,v} + \binom{\mu+1}{v} \end{cases} \quad (4.30)$$

例えば、 $\mu=5$ の場合は次式となる。

$$\sum_{n=0}^5 \frac{\Delta^n \bar{h}_k}{2^{n+1}} = \frac{1}{64} (63h_k + 57h_{k+1} + 42h_{k+2} + 22h_{k+3} + 7h_{k+4} + h_{k+5}) \quad (4.31)$$

以上より、最終的に $h_{ec}(t, \sigma_0)$ の N 項打ち切り近似を次式で計算する。

$$h_{ec}(t, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0}}{2t} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \bar{h}_n + \frac{1}{2^{\mu+1}} \sum_{v=0}^{\mu} A_{\mu,v} \bar{h}_{k+v} \right\} \quad (4.32)$$

$N = k + \mu$

4.4.3 Crump の方法 ⁴⁸⁾

$h(t)$ は区分的に連続で、 α のオーダーであるとする、ラプラス逆変換式(4.22)は、次のように表される。

$$h(t) = \frac{e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} [\operatorname{Re}\{\bar{h}(p)\} \cos \omega t - \operatorname{Im}\{\bar{h}(p)\} \sin \omega t] d\omega \quad (4.33)$$

ここで、 $p = a + i\omega$ とし、 a は α より大きい実数、 $\operatorname{Re}\{\}$ 、 $\operatorname{Im}\{\}$ はそれぞれ

の実部，虚部を表す。

また，上式は cosine 変換もしくは sin 変換によって変えることができる。

cosine 変換は

$$\operatorname{Re}\{\bar{h}(p)\} = \int_0^{\infty} e^{-at} h(t) \cos \omega t \, dt \quad (4.44)$$

$$h(t) = \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{\bar{h}(p)\} \cos \omega t \, d\omega \quad (4.45)$$

sin 変換は，

$$\operatorname{Im}\{\bar{h}(p)\} = -\int_0^{\infty} e^{-at} h(t) \sin \omega t \, dt \quad (4.46)$$

$$h(t) = -\frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}\{\bar{h}(p)\} \sin \omega t \, d\omega \quad (4.47)$$

Dubner と Abate は，式 (4.45) を利用した数値逆ラプラス変換方法を提案した⁵¹⁾。この方法は，ただ $\operatorname{Re}\{\bar{h}(p)\}$ を含んだ台形近似であり，数値計算的にプログラムを組むのに単純で簡単である。この方法の特徴は，計算された逆変換での誤差が表記できるというものである。特に，Dubner と Abate は $h(t) = h_c(t) - E_c$ で示した。ここで， $h_c(t)$ は $h(t)$ の近似である。上記の無限空間の積分を $2N+2$ 個の離散点での関数値 $\bar{h}(p_k)$ を用いて数値的に実行する手法を提案している。つまり，上記の積分を次の $2N+1$ 個の級数和に置き換え次のように表される。

$$h_c(t) = \frac{2e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} \bar{h}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left\{ \bar{h}\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right) \right\} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right] \quad (4.48)$$

この，誤差式は

$$E_c = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2nat) \{h(2nT+t) \exp(2at) h(2nT-t)\} \quad (4.49)$$

ここで，

a : $a > \alpha$ を満足するパラメータ，

T : $T > t$ を満足するパラメータ

である。Dubner と Abate は $\alpha \leq 0$ と仮定して a を正に制限した。

この方法の欠点は式(4.49)の級数の収束が，あまりよくないことである。

もし、式(4.48)で $T=2t$ をとると、そのとき

$$h_c(t) = \frac{e^{at}}{t} \left[\frac{1}{2} \bar{h}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{k\pi i}{t} \right) \right\} (-1)^k \right] \quad (4.50)$$

この式を用いると、cosine の計算をすることがないため、式 (4.48) に比べて非常に迅速に計算できるが、 t による逆変換を計算する必要があり、変換 $\bar{h}(p)$ は、それぞれの t において、異なった p 値の集合で計算しなければならない。そのため、式(4.50)を用いるのは、あまり効率が良くない。

これに対して、Crump は、 $\bar{h}(p)$ の計算された実数部と虚数部を利用した上記の Dubner と Abate の逆変換方法を提案している⁴⁸⁾。

この方法は、区間 $(0, 2T)$ において、 $2T$ の周期を持つ関数 $g_0(t)$ が $h(t)e^{-at}$ と等価のフーリエ級数を得るものとする。そして、この関数を利用して、 $h(t)$ の近似 $\hat{h}(t)$ を求めている。

$$\hat{h}(t) = \frac{e^{pt}}{T} \left[\frac{1}{2} \bar{h}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \cos \left(\frac{k\pi t}{T} \right) - \operatorname{Im} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \sin \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \right\} \right] \quad (4.51)$$

ここで、 $h(t) = \hat{h}(t) - E$ である。また、この誤差式は、

$$E = e^{at} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = e^{at} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-a(2nT+t)\} h(2nT+t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2naT} h(2nT+t) \quad (4.52)$$

また、 a は以下のように定義される。

$$a = \alpha - \frac{\operatorname{Ln}(E')}{2T} \quad (4.53)$$

ここで、 α は P を $F(s)$ の極とすると、 $\max\{\operatorname{Re}(P)\}$ より十分大きな数にする。また、これらの式の誘導を付録 B-2 に示す。

通常、式(4.51)の収束率を向上させるために、式(4.51)の級数和の計算方法を工夫する必要がある。この方法として、Euler Transformation(ET 法)⁵²⁾ と Epsilon Algorithm(EPAL 法)⁵³⁾ がある。この 2 つの方法に対して Crump は、EPAL 法の方がより迅速に収束させることを示している。以下にこの方法について紹介する。

(a) Epsilon Algorithm^{48), 53)}

式(4.51)の収束性の向上を計るための級数和の計算方法に Epsilon Algorithm(EPAL法)がある。

$$h_j(t) = \frac{1}{T} \cdot \exp(p_o t) \cdot \left[\frac{1}{2} \bar{h}_j(p_o) + \varepsilon_{2N+1}^{(1)} \right] \quad (4.54)$$

ここに、 $\varepsilon_{2N+1}^{(1)}$ は、 $\varepsilon_o^{(l)} = 0, \varepsilon_1^{(l)} = S_l, l=1, \dots, 2N+1$ として、以下の式を

$$\varepsilon_{k+1}^{(l)} = \varepsilon_{k-1}^{(l+1)} + [\varepsilon_k^{(l+1)} + \varepsilon_k^{(l)}]^{-1} \quad (4.55)$$

$k=1, \dots, N$ および $l=1, \dots, 2N-k+1$ に対して順次計算して求める。

ここで、Laplace 逆変換の離散表現を再記する。

$$h_j(t) = \frac{1}{T} \cdot \exp(p_o t) \cdot \left[\frac{1}{2} \bar{h}_j(p_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_j(p_k) \cdot \exp\left(\frac{ik\pi t}{T}\right) \right] \quad (4.56)$$

式(4.56)の級数和の部分をも $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ と定義する。

ここで、

$$a_n = \bar{h}_j(p_o + i \frac{\pi k}{T}) \quad (4.57)$$

$$z = \exp\left(\frac{i\pi t}{T}\right) \quad (4.58)$$

また、上記の数列 $a_n z^n$ の部分和を $S_l = \sum_{n=1}^l \text{Re}(a_n z^n)$ ($l=1, 2, \dots, 2N+1$) と定義する

と、一般的に、数列 $S_1, S_2, \dots, S_{2N+1}$ よりも数列 $\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_3^{(1)}, \dots, \varepsilon_{2N+1}^{(1)}, \dots$ の方が、

級数和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して収束性が速い。このため、数列 $\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_3^{(1)}, \dots, \varepsilon_{2N+1}^{(1)}, \dots$ を用

いて $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を推定する方法が、EPAL法である。

この際の数列 $\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_3^{(1)}, \dots, \varepsilon_{2N+1}^{(1)}, \dots$ は次のように定義される。

$\varepsilon_l^{(1)}$ は、 $\varepsilon_o^{(l)} = 0, \varepsilon_1^{(l)} = S_l, l=1, \dots, 2N+1$ として、

$$\varepsilon_{k+1}^{(l)} = \varepsilon_{k-1}^{(l+1)} + [\varepsilon_k^{(l+1)} - \varepsilon_k^{(l)}]^{-1} \quad (4.59)$$

を $k=1, \dots, N$ および $l=1, \dots, 2N-k+1$ に対して順次計算して求める。このとき各 $\varepsilon_k^{(l)}$ は次の様になる。

$$\begin{array}{cccc}
\varepsilon_0^{(1)} & \varepsilon_0^{(2)} & \dots & \varepsilon_0^{(2N+1)} & \varepsilon_0^{(2N+2)} \\
\varepsilon_1^{(1)} & \varepsilon_1^{(2)} & \dots & \varepsilon_1^{(2N+1)} & \\
\vdots & \vdots & & & \\
\varepsilon_{2N}^{(1)} & \varepsilon_{2N}^{(2)} & & & \\
\varepsilon_{2N+1}^{(1)} & & & &
\end{array} \tag{4.60}$$

(b) Epsilon Algorithm Complex⁵⁴⁾

Crump の方法では、級数和の実部のみを対象としたが、これを複素数で求める方法が Epsilon Algorithm Complex である。

$$h_j(t) = \frac{1}{T} \cdot \exp(p_o t) \cdot \left[\frac{1}{2} \bar{h}_j(p_o) + \operatorname{Re}(\varepsilon_{2N+1}^{(1)}) \right] \tag{4.61}$$

つまり Epsilon Algorithm における部分和 S_l を複素数を含んだ形で定義し、

$$S_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \tag{4.62}$$

(Epsilon Algorithm では、 $S_l = \sum_{n=1}^l \operatorname{Re}(a_n z^n)$ である。)

Epsilon Algorithm と同様の手順で、 $\varepsilon_{2n+1}^{(1)}$ を求め、最終的に最終的な状態の実数部を採る方法である。

(c) Quotient-Difference Algorithm⁵⁴⁾

Epsilon Algorithm の改良版であり残余項の処理の方法によって、3種類の手法が示されている。Epsilon Algorithm の S_{2N+1} の代わりに $\varepsilon_{2N+1}^{(1)}$ を用いるのと同様に、部分和 S_{2N+1} の代わりに $v(z, N)$ を用いる方法である。

$$v(z, N) = d_1 / (1 + d_2 \cdot z / (1 + d_3 \cdot z / (1 + \dots + d_{2N} \cdot z / (1 + d_{2N+1} \cdot z / (1 + R)))) \tag{4.63}$$

ここで、残余項 $R=0$ の場合、

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = a_1 \\ d_{2k-1} = -q_k^{(1)} \\ d_{2k} = -\varepsilon_k^{(1)} \\ \varepsilon_0^{(k)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, 2N+1) \\ q_1^{(k)} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad (k=1, 2, \dots, 2N+1) \\ \varepsilon_r^{(l)} = q_r^{(l+1)} - q_r^{(l)} + \varepsilon_r^{(l+1)} \quad (r=1, 2, \dots, N : l=1, \dots, 2N-2r+1) \\ q_{r+1}^{(l+1)} = q_r^{(l+1)} \cdot \frac{\varepsilon_r^{(l+1)}}{\varepsilon_r^{(l)}} \quad (r=1, 2, \dots, N-1 : l=1, \dots, 2N-2r) \end{array} \right. \quad (4.64)$$

また、 $v(z, N)$ は漸化式により次のように表される。

$$A_n = A_{n-1} + d_n z A_{n-2} \quad (A_0 = 0, A_1 = d_1) \quad (4.65)$$

$$B_n = B_{n-1} + d_n z B_{n-2} \quad (B_0 = 1, B_1 = 1) \quad (4.66)$$

上記の式により

$$v(z, N) = \frac{A_{2N+1}}{B_{2N+1}} \quad (4.67)$$

となる。

Quotient-Difference Algorithm 基本形 ($R=0$) は、

$$h_j(t) = \frac{1}{T} \cdot \exp(p_o t) \cdot \left[\frac{1}{2} \bar{h}_j(p_o) + \operatorname{Re} \left(\frac{A_{2N+1}}{B_{2N+1}} \right) \right] \quad (4.68)$$

残余項 $R \neq 0$ の場合、

$$h_j(t) = \frac{1}{T} \cdot \exp(p_o t) \cdot \left[\frac{1}{2} \bar{h}_j(p_o) + \operatorname{Re} \left(\frac{\hat{A}_{2N+1}}{\hat{B}_{2N+1}} \right) \right] \quad (4.69)$$

ここに、

$$\bar{A}_{2N+1} = A_{2N} + R A_{2N-1} \quad (4.70)$$

$$\bar{B}_{2N+1} = B_{2N} + R B_{2N-1} \quad (4.71)$$

基本型は漸化式の最後 ($n=2N+1$) の時に、 $d_n z$ の代わりに R を用いる。

上式のように与えられるが、 $v(z, N)$ を求める際に仮定が必要であり、

(第一種) $d_{n+m} = d_{n+1}$ を仮定する場合,

$$R = -\frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 + 4d_{2N+1}z} \right] \quad (4.72)$$

(第二種) $d_{n+2m} = d_n, d_{n+2m+1} = d_{n+1}$ を仮定する場合,

$$R = -h \left[1 - \sqrt{1 + 4d_{2N+1}z/h^2} \right] \quad (4.73)$$

$$h = \frac{1}{2} \left[1 + (d_{2N} - d_{2N+1})z \right] \quad (4.74)$$

の場合がある。

4.5 LTG法の解析精度の検証

4.5.1 理論解析及び従来の解析手法との精度の比較

本研究で取り扱う LTG 法の解析精度の妥当性を検討するため、簡単な定流量揚水試験モデルについて、理論解析および、従来の数値浸透解析手法と解の比較を行った。以下に解析モデル並びに各条件について示す。

(1) 定流量揚水試験解析モデル

解析モデルを図-4.3に示す。本モデルは被圧状態下での問題とする。

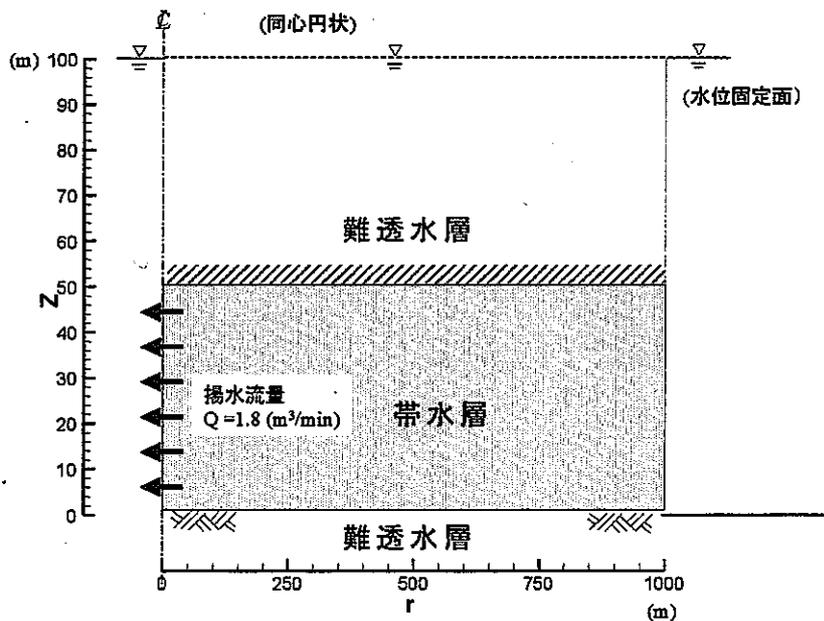


図-4.3 解析モデル

(2) 物性値及び境界条件

今回の解析に用いる各物性値及び境界条件を表-4.1に示す。

表-4.1 物性値および初期・境界条件

項目	値
透水係数	1.0E-02 (cm/sec)
比貯留係数	1.0E-06(1/cm)
間隙率	0.4
揚水流量	1.8 (m ³ /min)
帯水層厚	50 (m)
初期水位	100 (m)

今回は理論解析方法として Jacob の方法を適用するため、この理論の過程に基づいて、揚水半径 $r=0(m)$ 、両端境界は無遠方を仮定する。ただし、数値解析手法を適用する際には、両端境界は 1000(m)とする。また、帯水層厚すべてより揚水を行う。

(3) 解析方法

図-4.2の解析モデルについて以下の解析方法による計算結果を比較することにより、LTG法の解析精度の妥当性を検討する。

(理論解析)

- 1) Jacob の方法(付録 C 参照 55)

(数値解析)

- 2) 2次元軸対称，時間差分法
- 3) 3次元，時間差分法
- 4) 3次元，LTG法

また、解析方法 2)で使用する解析メッシュを図-4.4に、解析方法 3),4)で使用する解析メッシュを図-4.5に示す。尚、図-4.5の断面メッシュ形状は図-4.4と同じである。また、図-4.5の解析メッシュは、図-4.4の解析メッシュを同心円方向に 3° ピッチで 6層引き伸ばした。

図-4.4の解析メッシュの総節点数は 220、総要素数は 190である。また、図-4.5の解析メッシュの総節点数は 1474、総要素数は 1110である。

解析方法 3),4)では、平面が中心半径 18° の扇形のモデルを使用しているため、揚水流量も $0.09(\text{m}^3/\text{min})$ に変更する (\because 同心円状の揚水流量 $2.0(\text{m}^3/\text{min}) \times (18^\circ / 360^\circ)$)。

これらのモデルについて非定常解析を行い、解析最終時間は 3 ヶ月後にした。また、解析方法 2), 3)の時間差分法は、初期時間刻みを $0.01(\text{sec})$ 、時間刻みの最大値を 100 分と 1 日、時間増分の倍率を 1.2 倍とした。

松尾、新堂は、LTG 法における数値ラプラス逆変換の精度について検討している^{56),57)}。それによると、Crump の方法のうち De hoog の提案による Quotient Difference Algorithm が最も精度が良く、 $0.02T_{\max} \sim 1.7T_{\max}$ 間で良い逆変換値を与えていることを示している。これらに習い、解析方法 4)の数値ラプラス逆変換手法のうち、Crump の方法には Quotient Difference Algorithm を用い、求める時間が上記の区間内に収まるように T_{\max} を変化させて解析を行った。また、Crump の方法における式(4.53)中のその他のパラメータとして $\alpha=0$ 、 $E'=1.0 \times 10^{-6}$ 、 $2N+1=15$ とした。細野の方法における式(4.32)中のパラメータとして $\sigma_0=5$ 、 $\mu=10$ 、 $k=15$ とした。

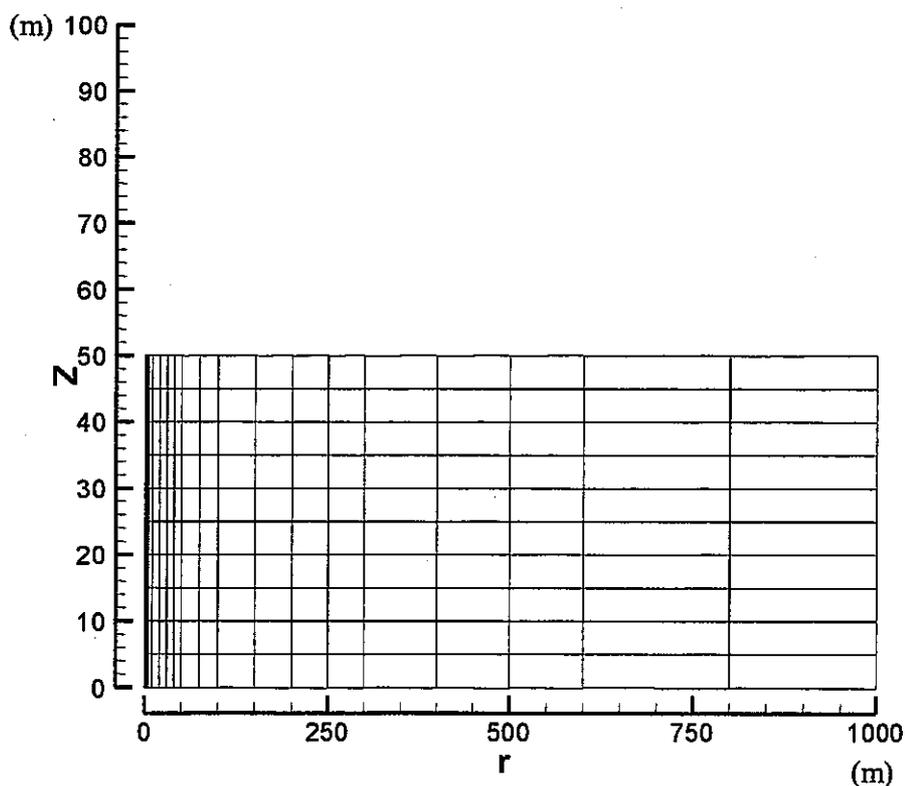


図-4.4 解析メッシュ図(2次元及び3次元断面状態)

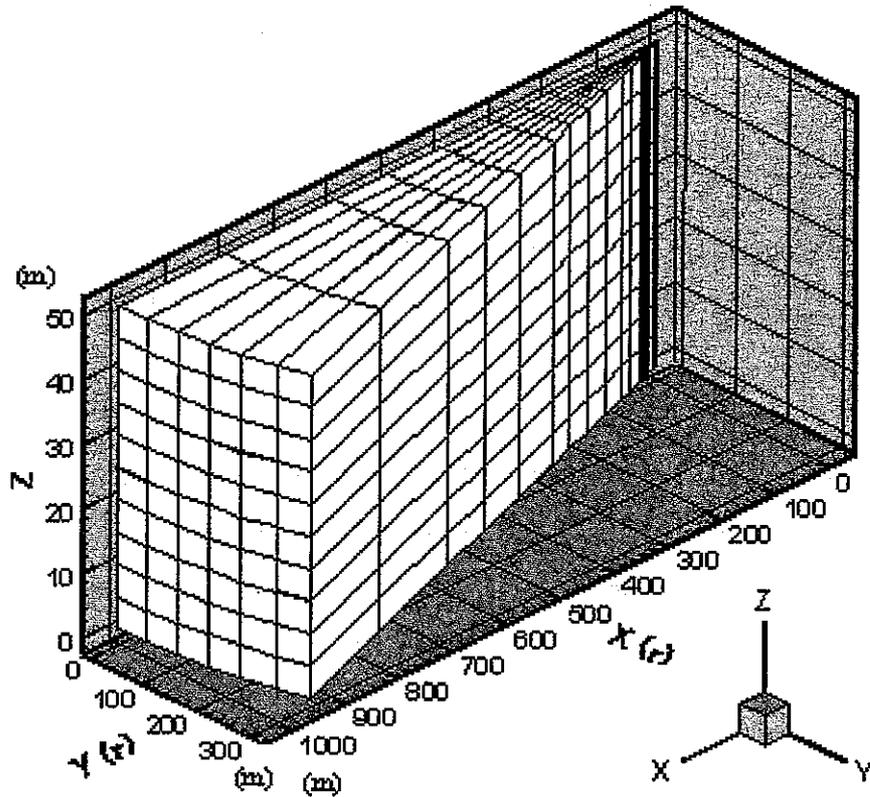


図-4.5 解析メッシュ図(3次元)

(3) 解析結果

上記の解析結果を Jacob の方法でまとめた(縦軸に初期水頭と時間経過後の水頭の差 s (m) を, 横軸に時間 t を観測点までの半径 r の二乗で序した値 (sec/cm^2) で対数表示)。これを, 図-4.6($r=5.0\text{m}$), 図-4.7($r=50.0\text{m}$), 及び付表-4.1, 4.2 に示す。それぞれの図において, 本研究で用いる LTG 法の解析精度は有効範囲にあることが確認できる。ただし, 時間が立つにつれて, 数値解析により求めた水頭の差 s の値が変化しなくなっている。これは, 境界条件の影響によるものと思われる。理論解析において境界条件を無限遠方と仮定しているのに対し, 数値解析方法では有限の境界を設定しているため(今回は, 1000m) 起こったものと考えられる。

また、Crumpの方法のQuotient Difference Algorithmでは、出力時間によっては、解が大幅に違う場合があった。そこで、打ち切り級数 $2N+1$ の値を31, 45, 90にして解析を行った。この結果を、同じく図-4.6($r=5.0m$), 図-4.7($r=50.0m$), 及び付表-4.1, 4.2に示す。これより、打ち切り級数を上げることによって精度を向上できることがわかった。ただし、打ち切り級数を大幅に上げたとしても大きな精度の向上は見られなかったため、打ち切り級数を $2N+1=31$ 程度にすることが適当である。

以上のことより、数値ラプラス逆変換に際しては、Crump法のQuotient Difference Algorithmに比べ、細野の方法が安定した精度で解を求めることができることが確認された。

また、解析所要時間について、表-4.2に示す。これより、解析結果の出力数が少なくなるほど、LTG法の解析所要時間が短縮できることがわかる。ただし、時間差分法において、時間刻みの最大値を大きく取ることによって計算時間が短縮され、LTG法より解析所要時間が短くなる。また、解析の最終時間を短く取ることにより時間差分法の方が迅速に計算が行えることが予想される。このため、解析を行う場合には、どちらを用いて解析を行うべきかを判断する必要がある。また、数値ラプラス逆変換に関して、細野の方法は時間ごとに水頭値を再計算する必要があるため、出力数が多くなる場合は解析時間が大幅に長くなってしまふ。

表-4.2 解析所要時間

解析方法 出力数	時間差分法		LTG法				
	Δt_{max}	time	細野	QDA(crump, $2N+1=15$)	QDA(crump, $2N+1=31$)	QDA(crump, $2N+1=45$)	QDA(crump, $2N+1=90$)
			tiore	time	tiore	time	time
1	100min	1811	01	65	124	178	355
	1day	559					
5	100min	1811	302	131	249	366	718
	1day	559					
10	100min	1848	605	197	374	553	1083
	1day	561					
25	100min	1919	1530	267	504	753	1471
	1day	563					

※時間差分法の欄の Δt_{max} は時間刻みの最大値、timeは解析所要時間、解析最終時間は3ヶ月後、初期時間刻みは0.01sec
出力時間

- ① 出力数1 : 3か月後
- ② 出力数5 : 1時間後, 1日後, 1週間後, 1か月後, 3か月後
- ③ 出力数10 : 1分後, 30分後, 1時間後, 12時間後, 1日後, 1週間後, 半月後, 1か月後, 2か月後, 3か月後
- ④ 出力数25 : 0.1秒後, 6秒後, 1分後, 5分後, 10分後, 20分後, 30分後, 1時間後, 2時間後, 3時間後, 6時間後, 12時間後, 1日後, 1日半後, 2日後, 3日後, 1週間後, 2週間後, 3週間後, 1か月後, 1か月半後, 2か月後, 2か月半後, 3か月後

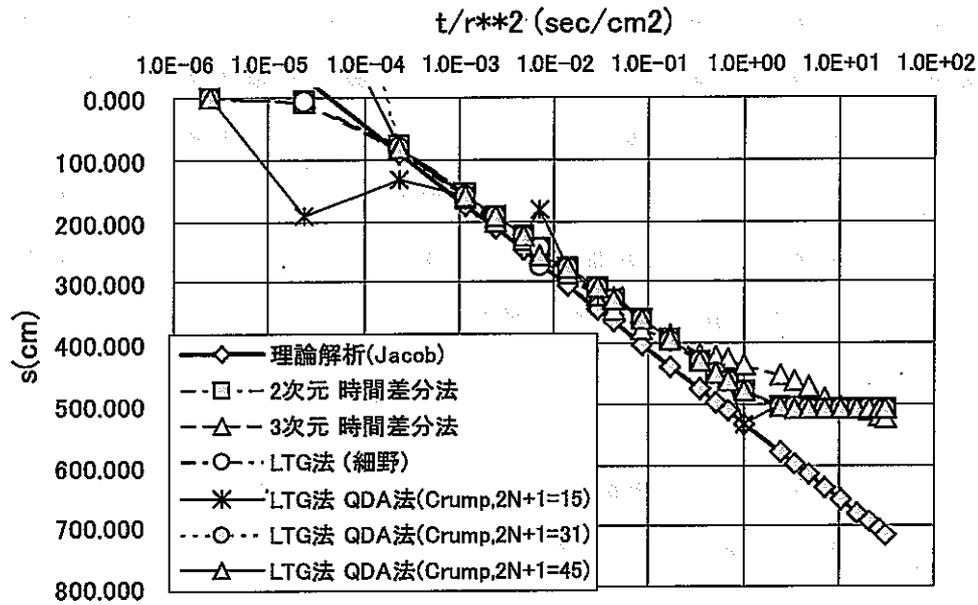


図-4.6 時間と水頭低下量の関係(揚水井から観測井までの距離 $r=5.0m$)

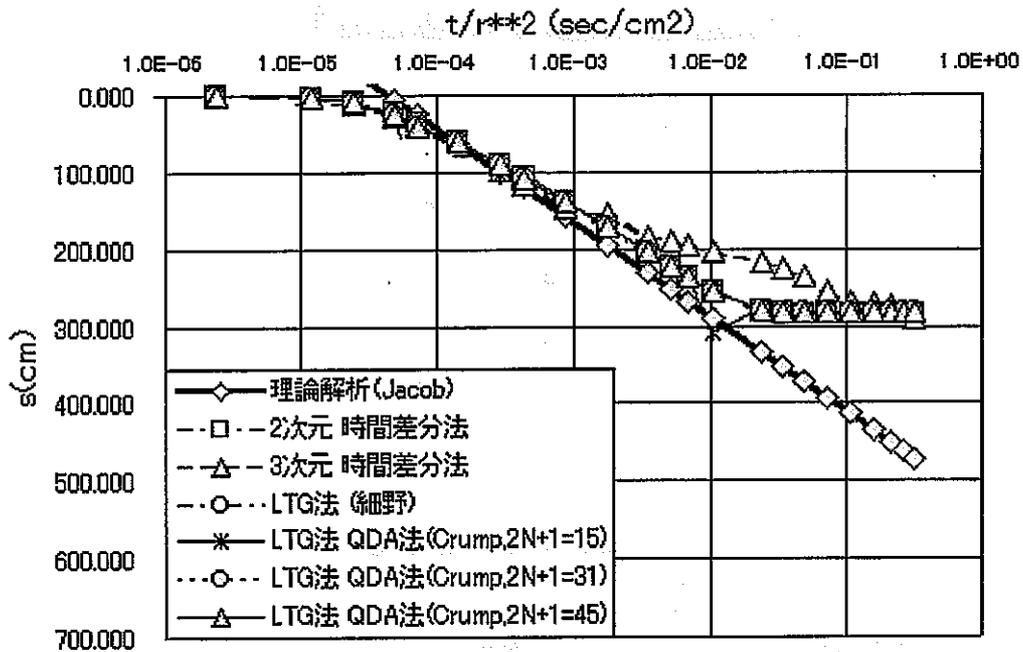


図-4.7 時間と水頭低下量の関係(揚水井から観測井までの距離 $r=50.0m$)

4.5.2 シヌソイダル試験を想定した場合の解析精度及び時間の検証

従来の時間差分法の解析では、シヌソイダル試験のように境界条件が経時的に変動する場合、必然的に時間間隔を小さくする必要があり、3次元で解析を行う際に演算時間の増大が懸念される。しかも、厳密な境界条件の導入は不可能であり、時間間隔の取り方で解がばらつき、解析をより困難にすることが予想される。そこで、ここでは、シヌソイダル試験を想定し、LTG法の解析精度の検討、及び、時間差分法との計算時間の比較を行い、シヌソイダル試験を想定した場合におけるLTG法の有効性を検討する。

(1) 解析モデル

解析モデルを図-4.8に示す。問題を簡単にするために、均質モデルを考える。また、本モデルは被圧状態下での問題とする。

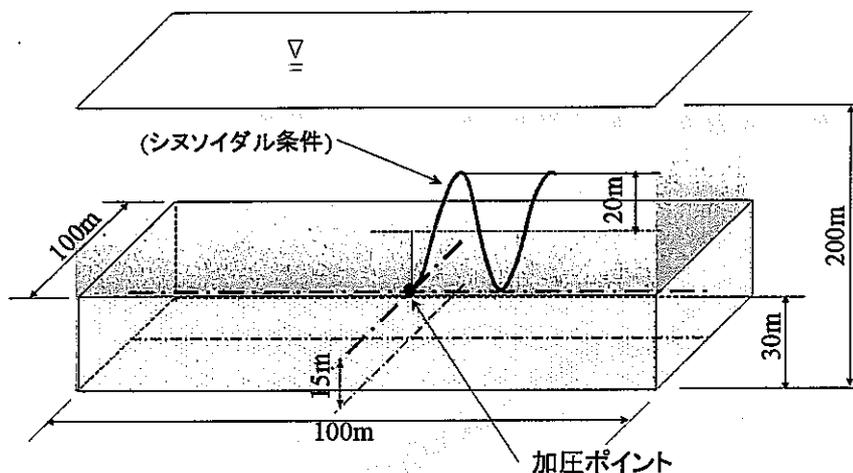


図-4.8 解析モデル

(2) 物性値及び初期・境界条件

今回の解析に用いる各物性値及び境界条件を表-4.3に示す。

表-4.3 物性値及び境界条件

項目	値	シヌソイダルデータ	値
透水係数k	1.0E-06(cm/sec)	基準圧力水頭	205m
比貯留係数Ss	1.0E-09(1/cm)	振幅	20m
間隙率	0.02	周期	15min, 30min
帯水層厚D	30 (m)	位相差	$3\pi/2$
初期水位	100 (m)		

1 周期 15 分の場合の加圧点における水圧の変化を図-4.9 に示す。LTG 法では関数で入力するため、(a)のようにスムーズになる。これに対して、時間差分法では、いくつかの点で近似する必要がある。そこで、加圧ピッチを 1 周期 30 分割して近似した。そのため、(b)に示すように階段状に加圧することになる。

また、モデル上下面の境界条件として難透水条件(水を通さない)、モデル側面における境界条件として水位 100(m)で水位固定条件を与えた。

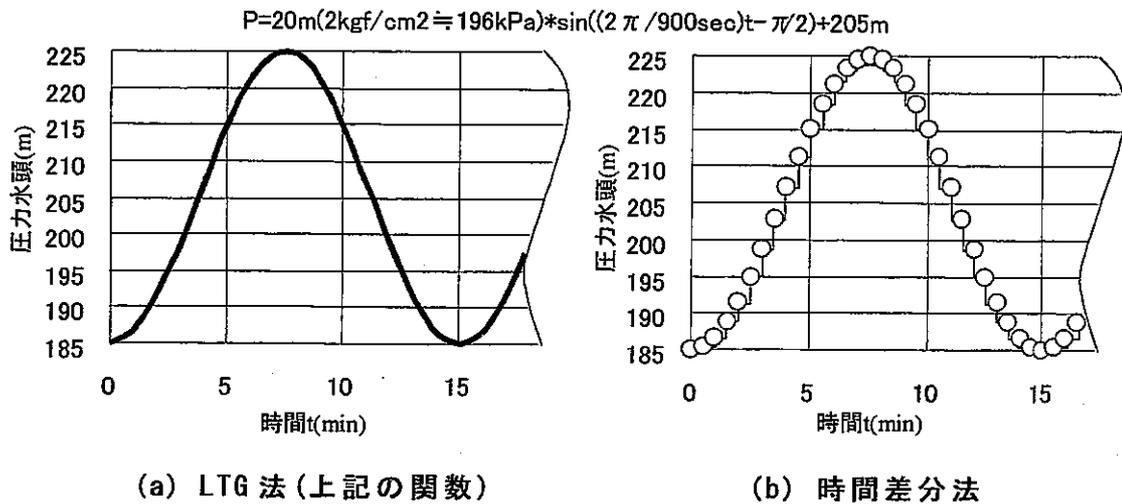


図-4.9 加圧点における圧力水頭の変化

(3) 解析方法

解析メッシュを図-4.10 に示す。dx,dy=2m~20m, dz=5m ピッチで要素分割を行った。総節点数 1575, 総要素数 1176 である。また、応答水圧の観測点は

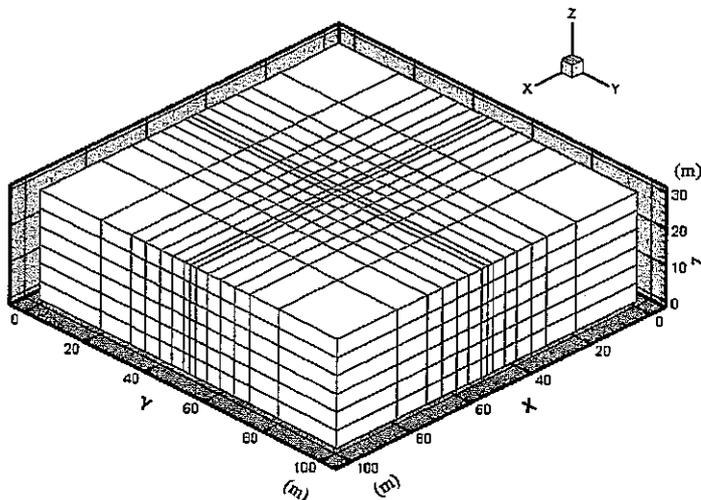


図-4.10 解析メッシュ図

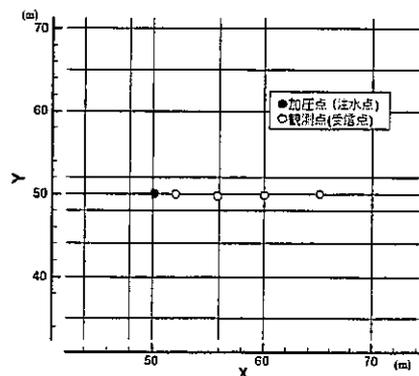


図-4.11 観測点の配置

図-4.11 に示すポイントにした。これらの点の z 座標は全て加圧ポイントと同じ高さである。観測点数は合計 4 点で、2m~20m の範囲である。

また、演算時間の比較のために行った時間差分法では、精度を保つために初期時間刻みを 0.01 秒とし、時間刻みの最大値を 1 周期 15 分では 30 秒、1 周期 30 分では 60 秒、時間増分の倍率を 1.1 倍にした。LTG 法での数値ラプラス逆変換手法としては、4.5.1 節と同様に細野の方法と Crump 改良法の Quotient Difference Algorithm を用いる。また、Crump の方法における式(4.53)中のパラメータとして $\alpha=0$ 、 $E'=1.0 \times 10^{-6}$ 、 $2N+1=31$ 、 $T_{\max}=80$ 、細野の方法における式(4.32)中のパラメータとして $\sigma_0=5$ 、 $\mu=10$ 、 $k=15$ を基本設定とした。

(4) 解析結果

加圧点での圧力水頭の変化を図-4.12、付表-4.3 に示す。これらより、両者とも精度良く逆変換できる範囲は正弦波周期のサイクル数に依存していることがわかった。また、精度良く逆変換できる範囲を調べるため、1 周期 15 分に固定して、それぞれの打ち切り級数を増加させて解析を行った。打ち切り級数の値の範囲は、Crump 改良法(QDA)では $2N+1=31 \sim 121$ 、細野の方法では $k=15 \sim 60$ とした。それぞれの加圧点での圧力水頭の変化を細野の方法については $k=15, 30$ の結果を図-4.13、 $k=45, 60$ の結果を付図-4.1, 4.2 に、Crump 改良法(QDA)については $2N+1=31, 61$ の結果を図-4.14、 $2N+1=91, 121$ の結果を付図-4.3, 4.4 に示す。また、それぞれのデータについて付表-4.4(細野の方法), 4.5(Crump 改良法)に示す。細野の方法では、 k を増加させることによって精度良く逆変換できる範囲が広がることがわかった。しかし、Crump の方法では、打ち切り級数を大幅に増加させてもその範囲は広がっていない。そこで、打ち切り級数を $2N+1=31$ に固定し、 $T_{\max}=40, 100, 200$ と変化させて解析を行った結果を付図-4.5~4.7 に示す。これらより、 T_{\max} を変化させることによって精度良く変換できる範囲が変化することがわかったが、その与え方による影響が明瞭でない。また、打ち切り級数を $2N+1=61, 121$ に固定して、 $T_{\max}=200, 400$ とそれぞれ変化させて解析を行った結果を付図-4.8~4.11 に示す。付図-4.7 と付図-4.9 から、打ち切り級数 $2N+1$ と T_{\max} を共に増加させることによって精度良く変化できる範囲が広がることがわかった。しかし、付図-4.10 や付図-4.11 よ

り $2N+1$ と T_{\max} を大幅に増加させても精度良く逆変換できる範囲に変化はなく、その範囲は、周期が 22 回目付近で限界であった。また、与えた値の組み合わせによってはその範囲が狭くなることがあり、打ち切り級数 $2N+1$ と T_{\max} の最適な組み合わせを決定することが困難である。

表-4.4 に時間差分法との演算時間の比較結果を示す。この際、出力する時間及び数による演算時間の違いを調べるため、解析時間を正弦波周期 5, 10 サイクル分(15min の場合 75, 150min, 30min の場合 150, 300min)とした。また、出力時間数の違いによる演算時間の比較を行うために、それぞれ 5, 10 サイクル目の 1 個の場合と、0.25(cycle)(図-4.9 中の正弦波の山と谷の部分)ごとにそれぞれ 20, 40 個の場合とした。そして、LTG 法における数値ラプラス逆変換の打ち切り級数 k 、 $2N+1$ 及び T_{\max} を求める時間に対して変化させ、その他のパラメータは基本設定にして解析を行った。これより、LTG 法では求める時間が計算時間に影響しないことがわかった。出力数の違いによる演算時間への影響として、細野の方法では、求める時間ごとに再計算を行ってそれぞれ解を求めなければならないため、出力数の増加に伴い大幅に演算時間がかかる。一方、Crump 改良法(QDA)では、各々の時間における水頭を代数的に算定することができるため、出力数の演算時間への影響が比較的少なく、迅速に計算できることがわかった。また、時間差分法において、1 周期がより長い時間になった場合や、解析精度を上げるために正弦波を近似する分割数を更に増加させた場合、これらの影響により更に演算時間がかかることが予想される。

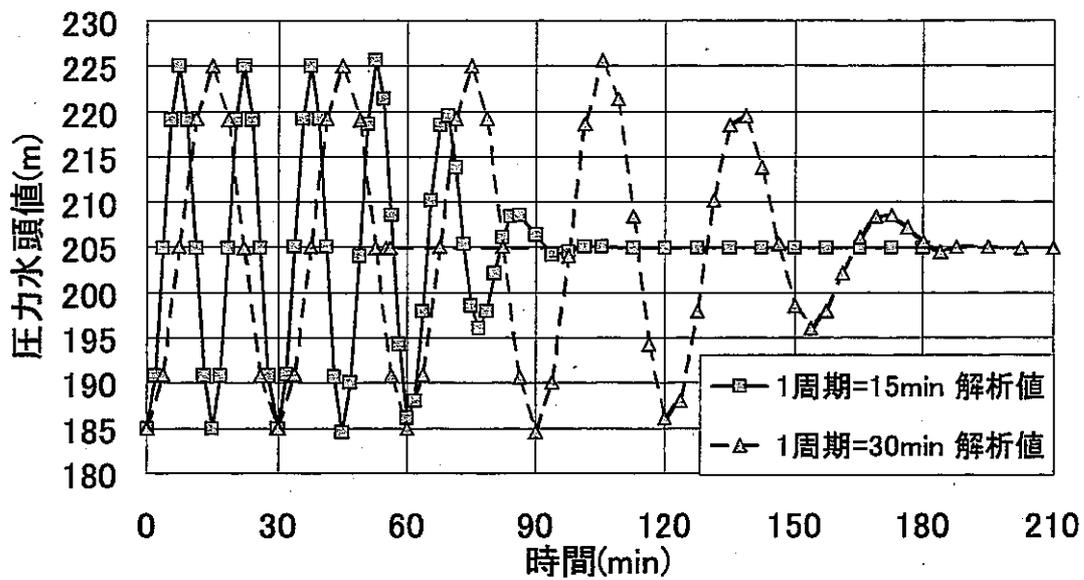
以上のことから、シヌソイダル試験を想定した解析を行う場合、LTG 法を用いることによって迅速な計算が可能となることがわかった。ただし、解析を行う場合に、正弦波の入力値や出力する時間とその数などからどの解析方法を用いて行うべきかを判断する必要がある。

表-4.4 演算時間の比較

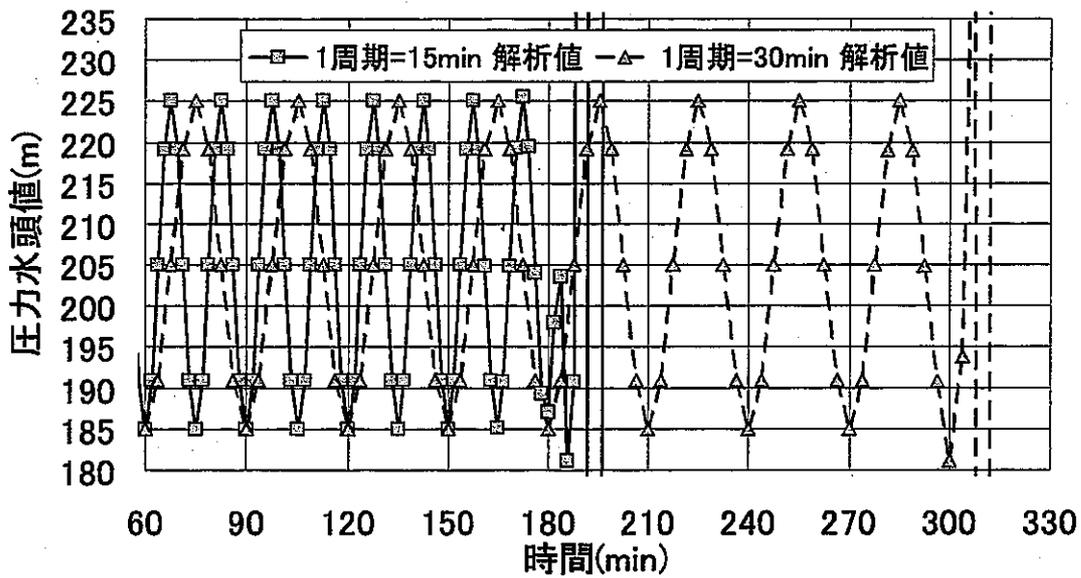
(a) 1 周期 15 分の場合

(b) 1 周期 30 分の場合

(sec)					(sec)				
正弦波 サイクル数	出力数	時間差分法	LTG法(細野)	LTG法(QDA)	正弦波 サイクル数	出力数	時間差分法	LTG法(細野)	LTG法(QDA)
5 (75min)	1	239	140	138	5 (150min)	1	242	140	138
	20	246	2264	146		20	255	2264	146
10 (150min)	1	421	240	208	10 (300min)	1	422	240	208
	40	437	5728	223		40	439	5728	223



(a) 細野の方法の場合 (打ち切り級数 $k=15$)



(b) Grump 改良法 (QDA) の場合 (打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{max}=80$)

図-4.12 加圧点における圧力水頭の変化

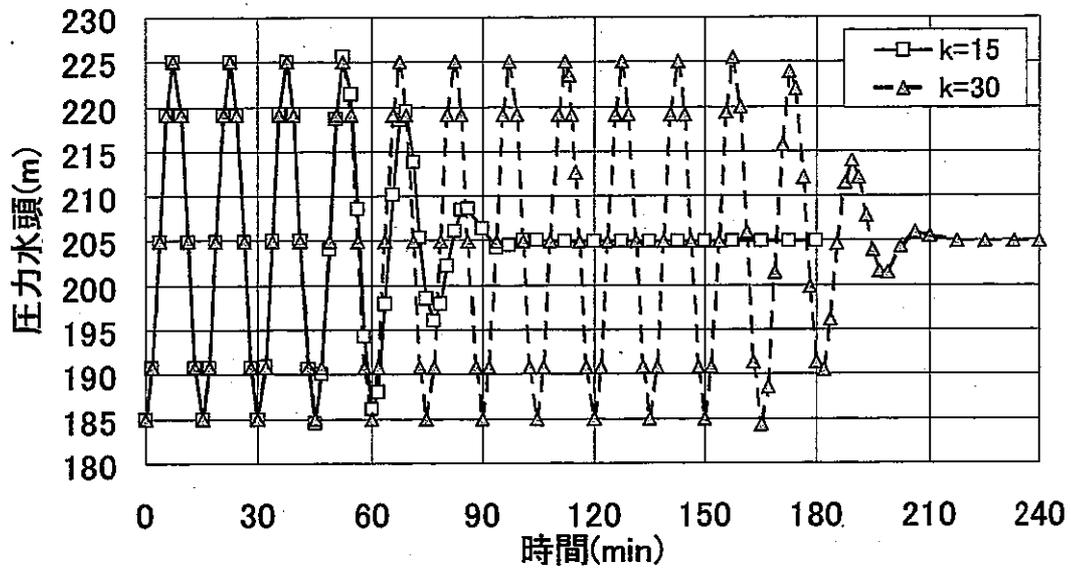


図-4.13 加圧点における圧力水頭の変化
 (細野の方法, 1周期15分, 打ち切り級数 $k=15, 30$)

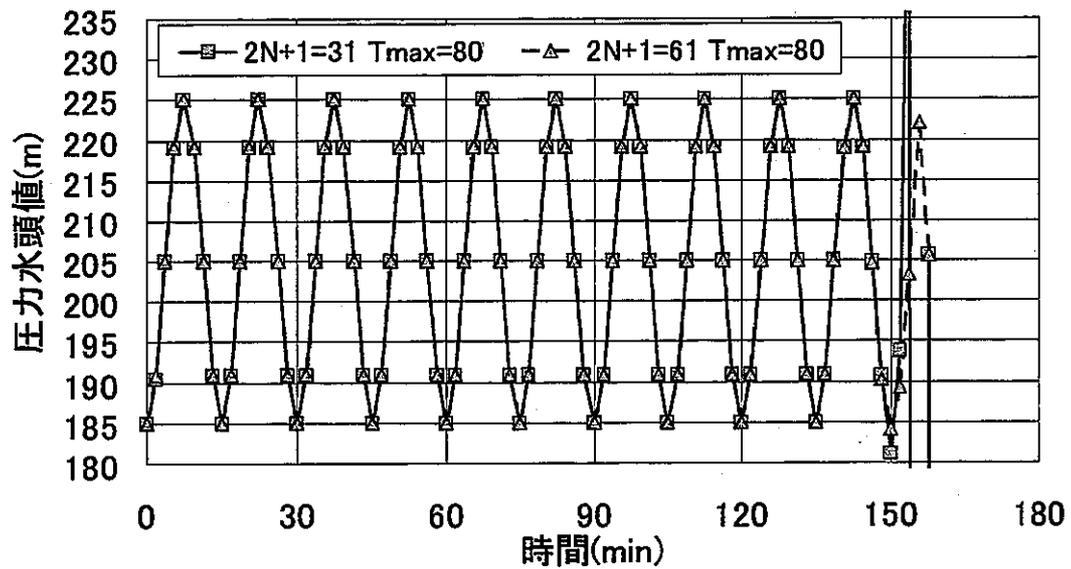


図-4.14 加圧点における圧力水頭の変化
 (Crump 改良法 (QDA), 1周期15分, $T_{max}=80$, 打ち切り級数 $2N+1=31, 61$)

【参考文献】

- 47) Sudicky, E.A. : The Laplace Transform Galerkin Technique. A time-continuous finite element theory and application to mass transport in groundwater, *Water Resources Research*, Vol.25, No.8, pp.1833-1846, 1989.
- 48) Kenny, S.Crump : Numerical inversion of laplace transforms using a fourier series approximation, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.23, No.1, pp.89-96, 1976.
- 49) 細野敏夫: 数値ラプラス変換, *電気学会論文誌*, Vol.99, No.10, pp.494-500, 1979.
- 50) Churchill, R.V. (洪四方次 訳): 応用ラプラス変換, 彰国社, pp.3-5, 1960(第2版, 第1版は1950).
- (50) Churchill, R.V. : *Operational mathematics*, McGraw-hill Publishing Company, pp.3-5, 1971(3rd Edition))
- 51) Dubner, H. and J. Abate : Numerical inversion of the laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform, *J.ACM* 15, 1, pp.115-123, 1968.
- 52) Simon, R.M., M.T.Stroot, G.H.Weiss : Numerical inversion of laplace transforms with application to percentage labeled mitoses experiments, *Computers and Biomed. Res.*, pp.596-607, 1972.
- 53) MacDonald, J.R. : Accelerated convergence divergence, iteration, extrapolation, and curve fitting, *J.Appl.Phys.*, 10, pp.3034-3041, 1964.
- 54) De Hoog, F.R., J.H.Knight, and A.N.Stokes : An improved method for numerical inversion of laplace transforms, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 3(3), pp.357-366, 1982.
- 55) 社団法人地盤工学会 : 根切り工事と地下水 -調査・設計から施工まで-, 現場技術者のための土と基礎シリーズ 19, 社団法人地盤工学会, pp.86-87, 1991.
- 56) 松尾雄一郎 : 亀裂性岩盤における水圧トモグラフィーに関する研究, 岡山大学修士論文, 1997.

- 57) 新堂充彦：亀裂性岩盤における浸透特性の把握に関する研究，岡山大学修士論文，1998.

第 5 章 連立一次元方程式の数値解法

5.1 概説

前章までに示したように、有限要素法による浸透の支配方程式の離散化を行うと、最終的には式(3.24)や式(4.13)のような大規模連立一次元方程式を解く問題に帰着する。

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (5.1)$$

($[A]$: $n \times n$ 行列, $\{x\}$: $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, $\{b\}$: n 行列)

ここで、 $\{x\}$ は求めようとする未知量の列ベクトルで、本研究では全水頭値 h 、もしくは \bar{h} にあたる。この解法に関する研究は、有限差分法や有限要素法などを用いて数値解析を行う工学分野では特に盛んで、この解法の如何によって解析可能な問題の規模、または解析時間に深刻な影響を与えるということは周知の事実である。この連立一次元方程式の解法としては直接法(direct method)と近似的に解を求める反復法(iterative method)があり、その特徴およびアルゴリズムを以下に述べる。

5.2 数値解析の概要

5.2.1 直説法(direct method)

直説法の代表者はガウスの消去法である(付録-C.1 に、直説法として最も一般的なガウスの消去法(掃出し法)のアルゴリズムを示す⁵⁸⁾)。

この直説法の計算時間は、解く問題の次元数に依存している。例えば、離散化方程式に上記のガウスの消去法などの LU 分解法を適用すると、行列 $[A]$ を記憶するのに次式の記憶容量 M が必要となる。

$$M = n \times (BW/2) \times 8/1024^2 \text{ (MB)} \quad (5.2)$$

ここで、 n : 節点数, $BW/2$: バンド幅の半分の値

このことより、行列 $[A]$ の大きさに比例して、計算時間が増大する。また、計算アルゴリズム自体は簡単にプログラミング出来るが、対象とする問題が大規模になるほど、大量のメモリー(主記憶容量)が必要となり、それによってメインアルゴリズム以外のところで様々修正を加えてやらねば 3次元問題のような

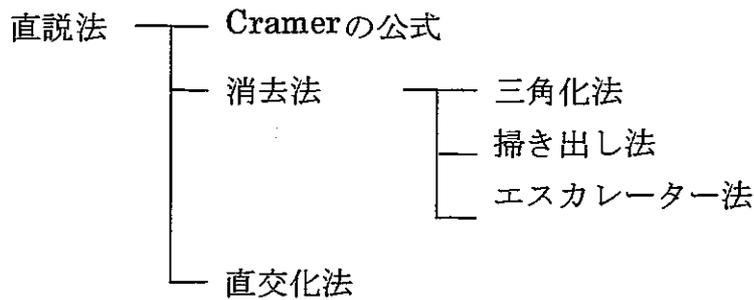


図-5.1 一般的な直説法

大規模な問題には適用できない。つまり、主な用途としては係数マトリックスのノルムがある程度小さく、一般的な問題で特に係数が共通な方程式の定数項をいろいろ換えて解く場合に有効であるとされている。

直説法を有効的に利用するには、解析に用いる計算機に依じて必要メモリーを小さくする必要がある。これに対して、有限要素法などに良く見られる係数行列要素のほとんどがゼロであり、対角項にそって帯状に要素が分布している大規模なスパース行列である場合がほとんどである。この特徴を利用して、バンド内部のゼロ要素まで取り除くことが可能なスカイライン法などを用いることにより、バンド幅を小さくして、メモリーサイズの縮小化や演算時間の削減を図る方法が取られてきた。スカイライン法では、2次元配列を1次的に配列でき、しかも計算中もそれ以上の記憶域を必要としないので演算に必要な主記憶容量を削減することができる。

これに対して、次節で紹介する反復法は、計算に必要なメモリーサイズが小さくて済み、3次元問題のような大規模な問題に対して有効な解法である。

5.2.2 直説法(direct method)⁵⁹⁾

直説法の大規模問題、つまり3次元問題に代表される数値解析への適用には高速な計算機で主記憶容量が大規模であるという力任せなところが拭えなかった。そこで計算機の限界に近い問題を解析しようとした際には、演算時間の長大化やコストの面で実用化に関する問題が表面化してきた。そこで現在、有限要素法においては効率と精度の良い反復法が盛んに研究されている。

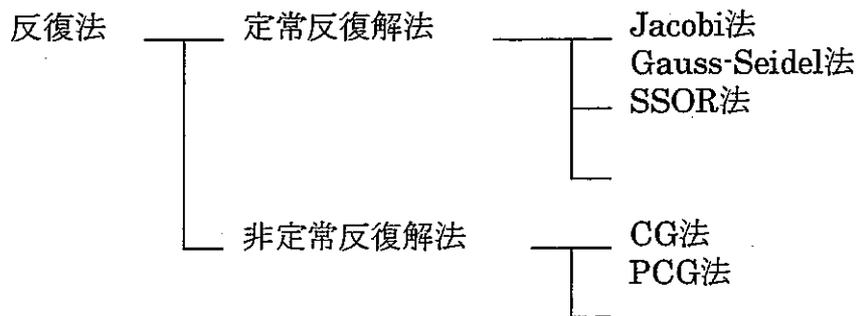


図-5.2 一般的な反復法

反復法は基本的に式(5.1)の両辺に近似逆行列を乗じることによって解を求める手法である。

$$[M]^{-1}[A]\{x\}=[M]^{-1}\{b\} \quad (5.3)$$

式(5.3)内の近似逆行列に残差を反映させて逐次更新していき、残差つまり誤差があらかじめ設定した条件内に収まったところでの近似解 $\{x\}$ を求めるものである。反復法の優れた特徴に、スパース性を有効に生かして係数行列 $[A]$ だけの情報を使って反復計算しても収束性が大して損なわれないことが挙げられる。

反復解法の最も基本となる共役勾配法(CG法)は1952年に Hestenes, M.R. と E.L. Stiefel らによって発表された。当時としては1反復あたり N^2 のオーダーの演算量のみが必要とされ、非常に少ない反復回数で連立1次元方程式が解ける可能性を秘めることから誠に期待された解法であった。しかし、大規模問題へ適用した際には丸め誤差が蓄積しやすいことなどが分かり、一般的に普及するまでには至らなかった。しかし、1970年代になり再び大規模スパース行列へ収束面からの適応性から再び見直されるようになった。1980年代に入るとこれらを元にして非エルミネート行列への適用に関する研究が盛んに行われるようになった。

浸透解析においては、このCG法の収束性を高めるため前処理を施したCG法(Preconditioned Conjugate Gradient Method, PCG法)が開発され、適用されている。例えば、西垣・白石らは、プレコンディショナーを $[A]$ の対角成分の逆行列とする方法で、高速化と記憶容量の削減を実現している⁶⁰⁾。また、中屋

らは、SSOR(Slice Successive Overrelaxation)法を用いて3次元の有限要素網をスライス面の集合に置換した上で、西垣らのPCG法を適用して、更なる記憶容量の削減と演算時間の縮減を図っている³²⁾。

本研究で用いた連立1次元方程式の解法はCG法をもとに非エルミネート行列への適用を行ったBCG法(Bi-Conjugate Gradient Method; 双共役勾配法)である。この手法も基本的にはCG法から成り立っている。付録-C.2にCG法の原理とアルゴリズムを示すと共に、次節でCG法を応用したBCG法の原理とアルゴリズムを示す。

5.3 非対称行列の反復解法

式(3.24)の従来の離散化方程式の反復解法には、西垣・白石らのように、スパース性を有効に利用したPCG法が採用されていた。しかし、LTG法による浸透の支配方程式に関する離散化方程式(4.13)では、行列 $[A]$ が非対称行列となる。

これに対し、CG法をもとに非対称行列を持つ連立一次元方程式への適用を行ったBCG法(Bi-Conjugate Gradient Method; 双共役勾配法)がある。この解法とアルゴリズムを以下に示す(付録-C.2のCG法の解法も参照)。

非対称行列 A を係数に持つ連立一次方程式(5.1)を考える。式(5.1)における初期近似解を x_0 とし初期残差を r_0 とすると

$$r_0 = b - Ax_0 \quad (5.4)$$

ここで、 A の共役転置行列 A^H の新しいクリロフ空間を定義する。

$$K_n(A^H; r_0^*) := \text{Span}\{r_0^*, Ar_0^*, \dots, A^{n-1}r_0^*\} \quad (5.5)$$

付録-C.2示したCG法の解法の説明の中で、近似解を x_n もしくは残差を r_n に課した条件式(C.12)の直交条件に代わり、次の双直交条件を考える。

$$r_n \perp_W K_n(A^H; r_0^*) \quad (5.6)$$

以下、付録-C.2のCG法の解法と同様に、式(C.9)と $W=I$ の時の式(5.6)を満たす残差の列 $\{r_0, r_1, \dots, r_n\}$ に対して補助ベクトル $p_{n-1} (\in K_n(A; r_0))$ を導入すると、CG法における3項漸化式(C.33)と式(C.34)から、次の2つの漸化式が得られる。

$$r_n = r_{n-1} - \alpha_{n-1} A p_{n-1} \quad (5.7)$$

$$p_n = r_n + \beta_{n-1} p_{n-1} \quad (5.8)$$

次に、式(5.6)により、

$$\left((A^H)^{n-1} r_0^*, r_n \right) = 0 \quad (5.9)$$

となる。したがって、式(5.7)から α_{n-1} の計算式は以下のようなになる。

$$\alpha_{n-1} = \frac{\left((A^H)^{n-1} r_0^*, r_{n-1} \right)}{\left((A^H)^{n-1} r_0^*, Ap_{n-1} \right)} \quad (5.10)$$

また、式(5.6)と式(5.7)より、

$$Ap_{n-1} \perp K_{n-1}(A^H; r_0^*) \quad (5.11)$$

が成り立つので、式(5.8)より

$$\begin{aligned} \left((A^H)^{n-1} r_0^*, Ap_{n-1} \right) &= \left((A^H)^n r_0^*, p_n \right) \\ &= \left((A^H)^n r_0^*, r_n \right) + \beta_{n-1} \left((A^H)^n r_0^*, p_{n-1} \right) \\ &= \left((A^H)^n r_0^*, r_n \right) + \beta_{n-1} \left((A^H)^{n-1} r_0^*, Ap_{n-1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

が成り立つ。したがって、 β_{n-1} の計算式は

$$\beta_{n-1} = - \frac{\left((A^H)^n r_0^*, r_n \right)}{\left((A^H)^{n-1} r_0^*, Ap_{n-1} \right)} \quad (5.13)$$

で表せる。さらに、 α_{n-1} の計算式(5.10)を利用すると、

$$\beta_{n-1} = -\alpha_{n-1} \frac{\left((A^H)^n r_0^*, r_n \right)}{\left((A^H)^{n-1} r_0^*, p_{n-1} \right)} \quad (5.14)$$

とも表せる。

また、クリロフ部分空間 $K_{n+1}(A; r_0^*)$ において、 $p_0^* = r_0^*$ とおき、次のように補助ベクトル列 $r_0^*, r_1^*, \dots, r_n^*$ および $p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*$ を導入すると、

$$r_0^* = r_{n-1}^* - \bar{\alpha}_{n-1} A^H p_{n-1}^* \quad (5.15)$$

$$p_n^* = r_n^* + \bar{\beta}_{n-1} p_{n-1}^* \quad (5.16)$$

補助ベクトル r_{n-1}^* と p_{n-1}^* は次のように展開することが出来る。

$$r_{n-1}^* = \left((-1)^{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} \bar{\alpha}_i \right) (A^H)^{n-1} r_0^* + q_1 \quad (5.17)$$

$$p_{n-1}^* = \left((-1)^{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} \bar{\alpha}_i \right) (A^H)^{n-1} r_0^* + q_2 \quad (5.18)$$

ただし、

$$q_1, q_2 \in K_{n-1}(A^H, r_0^*) \quad (5.19)$$

である。したがって、式(5.6)と式(5.11)より α_{n-1} と β_{n-1} は、補助ベクトル r_{n-1}^* と p_{n-1}^* を用いて次のように表現できる。

$$\alpha_{n-1} = \frac{(r_{n-1}^*, r_{n-1})}{(p_{n-1}^*, Ap_{n-1})} \quad (5.20)$$

$$\beta_{n-1} = \frac{(r_n^*, r_n)}{(r_{n-1}^*, r_{n-1})} \quad (5.21)$$

以上をまとめると BCG 法のアルゴリズムが次のように得られる。

BCG 法アルゴリズム

(1) 初期設定

$$r_0 = b - Ax_0 \quad ; \quad (x_0 \text{ は任意の初期ベクトル}) \quad (5.22)$$

$$p_0 = r_0 = p_0^* = r_0^* \quad (5.23)$$

(2) 反復計算

$$p_n = r_n + \beta_{n-1} p_{n-1} \quad (5.24)$$

$$p_n^* = r_n^* + \bar{\beta}_{n-1} p_{n-1}^* \quad (5.25)$$

$$\alpha_k = \frac{(r_n^*, r_k)}{(p_n^*, Ap_n)} \quad (5.26)$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n p_n \quad (5.27)$$

$$r_{n+1} = r_n - \alpha_n Ap_n \quad (5.28)$$

$$r_{n+1}^* = r_n^* - \bar{\alpha}_n A^H p_n^* \quad (5.29)$$

$$\beta_k = -\frac{(r_{n+1}^*, r_{n+1})}{(r_n^*, r_n)} \quad (5.30)$$

BCG 法も CG 法同様に、ある許容誤差 ε を定めておいて収束の判定を行う。つまり

$$\|r_n\| \leq \varepsilon \|b\| \quad \rightarrow \quad \text{end} \quad (5.31)$$

といった判定を行い、近似解を決定する。

この BCG 法にプレコンディショナーを付け加えた反復解法には、ILUBCG 法 (Incomplete LU Bi-Conjugate Gradient Method ; 前処理付双共役勾配法) があ

る。これは、行列 $[A]$ の不完全 LU 分解、 $A=LU+N$ を経たあとで、BCG 法を適用するものである。

このアルゴリズムを以下に示す。

ILUBCG 法アルゴリズム

(1) 初期設定

$$r_0 = [LU]^{-1}(b - Ax_0) \quad ; \quad (x_0 \text{ は任意の初期ベクトル}) \quad (5.32)$$

$$p_0 = r_0 = p_0^* = r_0^* \quad (5.33)$$

(2) 反復計算

$$p_n = r_n + \beta_{n-1} p_{n-1} \quad (5.34)$$

$$p_n^* = r_n^* + \bar{\beta}_{n-1} p_{n-1}^* \quad (5.35)$$

$$\alpha_k = \frac{(r_n^*, r_n)}{([LU]^{-1} p_n^*, Ap_n)} \quad (5.36)$$

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n p_n \quad (5.37)$$

$$r_{n+1} = r_n - \alpha_n [LU]^{-1} Ap_n \quad (5.38)$$

$$r_{n+1}^* = r_n^* - \bar{\alpha}_n [LU]^{-1} A^H p_n^* \quad (5.39)$$

$$\beta_k = -\frac{(r_{n+1}^*, r_{n+1})}{(r_n^*, r_n)} \quad (5.40)$$

BCG 法も CG 法同様に、ある許容誤差 ε を定めておいて収束の判定を行う。つまり

$$\|r_n\| \leq \varepsilon \|b\| \quad \rightarrow \quad end \quad (5.41)$$

といった判定を行い、近似解を決定する。

【参考文献】

- 58) 神谷紀生, 北栄輔 : 工系数学講座(2) 計算による線形代数, 共立出版株式会社, pp.73-97, 1999.
- 59) 張紹良, 藤野清次 : 反復法の教理, 朝倉書店, 1996.
- 60) 西垣誠, 白石知成, 猪瀬二郎, 河村志朗 : 地下鉄建設による多層地盤での複数地下水位変動の3次元浸透解析による予測, 地下水学会誌, Vol.32, No.4, pp.231~240, 1990.
- 32) 中屋眞司, 西垣誠, 河野伊一郎 : 亀裂性方位情報を利用したクロスホール透水試験による岩盤の三次元透水パラメータの測定法, 地下水学会誌, Vol.34, No.2, pp.81-98, 1992.

第6章 クロスホール透水試験を想定した数値実験

6.1 概説

クロスホール透水試験の中で、シヌソイダル試験はバックグラウンドの水圧が変動する場合でも水圧応答が捕らえやすいといった利点を有しており、今後注目すべき試験であることを第2章において紹介した。しかし、試験結果の解釈が難しいといったような問題点も有しており、シヌソイダル試験を効率よく行うためには、観測孔の配置など試験体系について、あらかじめ十分検討しておく必要がある。

クロスホール透水試験の試験体系について考察している従来の研究として、例えば、Yeh and Liu はクロスホール試験における最適のサンプリング体系、例えば、孔間、揚水量、観測場所の配置について地盤統計学手法を用いて検討している⁶¹⁾。また、杉村らは、亀裂ネットワークモデルを用いて孔間試験の数値実験を行い、水みち構造が圧力応答パターンに与える影響を検討している⁶²⁾。前者は2次元的なアプローチであり、後者は定圧試験に対する考察を行っている。しかし実際には、岩盤の浸透が卓越する方向が知れていない場合、加圧点

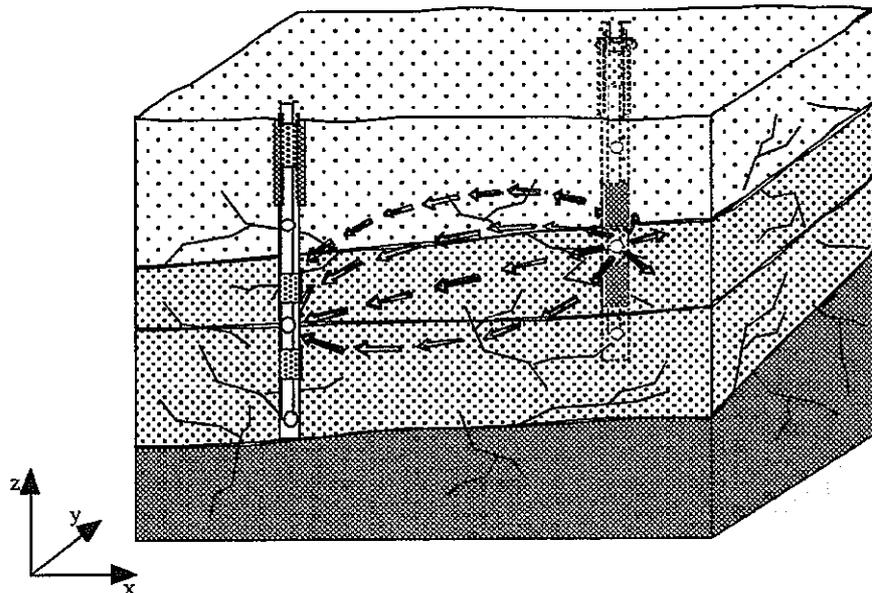


図-6.1 クロスホール透水試験における水圧伝播の概念図

から岩盤中に水圧が伝搬する際には、岩盤内で図-6.1に示すような3次元的な挙動が起こり、地形、浸透特性の分布などによりその伝搬は一様ではない。

そこで、ここでは、3次元浸透流解析を用いて、クロスホール透水試験のシヌソイダル試験を想定した数値実験を行い、応答水圧の伝搬の特性について考察を行う。

6.2 応答水圧の特徴

6.2.1 定圧試験とシヌソイダル試験の応答水圧の比較

ここでは、クロスホール透水試験の定圧試験とシヌソイダル試験の経時的な応答水圧を比較することにより、正弦波状に水圧を与えるシヌソイダル試験の有効性を確認する。そこで、簡単な数値地盤モデルに対して、両試験を想定した解析を行い、解析解の比較を行った。

(1) 解析モデル

解析モデルを図-6.2に示す。モデルは均質モデル、不均質モデル1種類を考える。また、本モデルは両者とも被圧状態下での問題とする。不均質部分については、発信孔より4mの地点に2mの幅で地表面に対して鉛直方向に伸びて存在しているものとする(図-6.2(b))。

(2) 物性値及び初期・境界条件

今回の解析に用いる各物性値及び境界条件を表-6.1に示す。

表-6.1 物性値及び境界条件

項目	値	シヌソイダルデータ	値
透水係数k1	1.0E-06(cm/sec)	基準圧力水頭	85m
透水係数k2	1.0e-08(cm/sec)	振幅	20m
比貯留係数Ss	1.0E-09(1/cm)	周期	15min
間隙率	0.02		
帯水層厚D	30 (m)		

透水係数の k_2 は図-6.2(b)の不均質部分の透水係数である。定圧試験では、一定圧力を約 200kPa(圧力水頭 20m)とした。また、モデル上下面の境界条件として難透水条件(水を通さない)、モデル側面における境界条件として水位 100(m)で水位固定条件を与えた。

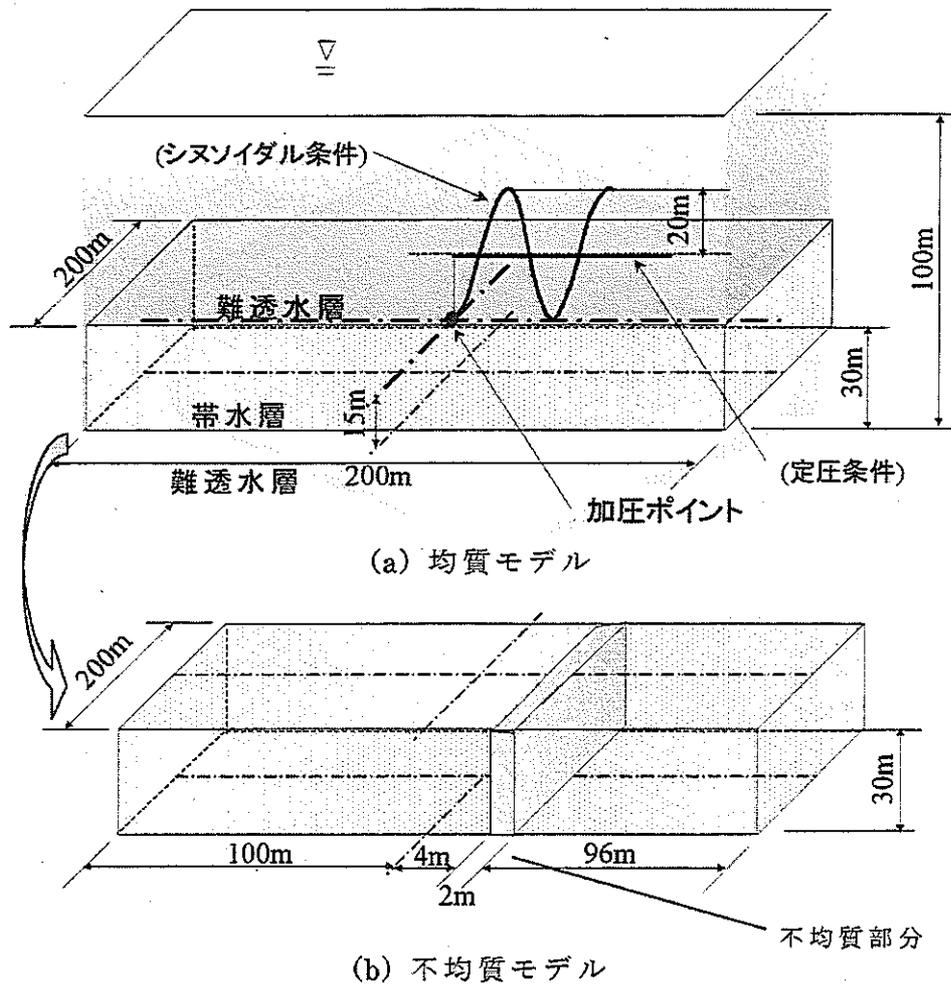


図-6.2 解析モデル

(3) 解析方法

解析メッシュを図-6.3 に示す。dx,dy=2m~25m, dz=5m ピッチで要素分割を行った。総節点数 4025, 総要素数 3168 である。また, 応答水圧の観測点は図-6.4 に示すポイントにした。これらの点の z 座標は全て加圧ポイントと同じ高さである。観測点数は合計 10 点で, 2m~40m の範囲である。そして, 解析最終時間を 360 分後に設定し, 非定常解析を行った。

図-6.5 に加圧点における圧力水頭の変化を示す。

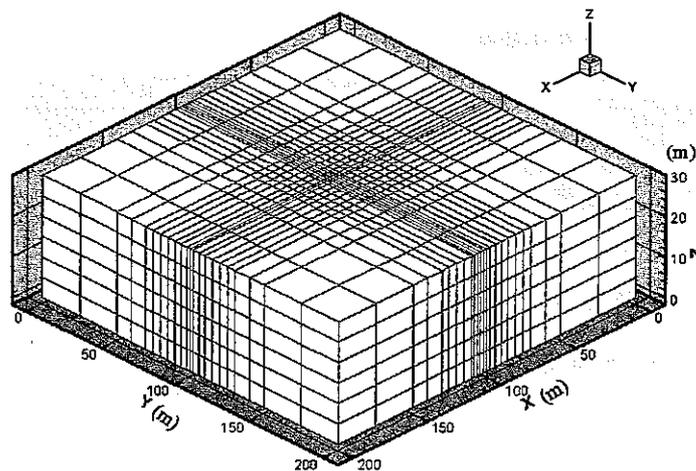


図-6.3 解析メッシュ図

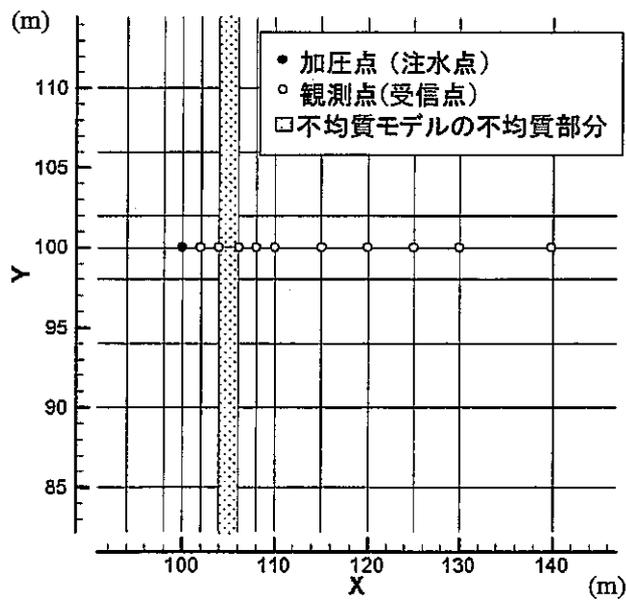


図-6.4 観測点の配置

(4) 解析結果

表-6.2 に示す図に観測点における圧力水頭の変化を示す。

表-6.2 解析結果の図番号

モデル r(m)	均質モデル	不均質 ($k_2=1.0E-8\text{cm/sec}$)
4	図-6.6	図-6.7
10	付図-6.1	付図-6.2

※ r は加圧点から観測点までの距離

これらの結果より、定圧試験における注水圧力とシヌソイダル試験における振幅の大きさが同じ値の時、定圧の応答圧力とシヌソイダル試験の応答圧力の中心部分が、ほぼ一致することが分かった。これは、不均質部が存在する場合においても同様である。

両試験の応答水圧を比較すると、シヌソイダル試験では応答圧力が変動するため、応答圧力値に加えて振幅や位相差といった情報を得ることができる。よって、応答圧力が、定圧試験に比べて孔間の地質状態の影響をより反映したものとなることが考えられる。

また、実際に原位置試験を行う際には、応答水圧の記録データを処理することによって、振幅や位相差といったデータが容易に求められる。処理方法としては、受圧孔での応答水圧波形よりバックグラウンドの水位変化を回帰式により求め、差し引く方法がある³³⁾。

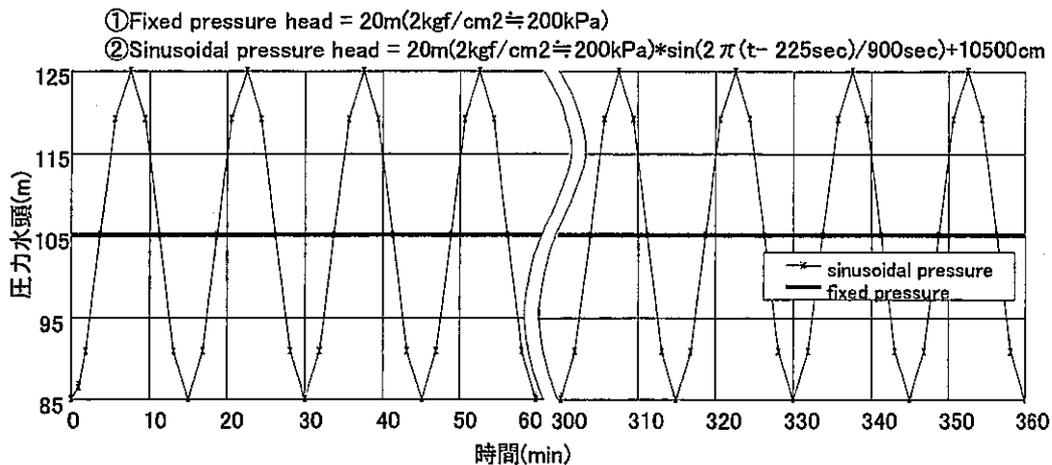


図-6.5 加圧点における圧力水頭の変化

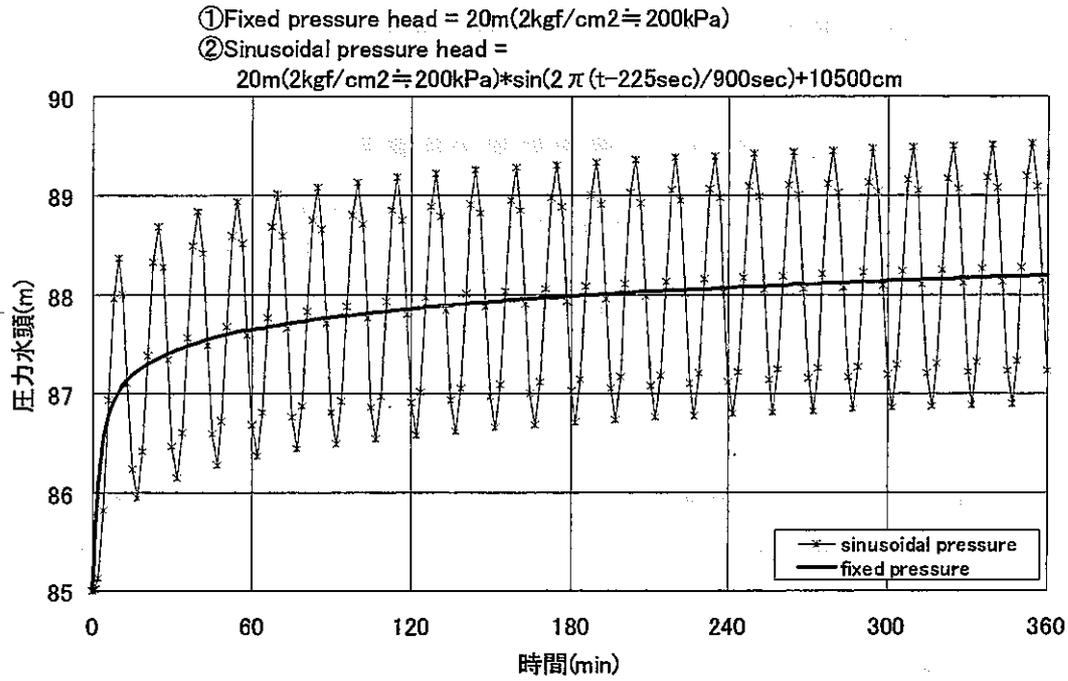


図-6.6 観測点における圧力水頭の変化(均質モデル, $r=4\text{m}$)

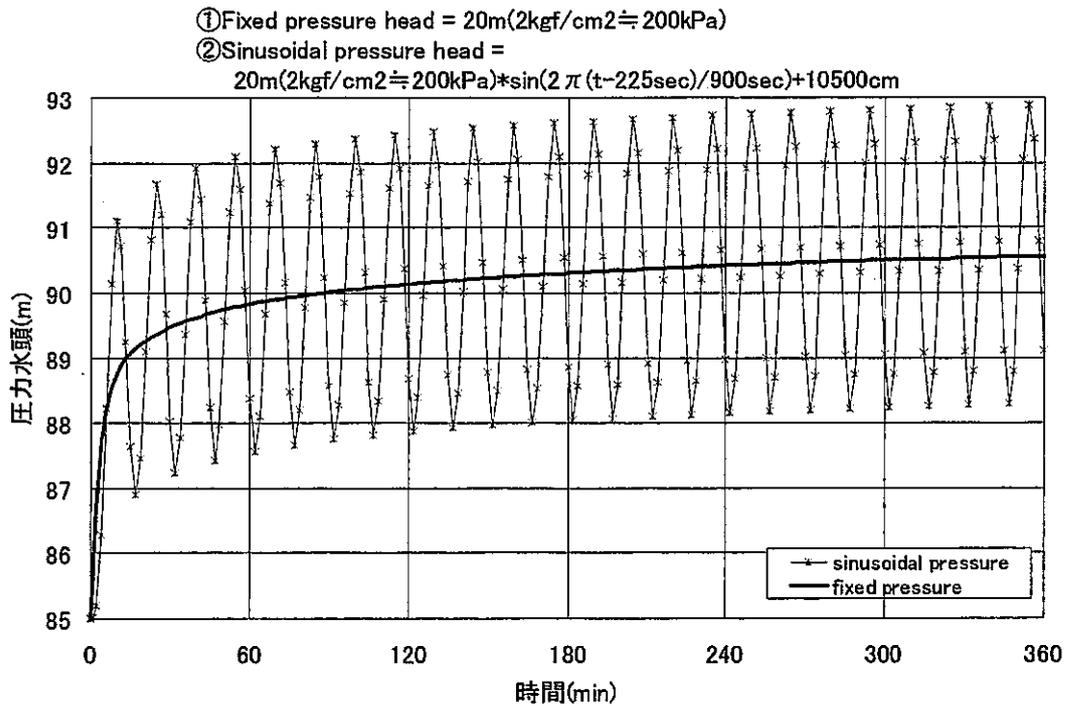


図-6.7 観測点における圧力水頭の変化(不均質モデル, $r=4\text{m}$)

6.2.2 水頭拡散率と応答水圧と位相差の関係

シヌソイダル試験は、通常、孔間の水理特性に起因する圧力減衰や位相のずれから、次式で示す水頭拡散率 η を決定する。

$$\eta = \frac{k}{Ss} \quad (6.1)$$

ここで、

k : 透水係数

Ss : 比貯留係数

である。ここでは、この水頭拡散率を変化させた場合の応答水圧の変化を調べてみた。また、問題を簡単にするために均質モデルを用いて検討した。

(1) 解析モデル

解析モデルは、図-6.2(a)の均質モデルを考える。また、本モデルは被圧状態下での問題とする。

(2) 物性値及び初期・境界条件

加圧点におけるシヌソイダルデータを表-6.3に示す。水頭拡散率は、 $\eta = 1.0 + 0 \sim 1.0 \times 10^7$ (cm²/sec)と変化させて解析を行った。また、モデル上下面の境界条件として難透水条件(水を通さない)、モデル側面は水位 100(m)で水位固定条件を与えた。

表-6.3 シヌソイダルデータ

シヌソイダルデータ	値
基準圧力水頭	85m
振幅 (h ₀)	20m
周期	15min

(3) 解析方法

解析メッシュは図-6.3と同じものを使用した。また、観測点は図-6.4と同様である。解析最終時間を 360 分後に設定し、非定常解析を行った。

(4) 解析結果

図-6.8 に、観測点ごとに、水頭拡散率と応答水圧の振幅減衰率(h/h_0)の変化の関係を、また、図-6.9 に、観測点ごとに、水頭拡散率と位相差の変化の関係を示す。この結果より、水頭拡散率が大きくなるにつれて応答水圧の振幅の値も大きくなり、水頭拡散率が $1.0 \times 10^6(\text{cm}^2/\text{sec})$ 以上になるとその値がほぼ一定になる。また、対象地盤の水頭拡散率が $100(\text{cm}^2/\text{sec})$ 以下の場合には、観測点が加圧点より 6m も離れると振幅の変化を捉えることは難しい。

本島らは、水頭拡散率が大きくなると、透水係数が大きくなり比貯留係数は小さくなると考察している⁶³⁾。これと図-6.8 より、実際に試験を実施した時、応答水圧の振幅の測定値が大きくなる場所は透水経路になっているものと考えられる。

一般に比貯留係数 S_s の値は、硬岩を対象とした時には $1.0 \times 10^{-7}\text{cm}^{-1} \sim 1.0 \times 10^{-9}\text{cm}^{-1}$ である。したがって、水頭拡散率 $\eta=100\text{cm}^2/\text{s}$ は透水係数が $1.0 \times 10^{-5}\text{cm}/\text{sec} \sim 1.0 \times 10^{-7}\text{cm}/\text{sec}$ のオーダーになると予想される。岩盤内の透水領域として対象となる領域は $1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$ 以上で、全体の透水係数が $1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$ 以下であれば極めて良好な岩盤と判断できる。また、ダム基礎では $1.0 \times 10^{-5}\text{cm}/\text{sec}$ を約 1 ルジオンとして、コンクリートダム基礎では 3 ルジオン以下に改良している。ここで、一般的に比貯留係数 S_s の値は深部の岩盤ほど小さくなり、水の圧縮力 $1.0 \times 10^{-8}\text{cm}^{-1}$ に間隙率(0.01 程度)を乗じた値にもなってしまう。

このように具体的な物性を考えると、試験の影響は極めて狭い領域にしか及ぼさないことになると考えられる。

一方、図-6.9 より、応答水圧の振幅の変化とは逆に、位相差に関しては、岩盤の水頭拡散率が大きいほど小さく、小さいほど大きく現れている。この値を正確に計測することによって、水頭拡散率の値が正確に求めることができる可能性がある。

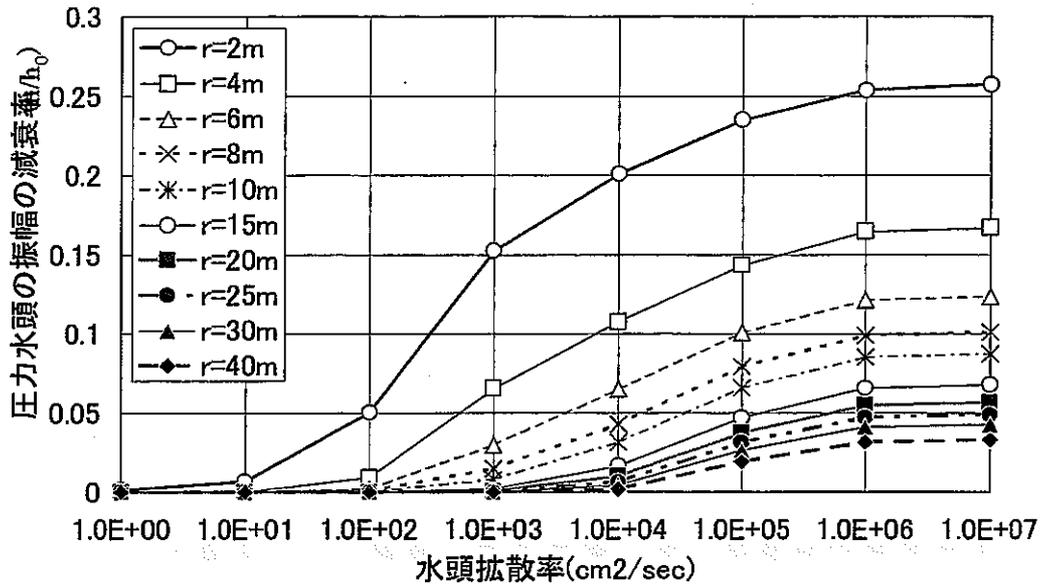


図-6.8 水頭拡散率と応答水圧の振幅減衰率の関係
(r は加圧点と観測点の距離)

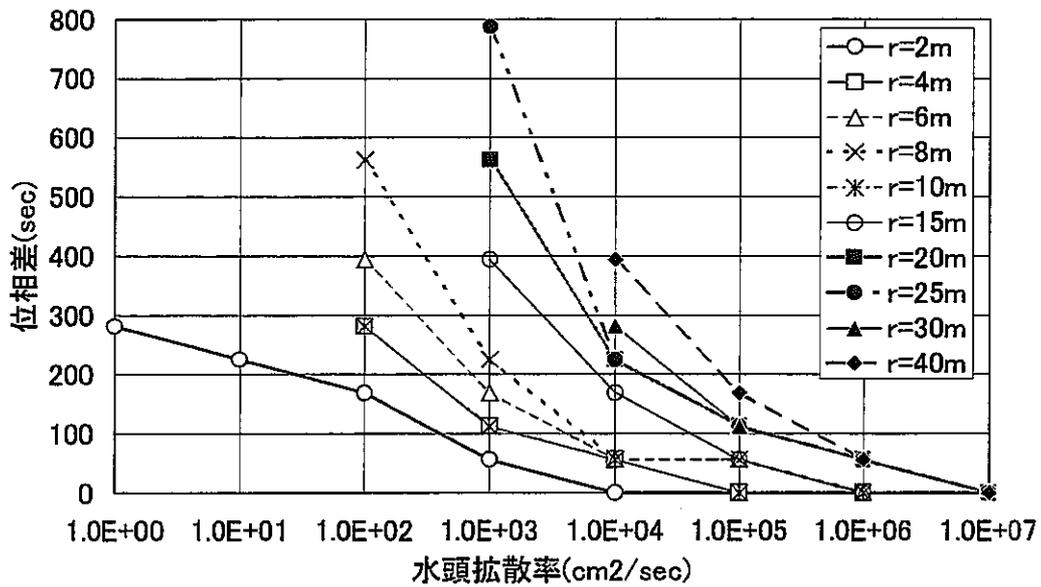


図-6.9 水頭拡散率と応答水圧の位相差の関係
(r は加圧点と観測点の距離)

6.3 岩盤の不均質部が応答水圧に与える影響

6.3.1 概要

図-6.8より、応答水圧の振幅の値から岩盤の不均質性を評価できる可能性がある。そこで、ここでは図-6.2(b)のような不均質部分が貫入した解析モデルについて正弦波試験を想定した数値実験を行い、応答水圧の振幅の変化を調べた。また、想定する不均質モデルは、不均質部が地表面に対して鉛直方向に伸びている場合と、水平方向に伸びている場合(ボーリング孔を横切る場合)の大きく2種類に分けて検討する。

6.3.2 不均質部が地表面に対し鉛直方向に卓越している場合

ここでは、クロスホール透水試験によって鉛直方向に伸びる低・高透水性ゾーンの把握が可能であるかを簡単な数値地盤モデルを用いて数値実験により検討する。

(1) 解析モデル

図-6.10, 6.11に解析モデルを示す。解析モデルは均質モデルと不均質モデル4種類を考える。また、本モデルは被圧条件下での問題とする。

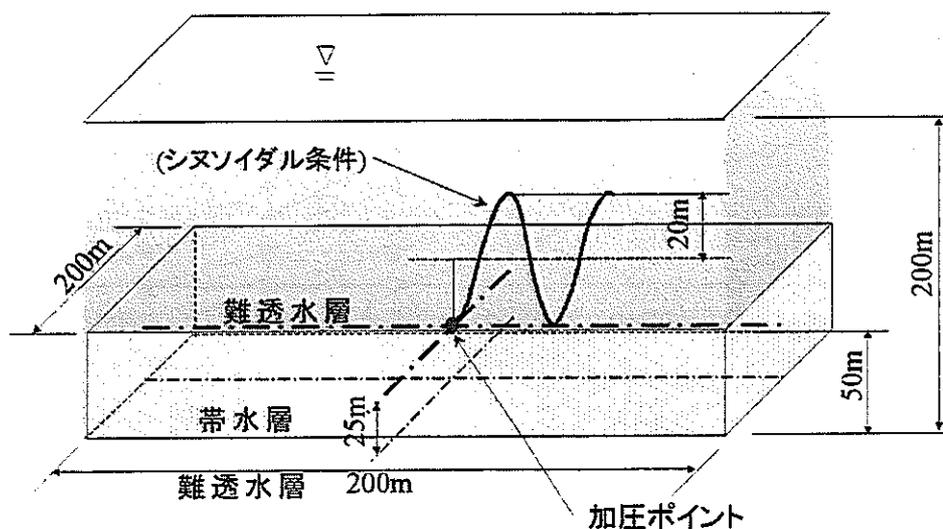
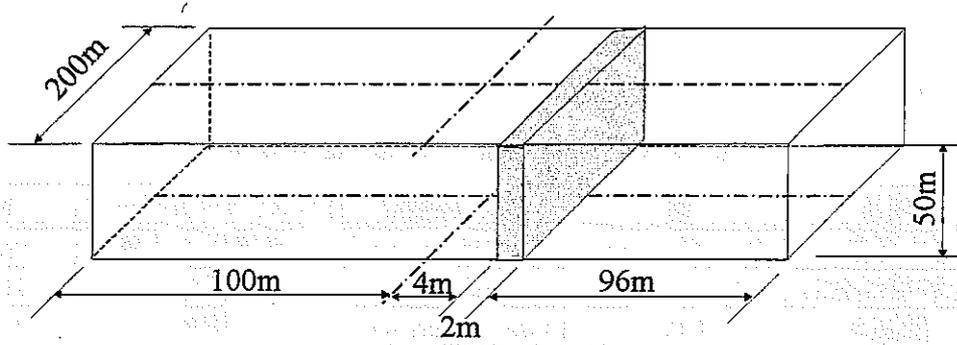
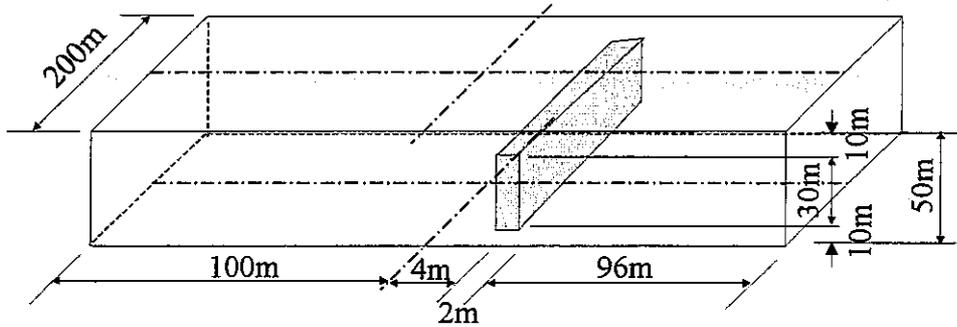


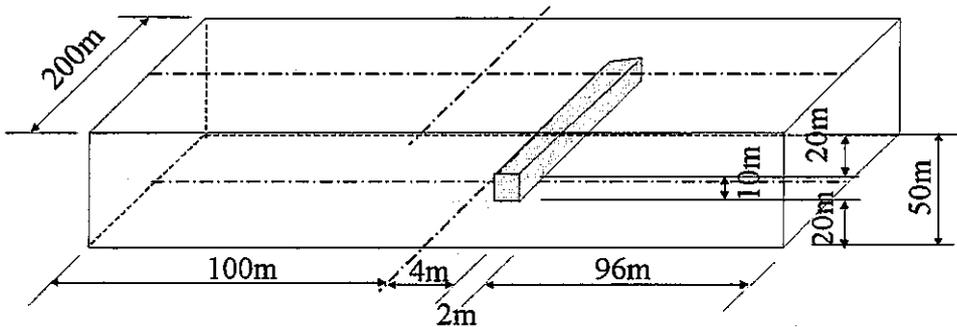
図-6.10 解析モデル(均質モデル)



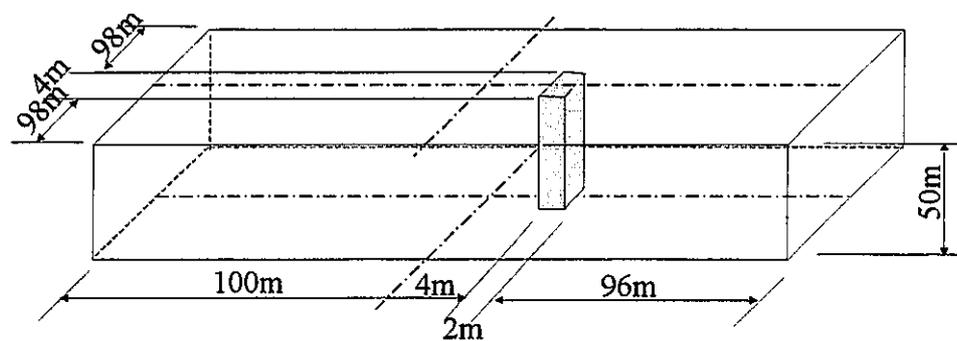
(a) 不均質モデル I-1(不均質部の長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m)



(b) 不均質モデル I-2(不均質部の長さ 200m, 幅 2m, 高さ 30m)



(c) 不均質モデル I-3(不均質部の長さ 200m, 幅 2m, 高さ 10m)



(d) 不均質モデル I-4(不均質部の長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m)

図-6.11 不均質モデル(初期・境界条件は均質モデルと同じ)

(2) 物性値及び初期・境界条件

今回の解析に用いる各物性値及び境界条件を表-6.4に示す。

表-6.4 物性値及び初期・境界条件

項目	値	透水係数 k_2	シヌソイダルデータ	値
透水係数 k_1	1.0E-06(cm/sec)	1.0e-04(cm/sec)	基準圧力水頭	195m
比貯留係数 S_s	1.0E-09(1/cm)	1.0e-05(cm/sec)	振幅	20m
間隙率	0.02	1.0e-07(cm/sec)	周期	15min
帯水層厚 D	50 (m)	1.0e-08(cm/sec)		
初期水位	200 (m)			

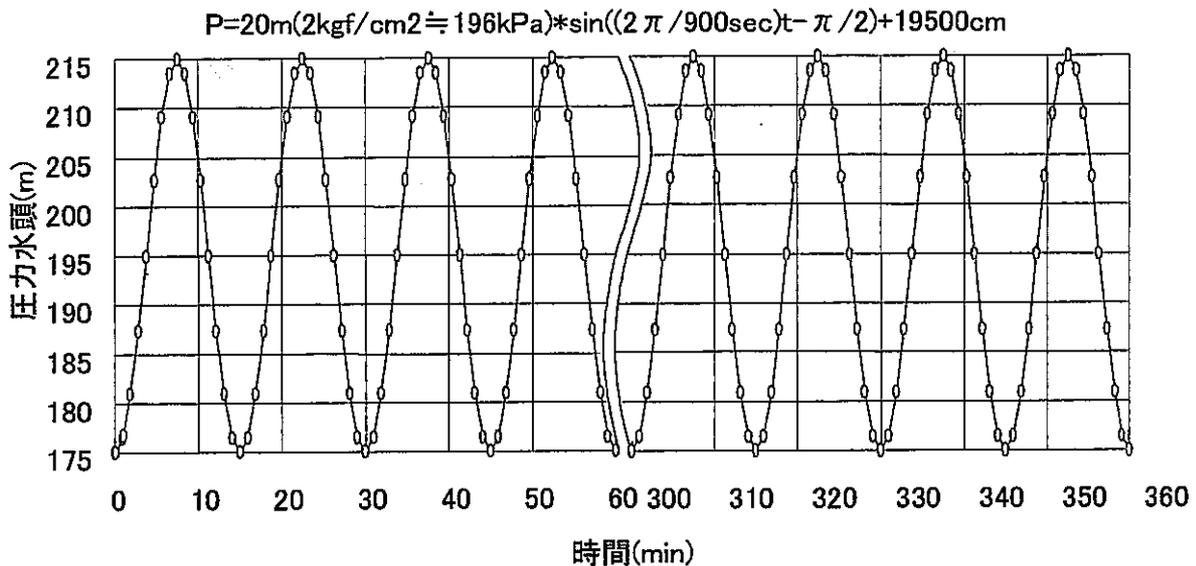


図-6.12 加圧点における圧力水頭の変化(シヌソイダルデータ)

透水係数の k_2 は図-6.11 の不均質部分の透水係数である。また、モデル上下面の境界条件として難透水条件(水を通さない)、モデル側面の境界条件として水位 200(m)で水位固定条件を与えた。

(3) 解析方法

解析メッシュを図-6.12に示す。 $dx, dy=2\text{m} \sim 25\text{m}$, $dz=2.5\text{m} \sim 5.0\text{m}$ ピッチで要素分割を行い、総節点数 9775, 総要素数 8448 である。また、観測点は図-6.13に示すポイントにした。これらの点の z 座標は全てシヌソイダルポイントと同じ高さである。観測点数は合計 10 点で、 $2\text{m} \sim 40\text{m}$ の範囲である。そして、解析最終時間を 360 分後に設定し、非定常解析を行った。

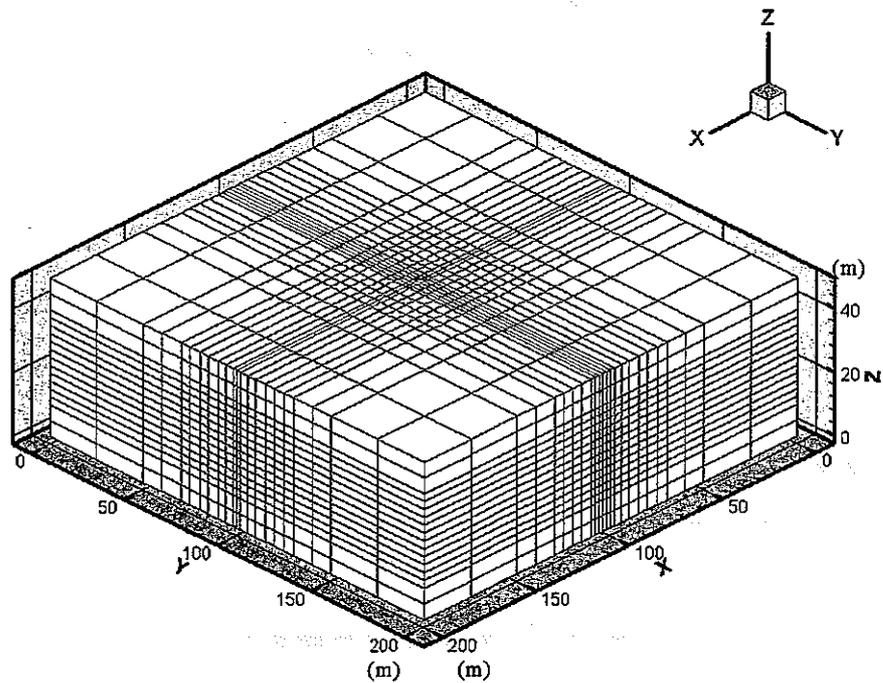


図-6.13 解析メッシュ図

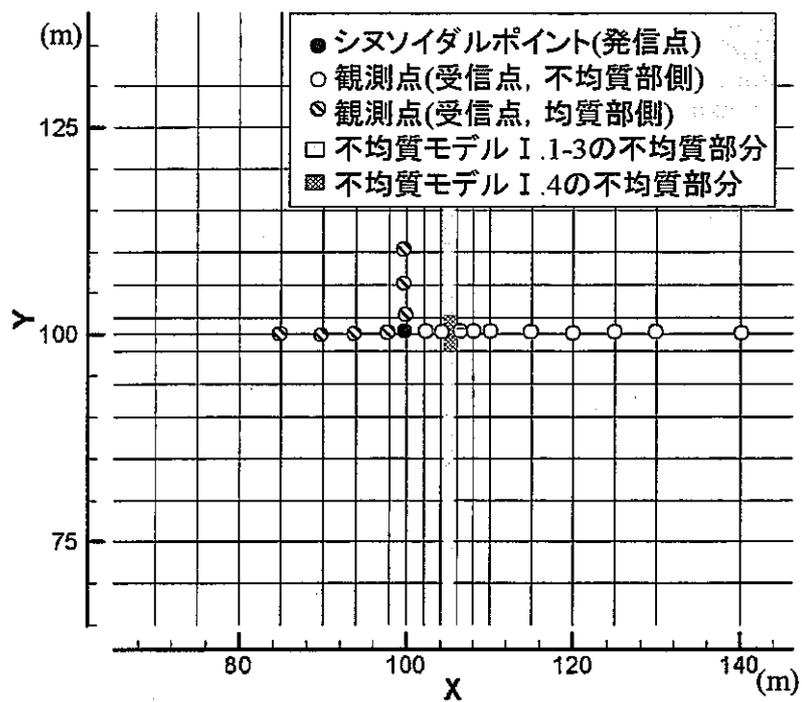


図-6.14 観測点の配置

(4) 解析結果

図-6.15～6.18 に、各不均質モデルにおける不均質部の存在する側における振幅減衰率の変化を、図-6.19～6.22 に均質部側の振幅の変化を示す。また、受信孔での圧力の違いを比較するために、発信孔より 4m 及び 10m における、観測水圧の時間変化を図-6.23～6.25、付図-6.3～6.19 に示す(表-6.5 参照)。

両ケースとも、受信点における振幅の変化は、

① 不均質層の加圧孔側の部分

不均質部分の透水性が低>均質>高となるにつれて応答水圧の振幅が大きくなる。

② 不均質層を超えた部分

不均質部分の透水性が均質>高>低となるにつれて応答水圧の振幅が高くなる。

表-6.5 解析結果の図番号

項目 \ 不均質モデル (図-6.9参照)	モデル I.1 (長さ200m,高さ 50m)	モデル I.2 (長さ200m,高さ 30m)	モデル I.3 (長さ200m,高さ 10m)	モデル I.4 (長さ4m,高さ50m)
振幅減衰率の変化 (不均質部の存在する側)	図-6.15	図-6.16	図-6.17	図-6.18
振幅減衰率の変化 (均質部の側)	図-6.19	図-6.20	図-6.21	図-6.22
応答水圧の時間変化 (不均質部の存在する側, 加圧点より4m地点)	図-6.23	付図-6.3	付図-6.4	付図-6.5
応答水圧の時間変化 (不均質部の存在する側, 加圧点より10m地点)	図-6.24	付図-6.6	付図-6.7	付図-6.8
応答水圧の時間変化 (均質部の側, 加圧点より2m地点)	付図-6.9	付図-6.10	付図-6.11	付図-6.12
応答水圧の時間変化 (均質部の側, 加圧点より6m地点)	図-6.25	付図-6.13	付図-6.14	付図-6.15
応答水圧の時間変化 (均質部の側, 加圧点より10m地点)	付図-6.16	付図-6.17	付図-6.18	付図-6.19

※ 1. 不均質モデルの不均質部の幅はいずれも 2m

※ 2. 図-6.19～6.22,25, 付図-6.9～6.19 において、

(a)は不均質部に対して垂直方向に観測点を配置したもの

(b)は不均質部に対して平行に観測点を配置したもの

(図-6.14 の観測点の配置参照)

以上の①については、発信された水圧変動が、不均質部分が低透水層の場合は、その層の前でせり上がりが起こったものと考えられる。また、高透水層の場合、波圧が急激に減少したものと考えられる。②については、不均質部が低透水層の場合はこの層により波の伝達が阻害されているため、振幅の減衰が大きくなったものと考えられる。一方、不均質部が高透水層の場合は、この層内に派圧が広がった(発散した)ために振幅の減衰が大きくなったものと考えられる。観測点における応答水圧の時間変化からも、上記の①、②の現象が起きていることが確認できる。また、圧力水頭の最大値も同じ傾向がうかがえる。不均質モデル I .4(不均質部の長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m)の場合は、不均質モデル I .1(不均質部の長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m)程の明確な違いは見受けられない。これは、設定した不均質層の幅が小さいため、不均質層を迂回浸透して圧力が伝わったために起こったと考えられる。

また、入力データの中で、間隙率を変化させて解析を行ってみたが、解はほとんど変化しなかった。よって、間隙率は応答水圧に影響を及ぼす因子ではないことがわかった。

図-6.26~6.28, 付図-6.20~6.34 に圧力水頭値の増加量の分布図を示す(表-6.6 参照)。これは、試験開始から 341.25 分後についてである。これより、不均質部分の性質に関わらず水圧の伝達を阻害していることがわかる。圧力分布の特徴は、不均質部が高透水性の場合は、水圧が不均質部内部で高透水ゾーンが卓越する方向に分散している。これに対して、不均質部が低透水性の場合、水圧を不均質部によってシャットダウンしており、水圧を押し戻している様相を示している。これより、水圧の伝達方法の対称性がくずれる。

また、図-6.19(b)~図 6.22(b)からもわかるように、不均質部が低透水性の場合は若干応答水圧の振幅が大きくなっている。更に、図-6.25 や付図-6.9-6.19 のすべてにおいて、不均質部が低透水性の場合は応答水圧値が均質の場合より高く、高透水性の場合は低い。以上の特性を捕らえることによって、不均質部分の特性を把握できる可能性がある。例えば、対象領域を囲むように加圧孔から方向を変えて、観測孔を 2 本以上設置する。そして、それぞれの孔内における応答水圧の変化を観測し、変化を捉えることができた場合、位相差を調べて対象領域の平均的な水頭拡散率を予測する。そして、これにあった応答水圧値

並びに振幅の大きさよりも大きな値を示している付近について注目し、この周辺においてより狭い領域で試験を行い、応答水圧の変化を再度捉えることによって、不均質部分の特性を把握できる可能性がある。

表-6.6 圧力分布図の図番号

	k2(cm/sec)	不均質モデル I.1 (長さ200m, 高さ50m)	不均質モデル I.2 (長さ200m, 高さ30m)	不均質モデル I.3 (長さ200m, 高さ10m)	不均質モデル I.4 (長さ4m, 高さ50m)
水平方向の平面分布 図 (底面からz=25m)	1.0E-4	図-6.27(a)	付図-6.22(a)	付図-6.26(a)	付図-6.30(a)
	1.0E-5	付図-6.20(a)	付図-6.23(a)	付図-6.27(a)	付図-6.31(a)
	1.0E-7	付図-6.21(a)	付図-6.24(a)	付図-6.28(a)	付図-6.32(a)
	1.0E-8	図-6.28(a)	付図-6.25(a)	付図-6.29(a)	付図-6.33(a)
鉛直方向の平面分布 図 (y=100m)	1.0E-4	図-6.27(b)	付図-6.22(b)	付図-6.26(b)	付図-6.30(b)
	1.0E-5	付図-6.20(b)	付図-6.23(b)	付図-6.27(b)	付図-6.31(b)
	1.0E-7	付図-6.21(b)	付図-6.24(b)	付図-6.28(b)	付図-6.32(b)
	1.0E-8	図-6.28(b)	付図-6.25(b)	付図-6.29(b)	付図-6.33(b)

- ※ 1. 均質モデルの圧力水頭値の増加量の分布図は図-6.26
- ※ 2. 分布図の各左図は、右図の中心部を拡大したもの
- ※ 3. 不均質モデルの不均質部の幅はいずれも 2m
- ※ 4. (a)はモデルの水平断面図、(b)はモデルの鉛直断面図

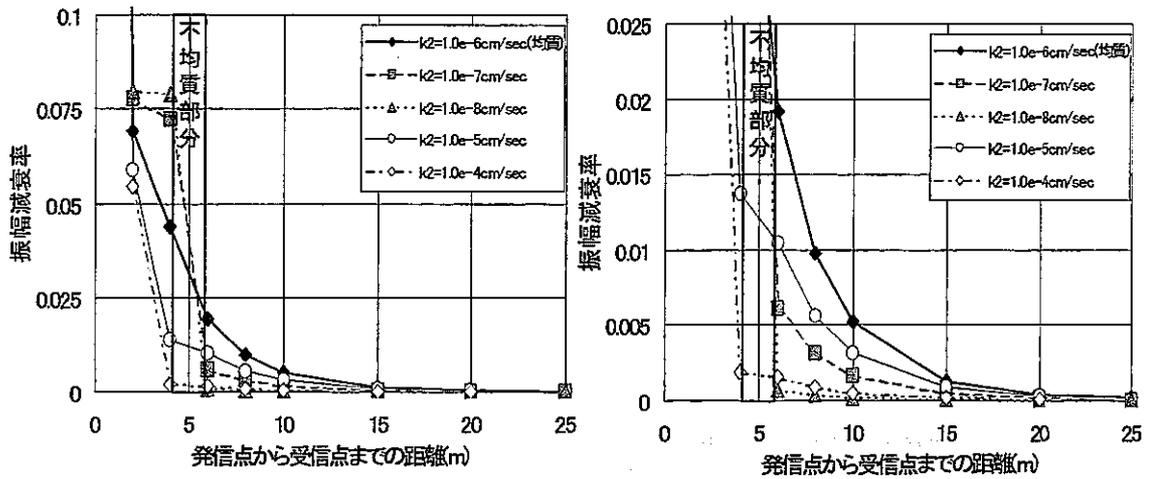


図-6.15 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化

(不均質モデル I.1 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

※右図は左図の縦軸(振幅)のスケールを変えたもの)

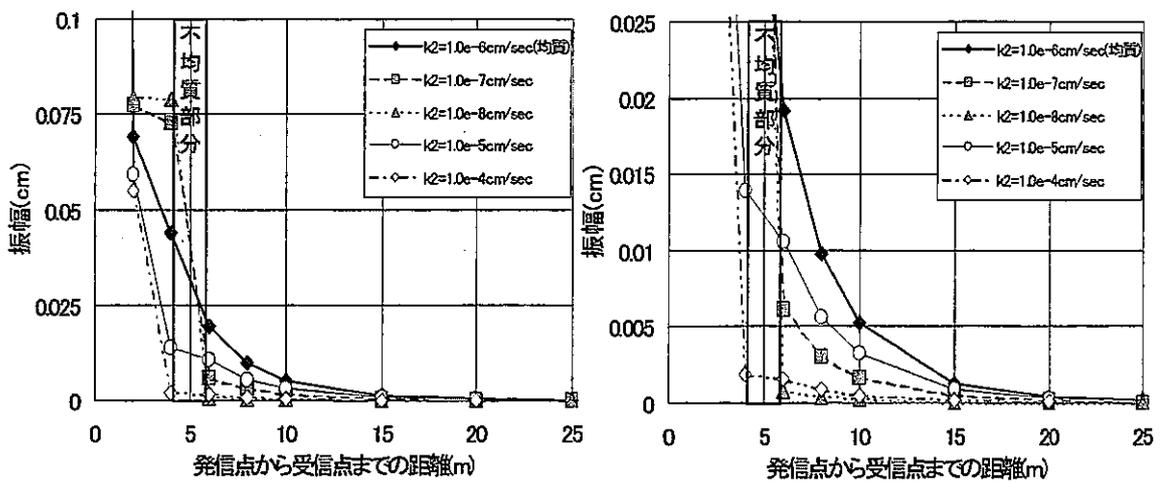


図-6.16 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化

(不均質モデル I.2 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 30m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

※右図は左図の縦軸(振幅)のスケールを変えたもの)

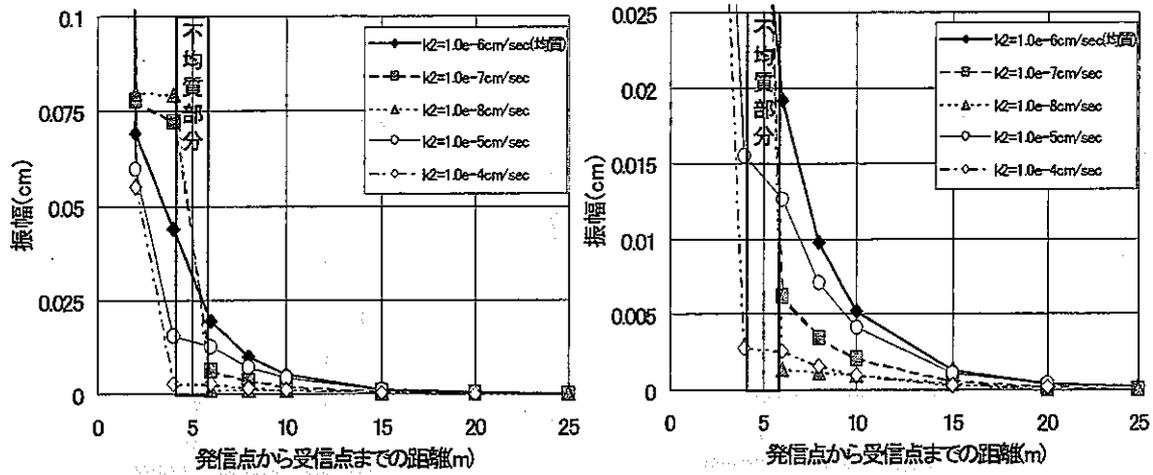


図-6.17 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化

(不均質モデル I.3 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 10m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

※右図は左図の縦軸(振幅)のスケールを変えたもの)

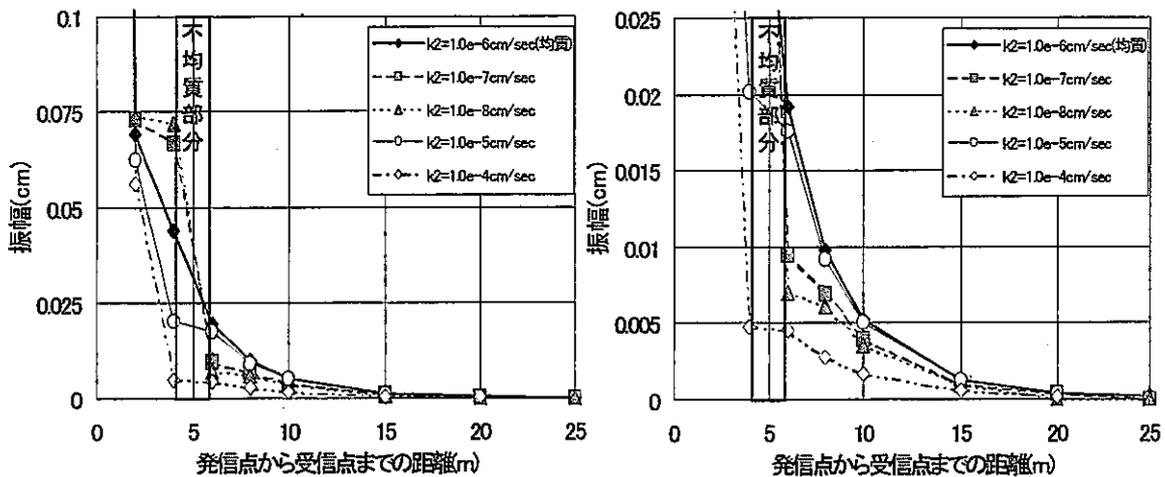
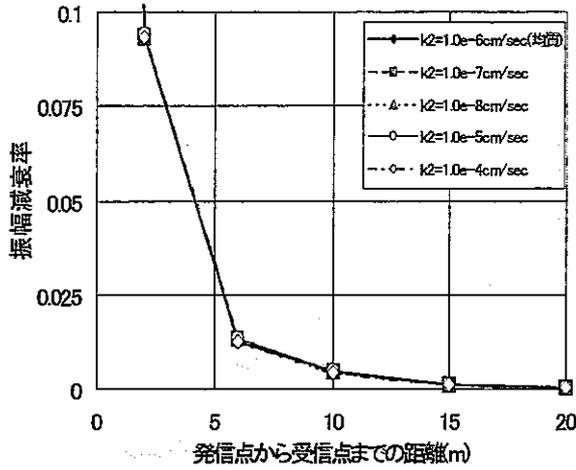


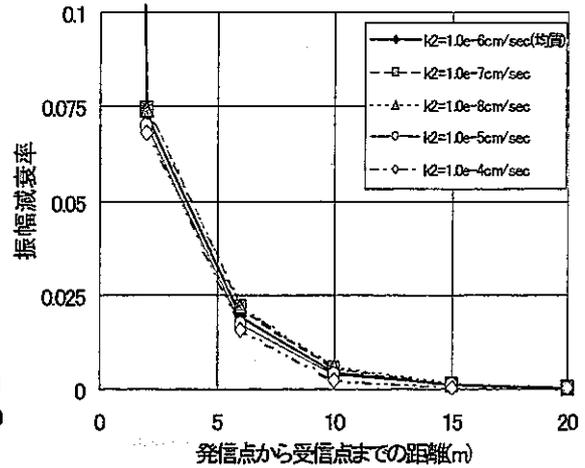
図-6.18 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化

(不均質モデル I.4 (長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

※右図は左図の縦軸(振幅)のスケールを変えたもの)



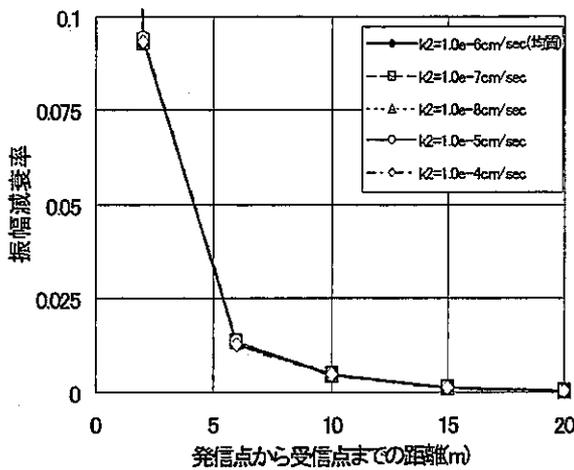
(a) 不均質部に対して垂直方向



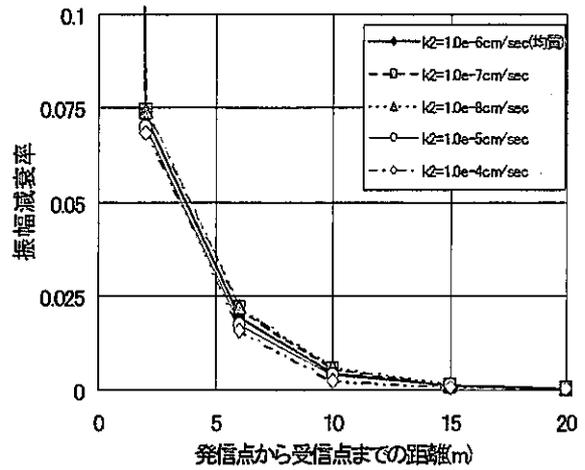
(b) 不均質部に対して平行

図-6.19 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化(均質部側)

(不均質モデル I.1 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



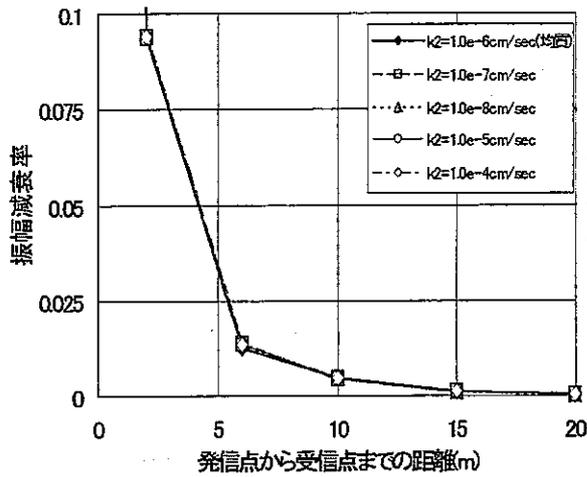
(a) 不均質部に対して垂直方向



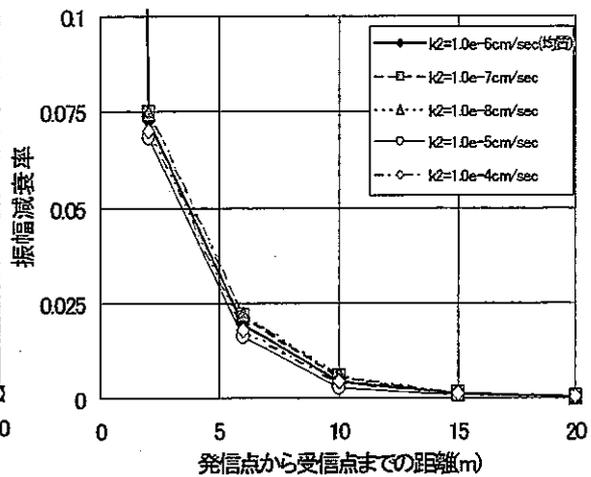
(b) 不均質部に対して平行

図-6.20 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化(均質部側)

(不均質モデル I.2 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 30m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



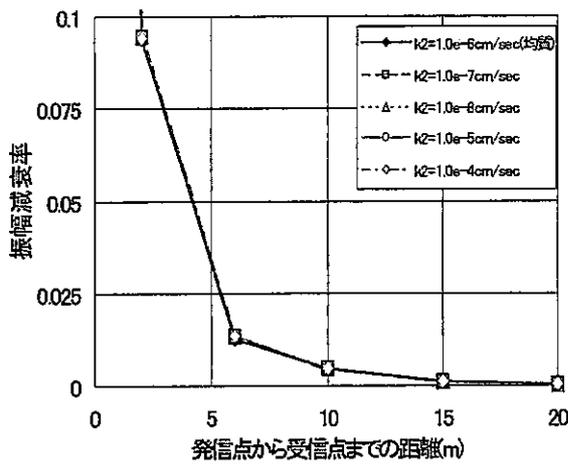
(a) 不均質部に対して垂直方向



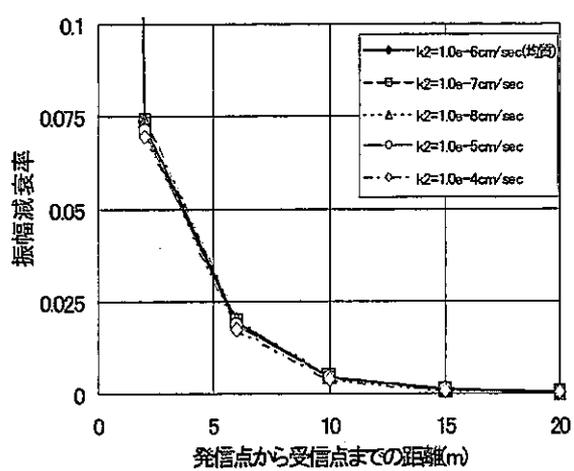
(b) 不均質部に対して平行

図-6.21 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化(均質部側)

(不均質モデル I.3 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 10m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



(a) 不均質部に対して垂直方向



(b) 不均質部に対して平行

図-6.22 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化(均質部側)

(不均質モデル I.4 (長さ 4m, 幅 2m, 高さ 30m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

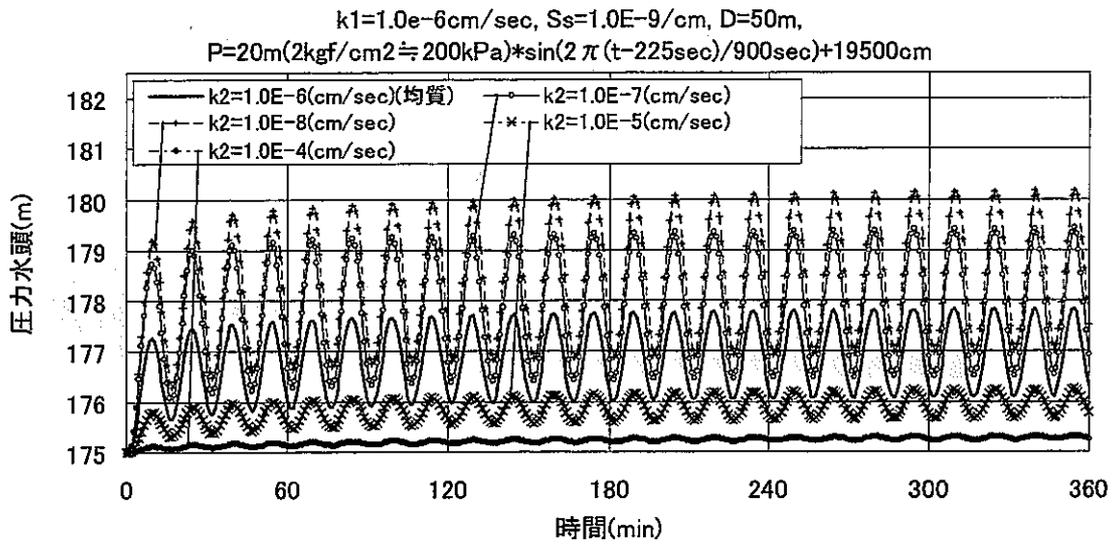


図-6.23 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の4m地点)
 (不均質モデル I.1(長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

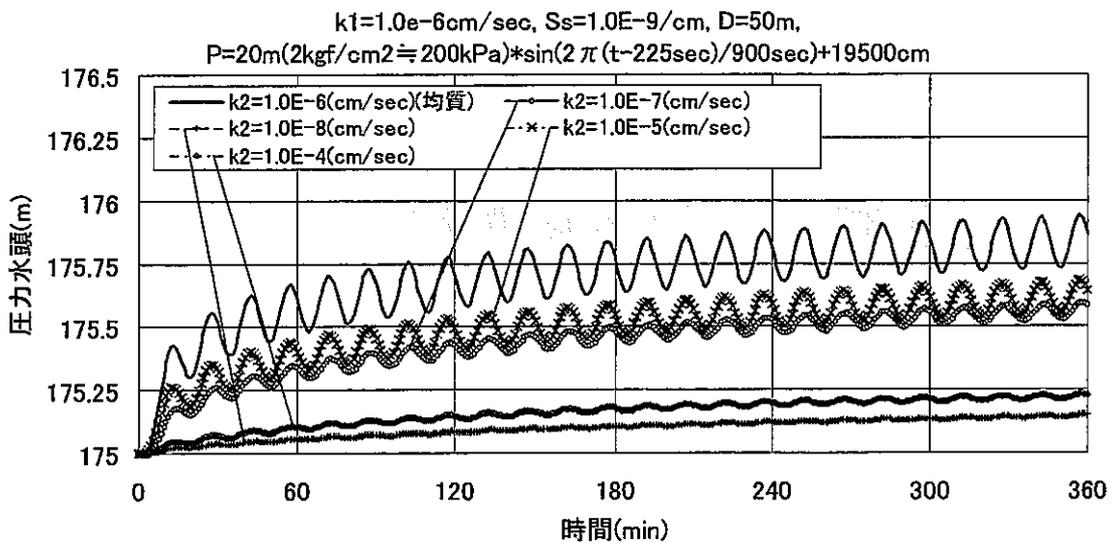
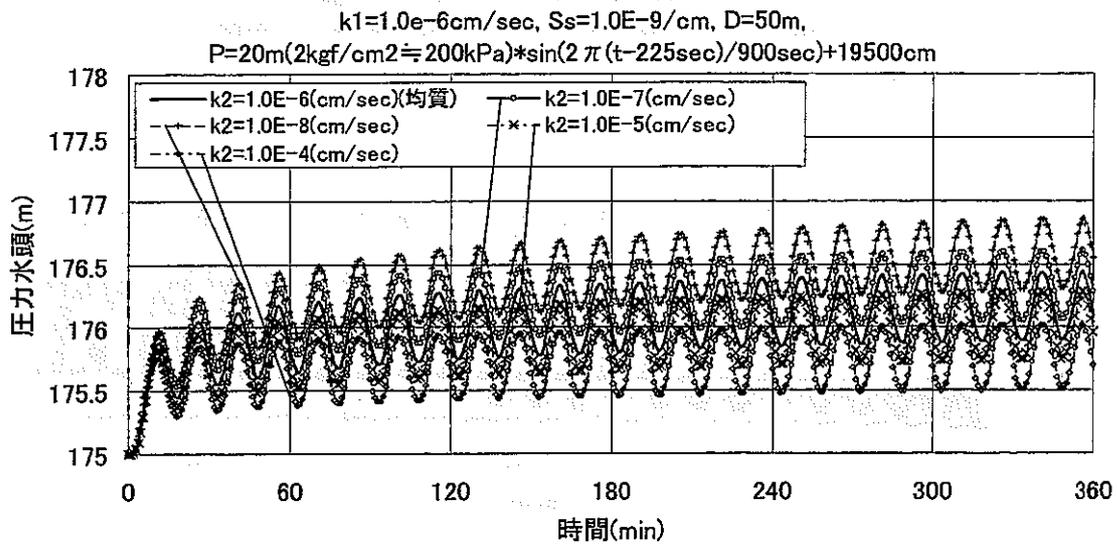
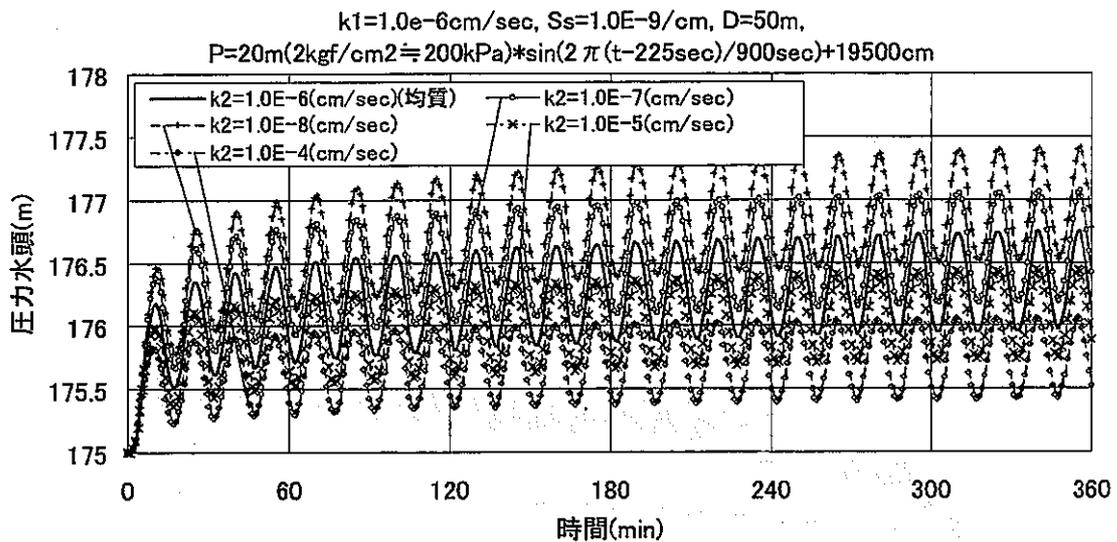


図-6.24 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル I.1(長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

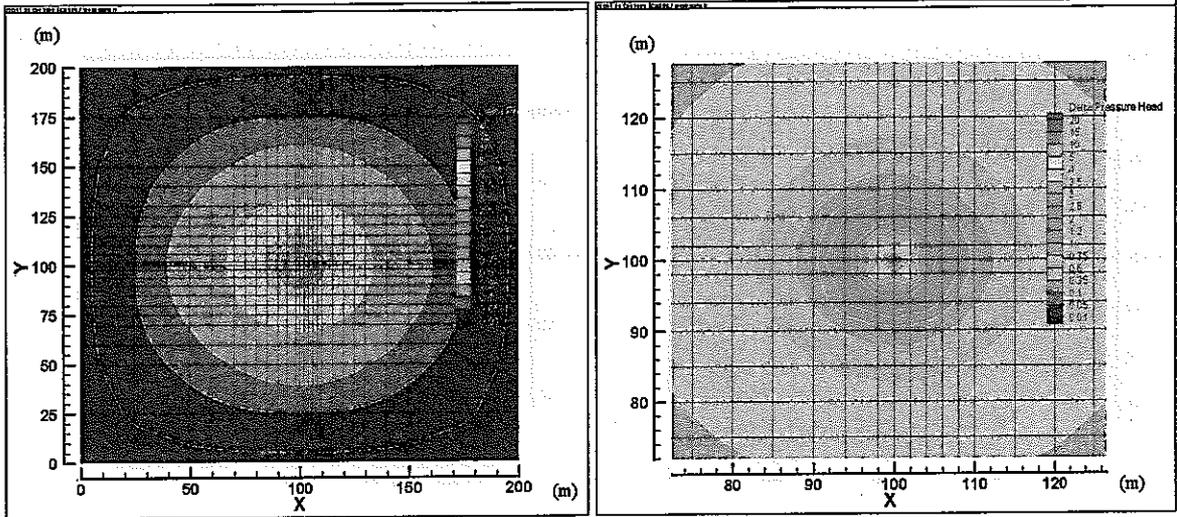


(a) 加圧点から不均質部と垂直方向の観測点

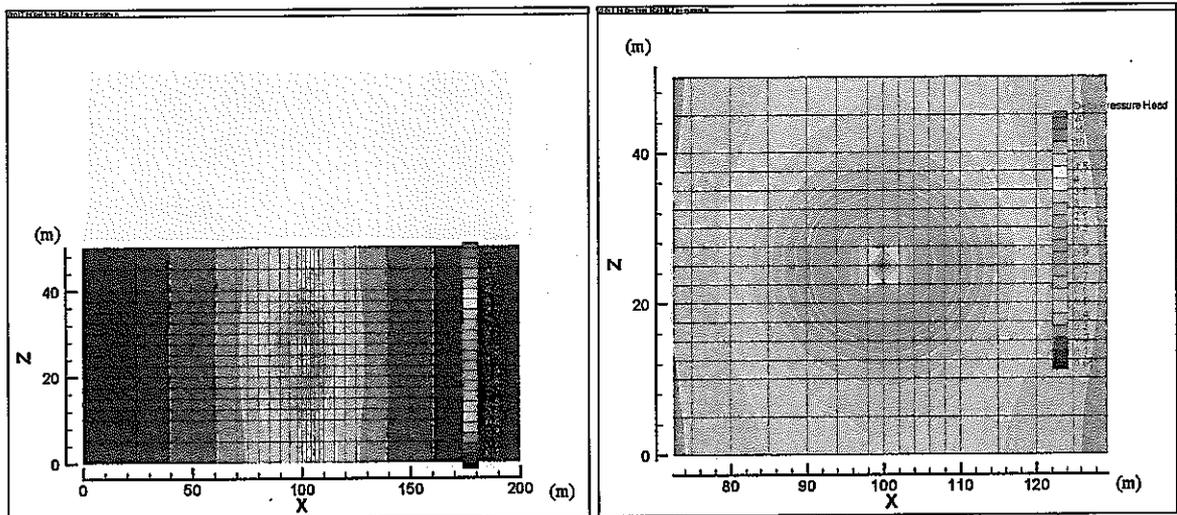


(b) 加圧点から不均質部と平行の観測点

図-6.25 応答水圧の時間変化(加圧点から均質部側の6m地点)
 (不均質モデル I.1(長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (图中参照))



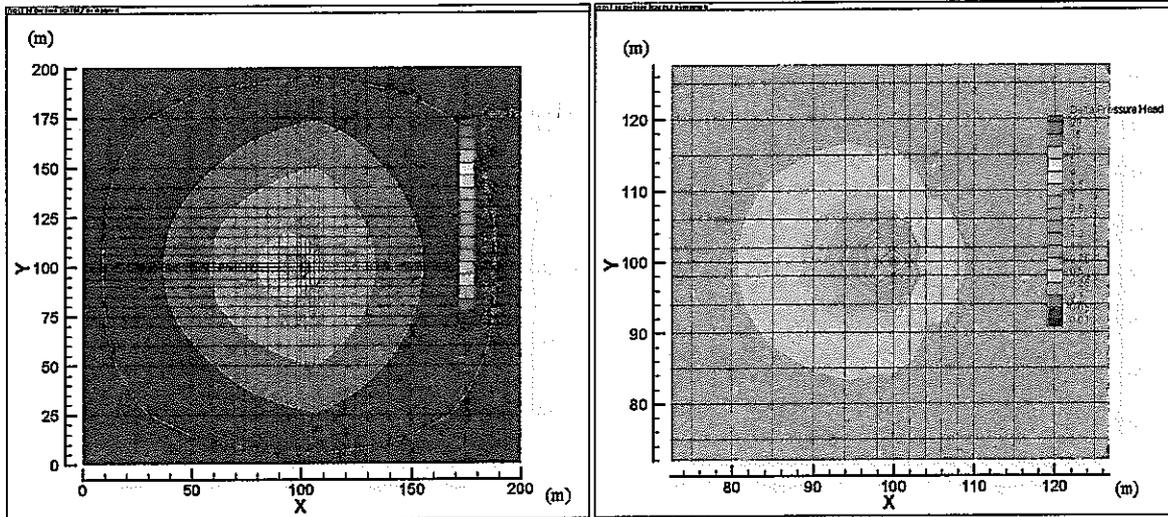
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



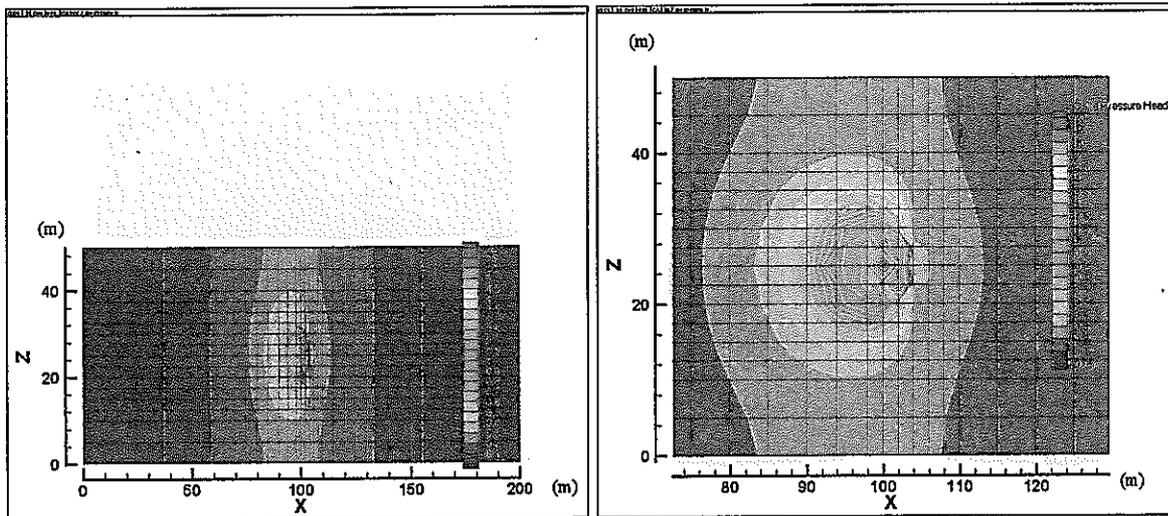
(b) 鉛直方向の分布図 ($y=100\text{m}$)

図-6.26 圧力水頭値の増加量の分布

(均質モデル, 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 透水係数 $k=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$)



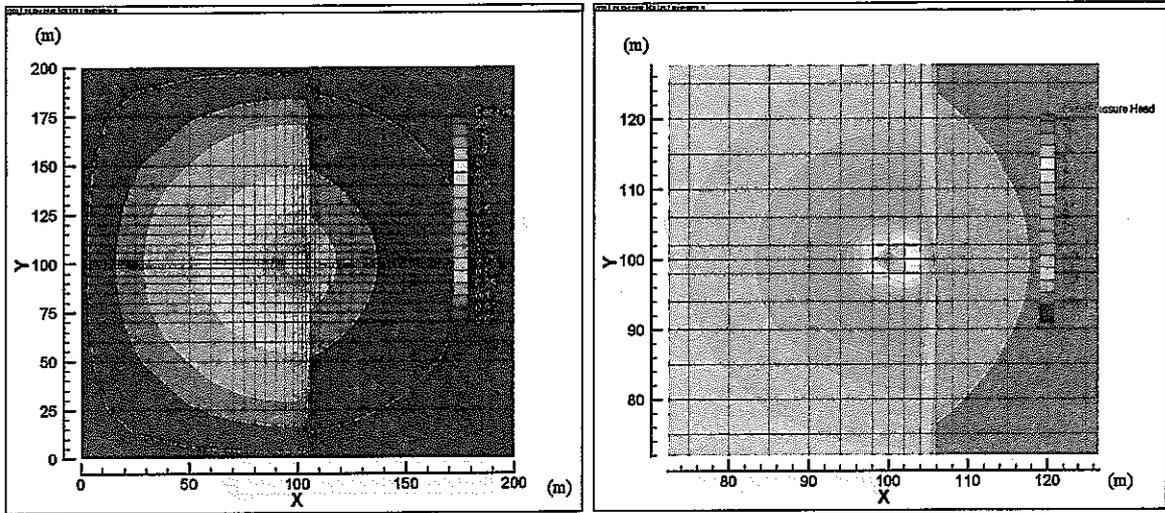
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



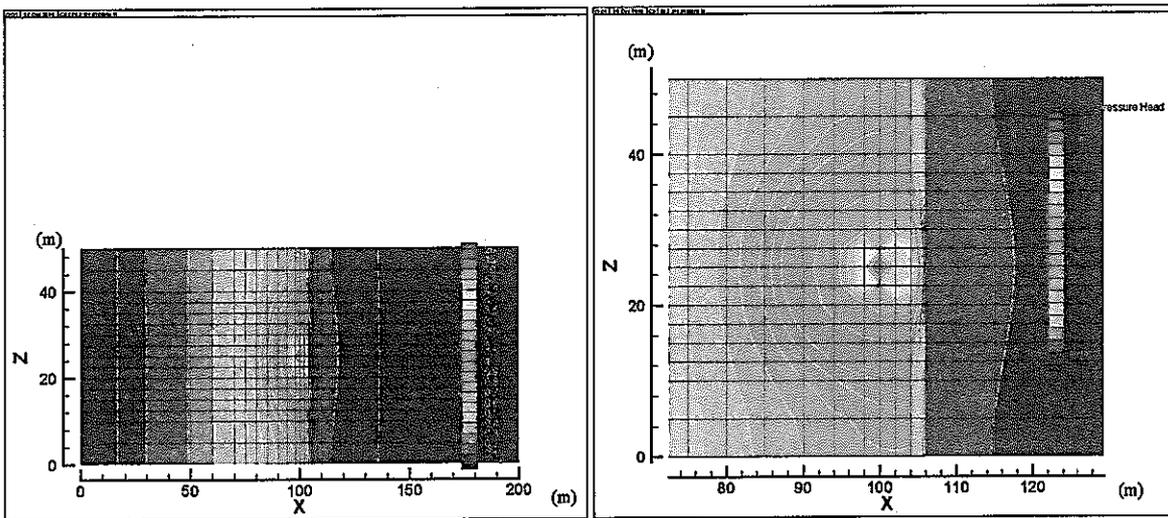
(b) 鉛直方向の分布図 ($y=100\text{m}$)

図-6.27 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.1.(長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-4}\text{cm}/\text{sec}$)



(a) 水平方向の分布図 (底面から $z=25\text{m}$)



(b) 鉛直方向の分布図 ($y=100\text{m}$)

図-6.28 圧力水頭値の増加量の分布

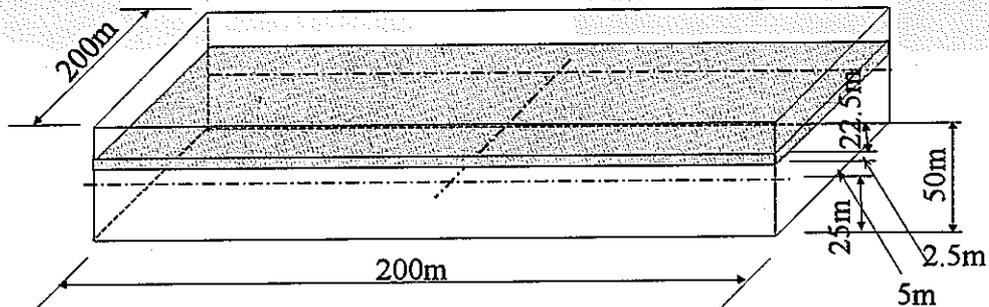
(不均質モデル I.1 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-8}\text{cm}/\text{sec}$)

6.3.3 不均質部が地表面に対し水平方向に卓越している場合

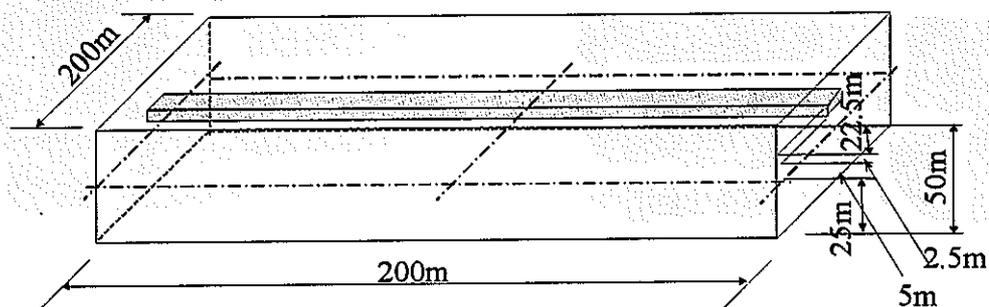
ここでは、クロスホール透水試験によって水平方向に伸びる低・高透水性ゾーンの把握が可能であるかを簡単な数値地盤モデルを用いて数値実験により検討する。

(1) 解析モデル

図-6.8, 図-6.29に解析モデルを示す。ケースは均質ケース, 不均質ケース4種類を考える。また, 本ケースは被圧条件下での問題とする。



(a) 不均質モデルⅡ-1(不均質部の長さ200m, 幅200m, 高さ2.5m)



(b) 不均質モデルⅡ-2(不均質部の長さ4m, 幅200m, 高さ2.5m)

図-6.29 不均質モデル(初期・境界条件は均質モデルと同じ)

(2) 物性値及び初期境界条件

今回の解析に用いる各物性値及び境界条件を表-6.7に示す。シヌソイダルデータについては、図-6.12に示すものと同じである。

表-6.7 物性値及び初期・境界条件

項目	値	透水係数 k_2	シヌソイダルデータ	値
透水係数 k_1	1.0E-06(cm/sec)	1.0e-04(cm/sec)	基準圧力水頭	195m
比貯留係数 S_s	1.0E-09(1/cm)	1.0e-05(cm/sec)	振幅	20m
間隙率	0.02	1.0e-07(cm/sec)	周期	15min
帯水層厚 D	50 (m)	1.0e-08(cm/sec)		
初期水位	200 (m)			

透水係数の k_2 は図-6.29 の不均質部分の透水係数である。また、モデル上下面の境界条件として難透水条件(水を通さない)、モデル側面の境界条件として水位 200(m)で水位固定条件を与えた。

(3) 解析方法

解析メッシュは図-6.10と同様である。また、観測点は図-6.30に示すポイントにした。観測点数は合計10点で、シヌソイダルポイントから x 方向に 5m, 10m, z 方向に 0m~10m の範囲である。そして、解析最終時間を 360 分に設定し、非定常解析を行った。

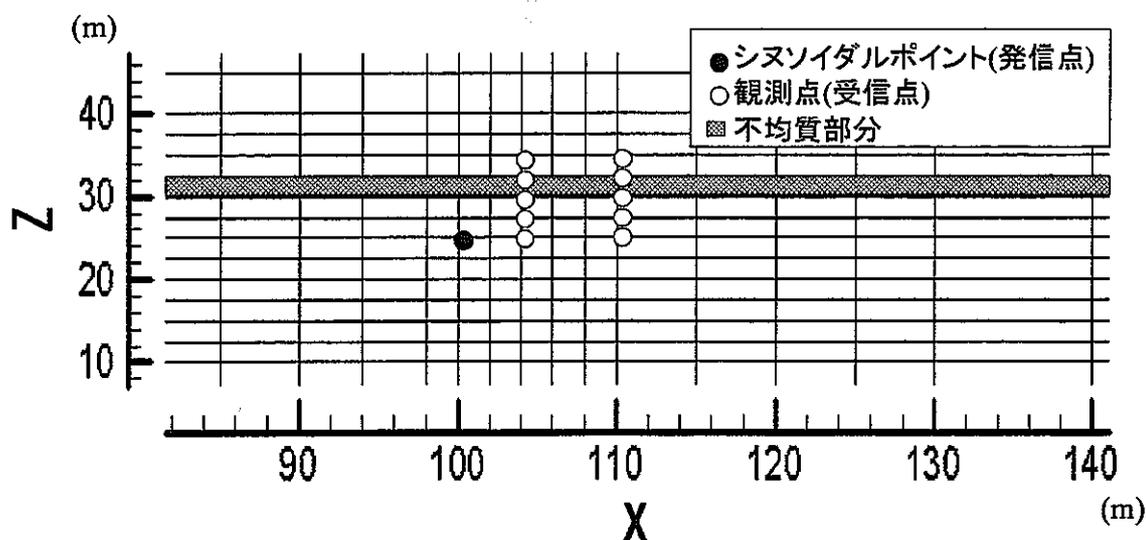


図-6.30 観測点の配置

(4) 解析結果

図-6.31～6.34に、各不均質モデルにおける振幅減衰率の変化を示す。また、受信孔での圧力の違いを比較するために、発信点よりx方向に4m、10mにおけるz=5m、10m地点の観測水圧の時間変化を図-6.35、6.36、付図-6.35～6.40に示す(表-6.7参照)。また、図-6.37、6.38、付図-6.41～6.46に圧力水頭値の増加量の分布図を示す。分布図は試験開始から341.25分後についてである(表-6.8参照)。

表-6.7 解析結果の図番号

項目	不均質モデル (図-6.9参照)		モデルⅡ.1 (長さ200m,幅200m,高さ2.5m)		モデルⅡ.2 (長さ4m,幅200m,高さ2.5m)	
	4m	10m	4m	10m	4m	10m
発信点からの距離(x)	4m	10m	4m	10m	4m	10m
振幅減衰率の変化	図-6.31	図-6.32	図-6.33	図-6.34	図-6.35	図-6.36
発信点からの高さ(z)	5m	10m	5m	10m	付図-6.35	付図-6.36
応答水圧の時間変化 (発信点よりx=4m地点)	図-6.35	図-6.36	付図-6.35	付図-6.36	付図-6.37	付図-6.38
応答水圧の時間変化 (発信点よりx=10m地点)	付図-6.34	付図-6.35	付図-6.38	付図-6.39	付図-6.41	付図-6.42

表-6.8 圧力分布図の図番号

	k2(cm/sec)	ケースⅡ.1		ケースⅡ.2	
		1.0E-4	1.0E-5	1.0E-7	1.0E-8
水平方向の平面分布図 (底面からz=25m)	1.0E-4	図-6.37(a)	付図-6.42(a)	付図-6.43(a)	付図-6.44(a)
	1.0E-5	付図-6.40(a)	付図-6.43(a)	付図-6.44(a)	付図-6.45(a)
	1.0E-7	付図-6.41(a)	付図-6.43(a)	付図-6.44(a)	付図-6.45(a)
	1.0E-8	図-6.38(a)	付図-6.42(b)	付図-6.43(b)	付図-6.44(b)
鉛直方向の平面分布図 (y=100m)	1.0E-4	図-6.37(b)	付図-6.42(b)	付図-6.43(b)	付図-6.44(b)
	1.0E-5	付図-6.40(b)	付図-6.43(b)	付図-6.44(b)	付図-6.45(b)
	1.0E-7	付図-6.41(b)	付図-6.43(b)	付図-6.44(b)	付図-6.45(b)
	1.0E-8	図-6.38(b)	付図-6.42(b)	付図-6.43(b)	付図-6.44(b)

※ 1. 均質モデルの圧力水頭値の増加量の分布図は図-6.26。

※ 2. 分布図の各左図は、右図の中心部を拡大したもの

図-6.31～6.33より、

① 不均質層の加圧孔側の部分

不均質部分の透水性が低>均質>高となるにつれて受信振幅が大きくなる

② 不均質層を超えた部分

不均質部分の透水性が均質>高>低となるにつれて高くなる。

これらは、いずれも 6.3.2 節のケース（不均質層が鉛直方向に伸びている場合）と同様のことを示している。つまり、以上の①については、発信された水圧変動が、不均質部分が低透水層の場合は、その層の前でせり上がりが起こったものと考えられる。また、高透水層の場合、波圧が急激に減少したものと考えられる。②については、不均質部が低透水層の場合はこの層により波の伝達が阻害されているため、不均質部が高透水層の場合はこの層内で波圧が急激に減衰したため、両者とも振幅の減衰が大きくなったものと考えられる。これらより、鉛直方向の各観測区間において、①、②の特性を活かして、観測区間の間に存在する不均質層の特徴を捉えることができる可能性がある。

ただし、図-6.34 では、②について不均質部の透水係数 $k_2=1.0E-5(\text{cm}/\text{sec})$ のとき、均質の振幅より大きな値を示している。これは、ケース II-1 に比べて不均質部分の断面積が小さいため、圧力の分散量が少なかったためである。

また、入力データの中で、間隙率を変化させて解析を行ってみたが、解はほとんど変化しなかった。よって、間隙率は応答水圧に影響を及ぼす因子ではないことがわかった。

また、圧力水頭値の増加量の分布図より、不均質部分の性質に関わらず水圧の伝達を阻害していることがわかる。圧力分布の特徴は、不均質部が高透水性の場合は、水圧が不均質部内部で高透水ゾーンが卓越する方向に分散している。よって、高透水ゾーン内では、応答水圧が均質の場合に比べて大きくなることが考えられる。このことより、観測孔において、開口性亀裂が存在する区間で応答水圧を観測することによって、高透水性ゾーンを同定できる可能性がある。

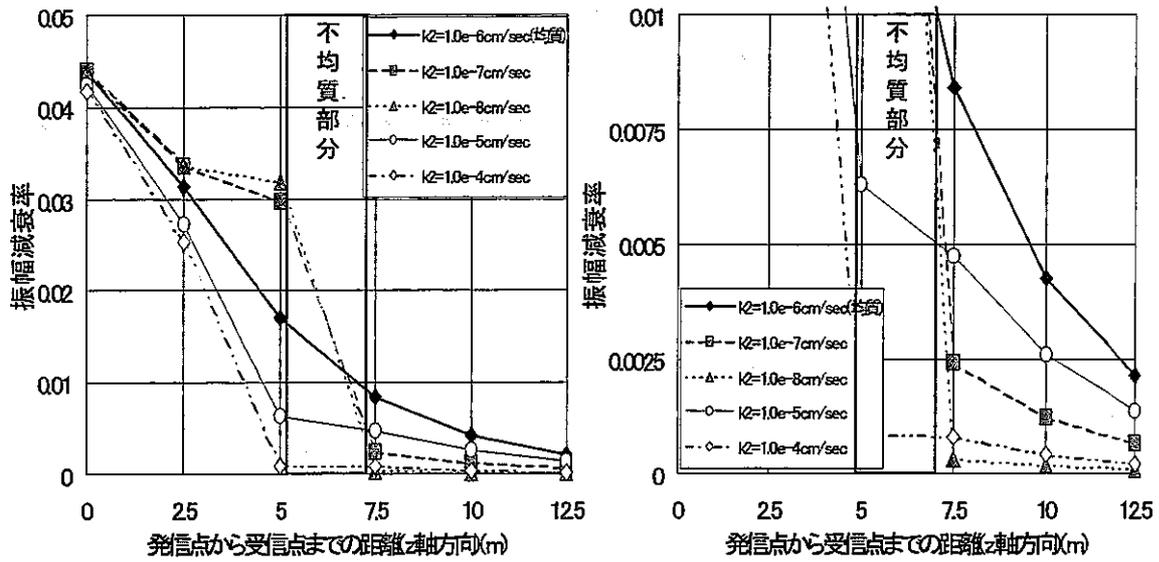


図-6.31 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m, 幅 200m, 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}$ /cm,

均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}$ cm/sec, 不均質部の透水係数 k_2 (図中参照),

発信点からの距離 $x=4$ m 地点)

※右図は左図の縦軸(振幅)のスケールを変えたもの)

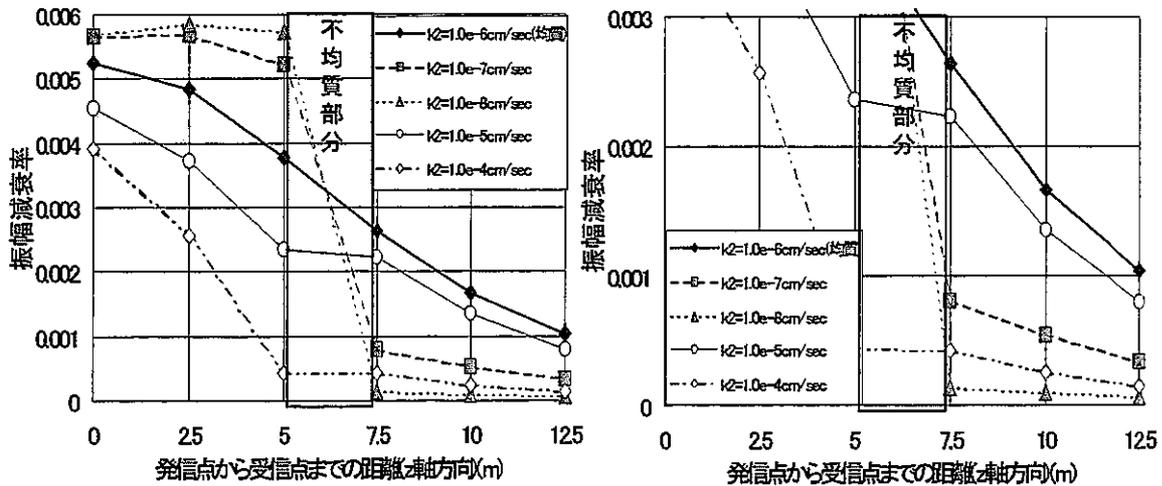


図-6.32 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m, 幅 200m, 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}$ /cm,

均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}$ cm/sec, 不均質部の透水係数 k_2 (図中参照),

発信点からの距離 $x=10$ m 地点)

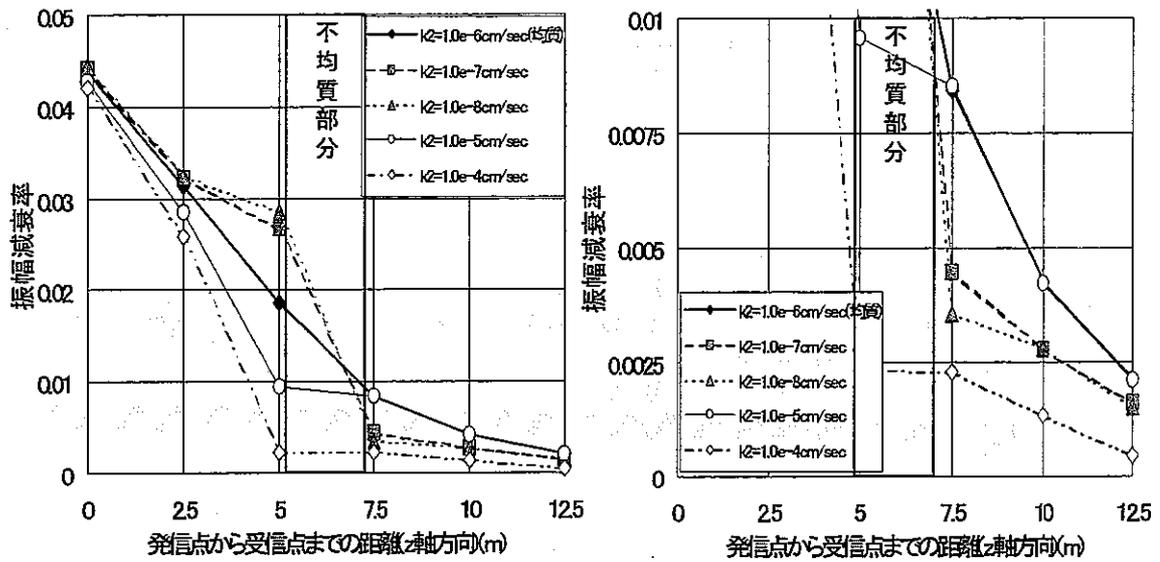


図-6.33 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化

(不均質モデルⅡ.2(長さ4m,幅200m,高さ2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6} \text{ cm/sec}$,不均質部の透水係数 k_2 (図中参照),
発信点からの距離 $x=4m$ 地点)

※右図は左図の縦軸(振幅)のスケールを変えたもの)

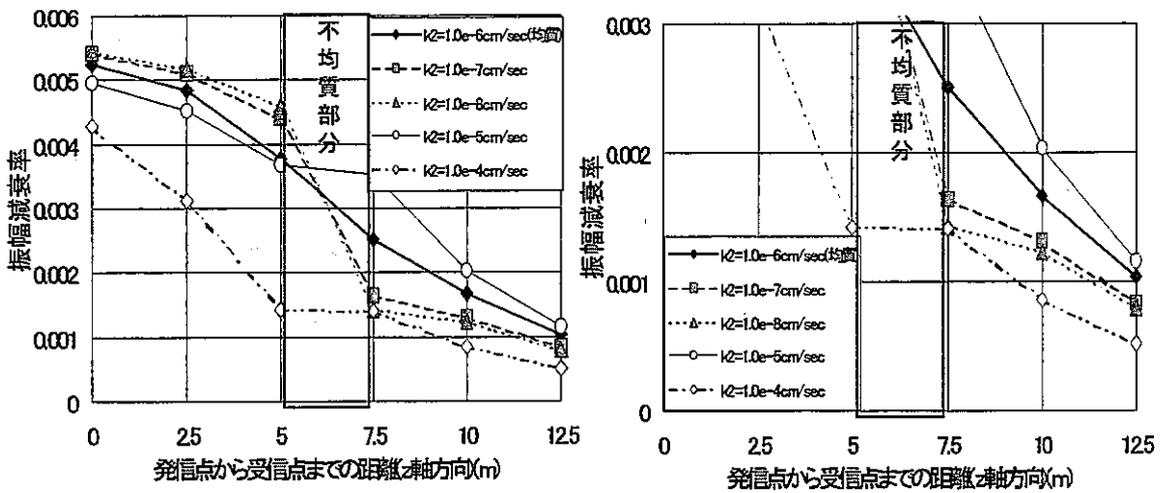


図-6.34 観測位置の違いによる振幅減衰率の変化

(不均質モデルⅡ.2(長さ4m,幅200m,高さ2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6} \text{ cm/sec}$,不均質部の透水係数 k_2 (図中参照),
発信点からの距離 $x=10m$ 地点)

※右図は左図の縦軸(振幅)のスケールを変えたもの)

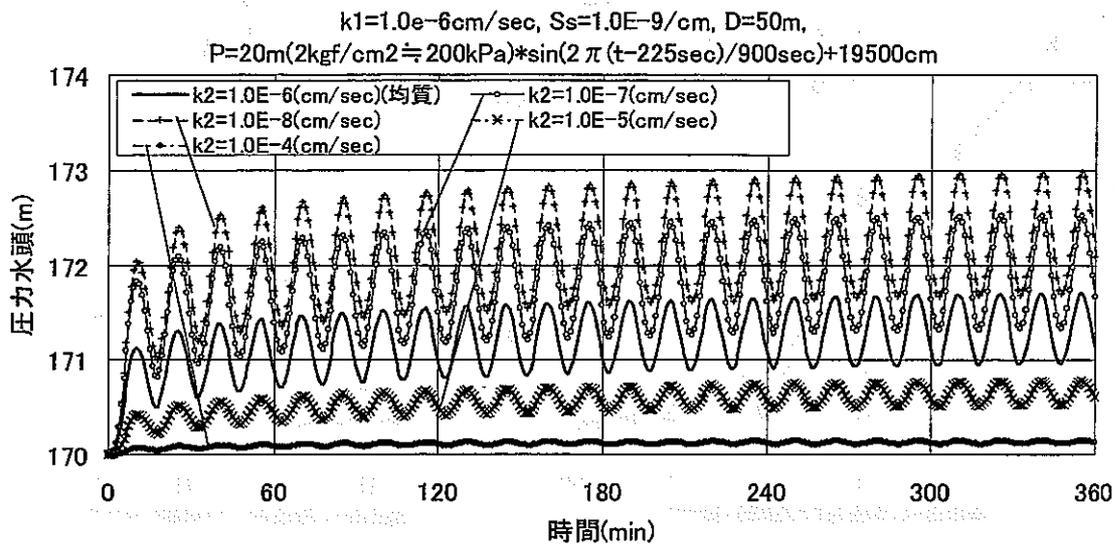


図-6.35 応答水圧の時間変化

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m, 幅 200m, 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数 k_2 (図中参照),
発信点からの距離 $x=4\text{m}$, $z=5\text{m}$ 地点)

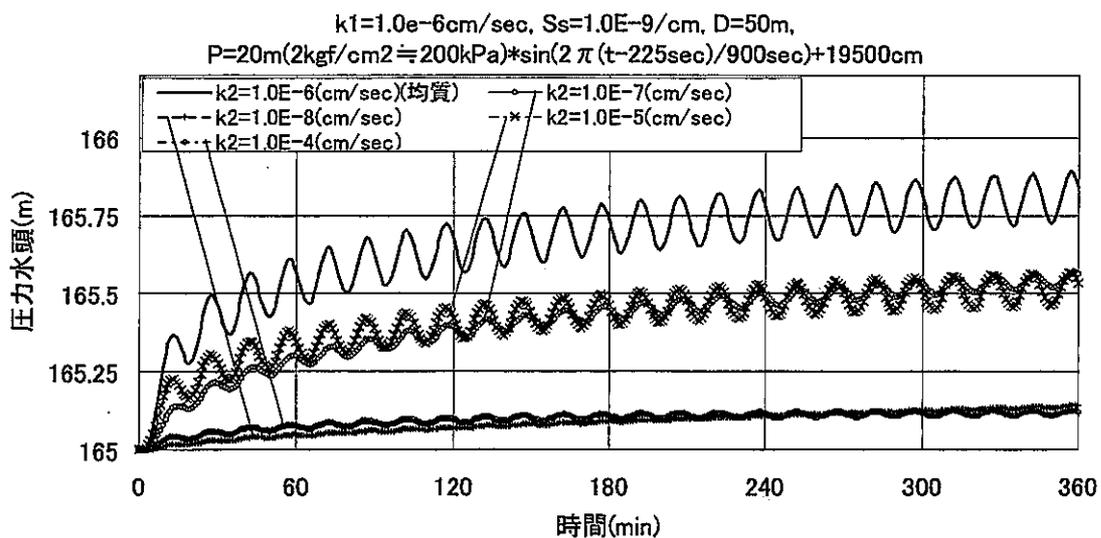
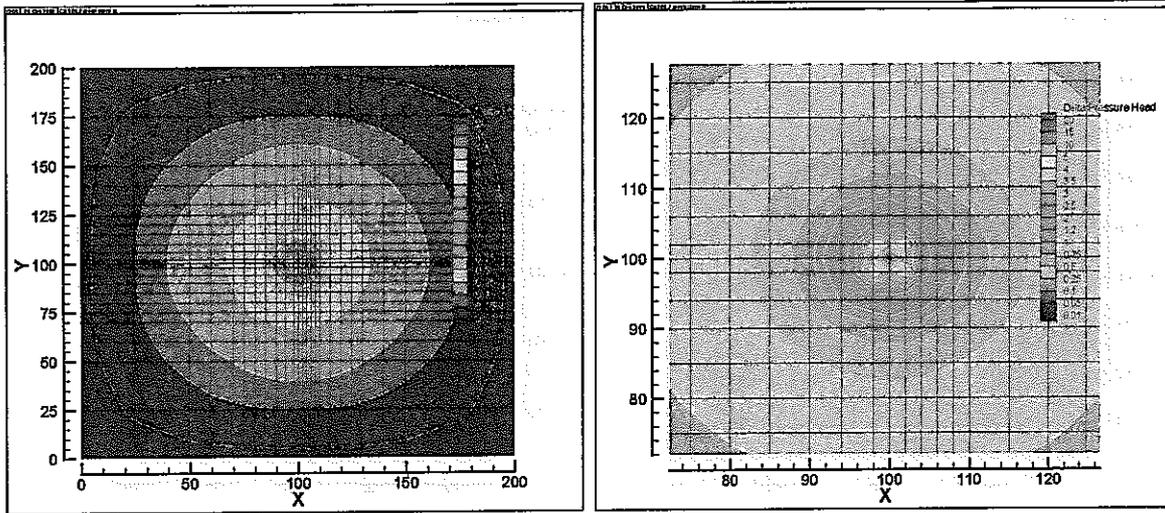
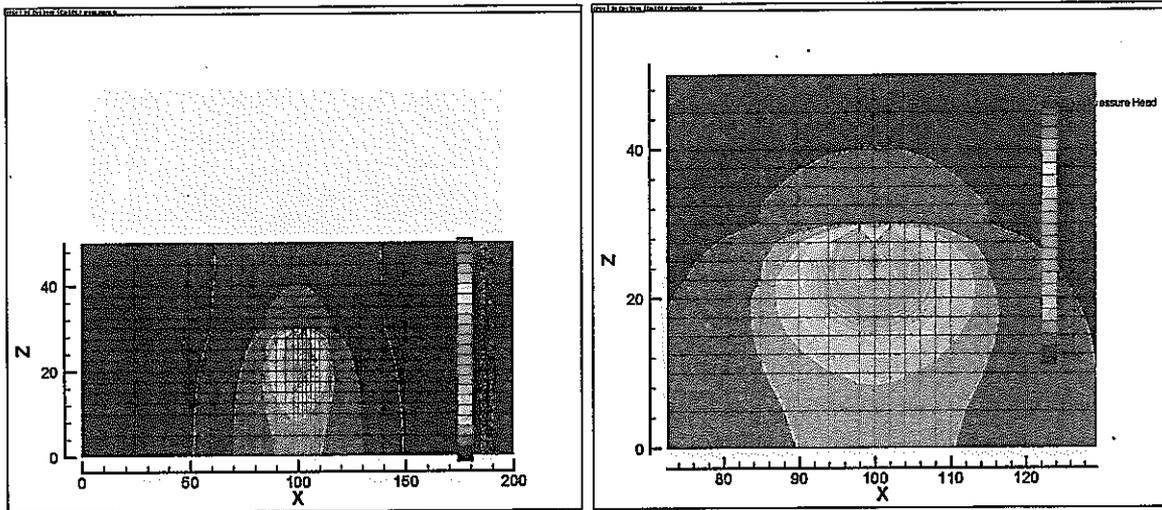


図-6.36 応答水圧の時間変化

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m, 幅 200m, 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数 k_2 (図中参照),
発信点からの距離 $x=4\text{m}$, $z=10\text{m}$ 地点)



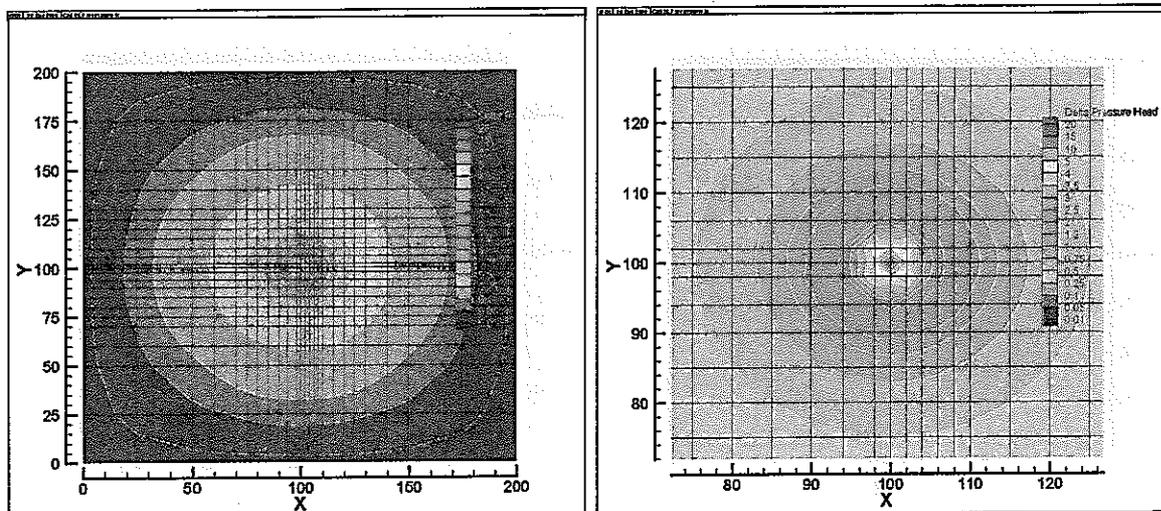
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



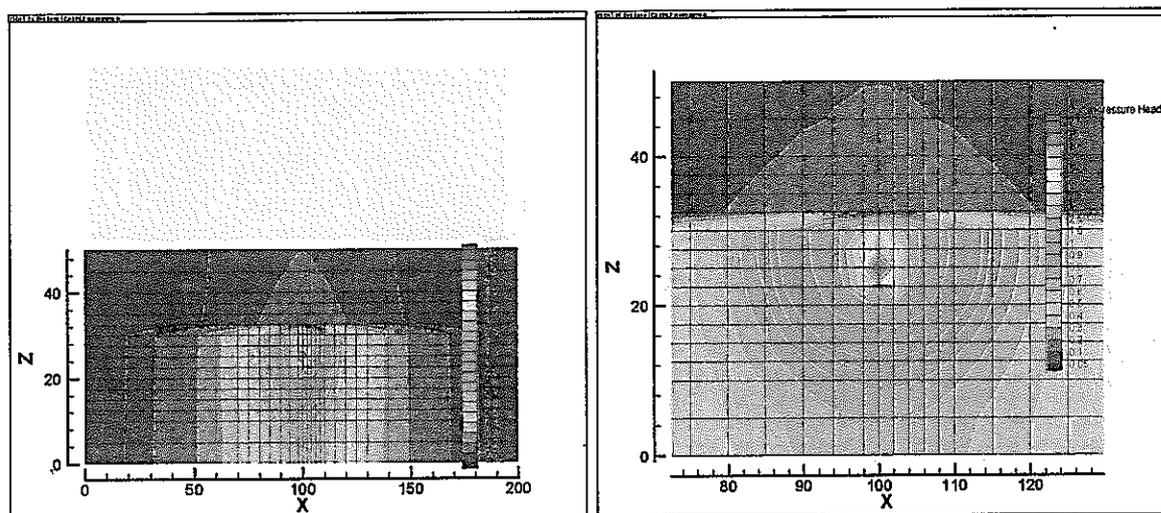
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

図-6.37 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m, 幅 200m, 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-4(\text{cm}/\text{sec})$)



(a) 水平方向の分布図 (底面から $z=25\text{m}$)



(b) 鉛直方向の分布図 ($y=100\text{m}$)

図-6.38 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m, 幅 200m, 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-8(\text{cm}/\text{sec})$)

【参考文献】

- 61) Yeh, T.C.J., S.Liu : Hydraulic tomography : Development of a new aquifer test method, Water Resources Research, Vol.36, No.8, pp.2095-2105, 2000.
- 62) 杉村淑人, 森田豊, 渡辺邦夫 : 孔間透水試験圧力応答パターンの水みちネットワークモデル数値実験による検討, 土木学会論文集, Vol.596, No.Ⅲ-43, pp.223-237, 1998.
- 63) 本島勲 : 岩盤の貯留性に関する一考察, 第10回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.401-406, 1998.

第7章 結論

本研究では、岩盤における水圧トモグラフィの3次元浸透解析に関する研究として、従来用いられてきた浸透解析法における時間差分法に関しての欠点を考察し、それに対するものとして、ラプラス変換を用いた3次元浸透流解析方法を述べてきた。また、クロスホール透水試験における水圧伝播について、3次元浸透解析によって検討した。

以下に、本研究の内容、結果を総括し、本研究の結論とするとともに今後の問題点について述べる。

- (1) 岩盤における浸透特性を把握する方法の現状を原位置試験と解析方法とに分けて記し、クロスホール透水試験とその結果を用いた3次元解析による浸透特性の把握の現在の位置づけを行った。
- (2) 3次元問題における浸透の基礎方程式にラプラス変換を適応した方程式の誘導及び定式化を行った。数値ラプラス逆変換法として Crump 改良法の Quotient Difference Algorithm 及び細野の方法を採用した。そして、簡単な被圧領域での定流量揚水問題に対して、理論解析および、2次元、3次元解析での時間差分法との比較検討を行った。その結果、比較的良い精度で解を得ることが確認できた。
- (3) クロスホール透水試験のシヌソイダル試験を想定し、ラプラス変換を適用した3次元浸透流解析を行い、上記の数値ラプラス逆変換手法の精度の検証及び時間差分法との演算時間の比較を行った。その結果、特定の時間に着目する場合には細野の方法、経時的変化に着目する場合には Crump 改良法(QDA)を用いることによって、迅速に計算できることがわかった。
- (4) クロスホール透水試験のシヌソイダル試験を想定した3次元数値実験を行って、応答水圧の特徴を調べた。その結果、シヌソイダル試験の応答水圧は変動するため、応答圧力値に加えて振幅や位相差といった情報を得ることができるため、定圧試験に比べて孔間の地質状態の影響をより反映した応答水圧情報を得ることができると考えられる。

- (5) シヌソイダル試験を想定した 3次元数値実験のうち、孔間に岩盤の不均質部が地表面に対して鉛直方向に存在する場合、不均質部分の性質に関わらず水圧の伝達を阻害していることがわかった。圧力伝播の特徴は、不均質部が高透水性の場合は、水圧が不均質部内部で分散し、低透水性の場合は、不均質部前面で水圧をシャットダウンして水圧を押し戻している様相を示していた。この結果より、対象岩盤を取り囲む形で加圧孔と 2 本以上の観測孔を設置することにより不均質部分の特性を把握できる可能性がある。
- (6) シヌソイダル試験を想定した 3次元数値実験のうち、孔間に岩盤の不均質部が地表面に対して水平方向に存在する場合も結論(4)と同様の結果を示した。また、高透水性部分がボーリング孔を横切っている場合は、その区間での応答水圧値が高くなることが予想される。よって、観測孔内の開口性亀裂が確認できる区間に観測点を設置することによって、それが水みちとなっているかどうか把握できる可能性がある。

また、本研究で残された問題点及び今後の課題を以下に述べる。

- (1) シヌソイダル試験の場合、細野の方法では、比較的演算時間の短い 2次元解析では有効であるが、試験開始後の長い経時的時間変化を得る場合、比較的解析時間を要し、困難を伴う。従って、さらに様々な数値ラプラス逆変換法の適用を行い、浸透解析のプログラムコードの開発を行わなければならない。
- (2) 本研究では、水圧トモグラフィ手法での浸透特性の把握を行うにあたって、LTG 法を順解析部分に組み込んだトモグラフィを行う逆解析方法の開発が必要である。この開発にあたり、課題(1)の問題が存在するため、観測水圧をラプラス変換し、ラプラス空間上における最適化手法を開発する必要がある。また、この際には、観測水圧の経時的変化をラプラス変換しやすい関数に近似する必要がある。
- (3) 本研究で開発したプログラムコードを用いてより実岩盤に近いモデルに適用し、原位置試験結果と比較することによってその有効性をさらに明らかにしていく必要がある。

- (4) クロスホール試験において注水井の圧力が大きくなった場合,弾性変形を考慮した浸透流解析を行わなければならない。これには浸透と応力変形をカップリングしたプログラムコードの開発を行わなければならない。

参考文献

- 1) 西淳二, 清水隆文 : 地下空間利用の問題点および将来の可能性, 第 10 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.245-250, 1998.
- 2) 小島圭二 : ジオトモグラフィーの現状と将来, 地質と調査, No.2, pp.2-7, 1991.
- 3) 財団法人エンジニアリング振興協会 地下開発利用研究センター 探査データ解析技術研究会 : トモグラフィ技術に関するための解説書 トモグラフィ技術に関する Q&A, 1997.
- 4) 小島圭二, 神尾重雄, 石橋弘道, 内山成和, 齋藤秀樹, 島祐雅 : ジオトモグラフィーによる岩盤の画像化(その 1) - 岩盤の物性分布の画像化 -, 応用地質, Vol.30, No.3, pp.121-130, 1989.
- 5) 小島圭二, 神尾重雄, 石橋弘道, 内山成和, 齋藤秀樹, 島祐雅 : ジオトモグラフィーによる岩盤の画像化(その 2) - 岩盤内の地下水の流れの画像化 -, 応用地質, Vol.30, No.4, pp.179-188, 1989.
- 6) 鈴木浩一, 藤光康宏 : 弾性波・比抵抗トモグラフィーの地質分野への適用, 電力中央研究所報告, U92082, 1992.
- 7) Hyndman, D.W., J.M. Harris, S.M. Gorelick : Inferring the relation between seismic slowness and hydraulic conductivity in heterogeneous aquifers, Water Resources Research, Vol.36, No.8, pp.2121-2132, 2000.8.
- 8) 中屋眞司 : 不連続性岩盤の調査・解析と評価 5.不連続性岩盤における調査・解析事例(浸透問題)(その 1), 土と基礎, Vol.48, No.11, pp.44, 2000.
- 9) Oda, M. : Permeability tensor of discontinuous rock masses, Geotechnique, Vol.35, No.4, pp.483-495., 1985.
- 10) Barenblatt, G.I., I.P. Zheltov and N.Kachina : Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, Prinkl. Matem. Makh., Vol.24, pp.852-864, 1960.
- 11) Long, J.C.S. , J.S.Remer, C.R.Wilson, and P.A.Witherspoon : Porous media equivalents for networks of discontinuous, Water Resources

Research, Vol.18, No.3, pp. 645-658,1982.

- 12) 例えば, End,H.K. ,Long,J.C.S. : A model for investigating transport in fracture networks, Water Resources Research, Vol.20, pp.1390-1440, 1984.
- 13) 例えば, 杉村淑人, 森田豊, 渡辺邦夫 : ダム基礎岩盤の水みち構造把握の試み, 土木学会論文集, No.590/Ⅲ-43, pp.223-237, 1998.
- 14) 山本肇, 下茂道人 : 等価不均質連続体モデルによる亀裂性岩盤の浸透流解析手法, 大成建設技術研究所報, 第 29 号, pp.257-262, 1996.
- 15) Lugeon, M. : Barrages et geologie, Poligrafico pedrazzini, Locarro., pp.85-111, 1933.
- 16) 山口嘉一, 松本徳久 : ダム基礎の透水性とルジオン値, 土木学会論文報告集, No.412, pp.51-60, 1989.
- 17) 中屋眞司 : 割れ目系岩盤における水理定数の三次元空間分布の推定法, 地下水学会誌, Vol.42, No.1, pp.95-105, 2000.
- 18) 柳沢孝一, 齋藤章, 西垣誠, 平田洋一 : 新しい現場透水試験法(動燃式 JFT) の開発と測定例, 土と基礎, Vol.37, No.7, pp.47-52, 1989.
- 19) 柳沢孝一, 西垣誠, 平田洋一 : 動燃式低水圧制御水理試験機(動燃式 JFT) の原理と適用例, 地下水学会誌, Vol.30, No.30, 1989.
- 20) Louis, C. : Rock hydraulics, B.G.R.M. Report, Orleans, 1974.
- 21) 西垣 誠, 中屋眞司, 河野伊一郎 : 原位置試験における節理性岩盤の 3 次元異方透水係数の測定法に関する一提案, 第 22 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp.376~380, 1990.
- 22) 本島勲, 宮川公夫, 田中靖治, 大山隆弘, 志村孝吉, 北野晃一 : クロスホール透水試験による超低透水性岩盤の基礎的考察, 電力中央研究所研究報告, U90003, pp.3-4, 1990.
- 23) Lundstrom,L., H. Stille : Large scale permeability test of the granite in the STRIPA mine and thermal conductivity test, LBA-7053, SAC-02, 1978.
- 24) 登坂博行, 増本 清, 伊藤一誠, 大塚康範 : パルステストデータを用いた岩盤水理特性分布の 3 次元逆解析手法, 第 8 回岩の力学国内シンポジウム講演

論文集,1990.

- 25) 増本 清, 登坂 博行, 小島 圭二 : 多点非定常圧力とその時間変化率の同時自動マッチングによる岩盤水理特性逆解析 - 3次元基本アルゴリズムの開発 -, 地下水学会誌, 第40巻第3号, pp.273~287, 1998.
- 26) 増本清 : ハイドロパルストモグラフィ技術の開発, 東京大学博士論文, 1995.
- 27) Black, J.H. and K.L.Kipp : Determination of hydrogeological parameter using sinusoidal pressure tests: A theoretical appraisal, Water Resources Research, Vol.17, No.3, pp.686-692, 1981.
- 28) Hsieh, P.A., Neuman S P. : Field Determination of the Three-Dimensional Hydraulic Conductivity Tensor of Anisotropic Media. 1.Theory, Water Resources Research, Vol.21, No.11, pp.1655-1665, 1985.
- 29) Hsieh, P.A., Neuman S P. : Field Determination of the Three-Dimensional Hydraulic Conductivity Tensor of Anisotropic Media. 2.Methodology and Application to Fractured Rocks, Water Resources Research, Vol.21, No.11, pp.1655-1665, 1985.
- 30) 青木謙治, 塩釜幸弘, 戸井田克, 手塚康成, 小淵孝晃, 升元一彦 : 亀裂性岩盤の透水特性評価に対するクロスホール透水試験の適用性について, 第8回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.441-446, 1990.
- 31) 奥野哲夫 : 透水係数の空間分布推定法と地下水流動の予測に関する研究, 名古屋大学博士論文, pp.36-77, 1994.3.
- 32) 中屋眞司, 西垣誠, 河野伊一郎 : 亀裂性方位情報を利用したクロスホール透水試験による岩盤の三次元透水パラメータの測定法, 地下水学会誌, Vol.34, No.2, pp.81-98, 1992.
- 33) 本島勲, 打田靖夫 : 正弦波圧力試験による岩盤の地下水理特性の考察 - 岩盤の透水性, 貯留性および異方性 -, 電力中央研究所報告, U96040, 1997.
- 34) Noy, D. et al. : Crosshole investigations, Implementation and fractional dimension interpretation of sinusoidal tests, Stripa Project IR 88-01, SKB, Stockholm, Sweden, 1998.
- 35) 竹内竜史, 仙波毅, 天野健治, 下茂道人 : 孔間水理試験装置の開発と現場適

- 用例, 第 10 回岩の力学シンポジウム講演論文集, pp.725-730, 1998.
- 36) Frederick, D. Day-Lewis, Paul A. Hsieh, Steven M. Gorelick :
Identifying fracture-zone geometry using simulated annealing and
hydraulic-connection data, Water Res. Res., Vol.36, No.7, pp.1707-1722,
2000.
- 37) 小林晃, 日向弘恵, 藤居宏一 : 不均質透水係数場の推定における共分散マ
トリックスの影響, 土木学会論文集, Vol.645, No.Ⅲ-50, pp.235-243, 2000.
- 38) 田中靖治, 本島勲 : 正弦波圧力データを用いた原位置岩盤内の透水係数分
布の逆推定, 岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, Vol.26,
pp.136-140, 1995.
- 39) 杉村淑人, 松田育子, 富森叡, 増本清, 渡辺邦夫 : 水みちネットワークモデ
ルを用いた岩盤浸透流逆解析, 土木学会論文集, Vol.638, No.Ⅲ-49,
pp.41-50, 1999.12
- 40) 下村道人, 井尻祐二, 飯星茂 : トモグラフィとクロスホール透水試験に
よる岩盤内地下水浸透経路の調査, 大成建設技術研究所技報, pp.31-35,
1992.
- 41) 田中和広 : 割れ目系岩盤における水理地質構造の調査手法(詳細スケール),
地下水学会誌, Vol.42, No.1, pp.83-93, 2000.
- 42) Neuman, S.P. : Saturated-unsaturated seepage by finite elements, Proc.,
ASCE HY, Vol.99, No.12, pp.2233-2250, 1973.
- 43) 赤井浩一, 大西有三, 西垣誠 : 有限要素法による飽和不飽和浸透流の解析,
土木学会論文報告集, 第 264 号, 1977.
- 44) 大西有三, 西垣誠 : 有限要素法による飽和不飽和領域内浸透の 3 次元解
析 - 手法とプログラム解説 -, 京都大学工学部交通土木教室路盤基礎工学
研究室 Report No.81-2, 1981.
- 45) 市川康明 : 地盤力学における有限要素法入門, 日科技連, p.59-61, 1990.
- 46) 西垣誠, 松尾雄一郎 : 亀裂性岩盤での水圧トモグラフィに関する研究, 土
木学会第 52 回年次学術研究発表会講演集, Ⅲ-A253, pp.506-507, 1997.
- 47) Sudicky, E.A. : The Laplace Transform Galerkin Technique. A
time-continuous finite element theory and application to mass

- transport in groundwater, *Water Resources Research*, Vol.25, No.8, pp.1833-1846, 1989.
- 48) Kenny, S.Crump : Numerical inversion of laplace transforms using a fourier series approximation, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.23, No.1, pp.89-96, 1976.
- 49) 細野敏夫: 数値ラプラス変換, *電気学会論文誌*, Vol.99, No.10, pp.494-500, 1979.
- 50) Churchill, R.V. (洪四方次 訳): 応用ラプラス変換, 彰国社, pp.3-5, 1960(第2版, 第1版は1950).
- (50) Churchill, R.V. : *Operational mathematics*, McGraw-hill Publishing Company, pp.3-5, 1971(3rd Edition))
- 51) Dubner, H. and J. Abate : Numerical inversion of the laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform, *J.ACM* 15, 1, pp.115-123, 1968.
- 52) Simon, R.M., M.T.Stroot, G.H.Weiss : Numerical inversion of laplace transforms with application to percentage labeled mitoses experiments, *Computers and Biomed. Res.*, pp.596-607, 1972.
- 53) MacDonald, J. R. : Accelerated convergence divergence, iteration, extrapolation, and curve fitting, *J.Appl.Phys.*, 10, pp.3034-3041, 1964.
- 54) De Hoog, F.R., J.H.Knight, and A.N.Stokes : An improved method for numerical inversion of laplace transforms, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 3(3), pp.357-366, 1982.
- 55) 社団法人地盤工学会 : 根切り工事と地下水 -調査・設計から施工まで-, 現場技術者のための土と基礎シリーズ 19, 社団法人地盤工学会, pp.86-87, 1991.
- 56) 松尾雄一郎 : 亀裂性岩盤における水圧トモグラフィーに関する研究, 岡山大学修士論文, 1997.
- 57) 新堂充彦 : 亀裂性岩盤における浸透特性の把握に関する研究, 岡山大学修士論文, 1998.

- 58) 神谷紀生, 北栄輔 : 工系数学講座(2) 計算による線形代数, 共立出版株式会社, pp.73-97, 1999.
- 59) 張紹良, 藤野清次 : 反復法の数理, 朝倉書店, 1996.
- 60) 西垣誠, 白石知成, 猪瀬二郎, 河村志朗 : 地下鉄建設による多層地盤での複数地下水位変動の3次元浸透解析による予測, 地下水学会誌, Vol.32, No.4, pp.231~240, 1990.
- 61) Yeh, T.C.J., S.Liu : Hydraulic tomography : Development of a new aquifer test method, Water Resources Research, Vol.36, No.8, pp.2095-2105, 2000.
- 62) 杉村淑人, 森田豊, 渡辺邦夫 : 孔間透水試験圧力応答パターンの水みちネットワークモデル数値実験による検討, 土木学会論文集, Vol.596, No. III-43, pp.223-237, 1998.
- 63) 本島勲 : 岩盤の貯留性に関する一考察, 第10回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.401-406, 1998.

付 録

付録目次

	頁
付録 A 式(3.24)の数値解析における計算法	付-1
A.1 要素マトリックスの誘導	付-1
A.2 数値積分	付-3
付録 B 数値ラプラス逆変換式の誘導	付-5
B.1 細野の方法	付-5
B.2 Crump の方法	付-7
付録 C 被圧帯水層での非定常軸対称浸透流(定常流揚水)の理論解法	付-9
付録 C 連立一次元方程式に数値解法例	付-10
C.1 ガウスの消去法	付-10
C.2 CG 法	付-11
(付図)	
(本文 4 章)	
付図-4.1 加圧点における圧力水頭の変化	
(細野の方法, 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $k=45$)	
(a) 時間 $t=0\sim 180(\text{min})$ まで	付-15
(b) 時間 $t=180\sim 360(\text{min})$ まで	付-15
付図-4.2 加圧点における圧力水頭の変化	
(細野の方法, 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $k=60$)	
(a) 時間 $t=0\sim 240(\text{min})$ まで	付-16
(b) 時間 $t=240\sim 480(\text{min})$ まで	付-16
付図-4.3 加圧点における圧力水頭の変化	
(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=91, T_{\text{max}}=80$)	
.....	付-17
付図-4.4 加圧点における圧力水頭の変化	
(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=121, T_{\text{max}}=80$)	
.....	付-17

付図-4.5	加圧点における圧力水頭の変化 (Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{max}=40$)	付-18
付図-4.6	加圧点における圧力水頭の変化 (Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{max}=100$)	付-18
付図-4.7	加圧点における圧力水頭の変化 (Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{max}=200$)	付-19
付図-4.8	加圧点における圧力水頭の変化 (Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=61$, $T_{max}=400$)	付-19
付図-4.9	加圧点における圧力水頭の変化 (Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=61$, $T_{max}=200$) (a) 時間 $t=0\sim 180$ (min) まで	付-20
	(b) 時間 $t=180\sim 420$ (min) まで	付-20
付図-4.10	加圧点における圧力水頭の変化 (Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=121$, $T_{max}=200$) (a) 時間 $t=0\sim 210$ (min) まで	付-21
	(b) 時間 $t=210\sim 420$ (min) まで	付-21
付図-4.8	加圧点における圧力水頭の変化 (Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=121$, $T_{max}=400$)	付-22
 (本文 6 章)		
付図-6.1	観測点における圧力水頭の変化 (均質モデル, 加圧点から 10m)	付-23
付図-6.2	観測点における圧力水頭の変化 (不均質モデル, 加圧点から不均質部側に 10m)	付-23

- 付図-6.3 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 4m 地点)
 (不均質モデル I.2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照)) 付-24
- 付図-6.4 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 4m 地点)
 (不均質モデル I.3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照)) 付-24
- 付図-6.5 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 4m 地点)
 (不均質モデル I.4(長さ 4m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照)) 付-25
- 付図-6.6 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 10m 地点)
 (不均質モデル I.2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照)) 付-25
- 付図-6.7 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 10m 地点)
 (不均質モデル I.3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照)) 付-26
- 付図-6.8 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 10m 地点)
 (不均質モデル I.4(長さ 4m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照)) 付-26
- 付図-6.9 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 2m 地点)
 (不均質モデル I.1(長さ 200m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照), 180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-27
 (b) 不均質部に対して平行 付-27

- 付図-6.10 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 2m 地点)
 (不均質モデル I.2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照), 180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-28
 (b) 不均質部に対して平行 付-28
- 付図-6.11 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 2m 地点)
 (不均質モデル I.3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照), 180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-29
 (b) 不均質部に対して平行 付-29
- 付図-6.12 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 2m 地点)
 (不均質モデル I.4(長さ 4m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照), 180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-30
 (b) 不均質部に対して平行 付-30
- 付図-6.13 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 6m 地点)
 (不均質モデル I.2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照), 180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-31
 (b) 不均質部に対して平行 付-31
- 付図-6.14 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の 6m 地点)
 (不均質モデル I.3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照), 180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-32
 (b) 不均質部に対して平行 付-32

- 付図-6.15 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の6m地点)
 (不均質モデル I .4(長さ 4m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照),180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-33
 (b) 不均質部に対して平行 付-33
- 付図-6.16 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル I .1(長さ 200m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照),180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-34
 (b) 不均質部に対して平行 付-34
- 付図-6.17 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル I .2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照),180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-35
 (b) 不均質部に対して平行 付-35
- 付図-6.18 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル I .3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照),180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-36
 (b) 不均質部に対して平行 付-36
- 付図-6.19 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル I .4(長さ 4m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照),180min まで)
 (a) 不均質部に対して垂直方向 付-27
 (b) 不均質部に対して平行 付-27

付図-6.20 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.1(長さ 200m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}$ /cm,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}$ cm/sec,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-5}$ cm/sec)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25$ m) 付-38

(b) 鉛直方向の分布図($y=100$ m) 付-38

付図-6.21 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.1(長さ 200m,幅 2m,高さ 50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}$ /cm,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}$ cm/sec,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-7}$ cm/sec)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25$ m) 付-39

(b) 鉛直方向の分布図($y=100$ m) 付-39

付図-6.22 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}$ /cm,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}$ cm/sec,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-4}$ cm/sec)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25$ m) 付-40

(b) 鉛直方向の分布図($y=100$ m) 付-40

付図-6.23 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}$ /cm,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}$ cm/sec,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-5}$ cm/sec)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25$ m) 付-41

(b) 鉛直方向の分布図($y=100$ m) 付-41

付図-6.24 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}$ /cm,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}$ cm/sec,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-7}$ cm/sec)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25$ m) 付-42

(b) 鉛直方向の分布図($y=100$ m) 付-42

付図-6.25 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.2(長さ 200m,幅 2m,高さ 30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-8}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-43

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-43

付図-6.26 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-4}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-44

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-44

付図-6.27 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-5}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-45

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-45

付図-6.28 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-7}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-46

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-46

付図-6.29 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.3(長さ 200m,幅 2m,高さ 10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-8}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-47

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-47

付図-6.30 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I .4(長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-4}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-48

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-48

付図-6.31 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I .4(長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-5}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-49

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-49

付図-6.32 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I .4(長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-7}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-50

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-50

付図-6.33 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I .4(長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-8}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-51

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-51

付図-6.34 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=10\text{m}$, 不均質部が存在する側の $z=5\text{m}$ 地点)

(不均質モデル II .1(長さ 200m, 幅 200m, 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照)) 付-52

付図-6.35 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=10\text{m}$,不均質部が存在する側の $z=10\text{m}$ 地点)

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m ,幅 200m ,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照) 付-52

付図-6.36 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=4\text{m}$,不均質部が存在する側の $z=5\text{m}$ 地点)

(不均質モデルⅡ.2(長さ 4m ,幅 200m ,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照) 付-53

付図-6.37 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=4\text{m}$,不均質部が存在する側の $z=10\text{m}$ 地点)

(不均質モデルⅡ.2(長さ 4m ,幅 200m ,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照) 付-53

付図-6.38 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=10\text{m}$,不均質部が存在する側の $z=5\text{m}$ 地点)

(不均質モデルⅡ.2(長さ 4m ,幅 200m ,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照) 付-54

付図-6.39 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=10\text{m}$,不均質部が存在する側の $z=10\text{m}$ 地点)

(不均質モデルⅡ.2(長さ 4m ,幅 200m ,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数は $k_2(\text{cm}/\text{sec})$ (図中参照) 付-54

付図-6.40 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m,幅 200m,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-5}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-55

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-55

付図-6.41 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.1(長さ 200m,幅 200m,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-7}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-56

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-56

付図-6.42 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.2(長さ 4m,幅 200m,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-4}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-57

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-57

付図-6.43 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.2(長さ 4m,幅 200m,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-5}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-58

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-58

付図-6.44 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.2(長さ 4m,幅 200m,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-7}\text{cm}/\text{sec}$)

(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-59

(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-59

付図-6.45 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.2(長さ 4m,幅 200m,高さ 2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-8}\text{cm}/\text{sec}$)

- (a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$) 付-60
- (b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$) 付-60

(付表)

(本文 4 章)

付表-4.1 図-4.6 のデータ

- (a) Jacob の方法, 2次元軸対象数値解析(時間差分法),
3次元数値解析(時間差分法), 3次元 LTG 法(細野の方法) . . . 付-61
- (b) 3次元 LTG 法(Crump の方法の Quotient-Difference Algorithm,
打ち切り級数 $2N+1=15,31,45,90$) 付-62

付表-4.2 図-4.6 のデータ

- (a) Jacob の方法, 2次元軸対象数値解析(時間差分法),
3次元数値解析(時間差分法), 3次元 LTG 法(細野の方法) . . . 付-63
- (b) 3次元 LTG 法(Crump の方法の Quotient-Difference Algorithm,
打ち切り級数 $2N+1=15,31,45,90$) 付-64

付表-4.3 図-4.12 のデータ

- (a) 細野の方法, 打ち切り級数 $k=15$ 付-65
- (b) Crump 改良法(QDA), 打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{\max}=80$ 付-66

(本文 6 章)

- 付表-6.1 図-6.7 のデータ 付-67
- 付表-6.2 図-6.8 のデータ 付-68
- 付表-6.3 図-6.15 のデータ 付-69
- 付表-6.4 図-6.16 のデータ 付-69
- 付表-6.5 図-6.17 のデータ 付-70
- 付表-6.6 図-6.18 のデータ 付-70

付表-6.7	図-6.19 のデータ	
	(a) 不均質部に対して垂直方向	付-71
	(b) 不均質部に対して平行	付-71
付表-6.8	図-6.20 のデータ	
	(a) 不均質部に対して垂直方向	付-71
	(b) 不均質部に対して平行	付-71
付表-6.9	図-6.21 のデータ	
	(a) 不均質部に対して垂直方向	付-72
	(b) 不均質部に対して平行	付-72
付表-6.10	図-6.21 のデータ	
	(a) 不均質部に対して垂直方向	付-72
	(b) 不均質部に対して平行	付-72
付表-6.11	図-6.31 のデータ	付-73
付表-6.12	図-6.32 のデータ	付-73
付表-6.13	図-6.33 のデータ	付-74
付表-6.14	図-6.34 のデータ	付-74

付録 A 式(3.24)の数値解析における計算法

A.1 要素マトリクスの誘導

(本文より式(3.24)を引用)

$$A_{nm}h_m + F_{nm} \frac{\partial h}{\partial t} = Q_n - D_n \quad (n, m=1, 2, 3, \dots, N) \quad (3.24)$$

式(3.24)の各要素における値を次のように示す。

$$E_{nm} = k_{ij}^e \int_{V^e} \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i} \frac{\partial N_m^e}{\partial x_j} dV^e \quad (A.1)$$

式(A.1)を要素ごとに計算するためには、次の微分の値を求めなければならない。

$$\frac{\partial N_m^e}{\partial x_i} \quad (A.2)$$

図-3.2 に示した局所座標系 r_i とこれに対応する全体座標系 x_i を考えると、偏微分の公式より、

$$\left\{ \frac{\partial N_m^e}{\partial r_j} \right\} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial r_j} \right] \left\{ \frac{\partial N_m^e}{\partial x_i} \right\} = [J] \left\{ \frac{\partial N_m^e}{\partial x_i} \right\} \quad (A.3)$$

となる。ここで $[J]$ は Jacobian matrix と呼ばれる。したがって、全体座標による微分は $[J]$ の逆マトリクスを用いて次式となる。

$$\left\{ \frac{\partial N_m^e}{\partial x_i} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial N_m^e}{\partial r_j} \right\} \quad (A.4)$$

ここで全体座標系を要素内の節点座標で表すため、内挿関数(Interpolation function) N^i を用いると、

$$\{x_j\} = \sum N^i(r_k) x_j^i \quad (A.5)$$

式(A.5)より $[J]$ なる Jacobian matrix は、

$$[J] = \left[\sum \frac{\partial N^i(r_k)}{\partial r_k} x_j^i \right] \quad (A.6)$$

と表される。

ここで、 $[J]$ の各要素を、

$$J_{kj} = \sum \frac{\partial N^i(r_k)}{\partial r_k} x_j^i \quad (\text{A.7})$$

とすると、Jacobian matrix の逆マトリクスは、

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{21} & a_{31} \\ -a_{12} & a_{22} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

と表される。ここで、

$$\begin{aligned} |J| &= (J_{11}J_{22}J_{33} + J_{12}J_{23}J_{31} + J_{13}J_{21}J_{32}) \\ &\quad - (J_{13}J_{22}J_{31} + J_{12}J_{21}J_{23} + J_{11}J_{23}J_{32}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} & a_{12} &= \begin{vmatrix} J_{21} & J_{23} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} & a_{13} &= \begin{vmatrix} J_{21} & J_{22} \\ J_{31} & J_{32} \end{vmatrix} \\ a_{21} &= \begin{vmatrix} J_{12} & J_{13} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix} & a_{22} &= \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} & a_{23} &= \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{31} & J_{32} \end{vmatrix} \\ a_{31} &= \begin{vmatrix} J_{12} & J_{13} \\ J_{22} & J_{23} \end{vmatrix} & a_{32} &= \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{21} & J_{23} \end{vmatrix} & a_{33} &= \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

したがって、Jacobian matrix の逆マトリクスは次のように表される。

$$[J]^{-1} = [b_{ij}] \quad (\text{A.11})$$

ここに、

$$b_{ij} = (-1)^{ij} \frac{1}{|J|} a_{ji} \quad (\text{A.12})$$

式(A.6)と式(A.11)より、式(A.4)の微分は次のように求めることができる。

$$\left\{ \frac{\partial N^e_m}{\partial x_i} \right\} = [b_{ij}] \left\{ \frac{\partial N^e_m}{\partial r_j} \right\} \quad (\text{A.13})$$

式(A.13)を式(A.3)に代入することで、 E_{nm} の被積分関数は局所座標で表示することができた。

A.2 数値積分⁴⁴⁾

式(A.4)の被積分関数は局所座標で表示されているから、式(A.4)の体積積分も局所座標で積分を実行する必要がある。

積分の座標変換により、

$$\int_{V^e} f^e(x_i) dV^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^e(r_j) \det|J| dr_1 dr_2 dr_3 \quad (\text{A.14})$$

と表示できる。

式(A.14)の積分の値を求めるには、Gauss - Legendere の数値積分を用いると便利である。すなわち、重み係数 H_i と r_1^m, r_2^j, r_3^i なる積分点を用いることによって、

$$\begin{aligned} E_{nm} &= \int_{V^e} f^e(x_i) dV^e \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_m H_j H_i f(r_1^m, r_2^j, r_3^i) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

と計算することができる。

式(A.15)に用いた Gauss の数値積分法は適当な変数変換を行い、積分区間を -1 から +1 までになおしてから、この積分区間内に適当な n 個の点 r_h^i ($i=1 \sim 4$) を選び、次式で積分値を近似するものである。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r_1, r_2, r_3) dr_1 dr_2 dr_3 \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_m H_j H_i f(r_1^m, r_2^j, r_3^i) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

表-A.1 に Gauss の数値積分定数を示す。

アイソパラメトリック要素では図-A.1 に示したように、各面において -1, +1 となる局所座標によって被積分関数を表示しているため、Gauss の数値積分法が用いられることになる。

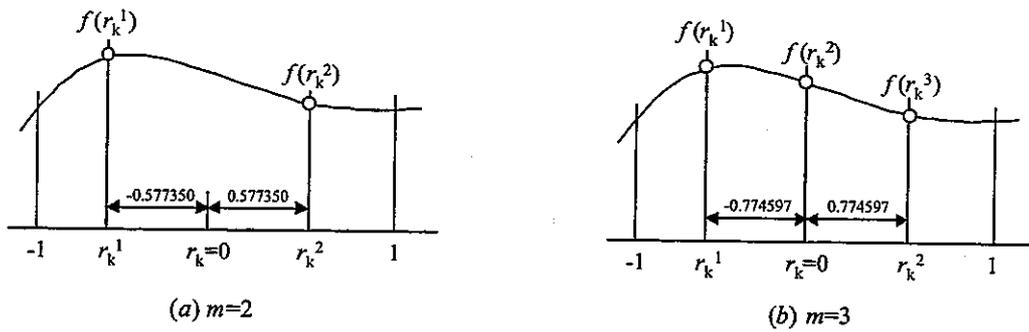


図-A.1 Gauss の数値積分の積分点⁴⁴⁾

表-A.1 4 次までの Gauss 数値積分の重み係数と位置

n=2	$r_k = \pm 0.577350$	$H_i = 1.00$
n=3	$r_k = 0.0$	$H_i = 8/9$
	$r_k = \pm 0.774597$	$H_i = 5/9$
n=4	$r_k = \pm 0.861136$	$H_i = 0.347855$
	$r_k = \pm 0.339981$	$H_i = 0.652145$
n=5	$r_k = 0.0$	$H_i = 0.568889$
	$r_k = \pm 0.358469$	$H_i = 0.478629$
	$r_k = \pm 0.96180$	$H_i = 0.236927$

付録 B 数値ラプラス逆変換式の誘導

B.1 細野の方法⁴⁹⁾

ラプラス逆変換式を示す(本文 4.4.2 節より引用)。

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \bar{h}(p) e^{pt} ds \quad (4.22)$$

細野の方法では、式(4.22)中の指数関数部 e^{pt} を式(4.24)によって近似する。

$$e^p \equiv \frac{e^{\sigma_0}}{2 \cosh(\sigma_0 - p)} = \frac{e^p}{1 + e^{-2(\sigma_0 - p)}} \equiv E_{ec}(p, \sigma_0) \quad (4.24)$$

したがって、パラメータ σ_0 を適当な値に選ぶと、 $E_{ec}(p, \sigma_0)$ は指数関数 e^p の良好な近似となる。

しかし、 $E_{ec}(p, \sigma_0)$ が指数関数 \exp と著しく異なる点は、留数 $\text{Re } s = \sigma_0$ の直線上に無数の極を持つことである。このことを式で書くと、

$$E_{ec}(p, \sigma_0) \equiv \frac{e^{\sigma_0}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{p - [\sigma_0 + i(n-0.5)\pi]} \quad (B.1)$$

となる。

ここで、次の条件を満足する $h(t)$ を考える。

- ① 任意の正数 R について $h(t) \in L^1(0, R)$
 - ② 任意の正数 γ について $t \rightarrow \infty$ のとき $h(t) = O(e^{\gamma t})$
- ここで、 $O(e^{\gamma t})$ は $e^{\gamma t}$ のオーダーである。
- ③ $h(t)$ は t の実関数

上記の条件の結果として、次のものが保証される。すなわち、

- a) ラプラス変換は $\text{Re } s > 0$ で絶対収束する
- b) $\text{Re } s > 0$ で $\bar{h}(p)$ は正則
- c) $\bar{h}^*(p) = \bar{h}(p^*)$ である。(* は共役複素記号)
- d) $\text{Re } s > 0$ で $\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{h}(p) = 0$

ラプラス逆変換式(4.22)に $E_{ec}(p, \sigma_0)$ を代入した式は

$$h_{ec}(t, \sigma_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \bar{h}(p) E_{ec}(p, \sigma_0) ds \quad (B.2)$$

である。いま、 $R \equiv m\pi \gg \sigma_0$ (m は正の整数) として、 $(\gamma \pm iR)$ 、 $(R \pm iR)$ を頂点とする方形に沿う積分を $\int_R ds$ とすると

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{h}(p) E_{ec}(p, \sigma_0) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_R \bar{h}(p) E_{ec}(p, \sigma_0) ds + I_1 + I_1^* + I_2 \quad (\text{B.3})$$

ただし、

$$I_1 \equiv \frac{i}{2\pi i} \int_{\gamma}^R \bar{h}\left(\frac{\sigma+iR}{t}\right) E_{ec}(\sigma+iR, \sigma_0) d\sigma \quad (\text{B.4})$$

$$I_2 \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \bar{h}\left(\frac{\sigma+i\omega}{t}\right) E_{ec}(\sigma+i\omega, \sigma_0) d\omega \quad (\text{B.5})$$

式(B.1)と $\text{Res} > 0$ で $\bar{h}(p)$ が正則なことから、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{h}(p) E_{ec}(pt, \sigma_0) ds = \frac{e^{\sigma_0}}{2t} \sum_{n=-m+1}^m (-1)^{n+1} i \bar{h}\left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)}{t}\right) \quad (\text{B.6})$$

を得る。次に

$$2\pi |I_1| \leq \frac{1}{t} \int_{\gamma}^R \left| \bar{h}\left(\frac{\sigma+iR}{t}\right) E_{ec}(\sigma+iR, \sigma_0) \right| d\sigma \quad (\text{B.7})$$

であるが、

$$\left| E_{ec}(\sigma+iR, \sigma_0) \right| = \frac{e^{\sigma_0}}{2 \cosh(\sigma - \sigma_0)} \quad (\text{B.8})$$

であるから、

$$M_1 \equiv \max_{\gamma \leq \sigma \leq R} \left| \bar{h}\left(\frac{\sigma+iR}{t}\right) \right| \quad (\text{B.9})$$

とすると、

$$2\pi |I_1| \leq \frac{M_1}{t} e^{\sigma_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh \sigma} d\sigma = \frac{\pi M_1 e^{\sigma_0}}{t} \quad (\text{B.10})$$

が成り立つ。また、

$$M_2 \equiv \max_{-R \leq \omega \leq R} \left| \bar{h}\left(\frac{R+i\omega}{t}\right) \right| \quad (\text{B.11})$$

とすると、

$$\begin{aligned}
2\pi|I_2| &\leq \frac{1}{t} \int_{-R}^R \left| \bar{h}\left(\frac{R+i\omega}{t}\right) E_{cc}(R+i\omega, \sigma_0) \right| d\omega \\
&< \frac{M_2}{t} \int_{-R}^R \frac{e^{\sigma_0}}{2\sqrt{\sinh^2 R + \cos^2 \omega}} d\omega \\
&< \frac{M_2 e^{\sigma_0} R}{t \sinh R}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

が成り立つ。そこで、 $m \rightarrow \infty$ とすると $\lim_{m \rightarrow \infty} F(s) = 0$ により $M_1, M_2 \rightarrow 0$ となるので、 $t > 0$ ならば、 $I_1, I_1^*, I_2 \rightarrow 0$ 、従って、

$$\begin{aligned}
h_{cc}(t, \sigma_0) &= \frac{e^{\sigma_0}}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} i \bar{h}\left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)\pi}{t}\right) \\
&= \frac{e^{\sigma_0}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Im} \bar{h}\left(\frac{\sigma_0 + i(n-0.5)\pi}{t}\right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

上式がラプラス逆変換の近似値を与える理論式である。

B-2 Crump の方法⁴⁸⁾

ラプラス逆変換の式を示す(本文 4.4.3 節より引用)。

$$h(t) = \frac{e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} [\operatorname{Re}\{\bar{h}(p)\} \cos \alpha t - \operatorname{Im}\{\bar{h}(p)\} \sin \alpha t] d\omega \tag{4.33}$$

ここで、 $p = a + i\omega$ とし、 a は α より大きい実数、 $\operatorname{Re}\{\}$ 、 $\operatorname{Im}\{\}$ はそれぞれの実部、虚部を表す。

今、区間 $(0, 2T)$ において、 $2T$ の周期を持つ関数 $g_0(t)$ が $h(t)e^{-at}$ と等価のフーリエ級数を得るものとする。フーリエ級数を $g_0(t)$ の不連続の点で収束させることを目的として、 $h(t)$ があらゆる t に対して、 $h(t) = \{h(t+) + h(t-)\} / 2$ の条件を課す。 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $g_n(t)$ は $-\infty < t < \infty$ となり、 $g_n(t) = h(t)e^{-at}$ の場合は、 $2nT \leq t < 2(n+1)T$ である。それぞれの $g_n(t)$ のフーリエ級数は以下によって表される。

$$g_n(t) = \frac{1}{2} A_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) + B_{n,k} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \tag{B.13}$$

ここで、フーリエ係数は

$$A_{n,k} = \frac{1}{T} \int_{2nT}^{2(n+1)T} e^{-at} h(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt \quad (\text{B.14})$$

$$B_{n,k} = \frac{1}{T} \int_{2nT}^{2(n+1)T} e^{-at} h(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt \quad (\text{B.15})$$

それぞれの n について式(B.13)を足しあわすことで、以下のように表される。

$$\int_0^{\infty} e^{-at} h(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt = \text{Re} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \quad (\text{B.16})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} h(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt = -\text{Im} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \quad (\text{B.17})$$

そこで、以下を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} \bar{h}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \text{Re} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) - \text{Im} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \right] \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

いま $(0, 2T)$ において、 $g_0(t) = h(t)e^{-pt}$ であるので、式(B.18)から以下のような近似 $\hat{h}(t)$ (本文 4.4.3 節の式(3.45)) が得られる。

$$\hat{h}(t) = \frac{e^{pt}}{T} \left[\frac{1}{2} \bar{h}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \text{Re} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) - \text{Im} \left\{ \bar{h} \left(a + \frac{ik\pi}{T} \right) \right\} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \right] \quad (\text{3.45})$$

ここで、 $h(t) = \hat{h}(t) - E$ である。また、この誤差式は、

$$E = e^{at} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = e^{at} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-a(2nT+t)\} h(2nT+t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2naT} h(2nT+t) \quad (\text{3.46})$$

ここで、 α は P を $F(s)$ の極とすると、 $\max\{\text{Re}(P)\}$ より十分大きな数にする。

付録 C 被圧帯水層での非定常軸対称浸透流(定常流揚水)⁵⁵⁾

非定常状態の1次元軸対称浸透流の支配方程式は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(T \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{T}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (C.1)$$

ここで、 T :透水量係数(= Dk , D :帯水層厚, k :透水係数), S :貯留係数(= DS_s , S_s :比貯留係数), h :基準点からのピエゾ水頭(全水頭)である。これを水位低下 s の式に直すと、次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(T \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{T}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = S \frac{\partial s}{\partial t} \quad (C.2)$$

ここで、 Q_0 なる一定流量の揚水を行ったことによる周辺の水頭低下の s を求める。ただし、境界条件は無限遠において、水頭低下量を零とし、 Q_0 なる揚水は半径零の井戸より行うものとする(実際には揚水井の半径は有限であるが、境界条件に取り扱いを簡単にするためにこのように仮定する)。また、初期・境界条件を次に示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ 初期条件 } t=0 \text{ で } s=0 \\ (2) \text{ 境界条件 } r \rightarrow \infty \text{ で } s=0, r \rightarrow 0 \text{ で } Q_0 = \lim_{r \rightarrow 0} -2\pi r D k \frac{\partial s}{\partial r} \end{array} \right. \quad (C.3)$$

式(C.2)を式(C.3)の条件で解を求めると、

$$s = \frac{Q_0}{4\pi T} W(u) \quad (C.4)$$

ここで、 $W(u)$ は井戸関数であり(= $-0.5772 - \ln u + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \frac{u^4}{4 \cdot 4!} + \dots$),

$$u = \frac{S}{4T} \cdot \frac{r^2}{t} \quad (C.5)$$

である。

式(C.4)は被圧帯水層での揚水試験の解析での Theis 法の解析に用いられる。

$u < 1$ の範囲では式(C.4)は近似的に次のようになる。

$$s = \frac{Q_0}{4\pi T} \left\{ \ln \left(\frac{t}{r^2} \right) - \ln \frac{S}{2.25T} \right\} \quad (C.6)$$

式(C.6)は揚水試験の Jacob の解析に用いられる式である。

付録 D 連立一次元方程式の数値解法例

D.1 ガウスの消去法⁵⁸⁾

次の連立一次元方程式を考える(本文 5.1 節より引用)

$$[A]\{x\}=\{b\} \quad (5.1)$$

係数行列と定数ベクトルの要素 b_i を $a_{i,n+1}$ として次の拡大行列 A' をつくる。

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

この拡大行列に

(1) 第 k 行を a_{kk} で割る。

(2) $i > k$ であるような第 i 行から、第 k 行の a_{ik} 倍したものを引く。

この操作を施すと、行列(C.1) は、

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & \cdots & a_{1,n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{2,3}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n,n+1}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

のようになる。ここで、 $a_{ij}^{(k)}$ は、第 k 番目の操作段階における (i,j) の要素を示す。この $a_{ij}^{(k)}$ は、

$$a_{k,j}^{(k)} = a_{k,j}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \quad (C.3)$$

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - a_{i,k}^{(k-1)} a_{k,j}^{(k)} \quad (C.4)$$

により計算することができる。ただし、 $k = n$ のとき式(C.4)の操作は行わない。

上記の演算は a_{kk} を枢軸要素(ピボット)として掃き出す(スイープ)という。

x_n の値は、 $x_n = a_{n,n+1}^{(n)}$ であり、これにより、 x_{n-1} は、

$$x_{n-1} = a_{n-1,n+1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n \quad (C.5)$$

として求められる。 k 番目の x を求める式は、

$$x_k = a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{k,j}^{(k)} x_j \quad (k = n-1, n-2, \dots, 2, 1) \quad (C.6)$$

である。

D.2 CG法⁵⁹⁾

式(5.1)における初期近似解を x_0 とし初期残差を r_0 とすると

$$r_0 = b - Ax_0 \quad (\text{C.7})$$

行列 A の対称性を仮定し, r_0 と A から形成されるベクトル列 $\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\}$ に対して, この列で張られた部分空間 $K_m(A; r_0)$ をクリロフ空間部分空間(Krylov Subspace)とする。

$$K_m(A; r_0) := \text{Span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\} \quad (\text{C.8})$$

CG法によって求められる近似解を x_n , 近似解に対する残差を r_n とすると

$$x_n = x_0 + z_n, \quad z_n \in K_n(A; r_0) \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} r_n &= b - Ax_n \\ &= r_0 - Az_n \end{aligned} \in K_{n+1}(A; r_0) \quad (\text{C.10})$$

式(C.9)だけでは近似解 x_n を一意的に決定できないため, 近似解 x_n もしくはその残差 r_n に対して何らかの条件をつける。

(1) 最小条件

$$r_n = \min_{x \in x_0 + K_n(A; r_0)} \|b - Ax\|_W \quad (\text{C.11})$$

(2) 直交条件

$$r_n \perp_W K_n(A; r_0) \quad (\text{C.12})$$

式(C.11)の最小条件は反復解法にとって大変厳しい条件であるので実現が難しい。そこで, 式(C.12)の直交条件を課するのが一般的である。

クリロフ空間 $K_m(A; r_0)$ における正規直交系を

$$V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad (\text{C.13})$$

とすると式(C.9)より

$$z_n = V_n y_n, \quad y_n \in C^n \quad (\text{C.14})$$

と表され, 式(C.10)より

$$r_n = r_0 - AV_n y_n \quad (\text{C.15})$$

またアーノルディ原理より下式が導かれる。

$$\begin{aligned} AV_n &= V_{n+1} \bar{H}_n \\ &= V_n H_n + h_{n+1, n} v_{n+1} e_n^T \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$H_n = V_n^H W A V_n \quad (\text{C.17})$$

ここで, \bar{H}_n ; ヘッセンベルグ行列, $h_{i,j}$; ヘッセンベルグ行列の要素, H_n ; \bar{H}_n の最後の行を取り除いたもの。

式(C.12)の直交条件より $V_n H_n r_n = 0$ となり, また, 式(C.17) ($W=D$)から,

$$y_n = \| r_0 \| H_n^{-1} e_1 \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in C^n \quad (C.18)$$

がいえる。ここで, 式(C.16)を用いると,

$$\begin{aligned} r_n &= r_0 - (V_n H_n + h_{n+1,n} v_{n+1} e_n^T) y_n \\ &= r_0 - V_n H_n H_n^{-1} \| r_0 \| e_1 - h_{n+1,n} v_{n+1} e_n^T y_n \\ &= -h_{n+1,n} (y_n, e_n) v_{n+1} \end{aligned} \quad (C.19)$$

となる。ただし, $e_1 = (0, 0, \dots, 1)^T \in C^n$ である。ランチェス原理より

$$v_{n+1} = \frac{A v_n - h_{n-1,n} v_{n-1} - h_{n,n} v_n}{h_{n+1,n}} \quad (C.20)$$

と表せるので, 式(C.19)を式(C.20)に代入して整理すると

$$r_1 = \alpha_0 \frac{(r_0, A r_0)}{(r_0, r_0)} r_0 - \alpha_0 A r_0 \quad (C.21)$$

$$r_n = \alpha_{n-1} \left(\frac{(r_{n-1}, A r_{n-1})}{(r_{n-1}, r_{n-1})} r_{n-1} + \frac{(r_{n-2}, A r_{n-1})}{(r_{n-2}, r_{n-2})} r_{n-2} - A r_{n-1} \right) \quad (C.22)$$

ただし, $\alpha_{n-1} = -\frac{(y_n, e_n)}{h_{n,n-1}(y_{n-1}, e_{n-1})} \cdot H_n^{-1}$ は実数行列であるので, 式(C.18)により,

y_n が実数ベクトルであることが分かる。このことから, α_{n-1} が実数であることは自明である。

式(C.22)と r_n との内積をとると,

$$\alpha_{n-1} = -\frac{(r_n, r_n)}{(r_n, A r_{n-1})} = -\frac{(r_n, r_n)}{(r_{n-1}, A r_n)} \quad (C.23)$$

式(C.15)を式(C.22)に代入して整理すると,

$$r_n = \alpha_{n-1} \left(\frac{(r_{n-1}, A r_{n-1})}{(r_{n-1}, r_{n-1})} r_{n-1} + \frac{(r_{n-2}, A r_{n-1})}{(r_{n-2}, r_{n-2})} r_{n-2} \right) r_0 - A V_n \hat{y}_n \quad (C.24)$$

ただし, $\hat{y}_n \in C^n$ である。式(C.15)と上式における r_0 の係数を比較すると, a_0 と a_n は次の式で表される。

$$\alpha_0 = \frac{(r_0, r_0)}{(r_0, A r_0)} \quad (C.25)$$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{\frac{(r_n, Ar_n)}{(r_n, r_n)} + \frac{(r_{n-1}, Ar_n)}{(r_{n-1}, r_{n-1})}} \\ &= \frac{1}{\frac{(r_n, Ar_n)}{(r_n, r_n)} + \frac{1}{\alpha_{n-1}} \frac{(r_n, r_n)}{(r_{n-1}, r_{n-1})}}\end{aligned}\tag{C.26}$$

ここで、次のように補助ベクトル p_{n-1} を導入する。

$$p_{n-1} = \frac{z_n - z_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \in K_n(A; r_0)\tag{C.27}$$

式(C.10)により、残差 r_n は、直前の残差 r_{n-1} と補助ベクトル p_{n-1} を使って、

$$\begin{aligned}r_n &= r_0 - Az_n \\ &= r_0 - Az_{n-1} - \alpha_{n-1} Ap_{n-1} \\ &= r_{n-1} - \alpha_{n-1} Ap_{n-1}\end{aligned}\tag{C.28}$$

と表せる。これを式(C.24)に代入し、式(C.26)を用いて整理すると、補助ベクトル p_n に関する漸化式

$$p_n = r_n + \beta_{n-1} p_{n-1}\tag{C.29}$$

が得られる。ただし、 β_{n-1} は

$$\beta_{n-1} = \frac{(r_n, r_n)}{(r_{n-1}, r_{n-1})}\tag{C.30}$$

とする。

一方、パラメーター α_{n-1} は補助ベクトル p_{n-1} を用いて次のように求められる。式(C.12)と式(C.27)により、残差 r_n は補助ベクトルと直交する。したがって、式(C.28)により、 α_{n-1} の計算式は次のように表せる。

$$\alpha_{n-1} = \frac{(p_{n-1}, r_{n-1})}{(p_{n-1}, Ap_{n-1})}\tag{C.31}$$

また、式(C.29)から、 $(p_n, r_n) = (r_n, r_n)$ が成り立つことが分かり、 α_{n-1} の計算式は次のようにも書ける。

$$\alpha_{n-1} = \frac{(r_{n-1}, r_{n-1})}{(p_{n-1}, Ap_{n-1})}\tag{C.32}$$

今まで求めた α_{n-1} と β_{n-1} を使うと、残差 r_n に関する3項漸化式が次のように得られる。

$$r_1 = r_0 - \alpha_0 A r_0 \quad (C.33)$$

$$r_n = \left(1 + \frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}} \alpha_{n-1} \right) r_{n-1} - \alpha_{n-1} A r_{n-1} - \frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}} \alpha_{n-1} r_{n-2} \quad n=2,3,\dots \quad (C.34)$$

また、式(C.27)により、近似解 x_n は次の漸化式で計算できる。

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + z_n \\ &= x_0 + z_{n-1} + \alpha_{n-1} p_{n-1} \\ &= x_{n-1} + \alpha_{n-1} p_{n-1} \end{aligned} \quad (C.35)$$

以上をまとめると、正値対称行列 A を係数にもつ連立 1 次方程式の解を求める CG 法のアルゴリズムが次のように得られる。

CG 法アルゴリズム

(1) 初期設定

$$r_0 = b - A x_0 ; \quad (x_0 \text{ は任意の初期ベクトル}) , \quad P_0 = r_0$$

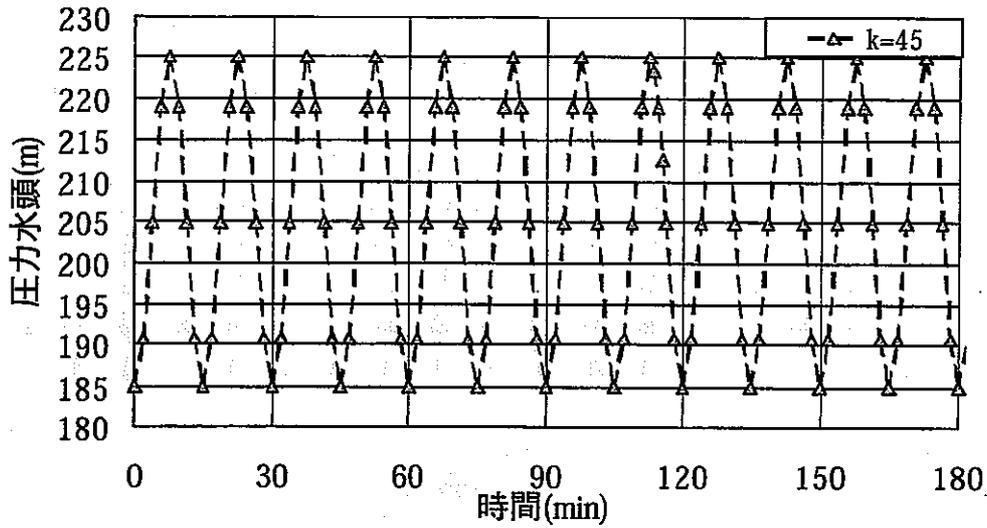
(2) 反復計算

$$\begin{aligned} p_n &= r_n + \beta_{n-1} p_{n-1} \\ \alpha_k &= \frac{(r_n, r_k)}{(p_n, A p_n)} \\ x_{n+1} &= x_n + \alpha_n p_n \\ r_{n+1} &= r_n - \alpha_n A p_n \\ \beta_k &= -\frac{(r_{n+1}, r_{n+1})}{(r_n, r_n)} \end{aligned}$$

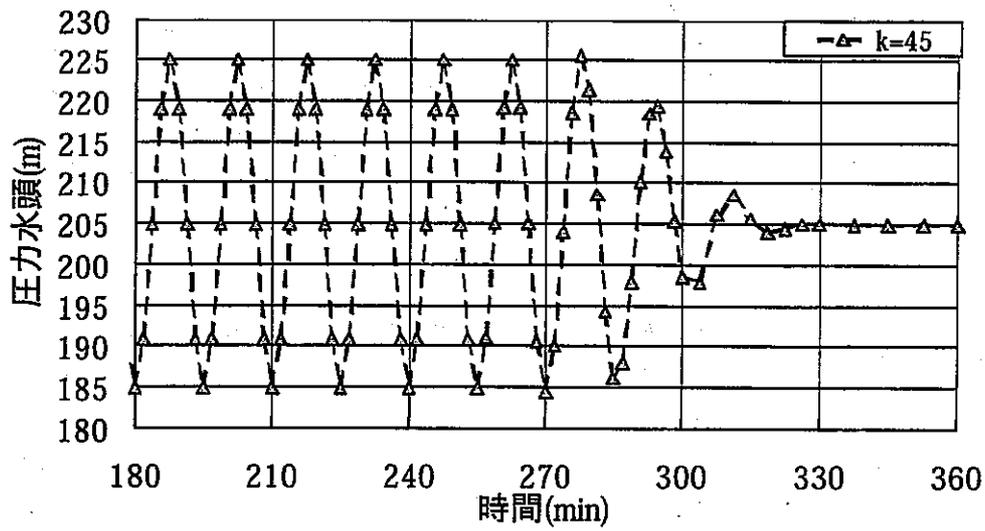
この反復を $p_n=0$ となるまで繰り返すことによって $r_n=0$ となり、 x_n が厳密解として求められる。理論的には n 回の反復によって必ず $p_n=0$ となるはずであるが、現実には計算誤差のためそうはならない。そこで具体的には、ある許容誤差 ε を定めておいて収束の判定を行う。つまり

$$\|r_n\| \leq \varepsilon \|b\| \quad \rightarrow \quad \text{end}$$

といった判定を行う。また、実際問題では n 回よりもずっと少ない回数で十分な精度の解が得られることも多い。



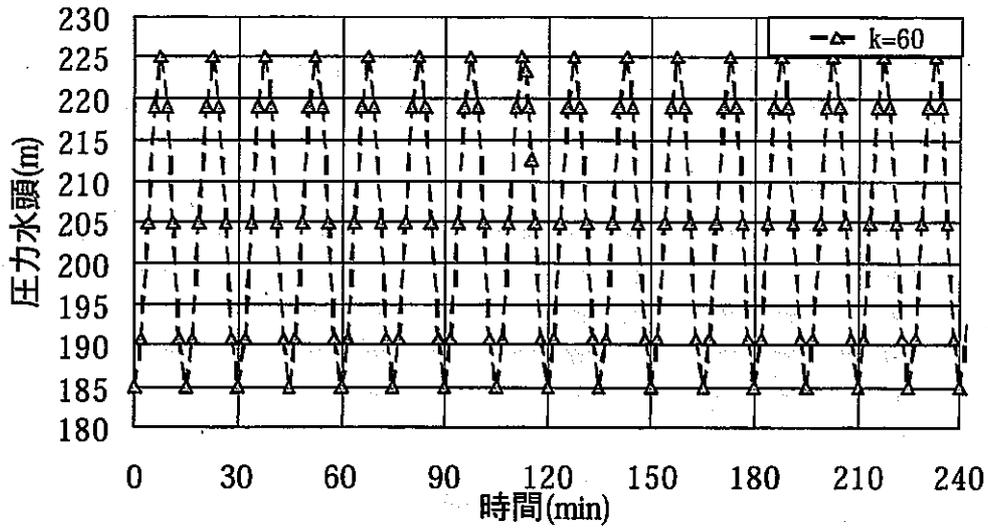
(a) 時間 $t=0 \sim 180$ (min) まで



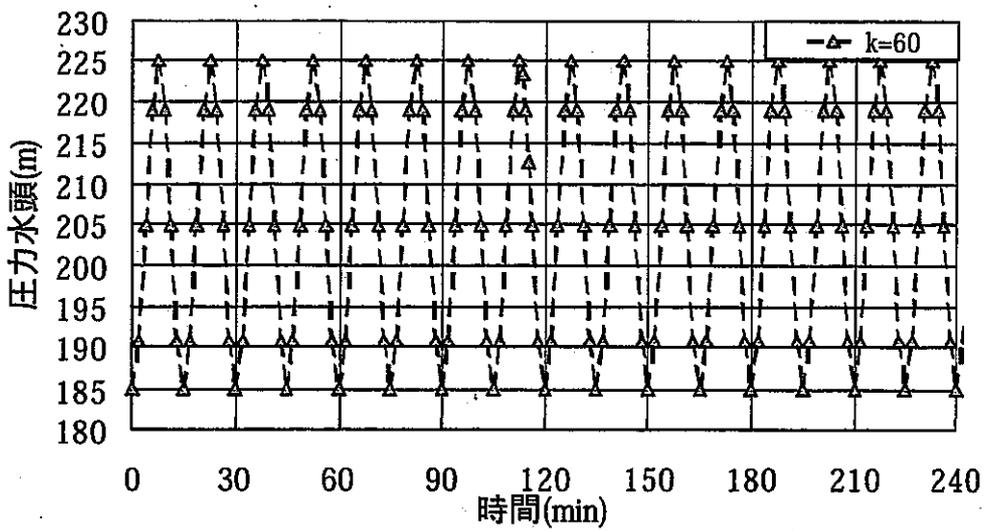
(b) 時間 $t=180$ (min) ~ 360 (min) まで

付図-4.1 加圧点における圧力水頭の変化

(細野の方法, 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $k=45$)



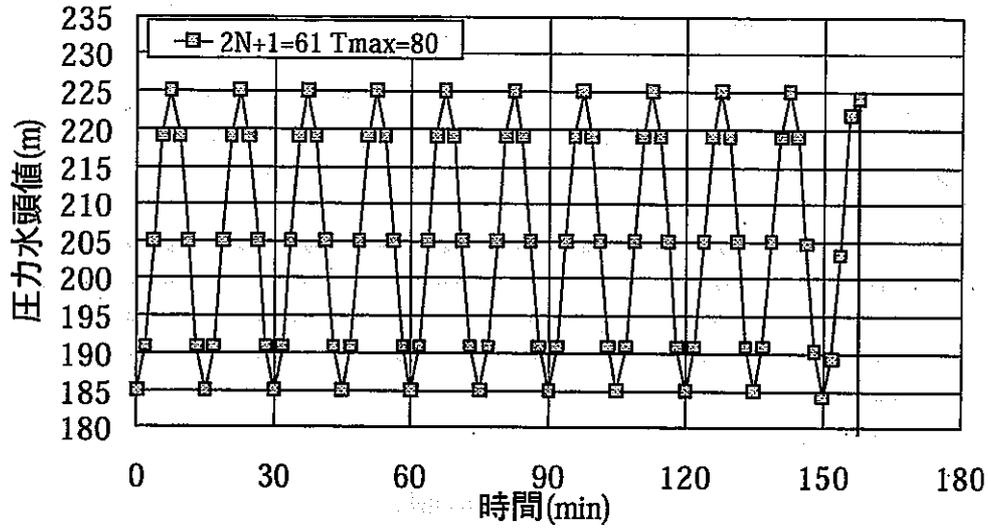
(a) 時間 $t=0\sim 240$ (min) まで



(b) 時間 $t=240$ (min) ~ 480 (min) まで

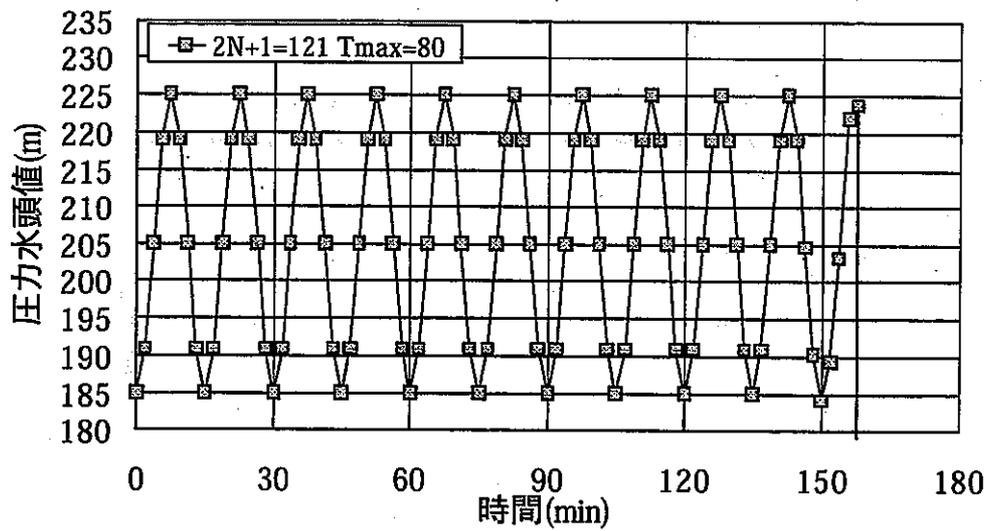
付図-4.2 加圧点における圧力水頭の変化

(細野の方法, 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $k=60$)



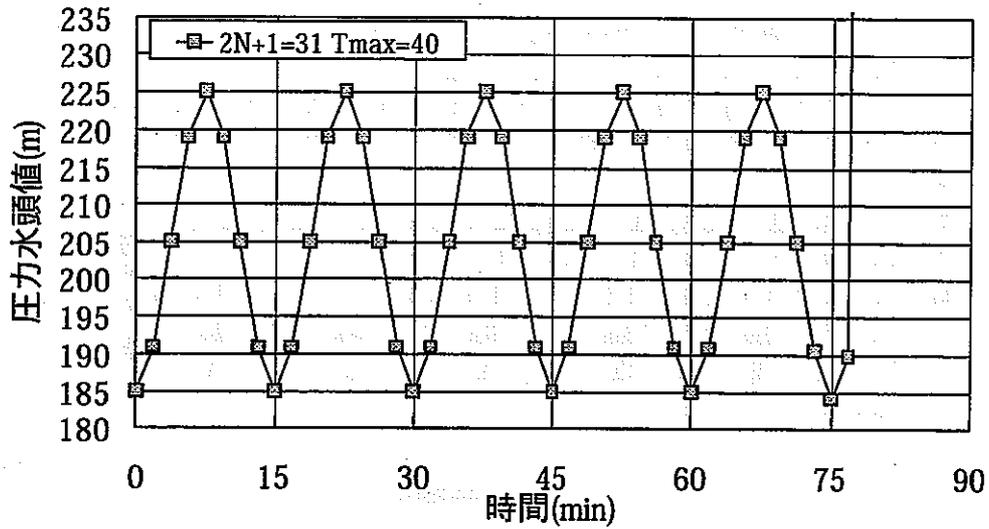
付図-4.3 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=91$, $T_{max}=80$)



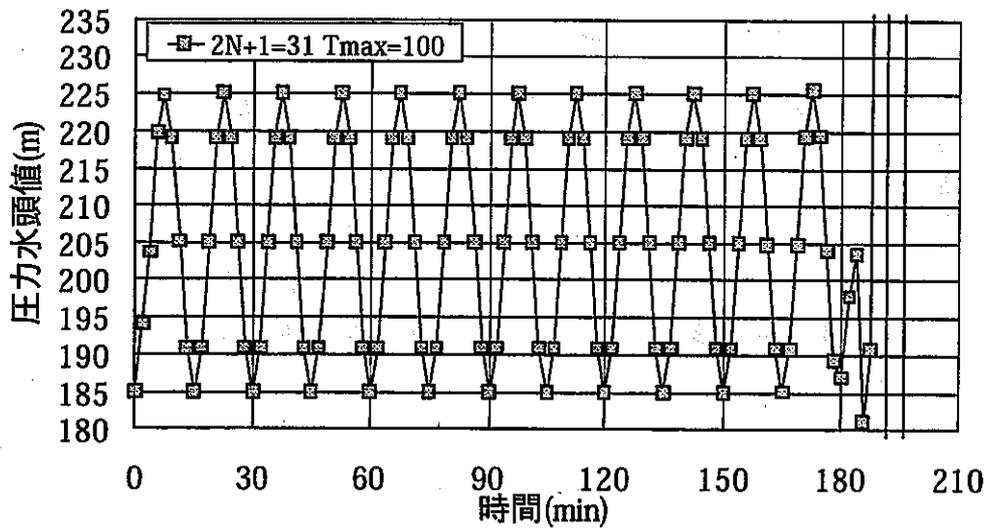
付図-4.4 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=121$, $T_{max}=80$)



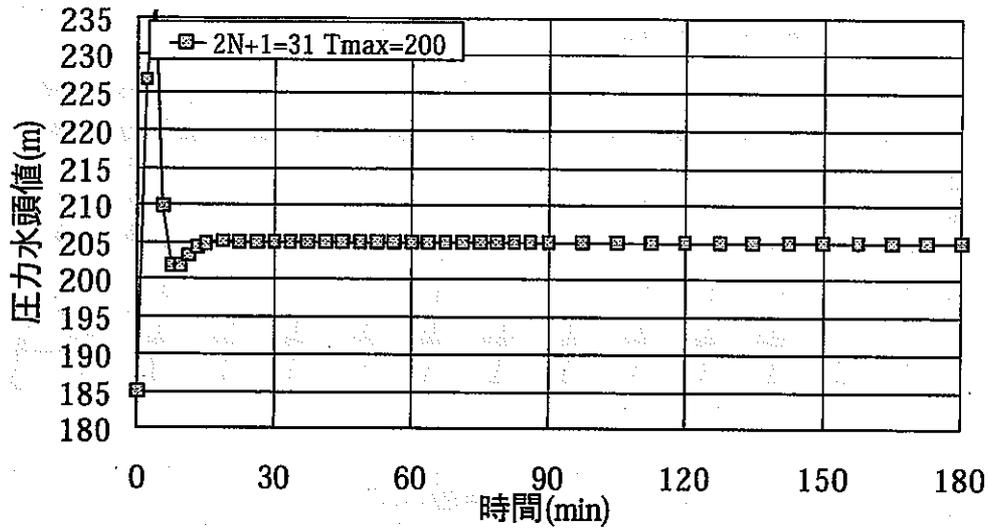
付図-4.5 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{max}=40$)



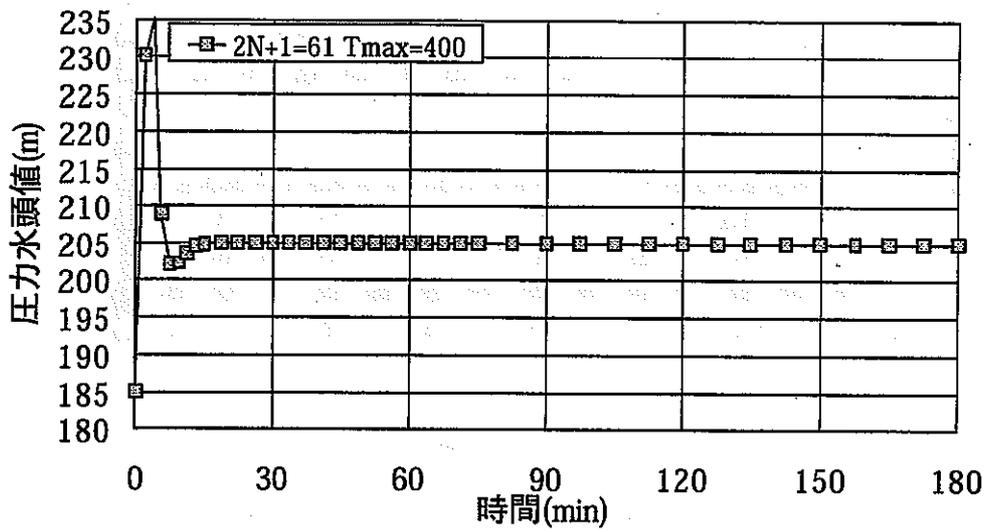
付図-4.6 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{max}=100$)



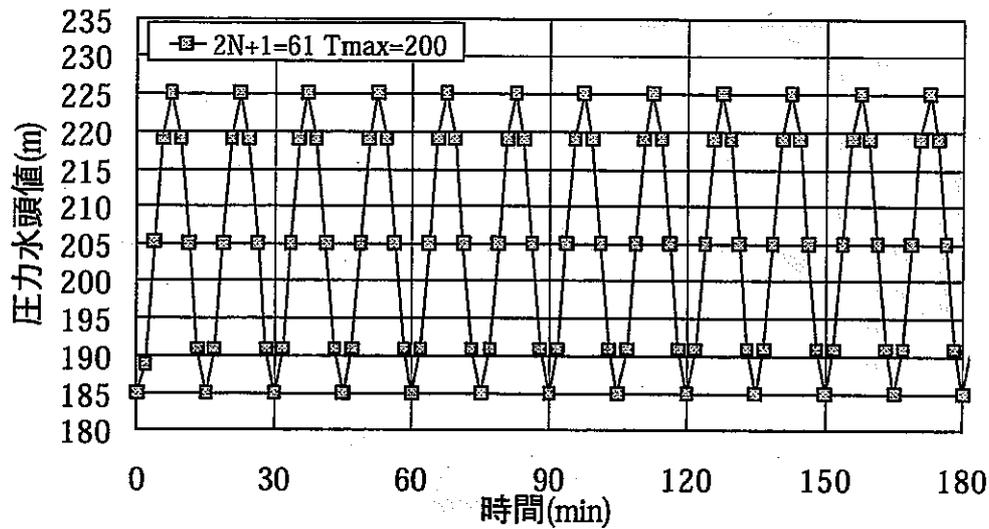
付図-4.7 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{max}=200$)

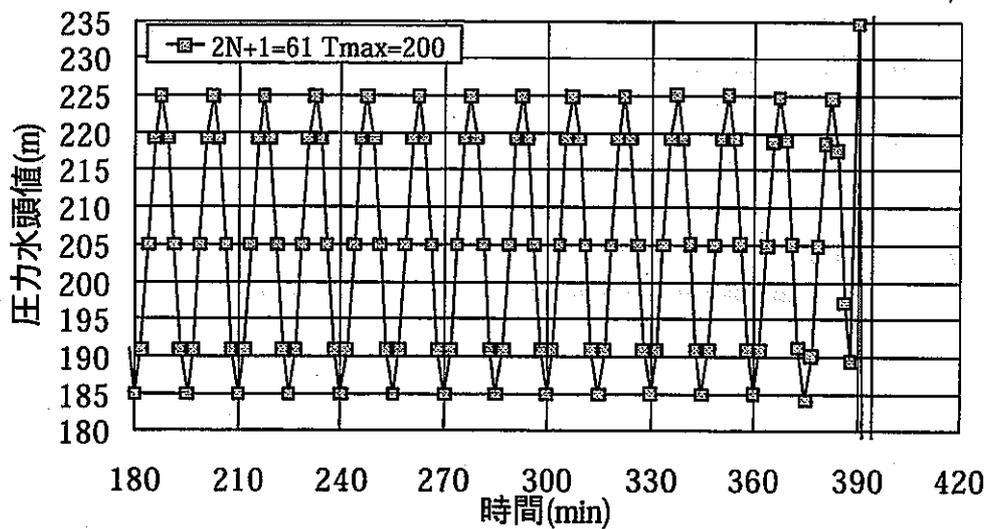


付図-4.8 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=61$, $T_{max}=400$)



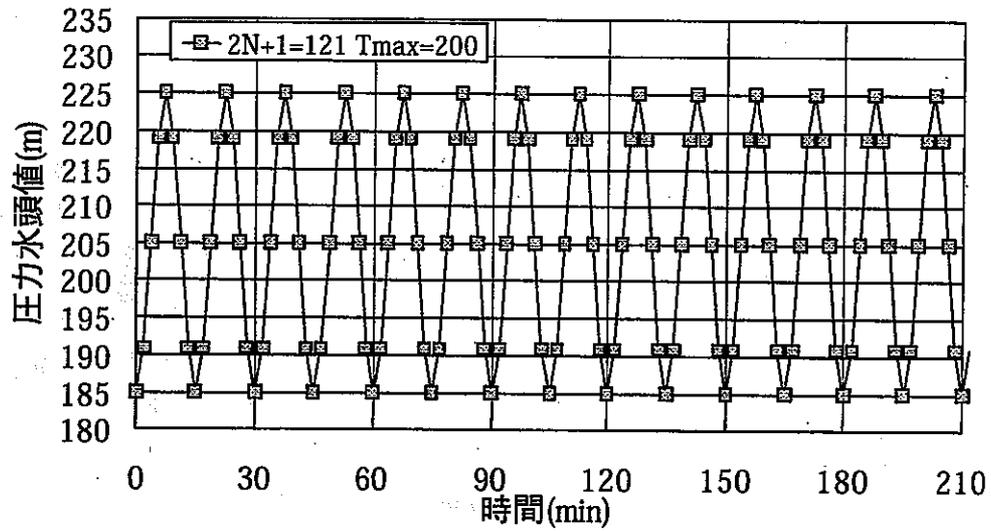
(a) 時間 $t=0(\text{min})\sim 180(\text{min})$ まで



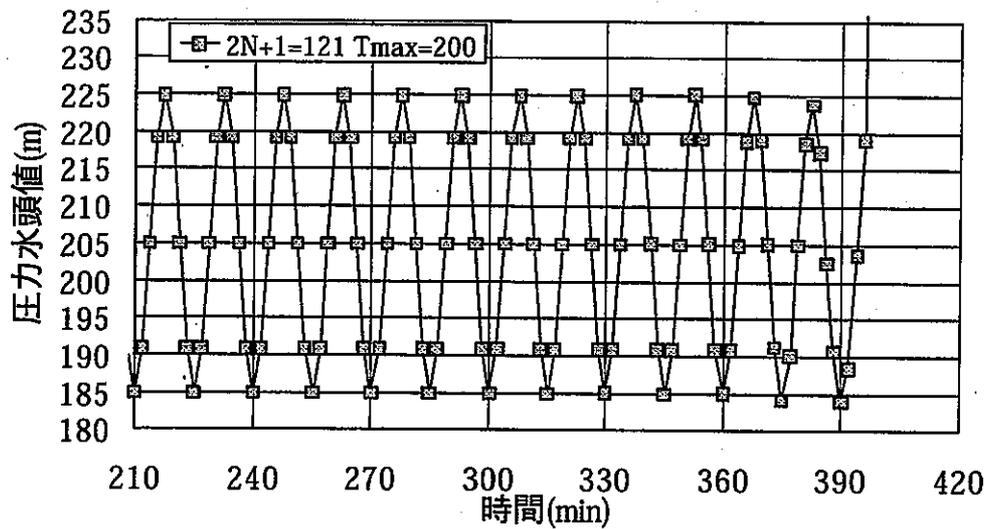
(b) 時間 $t=180(\text{min})\sim 420(\text{min})$ まで

付図-4.9 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=61$, $T_{max}=200$)



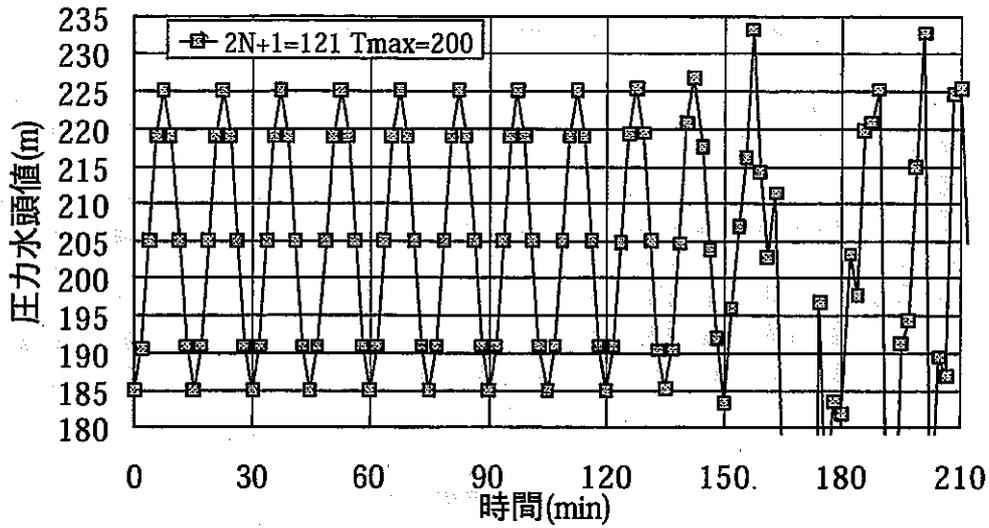
(a) 時間 $t=0$ (min) ~ 210 (min) まで



(b) 時間 $t=210$ (min) ~ 420 (min) まで

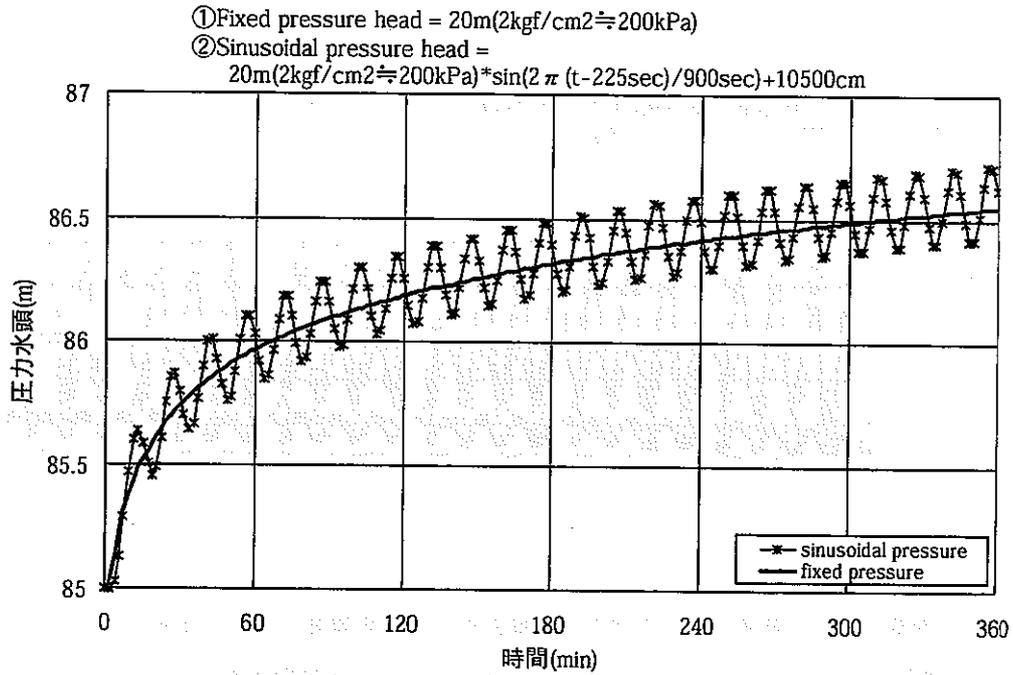
付図-4.10 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法 (ODA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=121$, $T_{max}=200$)

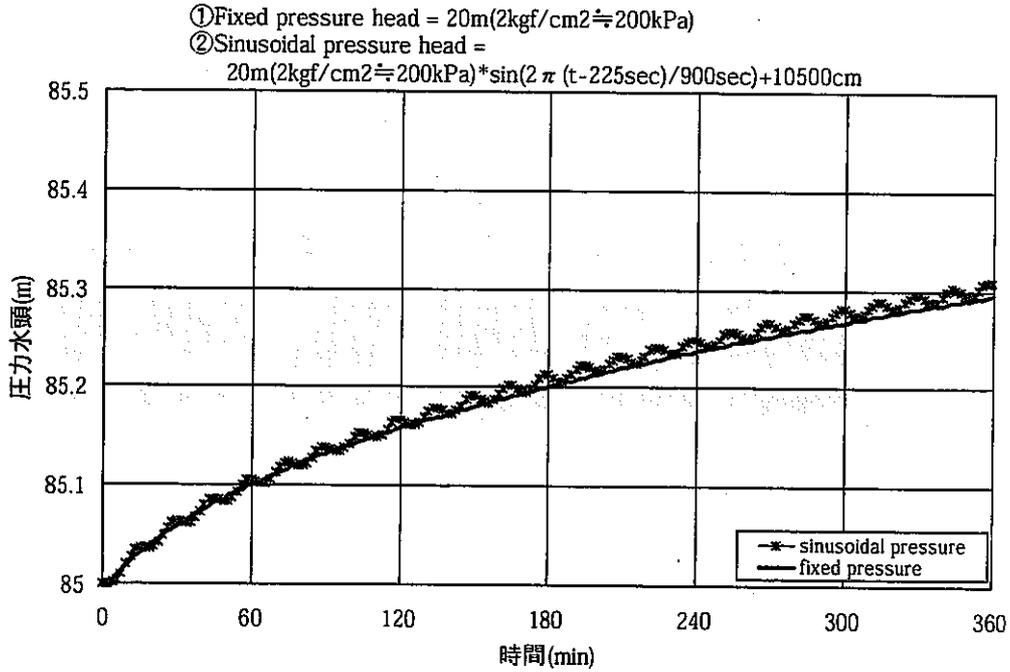


付図-4.11 加圧点における圧力水頭の変化

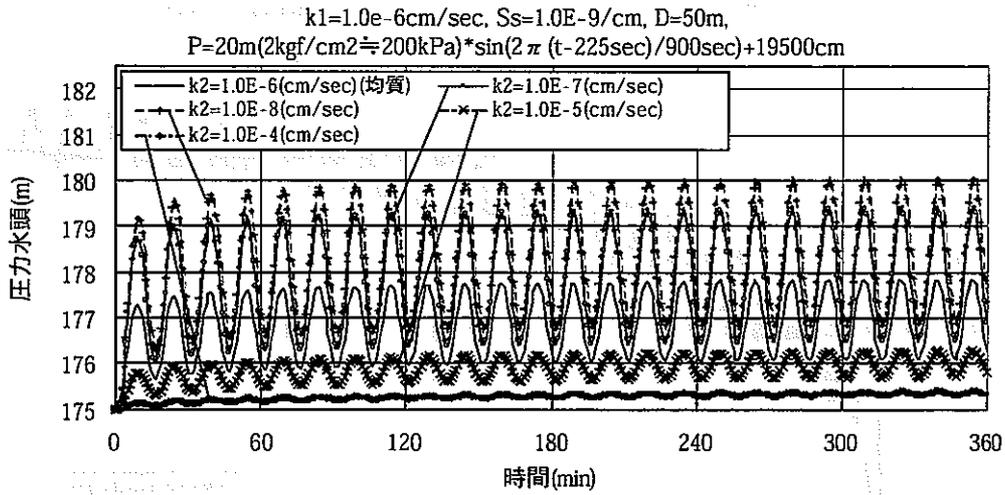
(Crump 改良法(QDA), 1 周期 15 分, 打ち切り級数 $2N+1=121$, $T_{max}=400$)



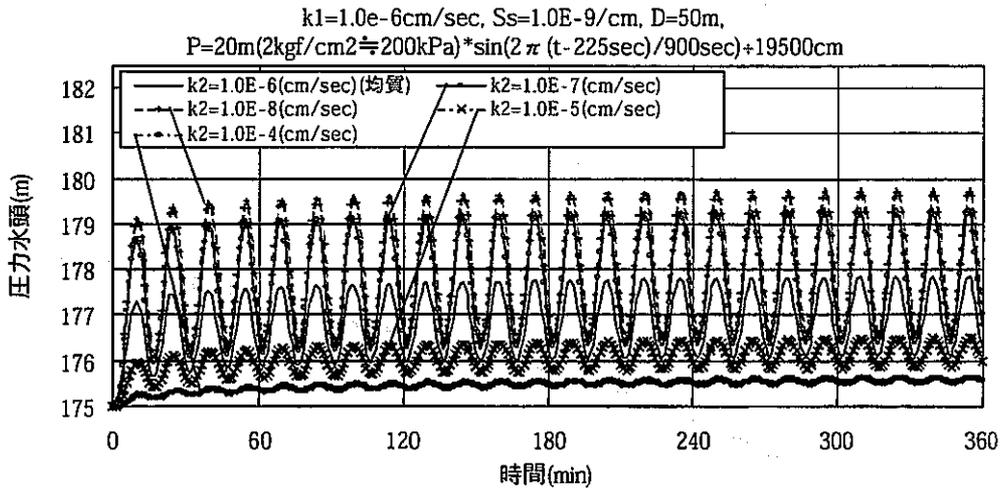
付図-6.1 観測点における圧力水頭の変化(均質モデル, 加圧点から10m)



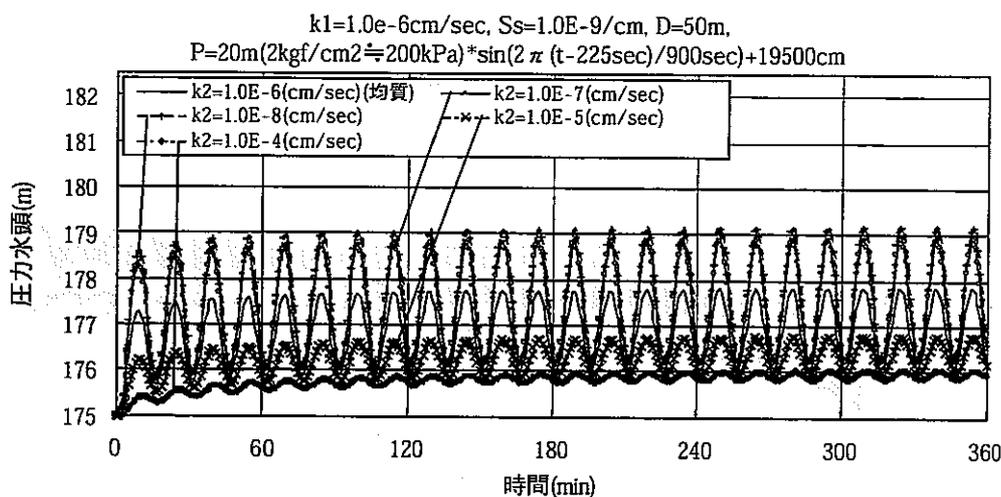
付図-6.2 観測点における圧力水頭の変化
 (不均質モデル, 加圧点から不均質部側に10m)



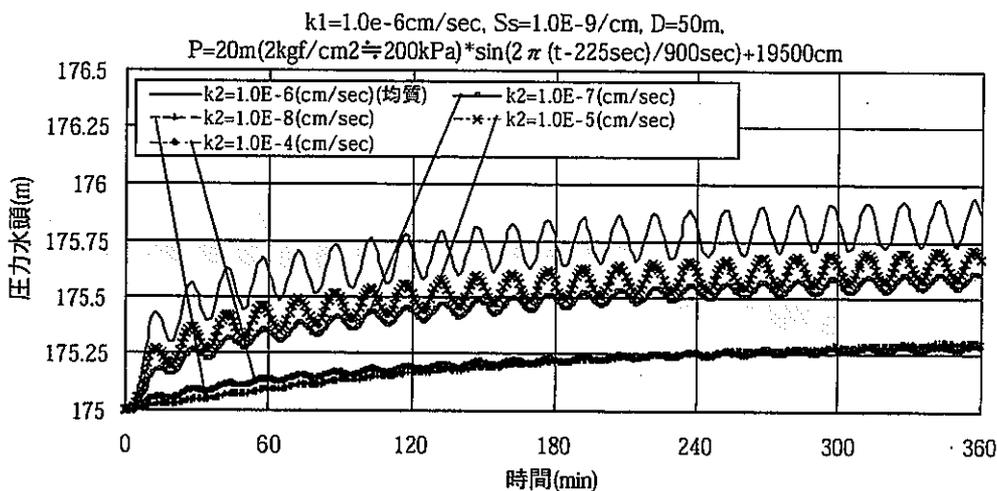
付図-6.3 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の4m地点)
 (不均質モデル1.2(長さ200m,幅2m,高さ30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



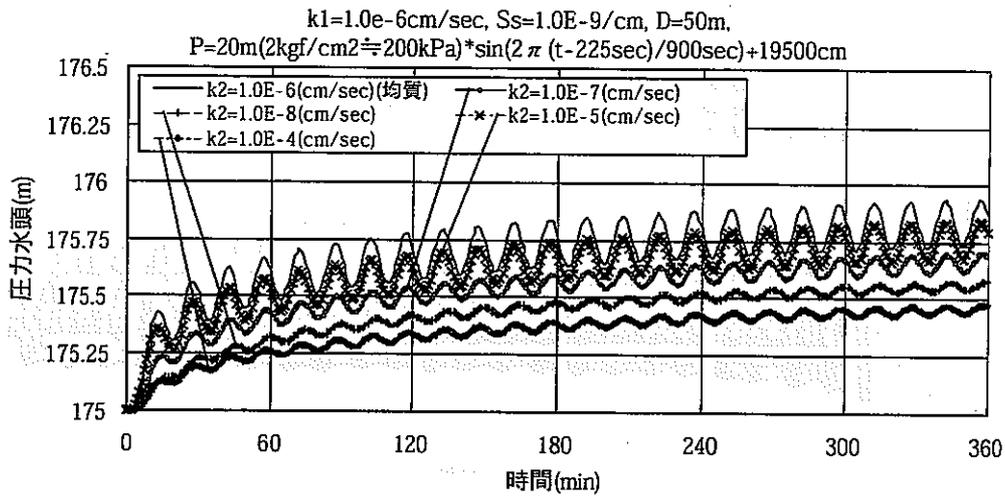
付図-6.4 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の4m地点)
 (不均質モデル1.3(長さ200m,幅2m,高さ10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



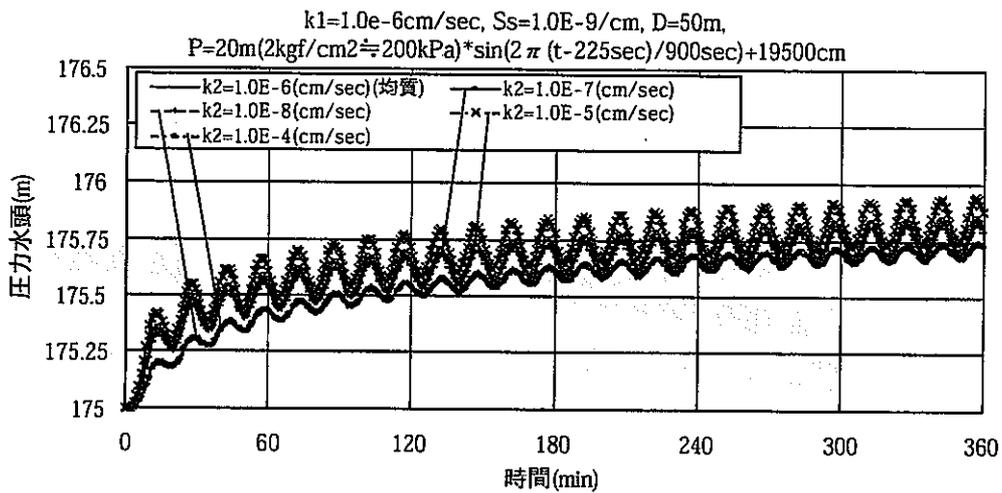
付図-6.5 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の4m地点)
 (不均質モデル1.4(長さ4m,幅2m,高さ50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



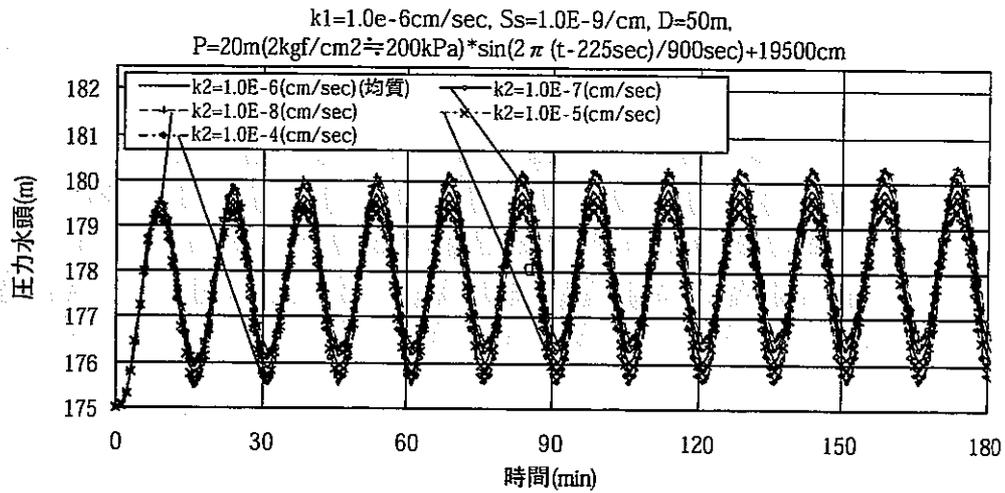
付図-6.6 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル1.2(長さ200m,幅2m,高さ30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



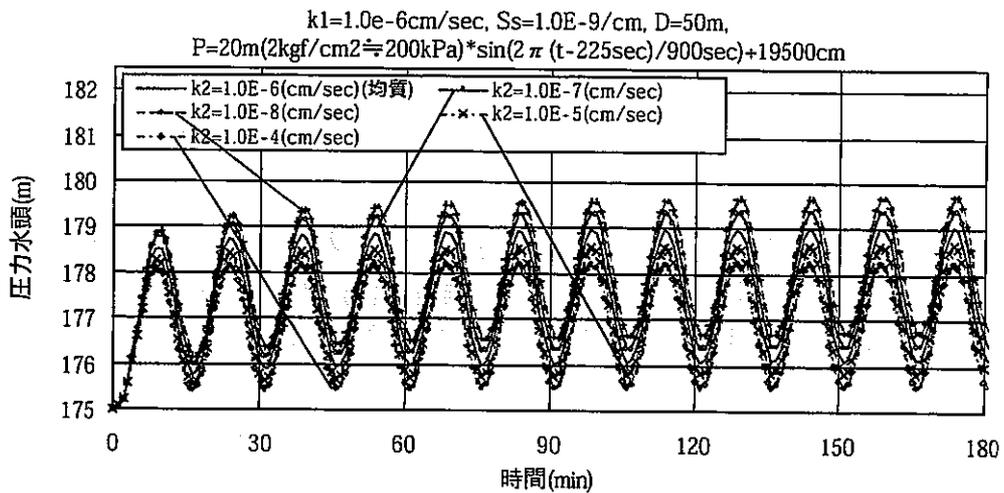
付図-6.7 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル1.3(長さ200m,幅2m,高さ10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



付図-6.8 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル1.4(長さ4m,幅2m,高さ50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

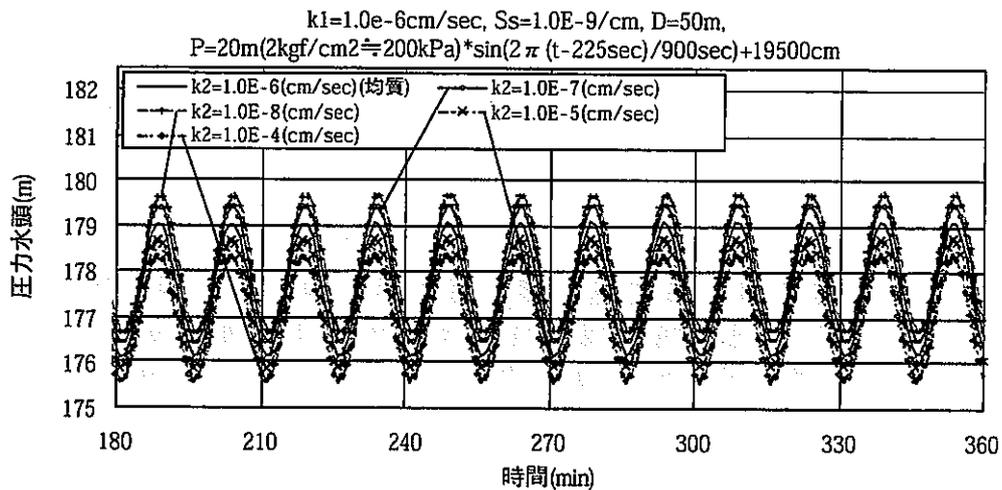
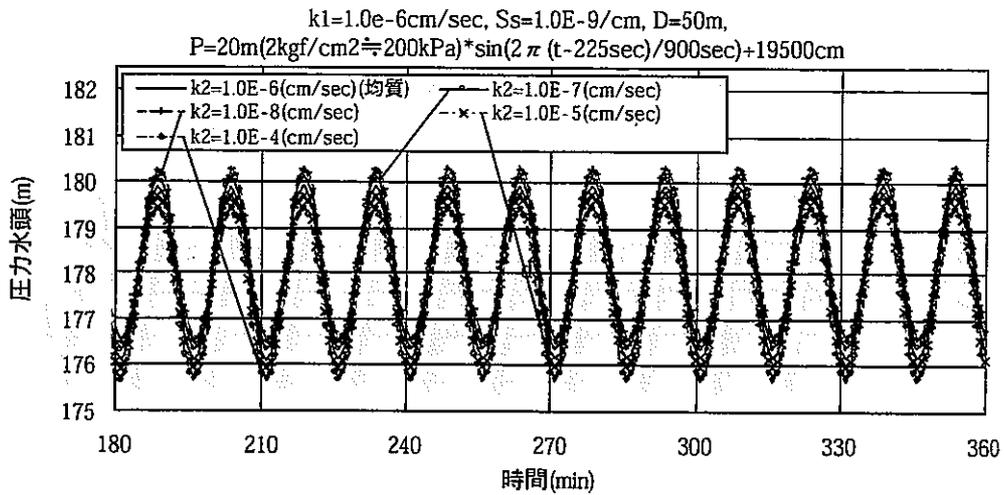


(a) 不均質部に対して垂直方向

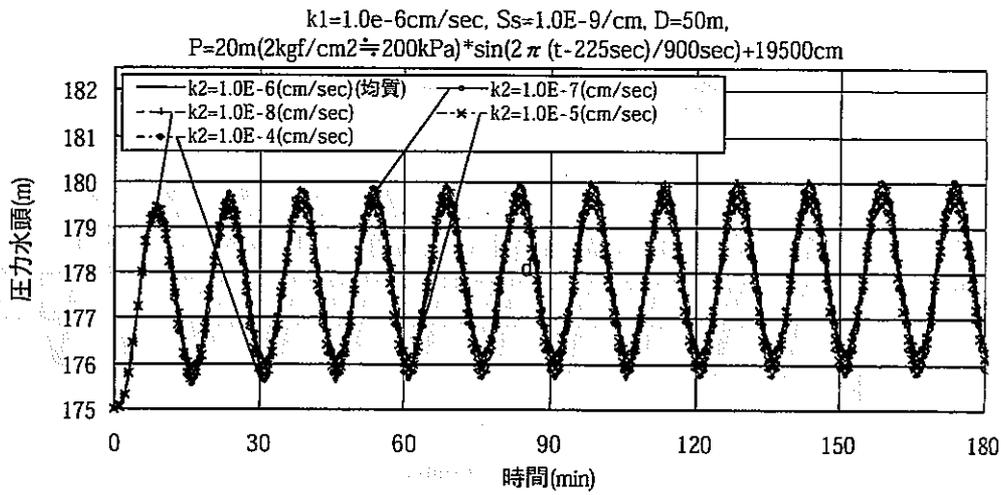


(b) 不均質部に対して平行

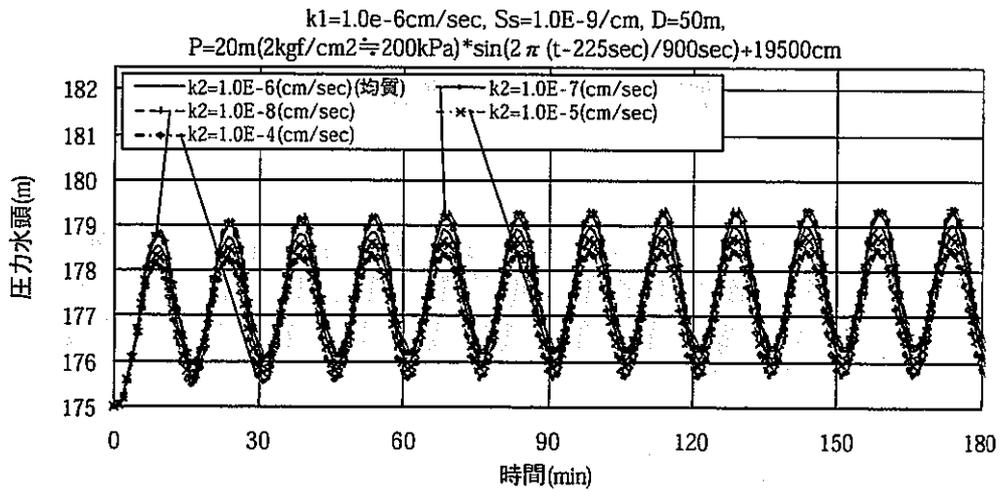
付図-6.9 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の2m地点)
 (不均質モデル1.1(長さ200m,幅2m,高さ50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)



付図-6.10 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の2m地点)
 (不均質モデル1.2(長さ200m,幅2m,高さ30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)

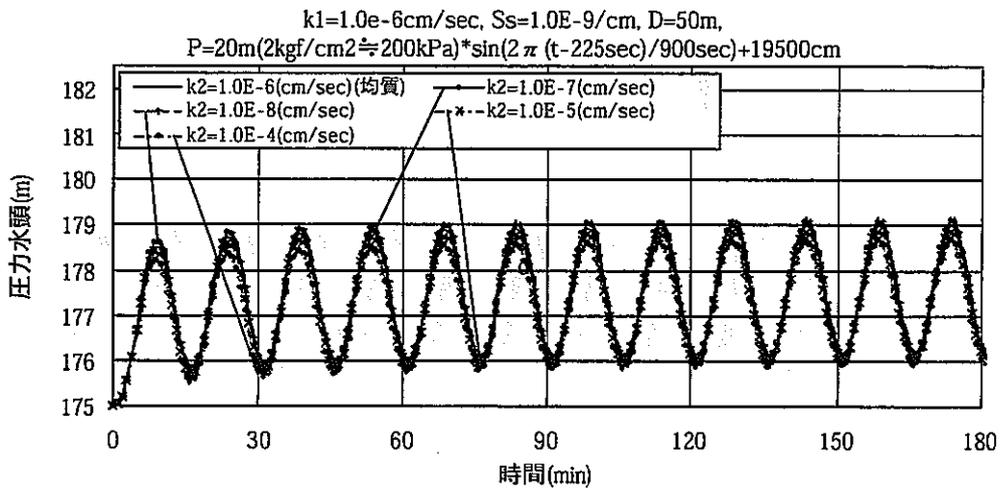
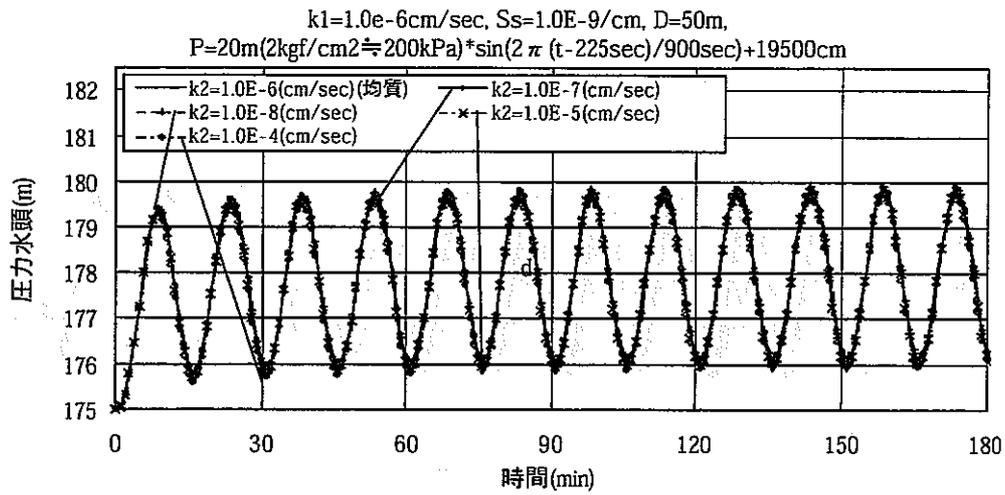


(a) 不均質部に対して垂直方向

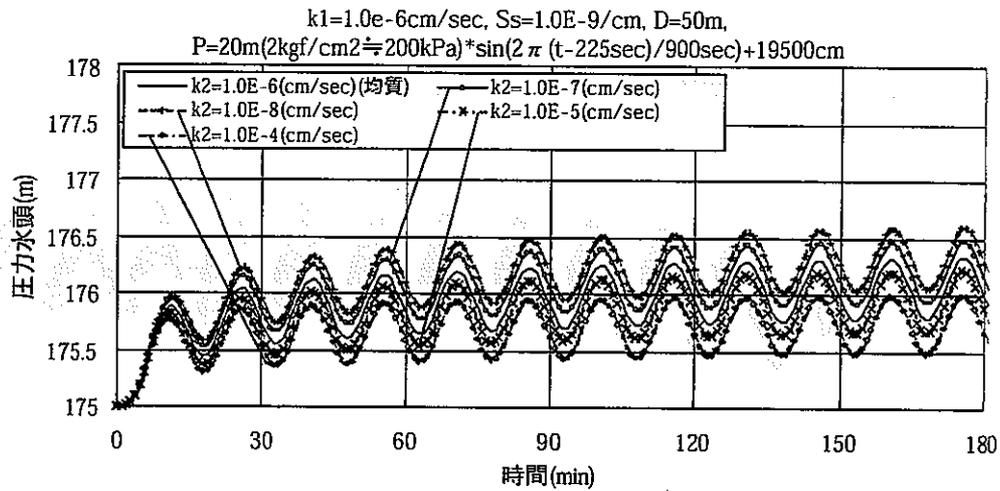


(b) 不均質部に対して平行

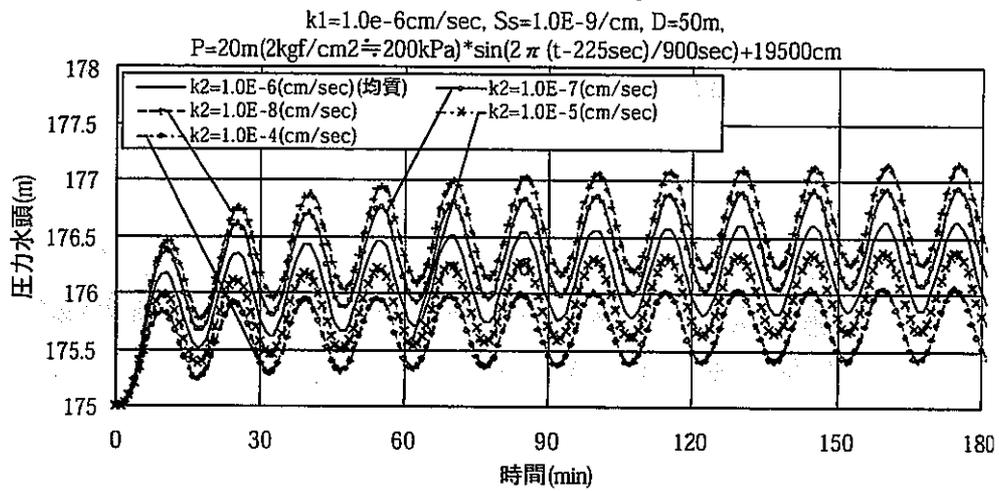
付図-6.11 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の2m地点)
 (不均質モデル1.3(長さ200m,幅2m,高さ10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)



付図-6.12 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の2m地点)
 (不均質モデル1.4(長さ4m,幅2m,高さ50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)

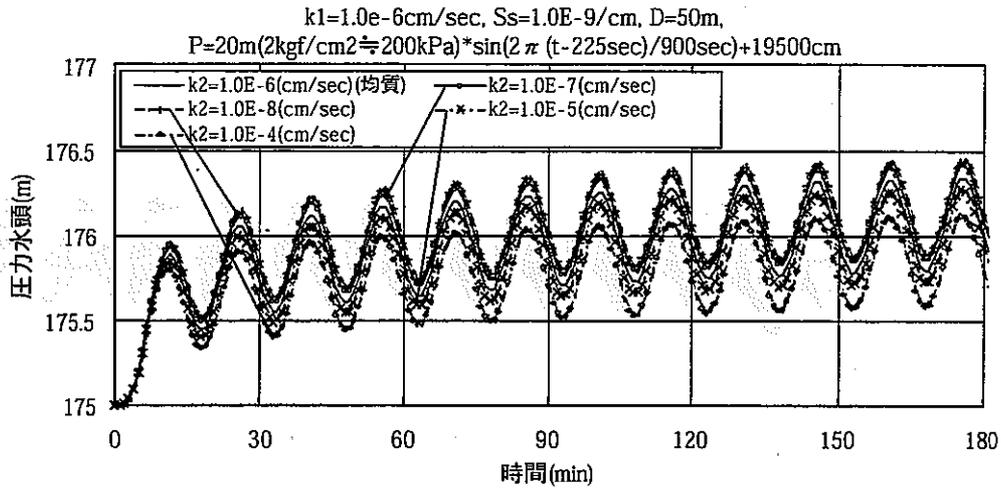


(a) 不均質部に対して垂直方向

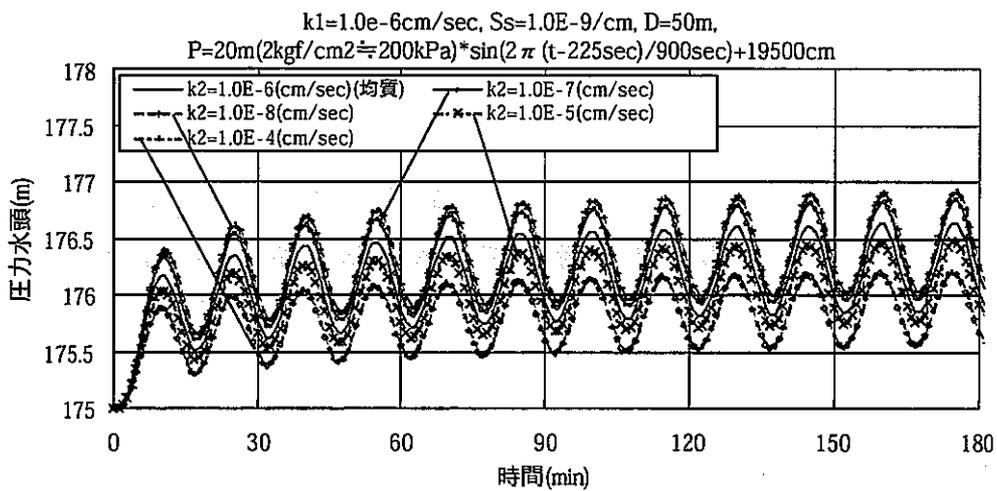


(b) 不均質部に対して平行

付図-6.13 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の6m地点)
 (不均質モデル1.2(長さ200m,幅2m,高さ30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (圖中参照),
 180minまで)

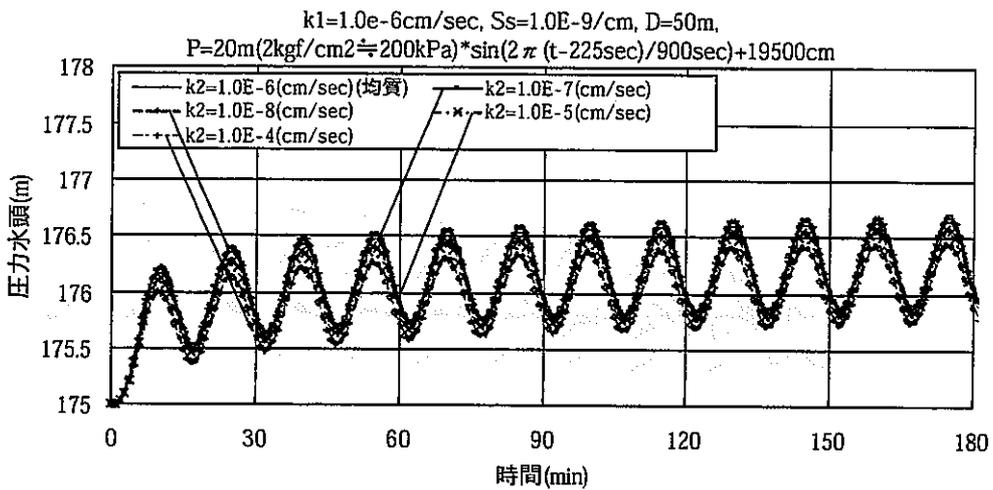
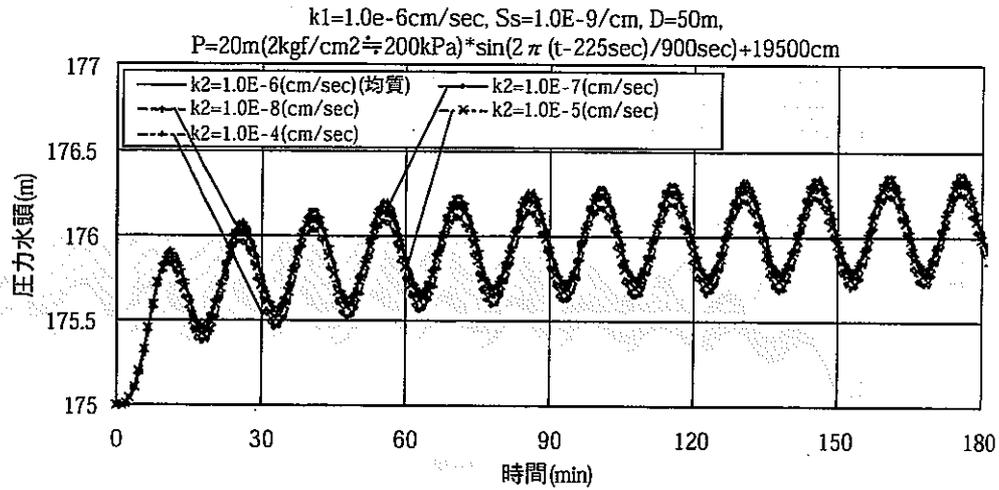


(a) 不均質部に対して垂直方向

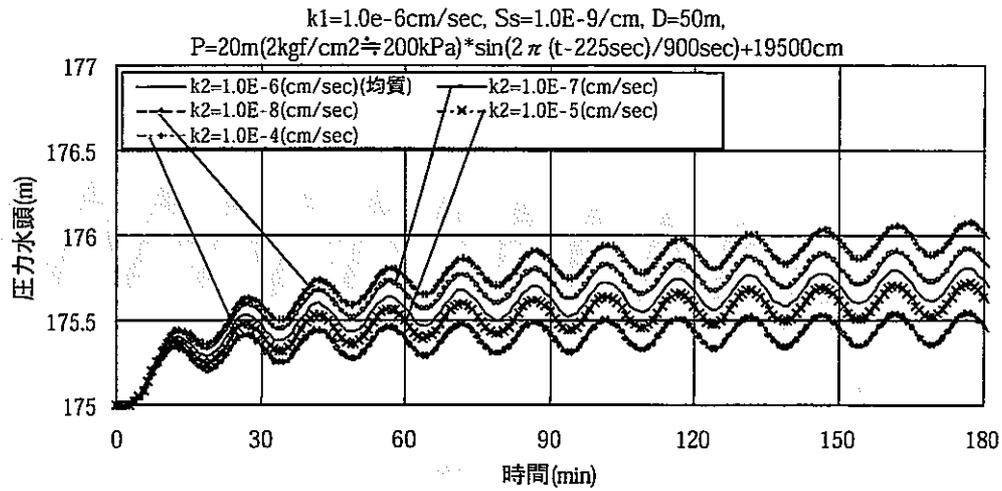


(b) 不均質部に対して平行

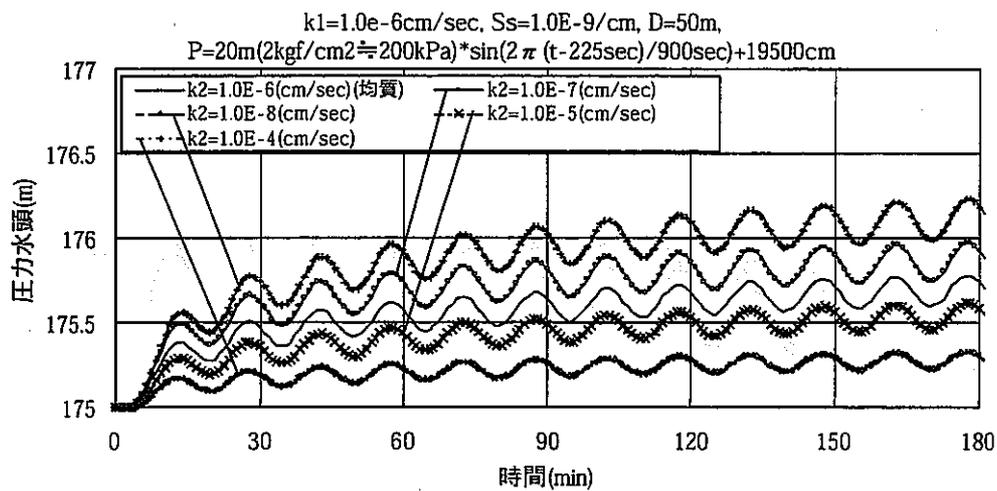
付図-6.14 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の6m地点)
 (不均質モデル1.3(長さ200m,幅2m,高さ10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)



付図-6.15 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の6m地点)
 (不均質モデル1.4(長さ4m,幅2m,高さ50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)

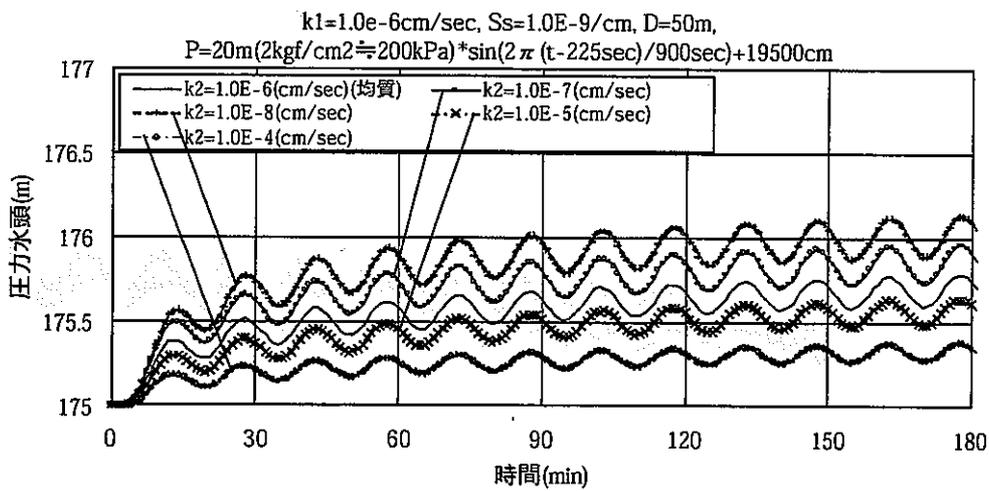
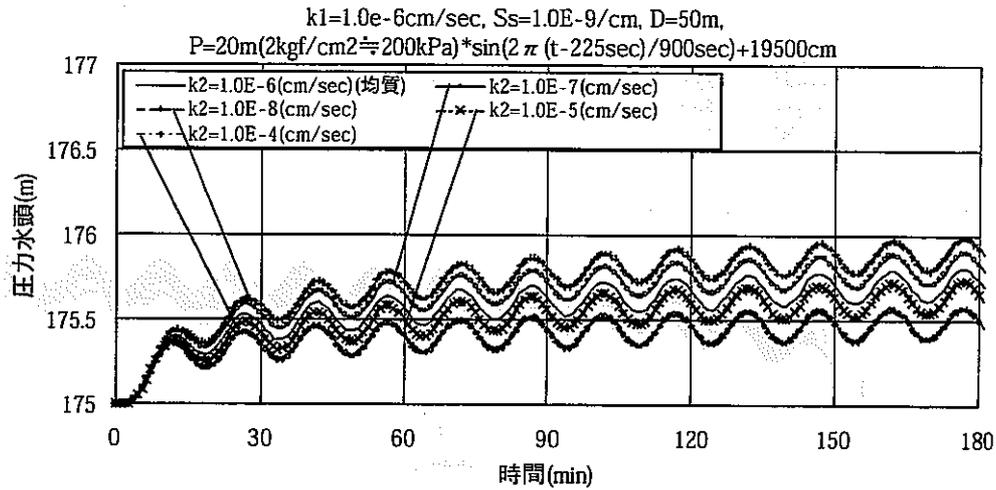


(a) 不均質部に対して垂直方向

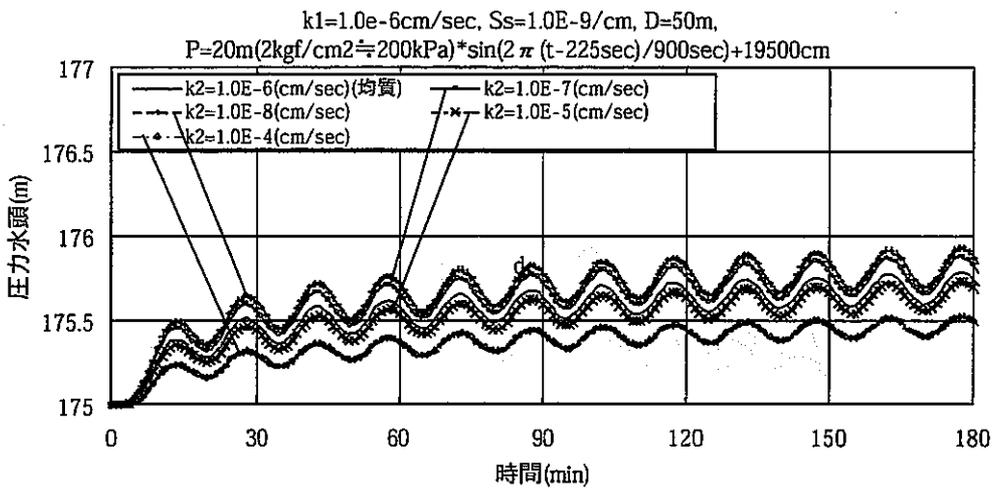
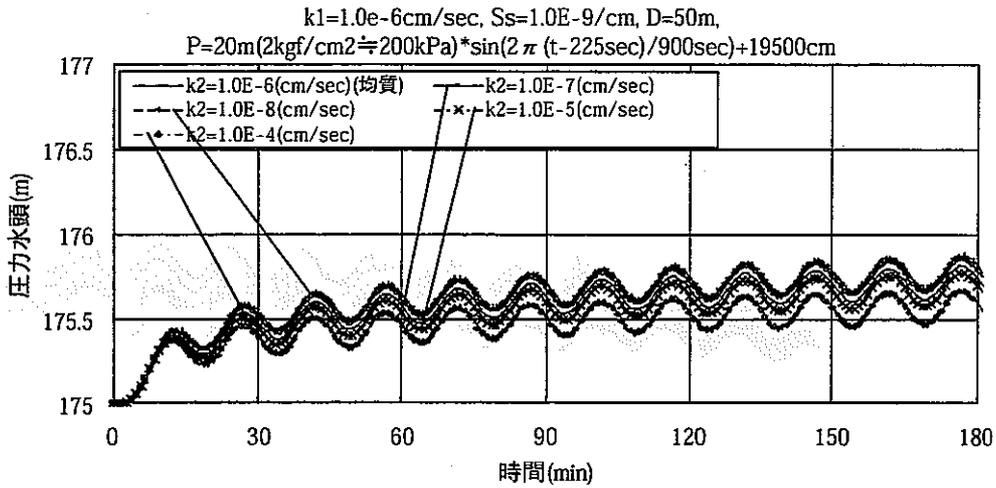


(b) 不均質部に対して平行

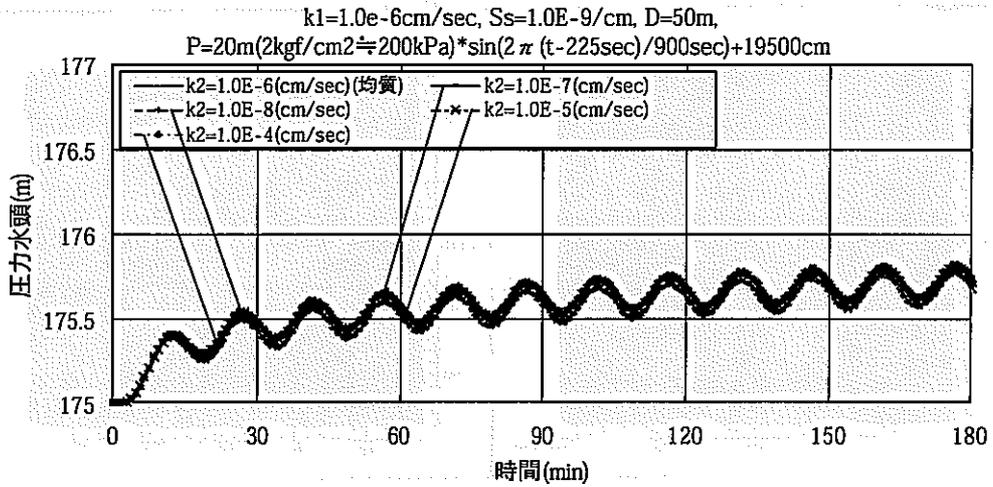
付図-6.16 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデルI.1(長さ200m,幅2m,高さ50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)



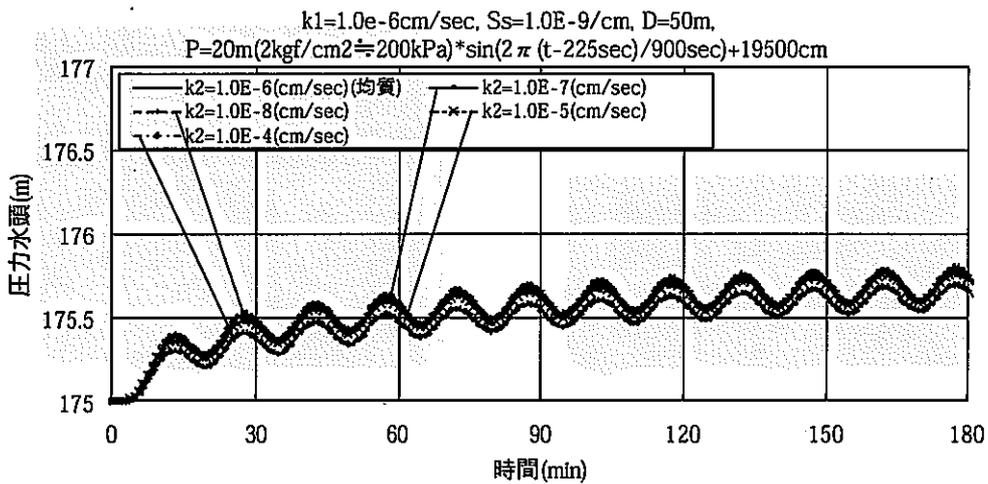
付図-6.17 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル1.2(長さ200m,幅2m,高さ30m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)



付図-6.18 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル1.3(長さ200m,幅2m,高さ10m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)

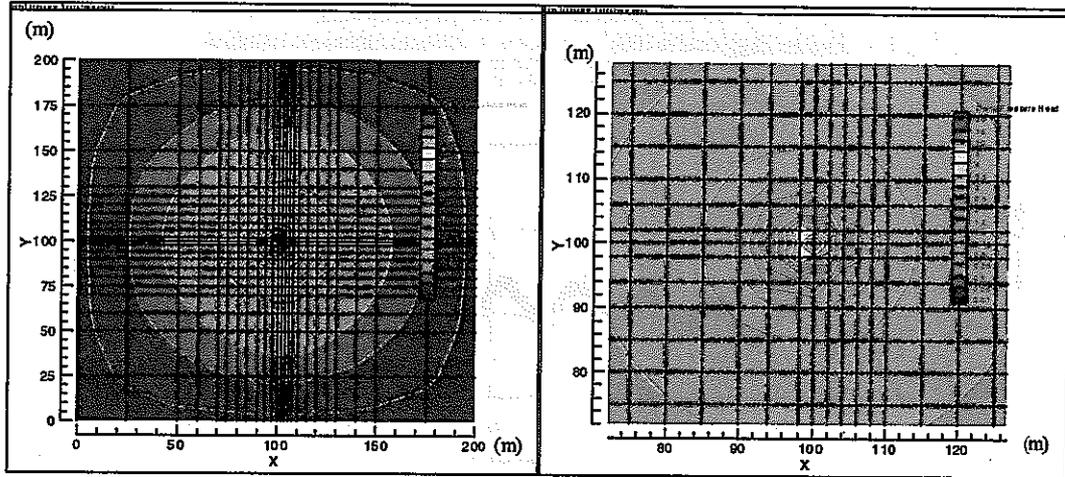


(a) 不均質部に対して垂直方向

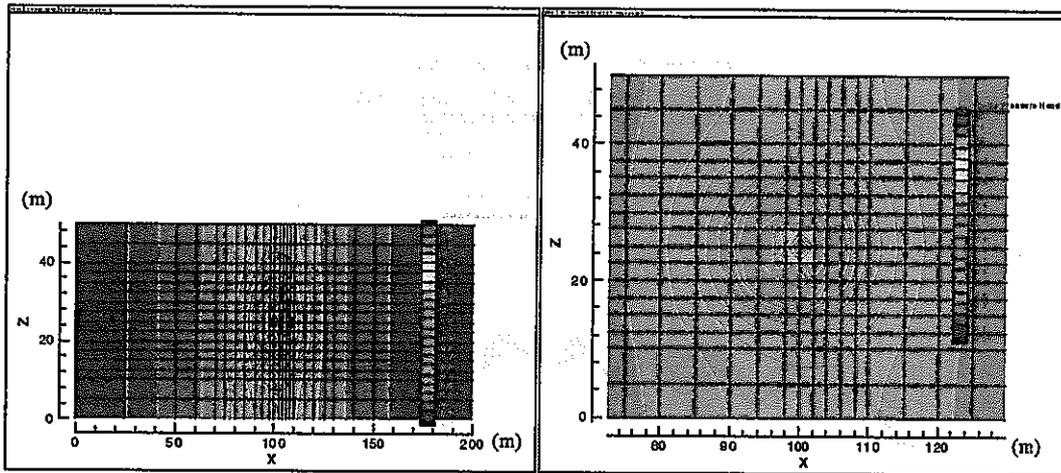


(b) 不均質部に対して平行

付図-6.19 応答水圧の時間変化(加圧点から不均質部が存在する側の10m地点)
 (不均質モデル1.4(長さ4m,幅2m,高さ50m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$,不均質部の透水係数は k_2 (図中参照),
 180minまで)



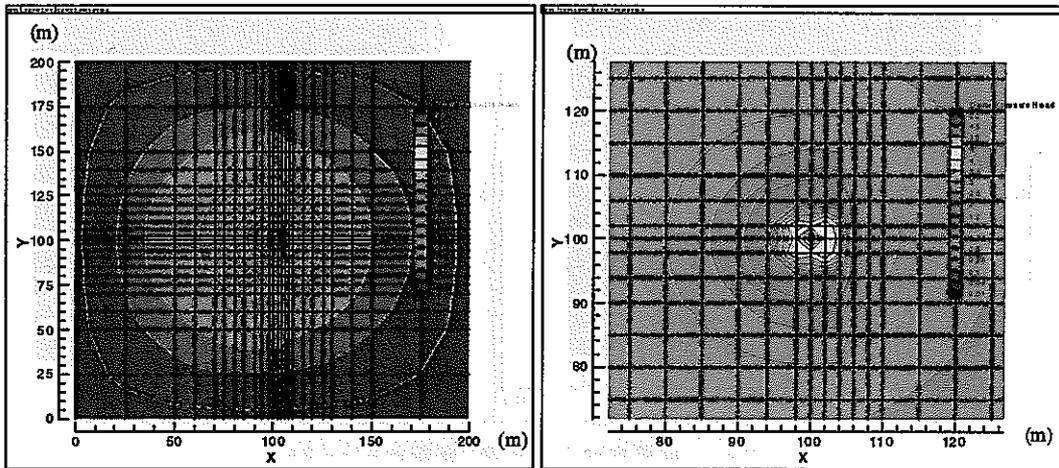
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



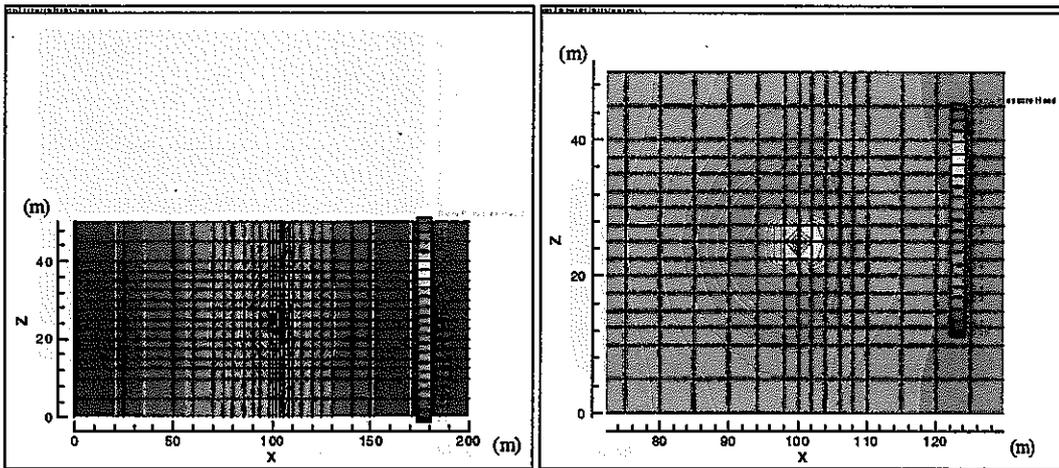
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.20 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.1 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-5(\text{cm}/\text{sec})$)



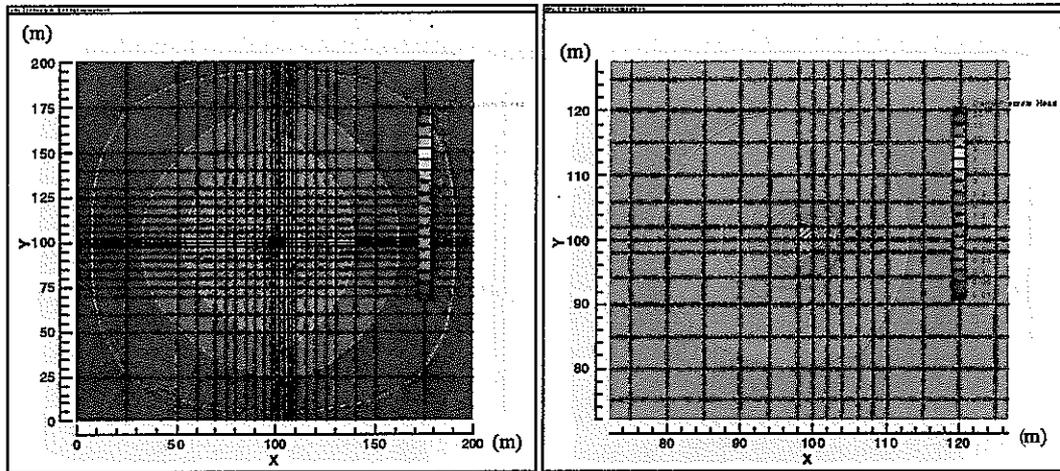
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



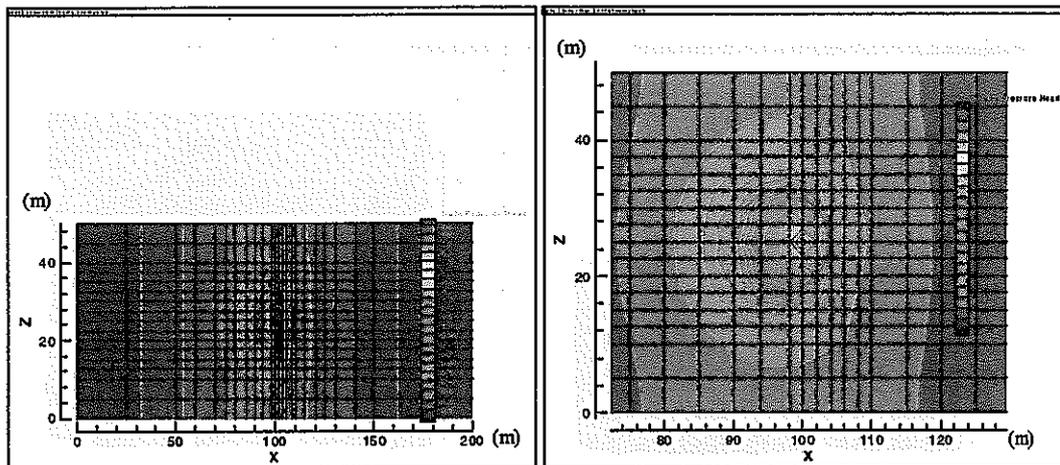
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.21 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.1 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-7(\text{cm}/\text{sec})$)



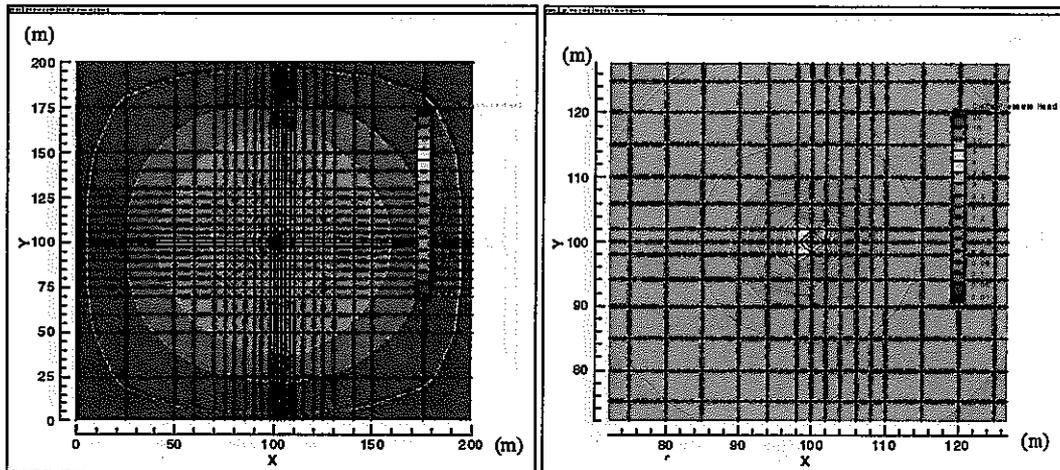
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



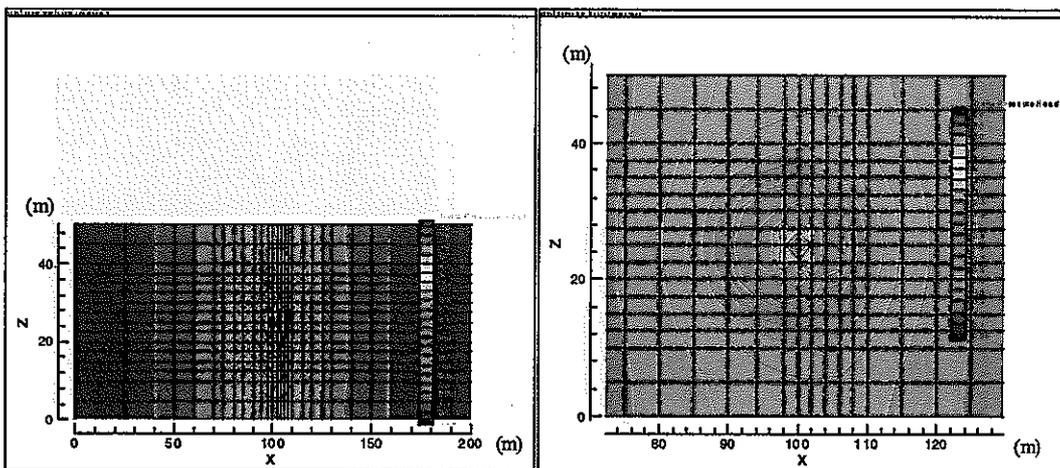
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.22 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.2 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 30m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-4(\text{cm}/\text{sec})$)



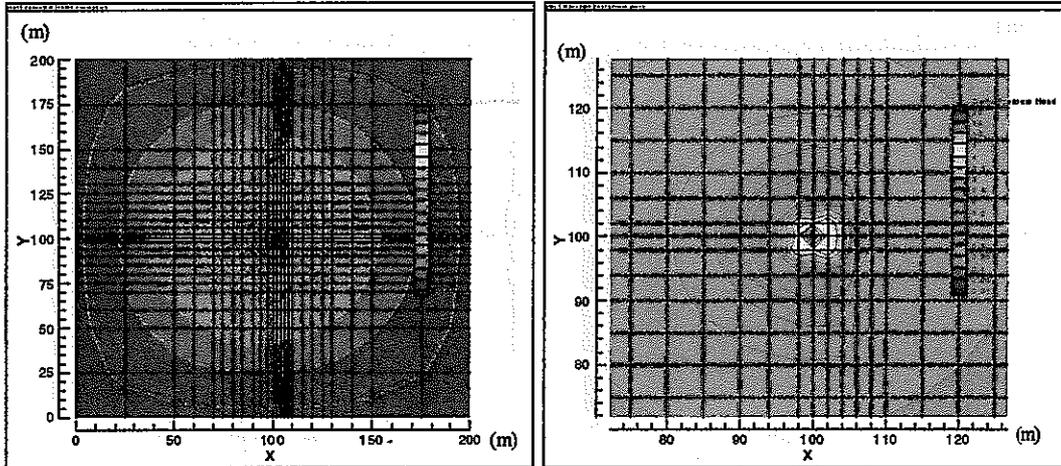
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



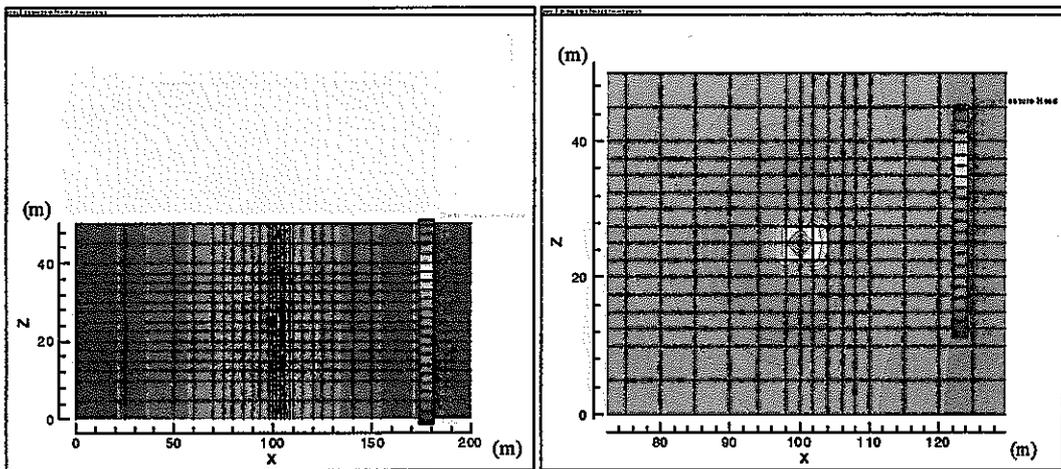
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.23 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.2 (長さ 200m , 幅 2m , 高さ 30m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-3}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-5(\text{cm}/\text{sec})$)



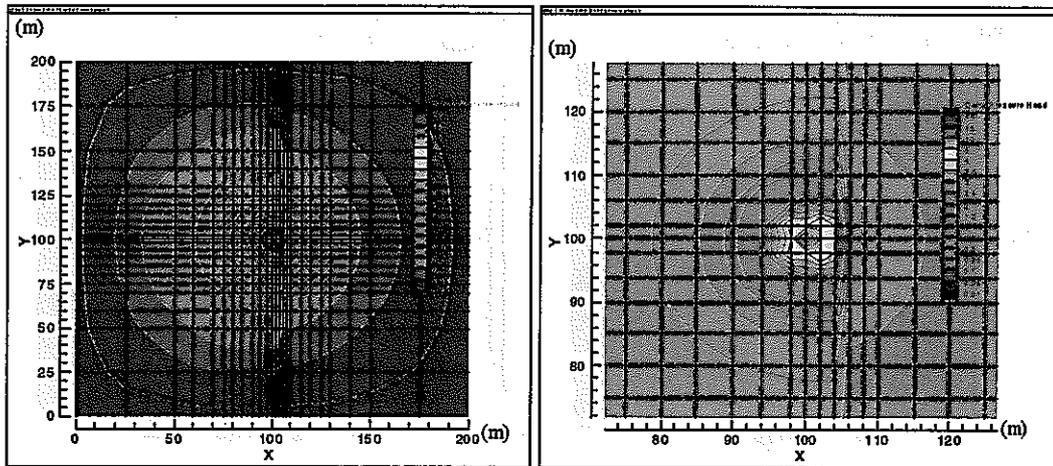
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



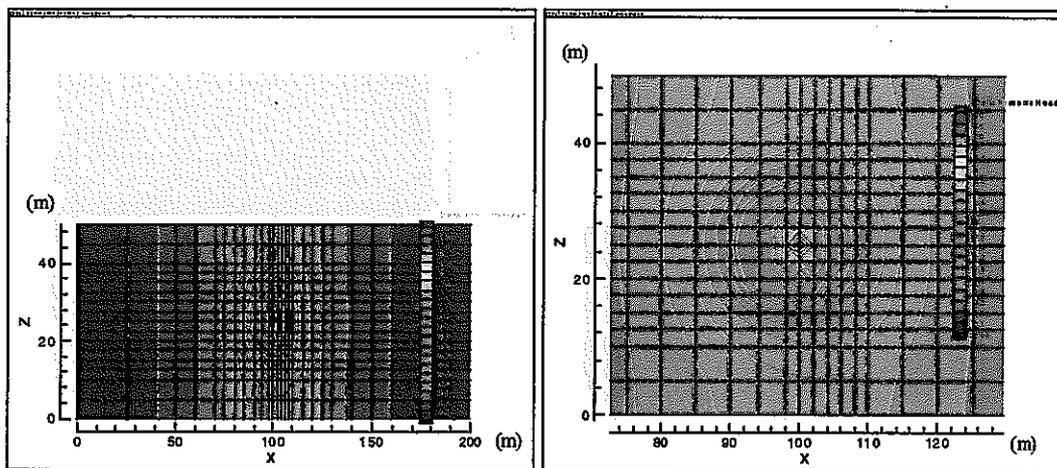
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.24 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.2 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 30m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-7(\text{cm}/\text{sec})$)



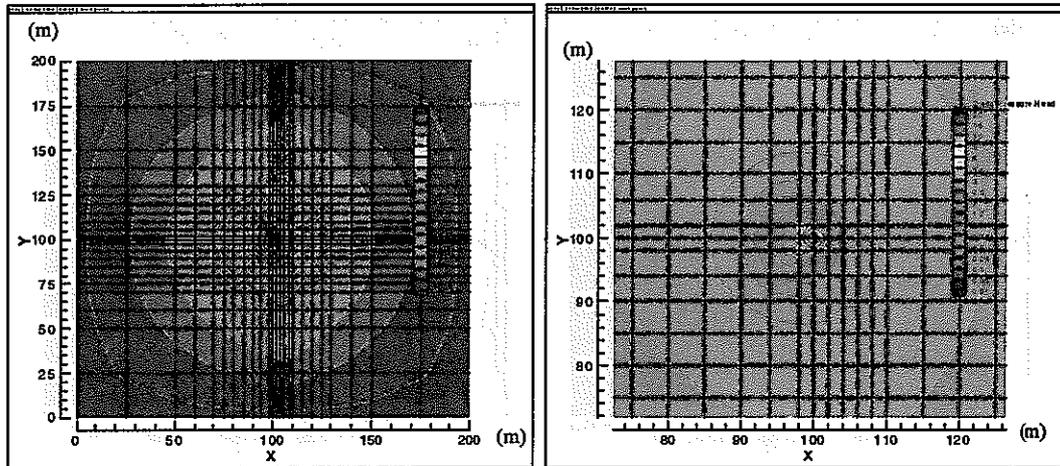
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



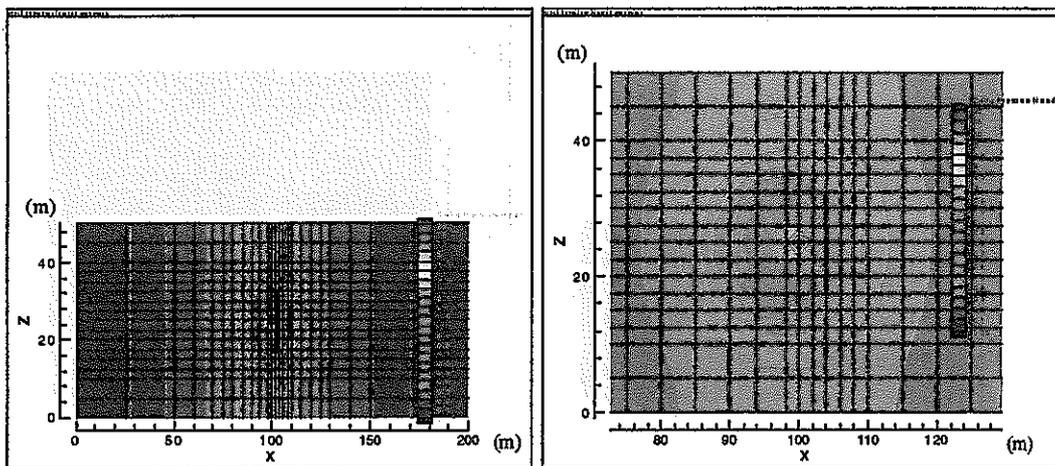
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.25 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.2 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 30m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \text{E}-8(\text{cm}/\text{sec})$)



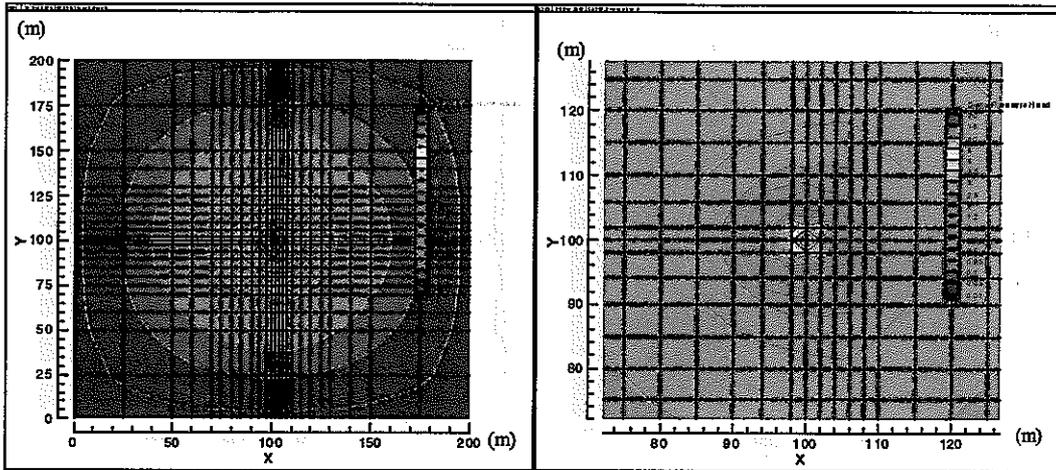
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



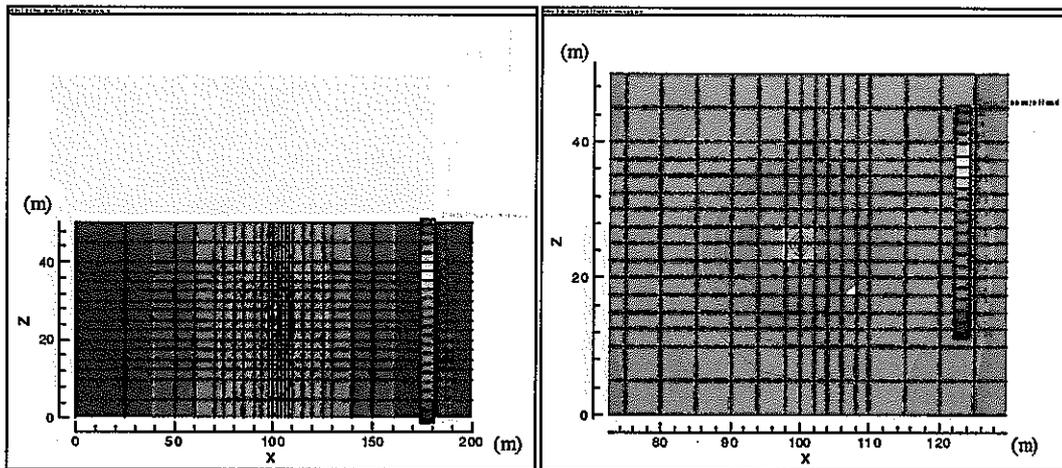
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.26 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.3 (長さ 200m , 幅 2m , 高さ 10m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-4(\text{cm}/\text{sec})$)



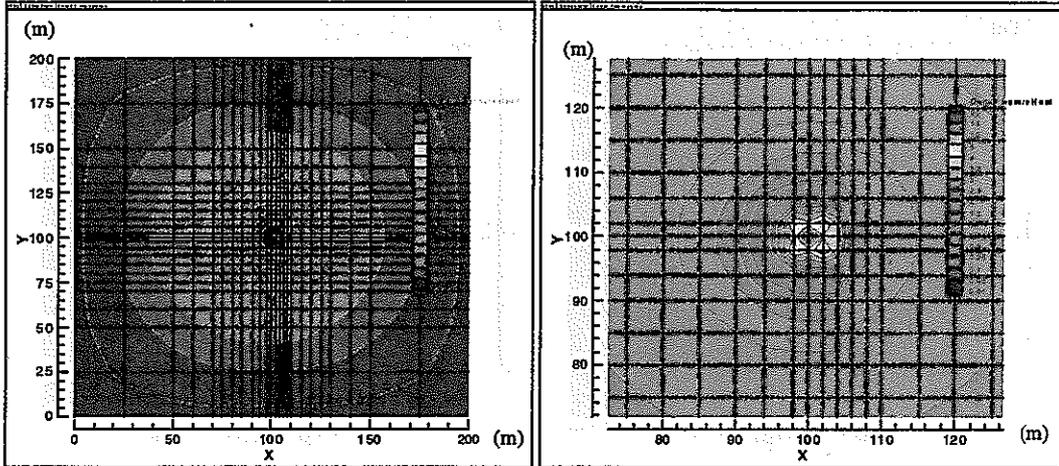
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{ m}$)



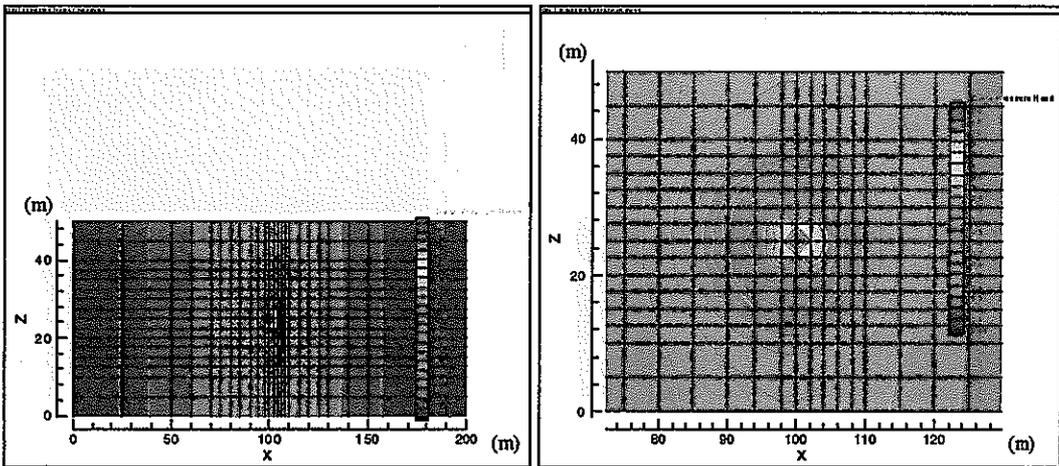
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{ m}$)

付図-6.27 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.3 (長さ 200 m, 幅 2 m, 高さ 10 m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{ cm/sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \text{ E-}5(\text{cm/sec})$)



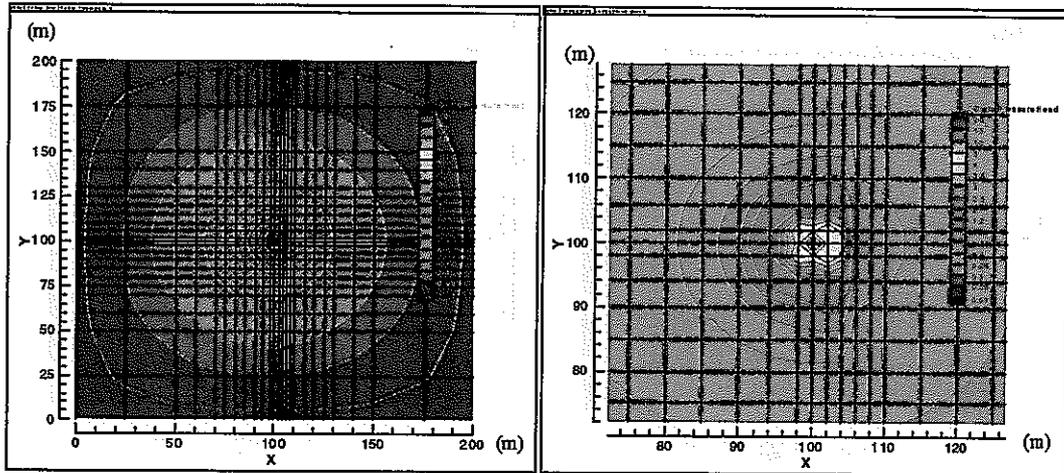
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



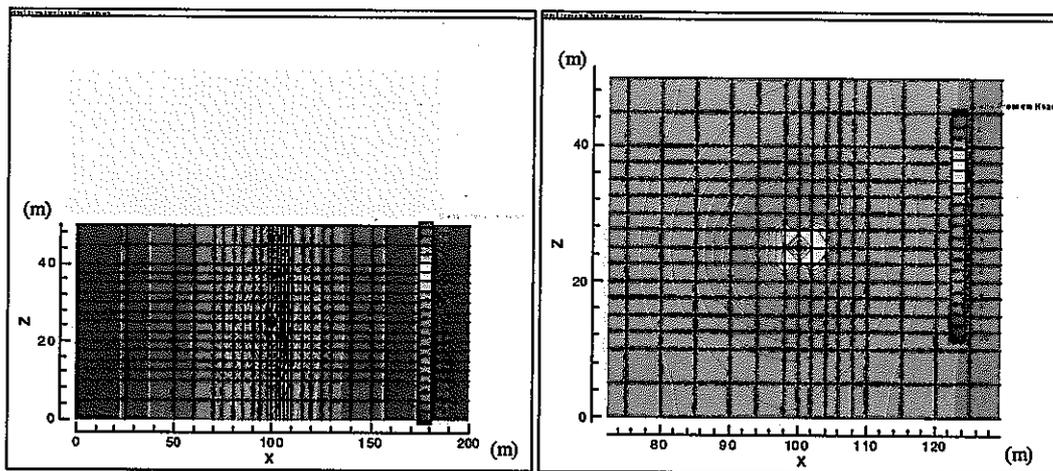
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.28 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.3 (長さ 200m, 幅 2m, 高さ 10m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-7(\text{cm}/\text{sec})$)



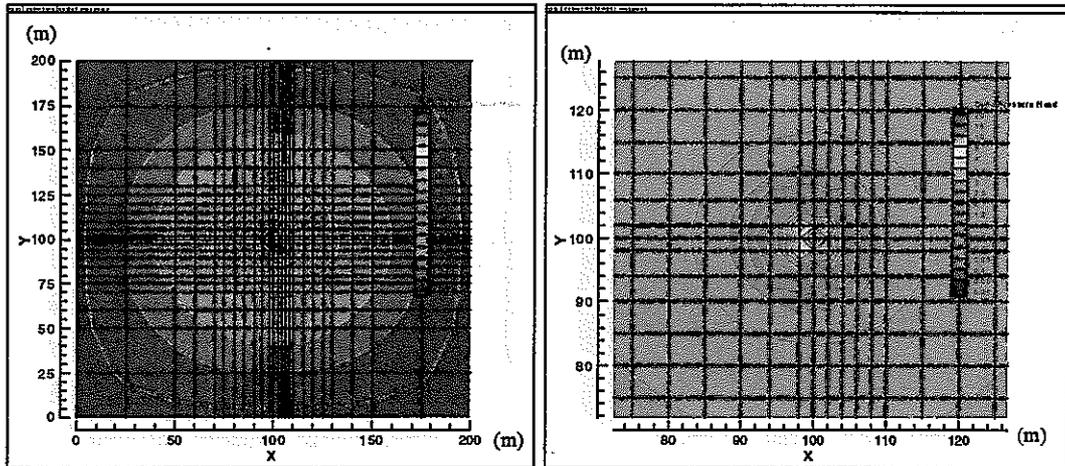
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



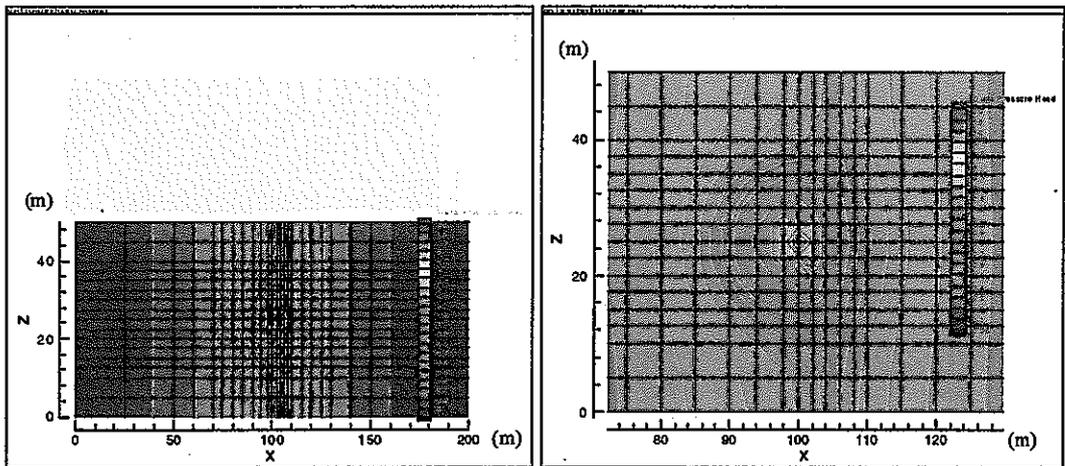
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.29 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.3 (長さ 200m , 幅 2m , 高さ 10m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-8(\text{cm}/\text{sec})$)



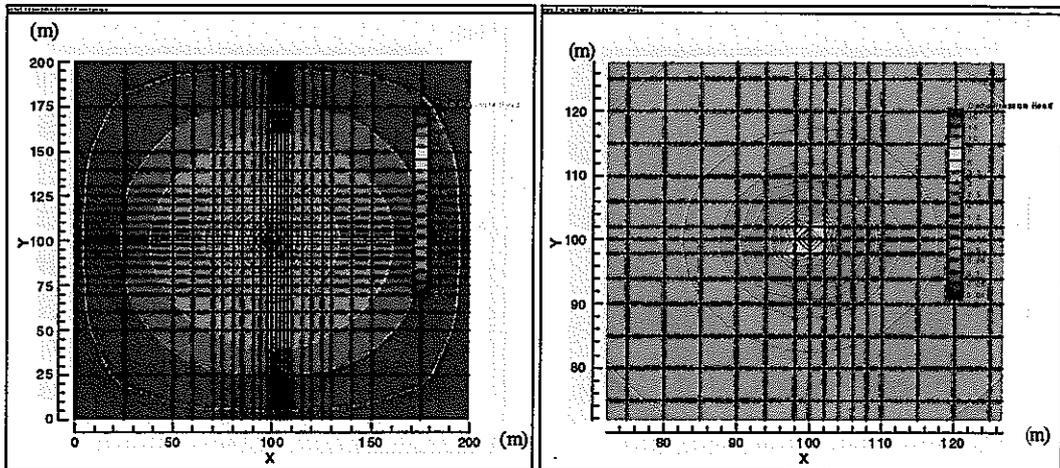
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



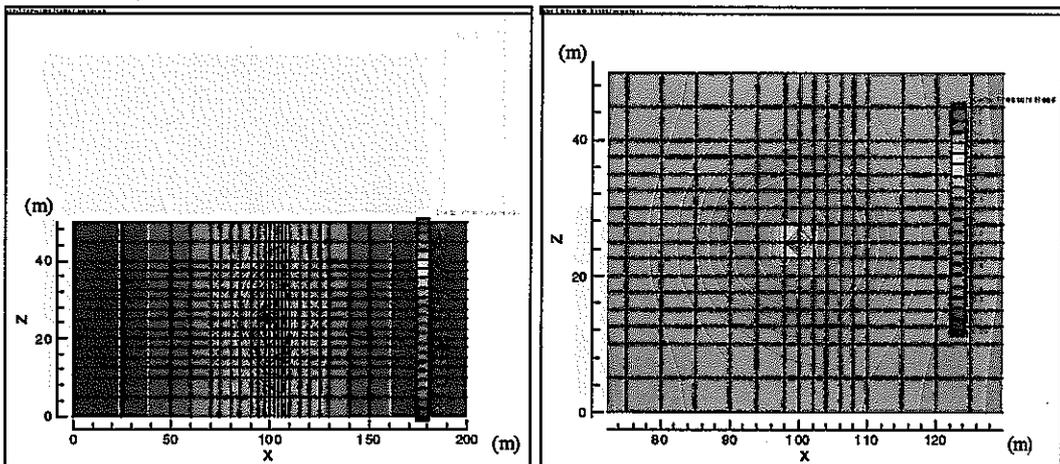
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.30 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.4 (長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \text{E}-4(\text{cm}/\text{sec})$)



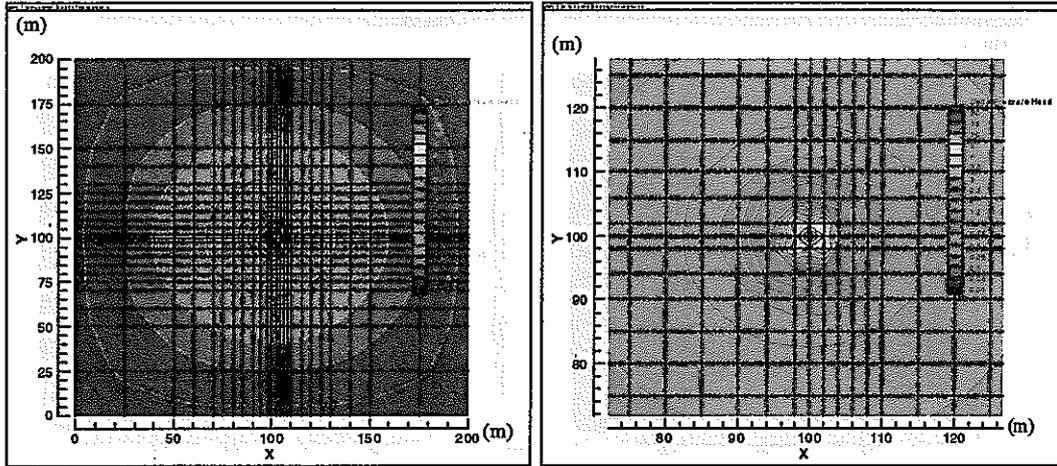
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{ m}$)



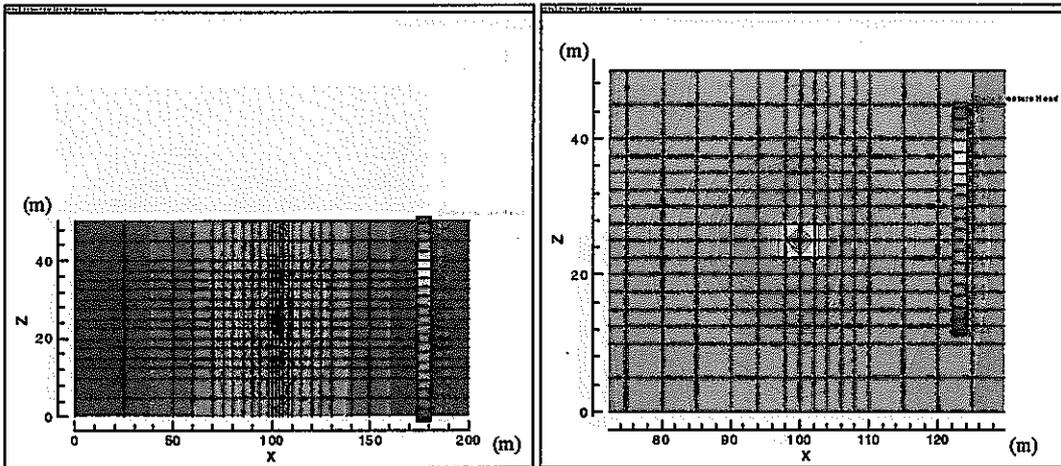
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{ m}$)

付図-6.31 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル I.4 (長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{ cm/sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \text{ E}-5(\text{cm/sec})$)



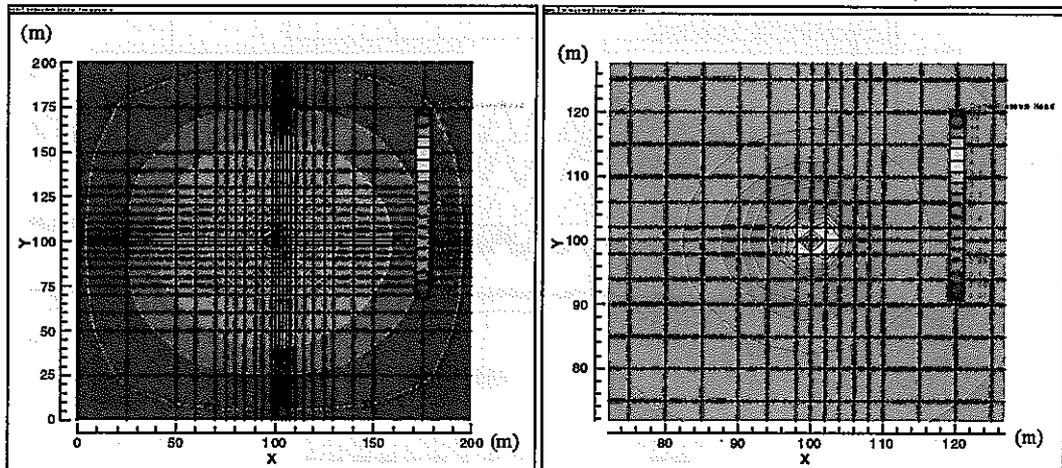
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



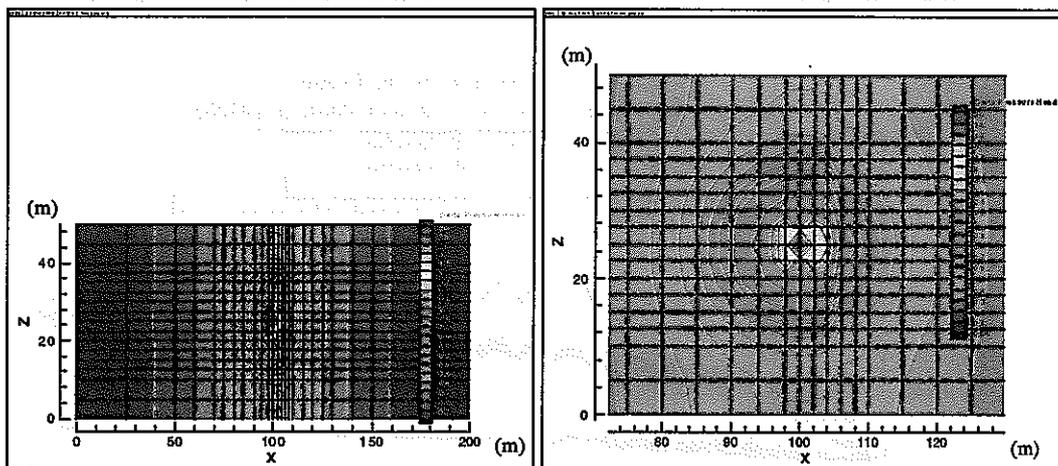
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.32 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.4 (長さ 4m, 幅 2m, 高さ 50m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \text{E}-7(\text{cm}/\text{sec})$)



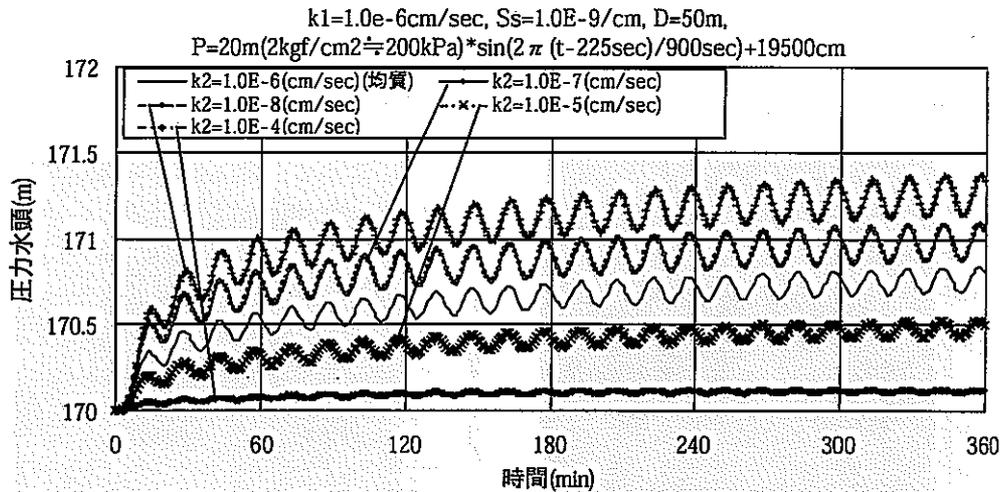
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25$ m)



(b) 鉛直方向の分布図($y=100$ m)

付図-6.33 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル 1.4 (長さ 4 m, 幅 2 m, 高さ 50 m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}$ / cm, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}$ cm/sec, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \times 10^{-8}$ (cm/sec))

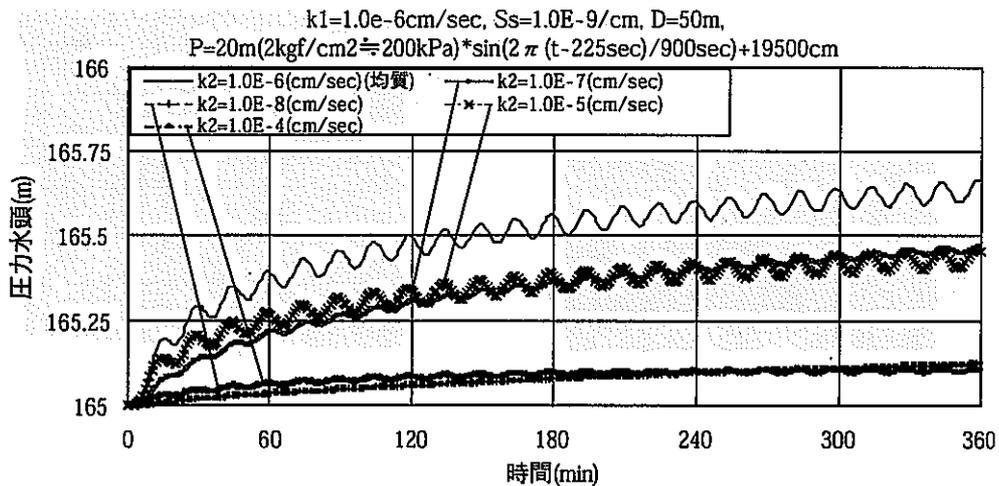


付図-6.34 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=10\text{m}$, 不均質部が存在する側の $z=5\text{m}$ 地点)

(不均質モデル II.1 (長さ 200m , 幅 200m , 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0\times 10^{-9}/\text{cm}$,

均質部の透水係数 $k_1=1.0\times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

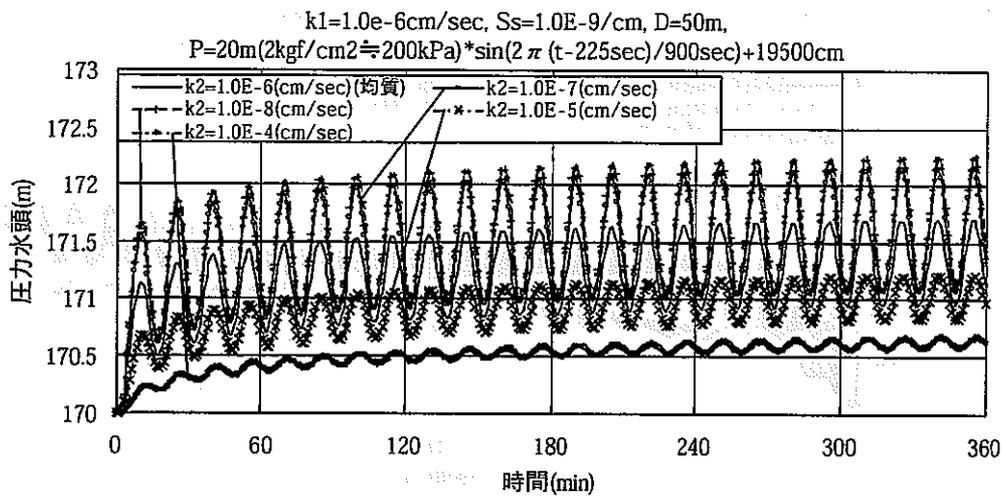


付図-6.35 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=10\text{m}$, 不均質部が存在する側の $z=10\text{m}$ 地点)

(不均質モデル II.1 (長さ 200m , 幅 200m , 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0\times 10^{-9}/\text{cm}$,

均質部の透水係数 $k_1=1.0\times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

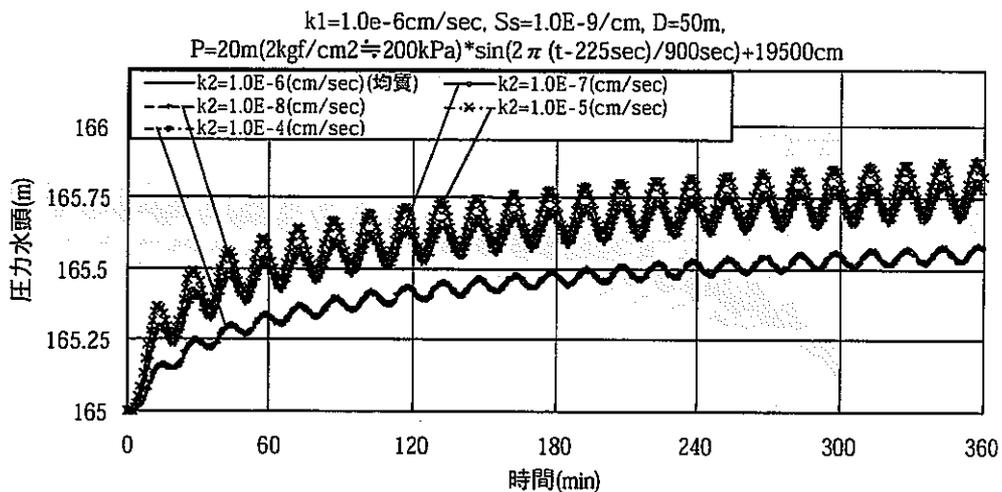


付図-6.36 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=4\text{m}$, 不均質部が存在する側の $z=5\text{m}$ 地点)

(不均質モデル II.2 (長さ 4m , 幅 200m , 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,

均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))

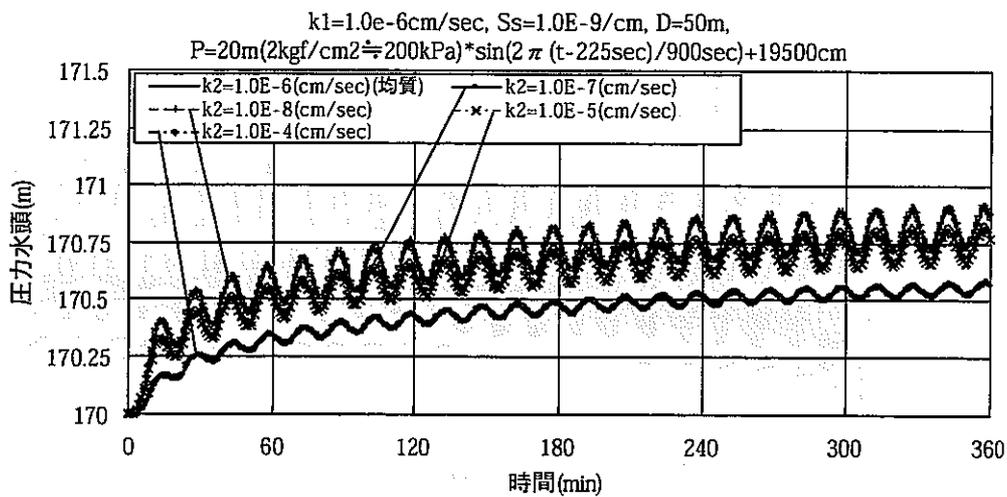


付図-6.37 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=4\text{m}$, 不均質部が存在する側の $z=10\text{m}$ 地点)

(不均質モデル II.2 (長さ 4m , 幅 200m , 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,

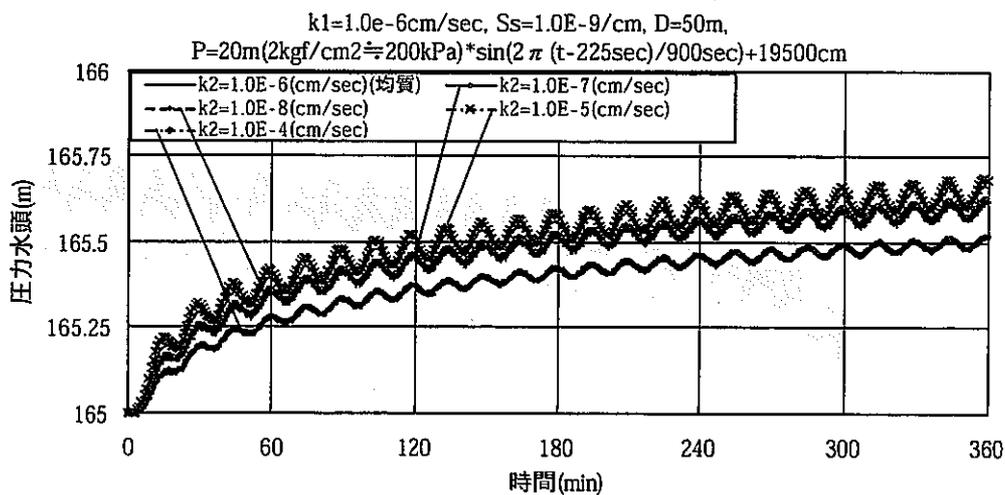
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



付図-6.38 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=10\text{m}$, 不均質部が存在する側の $z=5\text{m}$ 地点)

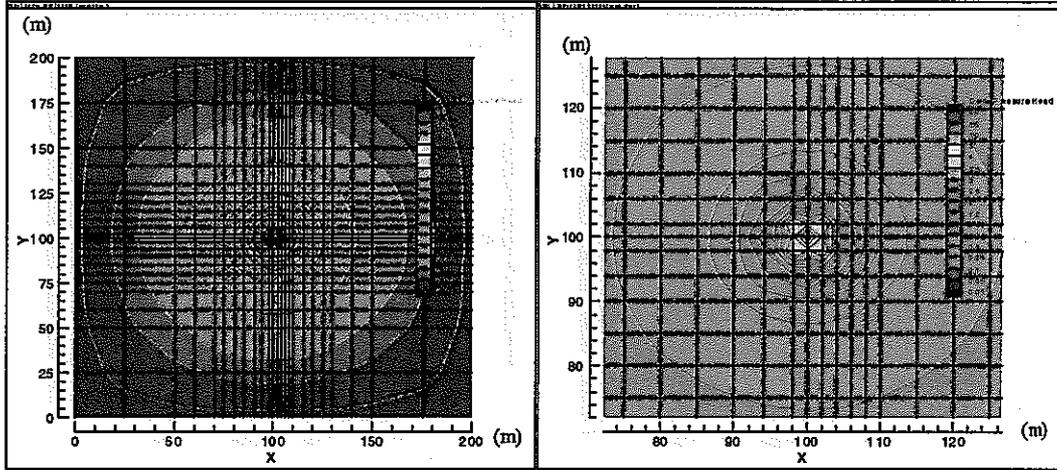
(不均質モデル II.2 (長さ 4m , 幅 200m , 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0\times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0\times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



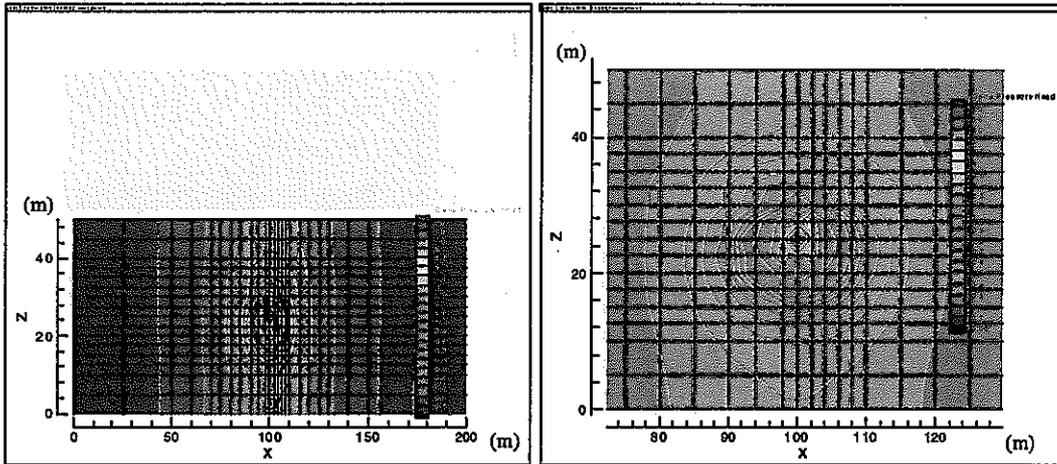
付図-6.39 応答水圧の時間変化

(加圧点からの距離 $x=10\text{m}$, 不均質部が存在する側の $z=10\text{m}$ 地点)

(不均質モデル II.2 (長さ 4m , 幅 200m , 高さ 2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0\times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0\times 10^{-6}\text{cm/sec}$, 不均質部の透水係数は k_2 (図中参照))



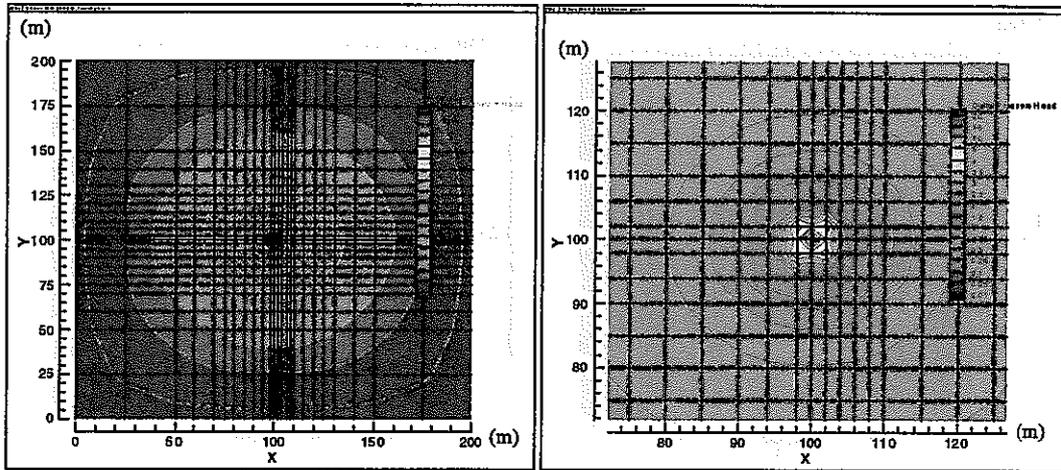
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



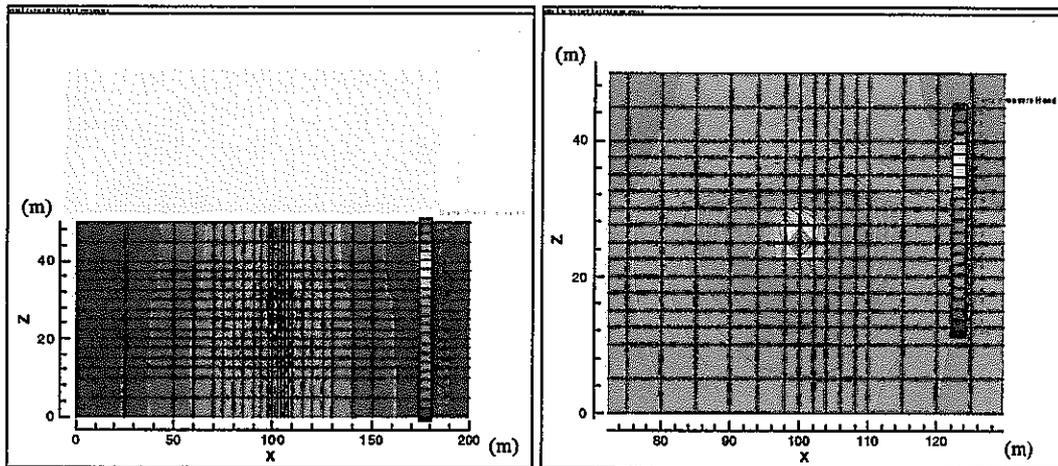
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.40 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルII.1(長さ200m,幅200m,高さ2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-5(\text{cm}/\text{sec})$)



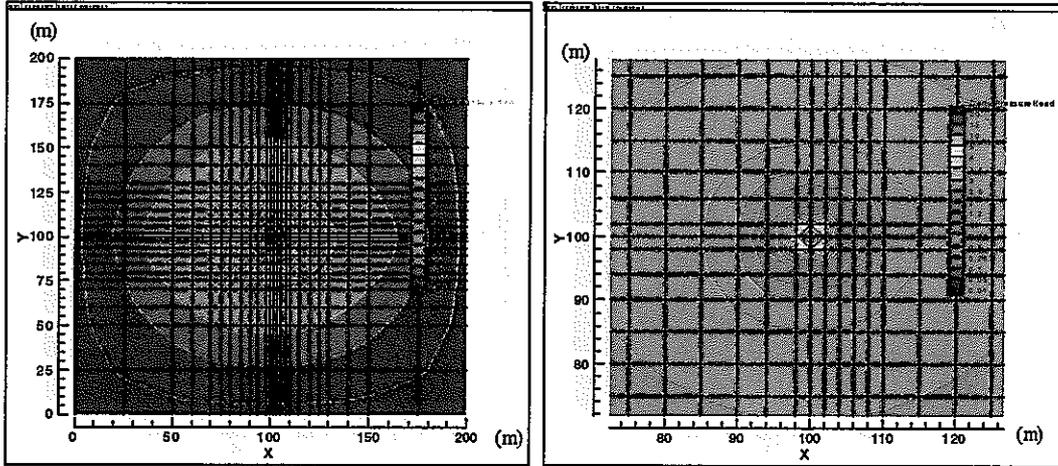
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{ m}$)



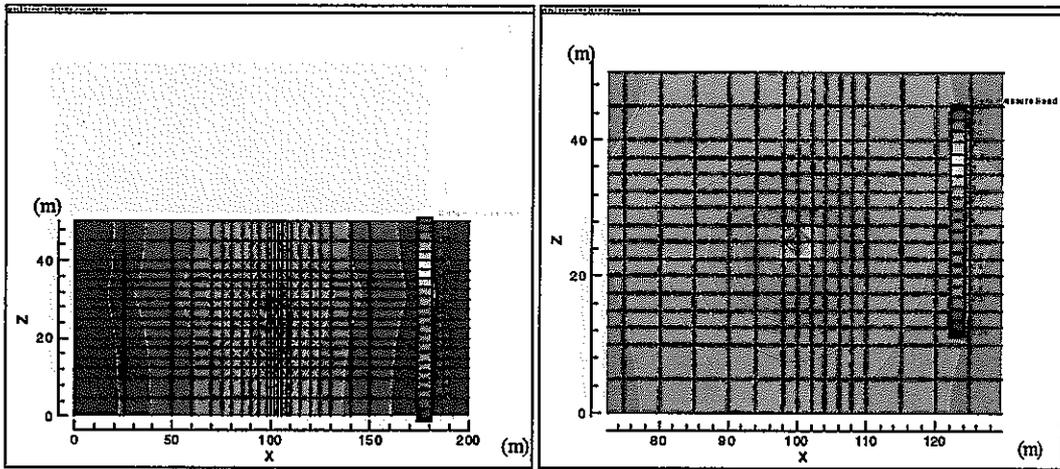
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{ m}$)

付図-6.41 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデル II.1 (長さ 200 m, 幅 200 m, 高さ 2.5 m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-3}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6} \text{ cm/sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0 \text{ E-}7 (\text{cm/sec})$)



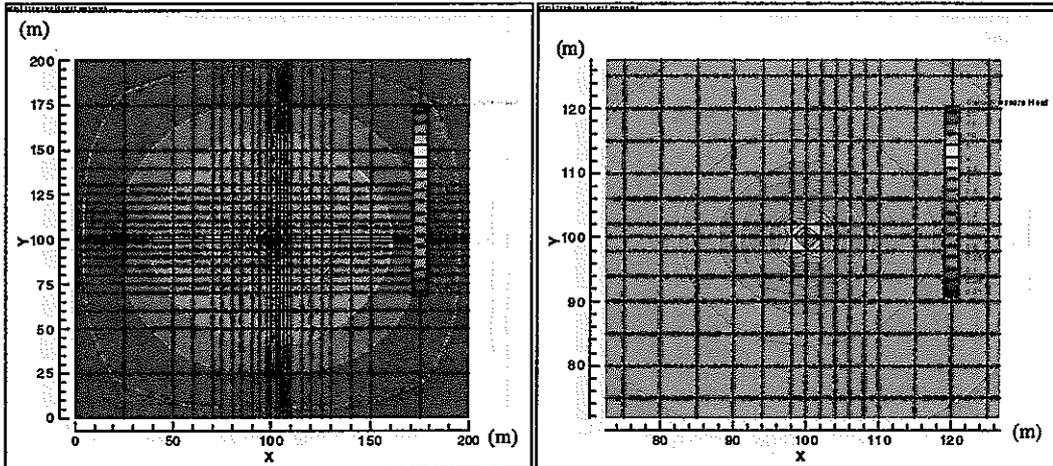
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



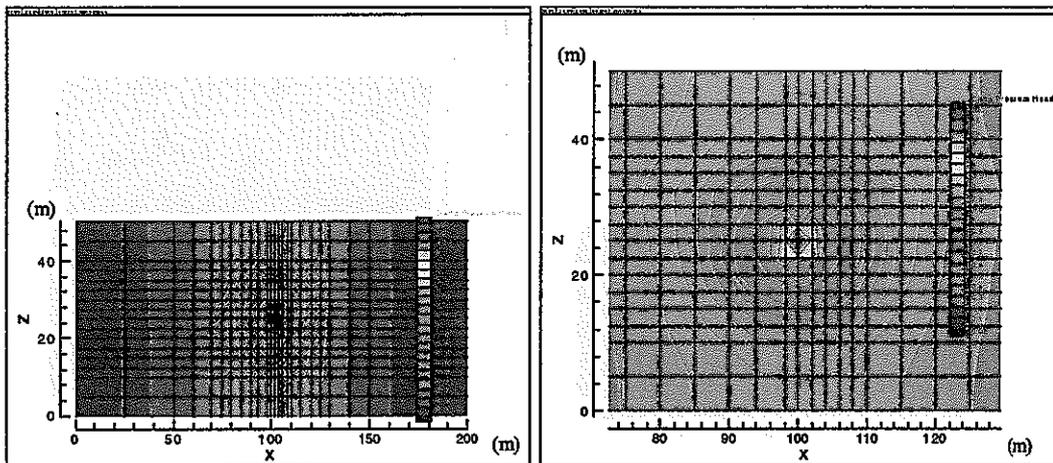
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.42 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルII.2(長さ4m,幅200m,高さ2.5m),比貯留係数 $S_e=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-4(\text{cm}/\text{sec})$)



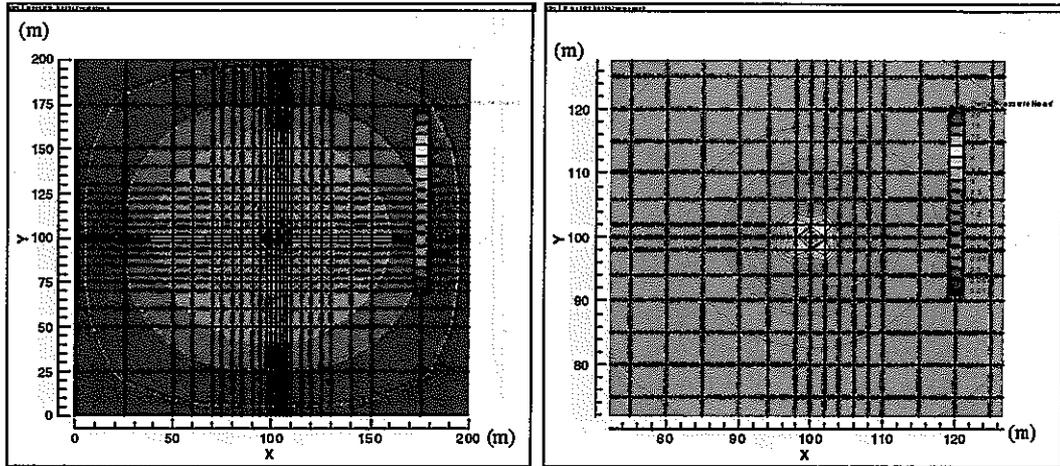
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



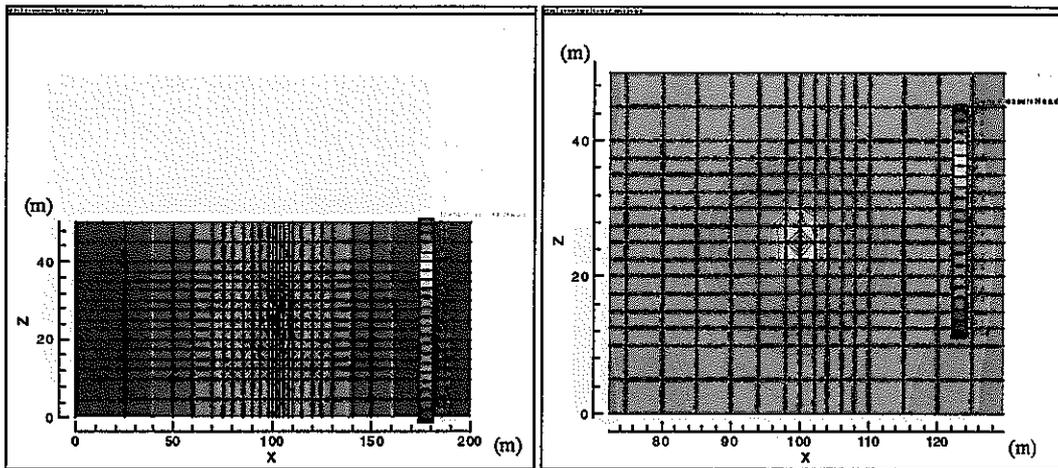
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.43 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルII.2(長さ4m, 幅200m, 高さ2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-5(\text{cm}/\text{sec})$)



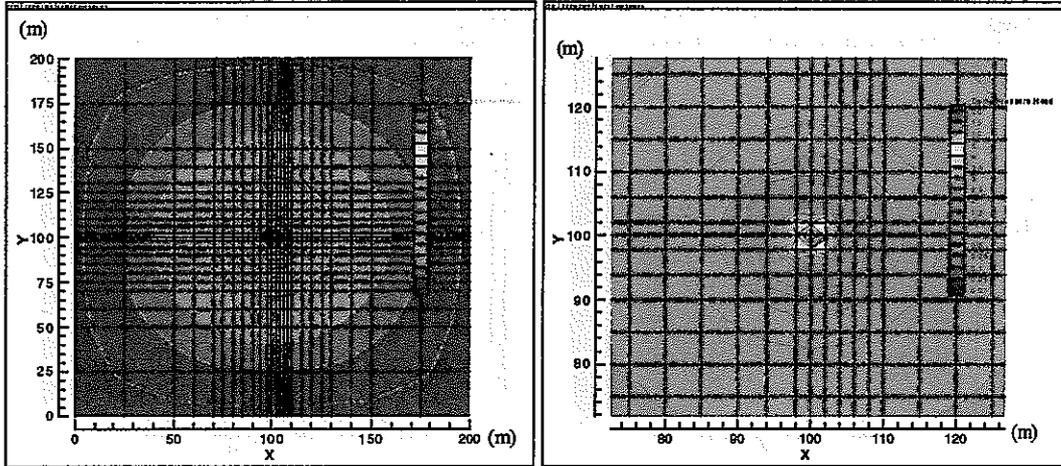
(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



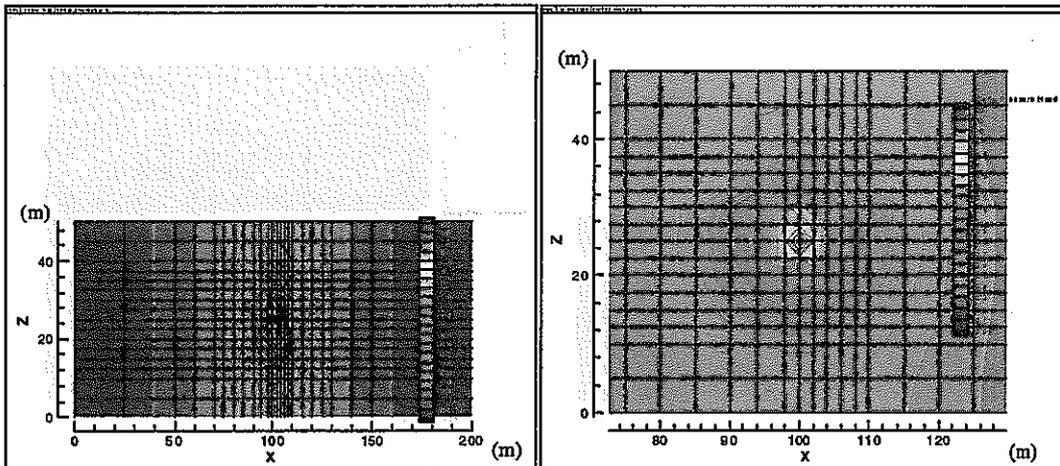
(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.44 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルⅡ.2(長さ4m,幅200m,高さ2.5m),比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$,
均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$,不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-7(\text{cm}/\text{sec})$)



(a) 水平方向の分布図(底面から $z=25\text{m}$)



(b) 鉛直方向の分布図($y=100\text{m}$)

付図-6.45 圧力水頭値の増加量の分布

(不均質モデルII.2(長さ4m, 幅200m, 高さ2.5m), 比貯留係数 $S_s=1.0 \times 10^{-9}/\text{cm}$, 均質部の透水係数 $k_1=1.0 \times 10^{-6}\text{cm}/\text{sec}$, 不均質部の透水係数 $k_2=1.0\text{E}-8(\text{cm}/\text{sec})$)

付表-4.1 図-4.6 のデータ

(a) Jacob の方法, 2次元軸対象数値解析(時間差分法), 3次元数値解析(時間差分法), 3次元LTG法(細野の方法)

r=5m		s(cm)					
t(sec)		r(m)	t/r**2(sec/cm ²)	s(Jacobの方法)	s(2次元 時間差分法)	s(3次元 時間差分法)	s(LTG法 細野)
0.6	0.6s	5.0	0.000024		0.000	0.051	0.400
6.0	6s	5.0	0.00024		5.800	6.728	6.700
60.0	1min	5.0	0.0024	89.466	78.600	80.952	82.700
300.0	5min	5.0	0.0012	174.850	155.800	162.877	159.700
600.0	10min	5.0	0.0024	211.622	190.400	200.089	193.200
1200.0	20min	5.0	0.0048	248.395	223.600	229.500	225.900
1800.0	30min	5.0	0.0072	269.905	242.800	250.002	244.900
3600.0	1hour	5.0	0.0144	306.678	275.800	286.990	277.400
7200.0	2hour	5.0	0.0288	343.451	308.600	320.390	310.000
10800.0	3hour	5.0	0.0432	364.961	328.100	343.217	329.400
21600.0	6hour	5.0	0.0864	401.734	361.400	377.084	362.600
43200.0	12hour	5.0	0.173	438.506	394.700	386.616	395.600
86400.0	1day	5.0	0.346	475.279	428.000	418.236	428.500
129600.0	1.5day	5.0	0.518	496.790	447.400	422.643	447.600
172800.0	2day	5.0	0.691	512.052	461.000	427.059	461.000
259200.0	3day	5.0	1.037	533.562	479.100	436.205	478.900
604800.0	1week	5.0	2.419	578.513	503.800	451.990	503.000
864000.0	10day	5.0	3.456	597.435	507.100	460.177	506.100
1209600.0	2week	5.0	4.838	615.285	508.000	472.042	506.900
1814400.0	3week	5.0	7.258	636.796	508.200	490.323	507.000
2678400.0	1month(31)	5.0	10.714	657.458	508.200	504.017	507.000
3974400.0	1.5month	5.0	15.898	678.395	508.200	507.846	507.000
5270400.0	2month(30)	5.0	21.082	693.368	508.200	510.559	507.000
6566400.0	2.5month	5.0	26.266	705.032	508.200	519.134	507.000
7948800.0	3month(31)	5.0	31.795	715.167	508.200	525.079	507.000

表中の t は時間, r は揚水井から観測井までの距離, s は初期水位からの水位低下量(cm), 斜線部は負(計算不可能)

付表-4.1 図-4.6 のデータ

(b) 3次元LTG法(Crumpの方法のQuotient-Difference Algorithm, 打ち切り級数 $2N+1=15, 31, 45, 90$)

t(sec)		r(m)	t/r**2(sec/cm ²)	s(LTG法 ODA(crump,2N+1=15))	s(LTG法 ODA(crump,2N+1=31))	s(LTG法 ODA(crump,2N+1=45))	s(LTG法 ODA(crump,2N+1=90))
0.6	0.6s	50.0	0.000000024	0.900	0.000	0.000	0.000
6.0	6s	50.0	0.00000024	134.900	82.452	82.200	23.371
60.0	1min	50.0	0.0000024	159.200	159.228	159.200	159.228
300.0	5min	50.0	0.000012	192.700	192.744	192.700	192.744
600.0	10min	50.0	0.000024	225.400	225.414	225.400	225.414
1200.0	20min	50.0	0.000048	183.500	273.446	256.300	244.228
1800.0	30min	50.0	0.000072	275.400	275.487	276.500	276.981
3600.0	1hour	50.0	0.000144	322.300	309.781	309.600	309.593
7200.0	2hour	50.0	0.000288	322.500	328.917	328.900	328.934
10800.0	3hour	50.0	0.000432	362.100	362.147	362.100	362.147
21600.0	6hour	50.0	0.000864	395.100	395.123	395.100	395.123
43200.0	12hour	50.0	0.002	428.000	428.022	428.000	428.022
86400.0	1day	50.0	0.003	447.200	447.168	447.200	447.168
129600.0	1.5day	50.0	0.005	460.600	460.587	460.600	460.587
172800.0	2day	50.0	0.007	532.600	478.143	478.500	478.458
259200.0	3day	50.0	0.010	501.400	502.557	502.600	502.558
604800.0	1week	50.0	0.024	506.200	505.653	505.700	505.653
864000.0	10day	50.0	0.035	506.400	506.459	506.500	506.459
1209600.0	2week	50.0	0.048	506.600	506.590	506.600	506.590
1814400.0	3week	50.0	0.073	506.600	506.594	506.600	506.594
2678400.0	1month(31)	50.0	0.107	506.600	506.594	506.600	506.594
3974400.0	1.5month	50.0	0.159	506.600	506.595	506.600	506.595
5270400.0	2month(30)	50.0	0.211	506.600	506.594	506.600	506.594
6566400.0	2.5month	50.0	0.263	506.600	506.598	506.600	506.598
7948800.0	3month(31)	50.0	0.318	506.600	506.596	506.600	506.596

表中の t は時間, r は揚水井から観測井までの距離(cm), s は初期水位からの水位低下量(cm), 斜線部は負の値, 2N+1 は Crump 法における打ち切り級数

付表-4.2 図-4.7 のデータ

(a) Jacob の方法, 2次元軸対象数値解析(時間差分法), 3次元数値解析(時間差分法), 3次元LTG法(細野の方法)

r=50m								(cm)
t(sec)		r(m)	t/r**2(sec/cm ²)	s(Jacobの方法)	s(2次元 時間差分法)	s(3次元 時間差分法)	s(LTG法 細野)	
0.6	0.6s	50.0	0.00000024		0.000	0.000	0.400	
6.0	6s	50.0	0.0000024		0.000	0.000	0.400	
60.0	1min	50.0	0.000024		0.000	0.005	0.400	
300.0	5min	50.0	0.00012		1.700	2.187	2.000	
600.0	10min	50.0	0.00024		8.000	9.583	8.600	
1200.0	20min	50.0	0.00048	4.083	22.600	26.025	23.700	
1800.0	30min	50.0	0.00072	25.594	34.700	39.105	36.100	
3600.0	1hour	50.0	0.00144	62.366	59.900	65.790	61.300	
7200.0	2hour	50.0	0.00288	99.139	88.700	96.429	90.200	
10800.0	3hour	50.0	0.00432	120.649	106.700	116.270	108.200	
21600.0	6hour	50.0	0.00864	157.422	138.600	147.236	140.000	
43200.0	12hour	50.0	0.01728	194.194	171.200	155.413	172.300	
86400.0	1day	50.0	0.03456	230.967	204.100	185.178	204.900	
129600.0	1.5day	50.0	0.05184	252.478	223.400	189.503	223.900	
172800.0	2day	50.0	0.06816	267.740	236.900	194.060	237.300	
259200.0	3day	50.0	0.10224	289.250	254.900	202.562	255.100	
604800.0	1week	50.0	0.40896	334.201	279.600	218.207	279.100	
864000.0	10day	50.0	0.57216	353.123	282.900	225.915	282.200	
1209600.0	2week	50.0	1.14432	370.973	283.800	236.977	283.000	
1814400.0	3week	50.0	1.71648	392.484	283.900	255.257	283.100	
2678400.0	1month(31)	50.0	2.57280	413.146	283.900	268.604	283.100	
3974400.0	1.5month	50.0	3.85920	434.083	283.900	272.366	283.100	
5270400.0	2month(30)	50.0	5.14560	449.056	283.900	275.068	283.100	
6566400.0	2.5month	50.0	6.43200	460.720	283.900	283.469	283.100	
7948800.0	3month(31)	50.0	8.71840	470.855	283.900	289.281	283.100	

表中の t は時間, r は揚水井から観測井までの距離, s は初期水位からの水位低下量(cm), 斜線部は負の値

付表-4.2 図-4.7 のデータ

(b) 3次元LTG法(Crumpの方法のQuotient-Difference Algorithm, 打ち切り級数 $2N+1=15, 31, 45, 90$)

r=50m (cm)

t(sec)		r(m)	t/r**2(sec/cm ²)	s(LTG法 ODA(crump,2N+1=15))	s(LTG法 ODA(crump,2N+1=31))	s(LTG法 ODA(crump,2N+1=45))	s(LTG法 ODA(crump,2N+1=90))
0.6	0.6s	50.0	0.00000024	0.900	0.000	0.000	0.000
6.0	6s	50.0	0.00000024	192.220			16.173
60.0	1min	50.0	0.0000024	53.100	0.038	0.000	0.000
300.0	5min	50.0	0.000012	1.500	1.559	1.600	1.559
600.0	10min	50.0	0.000024	8.100	8.138	8.100	8.138
1200.0	20min	50.0	0.000048	23.300	23.260	23.300	23.260
1800.0	30min	50.0	0.000072	137.700	41.114	41.200	35.610
3600.0	1hour	50.0	0.000144	58.400	58.629	60.800	60.882
7200.0	2hour	50.0	0.000288	102.800	89.822	89.700	89.718
10800.0	3hour	50.0	0.000432	101.200	107.745	107.800	107.752
21600.0	6hour	50.0	0.000864	139.600	139.602	139.600	139.602
43200.0	12hour	50.0	0.002	171.900	171.889	171.900	171.889
86400.0	1day	50.0	0.003	204.400	204.445	204.400	204.445
129600.0	1.5day	50.0	0.005	223.500	223.475	223.500	223.475
172800.0	2day	50.0	0.007	236.800	236.835	236.800	236.835
259200.0	3day	50.0	0.010	310.000	254.384	254.700	254.638
604800.0	1week	50.0	0.024	277.400	278.653	278.700	278.653
864000.0	10day	50.0	0.035	282.300	281.737	281.700	281.737
1209600.0	2week	50.0	0.048	282.400	282.540	282.500	282.540
1814400.0	3week	50.0	0.073	282.700	282.671	282.700	282.671
2678400.0	1month(31)	50.0	0.107	282.700	282.675	282.700	282.675
3974400.0	1.5month	50.0	0.159	282.700	282.676	282.700	282.676
5270400.0	2month(30)	50.0	0.211	282.700	282.675	282.700	282.675
6566400.0	2.5month	50.0	0.263	282.700	282.679	282.700	282.679
7948800.0	3month(31)	50.0	0.318	282.700	282.677	282.700	282.677

表中の t は時間, r は揚水井から観測井までの距離(cm), s は初期水位からの水位低下量(cm), 斜線部は負の値, 2N+1 は Crump 法における打ち切り級数

付表-4.3 図-4.12 のデータ

(a) 加圧点における圧力水頭の変化(細野の方法, 打ち切り級数 $k=15$)

周期T=15(min)			周期T=30(min)		
時間 t (min)	Real(m)	細野(m)	時間 t (min)	Real(m)	細野(m)
0.000	185.000	185.000	0.000	185.000	184.994
3.750	205.000	204.990	7.500	205.000	205.025
7.500	225.000	224.989	15.000	225.000	225.091
11.250	205.000	204.990	22.500	205.000	204.987
15.000	185.000	184.991	30.000	185.000	184.994
18.750	205.000	204.990	37.500	205.000	205.025
22.500	225.000	224.988	45.000	225.000	225.091
26.250	205.000	204.988	52.500	205.000	204.987
30.000	185.000	184.994	60.000	185.000	184.994
33.750	205.000	205.025	67.500	205.000	205.025
37.500	225.000	225.091	75.000	225.000	225.091
41.250	205.000	205.025	82.500	205.000	205.024
45.000	185.000	184.501	90.000	185.000	184.501
48.750	205.000	204.073	97.500	205.000	204.074
52.500	225.000	225.668	105.000	225.000	225.668
56.250	205.000	208.499	112.500	205.000	208.498
60.000	185.000	186.134	120.000	185.000	186.133
63.750	205.000	197.915	127.500	205.000	197.916
66.563	225.000	218.556	135.000	225.000	218.557
69.375	205.000	213.824	142.500	205.000	213.823
74.063	185.000	198.557	150.000	185.000	198.557
77.813	205.000	197.915	157.500	205.000	197.916
81.563	225.000	206.133	165.000	225.000	206.133
85.313	205.000	208.499	172.500	205.000	208.499
89.063	185.000	206.441	180.000	185.000	205.669
92.813	205.000	204.215	187.500	205.000	205.075
96.563	225.000	204.500	195.000	225.000	205.025
100.313	205.000	205.075	202.500	205.000	204.993
104.063	185.000	205.025	210.000	185.000	204.989
111.563	225.000	204.993	217.500	205.000	204.990
119.063	185.000	204.989	225.000	225.000	204.990
126.563	225.000	204.990			
134.063	185.000	204.990			
141.563	225.000	204.990			
149.063	185.000	204.990			
156.563	225.000	204.990			
164.063	185.000	204.990			
171.563	225.000	204.990			
180.000	185.000	204.990			

付表-4.3 図-4.12 のデータ

(b) 加圧点における圧力水頭の変化

(Crump 改良法(QDA), 打ち切り級数 $2N+1=31$, $T_{max}=80$)

周期T=15(min)			周期T=30(min)		
時間t(min)	Real(m)	ODA(m)	時間t(min)	Real(m)	ODA(m)
0.000	185.000	185.000	0.000	185.000	185.000
3.750	205.000	205.000	7.500	205.000	205.001
7.500	225.000	225.000	15.000	225.000	225.000
11.250	205.000	205.000	22.500	205.000	204.999
15.000	185.000	185.000	30.000	185.000	185.000
18.750	205.000	205.000	37.500	205.000	205.001
22.500	225.000	225.000	45.000	225.000	225.000
26.250	205.000	205.000	52.500	205.000	204.999
30.000	185.000	185.000	60.000	185.000	185.000
33.750	205.000	205.001	67.500	205.000	205.001
37.500	225.000	225.001	75.000	225.000	225.000
41.250	205.000	205.006	82.500	205.000	204.999
45.000	185.000	184.993	90.000	185.000	185.000
48.750	205.000	205.008	97.500	205.000	205.001
52.500	225.000	224.994	105.000	225.000	225.000
56.250	205.000	205.005	112.500	205.000	204.999
60.000	185.000	184.998	120.000	185.000	185.000
63.750	205.000	205.001	127.500	205.000	205.001
67.500	225.000	225.001	135.000	225.000	225.000
71.250	205.000	204.999	142.500	205.000	204.999
75.000	185.000	185.003	150.000	185.000	185.000
78.750	205.000	204.997	157.500	205.000	205.002
82.500	225.000	225.004	165.000	225.000	225.000
86.250	205.000	204.996	172.500	205.000	204.998
90.000	185.000	185.004	180.000	185.000	185.001
93.750	205.000	204.996	187.500	205.000	205.002
97.500	225.000	225.004	195.000	225.000	224.999
101.250	205.000	204.997	202.500	205.000	204.997
105.000	185.000	185.003	210.000	185.000	185.001
108.750	205.000	204.997	217.500	205.000	205.002
112.500	225.000	225.003	225.000	225.000	225.004
116.250	205.000	204.997	232.500	205.000	205.000
120.000	185.000	185.001	240.000	185.000	185.000
123.750	205.000	204.999	247.500	205.000	205.006
127.500	225.000	225.001	255.000	225.000	225.013
131.250	205.000	205.000	262.500	205.000	204.988
135.000	185.000	184.998	270.000	185.000	185.021
138.750	205.000	204.999	277.500	205.000	204.989
142.500	225.000	225.000	285.000	225.000	225.044
146.250	205.000	204.995	292.500	205.000	204.821
150.000	185.000	185.008	300.000	185.000	181.140
153.750	205.000	204.982	307.500	205.000	264.847
157.500	225.000	225.019	315.000	225.000	21018.670
161.250	205.000	204.931			
165.000	185.000	185.159			
168.750	205.000	204.778			
172.500	225.000	225.506			
176.250	205.000	203.995			
180.000	185.000	187.097			
183.750	205.000	203.546			
187.500	225.000	190.742			
191.250	205.000	864.193			
195.000	185.000	-13844.410			

付表-6.1 図-6.7 のデータ

振幅減衰率

観測点までの距離(m) 水頭拡散率 (cm ² /sec)	2	4	6	8	10
1.00E+00	0.0013362	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.00E+01	0.0067672	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.00E+02	0.0504091	0.0090651	0.0018151	0.0005388	0.0000000
1.00E+03	0.1525759	0.0656723	0.0297766	0.0148887	0.0079546
1.00E+04	0.2009602	0.1078126	0.0651330	0.0431591	0.0316304
1.00E+05	0.2350727	0.1434623	0.1007703	0.0793800	0.0659734
1.00E+06	0.2538533	0.1646193	0.1214939	0.0991503	0.0853026
1.00E+07	0.2572782	0.1670703	0.1236799	0.1012519	0.0873405

観測点までの距離(m) 水頭拡散率 (cm ² /sec)	15	20	25	30	40
1.00E+00	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.00E+01	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.00E+02	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
1.00E+03	0.0019442	0.0006602	0.0002781	0.0000000	0.0000000
1.00E+04	0.0166266	0.0101221	0.0065200	0.0044460	0.0019935
1.00E+05	0.0471259	0.0377116	0.0315094	0.0265252	0.0193177
1.00E+06	0.0658338	0.0550275	0.0474188	0.0412937	0.0316544
1.00E+07	0.0678854	0.0568924	0.0489976	0.0427277	0.0329470

※表中の0(ゼロ)は振幅が捕らえることができなかったもの、もしくは明瞭でなかったもの

付表-6.2 図-6.8 のデータ

位相差		(sec)				
水頭拡散率 (cm ² /sec)	観測点まで の距離(m)	2	4	6	8	10
	1.00E+00		281.250	-	-	-
1.00E+01		225.000	-	-	-	-
1.00E+02		168.750	281.250	393.750	562.500	-
1.00E+03		56.250	112.500	168.750	225.000	281.250
1.00E+04		0.000	56.250	56.250	56.250	112.500
1.00E+05		0.000	0.000	56.250	56.250	56.250
1.00E+06		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.00E+07		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
水頭拡散率 (cm ² /sec)	観測点まで の距離(m)	15	20	25	30	40
	1.00E+00	-	-	-	-	-
1.00E+01		-	-	-	-	-
1.00E+02		-	-	-	-	-
1.00E+03		393.750	562.500	787.500	-	-
1.00E+04		168.750	225.000	225.000	281.250	393.750
1.00E+05		56.250	112.500	112.500	112.500	168.750
1.00E+06		0.000	56.250	56.250	56.250	56.250
1.00E+07		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

表中の-(ハイフン)は位相差(振幅)が捕らえることができなかったもの、もしくは明瞭でなかったもの

付表-6.3 図-6.15 のデータ

振幅減衰率					
k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4
r(m)					
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	0.079729	0.077727	0.069196	0.059071	0.054668
4	0.079048	0.072480	0.043805	0.013770	0.001855
6	0.000724	0.006091	0.019219	0.010442	0.001581
8	0.000402	0.003115	0.009804	0.005608	0.000869
10	0.000231	0.001695	0.005244	0.003188	0.000508
15	0.000086	0.000455	0.001265	0.000855	0.000163
20	-	0.000187	0.000406	0.000301	0.000081
25	-	-	0.000182	0.000150	-

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数, rは発信点から受信点までの距離

付表-6.4 図-6.16 のデータ

振幅減衰率					
k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4
r(m)					
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	0.079613	0.077648	0.069196	0.059270	0.054748
4	0.079081	0.072531	0.043805	0.013909	0.001856
6	0.000795	0.006085	0.019219	0.010549	0.001593
8	0.000438	0.003110	0.009804	0.005664	0.000875
10	0.000269	0.001689	0.005244	0.003236	0.000516
15	#VALUE!	0.000455	0.001265	0.000876	0.000173
20	-	0.000189	0.000406	0.000309	0.000095
25	-	-	0.000182	0.000156	-

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数, rは発信点から受信点までの距離

付表-6.5 図-6.17 のデータ

振幅減衰率

r(m) \ k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	0.080005	0.077724	0.069196	0.059590	0.055072
4	0.079398	0.072504	0.043805	0.015517	0.002787
6	0.001376	0.006242	0.019219	0.012621	0.002596
8	0.001224	0.003438	0.009804	0.007131	0.001584
10	0.000992	0.002088	0.005244	0.004161	0.001000
15	0.000408	0.000634	0.001265	0.001115	0.000333
20	-	0.000245	0.000406	0.000377	0.000151
25	-	-	0.000182	0.000175	-

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数, rは発信点から受信点までの距離

付表-6.6 図-6.18 のデータ

振幅減衰率

r(m) \ k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	0.073743	0.073052	0.069196	0.062321	0.056009
4	0.071930	0.066834	0.043805	0.020125	0.004701
6	0.007014	0.009530	0.019219	0.017555	0.004527
8	0.006118	0.006907	0.009804	0.009214	0.002740
10	0.003544	0.003905	0.005244	0.005013	0.001727
15	0.000968	0.001028	0.001265	0.001246	0.000544
20	-	0.000351	0.000406	0.000406	0.000228
25	-	-	0.000182	0.000185	-

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数, rは発信点から受信点までの距離

付表-6.7 図-6.19 のデータ

(a) 不均質部に対して垂直方向

振幅減衰率						
$r(m)$ \ $k_2(cm/sec)$	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4	
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	
2	0.093389	0.093782	0.094219	0.094092	0.093250	
6	0.013621	0.013633	0.012623	0.013320	0.012739	
10	0.004753	0.004766	0.004794	0.004785	0.004540	
15	0.001266	0.001241	0.001242	0.001235	0.001124	
20	-	0.000384	0.000381	0.000370	0.000313	

※ $k_1=1.0e-06(cm/sec)$, k_2 はグラフの宇不均質部分の透水係数, r は発信点から受信点までの距離

(b) 不均質部に対して平行

振幅減衰率						
$r(m)$ \ $k_2(cm/sec)$	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4	
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	
2	0.074460	0.074303	0.072767	0.069926	0.068122	
6	0.022088	0.021705	0.019479	0.017401	0.015909	
10	0.005977	0.005656	0.004383	0.003760	0.002559	
15	0.001451	0.001322	0.001104	0.001044	0.000586	
20	-	0.000503	0.000439	0.000467	0.000247	

※ $k_1=1.0e-06(cm/sec)$, k_2 はグラフの宇不均質部分の透水係数, r は発信点から受信点までの距離

付表-6.8 図-6.20 のデータ

(a) 不均質部に対して垂直方向

振幅減衰率						
$r(m)$ \ $k_2(cm/sec)$	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4	
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	
2	0.093360	0.093791	0.094219	0.094100	0.093343	
6	0.013571	0.013619	0.012623	0.013398	0.012787	
10	0.004646	0.004752	0.004794	0.004819	0.004568	
15	0.001224	0.001235	0.001242	0.001252	0.001142	
20	-	0.000380	0.000381	0.000380	0.000325	

※ $k_1=1.0e-06(cm/sec)$, k_2 はグラフの宇不均質部分の透水係数, r は発信点から受信点までの距離

(b) 不均質部に対して平行

振幅減衰率						
$r(m)$ \ $k_2(cm/sec)$	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4	
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	
2	0.074408	0.074269	0.072767	0.070029	0.068230	
6	0.022051	0.021704	0.019479	0.017475	0.015906	
10	0.005924	0.005637	0.004383	0.003794	0.002567	
15	0.001414	0.001318	0.001104	0.001076	0.000598	
20	-	0.000500	0.000439	0.000485	0.000267	

※ $k_1=1.0e-06(cm/sec)$, k_2 はグラフの宇不均質部分の透水係数, r は発信点から受信点までの距離

付表-6.9 図-6.21 のデータ

(a) 不均質部に対して垂直方向

振幅減衰率

r(m) \ k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	0.093927	0.094153	0.094219	0.093854	0.094057
6	0.013714	0.013690	0.012623	0.013286	0.013413
10	0.004737	0.004801	0.004794	0.004810	0.004824
15	0.001245	0.001249	0.001242	0.001228	0.001260
20	-	0.000382	0.000381	0.000363	0.000384

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数, rは発信点から受信点までの距離

(a) 不均質部に対して垂直方向

振幅減衰率

r(m) \ k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	0.074773	0.074649	0.072767	0.068574	0.070081
6	0.022188	0.021686	0.019479	0.016260	0.017637
10	0.005806	0.005507	0.004383	0.002935	0.004262
15	0.001343	0.001255	0.001104	0.000780	0.001279
20	-	0.000471	0.000439	0.000415	0.000580

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数, rは発信点から受信点までの距離

付表-6.10 図-6.22 のデータ

(a) 不均質部に対して垂直方向

振幅減衰率

r(m) \ k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	0.094282	0.094288	0.094219	0.094272	0.094094
6	0.013561	0.013592	0.012623	0.013562	0.013355
10	0.004796	0.004794	0.004794	0.004880	0.004848
15	0.001246	0.001246	0.001242	0.001269	0.001261
20	-	0.000381	0.000381	0.000393	0.000392

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数, rは発信点から受信点までの距離

(a) 不均質部に対して垂直方向

振幅減衰率

r(m) \ k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	0.073919	0.073764	0.072767	0.071082	0.069373
6	0.020048	0.019948	0.019479	0.018665	0.017497
10	0.004761	0.004747	0.004383	0.004382	0.003831
15	0.001122	0.001120	0.001104	0.001061	0.000959
20	-	0.000442	0.000439	0.000430	0.000390

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数, rは発信点から受信点までの距離

付表-6.11 図-6.31のデータ

振幅減衰率		発信点よりx=4m地点				
z(m) \ k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4	
0	0.043872	0.044093	0.043801	0.042468	0.041810	
2.5	0.033632	0.033577	0.031335	0.027261	0.025407	
5	0.031887	0.029681	0.017007	0.006317	0.000891	
7.5	0.000315	0.002430	0.008420	0.004752	0.000799	
10	0.000178	0.001232	0.004252	0.002621	0.000416	
12.5	0.000114	0.000657	0.002147	0.001370	0.000218	

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの不均質部分の透水係数

付表-6.12 図-6.32のデータ

振幅減衰率		発信点よりx=10m地点				
z(m) \ k2(cm/sec)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4	
0	0.005680	0.005659	0.005241	0.004547	0.003923	
2.5	0.005858	0.005695	0.004831	0.003726	0.002566	
5	0.005724	0.005226	0.003779	0.002356	0.000436	
7.5	0.000133	0.000806	0.002634	0.002226	0.000424	
10	0.000098	0.000536	0.001665	0.001352	0.000250	
12.5	0.000061	0.000338	0.001031	0.000801	0.000146	

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの不均質部分の透水係数

付表-6.13 図-6.33 のデータ

振幅減衰率		発信点よりx=4m地点				
k2(cm/sec) z(m)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4	
0	0.044286	0.044230	0.043801	0.042752	0.042132	
2.5	0.032430	0.032304	0.031335	0.028582	0.025950	
5	0.028486	0.026752	0.018630	0.009589	0.002327	
7.5	0.003573	0.004485	0.008420	0.008506	0.002301	
10	0.002824	0.002781	0.004252	0.004228	0.001344	
12.5	0.001528	0.001633	0.002147	0.002112	0.000462	

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数

付表-6.14 図-6.34 のデータ

振幅減衰率		発信点よりx=10m地点				
k2(cm/sec) z(m)	1.0e-8	1.0e-7	1.0e-6 (均質)	1.0e-5	1.0e-4	
0	0.005445	0.005411	0.005241	0.004958	0.004287	
2.5	0.005178	0.005114	0.004831	0.004528	0.003129	
5	0.004592	0.004413	0.003779	0.003677	0.001418	
7.5	0.001431	0.001642	0.002508	0.003540	0.001408	
10	0.001225	0.001307	0.001665	0.002041	0.000855	
12.5	0.000791	0.000837	0.001031	0.001160	0.000517	

※k1=1.0e-06(cm/sec), k2はグラフの宇不均質部分の透水係数